Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

ENSINO DE GEOMETRIA E O ENEM: UMA ABORDAGEM A PARTIR DAS IDEIAS DE PAULO FREIRE

Risoleta Garcia Custódio Ferreira

Juazeiro do Norte – CE
2022

Risoleta Garcia Custódio Ferreira

ENSINO DE GEOMETRIA E O ENEM: UMA ABORDAGEM A PARTIR DAS IDEIAS DE PAULO FREIRE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri - URCA, como requisito parcial para obtenção título de Mestre. Área de concentração: Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar.

Juazeiro do Norte – CE
2022

Catalogação na fonte
Cícero Antônio Gomes Silva – CRB-3 n° /1385

F383e

Ferreira, Risoleta Garcia Custódio.

Ensino de Geometria e o ENEM: uma abordagem a partir das ideias de Paulo Freire./ Risoleta Garcia Custódio Ferreira – Juazeiro do Norte-Ce, 2022,

175 f.: il.;30cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Profº.Dr. Alexsandro Coelho Alencar

1.Educação matemática 2.Ensino – aprendizagem 3.Diálogo I. Título

CDD: 510

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Autora: FERREIRA, Risoleta Garcia Custódio.
Título: Ensino de Geometria e o ENEM: uma abordagem a partir das ideias de Paulo Freire.
Orientador: Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar.
Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática da URCA – Juazeiro do Norte - CE, e aprovada pela Banca Examinadora.
Data: 10/05/2022.

Orientador (a): ________________________________

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar - Orientador
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Documento assinado digitalmente
FLAVIO FRANCA CRUZ
Data: 18/08/2022 17:01:52-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Prof. Dr. Flávio França Cruz - Membro
Universidade Regional do Cariri (URCA)

____
Prof. Dr. Marcelo Bezerra de Morais - Membro
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN)

Aos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

Agradeço de forma especial a Deus, pelo dom da vida, pela saúde que me foi concedida e pelos maravilhosos anjos que colocaste em meu caminho, principalmente nos momentos difíceis que cheguei a pensar que não iria conseguir concluir esta pesquisa.

Agradeço a Élida Maria, pela força nas horas de desânimo e por melhorar a forma de como expressar as minhas ideias.

À Nathalia Barros, pela amizade de sempre e pelo incentivo dado desde a seleção desse mestrado.

A Diego Azevedo, pela ajuda com a pesquisa dos livros e a contribuição na descrição do atual cenário da sociedade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar, pelo acompanhamento, orientações, paciência e acolhimento.

À Karla Jaqueline, pela ajuda com algumas regras da ABNT e demais ideias compartilhadas.

A Deigivan da Silva, pelo empenho, dedicação e ajuda nos momentos que precisei aprender a usar o LaTex.

Aos meus professores e colegas de turma que me ajudaram a chegar nessa etapa através das incansáveis horas extras de estudos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A minha avó Josefa que sempre me incentivou a estudar e aprender, e sempre me dizia quando eu era criança: "aprenda para não se criar abestada."

E para não correr o risco de esquecer alguém, agradeço a todos e todas que de alguma maneira contribuíram para que eu pudesse concluir o PROFMAT.

Educar é impregnar de sentido o que fazemos a cada instante.
Paulo Freire

Resumo

Por diversos fatores, muitos estudantes terminam a educação básica sem o conhecimento necessário na área de geometria. Tendo em vista essa realidade e evidenciando a importância desse conhecimento para o desenvolvimento das potencialidades humanas, o presente estudo teve como objetivo elaborar uma ferramenta que auxilie os docentes no ensino de geometria a partir da pedagogia de Paulo Freire aliada às questões do ENEM como base para a construção de oficinas. Para tanto, realizamos uma pesquisa de caráter qualitativo através da metodologia do tipo intervenção pedagógica na qual formulamos oficinas denominadas “Revisão para o ENEM”, desenvolvidas na Escola Amália Xavier, no município cearense de Juazeiro do Norte, em formato quinzenal, dentro do sistema remoto, com aulas pelo Google Meet e tendo como suporte o Whatsapp, com 23 alunos das turmas de terceiro ano do Ensino Médio. Durante a pesquisa, observamos que a área de geometria é pouco explorada no Ensino Fundamental e, em consequência, os alunos chegam ao Ensino Médio sem uma base adequada para o professor poder dar continuidade a esses conteúdos. Logo, o desenvolvimento de uma didática apropriada, baseada nas ideias freireanas juntamente com questões contextualizadas que mostrem a aplicabilidade da matemática no cotidiano, pode contribuir para minimizar as dificuldades do educando na aprendizagem dos conhecimentos geométricos, já que, apesar do cenário em que a sociedade estava inserida no período que as oficinas foram aplicadas, seus resultados foram considerados positivos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino-aprendizagem. Diálogo.

Abstract

For several reasons, many students finish basic education without the necessary knowledge in the area of geometry. In view of this reality and highlighting the importance of this knowledge for the development of human potential, the present study aims to develop a tool that helps teachers in the teaching of geometry from Paulo Freire's pedagogy allied to ENEM issues as a basis for the construction of workshops. To do so, we carried out a qualitative research through the methodology of action research in which we formulated workshops called "Review for ENEM"developed at Escola Amália Xavier, in the municipality of Juazeiro do Norte, Ceará, in a fortnightly format, within the remote system, with classes through Google Meet and supported by Whatsapp, with 23 students from the third year of high school classes. With the research, we observed that the area of geometry is little explored in elementary school and, as a result, students arrive at high school without an adequate basis for the teacher to be able to continue these contents, but the development of an appropriate didactic, based on in Freire's ideas along with contextualized questions that show the applicability of mathematics in everyday life, can contribute to minimize the difficulties of the student in learning geometric knowledge, since, despite the scenario in which society was inserted in the period that the workshops were applied, their results were considered positive.

Keywords: Mathematics Education. Teaching-learning. Dialogue.

Lista de Figuras

2.1 GRÁFICO 1 – HISTÓRICO DE INSCRIÇÕES NO ENEM DE 1998 A 2020 40

3.1 Imagem do GeoGebra 61
3.2 Janela do GeoGebra 61
3.3 Janelas de Visualização 62

4.1 Gráfico - Em relação à quantidade de questões acertadas 102
4.2 Gráfico - Em relação à quantidade de alunos que acertaram a questão na 1º e 2º avaliação 102

Lista de Tabelas

2.1 MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM 37

Sumário

Agradecimentos **v**

Epígrafe vi

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Lista de Figuras **ix**

Lista de Tabelas **x**

Introdução **1**

1 A Pedagogia Freireana e a Educação Matemática **4**

1.1 Alguns Conceitos Básicos da Pedagogia de Paulo Freire 4

1.2 Algumas contribuições de Paulo Freire nas pesquisas em Educação Matemática 14

2 Avaliações Externas da Educação Básica e a Evolução do ENEM **23**

2.1 Avaliações Externas no Brasil 23

2.2 Exame Nacional do Ensino Médio- ENEM 31

2.3 Perfil das Questões de Geometria na Prova do ENEM 43

3 Metodologia e Procedimentos **54**

3.1 Falando um Pouco Sobre o GeoGebra 60

4 Resultados e Discussões **63**

5 Considerações Finais **103**

Referências Bibliográficas **105**

A Oficinas – Execução Prática **113**

Introdução

Os conhecimentos geométricos existem há vários séculos e vêm sendo utilizados desde as civilizações antigas. As construções monumentais feitas pelos egípcios, astecas, maias e incas, bem como o desenvolvimento de técnicas agrícolas e de seu armazenamento realizados pela Mesopotâmia são exemplos de que a geometria é uma das áreas mais antigas exploradas pelo homem. E se olharmos ao nosso redor, constantemente nos deparamos com ela, nas formas das casas ou prédios, nos formatos dos objetos e embalagens, nos desenhos e obras de artes, enfim, é fácil identificar a sua presença e frequentemente a utilizamos, ainda que seja de maneira intuitiva.

Com o processo de urbanização, os saberes geométricos tornaram-se cada vez mais efetivos e importantes para a vida em sociedade, ou seja, ter domínio de conhecimentos básicos dessa área matemática significa dispor de ferramentas para uma atuação integral do indivíduo na vida moderna. Segundo Passos (2000, p.49), "a geometria pode ser considerada como uma ferramenta muito importante para a descrição e interrelação do homem com o espaço em que vive, já que pode ser considerada como a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade".

Muitas profissões utilizam a geometria como base para realizações de seus trabalhos atualmente, seja no campo das artes ou das ciências, empregando em seus projetos aspectos como medição, organização, comparação para criar ou melhorar sua atividade profissional. Sua presença e importância vai desde atuações profissionais no campo da engenharia, arquitetura, paisagismo, agronomia a setores voltados para espaços artísticos, como coreografia e produção de animações, ressaltando o fato da geometria encontrar-se sempre presente no nosso cotidiano e nas várias atividades que elaboramos.

Dessa forma, podemos notar que estudar a geometria significa compreender o mundo ao nosso redor, saber agir nele e desenvolver com maior habilidade nossos projetos. No entanto, nas últimas décadas, o ensino desse saber tem enfrentado alguns obstáculos que dificultaram o aprendizado dos alunos de forma satisfatória. Talvez por ser um conteúdo pouco trabalhado no ensino infantil e fundamental, ou por se ter pouco tempo para ministrá-lo, diante do universo de detalhes de cada tema, ou mesmo por ser um assunto presente no nosso cotidiano e para alguns pareça irrelevante explorá-lo mais profundamente, principalmente nas séries iniciais, a questão é que, qualquer que seja o motivo, muitos alunos entram no Ensino Médio sem o conhecimento geométrico necessário. Fato reforçado nas palavras de Dziadzio (2016, p.10), "(...) muitos alunos ao concluírem o Ensino Fundamental e ao iniciar o Ensino Médio, chegam sem o embasamento necessário à continuidade do ensino da Geometria".

Diante do que foi exposto, podemos perceber que a geometria é um ramo da matemática bastante importante e, ao verificar que alguns discentes apresentavam dificuldades, nas noções básicas dessa área, resolvemos pesquisar formas de minimizar o problema, de como introduzir esse conhecimento aos adolescentes atraindo sua atenção, sem fazê-los se sentir crianças.

Assim, acreditamos que elaborar uma ferramenta que auxilie o professor no ensino de geometria pode contribuir para minimizar os efeitos de tais déficits. Nesse sentido, lembrando a pedagogia de Paulo Freire para alfabetizar adultos, decidimos aprofundar nossos estudos em seu método de ensino, buscando adaptá-lo para o ensino da geometria, inserindo alguns recursos tecnológicos, que, embora não sejam novos, ainda são poucos utilizados nas salas de aula.

Utilizamos nesse processo as questões do ENEM que, por apresentar um contexto, trazem uma ligação mais forte da teoria com a realidade, mostrando ao indivíduo que ele pode usar os conhecimentos matemáticos para resolver problemas do seu cotidiano. Ao proporcionar o estudo dessa avaliação, promovemos uma maior seriedade no desenvolvimento de nossa metodologia, ajudando os educandos e a comunidade escolar a perceberem sua relevância.

Com isso, após pesquisarmos as ideias de Paulo Freire e catalogarmos questões de geometria do ENEM, construímos oficinas que aplicam sua pedagogia aliada a essas questões, pois, devido à problemática citada, torna-se cada vez mais necessário o professor buscar novas maneiras de atenuar tal carência e tornar o aprendizado mais significativo.

Desta forma, procurar alternativas que atraiam a atenção dos discentes e, ao mesmo tempo, os conscientizem de que eles também são agentes da sua aprendizagem que é fundamental para formar cidadãos mais autônomos e capazes de resolver problemas sociais, trazendo melhorias para sua comunidade e para sociedade como um todo. Sendo assim, utilizar um instrumento educacional que estimule os estudantes a serem autores de sua aprendizagem, através do diálogo, é bastante viável.

Com esse intuito, desenvolvemos este estudo de caráter qualitativo, através da pesquisa do tipo intervenção pedagógica em que produzimos oficinas de resolução de problemas para serem disponibilizadas, como produto educacional a essa dissertação, em anexo, no formato de apostila, nas quais foram utilizadas questões de geometria do ENEM cuja aplicação foi inspirada e baseada na metodologia de Paulo Freire.

Desta forma, a estruturação do nosso trabalho apresenta-se da seguinte maneira:

O primeiro capítulo, denominado “A Pedagogia Freireana e a Educação Matemática”, foi dividido em dois tópicos. O primeiro traz algumas das ideias de Paulo Freire mostrando como esse educador valorizava a educação e o diferencial de sua pedagogia, destacando a importância dada por ele ao diálogo e à linguagem popular como meios de facilitar o ensino e a aprendizagem. No segundo tópico, apresentamos como sua pedagogia influenciou diversos educadores e pesquisadores da área de Educação Matemática, resultando em vários trabalhos desenvolvidos, baseados nos seus ensinamentos.

No segundo capítulo, falamos sobre as avaliações externas de forma geral e fomos discorrendo até comentarmos, de forma mais específica, sobre o ENEM, em que apresentamos as principais mudanças que o exame sofreu e como sua relevância vem crescendo, principalmente após alguns programas governamentais que incentivam e colaboram para o ingresso do educando no ensino superior. Finalizamos o capítulo com uma breve descrição do perfil de algumas questões de geometria trazidas pelo ENEM, em exames anteriores, e mostramos algumas relações e semelhanças entre a pedagogia freireana e o ENEM.

O terceiro capítulo relata o problema enfrentado pelos professores do Ensino Médio e apresenta as adaptações feitas na técnica de Paulo Freire criada para alfabetizar adultos. Essas adaptações foram feitas para a confecção das oficinas que, em sua aplicação, utilizou além dessas ideias, questões do ENEM e o software GeoGebra. Além de descrever um pouco sobre a dinâmica das oficinas, como a estrutura e a sequência didática utilizada.

No capítulo quatro, relatamos a experiência vivenciada e os desafios enfrentados durante a aplicação das oficinas que ocorreu dentro do sistema de ensino remoto, com os alunos do 3º ano do Ensino Médio da escola da rede estadual Amália Xavier no município de Juazeiro do Norte, Estado do Ceará. Para isso, descrevemos o cenário social do momento, bem como conteúdos e problemas abordados, além de um comentário, destacando algumas das partes relevantes de cada oficina, em seguida, expusemos as análises dos resultados.

Por fim, no último capítulo destacamos as considerações finais. Assim, sem mais a acrescentar, esperamos que apreciem a leitura e que o trabalho desenvolvido seja mais um subsídio e sirva de inspiração para vários educadores.

Capítulo 1

A Pedagogia Freireana e a Educação Matemática

1.1 Alguns Conceitos Básicos da Pedagogia de Paulo Freire

Paulo Freire é reconhecido mundialmente por suas concepções educacionais, sabedoria, humildade, visão de mundo, apresenta reconhecimento ao mérito por sua obra que pode ser entremeada em inúmeros contextos e por suas contribuições para a educação e alfabetização. O educador pernambucano modificou a forma de pensar e agir, na pedagogia, nos fazendo repensar sobre a formação de uma escola voltada à democratização e sobre o relacionamento entre professor e aluno, visto que, ambos, estão em uma troca horizontal de conhecimentos e experiências em prol do aprendizado. Possuía uma consciência à frente do seu tempo, almejava dar voz aos menos favorecidos, ou classe oprimida, por meio da alfabetização e conscientização. A partir de influências ideológicas e vivenciais, Freire deixou aflorar conceitos e fundamentos que o fizeram ser o grande pedagogo do século XX, escreveu mais de 20 livros como autor e 13 em coautoria. Fundamentos como autonomia, dialogicidade, conscientização, inconclusão, ser de práxis, ser inacabado, ser de relações, ser histórico, fazem parte de seus livros publicados e divulgados mundialmente. A riqueza científica adquirida por ele veio de seu empenho e desejo contínuo em querer aprender mais, em ser um pensador crítico, conhecendo a sua realidade contextualizada e denunciando as desigualdades sociais. Suas teorias são provenientes do contexto político e histórico que o Brasil vivia na época, em especial o nordeste brasileiro, região em que ele viveu até meados dos anos 60. Como declínio do Golpe Militar e como resultado do exílio, Paulo Freire passou a *pensar o mundo*, do qual ele acreditava que fazíamos parte, no sentido de que esse *tomar parte* só existiria, se adquiríssemos uma conscientização de tudo que nos cerca.

Conhecido principalmente pelo método de alfabetização de adultos, desenvolveu um pensamento pedagógico político. Na tese de Paulo Freire, na qual ele fez um aperfeiçoamento de um relatório para o II Congresso Nacional de Educação de Jovens e Adultos, em 1958, chamado por Juscelino Kubitscheck, para explicar como estava sendo passada a educação. Freire observou que a maior parte dos relatórios enviados ao congresso, mencionavam sobre a falta de estrutura do ambiente escolar, iluminação insuficiente e que os adultos não aprendiam a ler porque eram pouco inteligentes, a maioria dos alunos chegava do trabalho cansada para estudar, havia pouco interesse dos alfabetizandos, os professores eram leigos e improvisavam suas aulas (FREIRE, 1998). Em resposta a esses relatórios, Paulo Freire manifesta que:

> A Educação de Jovens e Adultos deve fundamentar-se na consciência da realidade cotidiana. Não no conhecer letras, palavras ou frases..., o processo de alfabetização não pode se dar sobre, nem para o educando, ele tem que se dar com o educando. Há que se estimular nele a colaboração, a decisão, a participação e a responsabilidade social e política. [. . .] Não, o aluno deve conhecer-se enquanto sujeito e conhecer os problemas que o aflige no dia a dia. Portanto, o aluno deve programar em parte o que num período ele quer aprender. E aprender não se aprende. Não é uma educação bancária. Não se aprende tentando depositar numa cabeça vazia uma porção de conhecimento (FREIRE, 1998, p. 10).

Durante a década de 1960, pode-se considerar que a sociedade brasileira e latino-americana foi o grande laboratório em que o método Paulo Freire foi experimentado. Esse período, marcado por intensas mobilizações políticas, foi importante para a consolidação do seu pensamento (GADOTTI, 1996, p. 40). Paulo Freire em sua obra, Educação como Prática da Liberdade (1967), relata sobre a alfabetização de adultos e começa a demonstração de sua pedagogia. Com base na linguagem popular utilizada no cotidiano de seus alunos, desenvolveu um método de alfabetização, e deu início a este processo com adultos analfabetos na área rural dos estados nordestinos, que formavam um grande número de excluídos.

Para Freire não existe um saber pronto, para ele o saber é construído de acordo com a necessidade e o entendimento prévio do aluno, ou seja, o conhecimento adquirido, informações guardadas de momentos vividos. Destacava a importância de aprofundar-se em uma educação apta a reconhecer e utilizar a cultura do educando e de se tomar decisões baseadas nela, naquela realidade, pois só assim ela constituiria significado para o sujeito que vai ser alfabetizado.

O método de alfabetização era estruturado em etapas. Inicialmente, aluno e professor deviam buscar investigar, no vocábulo cotidiano do aluno, palavras e temas centrais importantes, que podiam prender a atenção do discente. Esse processo de busca e valorização da linguagem popular, teria que ser realizado antes de se dar início o processo de alfabetização, para se ter conhecimento sobre como abordar o conteúdo a ser praticado e utilizar as palavras geradoras, assim definidas por Freire. Como exemplos de palavras geradoras utilizadas temos: feira, favela, tijolo, arado, enxada, essas palavras eram acompanhadas de uma imagem, e, assim, os alunos as associavam a coisas que eram simples e comuns para eles.

Sobre isso, Freire destaca:

> Estas palavras, de uso comum na linguagem do povo e carregadas de experiência vivida, são decisivas, pois a partir delas o alfabetizando irá descobrir as sílabas, as letras e as dificuldades silábicas específicas de seu idioma, além de que servirão de material inicial para descoberta de novas palavras (FREIRE, 1967, p.4).

Em seguida, a tematização era feita buscando o significado social, inserindo assim entendimento do universo vivido pelos alunos. Assim, os educadores faziam a associação das palavras usadas no dia a dia por todos. E posteriormente, a problematização, na qual professor e aluno podiam inserir um ponto de vista crítico, analisando, dialogando e tentando transformar o contexto vivido. Depois a elaboração de fichas indicadoras com as famílias fonéticas. Freire destaca:

> São situações locais que abrem perspectivas, porém, para a análise de problemas nacionais e regionais. Nelas vão se colocando os vocábulos geradores, na gradação já referida, de suas dificuldades fonéticas. Uma palavra geradora tanto pode englobar a situação toda, quanto pode referir-se a um dos elementos da situação (FREIRE, 1967, p. 114).

Paulo Freire mostrou a falha do ensino bancário, que tenta depositar no aluno uma quantidade de conhecimentos; e a importância do conhecimento adquirido pelo aluno em seu contexto. No seu ponto de vista, a leitura e a escrita não são suficientes para ser um cidadão, para tal, seria necessário intervir e reconhecer seu papel no mundo, fazer parte das decisões de sua comunidade, de sua cidade e de seu país, agir como peça fundamental da mudança (FREIRE, 1998). Por isso, Freire trabalhava o ensino com base nas palavras que faziam parte do cotidiano dos trabalhadores/alunos, em fase de alfabetização, para ensiná-los. Assim, as concepções educacionais de Paulo Freire são conceituadas por defender a educação não bancária, dialógica e conscientizadora, as quais influenciam gerações de educadores, sobre a valorização dos conhecimentos e da participação dos alunos, ou seja, o ensino pensado a partir do contexto sociocultural e econômico, usando professor e aluno como sujeitos do processo de aprendizagem, e a problematização estimulando o *saber mais* dentro da educação libertadora. Nesse sentido, Freire indaga: “Como aprender a discutir e a debater com uma educação que impõe?” (FREIRE, 1967, p. 97).

No livro Educação como Prática para a Liberdade (1967), Freire esclarece:

> Ditamos ideias. Não trocamos ideias. Discursamos aulas. Não debatemos ou discutimos temas. Trabalhamos *sobre* o educando. Não trabalhamos com ele. Impomos-lhe uma ordem a que ele não adere, mas se acomoda. Não lhe propiciamos meios para o pensar autêntico, porque recebendo as fórmulas que lhe damos, simplesmente as guarda. Não as incorpora porque a incorporação é o resultado de busca de algo que exige, de quem o tenta, esforço de recriação e de procura. Exige reinvenção (FREIRE, 1967, p.97).

Dessa forma, Freire propagava a ideia de uma educação que levasse as pessoas a uma mudança de atitude diante dos problemas de seu espaço e realidade. Para isso, temos que nos livrar da "perigosa e enfadonha repetição de trechos e de afirmações desconectadas das suas condições mesmas de vida" (FREIRE, 1967, p.93), que é a educação bancária (tradicional).

A educação bancária, descrita por Freire, é aquela realizada pela escola sem preocupação com as dificuldades e o individualismo dos educandos, cujo educador é o possuidor do saber, apenas o fornece através de *narrativa*, e o educando é apenas um receptor, que recebe sem compreender, não existe diálogo, o professor atua como sujeito e tem a função de *encher* os alunos de conteúdos, como menciona Freire (1987):

> Em lugar de comunicar-se, o educador faz "comunicados" e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis aí a concepção "bancária" da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los. Margem para serem colecionadores ou fichadores das coisas que arquivam. No fundo, porém, os grandes arquivados são os homens, nesta (na melhor das hipóteses) equivocada concepção "bancária" da educação. Arquivados, porque, fora da busca, fora da práxis, os homens não podem ser. Educador e educandos se arquivam na medida em que, nesta destorcida visão de educação, não há criatividade, não há transformação, não há saber. Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros (p. 33).

Para Freire "ensinar não é transferir conhecimento" (1996, p.12), a linguagem e os termos, utilizados em sala de aula, devem ser claros, permitir uma compreensão da realidade diária e vivida dos educandos, pois, quando nos dispersamos dessa linguagem, podemos levá-los a um distanciamento do aprender, à alienação ou à indiferença. Tem que haver comprometimento, professor e aluno devem se envolver no contexto da discussão dialogada. Ao debater sobre o modelo de ensino transmissão-recepção intitulada por Paulo Freire, como sendo a educação bancária, Lins (2011) afirma que esse tipo de ensino cria uma distância intransponível entre professor e aluno, que se fortalece pelo processo de transmissão de informações. Analisado do ponto de vista freireano, passa a ser classificado como uma ação opressora, a qual necessita ser repensada e melhor estruturada na concepção de professores e num processo operativo de ensino-aprendizagem.

A partir desse pensamento, Freire afirma:

> Não é de estranhar, pois, que nessa visão "bancária" da educação, os homens sejam vistos como seres de adaptação, do ajustamento. Quanto mais se exercitem os educandos no arquivamento dos depósitos que lhes são feitos, tanto menos desenvolverão em si a consciência crítica de que resultaria a sua inserção no mundo, como transformadores dele. Como sujeitos. Quanto mais se lhes imponha passividade, tanto mais ingenuamente; em lugar de transformar, tendem a adaptar-se ao mundo, à realidade parcializada nos depósitos recebidos (FREIRE, 1987, p. 34).

Em Pedagogia da Autonomia, Freire (1996) cita que é preciso ao professor obter uma aprendizagem do ouvir, perceber, como uma atitude de respeito aos "saberes de experiência" (FREIRE, 1996, p.12) dos educandos e a superação do autoritarismo do discurso, presente na educação bancária. É através da relação entre professor-aluno, em sala de aula, que se determina o processo ensino-aprendizagem, pois é por meio deste que se pode conhecer o pensamento do aluno, a absorção de conhecimento, suas dúvidas e preocupações, e como subsidiá-los, então, com o diálogo, facilitar o entendimento e assim a aprendizagem.

Apresentada essa importância, Lorenzato corrobora:

> Ao professor compete, primeiramente, dispensar constante atenção para constatar o erro, lembrando que acerto pode camuflar erro. É importante diagnosticar como o erro se deu, sem o que será impossível encontrar a(s) causa(s) dele. Nessa fase, é fundamental ouvir o aluno, conversar com ele com o objetivo de desvelar seu pensamento e seus motivos. Feita a diagnose, convém propor ao aluno uma ou mais situações com as quais ele possa perceber a incoerência de suas respostas ou posições. Auxiliando o aluno a descobrir novas alternativas, podemos esperar que ele reformule seus conceitos, corrija o erro e, assim, evolua (LORENZATO, 2008, p. 50).

Ao se praticar a educação bancária, não tem como o aluno desenvolver a transmissão de saberes concretos, a aprendizagem fica comprometida, pois esse tipo de educação possibilita a decoração por parte dos educandos. Freire reforça esta afirmação expressando que:

> Desta forma, em nome da preservação da cultura e do conhecimento, não há conhecimento, nem cultura verdadeiros. Não pode haver conhecimento pois os educando não são chamados a conhecer, mas a memorizar o conteúdo narrado pelo educador. Não realizam nenhum ato cognoscitivo, uma vez que o objeto que deveria ser posto como incidência do ato cognoscente é posse do educador e não mediatizador da reflexão crítica de ambos. (FREIRE, 1987, p. 40)

Na pedagogia freireana, a escola não se limita a um espaço físico em que os educandos apenas recebem instruções. A escola tem que ser olhada e vivida como o lugar para o aprendizado, pois é nela onde os alunos iniciam a vivência como cidadãos, é no convívio e através do diálogo com colegas, funcionários e professores, que ele experiencia, na prática, o respeito ao próximo em suas distinções de gênero, etnia, classe, entre outras. O professor deve estimular a participação dos alunos, mesmo quando o assunto trabalhado não envolve o contexto, além de criar momentos de discussão, de pergunta e de participação, levando-os à curiosidade crítica dentro de uma pedagogia dialógica, como mencionado por Freire (1991):

> Acho que o papel do educador conscientemente progressista é testemunhar a seus alunos, constantemente, sua competência, amorosidade, sua clareza política, a coerência entre o que diz e o que faz, sua tolerância, isto é, sua capacidade de conviver com os diferentes para lutar com os antagônicos. É estimular a dúvida, a crítica, a curiosidade, a pergunta, o gosto do risco, a aventura de criar (FREIRE, 1991, p. 54).

A educação para Freire ia além do conhecimento, ele analisava a educação como uma prática de amor, diálogo, envolvimento. "Um ato de amor, por isso, um ato de coragem. Não pode temer o debate. A análise da realidade. Não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa" (FREIRE, 1967, p.97). Consequentemente, é imprescindível educar como um ato cognitivo e gnosiológico, não fugindo à seriedade e à capacidade profissional do professor e do amor ao ensinar, com isso educar é formar um cidadão ético e também político.

Para uma melhor compreensão a respeito do que é a educação, é preciso entender o homem como um ser em transformação, não sabemos tudo e sempre temos algo a aprender, fazemos parte da história, por isso se educa e está em contínuo processo de busca e superação, como declara Freire (1987). A educação, portanto, implica uma busca realizada por um sujeito que é o homem. O homem deve ser sujeito de sua própria educação. Não pode ser o objeto dela. "Por isso ninguém educa ninguém" (FREIRE, 1987, p.39).

> [...] enquanto a problematizadora parte exatamente do caráter histórico e da historicidade dos homens. Por isto mesmo é que os reconhece como seres que estão sendo, como seres inacabados, inconclusos, em e com uma realidade que, sendo histórica também, é igualmente inacabada. [...] Daí que seja a educação um que fazer permanente. Permanente, na razão da inconclusão dos homens e do devenir da realidade. [...] Desta maneira, a educação se re-faz constantemente na práxis. Para ser tem que estar sendo.[...] Esta busca do ser mais, porém, não pode realizar-se no isolamento, no individualismo, mas na comunhão, na solidariedade dos existires, daí que seja impossível dar-se nas relações antagônicas entre opressores e oprimidos (FREIRE, 1987, p. 42-43).

A pedagogia Freireana tem seu objetivo marcado pela persistência em mudar a educação, em criar uma nova forma de ensinar, uma educação em que seja habilitada a autonomia, principalmente das classes dominadas, oprimidas. Ele via como recurso para essa educação independente, o diálogo, o qual, na prática pedagógica, é o divisor entre a educação bancária e a educação libertadora.

Como afirma Freire (1987, p. 59):

> Numa visão libertadora, não mais bancária da educação, o seu conteúdo programático já não involucra finalidades a serem impostas ao povo, mas, pelo contrário, porque parte e nasce dele, em diálogo com os educadores, reflete seus anseios e esperanças. Daí a investigação da temática como ponto de partida do processo educativo, como ponto de partida de sua dialogicidade.

Então, um dos pontos fundamentais para se entender e se obter êxito no processo educacional de acordo com Freire, é a dialogicidade. Freire a trata como peça chave para compreender e proporcionar novas versões de mundo, seres conscientes, que conhecem a realidade social e refletem sobre ela, para então, conseguir transformá-la. Esta é a composição que confere importância ao diálogo para a construção de seres autônomos. Observemos a partir de Freire:

> O diálogo é o encontro entre os homens, mediatizados pelo mundo, para designá-lo. Se ao dizer suas palavras, ao chamar ao mundo, os homens o transformam, o diálogo impõe-se como o caminho pelo qual os homens encontram seu significado enquanto homens; o diálogo é, pois, uma necessidade existencial (FREIRE, 1979, p.42).

O diálogo é primordial para a metodologia educacional, é preciso de conhecimento e de saber se expressar, através da comunicação entre professor e aluno vão ocorrer trocas de saberes e será evidenciada a real necessidade de cada educando. "A educação é comunicação, é diálogo, na medida em que não é a transferência de saber, mas um encontro de sujeitos interlocutores que buscam a significação dos significados" (FREIRE, 1983, p.69).

No processo ensino-aprendizagem, o educador e o educando são objetos do conhecimento.

> Para que o ato de ensinar se constitua como tal, é preciso que o ato de aprender seja precedido do, ou concomitante ao, ato de apreender o conteúdo ou o objeto cognoscível, com que o educando se tonta produtor também do conhecimento que lhe foi ensinado. Só na medida em que o educando se torne sujeito cognoscente e se assuma como tal, tanto quanto sujeito cognoscente é também o professor, é possível ao educando tornar-se sujeito produtor da significação ou do conhecimento do objeto. É neste movimento dialético que ensinar e aprender vão se tornando conhecer e reconhecer. O educando vai conhecendo o ainda não conhecido e o educador reconhecendo, o antes sabido (FREIRE, 1997, p. 79).

Freire acreditava na dialogicidade, no atuar junto, como princípio para superar as relações assistencialistas, buscava dar voz aos trabalhadores/educandos, almejava a participação de todos, para que não fossem apenas objetos da ação de outros. Apresentava uma visão otimista, confiava que a educação podia ser melhorada, que sempre se podia fazer mais, achava que a educação crítica os levaria à mudança, visto que os alunos refletiriam e opinariam, mas para que isso ocorresse seria necessário fazer uso do discurso, da educação dialógica, e, assim, formar cidadãos sociais com consciência crítica, participativos e democráticos, capazes de melhorar o mundo, como resultado da educação escolar. Freire enfatiza:

> Falamos de discussão, e este é um ponto capital para o aprendizado, pois segundo esta pedagogia a palavra jamais pode ser vista como um "dado" (ou como uma doação do educador ao educando), mas é sempre, e essencialmente, um tema de debate para todos os participantes do círculo de cultura. As palavras não existem independentemente de sua significação real, de sua referência às situações (FREIRE, 1967, p. 5).

Logo, em sala de aula, devemos tentar colocar em prática o método de Freire. A partir do contexto diagnosticado, o professor deve desenvolver um tema gerador relacionando-o a acontecimentos sociais, que podem abranger a tecnologia, o meio ambiente, a política, entre outros. Com isso, o assunto abordado passa a fazer sentido para o aluno, a despertar sua curiosidade e atenção, observado que o mesmo excede a narração de assuntos isolados, e que venha a despertar a sua consciência social. E isso só é possível mediante o diálogo, a comunicação e a cooperação entre aluno e professor, através do enfoque problematizador. Em tal caso, é fundamental a criação de conexões entre diferentes saberes dentro da sala de aula. O diálogo proporcional é essencial para a busca da criticidade e transformação do homem, compreende o percurso que o faz buscar a liberdade, rejeitando a manipulação, passando a ser sujeito da sua própria evolução. Na concepção freireana, o diálogo passa a ser um ato de amor e coragem, pautado na discussão e no debate. Freire, ainda define: "O que é diálogo?"

> É uma relação horizontal de A com B. Nasce de uma matriz crítica e gera criticidade. Nutre-se do amor, da humildade, da esperança, da fé, da confiança. Por isso, só o diálogo comunica. E quando os dois pólos do diálogo se ligam assim, com amor, com esperança, com fé um no outro, se fazem críticos na busca de algo. Instala-se, então, uma relação de simpatia entre ambos. Só aí há comunicação (FREIRE, 1967, p. 107).

Neste sentido o professor torna-se mediador, incentivador da aprendizagem, influenciando na construção dos saberes do aluno e, também, na troca de conhecimentos, em que ambos aprendem e se desenvolvem juntos, conectados a uma relação dialógica. Paulo Freire considerava ser a educação para a libertação, a educação que considera o aluno como sujeito de sua prática educativa. Então, no método proposto por ele, a aula era estruturada a partir de ações participativas que levavam a liberdade de expressão e da crítica aos educandos. Mediante desse tipo de comunicação, entre professor e aluno, Freire particulariza:

> É através desse diálogo, não mais educador do educando do educador, mas educador-educando com educando-educador. Desta maneira, o educador já não é o que apenas educa, mas o que, enquanto educa, é educado, em diálogo com o educando que, ao ser educado, também educa. Ambos, assim, se tornam sujeitos do processo em que crescem juntos e em que "os argumentos de autoridade" já não valem. Em que, para ser-se, funcionalidade, autoridade, se necessita de estar sendo com as liberdades e não contra elas (FREIRE, 1987, p.39).

Freire acreditava que como professores imprimimos marcas nos educandos. Seja, como autoritário, competente, sério, incompetente, irresponsável, amoroso, entre outras. Dessa maneira, nossa *práxis* na relação com o aluno deve ser ética, responsável. Logo, ser professor, não é apenas uma profissão, é uma opção de proposta de educação e de sociedade. Sobre a relação professor-aluno, Freire nos explica:

> Não posso ser professor se não percebo cada vez melhor que, por não poder ser neutra, minha prática exige de mim uma definição. Uma tomada de posição. Decisão. Ruptura. Exige de mim que escolha entre isto e aquilo. Não posso ser professor a favor de quem quer que seja e a favor de não importa o quê. Não posso ser professor a favor simplesmente do Homem ou da Humanidade, frase de uma vaguidade demasiado contrastante com a concretude da prática educativa. Sou professor a favor da decência contra o despudor, a favor da liberdade contra o autoritarismo, da autoridade contra a licenciosidade, da democracia contra a ditadura de direita ou de esquerda. Sou professor a favor da luta constante contra qualquer forma de discriminação, contra a dominação econômica dos indivíduos ou das classes sociais. Sou professor contra a ordem capitalista vigente que inventou esta aberração: a miséria na fartura. Sou professor da esperança que me anima apesar de tudo. Sou professor contra o desengano que me consome e me imobiliza. Sou professor a favor da boniteza de minha própria prática, boniteza que dela some se não cuido do saber que devo ensinar, se não brigo por este saber, se não luto pelas condições materiais necessárias sem as quais meu corpo, descuidado, corre o risco de se amorfinar e de já não ser o testemunho que deve ser de lutador pertinaz, que cansa, mas não desiste. Boniteza que se esvai de minha prática se, cheio de mim mesmo, arrogante e desdenhoso dos alunos, não canso de me admirar (FREIRE, 1996, p.39-40).

A produção dialógica do conhecimento, como já citado, é um elemento decisivo do pensamento pedagógico de Paulo Freire, cujo ensino, também, está voltado ao desenvolvimento intelectual dos educandos e é resultado da construção histórica e social, realizada por cidadãos curiosos diante do mundo, da ação do conhecimento gerado, produzido, assimilado entre educador e educando, que dessa forma leva autonomia e independência, por meio do diálogo, como uma forma de transformação e humanização.

Freire nos mostra, que aprender vai além de armazenar saberes, o aprendizado faz parte de um movimento que abrange muitas outras capacidades e deveres.

> Por isto mesmo é que, no processo de aprendizagem, só aprende verdadeiramente aquele que se apropria do aprendido, transformando-o em apreendido, com o que pode, por isto mesmo, reinventá-lo; aquele que é capaz de aplicar o aprendido-apreendido a situações existenciais concretas. Pelo contrário, aquele que é "enchido" por outro de conteúdos cuja inteligência não percebe; de conteúdos que contradizem a forma própria de estar em seu mundo, sem que seja desafiado, não aprende. Para isto, é necessário que, na situação educativa, educador e educando assumam o papel de sujeitos cognoscentes, mediatizados pelo objeto cognoscível que buscam conhecer (FREIRE, 1983, p.16).

Perante a tudo que foi levantado, percebemos que a concepção pedagógica de Freire também está atrelada à liberdade, que deve ser trabalhada conjuntamente, e assim transformar pessoas e sociedade. Em Pedagogia do Oprimido (1987), Freire exprime que a educação em prol da liberdade é um fenômeno político que deve ocorrer para acordar os cidadãos de sua opressão e, com isso impulsionar a busca por modificações sociais.

Freire também via na educação, possibilidades práticas de suplantar a ingenuidade democrática. Com a conscientização, imprimir seres críticos e compromissados com a mudança social. Para Gadotti (1996), a conscientização e a mudança age como um tema gerador que está presente em toda a obra freireana. Freire define que "as relações entre a consciência e mundo são dialéticas" (1997, p. 26). Destaca que exercer a consciência é ter percepção sobre o aspecto dialético da educação, visto que:

> A conscientização implica, pois, que ultrapassemos a esfera espontânea de apreensão da realidade, para chegarmos a uma esfera crítica na qual a realidade se dá como objeto cognoscível e na qual o homem assume uma posição epistemológica. A conscientização é, neste sentido, um teste de realidade. Quanto mais conscientização, mais se "desvela" a realidade, mais se penetra na essência fenomênica do objeto, frente ao qual nos encontramos para analisá-lo. Por esta mesma razão, a conscientização não consiste em "estar frente à realidade" assumindo uma posição falsamente intelectual. A conscientização não pode existir fora da "práxis", ou melhor, sem o ato ação – reflexão. Esta unidade dialética constitui, de maneira permanente, o modo de ser ou de transformar o mundo que caracteriza os homens (FREIRE, 1979, p. 15).

Então, plantava a ideia e a preocupação com o coletivo, queria cidadãos participativos, que buscassem novas respostas, com visão crítica voltada para o desenvolvimento de uma nova sociedade. Freire era engajado, comprometido com a mudança político-pedagógica e que combatia a neutralidade, queria mudar a realidade e inserir o homem verdadeiramente em seu tempo. Esse engajamento, em manifestar e criar *práxis* pedagógicas, colabora para entendermos a educação como ferramenta democratizadora da sociedade.

Para isso, é preciso batalhar politicamente para a transformação, como afirma:

> Homens e mulheres, ao longo da história, vimo-nos tornando animais deveras especiais: inventamos a possibilidade de nos libertar na medida em que nos tornamos capazes de nos perceber como seres inconclusos, limitados, condicionados, históricos. Percebendo, sobretudo, também, que a pura percepção da inconclusão, da limitação, da possibilidade, não basta. É preciso juntar a ela a luta política pela transformação do mundo. A libertação dos indivíduos só ganha profunda significação quando se alcança a transformação da sociedade (FREIRE, 1992, p. 51-52).

Em geral, no pensamento freireano, a educação deve propor uma orientação teórica/ crítica para formar um método educativo humanizador e para entendermos essa essência, devemos entender como os métodos educativos se organizam durante o movimento cultural e que tudo seja utilizado como ferramenta de transformação. A obra de Freire teve como principal foco a educação, e o que destacamos como diferencial na sua pedagogia é: pedagogia da educação popular; o amor no ato de ensinar; diálogo professor-aluno; dar voz ao oprimido, a aprendizagem direcionada numa perspectiva de educar para libertar; que o aluno viva a realidade sociopolítica; a educação para autonomia, crítica e emancipatória; relação ser humano-mundo; realidade cotidiana, social e história de vida. Com tudo isso, Freire nos leva a um processo de desenvolvimento por meio da função do educador-educando, do diálogo, da criticidade, da conscientização, da construção de uma pedagogia libertadora ou do conhecimento a serviço da liberdade.

Em entrevista concedida a Forner (2005, p. 77-78), o educador Dario Fiorentini defende o que vê como individualizador na pedagogia freireana:

> Os textos de Paulo Freire trazem um outro olhar e uma dimensão pedagógica que muitos outros textos não têm, que é situar o sujeito num movimento histórico-cultural, quer dizer, trabalhar sob uma perspectiva mais humana numa relação dialógica com o outro e com o mundo. Somente Paulo Freire, e não há ninguém melhor que ele, pode trazer esse modo diferenciado e crítico de olhar a educação e a escola, que é, sobretudo, humano, chamando atenção para a sensibilidade que o professor ou o futuro professor tem que ter com os sujeitos das práticas pedagógicas.

1.2 Algumas contribuições de Paulo Freire nas pesquisas em Educação Matemática

O legado de Paulo Freire influenciou e influencia para a melhoria do ensino, sendo considerado como um subsídio universal para o pensamento pedagógico, ele propôs questionamentos que acarretaram uma enorme contribuição para educação. Com isso, motivou muitos pesquisadores e professores à busca por uma educação esclarecedora, inclusiva, libertadora, crítica, com a importância dada ao conhecimento diário, no desenvolvimento do processo escolar, configurando a escola como um lugar de troca de conhecimento, interação e outras experiências facilitadoras, a aprendizagem tornou-se centro de estudos em educação e educação matemática.

Essa perspectiva educacional, prestigiada por defender uma educação não bancária, dialógica e conscientizadora, vem formando e influenciando novas linhagens de educadores e pesquisadores. Exemplo disso, temos o matemático Ole Skovsmose que desenvolveu a Educação Matemática Crítica, a qual se preocupa com os aspectos políticos da educação matemática, mas se questiona em relação às propensões por trás de organizações frente ao que se apresenta nos currículos e a forma que a disciplina é trabalhada e cobrada em sala aula (SKOVSMOSE, 2013). Em seus trabalhos, Skovsmose deixa transparecer que sua teoria sofreu influência de Paulo Freire, tanto do modelo democrático de ensinar e aprender, como da *pedagogia emancipadora* de Freire.

Instituições de ensino também adotaram o método Paulo Freire em alguns países, exemplo disso, a Revere High School, em Massachusetts, nos Estados Unidos, já foi avaliada como a melhor instituição americana de Ensino Médio.

Para Teruzzi (2019), as tentativas de se analisar e de se aplicar as ideias da pedagogia freireana, no ensino-aprendizagem da educação matemática, não são numerosas, e tampouco constituem um *corpus* homogêneo.

Considerando as pesquisas realizadas na educação matemática que relacionam Paulo Freire com a valorização e contribuições para a construção do conhecimento e a formação do professor de matemática no Brasil. Realizamos um breve levantamento de trabalhos realizados com essa temática, abaixo relatamos algumas pesquisas desenvolvidas.

Destacamos a pesquisa de Andrade (1998), intitulada "Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula" que teve como objetivo principal a resolução de problema à luz da educação matemática crítica, como referencial teórico, dentre outros, a Pedagogia Libertadora de Paulo Freire, da qual usou especialmente os conceitos de codificação e descodificação freireanos, como também as ideias de problematização e diálogo como desencadeadores essenciais do trabalho de resolução e exploração de problemas na sala de aula de matemática, observada em toda sua multicontextualidade.

A dissertação de Santos (2002), sob o título "A etnomatemática e suas possibilidades pedagógicas: algumas indicações pautadas numa professora e em seus alunos e alunas de 5.ª série", abordou a vivência de articulação entre Etnomatemática e sala de aula, especialmente embasada e discutida a partir da perspectiva dialógica de Freire. O estudo se dá a partir das expectativas, relações, concepções de uma professora e seus educandos de uma 5.ª série, de uma escola pública de São Paulo, envolvendo as interferências e as tensões entre a professora e seus colegas de trabalho. Os dados foram coletados a partir da observação direta do pesquisador junto ao grupo investigado, em situação de aula, mediante o uso de questionários e entrevistas.

Caetano (2004) realizou estudo sobre a formação de professores de matemática em uma perspectiva freireana. Com objetivo de levantar as concepções dos educadores matemáticos entrevistados sobre a formação de professores de matemática, com a finalidade de mapeá-las e encontrar referenciais da pedagogia de Freire, para a formação de professores de matemática, e com isso produzir uma rede informativa que pudesse ser relevante teórica e socialmente. A autora pôde concluir que tanto a formação inicial, quanto a continuada precisam ser refletidas sob as teorias do pensamento freireano, por promover uma educação em sentido amplo, direcionando a uma prática pedagógica democrática e política para a humanização, fundamentada no diálogo como princípio educativo.

O autor relata que houve contrariedade a uma proposta pedagógica etnomatemática, tanto por parte dos educandos quanto da estrutura escolar como um todo. Contrariedades relacionadas às expectativas e concepções dos educandos e ao status quo instituído na estrutura escolar. Também, concluiu que uma proposta pedagógica etnomatemática pode acarretar contribuições às relações de ensino e aprendizagem de matemática. Mas, afirma que a elaboração dessa proposta deva ser construída pelo educador, educando e base escolar, ressaltando o ponto de vista dos educandos acerca da matemática e de seu método pedagógico e inserindo, também, a realidade sociocultural.

Frankenstein 2005 (publicado inicialmente em 1983) é uma das primeiras educadoras matemáticas a usar Paulo Freire, o artigo tem como título, Educação Matemática Crítica: uma aplicação da epistemologia de Paulo Freire. Nele a autora tenta esclarecer as contribuições de Freire para a educação, fazendo um delineamento de seus métodos e pressupostos, fundamentando a educação matemática crítica. A autora busca associar/mostrar a metodologia de Freire na utilização do conteúdo de matemática e estatística básica. Esclarece que:

> A educação crítica pode desafiar os estudantes a questionarem ideologias hegemônicas usando estatística para revelar as contradições (a falsidade) sob a aparência dessas ideologias, fornecendo experiências de aprendizagem onde estudantes e professores sejam $co-investigadores$ e onde os estudantes com *ansiedade* matemática superem seus medos. Além disso, educação matemática crítica pode ligar esse questionamento com ação, tanto ilustrando como grupos organizados de pessoas estão usando estatística em suas lutas por mudança social... (FRANKENSTEIN, 2005, p. 126).

Além disso, considera a teoria educacional de Paulo Freire *complexa*, e argumenta que "ela seja parte de um processo de desenvolvimento de novas relações sociais na luta pela humanização" (FRANKENSTEIN, 2005, p. 130). Ela faz uso das teorias de Freire nas escolas estadunidenses, quando utiliza nas fundamentações de professor e de educando como aqueles que ensinam e, ao mesmo tempo aprendem, também ao usar conceitos de professor libertador, tema gerador, entre outros.

Forner (2005), em sua pesquisa de mestrado, cujo título Paulo Freire e a Educação

Matemática: reflexos sobre a formação do professor, objetivou, através de entrevistas com educadores/pesquisadores reconhecidos por estudos e ensino na educação matemática, registrar possíveis influências de Paulo Freire em suas trajetórias e práticas, preservando seus anseios voltados para a formação do professor de matemática, dentro da perspectiva freireana, tendo como base as falas dos educadores entrevistados, e assim, buscar subsídios para discutir sua formação, seja inicial ou continuada.

Forner (2005) nos apresenta perfis dos seus entrevistados, nos quais nos faz observar a variedade de percepções de uma parcela de educadores que executam a educação matemática, relatando expectativas, objetivos, anseios e entendimentos em torno deste ponto estudado. Todos se mostram influenciados por teorias de Freire, mas, ainda há divergência de pensamento em relação ao "papel do futuro professor na sociedade".

Quando Forner (2005, p.174) aborda os entrevistados sobre sugestão de caminhos para a educação, em especial a formação do professor, são relacionados pontos de como a pedagogia de Freire pode contribuir e ser eficaz. Sugerem: a formação continuada investigando sua própria prática; conhecer a realidade do aluno para contribuir para a educação; a reelaboração do currículo; incentivo à leitura de educadores que tenham relação com formação inicial ou continuada, entre outras.

O autor conclui que:

> a Educação Matemática, em especial, tem muito o que "aprender" com a teoria de Paulo Freire, buscando as razões do fracasso do aluno no ensino da Matemática, trazendo para o ambiente acadêmico discussões que coloquem a Matemática em um ponto de vista mais social, buscando elementos que mostrem o quanto ela está enraizada no cotidiano das pessoas e quanto ela é indispensável ao viver em sociedade (FORNER, 2005, p.181).

Santos (2007) realizou pesquisa referente à investigação teórica de cunho histórico-filosófico-educacional. O autor apresentou o objetivo de discutir as contribuições de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio para a formação do professor de matemática no Brasil. Considera ainda que as bases teóricas (dialética e as técnicas de análise de conteúdo) de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio mostram-se como indicadores úteis para os encaminhamentos possíveis para a formação de um professor de matemática crítico e libertador. Dessa forma, analisaram a formação do professor de matemática de modo contextualizado com a realidade social e reconstituindo a função histórica que a escola e a formação docente desempenharam, como reforçadora das desigualdades sociais e defensora do *status quo* da sociedade capitalista. Concluiu-se que a pesquisa indica a necessidade de atuação dos formadores no sentido de conscientizar os futuros professores de matemática de sua tarefa como intelectuais orgânicos a serviço da hegemonia dos excluídos e dos explorados, em geral. O autor ainda acrescenta que a investigação, enfim, mostra a necessidade de a formação inicial se caracterizar como um anti-discurso ideológico da classe dominante.

O trabalho desenvolvido por Altenhofen (2008) — Atividades contextualizadas nas aulas de matemática para a formação de um cidadão crítico apresentou, como problematização, quais são as contribuições que atividades contextualizadas desenvolvidas nas aulas de matemática têm na formação de um cidadão crítico. O estudo foi desenvolvido com alunos da 5.ª série do Ensino Fundamental, as atividades envolviam os conteúdos estudados na disciplina de matemática: frações, porcentagem e números decimais. A autora relata que o principal objetivo era usar assuntos do cotidiano para que os alunos compreendessem os conceitos matemáticos, além de usar estes conceitos para que entendessem sua realidade. Afirma, que a pesquisa desenvolvida alcançou os seus objetivos, contribuindo na formação de alunos críticos, a partir das atividades desenvolvidas nas aulas de matemática e respondeu aos questionamentos iniciais. E que com as atividades realizadas nas aulas, o aluno conseguiu compreender sua realidade, estabelecer relações e, em alguns momentos, posicionar-se criticamente.

Na conclusão, Altenhofen argumenta:

> Percebi que a metodologia utilizada, que valoriza as atividades contextualizadas e a realidade, motivou os alunos. Essa motivação esteve relacionada a fatos e situações que faziam parte do seu cotidiano e de sua realidade, trazendo segurança para falarem, questionarem e exporem suas opiniões durante as aulas. A troca de informações e experiências entre professor e alunos reforçou minha crença na educação que trabalha com os conhecimentos prévios e com atividades contextualizadas à realidade dos alunos. Ao iniciar a pesquisa, minha questão seria investigar como as atividades desenvolvidas nas aulas de Matemática contribuiriam neste processo. Creio que a pesquisa desenvolvida alcançou os seus objetivos, contribuindo na formação de alunos críticos a partir das atividades desenvolvidas nas aulas de Matemática e respondeu aos questionamentos iniciais. A partir das atividades desenvolvidas nas aulas, o aluno compreendeu sua realidade, estabeleceu relações e, em alguns momentos, posicionou-se criticamente (ALTENHOFEN 2008, p.76).

Pacheco (2009) realizou o estudo sobre Geometria Plana e Inclusão Digital: uma experiência a partir do cotidiano dos alunos EJA (Educação de Jovens e Adultos), no qual avaliou uma proposta metodológica elaborada para auxiliar na compreensão de conteúdos de Geometria Plana, condizente com as necessidades e desafios da sociedade na aprendizagem, usando como pressupostos teóricos a proposta de Paulo Freire, a partir da utilização de *softwares* de apoio que funcionam como elementos articuladores do conteúdo e, também, auxiliam o processo de Inclusão Digital destes alunos. Dessa maneira, tentou esclarecer o ensino de conteúdos de Geometria Plana de alunos, na modalidade EJA, de forma a tornar mais expressiva à aprendizagem utilizando, como recurso articulador, *softwares* gráficos que também podem ajudar no processo de inclusão digital destes alunos. O autor relata que, no início, os alunos foram contrários e depois observou-se uma mudança de comportamento em relação às aulas de matemática, podendo verificar um significativo crescimento dos alunos referente à construção e apropriação dos saberes matemáticos.

Ferreira (2010) analisou um curso de modelagem matemática, desenvolvida na modalidade EaD *online*, visando à formação continuada. O autor objetivou investigar como a modelagem matemática, desenvolvida no curso na modalidade EaD, pode contribuir para a superação de dificuldades dos professores no entendimento da metodologia e na sua utilização em sala de aula; verificar as contribuições do curso na modalidade EaD para a formação continuada de professores e a superação de dificuldades ao adotar a modelagem matemática; além de buscar confrontar a natureza das dificuldades relacionadas às concepções de ensino e aprendizagem da matemática. Os resultados apontados demonstraram o alcance de aspectos significativos em relação ao desenvolvimento da modelagem matemática na modalidade EaD e seu potencial uso na educação básica, mas o autor afirma a necessidade de ajustá-la na dinâmica do curso.

Barreto (2013) investigou que conhecimentos matemáticos utilizados por professores do Curso Técnico em Metalurgia Integrado ao Ensino Médio, na modalidade de Educação de Jovens e Adultos, ofertado pelo IFES/Vitória, influenciam diálogos entre matemática e outras disciplinas do curso, considerando a perspectiva da formação integral dos estudantes. Apresentou como referencial teórico Paulo Freire e outros autores. O estudo foi realizado com professores, coordenadores e alunos que estão inseridos nas diversas modalidades do curso. Os dados foram obtidos através da observação-participante, dados coletados em documentos, observações de aulas de diversas disciplinas que compõem o currículo do curso de metalurgia, com anotações, gravações em áudio e sistematização das transcrições, questionários e entrevistas com professores e alunos. Obtiveram, como resultados, que conceitos que orientam o currículo integrado proposto pelo documento, base do PROEJA não têm se efetivado no Curso. A matemática está inserida em todas as disciplinas, podendo, dessa forma, ser utilizada como um elemento articulador curricular. Contribuindo, portanto, para a integração entre as diversas áreas do conhecimento.

A autora pondera que:

> Nossa meta frente a este e tantos desafios é de romper com a “Educação Bancária”, ainda presente no espaço escolar vivenciado pelos alunos e alunas que frequentam a EJA e tão criticada por Freire. Assim, será possível trocar o marasmo e a apatia das aulas por momentos mais participativos e dialogados, onde os questionamentos e as trocas de experiências sejam pautadas na integração dos saberes socialmente constituído e na sistematização científica do ensino e aprendizagem (BARRETO, 2013, p.128).

Faustino (2018) desenvolveu a pesquisa intitulada “Como você chegou a esse resultado?”: o diálogo nas aulas de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, cujo objetivo central, abordado pela autora, foi compreender como as professoras e os estudantes colocam o diálogo em ação nas aulas de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Dessa forma, ela buscou reconhecer elementos que ajudam no desenvolvimento de uma aula de matemática voltada à dialogicidade. Utilizou como referencial teórico para esta pesquisa, as perspectivas de diálogo de Paulo Freire, no campo da Educação, e de HelleAlrø e Ole Skovsmose, no campo da Educação Matemática.

Tal pesquisa foi desenvolvida com 54 crianças, entre 8 e 11 anos, durante um semestre, na qual professoras e estudantes discutiam textos e desenvolviam atividades em sala de aula. Os dados foram produzidos com a utilização do diário de campo, de áudio-gravações e de vídeo-gravações dos diálogos estabelecidos durante as aulas de matemática, os quais auxiliaram na produção dos contos elaborados pela pesquisadora. Os resultados do estudo revelaram dois padrões de comunicação entre as professoras e os estudantes dos anos iniciais: o *sanduíche* de comunicação e o diálogo. Faustino constata que:

> A criança é concebida, assim, como um ser dialógico que produz conhecimento nas relações que estabelece com o mundo e com os outros. Quando o professor organiza o ambiente de modo a favorecer a emersão do diálogo, ele valoriza o fazer matemático do estudante. A aula deixa de ser centralizada na explicação do professor, do adulto e torna-se focalizada no fazer matemático da criança, em sua forma inusitada de se relacionar com o objeto cognoscente. Isso não quer dizer que o professor abandonará todas as explicações, mas que partirá do fazer matemático dos estudantes e, ao se deslocar epistemologicamente para compreendê-lo, poderá criar situações ricas de compartilhamento e negociação de significados com a classe toda. [...] Assim, o diálogo pode contribuir para que as crianças aprendam matemática e desenvolvam uma postura democrática na sala de aula. O diálogo ainda cria possibilidades para as crianças interpretarem o contexto social em que estão inseridas e começar a agir para sua transformação. A pesquisa ainda possibilitou a identificação dos oito atos dialógicos juntamente com os oito atos não dialógicos, os quais se constituem em uma importante ferramenta para que pesquisadores, estudantes e professores co-construam uma aula de matemática dialógica (FAUSTINO, 2018, p. 211-212).

Todos os trabalhos referidos tiveram em seu referencial teórico Paulo Freire, exibiram preocupação/reflexão com a formação inicial e continuada do professor de matemática, e apresentaram temas matemáticos variados em que foram aplicadas as concepções de Freire. Dentre esses, tivemos como amostra a Educação de Jovens e Adultos, que nos permitiu visualizar as teorias/ensinamentos de Freire sobre o processamento da escolarização e alfabetização, como vem sendo tratada através desses estudos e como estes contribuem para a educação. A outra parte dos trabalhos relatados utilizaram entrevistas, aulas práticas através do diálogo em sala de aula, atividades escritas e questionários para levantamento de dados, com investigação desses dados sendo qualitativa. Cabe ressaltar, que esses trabalhos/pesquisas apresentam grande importância para novos educadores interessados na educação matemática, pois se revertem em uma base de consulta para novas pesquisas e como aprimoramento da educação.

Freire nos fala que:

> A melhora da qualidade da educação implica a formação permanente dos educadores. E a formação permanente se funda na prática de analisar a prática. É pensando sua prática, naturalmente com a presença de pessoal altamente qualificado, que é possível perceber embutida na prática uma teoria não percebida ainda, pouco percebida ou já percebida, mas pouco assumida (FREIRE, 2001, p.72).

A maioria das aulas de matemática são realizadas tradicionalmente, utilizamos como principais instrumentos didáticos os livros, o quadro, as atividades e as avaliações, não fazemos muito o uso da contextualização envolvendo a matemática de sala de aula com o cotidiano. Realizando a idealização de ensino de Freire, devemos trazer a escolarização ao meio que o aluno está adaptado. Na matemática devemos procurar mostrar ao educando como ela está encaixada no seu cotidiano e a sua importância como ferramenta para ele utilizar e assim compreender melhor a sua realidade. Partindo do ponto ressaltado por Freire, o qual fala da relevância do trabalho da escola e do educador, em despertar, motivar, envolver a curiosidade do aluno, devemos então desafiá-los para que façam uso do que foi ensinado e absorvido. Temos que perceber o ensino e saber praticá-lo, mobilizando os alunos para que se encontrem como sujeitos comunicativos e críticos. Como diz Freire (1996, p.17), "A prática docente crítica, implicante do pensar certo, envolve o movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer".

Neste sentido, é preciso que o educando admita a função de ser sujeito da produção de seu conhecimento e do conhecimento do mundo em que vive e não apenas o de recebedor da educação que lhe seja transferida pelo professor (FREIRE, 1996). Pois, com as condições necessárias a aprendizagem, os educandos vão se tornar protagonistas do processo. Analisando isso sob a perspectiva de Freire:

> A alfabetização, por exemplo, numa área de miséria, só ganha sentido na dimensão humana se, com ela, se realiza uma espécie de psicanálise histórico-político-social de que vá resultando a extropojeção da culpa indevida. A isto corresponde a "expulsão" do opressor de "dentro" do oprimido, enquanto sombra invasora. Sombra que, expulsa pelo o oprimido, precisa de ser substituída por sua autonomia e sua responsabilidade. Saliente-se, contudo que, não obstante a relevância ética e política do esforço conscientizador que acabo se sublinhar, não se pode parar nele, deixando-se relegado para um plano secundário o ensino da escrita e da leitura da palavra. Não podemos, numa perspectiva democrática, transformar uma classe de alfabetização num espaço em que se proíbe toda reflexão em torno da razão se ser dos faros nem tampouco num "comício libertador". A tarefa fundamental dos Danilson entre quem me situo é experimentar com intensidade a dialética entre "a leitura do mundo" e a leitura da palavra (FREIRE, 1996, p.33).

Forner busca reforçar a importância e a contribuição da pedagogia de Freire para a educação:

> As obras de Paulo Freire e sua pessoa contribuíram muito com a educação brasileira e mundial, trazendo uma nova visão de educação, olhando para o processo pedagógico de outra forma, dando voz ao seu aluno, fazendo-o participar, ser sujeito e não somente mero objeto, fazendo pensar sobre toda a dinâmica em sala de aula, com o olhar para fora dela, pensando a escola como integrante da vida e os acontecimentos da vida com estreita ligação com a escola. Acima disso, Paulo Freire tem a propriedade de trazer uma sensação de otimismo pedagógico, contrário de outros autores que possuem o dom de creditar à educação todos os horrores possíveis como se não houvesse solução (FORNER 2005, p.181).

Diante de tudo, que foi abordado, podemos perceber algumas contribuições de Paulo Freire para a educação e a educação matemática. O argumento que o professor deve apresentar uma atuação político-social, tendo como principal função expor criticamente a vivência conjuntamente ao aprimoramento da própria prática. E que o educador procure estar envolvido socialmente com a concepção crítica do aluno, que ele possa expor suas dúvidas e desenvolvê-las através do diálogo. As várias modificações sociais, culturais e a evolução da tecnologia requerem responsabilidades de pensamento social, a partir de novas dinâmicas educativas que compreendam a necessidade da colaboração de cidadãos conscientes de seu papel social. Com isso, destacamos a relevância de pensamento e base metodológica de Paulo Freire como pontos fundamentais para superar as dificuldades na formação do professor de matemática e no desenvolvimento educativo mais crítico e transformador.

Capítulo 2

Avaliações Externas da Educação Básica e a Evolução do ENEM

2.1 Avaliações Externas no Brasil

Para muitos, a avaliação significa uma forma de entender erros e falhas no processo educacional, buscando seu aperfeiçoamento, na prática, ao ser submetido por um processo avaliativo. Para a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura-UNESCO "a avaliação tem um papel crucial na implementação e na generalização bem-sucedida da educação de qualidade para todos" (UNESCO, 2016, p. 26). Fernandes (2013, p.12) acrescenta que "de forma mais ou menos explícita, mais ou menos formal, a avaliação está efetivamente presente em todos os domínios acadêmicos e em todas as áreas da atividade humana".

De acordo com Duarte (2015, p. 54), a avaliação

> como diagnóstico contínuo e dinâmico torna-se um instrumento fundamental para repensar e reformular os métodos, os procedimentos e as estratégias de ensino para que, de fato, o aluno aprenda. Além disso, ela deve ser essencialmente formativa, na medida em que cabe à avaliação subsidiar o trabalho pedagógico, redirecionando o processo ensino aprendizagem para sanar dificuldades, aperfeiçoando-o constantemente.

A avaliação é um instrumento fundamental para as práticas pedagógicas, pois permite ao professor acompanhar o desempenho dos alunos e como está sendo realizado esse processo de absorção do conteúdo escolar (SANTOS; OLIVEIRA, 2020). Para Luckesi (2012, p.5), a avaliação é um ato de investigação da qualidade da realidade, à semelhança da ciência, que é um ato de investigação do modo como a realidade funciona; por isso, os resultados dos atos investigativos devem estar assentados em dados da realidade.

O sistema educacional brasileiro durante décadas preocupou-se em inserir todos os seus alunos em sala de aula, o objetivo atualmente é alcançar a qualidade. Assim, para se aferir a qualidade, foram desenvolvidas tentativas de avaliar tal percurso, culminando nos sistemas de avaliação.

> Tradicionalmente, a avaliação educacional esteve fortemente relacionada à avaliação da aprendizagem que ocorre em sala de aula. Contudo, após a ampla discussão trazida pela implantação da política nacional de avaliação da educação básica no Brasil, em meados dos anos 1990, assistimos a um crescente volume de publicações e trabalhos científicos que levaram à ampliação do tema e, consequentemente, à criação de categorias cada vez mais específicas para se referir aos diferentes processos avaliativos (COLA, 2015, p.27).

Dessa forma, a busca pelos bons resultados se tornou um grande desafio para a comunidade escolar. Ou avaliações são instrumentos usados para identificar as dificuldades na leitura, escrita, interpretação e resolução de problemas e assim se estabelecer estratégias pedagógicas para a obtenção de bons resultados. Sob esse ponto de vista, é possível atestar que essa configuração contribui para a definição dos objetivos da educação, os quais são endossados na LDBN nº 9394/96 ao tratar das finalidades do Ensino Fundamental e educação básica.

> I - o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo [...] III - o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores; IV - o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social [...]; II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico [...] (BRASIL, 1996, p. 12).

O uso das avaliações de larga escala para gerar parâmetros nas políticas públicas, tal como conhecemos nos dias de hoje, foi iniciado no Brasil no princípio da década de 80 do século XX, quando o Ministério da Educação começou a desenvolver estudos sobre a avaliação educacional, movido pelo incentivo proveniente das agências financiadoras multinacionais (OLIVEIRA; ROCHA, 2007).

> Quando se fala em políticas educacionais, os processos de avaliação externa estão cada vez mais presentes, tornando-se indispensável nos dias de hoje, pois promove avanços no desenvolvimento dos estudantes e na qualidade das instituições de ensino. Avaliação externa, também conhecida como avaliação em larga escala, é um dos instrumentos elementares para o replanejamento das políticas educacionais e das metas das instituições de ensino. Ela está focalizada no desempenho da escola e os seus resultados estão relacionados com a medida de proficiência dos estudantes para a construção da escala de proficiência (ROCHA, 2019).

Ainda sobre políticas educacionais, Oliveira, Pizzio e França (2010) dizem que

> são ações que o governo promove ou não, relativamente à educação. Porém, educação é um conceito muito amplo para se tratar das políticas educacionais. Isto quer dizer que políticas educacionais é um foco mais específico do tratamento da educação, que em geral se aplica às questões escolares. Em outras palavras, pode-se dizer que políticas públicas educacionais dizem respeito à educação escolar.

As avaliações externas buscam avaliar os sistemas educacionais, o desenvolvimento dos educandos, bem como orientar as práticas educacionais, indicativos esses também observados para se pensar uma educação de qualidade.

Avaliações externas, também denominadas avaliações em larga escala, se configuram, de acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), como um dos principais instrumentos utilizados para a elaboração de políticas públicas e para o planejamento das metas das unidades escolares, nos sistemas de ensino em todo país. O objetivo principal dessas avaliações é o desempenho da escola, cujos resultados "são uma medida de proficiência que possibilita aos gestores a implementação de políticas públicas, e às unidades escolares um retrato de seu desempenho" (INEP, 2021).

Para Santos, Gimenes e Mariano (2013), as avaliações externas são um dos principais mecanismos para elaboração de políticas públicas no sistema de ensino, redirecionando metas para as unidades escolares pelo bom desempenho das escolas; no contexto mundial, essas avaliações têm o objetivo de igualar a permanência do aluno na escola com a qualidade do processo ensino-aprendizagem.

Essas avaliações se originaram com o propósito de resolver

> O problema da falta de dados relativos ao sistema educacional que pudessem embasar políticas públicas de responsabilização e financiamentos, segundo a ideia de que a avaliação permitiria detectar os entraves do sistema, facilitando o melhor direcionamento de recursos segundo os problemas detectados. (BARBOSA; VIEIRA, 2013, p.15).

Nesse sentido, corrobora a compreensão de Passone (2017, p. 8), que considera que os estudos sobre avaliação são,

> (...) imprescindíveis para conhecermos melhor a realidade da educação pública brasileira, acompanhando-a,bem como para auxiliar no aperfeiçoamento da gestão participativa e da implementação de políticas educacionais e programas que possam aumentar as condições de a escola vir a significar uma diferença na vida de todo e qualquer aluno.

Tais avaliações informam sobre os resultados educacionais de escolas e redes de ensino a partir do desempenho dos alunos em testes ou provas padronizadas que verificam se estes aprenderam o que deveriam ter aprendido, permitindo inferências sobre o trabalho educativo das escolas e redes de ensino (BLASIS; FALSARELLA; ALAVARSE, 2013).

Hoje a avaliação de larga escala estendeu-se por todo o sistema educacional do país. [...] Essas avaliações do sistema nacional de educação destinam-se a investigações sobre a qualidade da educação brasileira nos diversos níveis de ensino, da educação básica ao ensino superior e a pós-graduação (LUCKESI, 2011, p.429-430).

As avaliações em larga escala são coordenadas por um órgão externo às escolas e têm como objetivo principal julgar a partir de concepções individuais para propor soluções às escolas. Esse julgamento é feito por meio de aplicações de instrumentos de medida e de análise dos resultados (ROCHA, 2019).

Os dados obtidos, através da aplicação dessas avaliações, são repassados aos governantes pelo MEC- Ministério da Educação, e esses, por sua vez, trabalham no intuito de sanar possíveis falhas que estejam afetando os alunos no seu convívio social (FONTANIVE, 2013). Dessa forma,

> O caminho traçado pelas avaliações nacionais compreende também os mecanismos de divulgação dos resultados, ou seja, como a escola, o município ou estado recebem os dados coletados em seu interior. Tais resultados contribuem de forma incisiva para um movimento de superação de dificuldades, ao apresentar as condições de ensino em cada escola brasileira, podendo detectar seus problemas e planejar soluções. Os dados coletados são úteis para a construção de um panorama educacional a nível nacional, constituindo-se base para a formulação de políticas públicas(DANTAS, 2015).

As avaliações externas, em larga escala no Brasil, estão passando por uma trajetória histórica, em crescente transformação política, social e cultural ao longo dos últimos 30 anos. Ao analisar os sistemas de avaliação, no contexto educacional brasileiro, vemos que as avaliações externas e em larga escala têm influenciado nas políticas educacionais em todo Brasil. Passone (2017, p. 8) afirma que, "cabe às políticas públicas de educação e aos sistemas de ensino produzirem as condições de possibilidade para o desenvolvimento integral de todos os alunos, com equidade e qualidade, tendo por fundamentos o direito à educação e à democratização do ensino".

Portanto, as políticas de avaliação implementadas no Brasil passaram a constituir-se em um mecanismo central de regulação, fornecendo indicadores que são utilizados nos estabelecimentos de metas de gestão e influenciando sobre o financiamento da unidade escolar e em alguns casos até mesmo a remuneração dos docentes. Além, é claro, de determinar em última instância os currículos (OLIVEIRA, 2015).

A implantação dos sistemas de avaliações educacionais no Brasil foi uma política que avançou, nos últimos anos, em todos os níveis e modalidades de ensino. Essas avaliações ganharam destaque em 1990, os anos subsequentes foram marcados pela materialização de inúmeros processos avaliativos dos sistemas escolares e, esses têm cada vez mais sido incorporados aos processos educativos. O Ministério da Educação – MEC elabora e aplica, por meio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e em articulação com as Secretarias Estaduais de Educação, algumas avaliações de larga escala, cujos objetivos são diversos.

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), por lei, foi fundado em 13 de Janeiro de 1937. Atualmente é uma autarquia federal, ou seja, é uma "pessoa jurídica" criada pela Lei nº. 9.448, ligada ao Ministério da Educação com a finalidade de suscitar estudos, pesquisas e avaliações sobre a educação brasileira, estabelecendo e implantando políticas públicas a partir de características de qualidade e equidade (BRASIL, 2013). O Instituto teve como meta central, nos últimos anos, as atividades de avaliações educacionais com a organização do sistema de levantamentos estatísticos.

Como exemplos destacamos: a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC), conhecida popularmente como Prova Brasil, a Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB), e a Avaliação Nacional de Alfabetização (ANA), que compõem o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB); o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA); o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA); o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), dentre outros sistemas avaliativos estaduais e municipais, como o SPAECE. Apresentando distintas características e possibilidades de uso dos resultados, configurando um macrossistema de avaliação da qualidade da educação brasileira. De modo geral, todas essas avaliações consistem em testes para averiguar as habilidades dos alunos, principalmente, em português, matemática, ciências humanas e da natureza, visando bons resultados.

Na sequência apresentamos uma breve descrição dos sistemas de avaliação citados acima.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) constitui-se em uma ferramenta propulsora de sistemas de avaliação de larga escala que proliferou nas políticas públicas de Estados e Municípios que foram criando instrumentos próprios de avaliação. De acordo com Ortigão, Santos, Aguilar Junior (2017, p.76), "a avaliação torna-se sistemática, orgânica, adquire um caráter regulador e ganha centralidade nas discussões educacionais. Deixa de ser possível, atualmente, imaginar processos educativos que não conduzam a modalidades de julgamentos".

Em 1990 foi realizada a primeira edição do SAEB. A aplicação aconteceu de forma amostral em escolas públicas urbanas do Ensino Fundamental. Estudantes de 1ª, 3ª séries responderam testes de matemática, língua portuguesa e ciências, enquanto os estudantes das 5ª e 7ª séries foram avaliados em língua portuguesa, matemática, ciências e redação, sendo o formato reeditado em 1993.

A ANRESC foi criada para atender as necessidades dos gestores públicos, pesquisadores, educadores, e da sociedade em geral que almejavam informações sobre a educação oferecida em cada município, visto que a participação das instituições é censitária e os resultados podem ser analisados por escola. Seu objetivo é auxiliar nas políticas públicas, buscando melhorar a qualidade do ensino.

A ANEB utiliza os mesmos instrumentos do ANRESC e é aplicado com a mesma periodicidade. Diferencia-se por abranger, de forma amostral, escolas e alunos das redes públicas e privadas do País que não atendem aos critérios de participação da ANRESC/Prova Brasil, e que pertencem as etapas finais dos três últimos ciclos da Educação Básica: em áreas urbanas e rurais 5º ano (4ª série) e 9º ano (8ª série) do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio regular.

A ANA é uma avaliação externa cujo objetivo é aferir os níveis de alfabetização e letramento em língua portuguesa (leitura e escrita) e matemática dos alunos matriculados no 3º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas. As provas aplicadas aos alunos fornecem três resultados: desempenho em leitura, desempenho em matemática e desempenho em escrita.

O SAEB passou por mudanças desde a edição de 2019. As siglas ANA, ANEB e ANRESC deixaram de existir, e todas as avaliações passaram a ser identificadas pelo nome SAEB, a diferença ficará apenas com a denominação das áreas de conhecimento e das etapas/anos de ensino avaliadas.

O Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA), criado em 2001, é um instrumento de avaliação que verifica as competências, habilidades e saberes adquiridos tanto em ambientes escolares como extraescolares de jovens e adultos que não tiveram a oportunidade de concluir os estudos em idade apropriada, para a certificação de conclusão dos ensinos fundamental e médio.

O ENCCEJA tem como principal objetivo

> construir uma referência nacional de educação para jovens e adultos por meio da avaliação de competências, habilidades e saberes adquiridos no processo escolar ou nos processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais, entre outros (BRASIL, 2021).

Em termos de sistemas de avaliação internacional,o Brasil também participa de avaliações internacionais para estabelecer um diagnóstico da qualidade educacional brasileira em relação aos outros países. A participação no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) deu-se desde a primeira aplicação das provas em 2000. Este exame organizado pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) tem uma periodicidade trienal, sendo que há uma ênfase por área a cada ano de aplicação e de forma cíclica: leitura, matemática e ciências, para estudantes de 15 anos de idade, tem como objetivo ajudar os países a verificarem como seus sistemas educacionais estão na comparação global dos quesitos qualidade, equidade e eficiência.

O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) foi implementado em 1992, pela Secretaria da Educação (SEDUC), com o objetivo de promover um ensino de qualidade e equitativo para todos os alunos da rede pública do estado.

> Por considerar a importância da avaliação como instrumento eficaz de gestão, em 2007, a SEDUC ampliou a abrangência do SPAECE, incorporando a avaliação da alfabetização e expandindo a avaliação do Ensino Médio para as três séries, de forma censitária. Assim, o SPAECE passou a compreender a avaliação de leitura dos alunos do 2º ano do EF (SPAECE-Alfa) e o domínio das competências e das habilidades esperadas para as demais etapas de escolaridade, nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática para os alunos do 5º e 9º anos do EF e nas turmas de 1ª, 2ª e 3ª séries do EM. As informações coletadas, a cada edição, identificam o nível de proficiência e a evolução do desempenho dos alunos do estado (CEARÁ, 2021).

Dessa forma, abordamos sucintamente algumas avaliações externas e em larga escala que apresentam grande importância e que visam oferecer subsídios para o ambiente escolar. Os alunos são avaliados de forma diferenciada das atividades diárias aplicadas na escola, e ainda, proporcionam aos professores uma visão geral, podendo comparar e identificar necessidades, se tornando uma possibilidade para a melhoria da aprendizagem e da ação docente.

Perante o exposto, as avaliações externas exercem muita importância e é necessário que estas sejam utilizadas de maneira adequada nas escolas e não simplesmente como mais um instrumento exigido. Pode-se afirmar que a avaliação externa apresenta pontos negativos, quando se utilizam destas, como uma forma de criar rankings, prêmios, bonificações para as escolas, professores e alunos, fugindo do real sentido que elas implicam. As avaliações externas devem ser reputadas como recursos para orientar a prática pedagógica da escola tendo em vista a qualidade das atividades que desenvolvem.

Bonamino e Sousa (2012, p. 383) destacam que essa política de premiação gera reflexos na escola:

> [...] evidências nacionais e internacionais mostram que principalmente o uso de resultados das avaliações de terceira geração para informar iniciativas de responsabilização forte pode envolver riscos para o currículo escolar. Um deles é a situação conhecida como *ensinar para o teste*, que ocorre quando os professores concentram seus esforços preferencialmente nos tópicos que são avaliados e desconsideram aspectos importantes do currículo, inclusive de caráter não cognitivo.

Para Freitas (2012),

> As recompensas e sanções compõem o caráter meritocrático do sistema, mas não só, já que a própria divulgação pública dos resultados da escola constitui em si mesma uma exposição pública, que envolve alguma recompensa ou sanção públicas. A meritocracia é uma categoria, portanto que perpassa a responsabilização. (FREITAS, 2012, p. 383).

Ainda analisando sobre o resultado das avaliações externas, Vidal e Vieira (2015) comentam sobre a premiação e seu envolvimento em condutas tecnocráticas: “As iniciativas de premiação adotadas por grande número de Estados e Municípios, por sua vez, têm gerado padrões de conduta que se distanciam do princípio da gestão democrática, impondo uma cultura de gestão por resultados” (VIDAL; VIEIRA, 2015, p.36).

Para alguns autores o processo de avaliações externas resultaram num estreitamento curricular priorizando as áreas de Língua Portuguesa e Matemática, o que não é possível ser usado como parâmetro num processo de avaliação. Afirmam que não se deve medir o trabalho pedagógico de uma instituição pela avaliação de duas disciplinas, por não demonstrar a verdadeira situação do ensino e da aprendizagem.

Fernandes (2009) externa em relação à maneira como o desempenho dos alunos é avaliado:

> Em geral, tais críticas referem-se à forma, quer ao conteúdo das medidas tradicionais, vulgos exames ou testes nacionais, que avaliam uma amostra muito reduzida dos domínios do currículo, e por isso, não avaliam muitos resultados significativos das aprendizagens dos alunos. De outro lado, dizem os críticos, acabam por ter efeitos nefastos sobre o currículo, empobrecendo o, sobre o ensino, demasiado condicionado pelo que cai no exame, sobre o desenvolvimento de competências de resolução de problemas por parte dos alunos e sobre as decisões políticas (FERNANDES, 2009 p. 112).

Para Gatti (2013), os sistemas de ensino passaram a buscar metas estabelecidas que causam redução curricular.

> Não há como negar que a maioria dos gestores restringe a criar pressões que se dirigem mais para o alcance das metas numéricas a qualquer custo, em dois quesitos curriculares, do que a criar mobilizações em relação a aspectos ligados à gestão pedagógica, considerando cada escola no seu todo. (GATTI, 2013, p. 63).

Horta (2013, p.157) descreve que:

> outra forma mais comum e mais deletéria à aprendizagem é ensinar para a prova. Com isso, o estreita-se o currículo ao priorizar em sala de aula somente aqueles temas das áreas de matemática e linguagem que serão testados, principalmente na véspera dos testes.

A respeito desta pressão por resultados, Bonamino e Souza (2012) faz em algumas reflexões quanto aos fundamentos e instrumentos destas avaliações:

> É difícil discordar da alegação de que as avaliações em larga escala lidam com uma visão estreita de currículo escolar diante do que as escolas se propõem como objetivos para a formação de seus estudantes. Também é complexo o uso de testes padronizados para aferir objetivos escolares relacionados a aspectos não cognitivos. O problema decorre do fato de os currículos escolares possuírem múltiplos objetivos, ao passo que as medidas de resultados utilizadas pelas avaliações em larga escala tipicamente visam a objetivos cognitivos relacionados à leitura e a matemática. (BONAMINO; SOUZA, 2012, p. 383-384).

Assim, não diminuindo a importância destas avaliações para o acompanhamento da qualidade da educação brasileira, mas nos parece necessário buscar formas de melhorar não apenas o ensino, mas também a maneira de avaliá-lo.

Na próxima sessão, vamos relatar sobre o Exame Nacional de Ensino Médio – ENEM e a importância deste, para o cenário educativo brasileiro, o papel de tal avaliação e suas implicações, que além de avaliar as competências adquiridas no Ensino Médio e estabelecer índices de qualidades para a educação, o exame oferece oportunidades para a Educação Técnica e Superior.

2.2 Exame Nacional do Ensino Médio- ENEM

A educação brasileira passou por várias mudanças, desde meados de 1980, em meio a uma crescente política neoliberal, permeada pelos interesses internacionais. A partir de 1995, decretado pela lei nº 9.131, o Ministério da Educação - MEC, passa a ser responsável exclusivamente pela área da educação procurando proporcionar um ensino de qualidade. Essa reforma educativa brasileira ocorreu no primeiro mandato do governo de Fernando Henrique Cardoso (FHC), em meio a um contexto de crise econômica nacional, período de emergência de sistemas de avaliação na América Latina.

Com as mudanças introduzidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional/1996, principalmente, quando se tratava em promover a melhoria da educação no Brasil, a portaria 438 do Ministério da Educação- MEC, em 28 de maio de 1998, instituiu o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, uma avaliação anual, de caráter voluntário e individual, que possuía dentre seus objetivos criar uma referência nacional para os egressos do Ensino Médio e fornecer subsídios às modalidades de acesso à educação superior, constituindo assim em uma ferramenta que permitia perceber se as diretrizes do Ensino Médio estavam sendo cumpridas, se os alunos estavam adquirindo as habilidades e competências propostas pelo o período escolar e, segundo o discurso oficial, criar a possibilidade de contribuição para a melhoria da qualidade da educação. O aluno poderia realizar a prova quantas vezes quisesse, ainda que estivesse concluindo ou já concluído o Ensino Médio, bem como aqueles que não tivessem encerrado este ciclo, já que a nota do exame poderia certificar sua conclusão, desde que atendesse a alguns requisitos.

A origem do ENEM apontava, então, a necessidade de maior investimento no Ensino Médio e um sistema de avaliação que permitisse apontar os problemas. Então, foi criado não só para avaliar o desenvolvimento discente, mas também para permitir o acesso aos cursos profissionalizantes que exigiam o nível médio como pré-requisito, o que evidenciava, de certa forma, o caráter de oportunizar que o aluno alcançasse um nível educacional acima do que possuía inicialmente, tudo isso antes de se consolidar como forma de ingresso no nível superior de ensino.

Para Hollas e Bernardi (2017), o ENEM é um exame de avaliação imponente, de larga escala, pois atinge um grande número de pessoas e, todo ano, está presente nas discussões, elencado a temas como: educação, juventude, educação superior, indicadores oficiais do Ensino Médio, entre outros. Malusá, Ordones e Ribeiro (2014) corroboram apontando o ENEM como um instrumento para a reforma do Ensino Médio, que exerce influência na qualidade da educação brasileira. Barros (2014) vai além, ao compreender que o estudante é treinado para a realização dessa prova a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, passando quase uma década da sua vida estudando conteúdos que servem apenas como bagagem para o ENEM e para o vestibular, muitas vezes não possuindo conexão com o seu cotidiano. Sampaio (2010) afirma que o exame influencia a prática em sala de aula, ao propor objetivos de ensino de matemática e induzir a metodologia de trabalho.

"O ENEM permite ao poder público dimensionar e localizar as lacunas que debilitam o processo de formação dos jovens que dificultam sua realização pessoal e sua inserção no processo de produção da sociedade." (KEMIAC, 2011, p. 66).

Nascimento, Coutinho e Pinheiro (2013) relatam que,

> Os alunos veem este exame como um instrumento de seleção, o qual está vinculado com a qualidade do conhecimento que se faz necessário no mundo e ao mercado de trabalho contemporâneo, sendo essencial alcançar o Ensino Superior, já que o mercado de trabalho exige cada vez mais especializações nas mais diversas áreas de conhecimento e profissionalização.

O Exame Nacional do Ensino Médio estruturava suas questões através da análise de competências e habilidades e teve como objetivo inicial avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, composto de questões elaboradas tendo como base uma Matriz de Referência criada especificamente para este fim, viabilizando a todos os cidadãos, que se submetem ao ENEM, de acordo com portaria 438 do MEC/1998, a possibilidade de obter:

i) Parâmetro para auto-avaliação, com vista à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;

ii) Referência nacional para egressos de qualquer modalidade do Ensino Médio;

iii) Subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;

iv) Modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio.

A Matriz de Referência utilizada para elaboração das questões do ENEM, foi elaborada de acordo com a Portaria 438 – MEC, tendo em consideração as cinco competências e as 21 habilidades previstas nesta portaria. Uma equipe de professores, assessorados por especialistas nas diferentes áreas do conhecimento e pelos autores da Matriz de Referência, foi contratada para elaboração de um banco constituído por 474 questões que avaliassem as competências e habilidades abordadas pelo ENEM e que, por poder da legislação, estariam previstas na Matriz de Referência (BRASIL, 1998). Essas questões passaram por um processo de pré-testagem, 5.427 alunos selecionados em 33 localidades das cinco regiões do Brasil (capitais dos estados e cidades do interior) foram submetidos a um dos 24 cadernos contendo entre 19 e 21 questões cada.

> Competências são as modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer. As habilidades decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do "saber fazer". Por meio das ações e operações, as habilidades aperfeiçoam-se e articulam-se, possibilitando nova reorganização das competências (BRASIL, 2001, p. 7).

Segundo as informações do INEP, de 1998 a 2008, o exame apresentava uma prova com 63 questões de múltipla escolha, em que as cinco competências da Matriz de Referência que eram avaliadas, se expressavam por meio de 21 habilidades, sendo cada medida três vezes com três questões para cada habilidade. A prova de Redação, na qual eram adotadas cinco competências específicas para a produção de textos, tinha que ser elaborada como um texto em prosa dissertativo argumentativo e estar de acordo com a proposta do tema apresentado. Realizado através de um modelo matemático denominado Teoria Clássica do Teste - TCT, ou seja, analisava-se os indicadores: índice de dificuldade; descriminação; coeficiente bisserial e distratores, e observando os dados estatísticos desses indicadores, os autores da Matriz de Referência selecionavam as questões que iriam compor o ENEM, de maneira que cada habilidade fosse contemplada com três questões.

O exame foi reformulado e passou a ser conhecido como "Novo ENEM", vinculado a uma nova instituição, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) do Ministério da Educação (MEC).

Em 2009, a Portaria Ministerial nº. 109, de 27 de maio, durante a gestão do Ministro da Educação Fernando Haddad, no Governo Luís Inácio Lula da Silva, institui um novo modelo de prova para o ENEM, com ampla divulgação pela mídia, reforçando ainda mais a expectativa por parte do governo de que o exame se consolide cada vez mais. Com as mudanças introduzidas pelo MEC a partir de então, a prova passa a ter outra nomenclatura: Novo ENEM.

> A nova prova do ENEM traria a possibilidade concreta do estabelecimento de uma relação positiva entre o ensino médio e o ensino superior, por meio de um debate focado nas diretrizes da prova. Nesse contexto, a proposta do Ministério da Educação é um chamamento. Um chamamento às IFES para que assumam necessário papel, como entidades autônomas, de protagonistas no processo de repensar o ensino médio, discutindo a relação entre conteúdos exigidos para ingresso na educação superior e habilidades que seriam fundamentais, tanto para o desempenho acadêmico futuro, quanto para a formação humana (BRASIL, 2009, p. 3).

As modificações ocorridas propiciou uma complementação e uma alteração no ENEM original, de modo que proporcionou mudanças significativas desde então. A complementação resultou na inclusão de mais objetivos:

> Promover a certificação no nível de conclusão do Ensino Médio (isso até o ano de 2016 o exame oferecia a oportunidade de certificação para o Ensino Médio, a partir de 2017, a tarefa que volta a ser cumprida pelo Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA), próprio para essa finalidade);
>
> Avaliar o desempenho escolar do Ensino Médio e o desempenho acadêmico dos ingressantes nos cursos de graduação.

As medidas governamentais estimularam o uso do ENEM não apenas como um processo de avaliação das habilidades e competências dos concluintes do Ensino Médio, mas como forma de acesso ao ensino superior no Brasil, segundo o INEP essas mudanças foram implantadas para contribuir com a democratização de acesso às vagas oferecidas. Fato que repercutiu na reestruturação dos currículos do Ensino Médio. Conforme Malusá, Ordones e Ribeiro (2013, p. 360), "[...] tal reestruturação teve como principal objetivo motivador a democratização de oportunidades de acesso ao ensino superior, o que também ajudou a estimular a reorganização do currículo do ensino médio".

Assim, o ENEM passou a ser visto, tanto como uma política de avaliação, quanto como uma política curricular, considerando que os currículos escolares estão sendo organizados em função das questões das provas do Exame. Mas, para Moura (2014), se a avaliação não tem relação com o Projeto Pedagógico (PP) da escola, dificilmente vai atender aos objetivos previstos no projeto da escola, o que reduziria o papel e a importância da avaliação nacional.

Até 2008, o ENEM era composto por 63 questões e uma proposta de redação, organizadas em cinco competências e 21 habilidades. Em 2009, o exame passou a ter 180 questões, que continuam baseadas em habilidades e competências. A forma de avaliar passou para 04 (quatro) provas objetivas de múltipla escolha com 45 questões cada e elaboração de uma redação. Essa reestruturação foi necessária, pois visava adotar uma estratégia para substituir a Teoria Clássica do Teste- TCT pela Teoria de Resposta ao

Item - TRI.
Prova 1: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Redação (Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Artes e Educação Física);
Prova 2: Matemática e suas Tecnologias;
Prova 3: Ciências Humanas e suas Tecnologias (História, Geografia, Filosofia e Sociologia);
Prova 4: Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Química, Física e Biologia).

Devido ao acréscimo do quantitativo de cadernos de provas, houve a adição de um dia de aplicação. No primeiro dia, os participantes são submetidos às provas com 45 questões de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias: Português, Literatura, Língua Estrangeira (inglês ou espanhol, escolhido previamente), Artes, Comunicação, etc; e 45 questões de Ciências Humanas e suas Tecnologias: Geografia, Filosofia, História e Sociologia; Uma proposta de Redação: texto dissertativo-argumentativo de até 30 linhas com base no tema proposto pela banca, com duração cinco horas e meia. Já no segundo dia, realizam as provas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Química, Biologia e Física; questões de Matemática e suas Tecnologias: geometria, álgebra, etc., com o tempo de duração de cinco horas.

As questões do novo exame são elaboradas por uma comissão de especialistas e estruturadas a partir de uma Matriz de Referência, Competências e Habilidades para cada área do conhecimento e um conjunto de objetos de conhecimento associados a elas. Na Tabela 2.1 observa-se a Matriz de Referência do ENEM.

Tabela 2.1 MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
H1 Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números operações-naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2 Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3 Resolve situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4 Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
H6 Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7 Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9 Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas cotidianos.
Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
H10 Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11 Utilizar noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12 Resolver situação-problema que envolva medidas de grandeza.
H13 Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14 Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
H15 Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico - científicas, usando representações algébricas.
H19 Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20 Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21 Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22 Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23 Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
H24 Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25 Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26 Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
H27 Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequência de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28 Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29 Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Fonte: Elaborado pela autora (Dados do INEP)

Tabela 2.1 MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM

São avaliações elaboradas por professores das mais diversas regiões do país. Segundo o INEP:

> Cada nova questão criada para as avaliações do ensino promovidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) passa por um pré-teste com estudantes de escolas públicas e particulares. Essas provas contemplam a diversidade da educação básica do país. O pré-teste avalia cada item sob três aspectos: grau de dificuldade, nível de discriminação (o quanto o item consegue diferenciar as pessoas que sabem ou não) e probabilidade de acerto ao acaso, além da proporção de pessoas que escolhem cada alternativa de resposta oferecida na prova. Uma prova para pré-teste deve reunir itens de difícil, média e fácil resolução.O número de questões pode variar a cada teste. Após a aplicação, o Inep calcula todos os índices e decide quais itens devem ser reavaliados. Os pré-testados e aprovados vão integrar o banco de itens, mas isso não significa que serão usados no futuro. [..] As escolas são escolhidas por sorteio, desde que tenham, pelo menos, duas turmas nas séries a serem avaliadas. Os pré-testes podem ser aplicados a alunos do ensino fundamental e médio e da educação superior. [...] Sigilo— Como no Enem, o pré-teste de itens segue sigilo rigoroso em todas as fases [...]. Em cada sala, um dos três aplicadores tem como atribuição impedir a entrada ou a saída de qualquer material. Ao fim da aplicação, as provas são, contadas, lacradas em envelope e devolvidas ao pólo. Caso haja registro de falta de uma das provas, é aberto processo de investigação. De acordo com o resultado desse processo, as questões são excluídas de forma permanente do banco de itens do Inep. (MEC/INEP).

Observa-se que o aspecto de maior importância na elaboração dos itens da prova do ENEM é a sua relação com as competências e habilidades para a resolução de uma situação-problema envolvendo a teoria com a prática.

Dessa forma,

> A mobilização de conhecimentos requerida pelo Enem manifesta-se por meio da estrutura de competências e habilidades do participante que o possibilita ler (perceber) o mundo que o cerca, simbolicamente representado pelas situações-problema; interpretá-lo (decodificando-o, atribuindo-lhe sentido) e sentindo-se 'provocado', agir, ainda que em pensamento (atribui valores, julga, escolhe, decide, entre outras operações mentais) (BRASIL, 2001, p. 15).

Dentre as mudanças realizadas, está a Teoria de Resposta ao Item – TRI, a qual permite que as diferentes edições do exame, mesmo apresentando itens distintos, possam ser comparáveis ao longo do tempo, uma vez que a TRI posiciona cada um dos itens na mesma escala de proficiência por meio da dificuldade empírica de cada um deles, obtida após sua aplicação e calculada com base na proficiência dos participantes. A prova objetiva é corrigida por meio deste método, o valor de cada questão varia de acordo com o percentual de acertos e erros do candidato. Dessa forma, uma questão acertada por muitos será considerada fácil, por isso valerá menos pontos. Por outro lado, ao acertar um item com um grande índice de erros, ganhará mais pontos. Logo, não é possível calcular a nota final somente com o acesso ao gabarito, mas apenas quando todos os critérios forem avaliados.

A redação é corrigida por dois avaliadores, de forma que um não saiba a nota que foi atribuída ao texto pelo outro, sendo considerado critério de qualificação cinco competências, as quais: domínio da norma culta da língua portuguesa, compreensão e desenvolvimento do tema, defesa do ponto de vista, demonstrar conhecimento dos mecanismos linguísticos necessários para a construção da argumentação e elaborar proposta de intervenção para o problema abordado.

> 'a TRI é um conjunto de modelos matemáticos que procuram representar a probabilidade de um indivíduo dar uma certa resposta a um item como função dos parâmetros do item e da habilidade (ou habilidades) do respondente.' (p.7). Uma das grandes vantagens da TRI sobre a Teoria Clássica é que ela permite a comparação entre populações. Desde que submetidas a provas que tenham alguns itens comuns, ou ainda, a comparação entre indivíduos da mesma população que tenham sido submetidos a provas totalmente. Isto porque uma das principais características da TRI é que ela tem como elementos centrais os itens, e não a prova como um todo. (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000, p.03).

Além da prova, faz parte da avaliação do ENEM o "Manual do Inscrito" que é composto por questões divididas em blocos: "Você e sua família", "Você e o trabalho" e "Você e os estudos". Este manual é acessível a todos os participantes pela internet, acompanhado do questionário que tem por objetivo coletar dados socioeconômicos, percepções e expectativas do avaliado. Assim, diversas informações são coletadas e podem ser analisadas para traçar o perfil dos estudantes ou para verificar seu impacto sobre o desempenho dos mesmos. Dessa forma, além de avaliar as competências e habilidades, também avalia os dados socioeconômicos do aluno, e com isso o INEP elenca vários dados estatísticos que vão desde a renda familiar, à escola que cursou o Ensino Médio, etnia, faixa etária e outros. Na medida em que os seus resultados são divulgados, podem ser identificadas possíveis deficiências nas competências e habilidades.

O ENEM consolidou ainda mais sua importância quando passou a ser considerado o principal meio para o ingresso no ensino superior no Brasil, à exceção de algumas universidades e instituições que mantiveram processo seletivo próprio. O resultado do exame é divulgado através de um boletim de resultados, com dados globais e regionais, disponíveis aos interessados, como os estudantes, às instituições de ensino e pesquisadores a fim de propiciar condições de análises e reflexões acerca desse exame. Desde a sua criação, os resultados do ENEM são apresentados em um boletim que compara, através de um gráfico, a média do estudante com a média nacional. Tornando-se perceptível que o ENEM trazia consigo um aperfeiçoamento, se levando em consideração as médias nacionais ano a ano.

Essa reformulação do ENEM surgiu com a ideia de rompimento com esse ensino tradicional, no sentido que o processo de ensino-aprendizagem estava sendo apenas transferência de conhecimento do professor para o educando.

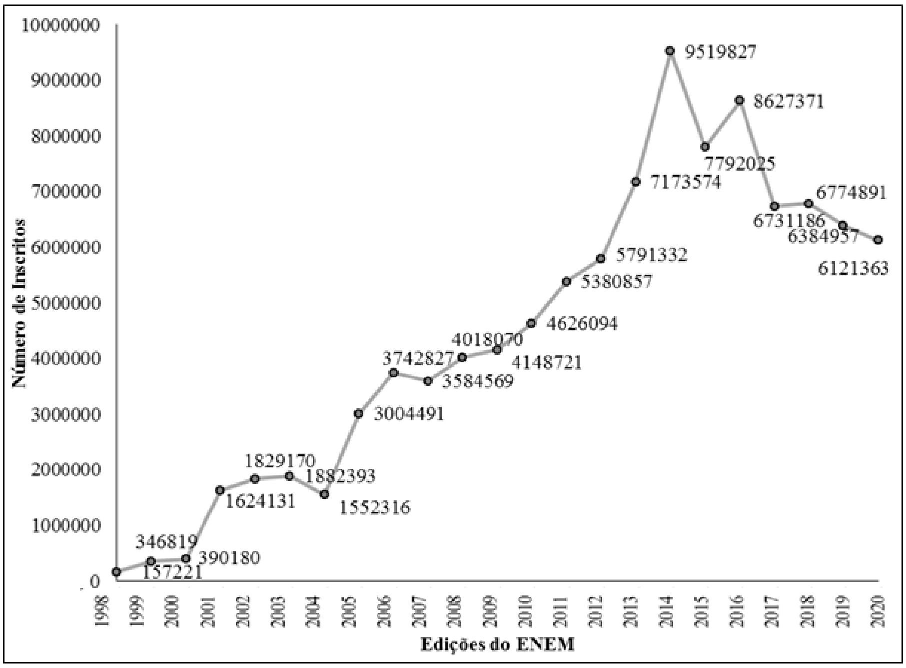
Pinto e Pacheco (2014), afirmam que a implementação da avaliação por habilidades tem provocado os professores da educação básica a uma prática que prepare o alunado para a avaliação nacional de forma diferente do que era avaliado nos vestibulares. Uma vez que os educadores, além dos conteúdos, como informações e acontecimentos marcantes, também devem trabalhar a contextualização e a interdisciplinaridade.

Segundo Cavalcante (2011, p.65):

> As disciplinas acumularam informações desnecessárias que se tornaram obstáculos ao processo ensino-aprendizado; e o pior é ter a convicção de que existe um grande descompasso entre o que é ensinado nas escolas e o que é realmente necessário à vida do indivíduo. Assim, era necessário haver uma mudança na formação do indivíduo, mas, como já foi afirmado, o tipo de formação dada nas escolas era suficiente para permitir a entrada dos estudantes nas universidades. Como se pode observar pelo que já foi discutido, o Novo ENEM vem direcionar outro tipo de formação – a necessária para o desenvolvimento da sociedade atual, uma sociedade na qual a internet disponibiliza o conhecimento e as indústrias precisam de operadores capazes de pensar e agir. Assim, direcionar a formação do trabalhador, no Brasil, significa atender às necessidades de formação do indivíduo para que ele consiga responder aos anseios da sociedade.

O Exame Nacional do Ensino Médio contou, em sua primeira edição em 1998, com 157. 221 inscritos e apenas 115 mil efetivamente fizeram a avaliação. O número de inscrições cresceu cerca de 100% em 1999, e ao longo dos anos apresentou crescimento como podemos observar no Gráfico 1.

Figura 2.1 GRÁFICO 1 – HISTÓRICO DE INSCRIÇÕES NO ENEM DE 1998 A 2020



Fonte: Elaboração da autora (2021), com dados do portal MEC/INEP.

O auge das inscrições e da popularização do ENEM ocorreu após 2004, quando o Ministério da Educação instituiu o Programa Universidade para Todos (PROUNI) e vinculou a concessão de bolsas, em instituições de ensino superior (IES) privadas, à nota obtida no Exame. Observa-se no Gráfico 1, que a partir de 2005 (alcançou mais de 3 milhões de inscritos), há um crescimento no número de inscrições, devido à isenção das taxas de inscrição para os alunos da rede pública concluintes de Ensino Médio e também devido à adoção da pontuação do ENEM para a concessão de bônus/bolsas de estudo e seleção de vagas nos principais processos seletivos para ingresso no nível superior do país.

No ano de 2014, o ENEM registrou a inscrição de 9. 519.827 estudantes. Ressaltando que, desde sua criação, o ENEM se caracteriza como um exame individual, de caráter voluntário que, com as modificações em sua proposta ao longo do tempo, apresenta-se atualmente como o maior exame educacional aplicado pelo Governo Federal e um dos maiores do mundo em quantidade de participantes. Aumentada essa participação, torna-se mais concorrido o ingresso ao Ensino Superior, principalmente nas universidades públicas, é necessário que o aluno tenha um ótimo desempenho na prova para garantir sua vaga.

Atualmente o Exame Nacional do Ensino Médio oferece aos estudantes que passam na prova, várias possibilidades de acesso ao Ensino Superior, através dos programas implantados pelo governo, na tentativa de democratizar o ingresso às instituições públicas e particulares. Além disso, a consolidação do ENEM que foi fortalecida a cada ano, ou seja, à medida que aumentavam os inscritos no exame, proporcionava a criação de programas do Governo Federal vinculados ao seu resultado, e mais programas associados proporcionavam mais inscritos.

Abaixo citamos brevemente os principais programas associados ao resultado do ENEM:

Vestibular: as instituições públicas e privadas utilizam o resultado do ENEM exclusivamente ou associado a outras formas para preenchimento de suas vagas.

Programa Universidade para Todos - PROUNI: o programa tem como finalidade a concessão de bolsas de estudo integrais e parciais em cursos de graduação e sequenciais de formação específica, em instituições de ensino superior privadas. Criado pelo Governo Federal em 2004 e institucionalizado pela Lei 11.096, em 13 de janeiro de 2005 oferece, em contrapartida, isenção de tributos àquelas instituições que aderem ao Programa.

Fundo de Financiamento Estudantil - FIES: é um programa do Ministério da Educação destinado a financiar a graduação na educação superior de estudantes matriculados em cursos superiores não gratuitos na forma da Lei 10.260/2001. Podem recorrer ao financiamento os estudantes matriculados em cursos superiores que tenham avaliação positiva nos processos conduzidos pelo Ministério da Educação.

Sistema de Seleção Unificada - SISU: O Sistema de Seleção Unificada (Sisu) é o sistema informatizado gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC) no qual instituições públicas de ensino superior oferecem vagas para candidatos participantes do ENEM.

Sistema de Seleção Unificada da Educação Profissional e Tecnológica - SISUTEC: é conduzido pelo Ministério da Educação (MEC), no qual instituições públicas e privadas de ensino superior e de educação profissional e tecnológica oferecem vagas gratuitas em cursos técnicos na forma subsequente para candidatos participantes do ENEM.

Ingressar em Instituições de Educação Superior portuguesas: Os resultados individuais do ENEM podem ser usados nos processos seletivos de instituições de educação portuguesas. Mais de 40 universidades, institutos politécnicos e escolas superiores têm acordo interinstitucional com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

Deste modo, se o ENEM já era permeado por uma determinada proposta de avaliação, ao tornar-se um sistema que é responsável pela entrada de inúmeros estudantes às instituições superiores, acabou por impor às escolas um currículo que visasse o melhor desempenho dos discentes nessa avaliação. Nesse sentido, com o ENEM, como sistema nacional de avaliação e processo seletivo para a entrada nas universidades públicas e privadas, as unidades escolares podem refletir sobre suas práticas educativas e traçar metas pedagógicas a serem alcançadas pela comunidade escolar. Isso pode contribuir diretamente para a melhoria na qualidade do ensino ofertado e, consequentemente, para melhores resultados no processo de aprendizagem.

Hollas e Bernardi (2020) afirmam que,

> O Enem, que se tornou um exame histórico para a educação brasileira. Além de avaliar os estudantes que concluem o ensino médio, tal exame instala-se como uma ferramenta para o estabelecimento de índices de qualidade da educação básica e contribui com a efetivação, ou não, de políticas educacionais. Em outro aspecto também pode ser considerado um processo seletivo para o ingresso na Educação Superior, e, por isso, influencia a mobilização por mudanças nos processos educativos do ensino médio no intuito de preparar os estudantes para a prova. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e as competências para uma Educação Estatística Crítica.

Destacando a estrutura pedagógica do ENEM, além de avaliar as competências e habilidades desenvolvidas pelos estudantes brasileiros ao decorrer da educação básica, o exame revela ainda aspectos socioeconômicos dos participantes e fornece informações sobre a realidade das salas de aulas e das escolas brasileiras. Contribuindo para a formulação dos indicadores da qualidade da educação no país, sendo que, para o INEP

> Os resultados do Exame auxiliam estudantes, pais, professores e dirigentes das instituições escolares nas reflexões sobre suas práticas e no estabelecimento de estratégias em favor da melhoria da qualidade de ensino, ou seja, juntamente com outros dados, seus resultados podem contribuir para processos de reflexão pedagógica, aprimoramento do ensino, orientação curricular, planejamento da vida escolar e formulação de políticas educacionais (INEP, 2013, p.107-108).

Diante de tudo que foi explanado, observamos que a avaliação em larga escala do ENEM se diferencia das outras proporcionadas pelo MEC, por dar maior atenção ao desempenho dos estudantes, quando se trata das competências, e por ter como base uma ideia melhor organizada e ampla do desenvolvimento da inteligência humana e de como se constrói o conhecimento. Assim, devido ao seu caráter multifocal, constituído de ações educacionais, sociais e democráticas, vem, cada vez mais, ganhando relevância social e política.

2.3 Perfil das Questões de Geometria na Prova do ENEM

Composta de 45 questões dos mais diversos assuntos inseridos no currículo do Ensino Médio, a prova de matemática do ENEM é uma das mais extensas. Atualmente é aplicada no segundo dia de exame, juntamente com o caderno que contempla as disciplinas de biologia, física e química, denominado Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Diante da vastidão de conteúdos a serem estudados e/ou revisados, saber os temas mais frequentes pode otimizar o tempo do aluno. Embora o objetivo aqui não seja apenas apontar um roteiro para o estudante, mas também fazer uma análise de como o ENEM aborda a geometria e apresentar recursos para que o discente possa ter um desempenho satisfatório nessa área.

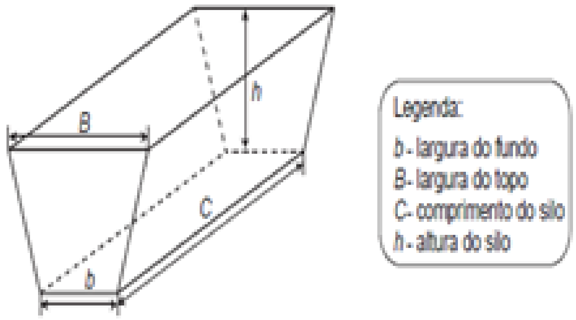
De acordo com a matriz de referência do ENEM, o caderno Matemática e suas Tecnologias compreende sete competências compostas por um total de trinta habilidades, sendo pelo menos três dessas competências voltadas para a geometria.

Analisando cada uma dessas competências e suas habilidades, podemos perceber que essa avaliação é produzida pensando na aplicabilidade dos conteúdos de forma contextualizada, abordando informações científicas, acontecimentos recentes e notícias do cotidiano do cenário brasileiro, podendo apresentar questões interdisciplinares, mas, em sua maioria, o tema para responder é específico de uma disciplina, embora possa abordar mais de um tópico desta, como por exemplo, uma questão em que seja necessário utilizar os cálculos de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos. Além de exigir que o educando utilize um raciocínio lógico por meio de reflexões acerca dos problemas levantados.

Agora vejamos quais temas de geometria costumam ser cobrados no exame e como as questões são apresentadas. Para isso, separamos alguns problemas matemáticos, sobre o assunto, de edições anteriores do ENEM como exemplos, dos quais apresentamos uma solução e algumas considerações sobre o nível de dificuldade de resolução e as possíveis competências e habilidades exigidas. Confira abaixo o resultado de nossa análise das provas de 2010 a 2020:

1. Volume de sólidos geométricos

ENEM 2014 - Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denominam-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

(A) 110. (B) 125. (C) 130. (D) 220. (E) 260.

Solução:

Se, para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo, então em 2 m de altura do silo a largura do topo tem 2 . 0,5 m = 1 m a mais do que a largura do fundo. Desta forma, a largura do fundo é de (6 – 1) m = 5 m.

O volume do silo, em metro cúbicos, é

$$V = \frac{(6+5)\cdot 2}{2} \cdot 20 = 220$$

Se, após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo, então cabem no silo:

$$\frac{220}{2} = 110\,t$$

Considerações: o problema exige uma interpretação para descobrir o valor da medida da largura do fundo. O participante precisa lembrar a fórmula do volume de um prisma trapezoidal e observar que o cálculo do volume é apenas parte da resolução. Para se chegar à resposta da questão, ainda será necessário utilizar razão e proporção, a famosa regra de três. Por isso, consideramos que essa seja uma questão de nível intermediário.

2. Áreas e Perímetros de figuras planas

ENEM 2011 - Em certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m
Terreno 2: 55 m por 55 m
Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

Solução:

Primeiro vamos calcular o perímetro de cada terreno para sabermos quais atendem as restrições impostas pela prefeitura, assim, temos:

Terreno 1:
$$2 \cdot 55 + 2 \cdot 45 = 200 > 180$$

Terreno 2:
$$2 \cdot 55 + 2 \cdot 55 = 220 > 180$$

Terreno 3:
$$2 \cdot 60 + 2 \cdot 30 = 180$$

Terreno 4:
$$2 \cdot 70 + 2 \cdot 20 = 180$$

Terreno 5:
$$2 \cdot 95 + 2 \cdot 85 = 360 > 180$$

Observe que, apenas os terrenos 3 e 4 atendem as restrições impostas. Agora, vamos calcular a área deles para sabermos qual dos dois possui maior área:

Terreno 3:	Terreno 4:
$60 \cdot 30 = 1800$	$70 \cdot 20 = 1400$

Logo, o terreno de maior área, que atende às restrições impostas pela prefeitura, é o 3.

Considerações: a contextualização é facilmente compreendida. O problema requer os cálculos de área e perímetro de um retângulo e o nível apresentado pertence ao Ensino Fundamental.

3. Escala e Conversão de unidades de medidas

ENEM 2011 - Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1: 250. Que medida de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

(A) 4,8 e 11,2 (B) 7,0 e 3,0 (C) 11,2 e 4,8 (D) 28,0 e 12,0 (E) 30,0 e 70,0

Solução:

Convertendo as unidades para centímetros, temos:

$$28 \text{ m} = 2800 \text{ cm}$$
$$12 \text{ m} = 1200 \text{ cm}$$

Como a escala é de 1: 250, as medidas da maquete serão de:

$$\frac{1}{250} = \frac{x}{2800} \qquad \frac{1}{250} = \frac{y}{1200}$$
$$x = \frac{2800}{250} = 11,2cm \qquad y = \frac{1200}{250} = 4,8cm$$

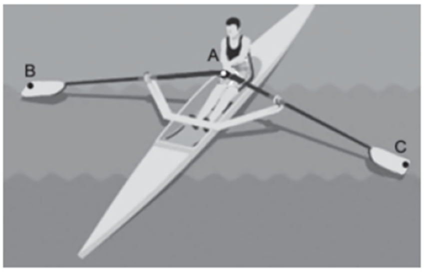
Assim, observamos que as medidas de comprimento e largura da maquete são, respectivamente, 11,2 cm e 4,8 cm.

Logo, a alternativa correta é o item C.

Considerações: a resolução da questão acima envolve noções de escala, conversão de unidades de medidas, razão e proporção. Um ponto importante a ser considerado nessa questão é a forma como ela foi contextualizada, tornando sua leitura interpretativa de fácil compreensão. Assim, pelos conteúdos mobilizados, em nossa concepção, é um problema que está no nível do Ensino Fundamental.

4. Características de figuras planas e/ou espaciais

ENEM 2018 - O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez.2017(adaptado).

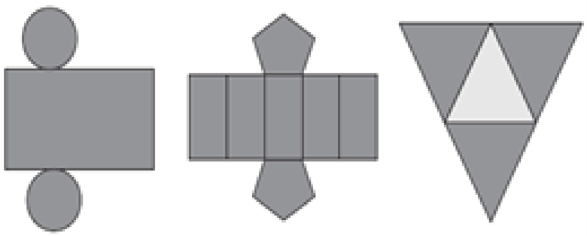
Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo B C tem medida de 170°.
O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é
A) retângulo escaleno. B) acutângulo escaleno. C) acutângulo isósceles.
D) obtusângulo escaleno. E) obtusângulo isósceles.

Solução:
De acordo com o enunciado, os pontos A, B e C formam um triângulo onde AB = AC e m(BÂC) = 170°, que é um triângulo obtusângulo e isósceles.

Considerações: o conhecimento que o estudante precisa dispor sobre classificação de figuras planas, nessa questão, é básico, pois se trata da caracterização de um triângulo, sem exigência de cálculos, sendo um problema de nível fácil.

5. Planificações de sólidos geométricos

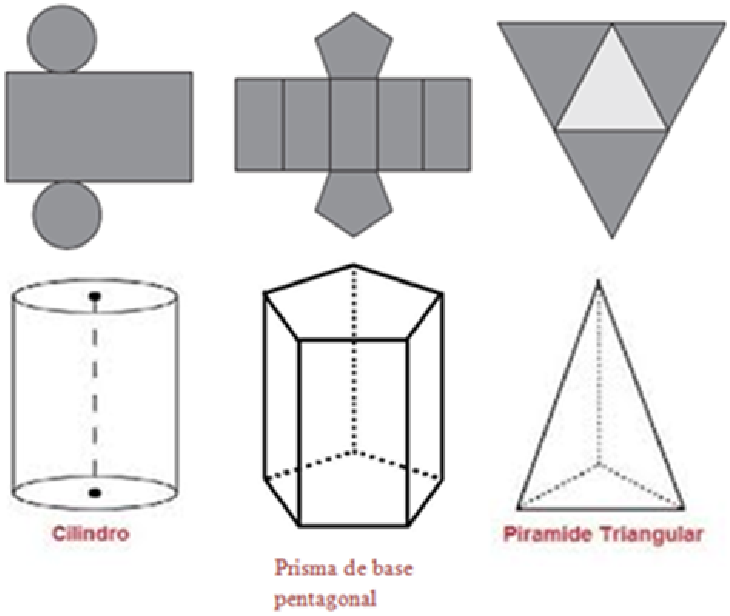
ENEM 2012 - Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
(A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

(B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
(C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
(D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
(E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

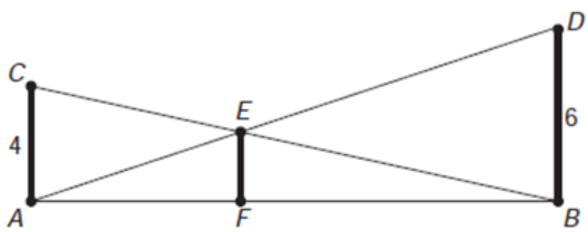
Solução:



Considerações: aqui a percepção espacial dos sólidos geométricos, suas planificações e nomenclaturas são requisitadas ao candidato. Portanto, supomos ser uma questão fácil no nível do Ensino Fundamental.

6. Semelhanças de figuras planas

ENEM 2013 - O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

(A) 1 m (B) 2 m (C) 2,4 m (D) 3 m (E) $2\sqrt{6}$ m

Solução:

Perceba que os triângulos AEF e ADB são semelhante e da proporcionalidade entre eles, temos:

$$\frac{EF}{6} = \frac{AF}{AB} \tag{2.1}$$

De forma análoga, em relação aos triângulos BEF e BCA, temos:

$$\frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB} \tag{2.2}$$

Somando (2.1) e (2.2), temos:

$$\frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB}$$

$$\frac{2EF + 3EF}{12} = \frac{AB}{AB}$$

$$\frac{5EF}{12} = 1$$

$$EF = \frac{12}{5} = 2,4\,m$$

Logo, a alternativa correta é o item C.

Considerações: a questão exige do estudante certo domínio sobre semelhança de triângulos, raciocínio visual e resolução de equações algébricas. De acordo com nosso ponto de vista, essa questão está no nível intermediário.

7. Teorema de Pitágoras

ENEM 2020 - No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.

Figura 1

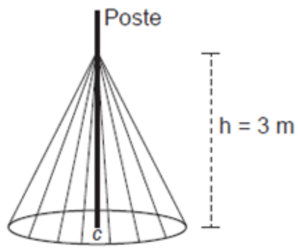
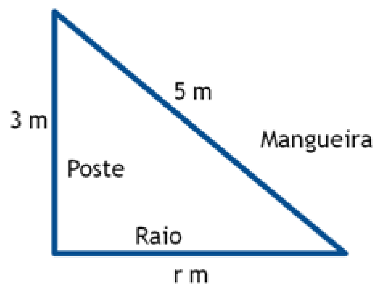


Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.
Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.
Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de
(A) 4,00. (B) 4,87. (C) 5,00. (D) 5,83. (E) 6,26.

Solução:

Como os 100 m de mangueiras de iluminação devem ser divididos em 20 segmentos de reta, cada segmento deve ter 5 m. O poste, a mangueira e o raio da circunferência estão representados na figura.



Pelo Teorema de Pitágoras, segue-se que:

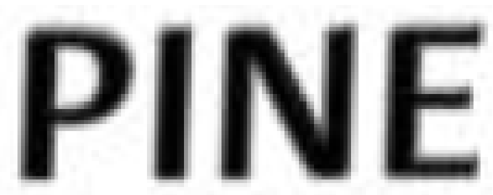
$$r^2 + 3^2 = 5^2$$
$$r^2 = 25 - 9$$
$$r^2 = 16$$
$$r = 4$$

Portanto, o raio da circunferência será 4 metros.

Considerações: a questão demanda do candidato uma interpretação de texto aguçada para perceber que ela pode ser solucionada através do Teorema de Pitágoras, cuja hipotenusa é a medida que o segmento de mangueira precisa ter em apenas um dos 20 arcos que serão formados para a árvore, e os catetos são as medidas do poste e do raio. Devido a isso, acreditamos que seu nível seja intermediário.

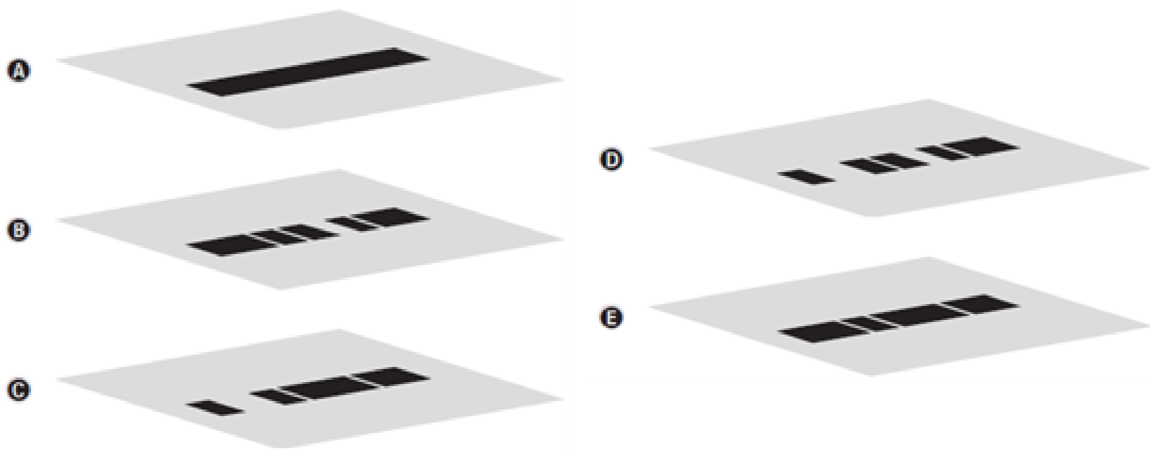
8. Projeção ortogonal

ENEM 2019 - Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.



Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.

Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é



Solução:
Fazendo a projeção ortogonal, obtém-se:

Considerações: requer do indivíduo visão espacial e percepção das sombras formadas pelos objetos quando a luz se encontra ortogonalmente sobre eles. Assim, presumimos que seja um problema de simples resolução.

Como podemos observar, o ENEM parece buscar associar o conteúdo à situações sociais, usando a teoria com aspectos do cotidiano, estimulando o discente a ampliar sua percepção de mundo e transformá-lo, além de incentivar as escolas a formar alunos que saibam relacionar, calcular, compreender e comparar grandezas geométricas em um problema real.

Além disso, é possível perceber que fora o conteúdo de matemática o estudante precisa exercitar a leitura, a interpretação de texto e o raciocínio lógico crítico para que possa ter um bom desempenho nesse processo avaliativo.

Comparando a pedagogia de Paulo Freire e a forma como o ENEM tenta abordar suas questões, aparentemente ambos buscam que o educando seja um ser crítico e criativo capaz de notar que a aprendizagem adquirida na escola não é desconectada do mundo real, que com ela é possível interagir e mudar significativamente sua realidade, tornando a sociedade mais democraticamente consciente e as pessoas autoras da história ao invés de serem apenas espectadoras. Nesse sentido, em Pedagogia da Autonomia, Freire (2011 p. 46) exprime que:

> A capacidade de aprender, não apenas para nos adaptar, mas, sobretudo para transformar a realidade, para nela intervir, recriando-a, fala de nossa educabilidade a um nível distinto do nível do adestramento dos outros animais ou do cultivo das plantas.

E por sermos seres capazes de aprender, criar ou recriar, pensar criticamente aquilo que foi ensinado, que não podemos nos limitar a simplesmente fazer cópias, como Freire reitera:

> (...) *aprender* é uma aventura criadora, algo, por isso mesmo, muito mais rico do que meramente repetir a *lição dada*. Aprender para nós é *construir, reconstruir, constatar para mudar*, o que não se faz sem abertura ao risco e à aventura do espírito. (FREIRE, 2011, p.47)

O ENEM aparenta ter essas mesmas convicções, pela forma como, através da contextualização dos problemas, tenta desafiar os estudantes a colocarem em prática sua criatividade e seus conhecimentos que vão além de uma reprodução, mecanicamente memorizada de um determinado assunto. Podemos perceber isso, também, em alguns dos Eixos Cognitivos comuns a todas as áreas de conhecimento presentes na sua matriz de referência, tais como:

> (...) III. **Enfrentar situações-problema (SP)**: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações, representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
> IV. **Construir argumentação (CA)**: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
> V. **Elaborar propostas (EP)**: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, Freire mostra que devemos constatar o mundo para desenvolvermos a capacidade de intervir nele, conforme vemos no trecho:

> No mundo da história, da cultura, da política, constato não para me adaptar, mas para mudar. No próprio mundo físico minha constatação não me leva à impotência. O conhecimento sobre os terremotos desenvolveu toda uma engenharia que nos ajuda a sobreviver a eles. Não podemos eliminá-los, mas podemos diminuir os danos que nos causam. Constatando, nos tornamos capazes de intervir na realidade, tarefa incomparavelmente mais complexa e geradora de novos saberes do que simplesmente a de nos adaptar a ela. (FREIRE, 2011 p. 52)

Assim pelas propostas existentes na matriz de referência do ENEM e pelo contexto apresentado em suas questões, o ENEM parece comungar com as ideias de Paulo Freire no que se refere ao fato dos estudantes precisarem fazer uma leitura de mundo não apenas para se adaptarem às mudanças causadas por fenômenos da natureza, por exemplo, mas também para desenvolver mecanismos que ajudem a humanidade a solucionar problemas, sejam eles de origem natural, social, cultural, político ou histórico.

Capítulo 3

Metodologia e Procedimentos

O ensino de matemática constitui-se como um desafio para o professor, independente da série em que lecione, em razão de que ele se depara muitas vezes com a falta de interesse dos educandos e precisa continuamente reavaliar seus métodos para tornar o conhecimento acessível ao seu público. No caso específico do ensino da geometria, esse desafio é mais proeminente, visto que a aprendizagem dos alunos se mostrou ao longo dos anos pouco consistente e deficitária.

Devido a isso, buscamos alternativas que colaborassem em minimizar tais déficits e pudessem contribuir com o trabalho docente, sendo mais um artifício para o professor aplicar nas suas aulas, ajudando de uma maneira geral a educação.

Assim, a metodologia utilizada neste trabalho é uma pesquisa qualitativa, que, segundo Minayo:

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. (...). Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAYO, 2002, p.21-22).

Sendo mais especificamente do tipo intervenção pedagógica, que, para Damiani e seus colaboradores:

> Pesquisa do tipo intervenção pedagógica são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências. (DAMIANI, 2013, p. 58).

Dessa forma, primeiramente, empreendemos uma revisão bibliográfica sobre o ENEM para destacar suas características, sua relevância e as competências e habilidades mobilizadas em sua estruturação. Analisamos também as questões do caderno de provas de matemática dos últimos dez anos, catalogando aquelas que, no nosso entendimento, eram referentes à geometria, de acordo com os conteúdos abordados, utilizando como critério a diversificação dos assuntos, o nível de dificuldade, priorizando as de nível fácil e intermediário, selecionando um total de 95 questões, das quais 64 foram direcionadas, de acordo com o tema, para as oficinas, abrangendo o maior número possível de edições do ENEM sobre os tópicos que seriam trabalhados. Posteriormente, buscamos desenvolver metodologias eficazes para tornar esse saber mais acessível aos alunos dentro desse universo de ensino remoto. Nesse sentido, encontramos na pedagogia de Paulo Freire um caminho para embasamos nossa pesquisa, e um dos motivos que nos chamou atenção para sua técnica foi o fato dele usar os vocábulos presentes na linguagem dos grupos que seriam alfabetizados, pois, segundo Freire,

> (...) as palavras com que organizar o programa da alfabetização deveriam vir do universo vocabular dos grupos populares, expressando a sua real linguagem, os seus anseios, as suas inquietações, as suas reivindicações, os seus sonhos. Deveriam vir carregadas da significação de sua experiência existencial (...) para o processo de sua apreensão e não de sua memorização mecânica. (FREIRE, 1989, p.13).

Dessa forma, os aspirantes ao letramento passam a ser agentes de sua aprendizagem ao entenderem a importância da alfabetização e de se apropriarem dessa técnica, em termos conscientes. "É entender o que se lê e escrever o que se entende. É comunicar-se graficamente." (Freire, 1967, p.110). Deste modo, a aprendizagem não é apenas mecânica sem sentido, exigindo muita paciência para aguentar, depois de um dia de trabalho, lições que falem sobre evas e uvas a pessoas que conhecem poucas evas e nunca comeram uvas. (Freire, 1967, p.104).

Seguindo esse raciocínio em atribuir mais significado a aprendizagem de matemática, mais especificamente da geometria, vimos a possibilidade de associar a técnica que Paulo Freire criou para alfabetizar adultos, às questões do ENEM e a alguns recursos tecnológicos como o GeoGebra para facilitar a compreensão dos alunos bem como enfatizar o porquê é importante aprender.

Assim, para nortear nossa metodologia, utilizamos o livro "Educação Como Prática da Liberdade" (1967), de Paulo Freire, fazendo um paralelo com alguns dos seus postulados para o trabalho com a geometria, podendo também ser usado para as demais áreas. Agora vejamos essas aproximações:

Fase 1 do Método Paulo Freire - Levantamento do universo vocabular dos grupos com quem se trabalhará.

(...) os falares típicos do povo. Suas expressões particulares, vocábulos ligados à experiência dos grupos.

Aproximação - Explicação do conteúdo a ser trabalhado utilizando uma linguagem mais próxima aos vocábulos dos alunos, introduzindo aos poucos o conceito formal.

Fase 2 do Método Paulo Freire - A segunda fase é constituída pela escolha das palavras, selecionadas do universo vocabular pesquisado.

(...) o das dificuldades fonéticas (as palavras escolhidas devem responder às dificuldades fonéticas da língua, colocadas numa sequência que vá gradativamente das menores às maiores dificuldades).

Aproximação - Escolha dos assuntos e questões, apresentados, gradativamente, em ordem crescente, em relação ao grau de dificuldade.

Fase 3 do Método Paulo Freire - A terceira fase consiste na criação de situações existenciais típicas do grupo com quem se vai trabalhar.

Estas situações funcionam como desafios aos grupos. São situações-problemas, codificadas, guardando em si elementos que serão descodificados pelos grupos, com a colaboração do coordenador. O debate em torno delas irá, (...), levando os grupos a se conscientizarem para que concomitantemente se alfabetizem.

Aproximação - Diálogo sobre as questões contextualizadas, procurando fazer o aluno pensar como resolver tal situação-problema, e constatar que o conhecimento adquirido na escola não está desligado do mundo.

Fase 4 do Método Paulo Freire - A quarta fase consiste na elaboração de fichas-roteiro, que auxiliem os coordenadores de debate no seu trabalho. Estas fichas-roteiro devem ser meros subsídios para os coordenadores, jamais uma prescrição rígida a que devam obedecer e seguir.

Aproximação – Perguntas-chaves sobre as questões com intuito de instigar os educandos a falarem como resolver o problema, como por exemplo: o que o enunciado quer? Será necessário utilizar alguma fórmula? Qual? O que precisamos fazer para chegar à resposta?

Fase 5 do Método Paulo Freire - A quinta fase é a feitura de fichas com a decomposição das famílias fonêmicas correspondentes aos vocábulos geradores.

Aproximação – Decomposição da questão apresentando fórmulas, definições, teoremas entre outros durante sua resolução e a utilização, quando possível, do software GeoGebra para auxiliar a visualização e compreensão do conteúdo.

Como podemos observar, as aproximações realizadas podem ser aplicadas nas demais áreas da Educação Básica, basta especificar o assunto e as questões da área que se deseja trabalhar. Outro ponto que podemos destacar é o fato de não ser necessário mudanças muito bruscas nem custos altos para a sua aplicação, tornando o seu custo-benefício viável. Além disso, como colocado em entrevista concedida a Forner (2005, p. 94), pela educadora Maria do Carmo Santos, a resolução de problemas matemáticos ajuda a desenvolver o pensamento heurístico:

> (...) o valor da Resolução de Problemas estaria na possibilidade de colocar o aluno em ação. Ao colocar o aluno frente a uma situação que pede solução, ele deve ir à busca de solução com liberdade e sendo um problema matemático ele deve aprender alguma matemática com a solução e, de algum modo, desenvolver o seu pensamento heurístico.

Portanto, selecionar questões do ENEM sobre determinado tema e aliá-las à pedagogia de Paulo Freire, juntamente com o GeoGebra ou outros recursos tecnológicos que ajudem a tornar o conhecimento geométrico e matemático mais palpável e consequentemente compreensível, é uma maneira eficaz, em nosso entendimento, de atingir um dos principais objetivos desse trabalho: que os alunos tenham uma aprendizagem significativa, embora saibamos que essa metodologia ainda não esteja a nível de uma educação libertadora, mas a caminho dela.

Ao longo dos anos, observamos a dificuldade que muitos alunos apresentam na aprendizagem de matemática, percebemos que um dos principais motivos para essa realidade, reside na pouca bagagem de conhecimento que adquiriram durante o Ensino Fundamental, conteúdos e técnicas que deveriam saber, mas que infelizmente alguns não chegaram nem a ver ou, se viram, não os assimilaram de forma correta.

Independente dos motivos que fizeram esses alunos chegarem ao Ensino Médio com tal defasagem, o professor acaba sem poder explorar o máximo do assunto do Ensino Médio, pois precisa revisar o conteúdo do fundamental. Ao fazermos essa revisão, foi possível perceber que um dos tópicos mais críticos é a geometria, que, mesmo sendo trabalhada, em algumas escolas, durante todo ano letivo, ainda não é suficiente, pois muitas vezes é destinada apenas uma aula semanal para essa parte e o conteúdo é bastante extenso, cheio de nomes e fórmulas para cada figura plana e espacial, além de ter teoremas, propriedades, axiomas e outros detalhes que fazem essa parte da matemática parecer um universo inexplorável para alguns alunos, mesmo a geometria sendo uma das áreas mais presentes no nosso cotidiano, bastando olharmos atentamente, para percebermos sua presença ao nosso redor. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC),

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (BNCC, 2018, p. 271).

É inegável, portanto, o valor que esse saber matemático tem para a sociedade como um todo. Dessa forma, buscar novas estratégias que potencializem o processo de ensino-aprendizagem acaba sendo uma ação imprescindível para tornar esse conhecimento significativo para o discente.

Nesse sentido, sentimos a necessidade de utilizar a pesquisa do tipo intervenção pedagógica no processo metodológico, já que se trata de uma pesquisa que procura intervir na realidade encontrada. Assim, para a criação dessa nova ferramenta, foi necessário acessarmos as provas anteriores do ENEM e verificarmos cada questão, separando quais eram sobre geometria e quais não. Assim, foi possível selecionar um banco de questões sobre esse saber. Depois de resolvermos ou copiarmos soluções, tentamos nomear o assunto trazido em cada enunciado com objetivo de delinear o perfil adotado pelo ENEM acerca do ensino de geometria, observando quais tópicos são mais presentes.

Com as questões em mãos, vendo o conteúdo mais frequente e a forma como ele era abordado, buscamos elaborar a avaliação diagnóstica com o intuito de nortear as oficinas através das dificuldades a serem trabalhadas. Na elaboração das avaliações, tanto diagnóstica quanto de desempenho, criamos questões baseadas nas questões existentes, tentando seguir o mesmo padrão, e outras apenas adaptamos, fazendo pequenas alterações. Na construção de algumas questões, fizemos simulações e experiências, buscando ficar o mais próximo da realidade, como na questão sobre projeção ortogonal em que projetamos uma luz ortogonalmente em uma superfície circular para se perceber como é sua sombra lateral.

Tanto na avaliação diagnóstica quanto na avaliação de desempenho, foram criadas apenas cinco questões, pois, devido à realidade do momento em relação às aulas remotas e demais circunstâncias, sendo essa quantidade de questões, ficaria mais fácil obter um resultado aproximado dos conhecimentos dos alunos.

O link da avaliação foi postado nos grupos das turmas dos terceiros anos, juntamente com o convite para que eles participassem das oficinas que seriam ofertadas. O convite foi aceito por vinte e três alunos dos terceiros anos, do ano letivo de 2021, da escola da Rede Estadual de Ensino Amália Xavier, situada no município cearense de Juazeiro do Norte.

Inicialmente pensamos em apenas criar links avulsos para a realização das oficinas, através do Google Meet. Depois conversando com a coordenação e descrevendo o projeto e o intuito dele, resolvemos criar uma sala no Google Classroom, intitulada “Revisão para o ENEM”, com os alunos participantes, tendo como objetivo disponibilizar os slides preparados para as aulas, atividades, jogos, avaliações e demais materiais apresentados para eles acessarem e poderem estudar no período entre as oficinas, já que elas foram realizadas de forma quinzenal, exceto da primeira para a segunda, pois foi necessário mudar o dia da aplicação, que inicialmente seria na segunda-feira e passou a ser na quinta-feira.

Com base nos assuntos mais frequentes nas provas do ENEM e naqueles em que os discentes demonstraram certa dificuldade, programamos uma sequência de apresentação destes conteúdos, dos mais simples aos mais complexos, os quais foram exibidos através de slides, apresentando à seguinte sequência didática: teoria do conteúdo, resolução de várias questões do ENEM, relacionando a teoria com a prática do conteúdo apresentado, e algumas questões deixadas como exercício, mostrando a importância de se pôr em prática os conhecimentos adquiridos.

As questões trabalhadas em cada oficina foram selecionadas cuidadosamente, sendo analisada a teoria, a forma de serem apresentadas, a maneira de simplificar contas e a possibilidade delas poderem ser exibidas através do GeoGebra.

A linguagem utilizada na explicação procurava fazer uma relação entre a linguagem rígida e formal da matemática e a linguagem informal mais próxima à realidade dos alunos, para que o entendimento fosse o maior possível.

Desejando ampliar as ferramentas e recursos a serem utilizados pelos alunos na construção de sua aprendizagem, também elaboramos jogos e atividades no site Wordwall[1], como o jogo da memória, com figuras geométricas e suas respectivas fórmulas para o cálculo de áreas ou a classificação dos sólidos, e algumas de suas planificações em prismas, pirâmides e corpos redondos, cujos links foram disponibilizados para os estudantes entre as oficinas.

Cada oficina era composta de duas horas-aula, em um total de cinco oficinas, que, contando com o tempo disponibilizado para a seleção das questões, teve duração de quatro meses, tendo suas realizações nas seguintes datas, apresentando os respectivos conteúdos:

1º oficina dia 12/04/21 – Escalas e Conversão de Unidades de Medidas
2º oficina dia 29/04/21 – Área e Perímetro de Figuras Geométricas
3º oficina dia 13/05/21 – Volume e Planificação de Sólidos Geométricos
4º oficina dia 27/05/21 – Características de Figuras Geométricas, Semelhança de Figuras Geométricas, Teorema de Pitágoras e Projeção Ortogonal.
5º oficina dia 10/06/21 – Propriedades da Reta Tangente, Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Localização de Pontos, Gráficos e Figuras Geométricas no Plano Cartesiano e Propriedades dos Polígonos.

Nas oficinas, fazíamos a apresentação dos slides mostrando o assunto a ser trabalhado naquele dia, depois tínhamos uma breve explicação ou revisão do conteúdo cuja linguagem utilizada sempre fazia uma conexão do estilo informal com a linguagem técnica apropriada. Em seguida, havia o momento para a interpretação e a rápida discussão com os alunos sobre as possíveis formas de resolução das questões. Dessa maneira, adotamos uma posição que Freire considera válida, como este, explica no trecho:

> (...) há uma terceira posição que considero profundamente válida, que é a em que o professor ou a professora faz uma pequena exposição do tema e em seguida, o grupo de estudantes participa com o professor na análise da própria exposição. Desta forma, na pequena exposição introdutória, o professor ou a professora desafia os estudantes que, perguntando-se e perguntando ao professor, participam do aprofundamento e desdobramento da exposição inicial. (FREIRE, 1992, p.61)

Assim, mesmo havendo momentos expositivos, ao fazer a abertura para o diálogo com os educandos, as oficinas caminham junto com as ideias que Paulo Freire defende.

[1]Site que permite ao usuário criar e compartilhar atividades e jogos para serem resolvidos de forma online e pode ser acessado através do https://wordwall.net/pt.

Prosseguindo com o relato, na sequência, após a discussão com os estudantes, apresentávamos uma solução para o problema, justificando o raciocínio utilizado e quais saberes precisariam ser acionados. Durante a explicação, dicas como ter atenção para entender corretamente o que a questão quer, procurar obter o máximo de informações do enunciado, simplificar os cálculos para trabalhar com números menores buscando encontrar as respostas de maneira mais rápida, e ganhar tempo nas resoluções, eram inseridas. Além de lhes mostrar que existem questões em que alguns assuntos não são cobrados diretamente e que ter em mente algumas fórmulas pode fazer diferença na hora do exame.

Quando possível, as questões tinham suas soluções representadas, também, no GeoGebra, ampliando a visão dos alunos. Ao final das aulas, algumas questões eram deixadas para eles praticarem o conteúdo trabalhado, sendo dada a abertura para eles sanarem suas dúvidas, durante as aulas ou mesmo depois delas, através do grupo de WhatsApp criado para dar mais suporte às oficinas, evitando que dúvidas se acumulassem.

Cabe salientar que, embora tenhamos dado abertura para os alunos se pronunciarem e procurado meios para construir uma aprendizagem mais significativa, sabemos que a sequência didática utilizada ainda não foi a ideal para uma educação libertadora. Mesmo assim, podemos afirmar que estamos nos encaminhando para isso.

3.1 Falando um Pouco Sobre o GeoGebra

GeoGebra é um software gratuito que combina recursos de construção de objetos matemáticos de vários tipos, podendo ser utilizado em diversos conteúdos, como na geometria plana, espacial e analítica, nas análises de gráficos de várias funções e na álgebra em geral.

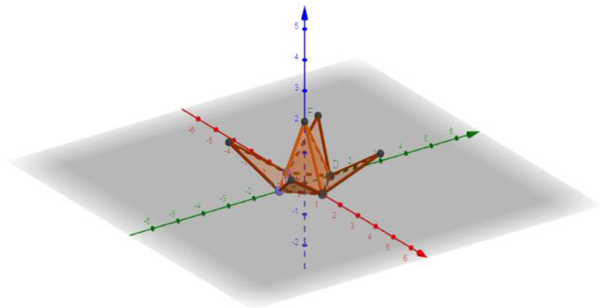
Foi criado em 2001, como tese do matemático austríaco Markus Hohenwarter e vem sendo aperfeiçoado, desde então, por ele e uma equipe internacional de programadores, contando também com a contribuição de tradutores do mundo inteiro que ajudam a disponibilizar suas versões em vários idiomas para milhões de usuários, facilitando que o aplicativo chegue a mais lugares.

Recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos Estados Unidos da América. É possível instalá-lo em computadores, notebooks, tablets ou acessá-lo online através do site https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT (acesso em março 2021).

É uma ferramenta educacional de fácil manuseio, que auxilia o trabalho docente, deixando a disciplina mais palpável para os discentes, fazendo com que eles saiam do espaço lousa e livro para um universo maior, permitindo tanto aos professores como aos alunos a possibilidade de explorar, analisar, distinguir, deduzir e assimilar os conteúdos na construção do conhecimento matemático, de forma dinâmica, em diferentes níveis de ensino.

Assim, em uma aula de geometria, por exemplo, é possível apresentar os poliedros e suas planificações como em um desenho animado, possibilitando ao aluno visualizar a abertura do sólido, enquanto este está sendo planificado. Conforme ilustração a seguir:

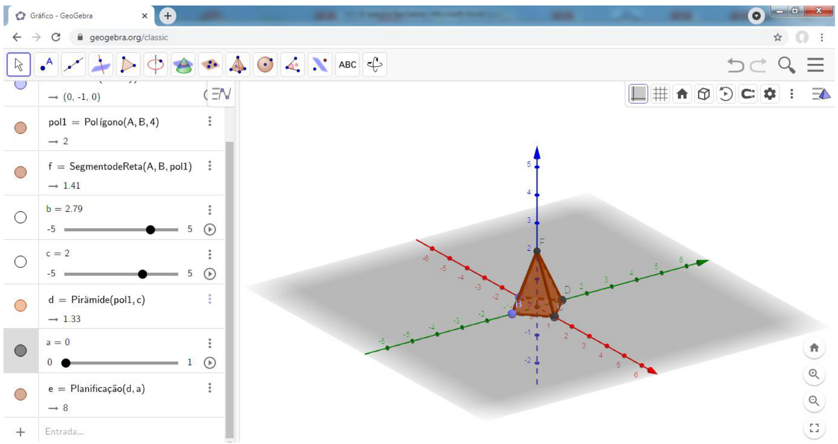
Figura 3.1 Imagem do GeoGebra



Fonte: Autoria própria

A imagem a seguir mostra uma das janelas do GeoGebra e algumas de suas ferramentas:

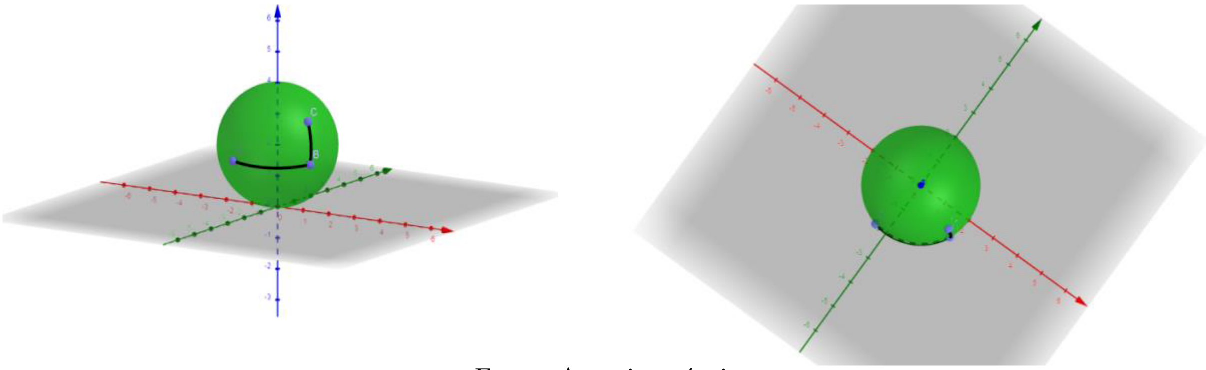
Figura 3.2 Janela do GeoGebra



Fonte: Autoria própria

Como, por exemplo, a ferramenta MOVER, que possibilita arrastar a JANELA DE VISUALIZAÇÃO para observar o objeto de outras posições, ajudando os estudantes a ampliarem sua percepção espacial. Como podemos verificar nas imagens a seguir:

Figura 3.3 Janelas de Visualização



Fonte: Autoria própria

Como já relatamos, existem diversas maneiras de utilizar o GeoGebra em prol da educação, tornando o ensino da matemática mais concreto e a aprendizagem mais completa.

Abordar o conhecimento matemático de forma concreta é evidentemente um ponto importante para tornar as aulas da disciplina mais atrativas ao estudante e favorecer-lhe o processo de aprendizagem, possibilitando-lhe relacionar os saberes adquiridos na escola com o espaço social em que esteja inserido, é importante destacar o papel do professor em estimular seu público a desenvolver o pensamento matemático de forma a aliar o concreto à capacidade de abstração. Nesse contexto, o GeoGebra também entra como um excelente instrumento colaborativo na construção dessa ponte.

Logo, podemos entender os motivos deste aplicativo ser tão popular e ter ganhado tantos prêmios de software educacional.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Descreveremos no presente trabalho nossa experiência com as oficinas ministradas para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio dentro do sistema de ensino remoto.

Para que se possa entender melhor alguns desafios enfrentados, no momento em que as oficinas foram realizadas, vamos relatar um pouco do cenário em que a sociedade estava inserida.

Devido à pandemia, uma série de problemas estruturais foram agravados. A economia experimentou um grande retrocesso: ocorreram demissões, falta de emprego, aumento da informalidade e muitos adolescentes precisaram trabalhar para ajudar nas despesas de casa.

Na saúde, acompanhamos mudanças constantes na direção do Ministério, unidades hospitalares superlotadas, seja no setor público ou privado, muitas pessoas morrendo e a vacina sendo aplicada em uma lentidão impressionante.

As escolas tiveram que se adaptar a um sistema para o qual não estavam preparadas. Alunos, professores e demais funcionários da educação foram enviados para casa e as aulas presenciais passaram a ser remotas, exigindo muito mais dos profissionais da educação bem como dos educandos, os quais nem sempre tiveram em mãos os recursos para o estudo nesse formato ou mesmo um ambiente adequado.

Com tantas mudanças, outros problemas foram surgindo, como o aumento da ansiedade, da depressão e de outras angústias emocionais e psicológicas. Diante do cenário apresentado, é possível perceber que a situação vivenciada pela sociedade não facilitava o ensino e a aprendizagem de uma forma geral.

Apesar de toda adversidade e das circunstâncias desse momento que, por um lado, valorizou a educação em relação às pesquisas científicas, capazes de encontrar a cura e meios de prevenção para a COVID, doença infecciosa causada pelo coronavírus da síndrome respiratória aguda grave, por outro, no que se refere à educação básica, em consequência dos desempregos e por precisarem trabalhar para se manterem e ajudarem em casa, parte dos alunos não estavam se dedicando a sua vida escolar, deixando-a de lado e, consequentemente, negligenciando-a, tornando o trabalho do professor ainda mais árduo.

Contudo, conscientes da importância da educação e não nos deixando abater por tantos transtornos, seguimos em frente na construção desse projeto, aplicando, assim, as oficinas com a estrutura e a sequência didática que foram apresentadas no capítulo anterior.

O trabalho, como relatado acima, foi realizado em um contexto educacional atípico em que o educador, além de se dedicar em ministrar uma boa aula, também precisou se preocupar em reinserir o aluno no universo escolar, mesmo sendo através de um aparato diferente, como é o caso da sala de aula online, usando diversos recursos para tornar as aulas mais dinâmicas e atrativas.

Nesse sentido, resolvemos aliar nossa didática às ideias freireanas e o ENEM, somados ao GeoGebra e o Wordwall, com intuito de que o educando pudesse compreender melhor o mundo a sua volta e conseguisse resolver questões básicas que trabalham a contextualização. Buscamos explanar os conteúdos de forma resumida, mas que causassem impactos e fossem frutíferos para os estudantes.

Agora que relatamos a situação vivenciada pela sociedade durante o desenvolvimento das oficinas, vejamos algumas particularidades de cada uma delas, como as questões trabalhadas e alguns trechos dos diálogos referentes a alguns enunciados.

1º oficina – As questões escolhidas sobre Escalas e Conversão de Unidades de Medidas foram as seguintes:

ENEM 2010 – 1. No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm. Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

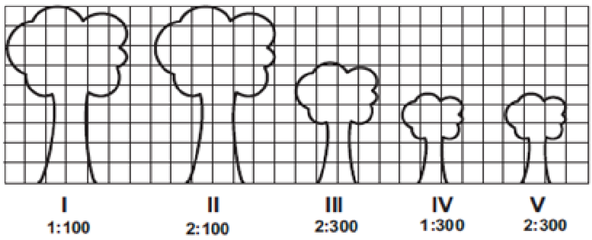
(A)1 : 20 (B) 1 : 100 (C) 1 : 200 (D) 1 : 1 000 (E) 1 : 2 000

ENEM 2011 – 2. Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1:

250. Que medida de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

(A) 4,8 e 11,2 (B) 7,0 e 3,0 (C) 11,2 e 4,8 (D) 28,0 e 12,0 (E) 30,0 e 70,0

ENEM 2012 – 3. Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) V

ENEM 2014 – 4. A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8 m de comprimento e 6 m de altura.

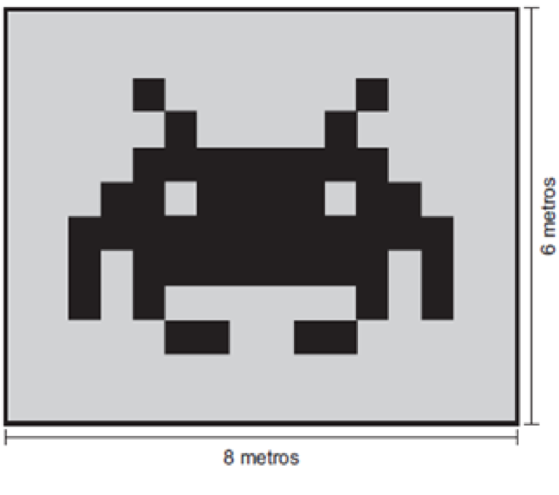


Figura 1

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme a Figura 2.

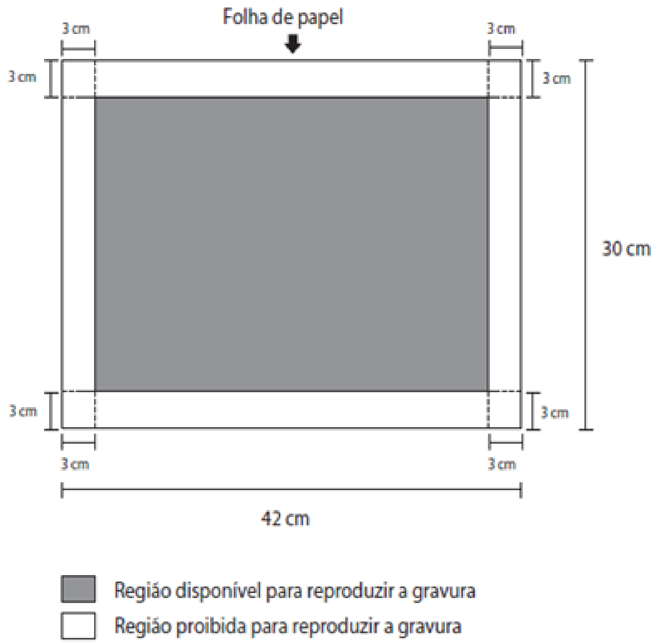


Figura 2

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

PRADO, A. C. Superinteressante, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é
(A) 1: 3. (B) 1: 4. (C) 1: 20. (D) 1: 25. (E) 1: 32.

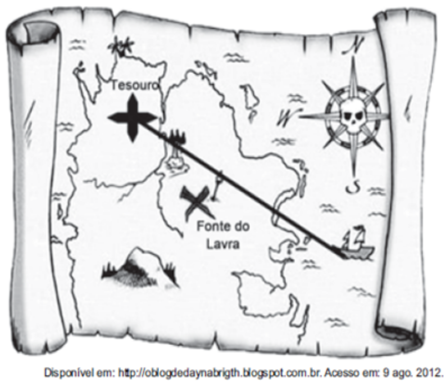
ENEM 2016 – 5. Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1: 8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%. A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente,
(A) 22,00 cm, 12,00 cm e 5,00 cm.
(B) 27,50 cm, 15,00 cm e 6,25 cm.
(C) 34,37 cm, 18,75 cm e 7,81 cm.
(D) 35,20 cm, 19,20 cm e 8,00 cm.
(E) 44,00 cm, 24,00 cm e 10,00 cm.

ENEM 2016 – 6. A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros.
Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?
(A) 53 (B) 94 (C) 113 (D) 135 (E) 145

ENEM 2018 – 7. Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real. Certo mapa tem escala 1: 58 000 000.



Disponível em: http://oblogdedaynabrigth.blogspot.com.br. Acesso em: 9 ago.2012

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm.

A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é

A) 4408 B) 7632 C) 44080 D) 76316 E) 440800

ENEM 2020 DIGITAL – 8. Uma associação desportiva contratou uma empresa especializada para construir um campo de futebol, em formato retangular, com 250 metros de perímetro. Foi elaborada uma planta para esse campo na escala 1: 2 000

Na planta, a medida do perímetro do campo de futebol, em metro, é

(A) 0,0005. (B) 0,125. (C) 8. (D) 250. (E) 500 000.

ENEM 2020 DIGITAL – 9. Três pessoas, X, Y e Z, compraram plantas ornamentais de uma mesma espécie que serão cultivadas em vasos de diferentes tamanhos. O vaso escolhido pela pessoa X tem capacidade de 4 dm3 . O vaso da pessoa Y tem capacidade de 7 000 cm3 e o de Z tem capacidade igual a 20 L.

Após um tempo do plantio das mudas, um botânico que acompanha o desenvolvimento delas realizou algumas medições e registrou que a planta que está no vaso da pessoa X tem 0,6 m de altura. Já as plantas que estão nos vasos de Y e Z têm, respectivamente, alturas medindo 120 cm e 900 mm.

O vaso de maior capacidade e a planta de maior altura são, respectivamente, os de

(A) Y e X. (B) Y e Z. (C) Z e X. (D) Z e Y. (E) Z e Z.

As questões a seguir ficaram como exercício para os alunos:

ENEM 2011 – Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

(A) 1 : 250. (B) 1 : 2 500. (C) 1 : 25 000. (D) 1 : 250 000. (E) 1 : 25 000 000.

ENEM 2012 – O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas. Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

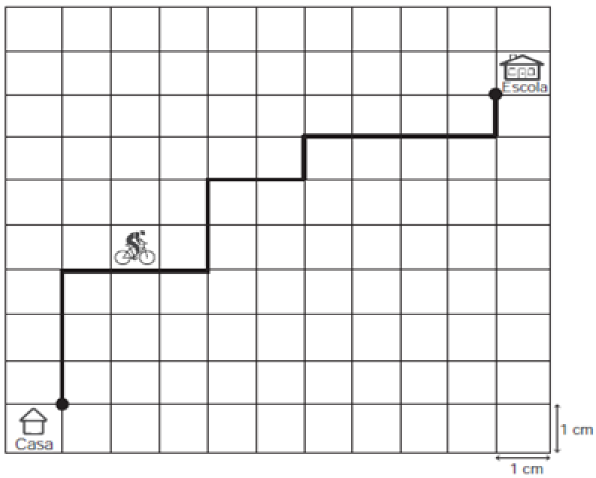
Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a

escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?
(A) 1:700 (B) 1:7 000 (C) 1:70 000 (D) 1:700 000 (E) 1:7 000 000

ENEM 2020 DIGITAL – É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou 4 m3 de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4000 embalagens de mesma capacidade.
Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem?
(A) 0,1 (B) 1,0 (C) 10,0 (D) 100,0 (E) 1 000,0

ENEM 2013 – A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola.



Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1: 25 000, por um período de cinco dias.
Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?
(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 20 (E) 40

O que podemos destacar nessa oficina foi o fato dos alunos se mostrarem tímidos ou estarem em um ambiente que não podiam se pronunciar. Seja qual for o motivo, a verdade é que eles pouco falaram, mesmo tentando instigá-los fazendo perguntas e comentários, estes mal ousaram abrir o microfone ou digitar no chat, tornando essa primeira oficina uma aula mais expositiva que dialogada.

Na questão 1, a impressão que tivemos foi que eles não lembravam como fazer a conversão de unidades de medidas e, devido a isso, ninguém se pronunciou. Mas após verem sua solução, no enunciado 2, quando perguntado o que seria preciso fazer para resolver o problema apresentado, um dos alunos falou que primeiro precisaria mudar de metros para centímetros, embora, depois, tenha demonstrado dificuldade em utilizar a escala para poder concluir a questão.

Nas questões 3 e 4, o silêncio voltou a prevalecer, levando-nos a pensar que os discentes não tinham ideia de como resolverem as questões e por isso decidiram não falar.

No problema 5, a dúvida que se mostrou evidente, foi como reduzir os 20%, após saber os valores do desenho original. Dúvida esclarecida durante a explicação da resolução.

Nas questões 6 e 9, os estudantes pareceram confusos por serem necessárias tantas conversões de unidades de medidas e/ou de capacidade para poder obter uma solução.

Como é possível notar, essa primeira oficina nos forneceu informações importantes para direcionar as atividades posteriores. Nosso público por uma série de razões pouco interagiu, mas as colocações realizadas foram válidas para avaliar o nível de conhecimento dos participantes acerca do conteúdo trabalhado, assim como serviu para pensarmos em novas formas de intervenção em prol de uma aprendizagem mais significativa.

2º oficina – As questões apresentadas sobre Área e Perímetro de Figuras Geométricas foram as seguintes:

ENEM 2010 – 1. A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais. Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm $\times$ 100 cm). O valor da segunda encomenda será:

(A) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

(B) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.

(C) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

(D) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.

(E) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

ENEM 2011 – 2. Em certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

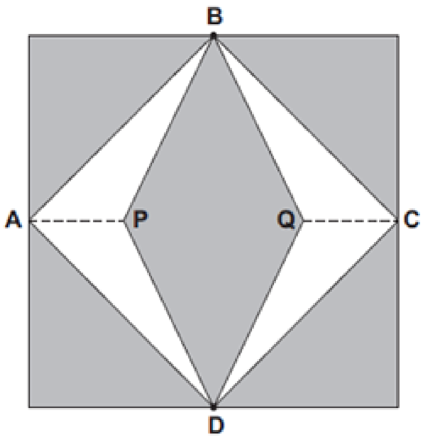
Terreno 1: 55 m por 45 m

Terreno 2: 55 m por 55 m

Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

ENEM 2012 - 3. Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?
(A) R$ 22,50 (B) R$ 35,00 (C) R$ 40,00 (D) R$ 42,50 (E) R$ 45,00

ENEM 2012 - 4. O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

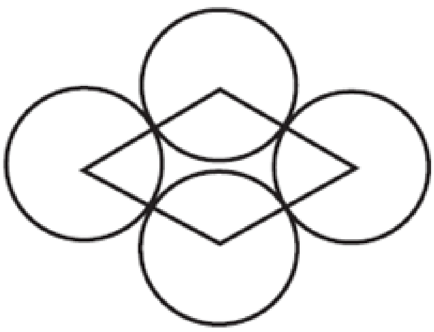


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

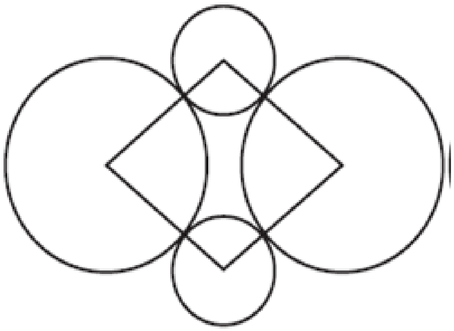


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

(A) 300%. (B) 200%. (C) 150%. (D) 100%. (E) 50%.

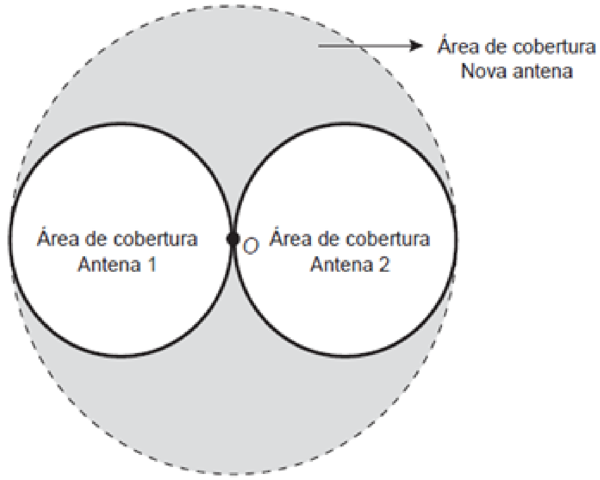
ENEM 2014 - 5. Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustra a figura.

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

(A) πd (B) $2\pi d$ (C) $4\pi d$ (D) $5\pi d$ (E) $10\pi d$

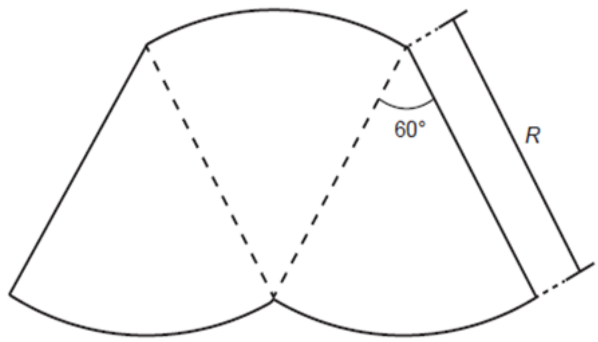
ENEM 2015 - 6. Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

(A) 8 π (B) 12 π (C) 16 π (D) 32 π (E) 64 π

ENEM 2015 - 7. O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior desta piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.

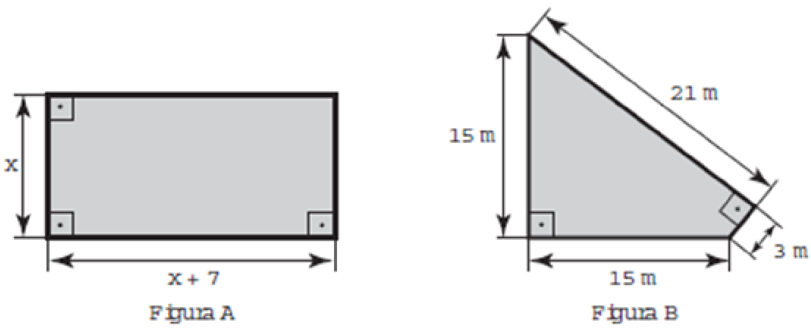


O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50m x 24m.
O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

(A) 16. (B) 28. (C) 29. (D) 31. (E) 49

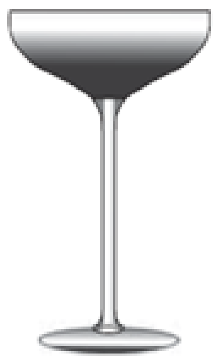
ENEM 2016 - 8. Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

(A) 7,5 e 14,5. (B) 9,0 e 16,0. (C) 9,3 e 16,3. (D) 10,0 e 17,0. (E) 13,5 e 20,5.

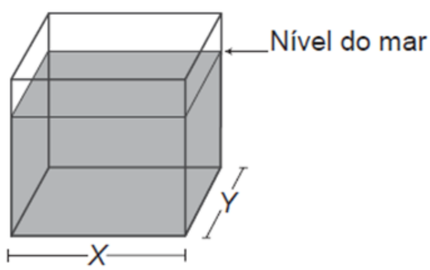
ENEM 2017 - 9. Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

(A) 192. (B) 300. (C) 304. (D) 320. (E) 400.

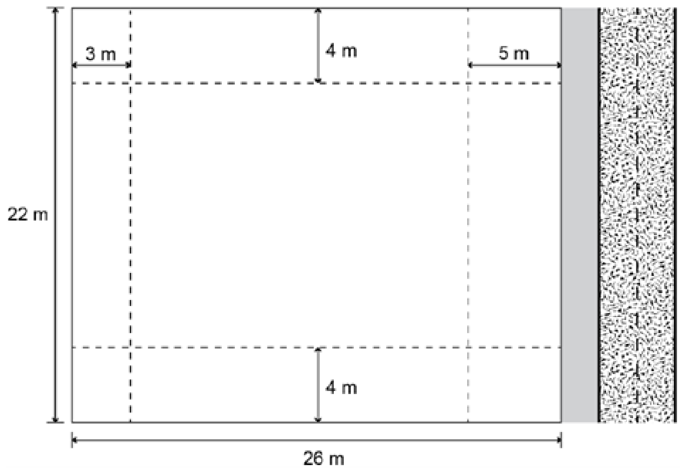
ENEM 2017 - 10. Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de primas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

(A) 1 e 49 (B) 1 e 99 (C) 10 e 10
(D) 25 e 25 (E) 50 e 50

ENEM 2020 DIGITAL - 11. Uma empresa deseja construir um edifício residencial de 12 pavimentos, num lote retangular de lados medindo 22 e 26 m. Em 3 dos lados do lote serão construídos muros. A frente do prédio será sobre o lado do lote de menor comprimento. Sabe-se que em cada pavimento 32 m^2 serão destinados à área comum (hall de entrada, elevadores e escada), e o restante da área será destinado às unidades habitacionais. A legislação vigente exige que prédios sejam construídos mantendo distâncias mínimas dos limites dos lotes onde se encontram. Em obediência à legislação, o prédio ficará 5 m afastado da rua onde terá sua entrada, 3 m de distância do muro no fundo do lote e 4 m de distância dos muros nas laterais do lote, como mostra a figura.



A área total, em metro quadrado, destinada às unidades habitacionais desse edifício será de

(A) 2 640. (B) 3 024. (C) 3 840. (D) 6 480. (E) 6 864.

As próximas questões ficaram como exercício:

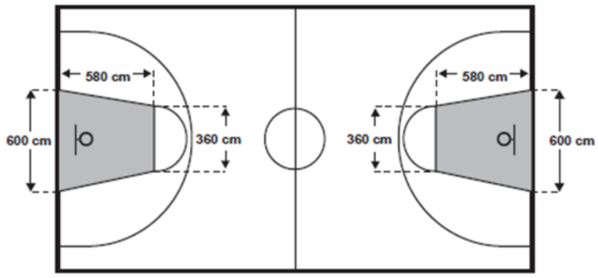
ENEM 2020 DIGITAL - Um marceneiro visitou 5 madeireiras para comprar tábuas que lhe permitissem construir 5 prateleiras de formato retangular, de dimensões iguais a 30 cm de largura por 120 cm de comprimento cada, tendo como objetivo minimizar a sobra de madeira, podendo, para isso, fazer qualquer tipo de emenda. As dimensões das tábuas encontradas nas madeireiras estão descritas no quadro.

Madeireira	Largura (cm)	Comprimento (cm)
I	40	100
II	30	110
III	35	120
IV	25	150
V	20	200

Em qual madeireira o marceneiro deve comprar as tábuas para atingir seu objetivo?

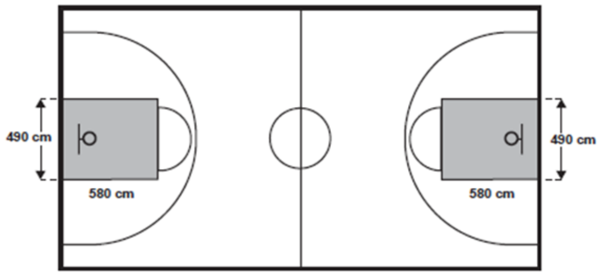
(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) V

ENEM 2015 - O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

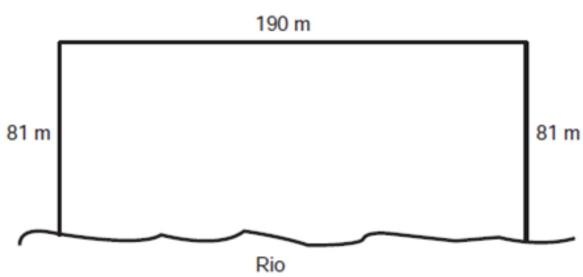


Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

(A) aumento de 5 800 cm^2. (B) aumento de 75 400 cm^2.
(C) aumento de 214 600 cm^2. (D) diminuição de 63 800 cm^2.
(E) diminuição de 272 600 cm^2.

ENEM 2013 -Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura.



Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.
A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 11. (E) 12.

Nessa oficina, embora os estudantes não tenham se manifestado em todas as questões que foram expostas, podemos salientar que houve mais participação que na oficina anterior, sendo possível perceber, por exemplo, na questão 2, que alguns discentes não associaram que seria necessário calcular o perímetro do terreno para poder atender as restrições impostas pela prefeitura, mas, por outro lado, viram que precisariam calcular a área de cada terreno.

No enunciado 3, um dos alunos, depois da pergunta sobre o que poderíamos fazer para solucionar o problema, sugeriu que deveriam ser calculadas as áreas dos triângulos da parte clara da figura, posteriormente dos triângulos dos cantos e, finalmente, para se obter as áreas de cada região da figura dos triângulos que seriam formados ao traçar os segmentos BD e PQ, pois, segundo ele, era mais fácil trabalhar com o cálculo de área de uma mesma figura geométrica, e após sabermos as medidas, em metros quadrados, das áreas de cada região, bastava multiplicar pelos seus respectivos valores de custos e descobrir o valor necessário para confeccionar o vitral.

O que nos chamou atenção, na sugestão que esse aluno deu, foi o fato da sua resolução seguir um caminho diferente da solução trazida para apresentação, mostrando para eles que os problemas matemáticos podem ter mais de uma maneira de se resolver, semelhante a uma pessoa sair de casa e ir para escola, existem várias ruas que ela pode utilizar para fazer esse percurso, mas ela não deve passar por cima das casas ao fazer esse trajeto, da mesma forma é a matemática, o importante é não infringir suas regras, independente do caminho que escolham.

Nas questões 4 e 5, alguns alunos demonstraram saber resolver parte das questões, mas apresentaram dificuldades para chegar à solução por não se lembrarem de uma ou outra informação como, por exemplo, a forma de calcular o perímetro da circunferência.

No enunciado 7, enquanto líamos a pergunta, o setor circular foi associado a uma fatia de pizza, pois a figura que o representava só foi apresentada no slide posterior.

Após entenderem o que precisaria ser feito para encontrar a solução, os educandos relataram não saberem como calcular a área do setor circular. Com a dúvida esclarecida, conseguiram chegar ao seguinte resultado $\mathrm{R} < 28{,}3$ que os deixou confusos, e entre os valores 28 e 29, já que o raio precisaria ser o número natural maior possível e 28,3 passa de 28, justificativa dada por eles quando perguntado o motivo da indecisão. Mostrando que inconscientemente eles simplesmente ignoraram o sinal menor que, fato que nos leva a perceber a importância dos detalhes.

Na questão 8, um dos estudantes falou que seria necessário calcular a área do terreno do filho mais velho para poder saber qual seria a largura e o comprimento do terreno do filho mais novo, mas, quando perguntado como se deveria fazer esse cálculo, respondeu: "pela área do triângulo", não observando que a figura não formava um simples triângulo, quando questionado, falou: " Ah! É mesmo, então, assim, não sei como encontrar a área não". Então, ao perguntar se alguém saberia responder, o silêncio se instalou, devido a isso, após alguns segundos, resolvemos explicar a solução.

No enunciado 11, um dos discentes disse que para resolvê-lo bastava calcular a área do retângulo do meio, isto é, o retângulo da figura que ficará após serem atendidas as exigências da legislação, depois era só multiplicar por 12, porém, ele se esqueceu de retirar a área comum de cada pavimento.

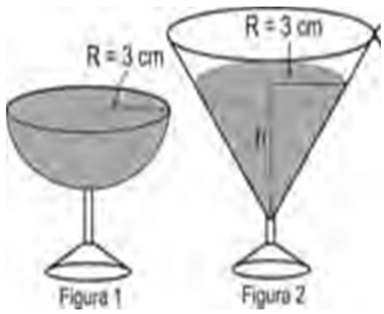
Como podemos perceber nessa oficina houve uma maior interação dos alunos no processo de resolução das questões. Utilizando –se da didática freireana, conseguimos aliar nossas explicações com as interpretações que os discentes trouxeram, enfatizando naturalmente a importância do diálogo e das experiências vivenciadas pelos educandos no dinamismo do ensino-aprendizagem.

3º oficina – As questões utilizadas sobre Volume e Planificação de Sólidos Geométricos foram:

ENEM 2010 - 1. Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedos medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

(A) 5 cm. (B) 6 cm. (C) 12 cm. (D) 24 cm (E) 25 cm.

ENEM 2010 - 2. Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

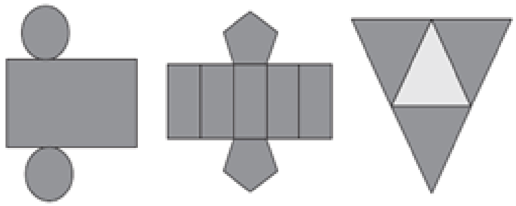


Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

Considere: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

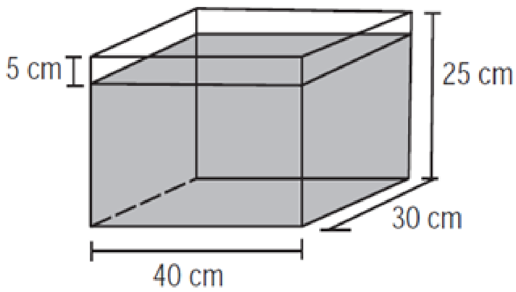
(A) 1,33 (B) 6,00. (C) 12,00. (D) 56,52. (E) 113,04.

ENEM 2012 - 3. Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
(A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
(B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
(C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
(D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
(E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

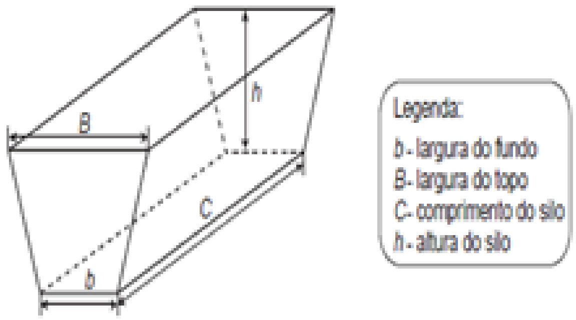
ENEM 2012 - 4. Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?
(A) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
(B) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
(C) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
(D) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

(E) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar

ENEM 2014 - 5. Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denominam-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



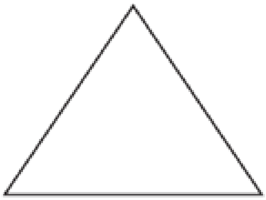
Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

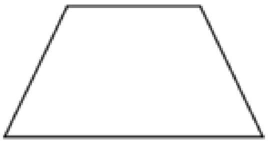
EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br.
Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

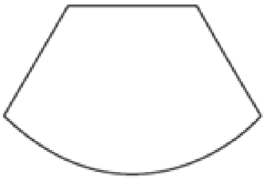
Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

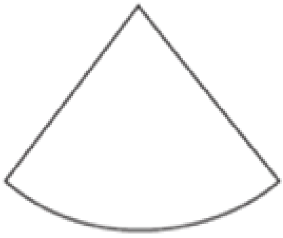
(A) 110. (B) 125. (C) 130. (D) 220. (E) 260.

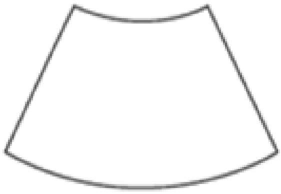
ENEM 2014 - 6. Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivos fluorescentes, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.
Qual deverá ser a forma do adesivo?

A


B


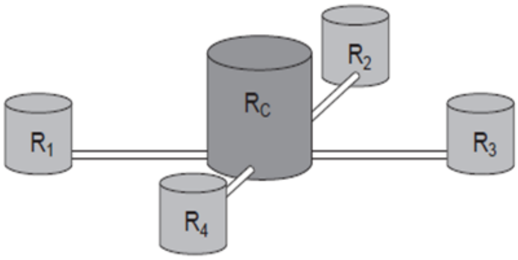
C


D


E


ENEM 2019 - 7. Uma construtora pretende conectar um reservatório central (Rc) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R1, R2, R3 e R4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.

As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água.

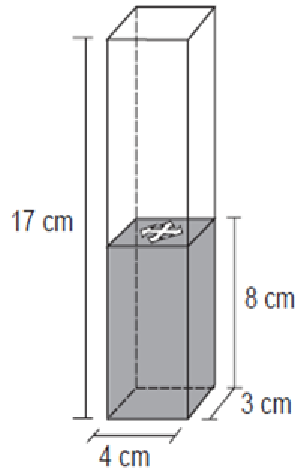


No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.

A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

(A) 1,44. (B) 1,16. (C) 1,10. (D) 1,00. (E) 0,95.

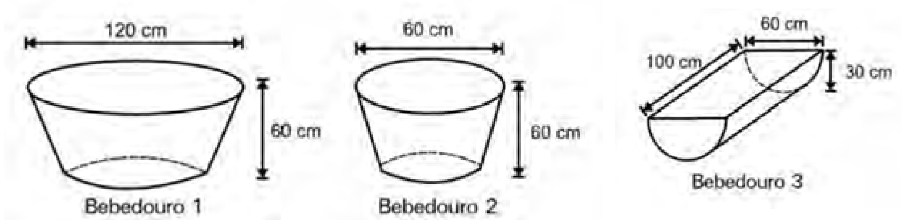
ENEM 2020 - 8. Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.
Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas.
O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de



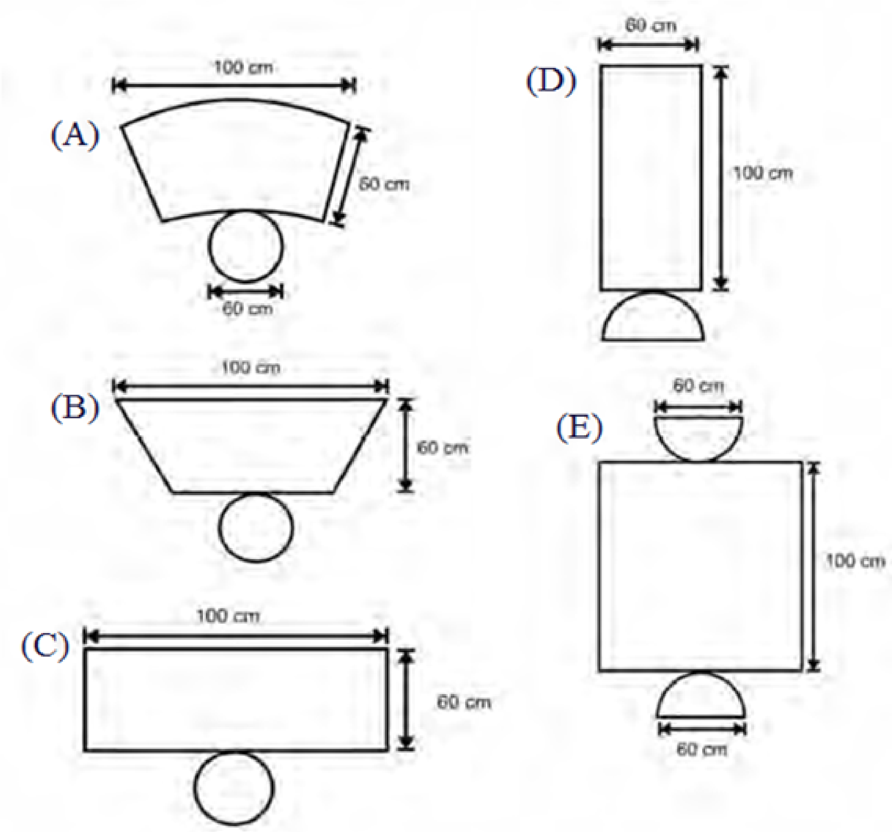
(A) 14. (B) 16. (C) 18. (D) 30. (E) 34.

As questões seguintes ficaram como exercício:

ENEM 2010 - Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

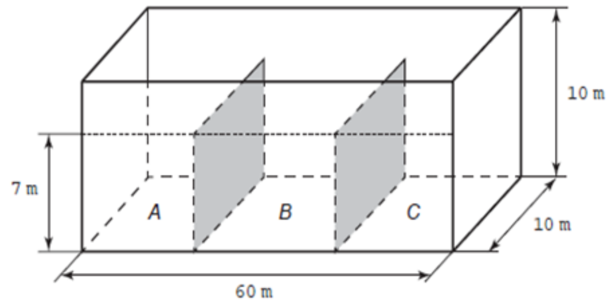


Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



ENEM 2015 - Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0, como aproximação para π.
Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?
(A) 0,5 (B) 1,0 (C) 2,0 (D) 3,5 (E) 8,0

ENEM 2016 - Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de
(A) 1,4 x $10^3 m^3$ (B) 1,8 x $10^3 m^3$ (C) 2,0 x $10^3 m^3$ (D) 3,2 x $10^3 m^3$ (E) 6,0 x $10^3 m^3$

Um dos pontos a ser destacado nessa oficina foi na questão 1, quando perguntado como poderíamos resolver o problema do enunciado, um aluno logo se manifestou dizendo que primeiro deveríamos utilizar os dados fornecidos na questão para calcular o volume do paralelepípedo. Mas silenciou quando foi indagado sobre como prosseguir para encontrar o valor da aresta do cubo. Então outro educando falou: "basta substituir o resultado obtido na fórmula do cubo e resolver a conta." Essa situação nos possibilitou comentar que não sabemos de tudo, entretanto, isso não significa que o que sabemos não possa contribuir ou ajudar a solucionar um determinado problema, e, trabalhando juntos, a aprendizagem torna-se mais rica e mais significativa.

Na questão 2, foi possível fazer uma relação entre hemisfério e a metade de uma bola, mostrando que mesmo palavras incomuns podem ser representadas de forma mais simples, facilitando o entendimento.

Talvez por não fazer parte do seu cotidiano, os alunos tenham demonstrado dúvidas em relacionar a planificação do prisma de base pentagonal, e o nome desse sólido, no enunciado 3.

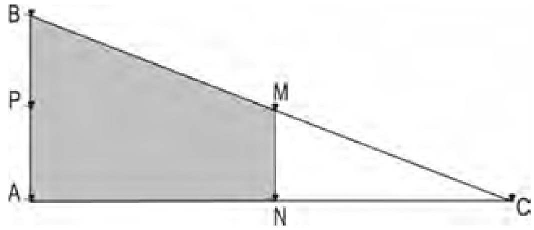
No 4º problema, os estudantes sabiam de forma intuitiva que o nível da água subiria, mas não sabiam como calcular a quantidade.

Planificação de corpos redondos ou de partes destes nem sempre é algo que os discentes assimilam com facilidade. Na questão 6, por exemplo, apresentaram indecisão ao escolher a alternativa que representava o adesivo adequado para revestir a superfície lateral do cone, de forma a cobrir da sua base até a metade da sua altura, pois alguns alunos achavam que a parte curva, deveria cobrir a parte inferior.

Essa oficina demonstrou a predominância das dúvidas que os estudantes apresentavam em relação à planificação e ao cálculo de volume de alguns sólidos, mostrando que mesmo assuntos aparentemente simples, podem parecer complicados para pessoas que não tiveram o pensamento geométrico bem trabalhado durante o ensino infantil e fundamental.

4º oficina – Foram trabalhadas as seguintes questões sobre Características de Figuras Geométricas, Semelhança de Figuras Geométricas, Teorema de Pitágoras e Projeção Ortogonal:

ENEM 2010 - 1. Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



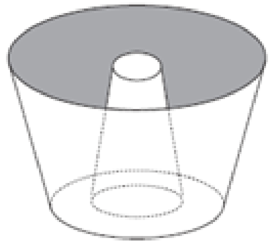
A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

(A) à mesma área do triângulo AMC.
(B) à mesma área do triângulo BNC.
(C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
(D) ao dobro da área do triângulo MNC.
(E) ao triplo da área do triângulo MNC.

ENEM 2011 - 2. A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.
Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

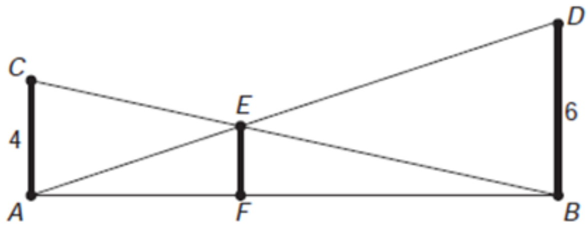
(A) pirâmide.
(B) semiesfera.
(C) cilindro.
(D) tronco de cone.
(E) cone.

ENEM 2013 - 3. Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura.
Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.
Essas figuras são



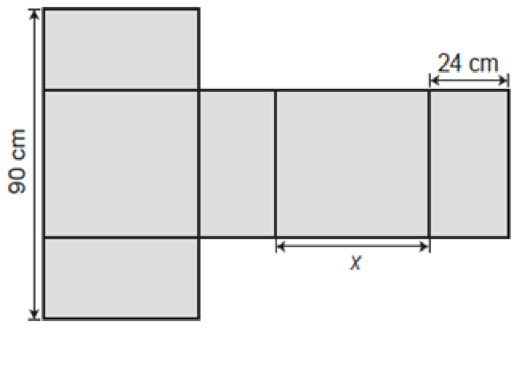
(A) um tronco de cone e um cilindro.
(B) um cone e um cilindro.
(C) um tronco de pirâmide e um cilindro.
(D) dois troncos de cone.
(E) dois cilindros.

ENEM 2013 - 4. O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



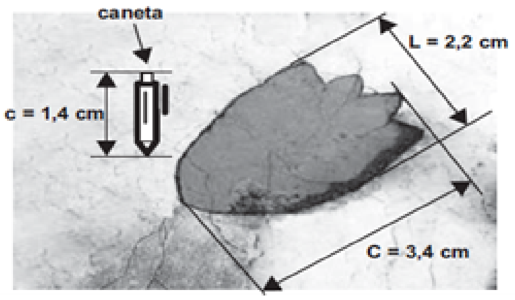
Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?
(A) 1 m (B) 2 m (C) 2,4 m (D) 3 m (E) $2\sqrt{6}$ m

ENEM 2014 - 5. Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em vôo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



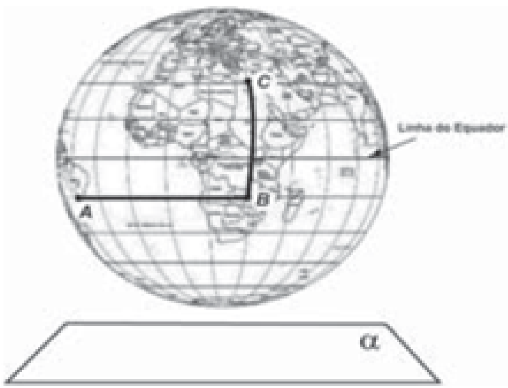
O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é
(A) 25. (B) 33. (C) 42. (D) 45. (E) 49.

ENEM 2015 - 6. Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.

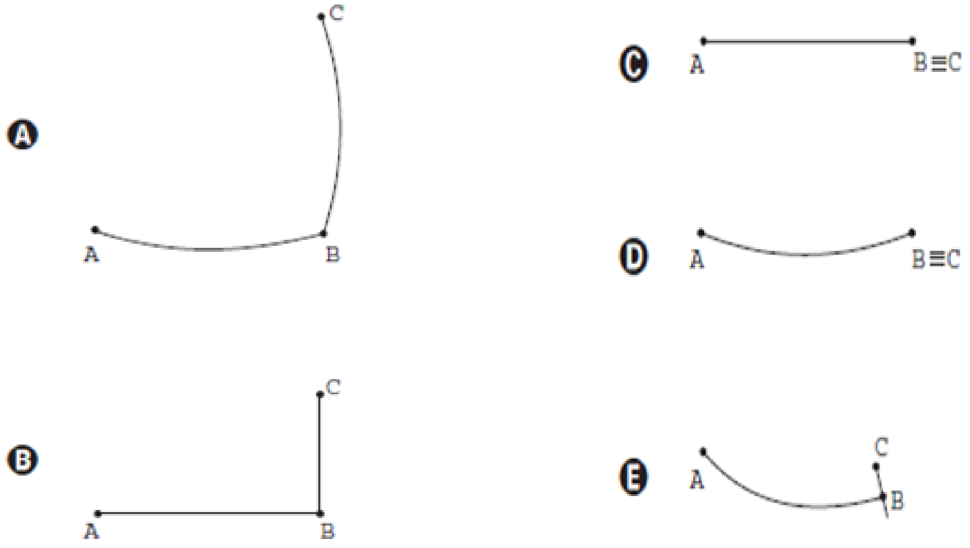


A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a
(A) 4,9 e 7,6. (B) 8,6 e 9,8. (C) 14,2 e 15,4. (D) 26,4 e 40,8. (E) 27,5 e 42,5.

ENEM 2016 - 7. A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.

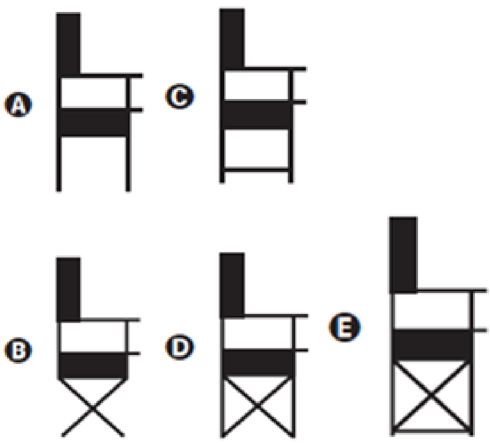


A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

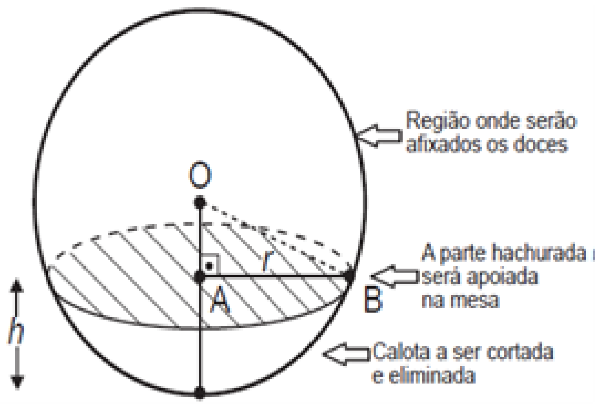


ENEM 2016 - 8. Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

Qual é o esboço obtido pelos alunos?



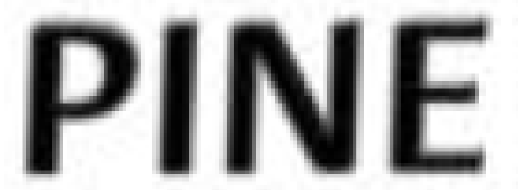
ENEM 2017 - 9. Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio *r da seção* circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

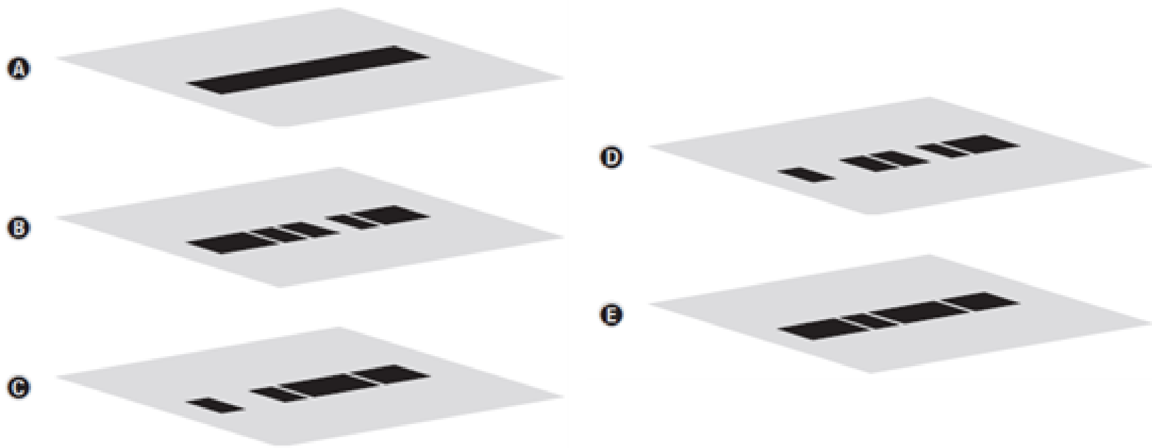
(A) $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$ (B) $10 - \sqrt{91}$ (C) 1 (D) 4 (E) 5

ENEM 2019 - 10. Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.



Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.

Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é



ENEM 2020 - 11. No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.


Figura 1

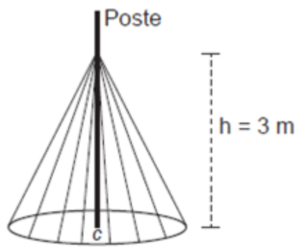


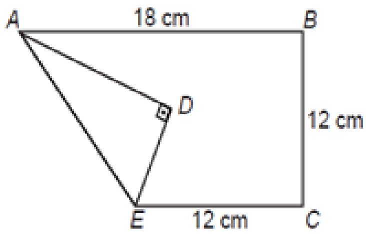
Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.
Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.
Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de
(A) 4,00. (B) 4,87. (C) 5,00. (D) 5,83. (E) 6,26.

As próximas questões ficaram como exercício:

ENEM 2017 - Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.
O volume do monumento original, em metro cúbico, é de
(A) 100. (B) 400. (C) 1 600. (D) 6 250. (E) 10 000.

ENEM 2019 - Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori*= dobrar; *kami*= papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

(A) $2\sqrt{22}$ cm. (B) $6\sqrt{3}$ cm. (C) 12 cm. (D) $6\sqrt{5}$ cm. (E) $12\sqrt{2}$cm.

ENEM 2020 - Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulcán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, este templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada.

As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são

(A) 2 quadrados e 4 retângulos.

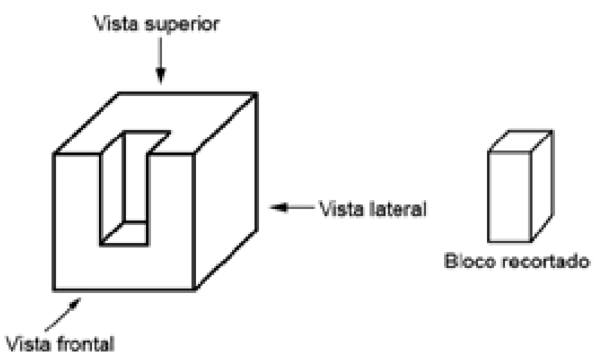
(B) 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.

(C) 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.

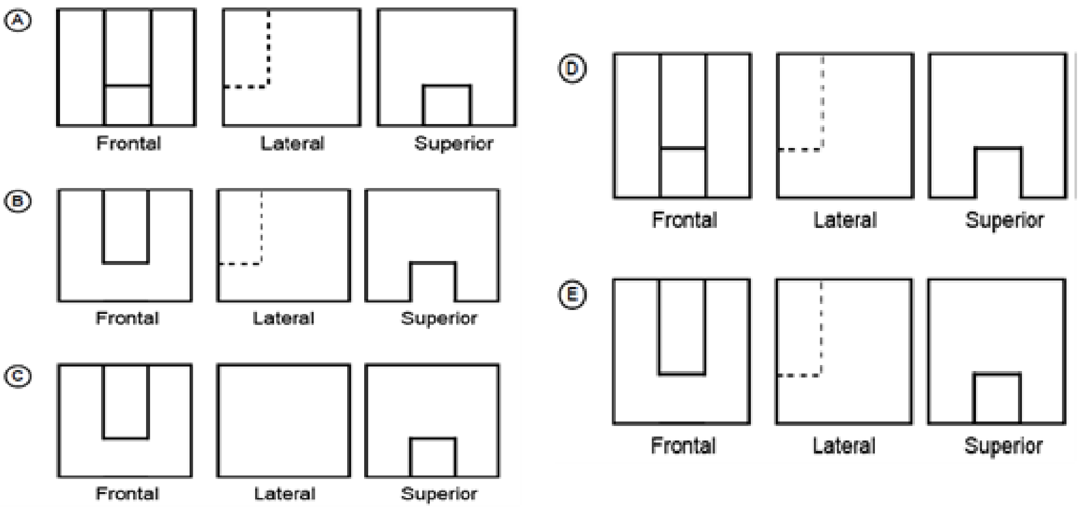
(D) 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.

(E) 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

ENEM 2020 DIGITAL - No projeto de uma nova máquina, um engenheiro encomendou a um torneiro mecânico a fabricação de uma peça, obtida a partir do recorte em um cubo, como ilustrado na figura.



Para isso, o torneiro forneceu, juntamente com o desenho tridimensional da peça, suas vistas frontal, lateral e superior, a partir das posições indicadas na figura. Para facilitar o trabalho do torneiro, as arestas dos cortes que ficam ocultos nas três vistas devem ser representadas por segmentos tracejados, quando for o caso.
As vistas frontal, lateral e superior que melhor representam o desenho entregue ao torneiro são



Alguns dos pontos notáveis dessa oficina foram: primeiro na questão 1, que, por não apresentar dados numéricos, deixou os estudantes sem saber por onde começar, levando-nos a refletir como, às vezes, nos prendemos aos números.

No enunciado 3, os educandos demonstraram dúvidas em relação aos sólidos que formam a forma de bolo serem dois cilindros, dois troncos de cone ou um tronco de cone e um cilindro, mas, ao compartilharem informações, como o cilindro possui duas bases (círculos) idênticos, chegaram à conclusão que nenhum dos dois sólidos poderiam ser cilindros. Logo, entre as alternativas citadas, restava apenas a opção dois troncos de cone. Novamente, tivemos um momento em que a troca de ideias foi crucial para que os estudantes chegassem à resolução da questão.

Outra situação ocorreu no enunciado 7, em que alguns alunos se apressaram para escolherem uma alternativa e não atentaram ao fato de que os segmentos que seriam projetados estavam contornando o globo terrestre e, por isso, sua projeção teria a forma de uma curva e, pelo mesmo motivo, os pontos B e C não coincidiriam. Então, para que pudessem visualizar como ficaria a projeção dos segmentos, a solução foi apresentada através do GeoGebra. Método que, segundo eles, é bastante interessante e facilitou o entendimento.

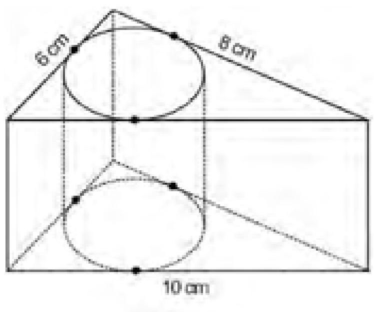
Visualizar a projeção ortogonal de sólidos ou objetos não é tarefa fácil para algumas pessoas, perceber que com diferentes peças pode-se gerar a mesma sombra, dependendo da posição que estas estejam, ou simplesmente imaginar como ficará a imagem quando a luz tocar o objeto perpendicularmente, pode parecer coisa de outro mundo para alguns.

Algo notado, quando trabalhamos os problemas 8 e 10, mostrando- nos a importância desse tipo de questão.

Os educandos não perceberam que era possível resolver as questões 9 e 11, utilizando o teorema de Pitágoras, tal informação os fez compreender que a matemática ensinada na escola pode ser aplicada para solucionar problemas do cotidiano.

5º oficina – Sobre: Propriedades da Reta Tangente, Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Localização de Pontos, Gráficos e Figuras Geométricas no Plano Cartesiano e Propriedades dos Polígonos, foram utilizadas as seguintes questões:

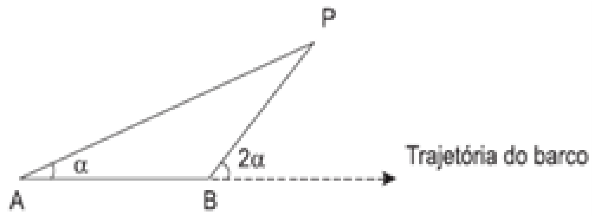
ENEM 2010 – 1. Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

(A) 1 cm. (B) 2 cm. (C) 3 cm (D) 4 cm (E) 5 cm.

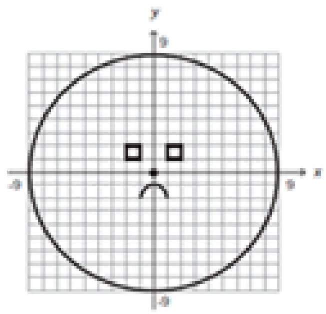
ENEM 2011 – 2. Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

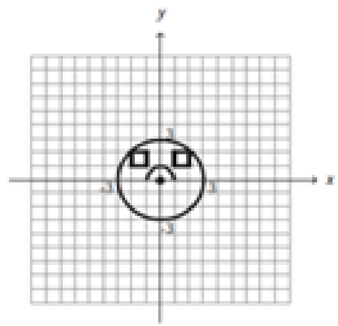


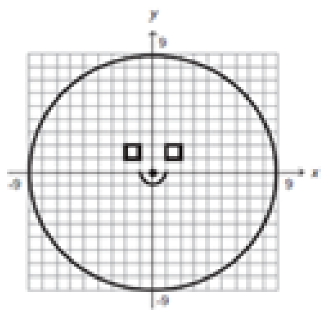
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^{\circ}$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados

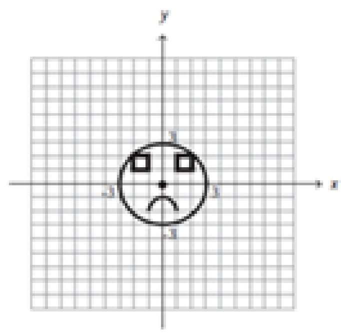
e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será
(A) 1000 m (B) $1000\sqrt{3}$ m (C) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m (D) 2000 m (E) $2000\sqrt{3}$ m

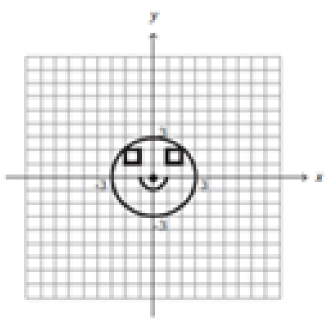
ENEM 2013 – 3. Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:
I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;
II — é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;
III — é o quadrado formado pelos vértices (-2, 1), (-1, 1), (-1, 2) e (-2, 2);
IV — é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2);
V — é o ponto (0, 0).
A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

A


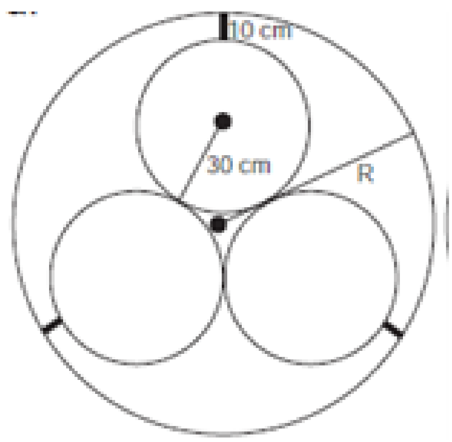
D


B


E


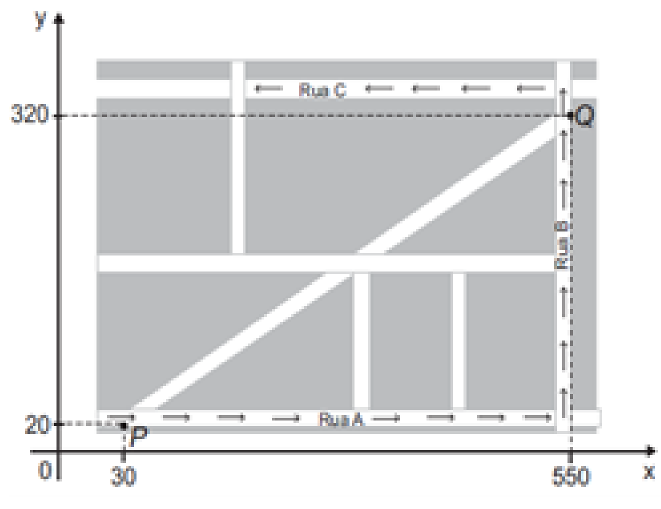
C


ENEM 2013 – 4. Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.
O valor de R, em centímetros, é igual a
(A) 64,0. (B) 65,5. (C) 74,0. (D) 81,0. (E) 91,0.

ENEM 2015 – 5. Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre

os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.
De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são
(A) (290 ; 20). (B) (410 ; 0). (C) (410 ; 20). (D) (440 ; 0). (E) (440 ; 20).

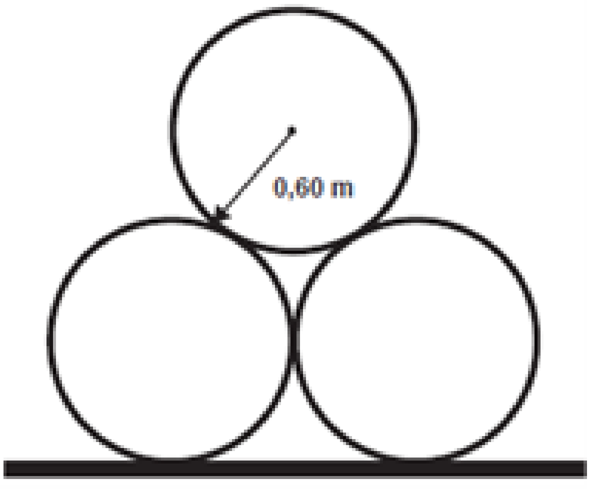
ENEM 2017 – 6. A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

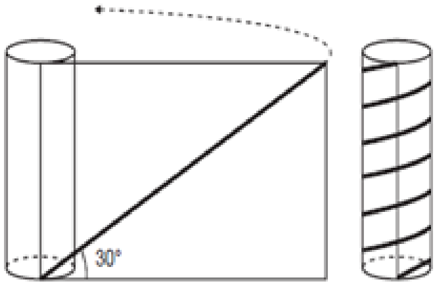
Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado)

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.
Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.
Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?
(A) 2,82 (B) 3,52 (C) 3,70 (D) 4,02 (E) 4,20

ENEM 2018 – 7. Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30º com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.

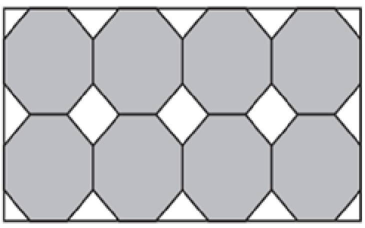


O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é
A)$36\sqrt{3}$ B) $24\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 36 E) 72

ENEM 2020 – 8. Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

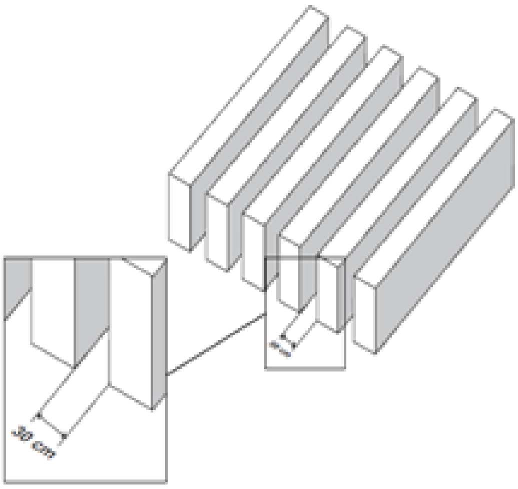
Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.



Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma

loja oferece azulejos nos seguintes formatos:
1 – Triângulo retângulo isósceles;
2 – Triângulo equilátero;
3 – Quadrado.
Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato
(A) 1. (B) 3. (C) 1 e 2. (D) 1 e 3. (E) 2 e 3.

ENEM 2020 – 9. Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.
Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de
(A) 9. (B) 15. (C) 26. (D) 52. (E) 60.

Após a oficina, o link da avaliação de desempenho foi disponibilizado e, por isso, não foram deixadas questões como exercício.

Uma das partes relevantes dessa oficina foi o enunciado 1. Inicialmente os alunos confundiram o comando da questão e acharam que ela pedia para calcular o volume do prisma, e logo foram dizendo que primeiro calculariam a área do triângulo da base do prisma. Então, quando perguntados de que forma o cálculo dessa área ajudaria a encontrarmos a medida do raio do cilindro, com ar de surpresa disseram: "ah! É só o raio? Assim, complica, pois os únicos dados fornecidos são os do prisma." Depois de um breve silêncio, falei: "os únicos valores numéricos são do prisma, mas temos outras informações que podem nos ajudar a encontrar a medida do raio, como o fato da circunferência da base do cilindro tocar os lados do triângulo, isto é, ser tangente a eles, e através de algumas de suas propriedades é possível resolvermos o problema." Mostrando a projeção ortogonal da parte superior da figura, as propriedades foram sendo citadas, formando um elo entre a imagem e o que estava sendo dito. Assim, após dar a explicação inicial, eles continuaram o caminho e conseguimos chegar a uma solução. Neste momento, um dos estudantes declarou que gostou da questão e achou sua resolução interessante.

Na questão 2, os alunos não imaginaram que poderiam usar as razões trigonométricas no processo da resolução do problema.

Os discentes acharam interessante ver cada conjunto algébrico, do enunciado 3, sendo formado pelo GeoGebra, ficando mais clara a representação de cada um e consequentemente qual seria a alternativa correta.

Na questão 4, um dos estudantes falou que resolvê-la-ia da seguinte forma, como o raio do cano menor é 30 cm, o diâmetro é 60 cm e será necessário uma distância de 10 cm entre os canos menores e o maior, somando o diâmetro com essa distância tem-se 70 cm, faltando poucos centímetros para se obter a medida do raio do cano maior e por isso marcaria a alternativa cujo valor é 74 cm.

Continuando a conversa, foi possível falarmos da importância da atenção e observação aos detalhes, além dos motivos de saber provar o porquê tal resposta é a correta, pois esses pormenores podem ser o diferencial em diversas situações.

Os educandos resolveram uma parte do problema 5, se perderam um pouco na hora de definir as coordenadas, pois verificaram a distância entre P e Q e a dividiram por dois, mas, no momento de determinar qual era o par ordenado, ficaram confusos.

Espelhando-se pela questão 4 alguns discentes relataram a seguinte sequência de cálculos necessários para resolução do problema 6: cálculo da altura do triângulo equilátero cujos vértices são os centros das circunferências e os pontos médios dos seus lados são os de tangência, depois soma-se da altura do triângulo, a medida de segurança, os raios e a altura da carroceria.

Inicialmente, os estudantes não entenderam nem mesmo o comando do enunciado 9, algo que foi sanado através do GeoGebra, quando as vigas e os raios solares foram representados, respectivamente, por retângulos e vetores. Após a questão ser interpretada, um dos educandos se pronunciou dizendo que era possível resolver usando uma das razões trigonométricas.

Trabalhar com oficinas não é uma estratégia pedagógica nova, mas implementá-las a um novo sistema de ensino para o qual não estávamos acostumados, fazendo parceria entre o universo freireano e aplicativos como o GeoGebra foi desafiador e, ao mesmo tempo, uma grande aprendizagem, pois o espaço escolar é sempre terreno frutífero para trocas de experiências entre professor e aluno. Cada um traz para a aula um acumulado de conhecimentos que são partilhados por meio das interações fomentadas, cada qual contribuindo para um momento de aprendizagem pautado na valorização de cada indivíduo envolvido no processo.

Refletir a prática do ensino de geometria, de acordo com as ideias do grande educador Paulo Freire, fez com que pudéssemos transferir a matemática tida como uma disciplina difícil por muitos para uma realidade mais próxima da vivência de cada aluno. Sabemos que precisamos valorizar as experiências de cada ser envolvido em um processo de ensino e aprendizagem e, durante as oficinas cada interação dos participantes, elas foram levadas em consideração.

Educar significa também saber escutar o outro e entender que cada pessoa envolvida nesse dinamismo tem contribuições importantes para oferecer. Então, na mesma proporção que ensinamos algo, também aprendemos algo com nossos alunos. Essa relação é construída a cada instante que compartilhamos nossos saberes, e cabe ao educador valorizar cada interação manifestada no espaço escolar.

Assim, permitir que o estudante se posicione, tendo vez, voz e a oportunidade de ensinar, além de aprender, são ideias defendidas por Freire e corroboradas na fala do professor Geraldo Perez em entrevista a Forner (2005 p.125):

> Paulo Freire insistia que você pode aprender com os alunos e podemos verificar que isso realmente acontece, é só prestar atenção naquilo que o aluno fala ou na forma que você conduz a sua aula, você começa a permitir que o aluno se manifeste dentro da sala de aula, dessa forma você começa a aprender com o aluno, assim o aluno passa a ter vez dentro da sala de aula, ele pode se manifestar, opinar, ter uma opinião contrária à do professor, pode inclusive duvidar do professor, essas eram palavras mágicas do Paulo Freire.

Portanto, fazer essa abertura e instigar os alunos a se pronunciarem sobre o conteúdo que está sendo trabalhado, através do diálogo, torna a aula uma aprendizagem mútua. Dessa forma, podemos dizer que esse estudo foi bastante engrandecedor e gratificante, algo que notamos nos seguintes depoimentos de alguns educandos:

Aluna A: “Eu gostei bastante das aulas do ENEM. Eu tenho bastante dificuldade com matemática e a senhora sempre tem paciência comigo, sempre faz o possível para tornar as aulas mais didáticas, os slides são bem dinâmicos, pois por ser uma matéria complexa às vezes algumas pessoas tem uma certa dificuldade e a senhora sempre traz os assuntos simplificados para tornar mais simples o aprendizado.”

Aluno B: “As aulas são bastante atraentes desde o início até o fim, pois a forma em que é falado e debatido, mostrando os conteúdos com muita clareza e muito bem explicado todas as incógnitas que tem em cada conteúdo fazendo com que não desviamos nossa atenção para nenhum lugar, sendo assim facilitando o aprendizado.”

Aluna C: “Eu gosto muito das aulas, sem falar que a senhora explica muito bem a disciplina, quem realmente quer e presta atenção na aula aprende de verdade.”

Aluno D: “Eu gostava do fato de fazer algumas atividades em sala, assim tirava dúvidas, e não ficava tudo pra depois, mas não sei muito o que falar, dava pra aprender, são aulas bem explicadas.”

Aluna E: “A forma que a senhora explica detalhadamente eu acho muito boa, quando eu não entendo é mais quando tenho que fazer alguma coisa aqui em casa, aí acabo perdendo um pouco da explicação.”

Vislumbramos, então, como foram ricos e significativos os momentos compartilhados nessas oficinas para estes estudantes e, portanto, não podemos deixar de considerá-los nas nossas análises dos resultados, pois averiguar apenas a avaliação de desempenho não seria suficiente para um resultado justo, já que isto se assemelharia a uma avaliação somativa que utiliza apenas uma prova, como instrumento para quantificar o conhecimento dos alunos, sem considerar os demais processos do ensino e aprendizagem que foram desenvolvidos.

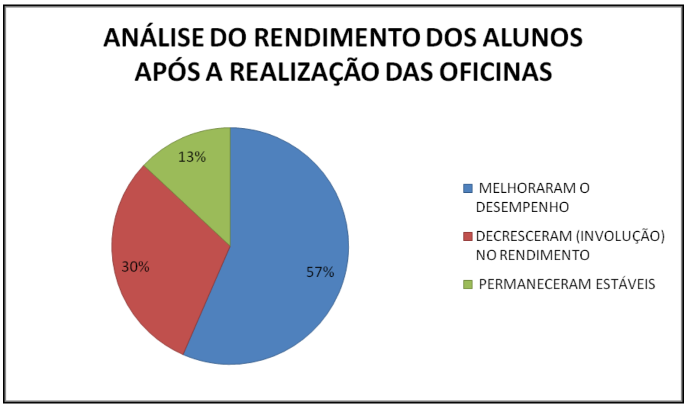
Embora os estudantes passem constantemente durante sua vida escolar, e até mesmo fora dela, por avaliações de caráter somativo como o ENEM, ou ainda como os exames de vestibular e provas de concursos públicos que têm como objetivo principal classificar o candidato para o ingresso em um curso superior ou um cargo público, o intuito desse trabalho não é classificar os educandos que participaram do programa, é verificar a eficácia da metodologia utilizada.

Assim, as análises feitas em relação ao resultado foram: se houve progresso, ainda que pequeno, em relação a quantidade de questões acertadas e em relação aos mesmos assuntos contidos em ambas as avaliações cujos alunos erraram na primeira e acertaram na segunda, além da percepção do desenvolvimento dos estudantes durante os diálogos sobre as questões, procurando aliar as avaliações: formativa e somativa para obter um resultado mais palpável. Conforme destaca Paixão (2016, p. 7)

> (...) Em ambientes em que o processo avaliativo segue seu curso ideal, com a avaliação formativa e a somativa trabalhando conjuntamente em prol da aprendizagem (...) o que se vê é uma parceria entre professor e aluno, que faz a avaliação deixar de ser uma prova comprobatória e passe a ser um instrumento para verificação do progresso.

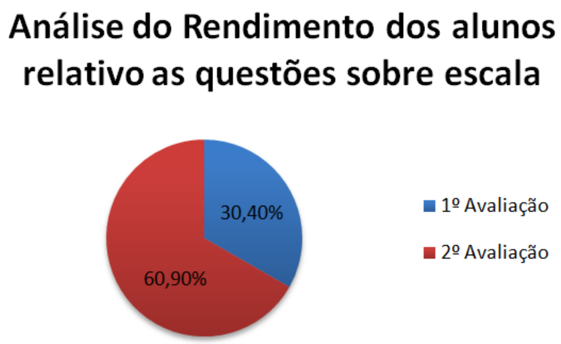
Assim, para melhor visualização da nossa análise dos resultados, seguem os gráficos:

Figura 4.1 Gráfico - Em relação à quantidade de questões acertadas



Fonte: autoria própria

Figura 4.2 Gráfico - Em relação à quantidade de alunos que acertaram a questão na 1º e 2º avaliação



Fonte: autoria própria

Daí, com base nos gráficos e considerando a evolução de alguns alunos nas discussões sobre as questões, podemos dizer que o resultado foi favorável ainda que não seja o ideal. Contudo, vale ressaltar que nem sempre as oficinas contaram com a participação de todos os alunos que aceitaram o convite, algumas vezes, menos de um terço dos estudantes estavam presentes, além de que, às vezes, era possível perceber que nem todos tinham um ambiente adequado para estudar, livre de distrações, nem os equipamentos ou recursos necessários como uma boa internet, tablet ou notebook. Enfim, todos esses fatores contribuíram para os resultados não serem tão expressivos, mas ainda assim é possível notar que houve melhoria, que talvez, em circunstâncias mais favoráveis, as oficinas pudessem apresentar o resultado almejado.

Todavia, apesar de todos os contratempos, podemos dizer com essa investigação que utilizar a pedagogia freireana juntamente com as questões do ENEM para estimular os alunos a participarem das aulas, através do diálogo, na construção do seu conhecimento, valorizando os seus pensamentos e sua linguagem, dando-lhes oportunidade de serem ouvidos, é um método exitoso e desafiante, tanto para o educando quanto para o educador, tornando esse momento uma experiência enriquecedora para ambas as partes.

Capítulo 5

Considerações Finais

Iniciamos esta pesquisa buscando desenvolver uma ferramenta útil e aplicável para auxiliar os professores que procuram novas metodologias, que chamem a atenção dos seus alunos e melhorem sua aprendizagem. Algo que não tivesse um alto custo ou demandasse muito esforço, algo que ajudasse os discentes a perceberem que para o processo ensino-aprendizagem realmente acontecer, é necessária a sua participação ativa.

Nesse sentido o processo de resolução de questões se configurou como um caminho viável e frutífero para potencializar o ensino de matemática, mais especificamente o de geometria. Mas a intenção, como já mencionada, não é permanecer com o ensino tradicional, é trazer um diferencial, algo que torne o aprendizado significativo, dentro dessa perspectiva. Pesquisar e trabalhar com as ideias de Paulo Freire que prega uma pedagogia dialógica, a valorização da linguagem e da bagagem cultural dos educandos, que professor e aluno podem aprender e se desenvolver juntos, pois ambos são seres inacabados, entre outros aspectos que demonstram a amorosidade, o humanismo e o otimismo, deste educador, pela educação e como ele acreditava que a educação pode transformar positivamente a sociedade e o mundo, foi uma experiência bastante proveitosa.

Utilizar, nesse processo de resolução de problemas, as questões de geometria do ENEM, fortaleceu ainda mais esse instrumento que buscávamos desenvolver, pois, diferente das demais avaliações externas, o ENEM dá maior atenção ao desempenho dos estudantes quando se trata das competências, tendo um caráter multifocal, além de trazer na sua contextualização notícias e fatos do cotidiano, dando um significado mais vívido para os alunos, bem como por ser considerado um dos principais meios de acesso ao ensino superior, não apenas como porta de entrada, mas também garantindo a permanência do educando em faculdades particulares através de programas como PROUNI, tudo isso mostra a sua relevância na construção das oficinas.

Compartilhar saberes durante as discussões das oficinas foram momentos desafiantes e enriquecedores, pois, por um lado, estimular a participação dos alunos, mesmo quando o assunto trabalhado não envolve um contexto significativo para eles, dentro do sistema de aulas remotas, não é exatamente uma tarefa fácil, mas, por outro, quando o diálogo é estabelecido, nossos horizontes são ampliados, pois, ao se permitir ouvir os alunos, passamos a enxergar o universo deles e visualizar um mesmo objeto por diferentes perspectivas, tornando essa troca de experiências em uma aprendizagem mútua.

Por tudo que já foi mencionado, consideramos que nosso trabalho traz algumas reflexões sobre a prática pedagógica e uma ferramenta que, se bem desenvolvida, poderá contribuir bastante para uma educação libertadora, tornando sua leitura valiosa e recomendável.

Referências Bibliográficas

[1] ALTENHOFEN, M. E. **Atividades contextualizadas nas aulas de matemática para a formação de um cidadão crítico.**. 2008. 108 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS. Porto Alegre, 2008.

[2] ANDRADE, S. **Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula.**. Dissertação de Mestrado, UNESP-Rio Claro, São Paulo, 1998.

[3] BARRETO, R. C. S. **A matemática na constituição de um currículo integrado: possibilidades e desafios para o Ensino Médio e a educação profissional de jovens e adultos.**. 2013. 151 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal Do Espírito Santo – Centro De Educação. Vitória, 2013.

[4] CAETANO, J. J. **Formação de professores de Matemática: uma perspectiva freireana.**. São Paulo, 2004. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo- PUC-SP, 2004.

[5] FAUSTINO, A. C. **"Como você chegou a esse resultado?": o diálogo nas aulas de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Rio Claro, 2018. 232 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. 2018.

[6] FERREIRA, C.R. **Modelagem Matemática na Educação Matemática:contribuições e desafios à formação continuada de professores na modalidade Educação a Distância online**. Ponta Grossa/PR, 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Ponta Grossa – Educação. 100p. 2010.

[7] FORNER, R. **Paulo Freire e Educação Matemática: reflexos sobre a formação do professor**. 2005. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Campinas, São Paulo. 2005.

[8] FRANKENSTEIN, M. Educação matemática crítica: uma aplicação da epistemologia de Paulo Freire.*In* BICUDO, M. A. V. (Org.). **Educação Matemática.** 2ª edição [1ª ed. s/d]. São Paulo, Ed. Centauro. Pp. 101-140. 2005.

[9] FREIRE, A. M. A. **Paulo Freire: sua Vida, sua Obra**. I Encontro Nacional de Educação de Jovens e Adultos – ENEJA: Recife/PE, 1998.

[10] FREIRE, P. **Educação como Prática da Liberdade**. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1967, 157 p.

[11] FREIRE, P. **A importância do ato de ler: em três artigos que se completam**. São Paulo: Autores Associados: Cortez, 1989. (Coleção polêmicas do nosso tempo; 4).

[12] FREIRE, P. **Conscientização: Teoria e prática da libertação: Uma introdução ao pensamento de Paulo Freire**. São Paulo: Cortez & Moraes, 1979. 53p.

[13] FREIRE, P. **Extensão ou comunicação?** 8ª ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1983. 93 p.

[14] FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 23ª ed. Paz e Terra: Rio de Janeiro, 1987, 107 p.

[15] FREIRE, P. **A Educação na Cidade**. São Paulo: Cortez, 1991, p. 144.

[16] FREIRE, P. **Pedagogia da Esperança. Um reencontro com a Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992. 127p.

[17] FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996. 54p.

[18] FREIRE, P. **Professora sim tia não: cartas a quem ousa ensinar**. São Paulo: Olho D´Água, 1997. 84p.

[19] FREIRE, P. **Política e educação: ensaios**. 6ª ed. São Paulo: Cortez, (Org. e notas de Ana Maria Araújo Freire). 2001.

[20] GADOTTI, M. (Org.) **Paulo Freire: uma bibliografia**.São Paulo: Cortez, 1996.

[21] LINS, M. J. Educação Bancária: uma Questão Filosófica de Aprendizagem. **Revista Educação e Cultura Contemporânea**,v. 8, n. 16, p. 1-12, 2011.

[22] LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. 2ª edição. Campinas, SP: Autores Associados, coleção formação de professores. 2008.

[23] PACHECO, M. S. **Geometria Plana e Inclusão Digital: uma experiência a partir do cotidiano dos alunos EJA**. 2009. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

[24] SANTOS, B. P. **A etnomatemática e suas possibilidades pedagógicas: algumas indicações pautadas numa professora e em seus alunos e alunas de 5ª série**. 2002. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo/USP. 2002.

[25] SANTOS, B. P. **Paulo Freire e Ubiratan D´Ambrósio: contribuições para a formação do professor de matemática no Brasil**. São Paulo, 2007. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – Educação. 444p. 2007.

[26] SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia**. Campinas, SP: Papirus. Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 2013.160 p.

[27] TERUZZI, A.E. **Ensino da Matemática e a Pedagogia de Paulo Freire: pontos de contatos e consonâncias**. XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática Tema: Pesquisa em Educação Matemática: Perspectivas Curriculares, Ética e Compromisso Social UNICSUL - Campus Anália Franco, São Paulo – SP. 2019.

[28] ANDRADE, D. F. de; TAVARES, H. R.; VALLE, R. da C. **Teoria da Resposta ao Item:conceitos e aplicações**. ABE, São Paulo, 2000.

[29] BARBOSA, L. C. de M.; VIEIRA, L. F. Avaliações Externas estaduais: possíveis implicações para o trabalho docente. **Revista e-Curriculum**, São Paulo, n.11 v.02 ago. 2013.

[30] BARROS, A. S. X. Vestibular e Enem: um debate contemporâneo. **Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, Rio de Janeiro, v. 22, n. 85, p. 1057-1090, out./dez. 2014.

[31] BLASIS, E.; FALSARELLA, A. M.; ALAVARSE, O. M. **Avaliação e Aprendizagem: Avaliações externas: perspectivas para a ação pedagógica e a gestão do ensino**. Coordenação Eloisa de Blasis, Patrícia Mota Guedes. – São Paulo: CENPEC: Fundação Itaú Social, 2013, 48p.

[32] BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/ldb.pdf. Acesso em: 30 abr. 2021.

[33] BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Portaria MEC nº 438, de 28 de maio de 1998**. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178-0181_c.pdf. Acesso em: 02 maio. 2021.

[34] BRASIL. Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio: documento básico.** Brasília, DF: INEP, 2001. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/ENEM+-+Exame+Nacional+do+Ensino+M%C3%A9dio+documento+b%C3%A1sico+2002/193b6522-cd52-4ed2-a30f-24c582ae941d?version=1.2 Acesso em: 10 mai. 2021.

[35] BRASIL. **Proposta à Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior**. Brasília: Ministério da Educação (MEC). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2009.

[36] BRASIL. Ministério da Educação. **Diário Oficial da União Nº101**. Disponível em: http://reitoria.ifpr.edu.br/wp-content/uploads/2013/01/Portaria-INEP-n-144- Certificacao.pdf. Acesso em: 15 jan. 2013

[37] BRASIL. Ministério da Educação. **ENCCEJA**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/encceja. Acesso em: 21 mai. 2021.

[38] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**.Brasília: MEC; 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: nov. 2021

[39] CAVALCANTE, A. C. M. **Aos conceitos de habilidades e competências do novo ENEM e a percepção pedagógica dos professores de biologia**.Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, 2011.

[40] CEARÁ **SPAECE**. Acessível em: http://www.spaece.caedufjf.net/mapa-do-site/. Acesso em: 10 de abr. 2021.

[41] COLA, A.R. **Avaliação externa e em larga escala: o entendimento de professores que ensinam matemática na educação básica**. 2015. 93 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

[42] DANTAS, L. M. **Avaliação externa e prática docente : o caso do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) em uma escola em Maracanaú-CE .**. 148 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Pro-grama de Pós- Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza, 2015.

[43] DUARTE, C. E. de L. Avaliação da aprendizagem escolar: como os professores estão praticando a avaliação na escola **Holos**, Natal, ano 31, v.8, p. 53-67, 2015.

[44] FERNANDES, D. Avaliação em educação: uma discussão de algumas questões críticas e desafios a enfrentar nos próximos anos. **Ensaio: Avaliação e políticas públicas em educação**. Fundação Cesgranrio, Rio de Janeiro, v. 21, n. 78, p. 9-32, jan./mar. 2013.

[45] FONTANIVE, N. S. A divulgação dos resultados das avaliações dos sistemas escolares: Limitações e perspectivas. **Ensaio: Avaliação e políticas públicas em educação**. Fundação Cesgranrio, Rio de Janeiro, vol.21, n.78, pp.83-100., 2013.

[46] HOLLAS, J. **Educação estatística crítica: uma investigação acerca do Exame Nacional do Ensino Médio**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unochapecó, Chapecó, SC, 2017.

[47] HOLLAS, J.; BERNARDI, L. T. M. dos S. O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e as competências para uma Educação Estatística Crítica. **Ensaio: aval. pol. públ. Educ.**,Rio de Janeiro, v.28, n.106, p. 110-134, jan./mar. 2020.

[48] INEP. **A redação no Enem: guia do participante**. Brasília: 2013. https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/guia_participante/2013/guia_participante_redacao_enem_2013.pdf.

[49] INEP. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Disponível em http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc. Acesso em 02 de abr. 2021.

[50] KEMIAC, L. **O Exame Nacional do Ensino Médio como gênero do discurso**. 2011. 215 f. Dissertação (Mestrado em Linguagem e Ensino) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2011.

[51] LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar: componente do ato pedagógico**.Cipriano Carlos Luckesi – 1.ed – São Paulo: Cortez, 2011.448p.

[52] LUCKESI, C. C. **Educação, Avaliação Qualitativa e Inovação. Série Documental. Textos para Discussão**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 30 p. 2012.

[53] MALUSÁ, S; ORDONES, L. L.; RIBEIRO, E.ENEM: pontos positivos para a educação brasileira. **Revista Educação e Políticas em Debate**. Uberlândia, v. 3, n. 2, p. 358-382, ago./dez. 2014.

[54] MOURA, J. H. C. de. **A integração curricular no ENEM: o caso das Ciências da Natureza**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

[55] MEC. **Portaria 462 de 28 de maio de 2009**. Brasil: Lei, 2009.

[56] NASCIMENTO, F.; COUTINHO, T. C.; PINHEIRO, J. A. Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM: um olhar dos discentes do 3° ano do Ensino Médio e sua preparação para o ingresso no ensino superior. **Educação em Revista**, Marília, v. 14, n. 2, p. 69-92, Jul.-Dez. 2013.

[57] OLIVEIRA, M. A. M.; ROCHA, G.Avaliação em larga escala no Brasil nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Associação nacional de política e Administração da Educação. **Cadernos Anpae**, nº4. Porto Alegre - RS. 11 a 14 de novembro de 2007.

[58] OLIVEIRA, A. F; PIZZIO, A.; FRANÇA, G. **Fronteiras da Educação: desigualdades, tecnologias e políticas.**. Editora da PUC Goiás, 2010, pág, 93-99. Disponível em: http://www.sinprodf.org.br/wp-content/uploads/2012/01/texto-4-pol%C3%8Dticasp%C3%9Ablicas-educacionais.pdf. Acesso em: 27 de abr. 2021.

[59] OLIVEIRA, S. Com taxa de participação no Enem, CE tem segunda melhor média do país. Em: http://www.opovo.com.br/app/opovo/cotidiano/2015/08/12. Acesso: 20 de dez. 2015.

[60] ORTIGÃO, M. I. R.; SANTOS, M. J. C. dos; AGUILAR JUNIOR, C. A. Pesquisa em avaliação: algumas reflexões. **Boletim GEPEM**, n.70, pp. 70-79. 2017.

[61] PASSONE, E. F. K, Prefácio, p. 7-13, 2017. In: LEITE, R. H. (org.); ARAÚJO, K. H. (org.); SILVA, L. M.da (org.).**Avaliação educacional:estudos e práticas institucionais de práticas de eficácia**. 1. ed. Fortaleza: edUECE, 2017. v. 1. 242p.

[62] ROCHA, E. da S. **Uma análise pedagógica dos dados estatísticos das provas de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental do SAEB, no período de 2011 a 2017**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas. 110 f. 2019.

[63] SAMPAIO, L. O. **Educação estatística crítica: uma possibilidade**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

[64] SANTOS, A.O; GIMENES, O.M.; MARIANO, S. M. F. Avaliações externas e seus impactos nas práticas pedagógicas: percepções e visões preliminares. **Revista Encontro de Pesquisa em Educação**. Universidade de Uberaba. Uberaba, v. 1, n. 1, p. 38-50, 2013.

[65] SANTOS, C. I.; OLIVEIRA, P. C. Avaliação externa em matemática: análise de teses e dis-sertações que abordam conteúdos matemáticos. **Revista Brasileira de Iniciação Científica (RBIC),** Itapetininga, v. 7, n. 3, p.36-55, abr./jun., 2020.

[66] UNESCO. Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica**. Brasília: UNESCO; São Carlos: EdUFSCar, 2016. 114.p.

[67] PASSOS, C.L.B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. 2000. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

[68] MINAYO, M. C. S. (Org.); DESLANDES, S. F.; NETO, O. C.; GOMES, R. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2002.

[69] DAMIANI, M. F.; ROCHEFORT, R. S. ; CASTRO, R. F.; DARIZ, M. R. ; PINHEIRO, S. S. **Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica.** Cadernos de Educação — FaE/PPGE/UFPel.Pelotas [45] 57 – 67, maio/agosto 2013.

[70] PAIXÃO, C. R. (org.). **Avaliação**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

[71] SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**.[livro eletrônico] 1. ed. – São Paulo: Cortez, 2013.1,0 MB ; e-PUB.

[72] DZIADZIO, J. R. Percepções e relações da geometria espacial com o cotidiano dos alunos. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE artigos. **Cadernos PDE**. 2016. Versão online. ISBN 978-85-8015-093-3.

[73] PUC-SP. **Instituto GeoGebra São Paulo**. Disponível em https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acesso em jun. 2021.

[74] UESB. **O que é GeoGebra?** Disponível em http://www2.uesb.br/ institutogeogebra/?page_id=7. Acesso em jun. 2021.

[75] **GeoGebra Manual.** Disponível em https://wiki.geogebra.org/pt/Manual. Acesso em jun. 2021.

[76] LIRA, J.; MAYMONE, A. Razões, Proporções e Funções Afins - Parte I, **Material Estruturado Matemática**, SISEDU.

[77] Como converter as unidades – Conversão de medidas. Disponível em: https://www.todamateria.com.br. Acesso em 03 de abr. 2021

[78] Área e Perímetro – Matemática Enem. Disponível em: https://www. educamaisbrasil.com.br. Acesso em 22 de abr. 2021.

[79] Volume – Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em https://pt.wikipedia.org . Acesso em 08 de maio 2021.

[80] Unidades de Medida de Volume – Beduka. Disponível em: https://beduka.com. Acesso em 08 de maio 2021.

[81] Planificação de sólidos geométricos: o que é? – Escola Kids. Disponível em: https://escolakids.uol.com.br. Acesso em 08 de maio 2021.

[82] Figuras geométricas – Matemática – Manual do Enem. Disponível em: https:// querobolsa.com.br. Acesso em 22 de maio 2021.

[83] Área de figuras semelhantes – Mundo Educação. Disponível em: https:// mundoeducacao.uol.com.br. Acesso em 22 de maio 2021.

[84] Projeção ortogonais – Mundo Educação. Disponível em: https:// mundoeducacao.uol.com.br. Acesso em 22 de maio 2021.

[85] Segmentos tangentes. Disponível em https://pt.slideshare.net. Acesso em 05 de jun 2021.

[86] Trigonometria no Triângulo Retângulo – Toda Matéria. . Disponível em: https:// www.todamateria.com.br. Acesso em 05 de jun 2021.

[87] Plano cartesiano: para que serve, como montar - Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br. Acesso em 05 de jun 2021.

[88] Polígonos: Definição, Tipos e Propriedades – Matemática Básica. Disponível em: https://matematicabasica.net/poligonos. Acesso em 05 de jun 2021.

[89] BONAMINO, A.; SOUSA, S. Z. Três Gerações de Avaliação da Educação Básica no Brasil: interfaces com o currículo da/na escola. **Educação e Pesquisa**. São Paulo, v. 38, n. 2, p. 373-388, Abr/Jun, 2012.

[90] FERNANDES, D. Avaliação externa: exames e estudos internacionais. In: . **Avaliar para aprender – fundamentos, práticas e políticas**. São Paulo: UNESP, 2009, p. 112-133.

[91] FREITAS, L. C. de. **Os reformadores empresariais da educação: da desmoralização do magistério à destruição do sistema público de educação. Educação e Sociedade**, Campinas, v.33, nº 119, p. 379-404, abr -jun. 2012.

[92] GATTI, B. A. **Possibilidades e Fundamentos de avaliações em larga escala: primórdios e perspectivas contemporâneas**. In: BAUER, A.; GATTI, B. A.; TAVARES, M. R. (Orgs). Ciclo de Debates: vinte e cinco anos de avaliação de sistemas educacionais no Brasil, origens e pressupostos. Florianópolis: Editora Insular, 2013.

[93] HORTA NETO, J. L. **IDEB: Limitações e usos do indicador**. In: BAUER, Adriana; GATTI, Bernadete A.; TAVARES, Marinalva R. (Org.). Ciclo de Debates: Vinte e Cinco anos de avaliação de sistemas educacionais no Brasil, origens e pressupostos. Florianópolis: Editora Insular, 2013, p.149-161.

[94] VIDAL, E. M.; VIEIRA, S. L. Gestão Democrática da Escola no Brasil: Desafios à Implementação de um novo modelo. **Revista Iberoamericana de Educación**. n. 67, p. 19-38, 2015.

[95] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar.** v. 9. Geometria plana. São Paulo: Atual editora, 1980.

Apêndice A

Oficinas – Execução Prática

As oficinas colocadas nesse apêndice foram utilizadas no desenvolvimento desse trabalho. Sendo, portanto, compiladas aqui como o produto educacional referente a essa dissertação, com intuito de servir como material de apoio a professores da educação básica.

A ideia é apresentar primeiro os conteúdos mais simples e aumentar gradativamente o grau de complexidade, com base nas dificuldades, demonstradas pelos discentes, as quais podem ter como apoio comprovativo uma avaliação diagnóstica semelhante à que utilizamos e disponibilizamos aqui.

As oficinas podem ser exibidas através de slides ou material impresso com a seguinte sequência didática: teoria do conteúdo, resolução de várias questões do ENEM, relacionando a teoria com a prática do conteúdo apresentado, procurando lembrar-se de instigar e dar abertura para os alunos se pronunciarem sobre o assunto que está sendo ministrado, além de deixar algumas questões como exercício para mostrar-lhes a importância de se pôr em prática os conhecimentos adquiridos.

As questões a serem trabalhadas em cada oficina devem ser selecionadas cuidadosamente, analisando a teoria, a forma de ser apresentada, a maneira de simplificar contas e a possibilidade delas poderem ser exibidas através do GeoGebra. Sendo assim, deixamos, aqui, algumas questões sobre os assuntos das oficinas sugeridas, ficando a critério do professor fazer ou não alterações.

A linguagem a ser utilizada na explicação deve procurar fazer uma relação entre a linguagem rígida da matemática e a linguagem informal, próxima à realidade dos alunos, buscando sempre incentivá-los ao diálogo durante as descobertas dos objetos de conhecimento, para que seu entendimento seja o maior possível.

Caso deseje ampliar as ferramentas e recursos a serem utilizados pelos alunos na construção de sua aprendizagem, também se pode elaborar jogos e atividades no site Wordwall[2], ou utilizar outro dispositivo, se preferir, disponibilizando-os para os estudantes entre as oficinas.

Agora vejamos a avaliação diagnóstica e as oficinas utilizadas nessa dissertação:

[2]Site que permite ao usuário criar e compartilhar atividades e jogos para serem resolvidos de forma online e pode ser acessado através do https://wordwall.net/pt.

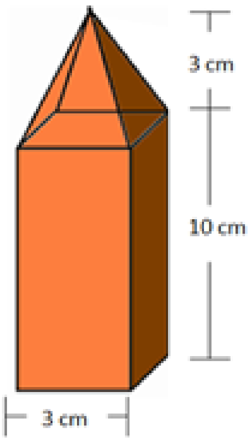
Avaliação Diagnóstica

1. Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, faz a divulgação do seu trabalho através das fotos de fatias de bolo como a representada na figura:
Ela lembra a representação de uma figura geométrica tridimensional. Essa figura é:

(A) Uma pirâmide
(B) Um paralelepípedo
(C) Um tetraedro
(D) Um prisma triangular
(E) Um tronco de cone

Disponível em:blog.tudogostoso.com.br . Acesso em: 29 mar. 2021 (adaptado).

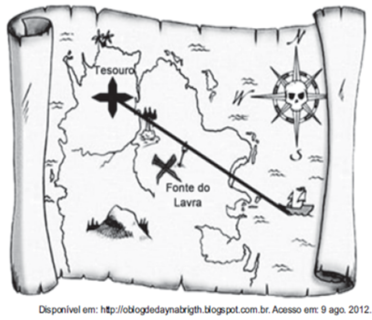
2. O gerente de uma fábrica de chocolate, buscando inovar, decide fazer uma barra de chocolate em forma de torre, cujo formato é um paralelepípedo de base quadrada sobreposto por uma pirâmide, e dimensões indicadas na figura. Sabendo que ele deseja que a torre fique completamente preenchida, quantos centímetros cúbicos de chocolate serão necessários?
(A) 90
(B) 99
(C)108
(D)117
(E)126



Disponível em: portaldoprofessor.mec.gov.br Acesso em: 29 mar. 2021 (adaptado).

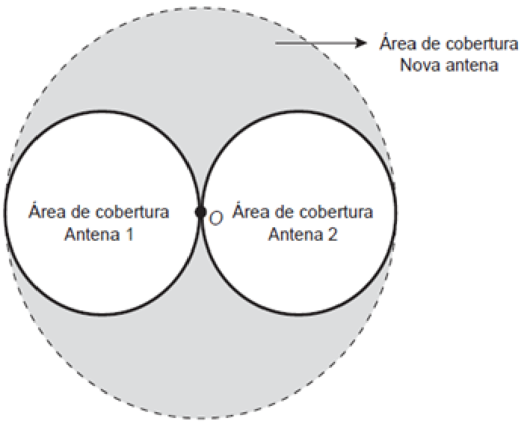
3. ENEM 2018 (Adaptada). Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real.
Certo mapa tem escala 1: 99 000 000.
Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,7 cm.
A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é

A) 4408 B) 7623 C) 44080
D) 76316 E) 440800



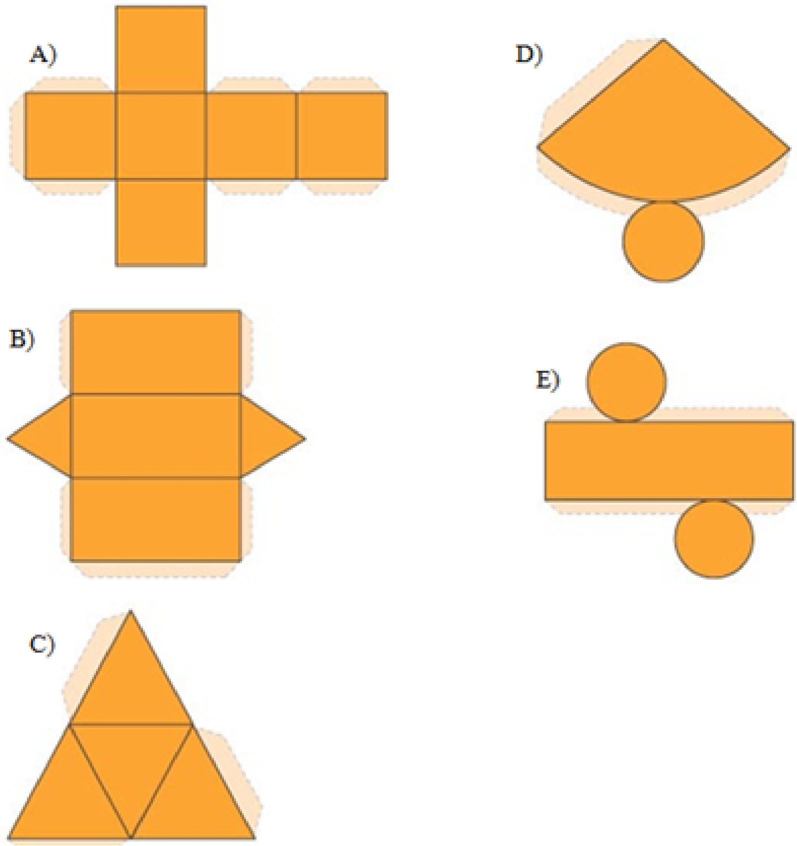
Disponível em: http://oblogdedaynabrigth. blogspot.com.br. Acesso em: 9 ago.2012

4. ENEM 2015 (Adaptada). Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 4 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura. O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.
Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em



(A) 8π. (B) $12\ \pi$. (C) $16\ \pi$. (D) $32\ \pi$. (E) $64\ \pi$.

5. Pedro quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com formato de sólidos geométricos como: cilindro, prisma de base pentagonal, tronco de pirâmides, tetraedro regular entre outros. Nas imagens a seguir estão as planificações de algumas dessas caixas. Qual delas representa a planificação do tetraedro regular?



IMAGENS: Disponível em: docplayer.com.br Acesso em: 29 mar. 2021 (adaptado).

1º oficina – Escalas e Conversão de Unidades de Medidas

Escalas

Além de permitir visualizar o espaço em que vivemos e localizar ruas, cidades e regiões, mapas são úteis para estimarmos distâncias entre localidades. Podemos, por exemplo, usar o seguinte mapa para determinar, aproximadamente, a distância entre as cidades de Juazeiro do Norte e Santana do Cariri, representada pela linha vermelha *no mapa*. A distância do segmento de reta *no mapa não é, obviamente*, igual à distância real! No entanto, está na mesma proporção da distância real. O que quer dizer isso?

Observe a escala representada na parte de baixo do mapa. Os retângulos desenhados nesta escala nos dão uma informação essencial: o comprimento de cada um deles (digamos, 1 centímetro) corresponde, na realidade, a uma distância de 10 quilômetros. Ou seja, se dois pontos no mapa estão a uma distância igual a 1 centímetro, as duas localidades que estes pontos representam estarão distantes 10 quilômetros uma da outra na realidade.

Podemos verificar que a distância, no mapa, de Juazeiro do Norte a Santana do Cariri é aproximadamente igual a 4,7 vezes o comprimento fixado na escala. Portanto, podemos, com alguma margem de erro, dizer que a distância real entre elas é igual a 47 quilômetros, pois:

$$1 \text{ cm - } 10 \text{ km}$$
$$4,7 \text{ cm - } x \text{ km}$$
$$x = 4,7 \cdot 10$$
$$x = 47\text{km}$$

Portanto a escala é o fator de comparação entre as distâncias no mapa e as distâncias reais. Neste nosso exemplo, a escala é dada por:

$$a = \frac{1}{1.000.000}$$

ou seja

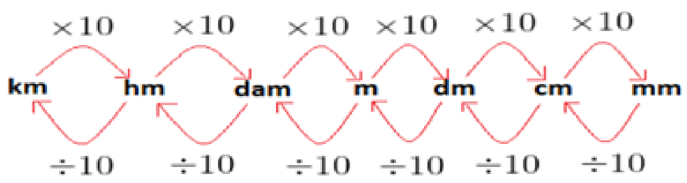
$$a = 1 : 1.000.000.$$

Uma vez que

$$10 \text{ quilômetros} = 10.000 \text{ metros} =$$
$$= 10.000 \times 100 \text{ centímetros} =$$
$$= 1.000.000 \text{ centímetros}$$

Aprendendo a converter a unidade de medida de comprimento

Em muitas situações nos deparamos com a necessidade de converter unidades, que são modelos estabelecidos para medir diferentes grandezas. Dessa forma, conhecer as regras de conversão entre unidades é fundamental. Portanto vejamos as relações abaixo:



As questões escolhidas sobre Escalas e Conversão de Unidades de Medidas são as seguintes:

ENEM 2010 – 1. No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto, em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm. Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

(A)1 : 20 (B) 1 : 100 (C) 1 : 200 (D) 1 : 1 000 (E) 1 : 2 000

Solução:

Como o diâmetro do espelho primário do telescópio mede 42 m = 4200 cm e o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm, a razão entre o diâmetro do olho humano e o diâmetro primário do telescópio é:

$$\frac{2,1}{4200} = \frac{21}{42000} = \frac{1}{2000}$$

Logo, a alternativa correta é o item E.

ENEM 2011 – 2. Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1: 250. Que medida de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

(A) 4,8 e 11,2 (B) 7,0 e 3,0 (C) 11,2 e 4,8 (D) 28,0 e 12,0 (E) 30,0 e 70,0

Solução:

Convertendo as unidades para centímetros, temos:

$$28 \text{ m} = 2800 \text{ cm}$$
$$12 \text{ m} = 1200 \text{ cm}$$

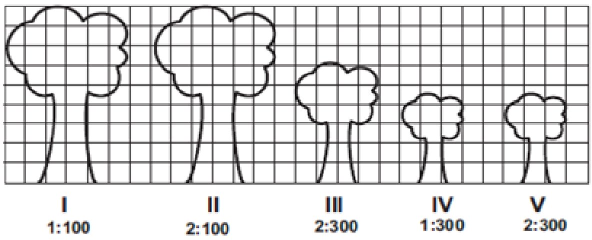
Como a escala é de 1: 250, as medidas da maquete serão de:

$$\frac{1}{250} = \frac{x}{2800} \qquad\qquad \frac{1}{250} = \frac{y}{1200}$$
$$x = \frac{2800}{250} = 11,2cm \qquad\qquad y = \frac{1200}{250} = 4,8cm$$

Assim, observamos que as medidas de comprimento e largura da maquete são, respectivamente, 11,2 cm e 4,8 cm.

Logo, a alternativa correta é o item C.

ENEM 2012 – 3. Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) V

Solução:

Considere a medida do lado dos quadradinhos da malha quadriculada igual a q. Assim, as alturas reais das árvores são:

Árvore I:

$$\frac{1}{100} = \frac{9q}{x}$$

$$x = 9q \cdot 100 = 900q$$

Árvore II:

$$\frac{2}{100} = \frac{9q}{y}$$

$$y = \frac{9q \cdot 100}{2} = 450q$$

Árvore III:

$$\frac{2}{300} = \frac{6q}{z}$$

$$z = \frac{6q \cdot 300}{2} = 900q$$

Árvore IV:

$$\frac{1}{300} = \frac{4,5q}{m}$$

$$m = 4,5q \cdot 300 = 1350q$$

Árvore V:

$$\frac{2}{300} = \frac{4,5q}{n}$$

$$n = \frac{4,5q \cdot 300}{2} = 675q$$

Portanto, a árvore IV tem maior altura real. Logo, a alternativa correta é o item D.

ENEM 2014 – 4. A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8 m de comprimento e 6 m de altura.

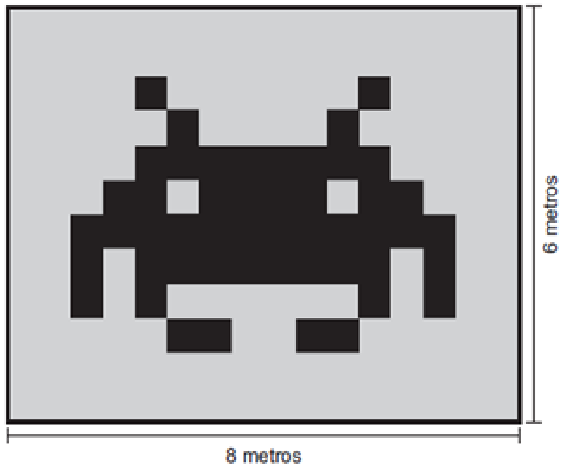


Figura 1

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme a Figura 2.

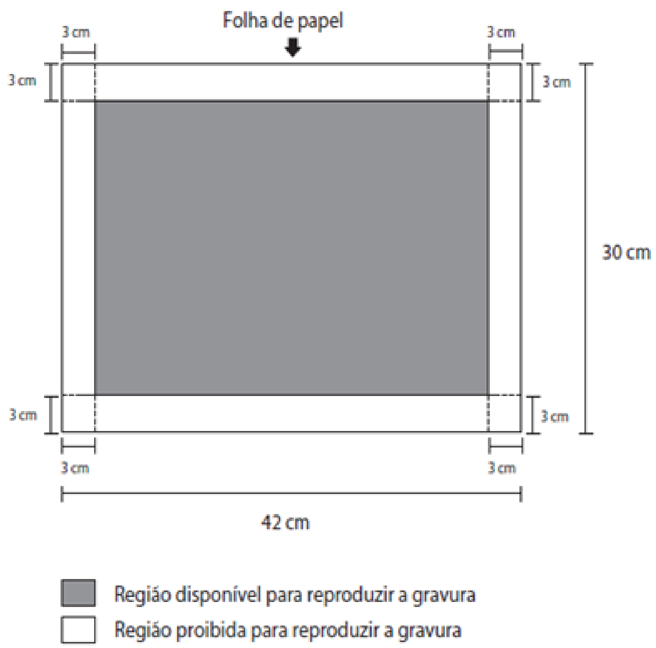


Figura 2

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

PRADO, A. C. Superinteressante, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é

(A) 1: 3. (B) 1: 4. (C) 1: 20. (D) 1: 25. (E) 1: 32.

Solução:

Como da folha retangular que se deseja reproduzir a gravura, é necessário deixar livre 3 cm de cada margem, temos que o retângulo disponível para a reprodução tem as seguintes dimensões 36 cm x 24 cm.

Por outro lado, o retângulo da gravura, na figura 1, tem dimensões 8 m x 6 m que equivale a 800 cm x 600 cm. Agora, vejamos a escala que seja possível ocupar a maior região disponível, mantendo as proporções da figura 1:

$$\frac{36}{800} = \frac{1}{22}$$

$$\frac{24}{600} = \frac{1}{25}$$

Como podemos observar a representação da gravura ocupará o máximo possível da região quando sua escala for 1: 25.

Logo, a alternativa correta é o item D.

ENEM 2016 – 5. Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1: 8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%. A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente,

(A) 22,00 cm, 12,00 cm e 5,00 cm.

(B) 27,50 cm, 15,00 cm e 6,25 cm.

(C) 34,37 cm, 18,75 cm e 7,81 cm.

(D) 35,20 cm, 19,20 cm e 8,00 cm.

(E) 44,00 cm, 24,00 cm e 10,00 cm.

Solução:

Como o projetista utilizou a escala 1: 8, as dimensões do desenho do guarda-roupa são:

220: 8 = 27,5cm de altura ; 120: 8 = 15cm de largura e 50: 8 = 6,25cm de profundidade.

Assim, após a redução de 20% feita na impressora suas dimensões passaram a ser:

$27{,}5 \cdot 0{,}8 = 22$ cm de altura, $15 \cdot 0{,}8 = 12$ cm de largura e $6{,}25 \cdot 0{,}8 = 5$ cm de profundidade.

Logo, a alternativa correta é o item A.

ENEM 2016 – 6. A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.


Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros.

Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

(A) 53 (B) 94 (C) 113 (D) 135 (E) 145

Solução:

Do enunciado, temos:

$$1 \text{ pé} = 12 \text{ polegadas} \qquad 1 \text{ polegada} = 2{,}54 \text{ cm}$$

Assim,

$$1 \text{ pé} = 12 \cdot 2,54 \text{ cm} = 30{,}48 \text{ cm} = 0{,}3048 \text{ m}$$

Então, o diâmetro da roda-gigante é dado por:

$$443 \cdot 0,3048 \approx 135m$$

ENEM 2018 – 7. Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real. Certo mapa tem escala 1: 58 000 000.

Disponível em: http://oblogdedaynabrigth.blogspot.com.br. Acesso em: 9 ago. 2012.

Disponível em: http://oblogdedaynabrigth.blogspot.com.br. Acesso em: 9 ago.2012

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm.

A medida real, em quilômetro , desse segmento de reta é

A) 4408 B) 7632 C) 44080 D) 76316 E) 440800

Solução:

A medida real é:

$$7,6 \cdot 58000000 = 440800000 \; cm$$

Agora fazendo a conversão para quilômetro, temos:

440 800 000 cm : 100 = 440 8 000 m

440 8 000 m : 1000 = 4 408 km

Logo, a alternativa correta é o item A.

ENEM 2020 DIGITAL – 8. Uma associação desportiva contratou uma empresa especializada para construir um campo de futebol, em formato retangular, com 250 metros de perímetro. Foi elaborada uma planta para esse campo na escala 1: 2 000

Na planta, a medida do perímetro do campo de futebol, em metro, é

(A) 0,0005. (B) 0,125. (C) 8. (D) 250. (E) 500 000.

Solução:

Primeiro vamos converter todas as unidades para centímetros, assim, temos:

$$250m = 250 \cdot 100 = 25000\, cm$$

De acordo com a escala apresentada, tem-se que:

$$\frac{1}{2000} = \frac{x}{25000}$$

$$x = \frac{25000}{2000} = 12,5cm = 0,125m$$

Logo, a alternativa correta é o item B.

ENEM 2020 DIGITAL – 9. Três pessoas, X, Y e Z, compraram plantas ornamentais de uma mesma espécie que serão cultivadas em vasos de diferentes tamanhos. O vaso escolhido pela pessoa X tem capacidade de 4 dm^3 . O vaso da pessoa Y tem capacidade de 7 000 cm^3 e o de Z tem capacidade igual a 20 L.
Após um tempo do plantio das mudas, um botânico que acompanha o desenvolvimento delas realizou algumas medições e registrou que a planta que está no vaso da pessoa X tem 0,6 m de altura. Já as plantas que estão nos vasos de Y e Z têm, respectivamente, alturas medindo 120 cm e 900 mm.
O vaso de maior capacidade e a planta de maior altura são, respectivamente, os de
(A) Y e X. (B) Y e Z. (C) Z e X. (D) Z e Y. (E) Z e Z.

Solução:
Para fazermos a comparação vamos deixar todos com a mesma unidade de medida, assim, temos:

Vaso	Capacidade	Altura
X	4 dm^3 = 4 L	0,6 m = 60 cm
Y	7 000 cm^3 = 7 L	120 cm
Z	20 L	900 mm = 90 cm

O vaso de maior capacidade e a planta de maior altura são, respectivamente, Z e Y.

Logo, a alternativa correta é o item D.

As questões a seguir ficaram como exercício para os alunos:

ENEM 2011 – Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa

observado pelo estudante está na escala de
(A) 1 : 250. (B) 1 : 2 500. (C) 1 : 25 000. (D) 1 : 250 000. (E) 1 : 25 000 000.

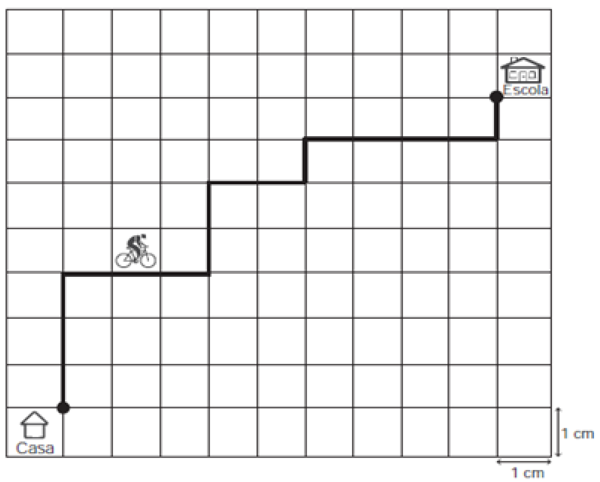
ENEM 2012 – O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas. Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?
(A) 1:700 (B) 1:7 000 (C) 1:70 000 (D) 1:700 000 (E) 1:7 000 000

ENEM 2020 DIGITAL – É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou 4 m^3 de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4000 embalagens de mesma capacidade.
Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem?
(A) 0,1 (B) 1,0 (C) 10,0 (D) 100,0 (E) 1 000,0

ENEM 2013 – A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola.

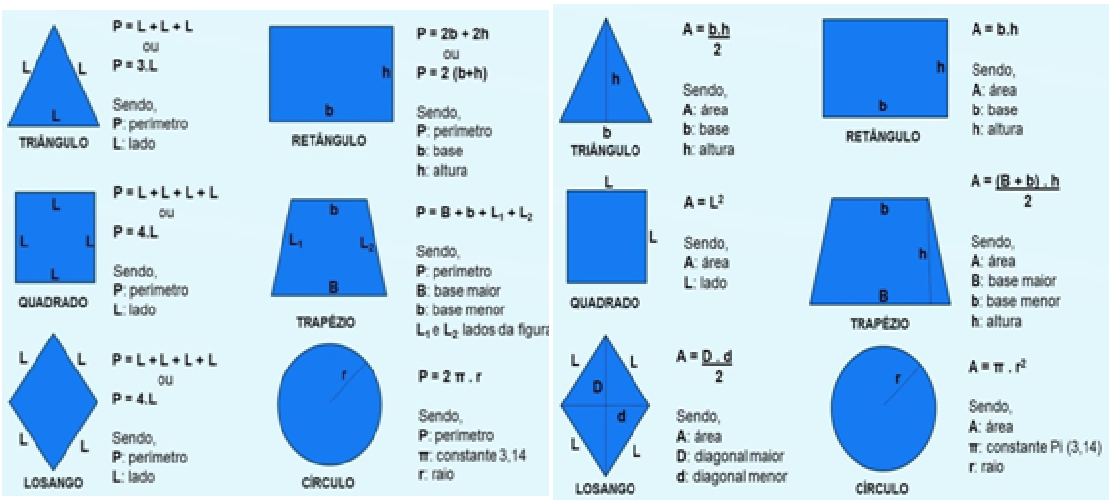


Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1: 25 000, por um período de cinco dias.
Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?
(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 20 (E) 40

2º oficina – Área e Perímetro de Figuras Geométricas

Área e perímetro

São cálculos direcionados para as medidas de uma figura geométrica. A área equivale ao tamanho da superfície, e o perímetro é o resultado da soma dos seus lados.



Disponível em: https://www.todamateria.com.br. Acesso em 22 abr.21

As questões sobre Área e Perímetro de Figuras Geométricas são as seguintes:

ENEM 2010 – 1. A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.
Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm $\times$ 100 cm). O valor da segunda encomenda será:
(A) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
(B) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.
(C) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

(D) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.
(E) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

Solução:

Para sabermos o custo da primeira compra, precisamos, antes, sabermos a área e o perímetro dos quadros:

Como os quadros são retangulares, temos:

$$\text{Área} = 25 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 1250\ cm^2 = 0{,}125\ m^2$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 25 \text{ cm} + 2 \cdot 50 \text{ cm} = 150 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ m}$$

Assim, temos que o custo de um quadro é:

$$0{,}125 \cdot 20 + 1{,}5 \cdot 15 = 25 \text{ reais}$$

Como são 8 quadros e tem a taxa de entrega a primeira compra custou:

$$8 \cdot 25 + 10 = 210 reais$$

Seguindo o mesmo raciocínio para a segunda compra, temos:

$$\text{Área} = 100 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 5000\ \ cm^2 = 0{,}5\ \ m^2$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 100 \text{ cm} + 2 \cdot 50 \text{ cm} = 300\ \text{ cm} = 3\ \text{ m}$$

Assim, temos que o custo de um quadro é:

$$0,5 \cdot 20 + 3 \cdot 15 = 55 reais$$

Como são 8 quadros e tem a taxa de entrega a segunda compra custou:

$$8 \cdot 55 + 10 = 450 reais$$

Assim, o valor da segunda encomenda é maior que o dobro da primeira.

Logo, a alternativa correta é o item B.

ENEM 2011 – 2. Em certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m
Terreno 2: 55 m por 55 m
Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

Solução:

Primeiro vamos calcular o perímetro de cada terreno para sabermos quais atendem as restrições impostas pela prefeitura, assim, temos:

Terreno 1:
$2 \cdot 55 + 2 \cdot 45 = 200 > 180$

Terreno 2:
$2 \cdot 55 + 2 \cdot 55 = 220 > 180$

Terreno 3:
$2 \cdot 60 + 2 \cdot 30 = 180$

Terreno 4:
$2 \cdot 70 + 2 \cdot 20 = 180$

Terreno 5:
$2 \cdot 95 + 2 \cdot 85 = 360 > 180$

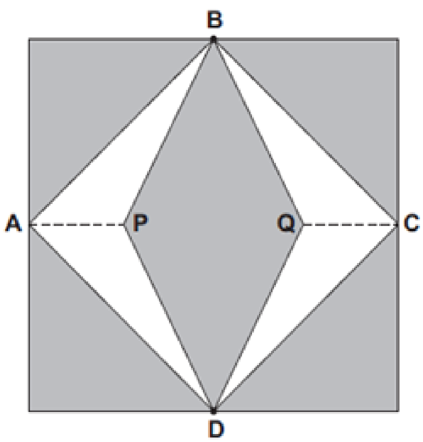
Observe que, apenas os terrenos 3 e 4 atendem as restrições impostas. Agora, vamos calcular a área deles para sabermos qual dos dois possui maior área:

Terreno 3:
$60 \cdot 30 = 1800$

Terreno 4:
$70 \cdot 20 = 1400$

Logo, o terreno de maior área, que atende às restrições impostas pela prefeitura, é o 3.

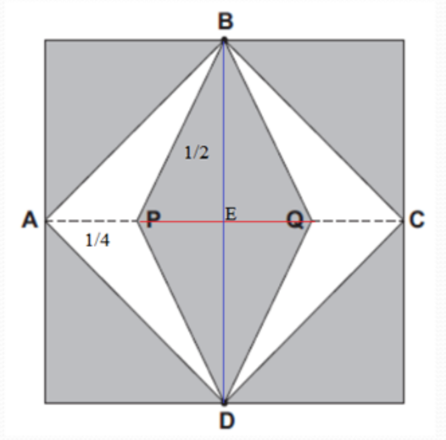
ENEM 2012 - 3. Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

(A) R$ 22,50 (B) R$ 35,00 (C) R$ 40,00 (D) R$ 42,50 (E) R$ 45,00

Solução:



Observe que o ponto E é ponto médio do segmento BD = 1 m. Logo, o segmento BE, que é a altura do triângulo ABP relativa a base AP, mede 1/2 m. Pelo enunciado temos AP = 1/4 m. Então, a área do triângulo ABP é:

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{16}$$

Agora, perceba que os triângulos ABP, ADP, BCQ e CDQ possuem a mesma área, já que as alturas relativas as bases AP e CQ são iguais e AP = CQ. Logo, a área clara é 4 vezes a área do triângulo ABP:

$$4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Como a região sombreada é a área do quadrado menos a região clara, temos:

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Assim, o custo para confeccionar o vitral é:

$$50 \cdot \frac{1}{4} + 30 \cdot \frac{3}{4} = 12,5 + 22,5 = 35,00$$

Assim, o item correto é o B.

ENEM 2012 - 4. O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

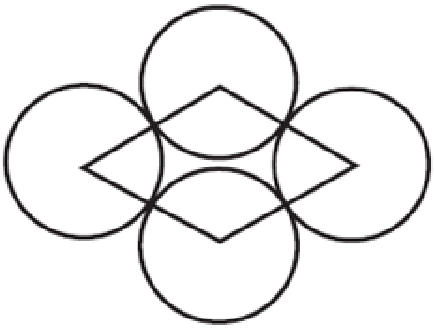


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

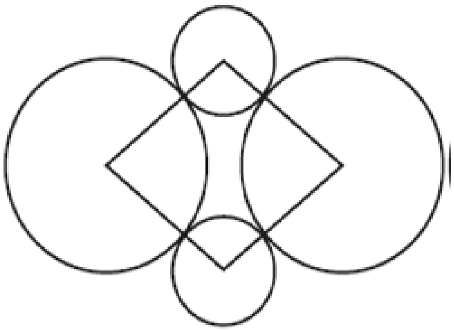


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

(A) 300%. (B) 200%. (C) 150%. (D) 100%. (E) 50%.

Solução:

Considerando a medida do raio da figura 1 igual a x, temos que o perímetro do losango formado por esses raios é $4\ .\ 2x = 8x$. Por outro lado, veja que o lado do losango da figura 2 vale $3x$, sendo seu perímetro $12x$, comparando com o perímetro da figura 1, percebe-se que houve um aumento de $4x$ que corresponde a 50% do perímetro do losango da figura 1.

Logo, a alternativa correta é o item E.

ENEM 2014 - 5. Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustra a figura.

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

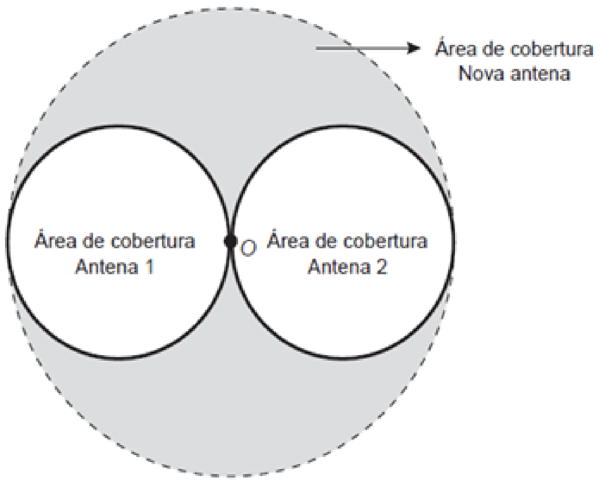
(A) πd (B) $2\pi d$ (C) $4\pi d$ (D) $5\pi d$ (E) $10\pi d$

Solução:

Como o comprimento da circunferência é dado por $2\pi r$ e para a confecção do diploma é preciso dar 5 voltas completas em torno do cilindro cujo raio é $\frac{d}{2}$, então, a medida, em cm, do lado da folha de papel necessária para a fabricação do diploma é:

$$5 \cdot 2\pi \cdot \frac{d}{2} = 5\pi d$$

ENEM 2015 - 6. Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

(A) 8 π (B) 12 π (C) 16 π (D) 32 π (E) 64 π

Solução:

Para sabermos o quanto a cobertura foi ampliada precisamos calcular as áreas cobertas pelas antenas antigas e pela antena nova, dessa forma temos, em km^2:

I. Área de cobertura das antigas antenas:

$$2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi$$

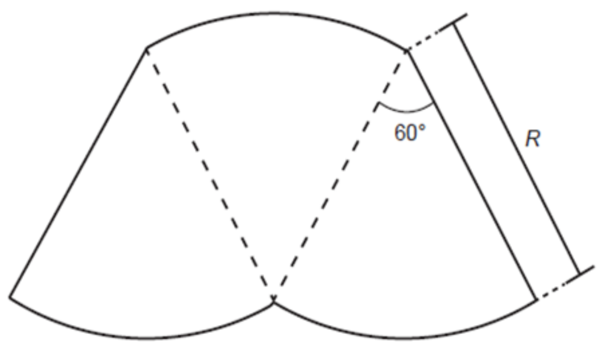
II. Área de cobertura da nova antena:

$$\pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

Logo, área de cobertura foi ampliada em:

$$16\pi - 8\pi = 8\pi$$

ENEM 2015 - 7. O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior desta piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50m x 24m.
O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

(A) 16. (B) 28. (C) 29. (D) 31. (E) 49

Solução:

Como a área da nova piscina deve ser menor que a da piscina já existente, temos:

$$3.A_{setor} < A_{retangular}$$

$$3(\frac{60°}{360°}\pi R^2) < 50 \cdot 24$$

$$3(\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot R^2) < 1200$$

$$R^2 < \frac{1200 \cdot 6}{9}$$

$$R^2 < 800$$

$$R < 28,3$$

Como R deve ser natural, então R = 28.

ENEM 2016 - 8. Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

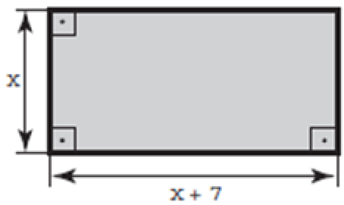


Figura A

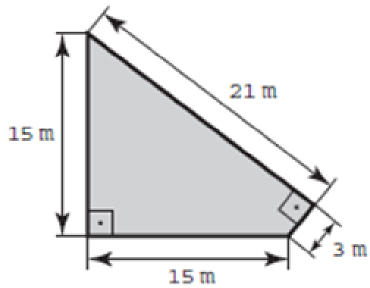


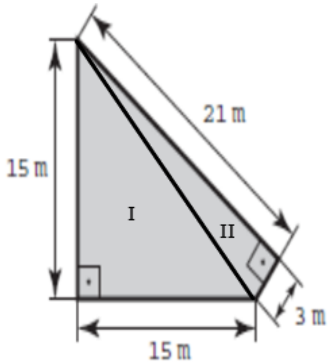
Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

(A) 7,5 e 14,5. (B) 9,0 e 16,0. (C) 9,3 e 16,3. (D) 10,0 e 17,0. (E) 13,5 e 20,5.

Solução:

Como a área do terreno da figura A será igual a área do terreno da figura B, para encontrarmos suas dimensões precisamos calcular a área do terreno do filho mais velho. Considere as áreas dos terrenos das figuras A e B iguais a A e a B, respectivamente, daí:



$$B = I + II$$

$$B = \frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2} = \frac{225 + 63}{2}$$

$$B = \frac{288}{2} = 144$$

Como A = $x(x+7)$ e A = B, temos:

$$x^2 + 7x = 144$$

$$x^2 + 7x - 144 = 0$$

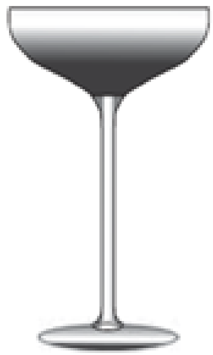
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x = \frac{-7 \pm 25}{2}$$

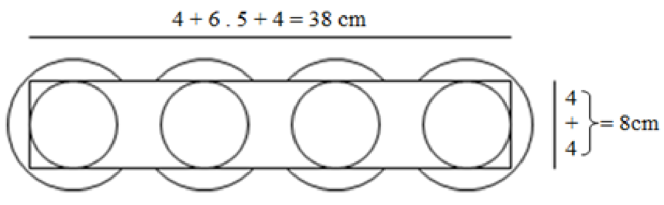
$$x = \frac{18}{2} = 9 \quad ou \quad x = \frac{-32}{2} = -16$$

Como x não pode ser negativo, já que é a medida da largura do terreno, temos que x = 9 m. Logo, as dimensões do terreno retangular são 9 m e 16 m.

ENEM 2017 - 9. Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.
A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a
(A) 192. (B) 300. (C) 304. (D) 320. (E) 400.



Solução:
A bandeja retangular que o garçom precisa escolher tem as seguintes dimensões:

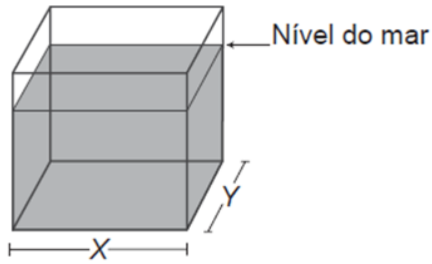


Pois o círculo da base inferior tem raio 4 cm e o círculo da borda superior tem raio 5 cm, somando os raios, a largura mínima será o diâmetro do círculo da base, já para o comprimento, temos seis raios dos círculos das bordas superiores mais dois raios dos círculos das bases.

Logo, a área mínima que a bandeja retangular deverá ter é:

$$A = 38 \cdot 8 = 304\ cm^2$$

ENEM 2017 - 10. Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de primas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

(A) 1 e 49 (B) 1 e 99 (C) 10 e 10
(D) 25 e 25 (E) 50 e 50

Solução:
Como é utilizado 100 m de tela para as laterais, temos:

$$2x + 2y = 100$$

$$y = 50 - x$$

Por outro lado, seja A a área da base do prisma reto-retangular, daí, temos:

$$\mathrm{A} = \mathrm{xy}$$

Agora substituindo y na área, temos:

$$A = x(50 - x)$$
$$A = -x^2 + 50x$$

Assim, como o gráfico da área é uma parábola com concavidade voltada para baixo, a área da base do viveiro será máxima, quando x for o x do vértice da parábola, isto é:

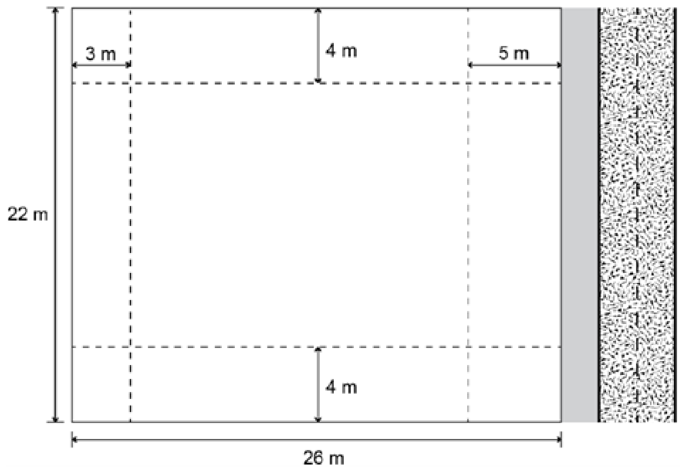
$$x_v = -\frac{b}{2a}$$
$$x_v = -\frac{50}{2(-1)}$$
$$x_v = 25$$

Como $y = 50 - x$, temos:

$$y = 50 - 25 = 25$$

Logo, a área será máxima quando x = y = 25 m.

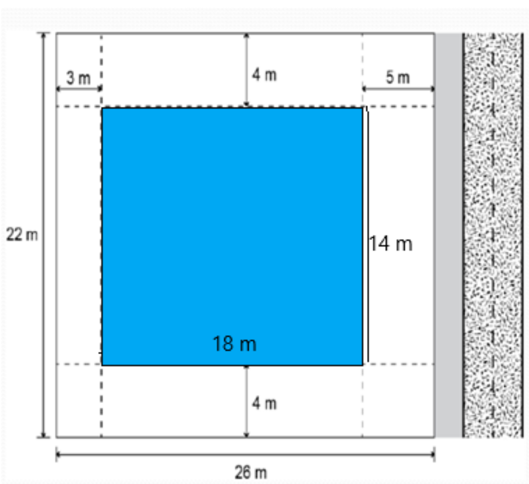
ENEM 2020 DIGITAL - 11. Uma empresa deseja construir um edifício residencial de 12 pavimentos, num lote retangular de lados medindo 22 e 26 m. Em 3 dos lados do lote serão construídos muros. A frente do prédio será sobre o lado do lote de menor comprimento. Sabe-se que em cada pavimento 32 m^2 serão destinados à área comum (hall de entrada, elevadores e escada), e o restante da área será destinado às unidades habitacionais. A legislação vigente exige que prédios sejam construídos mantendo distâncias mínimas dos limites dos lotes onde se encontram. Em obediência à legislação, o prédio ficará 5 m afastado da rua onde terá sua entrada, 3 m de distância do muro no fundo do lote e 4 m de distância dos muros nas laterais do lote, como mostra a figura.



A área total, em metro quadrado, destinada às unidades habitacionais desse edifício será de

(A) 2 640. (B) 3 024. (C) 3 840. (D) 6 480. (E) 6 864.

Solução:



Tendo todas as exigências legislativas obedecidas, cada pavimento terá uma área total de:

$$18 \cdot 14 = 252\, m^2$$

Retirando os 32 m^2 destinados à área comum e considerando os 12 pavimentos, a área total, em metros quadrados, destinada às unidades habitacionais será:

$$12 \cdot (252 - 32) = 2640$$

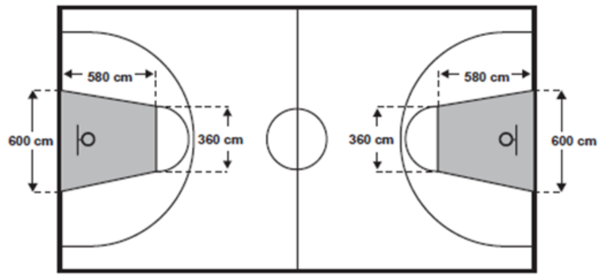
As próximas questões ficaram como exercício:

ENEM 2020 DIGITAL - Um marceneiro visitou 5 madeireiras para comprar tábuas que lhe permitissem construir 5 prateleiras de formato retangular, de dimensões iguais a 30 cm de largura por 120 cm de comprimento cada, tendo como objetivo minimizar a sobra de madeira, podendo, para isso, fazer qualquer tipo de emenda. As dimensões das tábuas encontradas nas madeireiras estão descritas no quadro.

Madeireira	Largura (cm)	Comprimento (cm)
I	40	100
II	30	110
III	35	120
IV	25	150
V	20	200

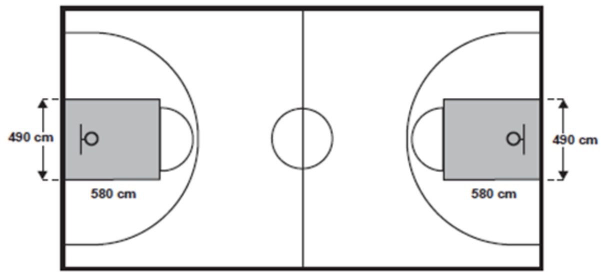
Em qual madeireira o marceneiro deve comprar as tábuas para atingir seu objetivo?
(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) V

ENEM 2015 - O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

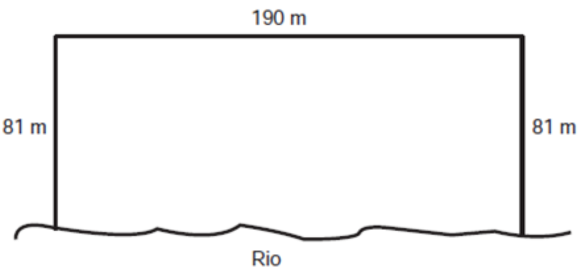


Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

(A) aumento de 5 800 cm^2. (B) aumento de 75 400 cm^2.
(C) aumento de 214 600 cm^2. (D) diminuição de 63 800 cm^2.
(E) diminuição de 272 600 cm^2.

ENEM 2013 -Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura.



Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.
A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 11. (E) 12.

3º oficina – Volume e Planificação de Sólidos Geométricos

Volume de Sólidos Geométricos

O volume é a quantidade de espaço ocupada por um corpo. O volume tem unidades de tamanho cúbicos (por exemplo, cm^3, m^3, km^3, etc.).
Em resumo, podemos definir o volume de forma prática como sendo a grandeza que expressa a extensão de um corpo em três dimensões: altura, largura e comprimento.

Sólidos	Fórmula do volume	Incógnitas
Cubo	$\ell^3 = \ell \cdot \ell \cdot \ell$	ℓ é o comprimento de qualquer aresta
Paralelepípedo	$\ell \cdot c \cdot a$	**ℓ**argura, **c**omprimento, **a**ltura
Prisma	$A \cdot h$	A = área da base, h = altura do prisma
Cilindro	$\pi r^2 \cdot h$	r = raio de uma face circular, h = altura do cilindro
Pirâmide	$\frac{1}{3} \cdot A \cdot h$	A = área da base, h = altura da pirâmide
Cone	$\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$	r = raio do círculo na base, h = altura do cone
Esfera	$\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$	r = raio da esfera

Fonte: Própria Autora

Planificação de Sólidos Geométricos

Planificação de um sólido geométrico é a representação de todas as suas faces em forma bidimensional, permitindo visualizar o todo do sólido.
É possível utilizar a planificação como molde para a criação desses sólidos.
Após a definição pode-se apresentar algumas planificações através do GeoGebra.

Algumas questões para trabalhar Volume e Planificação de Sólidos Geométricos são as seguintes:

ENEM 2010 - 1. Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedos medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

(A) 5 cm. (B) 6 cm. (C) 12 cm. (D) 24 cm (E) 25 cm.

Solução:

Como o volume da barra de chocolate no formato cúbico é o mesmo que a no formato de paralelepípedo, primeiro vamos calcular o volume da barra no formato de paralelepípedo, assim, temos:

$$V_p = 3 \cdot 18 \cdot 4 = 216\, cm^3$$

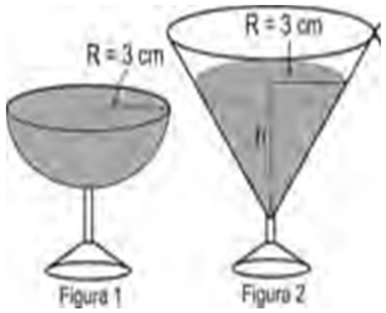
Agora igualando esse resultado a fórmula do volume do cubo, temos:

$$V_c = a^3 = 216$$

$$a = \sqrt[3]{216} = 6$$

Logo, a alternativa correta é o item B.

ENEM 2010 - 2. Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

Considere: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

(A) 1,33 (B) 6,00. (C) 12,00. (D) 56,52. (E) 113,04.

Solução:

Para que os volumes de champanhe sejam iguais nas duas taças, precisamos calcular o volume da semiesfera e igualar o resultado ao volume do cone cujo o raio da base seja 3 cm e altura seja h, depois basta resolver a equação para encontrar a altura necessária. Seguindo esse raciocínio, temos:

I - O volume da semiesfera:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 18\pi\ cm^3$$

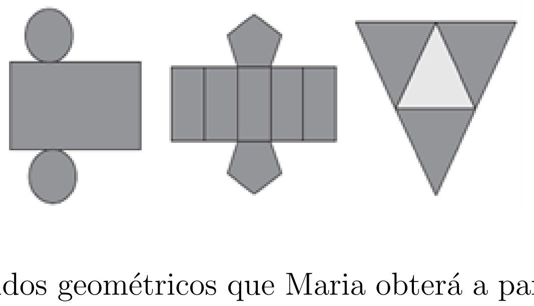
II - O volume do cone:

$$\frac{h \cdot \pi \cdot 3^2}{3} = 3h\pi\ cm^3$$

Agora, igualando os volumes, temos:

$$3h\pi = 18\pi$$
$$h = \frac{18\pi}{3\pi} = 6\ cm$$

ENEM 2012 - 3. Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

(A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

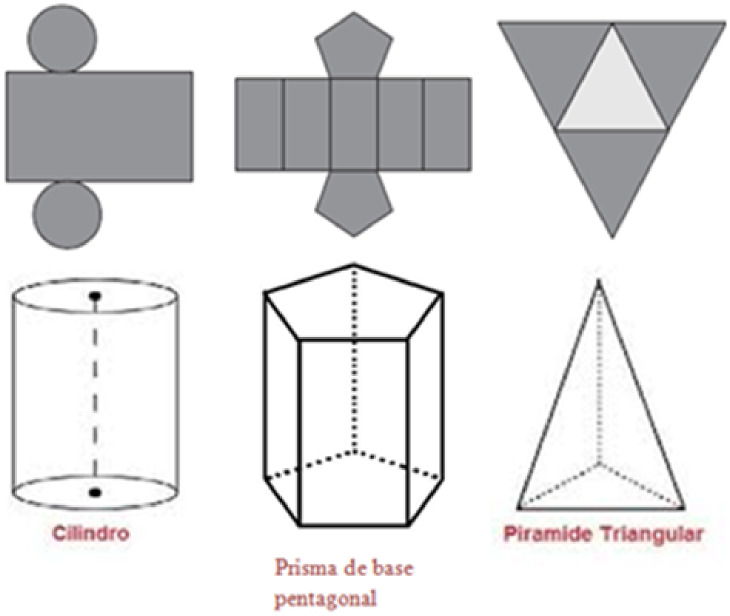
(B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

(C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

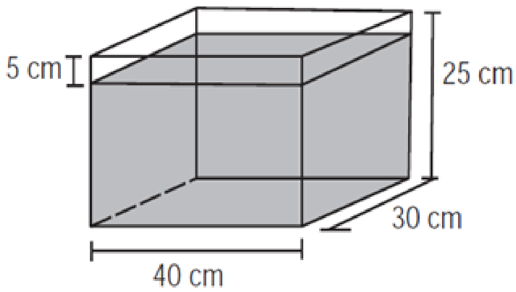
(D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

(E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Solução:



ENEM 2012 - 4. Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?
(A) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
(B) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
(C) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
(D) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
(E) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar

Solução:
Como o formado do tanque de resfriamento é um prisma reto, cujo volume é calculado pelo produto da área base com a altura do prisma, para sabermos o nível que a

água atingiria, basta calcular o volume do paralelepípedo, considerando h como sua altura e igualando ao volume do objeto. Assim, temos:

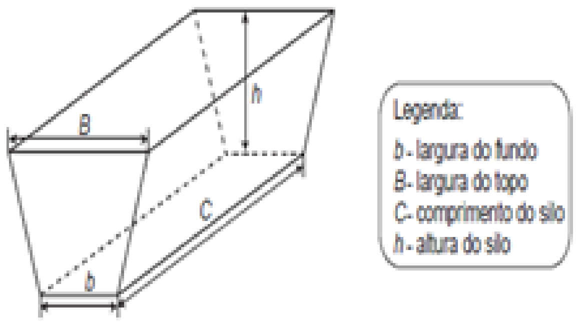
$$30 \cdot 40 \cdot h = 2400$$

$$1200h = 2400$$

$$h = \frac{2400}{1200} = 2\ cm$$

Logo, o nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

ENEM 2014 - 5. Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denominam-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br.
Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

(A) 110. (B) 125. (C) 130. (D) 220. (E) 260.

Solução:

Se, para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo, então em 2 m de altura do silo a largura do topo tem 2 . 0,5 m = 1 m a mais do que a largura do fundo. Desta forma, a largura do fundo é de (6 – 1) m = 5 m.

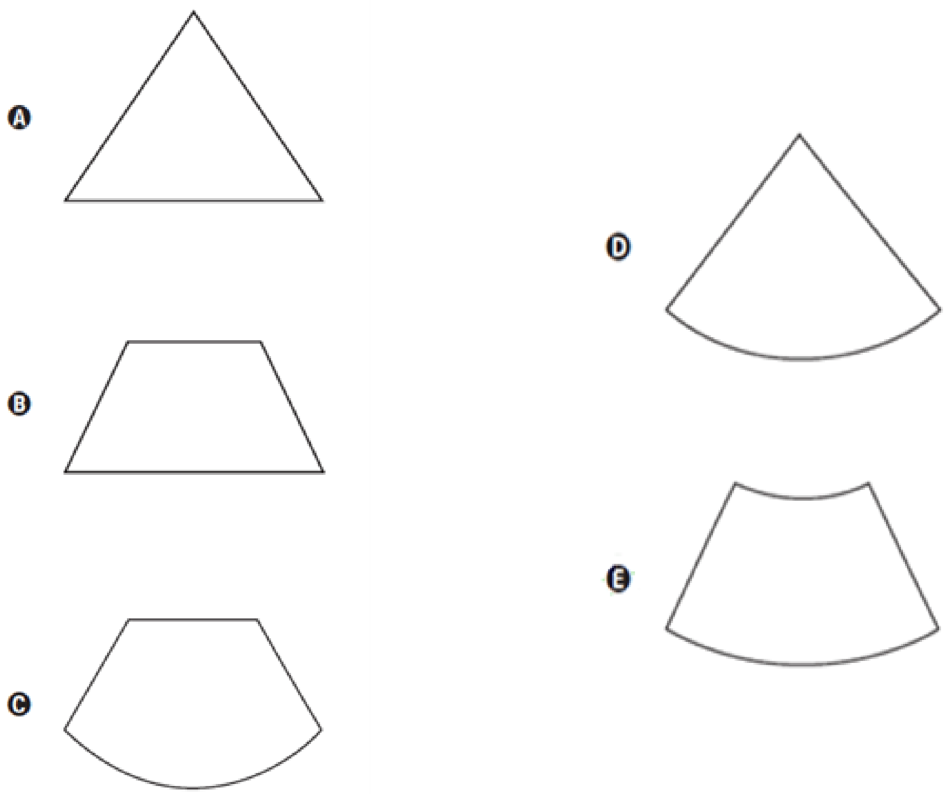
O volume do silo, em metro cúbicos, é

$$V = \frac{(6+5)\cdot 2}{2}\cdot 20 = 220$$

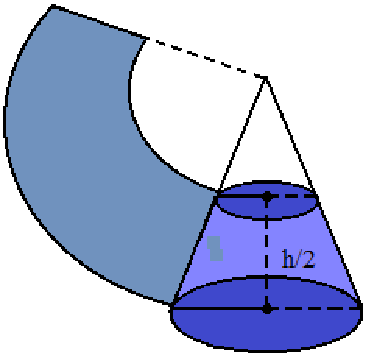
Se, após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo, então cabem no silo:

$$\frac{220}{2} = 110\,t$$

ENEM 2014 - 6. Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivos fluorescentes, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.
Qual deverá ser a forma do adesivo?



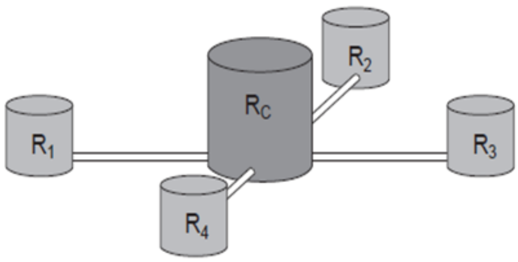
Solução:



Note que a parte do cone a ser revestida corresponde a área lateral de um tronco de cone, já que o adesivo deve preencher desde a base do cone até metade de sua altura. Logo, como podemos observar na imagem, a alternativa que melhor representa essa planificação é o item E.

Imagem disponível em: *https : //www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial22_2.php*. Acesso em: maio 2021 (adaptada).

ENEM 2019 - 7. Uma construtora pretende conectar um reservatório central (Rc) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R1, R2, R3 e R4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.
As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão, de cada um desses canos com o reservatório central, há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água.



No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.
A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

(A) 1,44. (B) 1,16. (C) 1,10. (D) 1,00. (E) 0,95.

Solução:

Como o volume do reservatório central deve ser igual a soma do volume de água no reservatório central, nos reservatórios auxiliares e nos canos, e considerando h a altura das colunas de água, temos:

$$\pi \cdot 2^2 \cdot 3,3 = \pi \cdot 2^2 \cdot h + 4\,\pi \cdot (1,5)^2 \cdot h + 4\,\pi \cdot (0,05)^2 \cdot 20$$

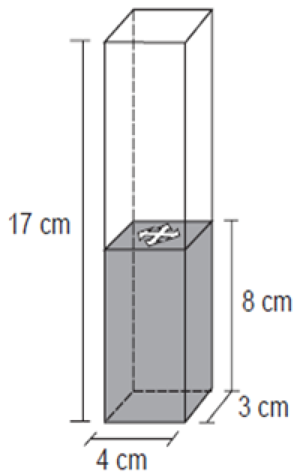
$$13,2 = 4h + 9h + 0,2$$

$$13,2 - 0,2 = 13h$$

$$h = \frac{13}{13} = 1\,m$$

Logo, a medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é 1.

ENEM 2020 - 8. Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.
Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm³ cada, que ficarão totalmente submersas.
O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de



(A) 14. (B) 16. (C) 18. (D) 30. (E) 34.

Solução:
Será necessário aumentar 7 cm de água para que ela atinja o nível de 15 cm. Assim, o volume total de bolinhas que equivale a esse aumento é:

$$4 \cdot 3 \cdot 7 = 84\,cm^3$$

Como cada bolinha possui volume igual a 6 cm^3, o número mínimo (x) de bolinhas necessárias será:

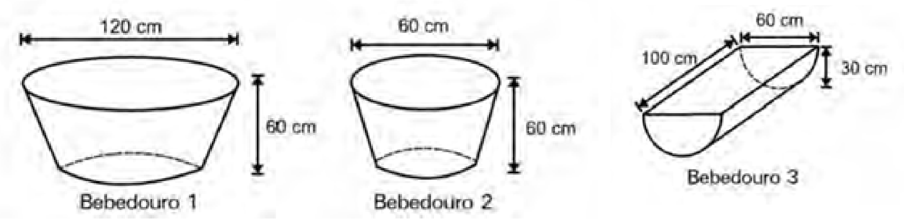
$$x \cdot 6 = 84$$

$$x = \frac{84}{6} = 14$$

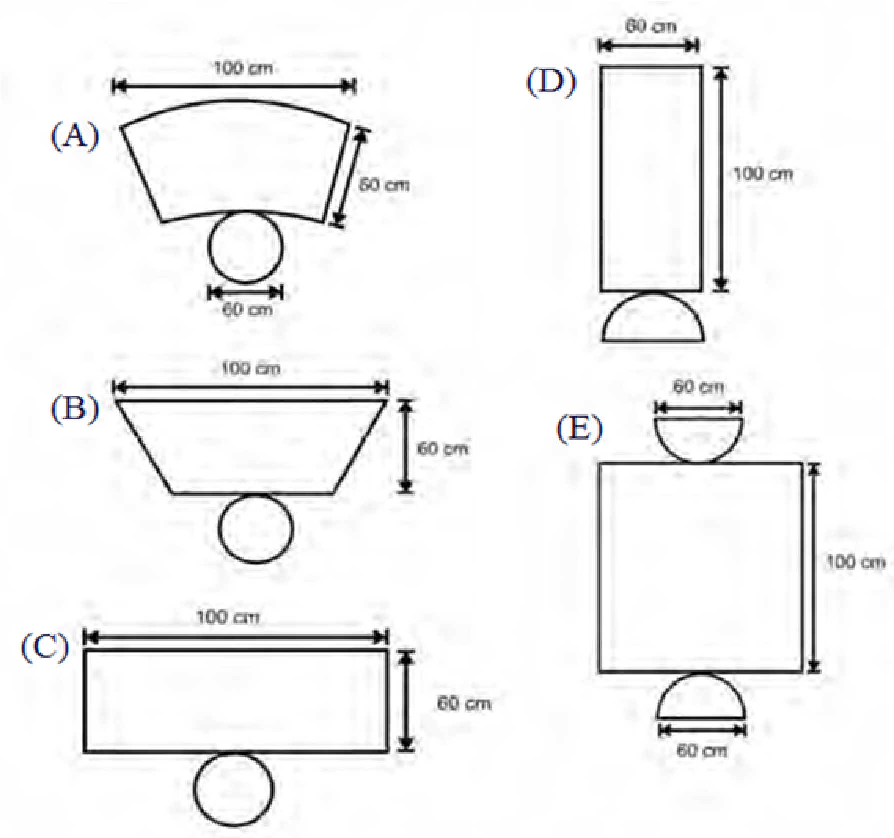
Logo, serão necessárias 14 bolinhas.

As questões seguintes ficaram como exercício:

ENEM 2010 - Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



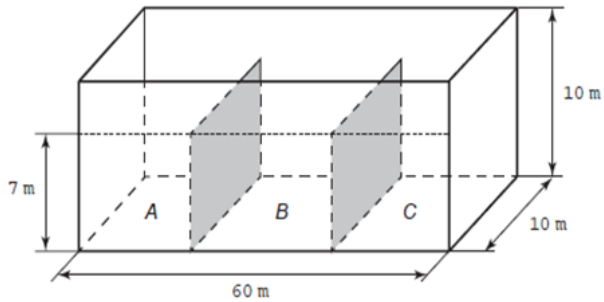
Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



ENEM 2015 - Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0, como aproximação

para π.
Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?
(A) 0,5 (B) 1,0 (C) 2,0 (D) 3,5 (E) 8,0

ENEM 2016 - Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.
Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de
(A) 1,4 x $10^3 m^3$ (B) 1,8 x $10^3 m^3$ (C) 2,0 x $10^3 m^3$ (D) 3,2 x $10^3 m^3$ (E) 6,0 x $10^3 m^3$

4º oficina – Características de Figuras Geométricas, Semelhança de Figuras Geométricas, Teorema de Pitágoras e Projeção Ortogonal

Características de Figuras Geométricas

As figuras geométricas são elementos com formas, tamanhos e dimensões no plano ou espaço.
Essas informações juntamente com a nomenclatura e as propriedades que definem cada figura, denominam–se como características de figuras geométricas.

Semelhança de Figuras Geométricas

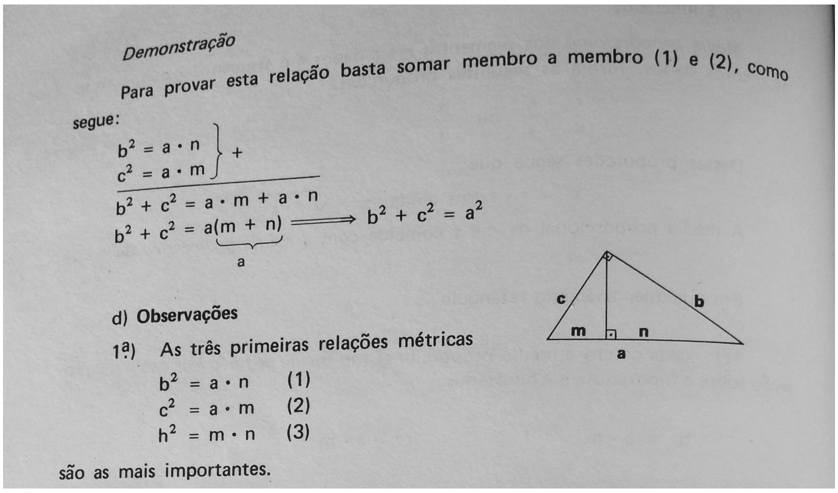
Figuras semelhantes são aquelas que possuem ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais. Essa proporção entre os lados e a semelhança entre

as figuras garantem também a existência de uma propriedade envolvendo suas áreas e/ou seus volumes.
A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre os segmentos correspondentes dessas figuras. Assim como a razão entre os seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança entre os segmentos correspondentes delas.

Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras diz que: **"O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos"**.
Isto é,

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Demonstração

Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{array}\right\} +$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$$

$$b^2 + c^2 = a\underbrace{(m + n)}_{a} \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

d) Observações

1ª) As três primeiras relações métricas

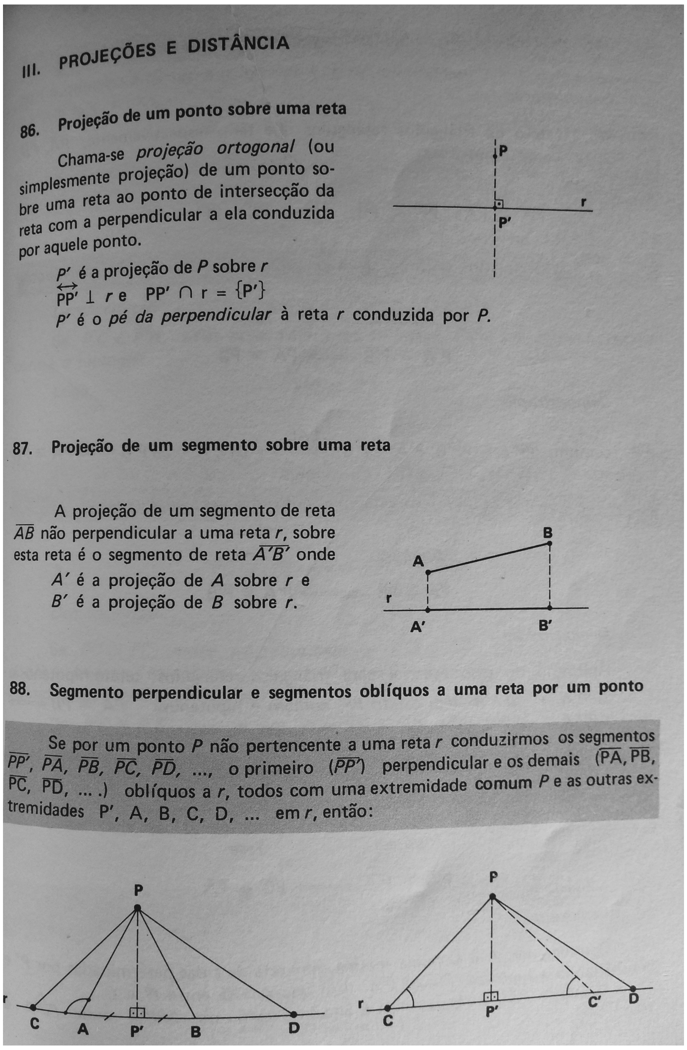
$b^2 = a \cdot n$ (1)
$c^2 = a \cdot m$ (2)
$h^2 = m \cdot n$ (3)

são as mais importantes.

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. (Osvaldo Dolce; José Nicolau Pompeo).

Projeção Ortogonal

A projeção ortogonal das figuras geométricas sobre um plano pode ser comparada, à sombra desse mesmo objeto, no horário em que o sol está mais alto no dia. Nesse horário, a sombra possui dimensões iguais às do objeto, mas não possui profundidade alguma.
Dessa maneira, perceba que nem sempre a projeção ortogonal manterá toda a forma original da figura observada.



III. PROJEÇÕES E DISTÂNCIA

86. Projeção de um ponto sobre uma reta

Chama-se *projeção ortogonal* (ou simplesmente projeção) de um ponto sobre uma reta ao ponto de intersecção da reta com a perpendicular a ela conduzida por aquele ponto.

P' é a projeção de P sobre r

$\overleftrightarrow{PP'} \perp r$ e $PP' \cap r = \{P'\}$

P' é o *pé da perpendicular* à reta r conduzida por P.

87. Projeção de um segmento sobre uma reta

A projeção de um segmento de reta $\overline{AB}$ não perpendicular a uma reta r, sobre esta reta é o segmento de reta $\overline{A'B'}$ onde

A' é a projeção de A sobre r e

B' é a projeção de B sobre r.

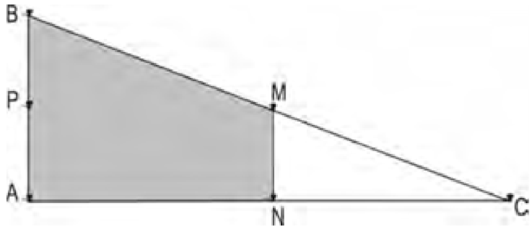
88. Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a uma reta por um ponto

Se por um ponto P não pertencente a uma reta r conduzirmos os segmentos $\overline{PP'}$, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, ..., o primeiro ($\overline{PP'}$) perpendicular e os demais ($\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, ...) oblíquos a r, todos com uma extremidade comum P e as outras extremidades P', A, B, C, D, ... em r, então:

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. (Osvaldo Dolce; José Nicolau Pompeo).

Segue algumas questões sobre Características de Figuras Geométricas, Semelhança de Figuras Geométricas, Teorema de Pitágoras e Projeção Ortogonal:

ENEM 2010 - 1. Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

(A) à mesma área do triângulo AMC.
(B) à mesma área do triângulo BNC.
(C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
(D) ao dobro da área do triângulo MNC.
(E) ao triplo da área do triângulo MNC.

Solução:

Observe que os triângulos ABC e MNC são semelhantes e a razão de semelhança entre seus lados é:

$$\frac{AC}{NC} = 2$$

Logo, a razão entre suas áreas é:

$$(\frac{AC}{NC})^2 = 2^2 = 4$$

Por outro lado, veja que o triângulo ABC é formado pelo triângulo MNC e o trapézio (região que será calçada).

Chamando de T a área da região que será calçada e de p a área do triângulo MNC, temos:

$$\frac{T + p}{p} = 4$$

$$T + p = 4p$$

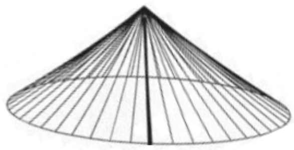
$$T = 3p$$

Logo, a alternativa correta é o item E.

ENEM 2011 - 2. A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.
Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

(A) pirâmide.
(B) semiesfera.
(C) cilindro.
(D) tronco de cone.
(E) cone.

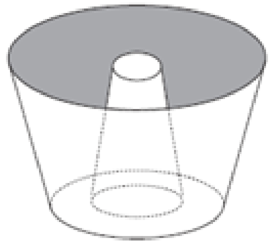
Solução:



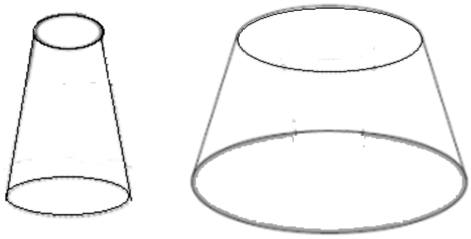
Olhando para a sombrinha sem o cabo, percebemos que a superfície de revolução que ela representa é o cone. Portanto, a alternativa correta é o item E.

ENEM 2013 - 3. Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura.
Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.
Essas figuras são

(A) um tronco de cone e um cilindro.
(B) um cone e um cilindro.
(C) um tronco de pirâmide e um cilindro.
(D) dois troncos de cone.
(E) dois cilindros.

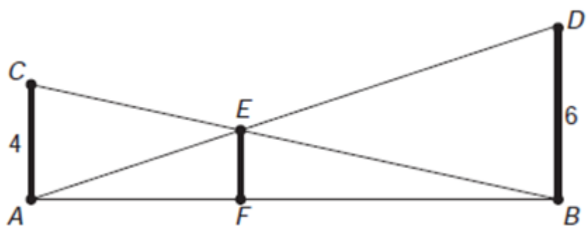


Solução:



Separando as duas partes da forma de bolo, notamos que as duas figuras geométricas que a compõe são dois troncos de cone, já que os círculos das bases têm tamanhos diferentes. Logo, a alternativa correta é o item D.

ENEM 2013 - 4. O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

(A) 1 m (B) 2 m (C) 2,4 m (D) 3 m (E) $2\sqrt{6}$ m

Solução:

Perceba que os triângulos AEF e ADB são semelhantes e da proporcionalidade entre eles, temos:

$$\frac{EF}{6} = \frac{AF}{AB} \tag{A.1}$$

De forma análoga, em relação aos triângulos BEF e BCA, temos:

$$\frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB} \tag{A.2}$$

Somando (A.1) e (A.2), temos:

$$\frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB}$$

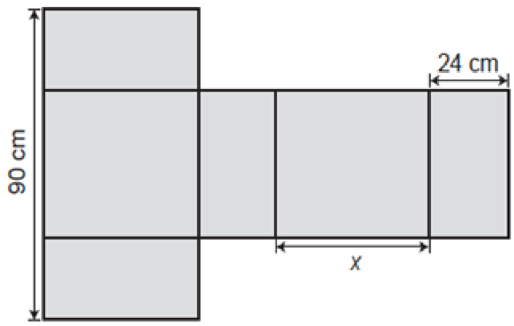
$$\frac{2EF + 3EF}{12} = \frac{AB}{AB}$$

$$\frac{5EF}{12} = 1$$

$$EF = \frac{12}{5} = 2,4\,m$$

Logo, a alternativa correta é o item C.

ENEM 2014 - 5. Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em vôo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é
(A) 25. (B) 33. (C) 42. (D) 45. (E) 49.

Solução:

Pela planificação do paralelepípedo verificamos que sua altura é 24 cm, a largura é $90 - 24 - 24 = 42$ cm e o comprimento é x cm. Assim, para atender os padrões exigidos pela Anac, temos:

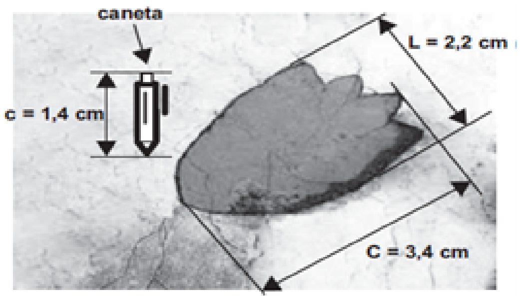
$$42 + 24 + x \leq 115$$

$$x \leq 115 - 66$$

$$x \leq 49$$

Assim, o maior valor para x, em cm, é 49 e a alternativa correta é o item E.

ENEM 2015 - 6. Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a
(A) 4,9 e 7,6. (B) 8,6 e 9,8. (C) 14,2 e 15,4. (D) 26,4 e 40,8. (E) 27,5 e 42,5.

Solução:
A razão de semelhança entre o comprimento real da caneta e o comprimento dela na fotografia é:

$$\frac{16,8}{1,4} = 12$$

Como a razão de semelhança é a mesma para a pegada, a largura real (y) da mesma é:

$$\frac{y}{2,2} = 12$$

$$y = 26,4\ cm$$

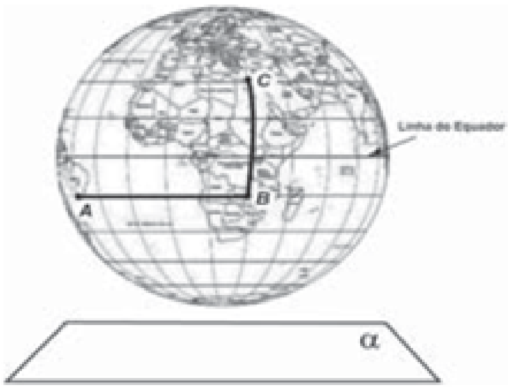
E o seu comprimento real (x) :

$$\frac{x}{3,4} = 12$$

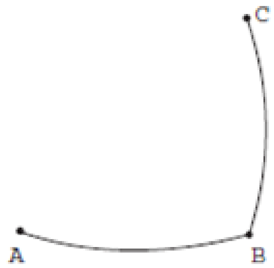
$$x = 40,8\ cm$$

Logo, a alternativa correta é o item D.

ENEM 2016 - 7. A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

A


B

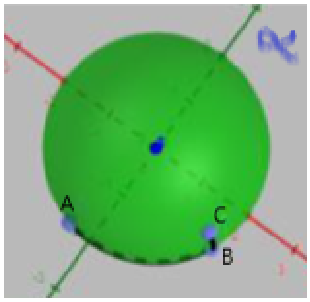

C


D


E

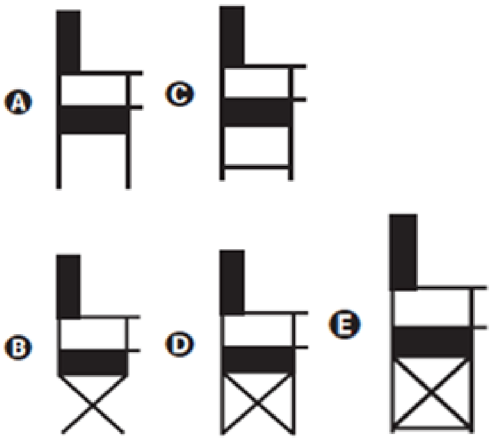

Solução:

Pela imagem feita no GeoGebra, é possível perceber que, como a superfície que o caminho de A até B foi traçado é circular e o plano α é paralelo a linha deste trajeto, a representação da sua projeção no plano α será uma curva. Em relação aos pontos B e C, por esse trecho está sobre o meridiano que passa nesses pontos, eles se aproximam, mas não chegam a coincidir. Logo, a alternativa correta é o item E.



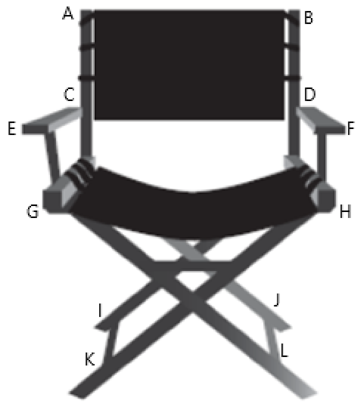
ENEM 2016 - 8. Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

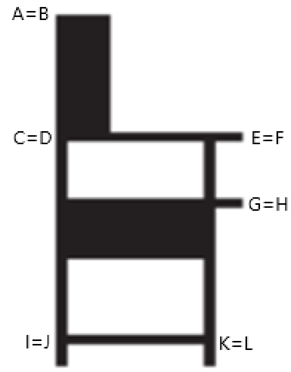
Qual é o esboço obtido pelos alunos?



Solução:

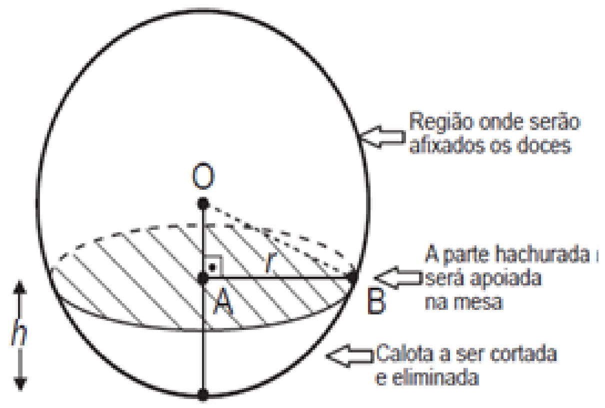
Vamos marcar alguns pontos na imagem da cadeira aberta para observarmos quais posições, estes, irão assumir no esboço da vista lateral da cadeira fechada. Assim, temos:





Logo, alternativa correta é o item C.

ENEM 2017 - 9. Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio *r da seção* circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.

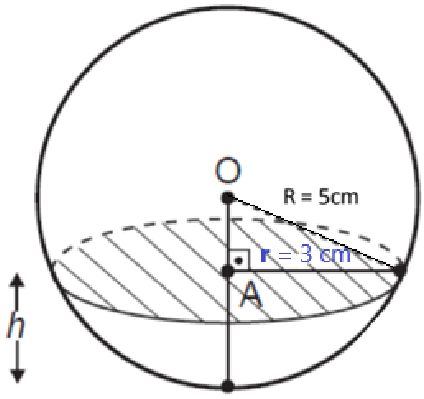


Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

(A) $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$ (B) $10 - \sqrt{91}$ (C) 1 (D) 4 (E) 5

Solução:

Do enunciado, retiramos que o diâmetro do melão é 10 cm, logo, seu raio (R) é 5 cm, e que o raio (r) da seção circular deve ter pelo menos 3 cm. Pela figura é possível notar que o raio do melão, o raio da seção circular e o raio do melão menos a altura h que o chefe deverá cortar a calota, formam um triângulo retângulo, daí, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:



$$5^2 = 3^2 + (AO)^2$$

$$(AO)^2 = 25 - 9$$

$$(AO)^2 = 16$$

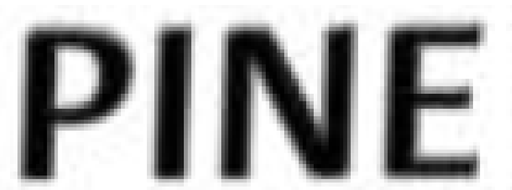
$$AO = \sqrt{16} = 4$$

Daí, nas condições dadas:

$$h = 5 - 4 = 1\ cm$$

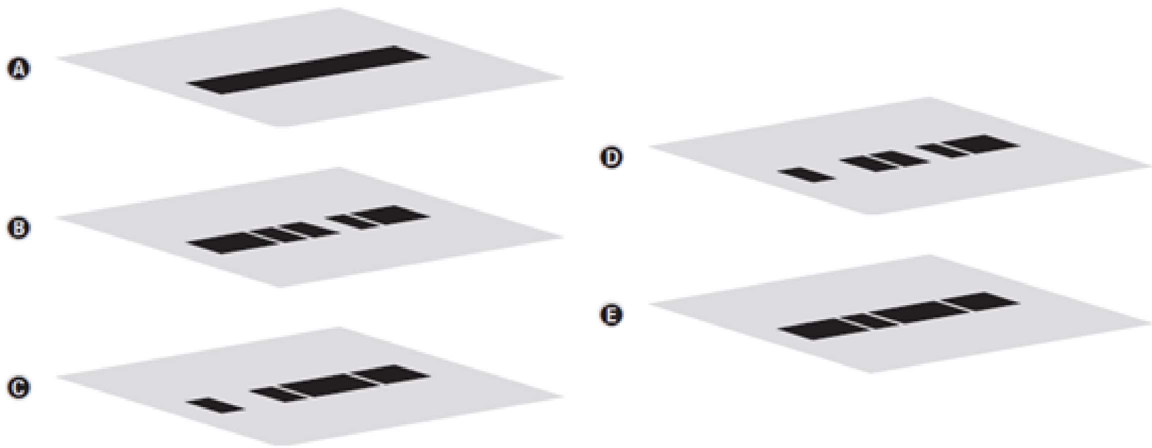
Portanto, a alternativa correta é o item C.

ENEM 2019 - 10. Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.



Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.

Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é



Solução:
Fazendo a projeção ortogonal, obtém-se:

ENEM 2020 - 11. No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.


Figura 1

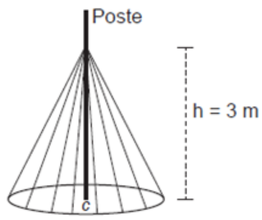
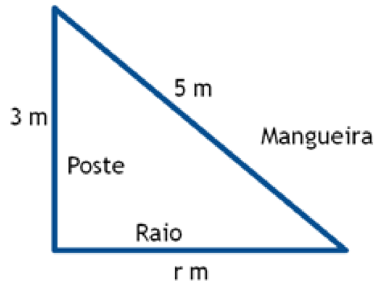


Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.
Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.
Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de
(A) 4,00. (B) 4,87. (C) 5,00. (D) 5,83. (E) 6,26.

Solução:

Como os 100 m de mangueiras de iluminação devem ser divididos em 20 segmentos de reta, cada segmento deve ter 5 m. O poste, a mangueira e o raio da circunferência estão representados na figura.



Pelo Teorema de Pitágoras, segue-se que:

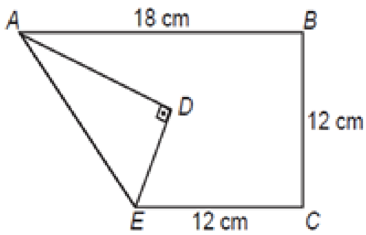
$$r^2 + 3^2 = 5^2$$
$$r^2 = 25 - 9$$
$$r^2 = 16$$
$$r = 4$$

Portanto, o raio da circunferência será 4 metros.

As próximas questões ficaram como exercício:

ENEM 2017 - Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.
O volume do monumento original, em metro cúbico, é de
(A) 100. (B) 400. (C) 1 600. (D) 6 250. (E) 10 000.

ENEM 2019 - Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori*= dobrar; *kami*= papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é
(A) $2\sqrt{22}$ cm. (B) $6\sqrt{3}$ cm. (C) 12 cm. (D) $6\sqrt{5}$ cm. (E) $12\sqrt{2}$cm.

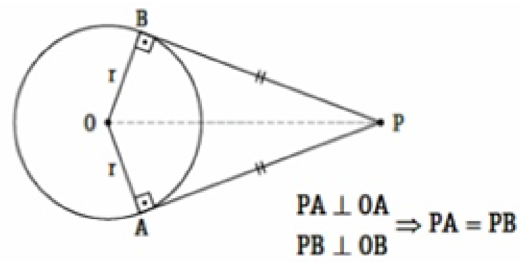
ENEM 2020 - Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulcán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, este templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada.
As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são

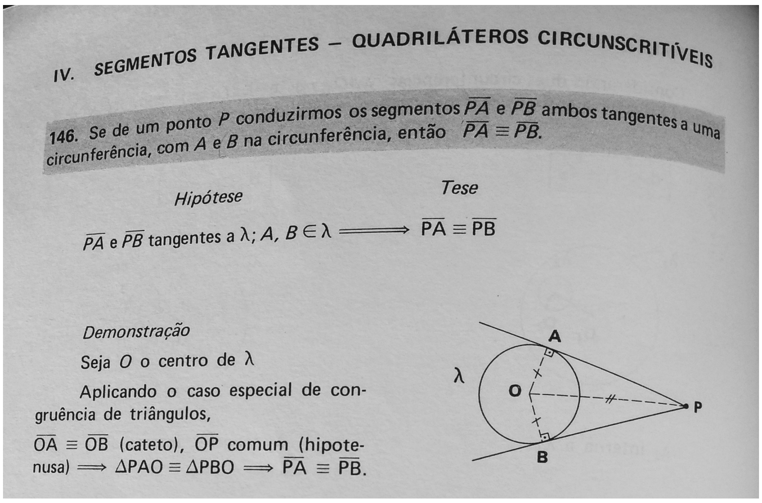
(A) 2 quadrados e 4 retângulos.
(B) 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.
(C) 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.
(D) 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.
(E) 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

5º oficina – Propriedades da Reta Tangente, Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Localização de Pontos, Gráficos e Figuras Geométricas no Plano Cartesiano e Propriedades dos Polígonos

Propriedades de Segmentos Tangentes ao Círculo

Se de um ponto P, exterior a uma circunferência, traçamos os segmentos PA e PB, tangentes a circunferência nos pontos A e B, então os segmentos PA e PB são congruentes.





IV. SEGMENTOS TANGENTES – QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS

146. Se de um ponto P conduzirmos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ ambos tangentes a uma circunferência, com A e B na circunferência, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

Hipótese / *Tese*

$\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a λ; $A, B \in \lambda \Longrightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$

Demonstração

Seja O o centro de λ

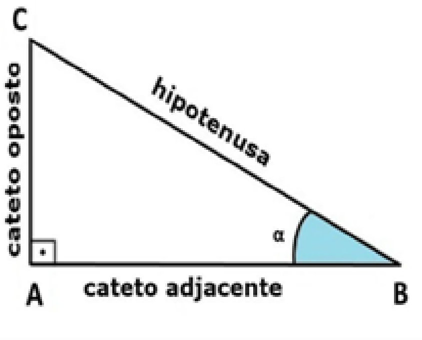
Aplicando o caso especial de congruência de triângulos,

$\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ (cateto), $\overline{OP}$ comum (hipotenusa) $\Longrightarrow \Delta PAO \equiv \Delta PBO \Longrightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. (Osvaldo Dolce; José Nicolau Pompeo).

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

As razões trigonométricas são as relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo. As principais são o seno, o cosseno e a tangente.



$$seno\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

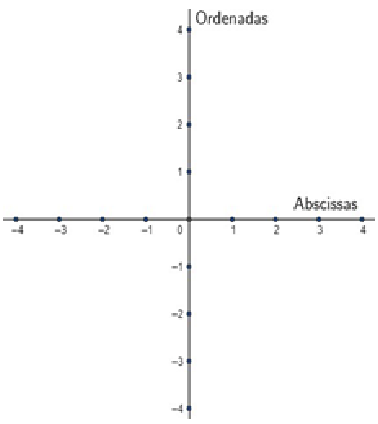
$$cosseno\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$tangente\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

Imagem disponível em: https://beduka.com/blog/exercicios/matematica-exercicios/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas. Acesso em 05 jun.21

Geométricas no Plano Cartesiano

O plano cartesiano é um sistema de coordenadas desenvolvido por René Descartes. Esse sistema de coordenadas é formado por duas retas perpendiculares, chamadas de eixos cartesianos. Esses eixos determinam um único plano, assim, é possível determinar a localização no sistema de coordenadas de todo os pontos e, consequentemente, de qualquer objeto formado por esses pontos que estejam nesse plano.



Propriedades dos Polígonos

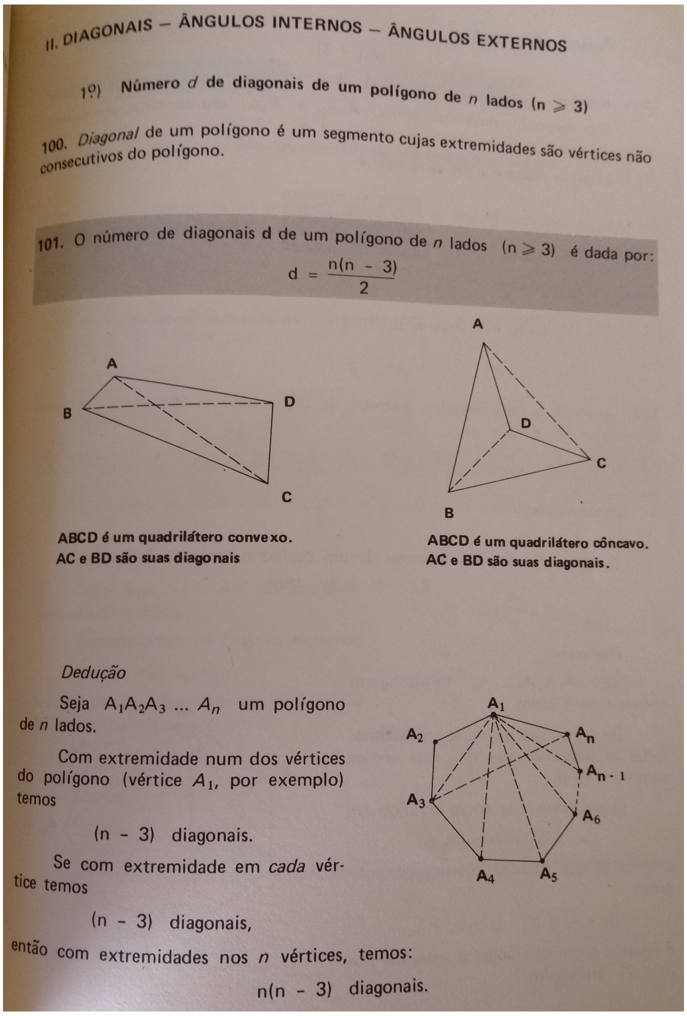
Todo polígono possui as seguintes propriedades:
Os polígonos possuem os mesmos números de lados, ângulos e vértices;
A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados e convexo é dado por:

$$S = (n-2) \cdot 180°$$

O total de diagonais em um polígono é dado pela seguinte fórmula:

$$d = n \cdot \frac{(n-3)}{2}$$

E alguns polígonos possuem propriedades exclusivas.



II. DIAGONAIS – ÂNGULOS INTERNOS – ÂNGULOS EXTERNOS

1º) **Número d de diagonais de um polígono de n lados ($n \geqslant 3$)**

100. *Diagonal* de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

101. O número de diagonais d de um polígono de n lados ($n \geqslant 3$) é dada por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

ABCD é um quadrilátero convexo.
AC e BD são suas diagonais

ABCD é um quadrilátero côncavo.
AC e BD são suas diagonais.

Dedução

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono de n lados.

Com extremidade num dos vértices do polígono (vértice A_1, por exemplo) temos

$(n - 3)$ diagonais.

Se com extremidade em *cada* vértice temos

$(n - 3)$ diagonais,

então com extremidades nos n vértices, temos:

$n(n - 3)$ diagonais.

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. (Osvaldo Dolce; José Nicolau Pompeo).

Porém, nesta conta

$$n(n-3)$$

cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em 2 vértices. (Por exemplo, na conta acima, $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{A_3A_1}$ são contadas como duas diagonais, quando na realidade é uma só $\overline{A_1A_3} = \overline{A_3A_1}$).

Logo, o número d de diagonais é:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

2º) **Soma S_i dos ângulos internos de um polígono** *convexo.*

102. A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados $(n \geqslant 3)$ é dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 2 \text{ retos}$$

ou, simplesmente,

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Dedução

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono convexo de n lados.

De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que tem este vértice como extremo.

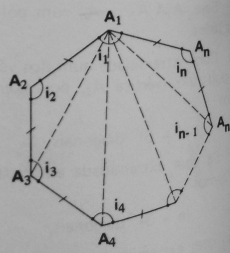
O polígono fica então dividido em

$(n-2)$ triângulos e

a soma S_i dos ângulos internos do polígono

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n$$

é igual à soma dos ângulos internos dos $(n-2)$ triângulos.



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. (Osvaldo Dolce; José Nicolau Pompeo).

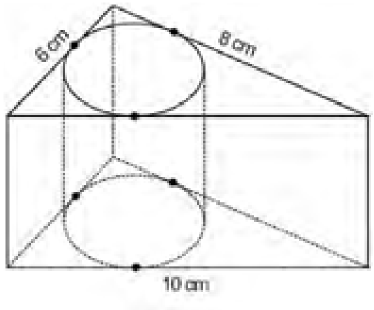
Logo,

$$\boxed{S_i = (n-2) \cdot 2 \text{ retos}} \quad \text{ou} \quad \boxed{S_i = (n-2) \cdot 180°}$$

Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar. (Osvaldo Dolce; José Nicolau Pompeo).

Sobre: Propriedades da Reta Tangente, Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Localização de Pontos, Gráficos e Figuras Geométricas no Plano Cartesiano e Propriedades dos Polígonos, seguem as seguintes questões:

ENEM 2010 – 1. Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.

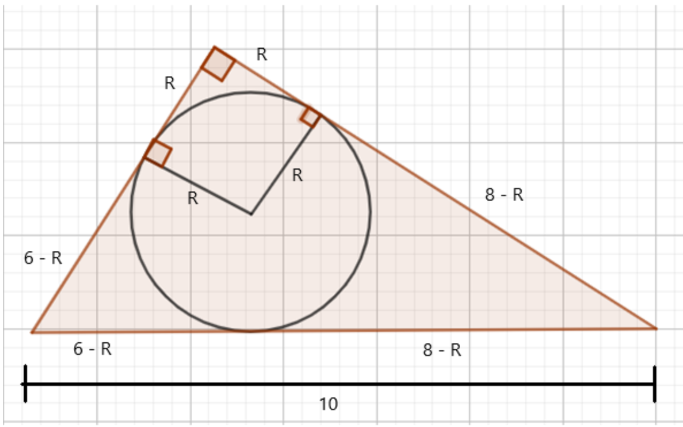


O raio da perfuração da peça é igual a

(A) 1 cm. (B) 2 cm. (C) 3 cm (D) 4 cm (E) 5 cm.

Solução:

Observe o esboço da projeção da parte superior do prisma e seja R o raio da perfuração da peça, pelas propriedades da reta tangente, temos:



$$(6 - R) + (8 - R) = 10$$

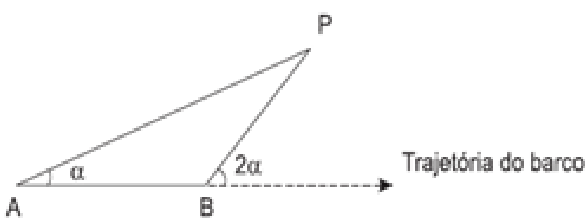
$$-2R + 14 = 10$$

$$-2R = 10 - 14$$

$$R = \frac{-4}{-2} = 2$$

Logo, a medida do raio do cilindro que deve perfurar a peça é 2.

ENEM 2011 – 2. Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

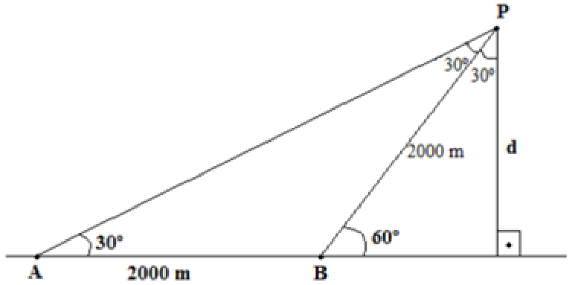


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^{\circ}$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

(A) 1000 m (B) $1000\sqrt{3}$ m (C) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m (D) 2000 m (E) $2000\sqrt{3}$ m

Solução:

Com base nos dados do enunciado e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será d, conforme mostra a figura. Agora, supondo que $\alpha = 30°$ notamos que o ângulo A$\hat{\text{P}}$B também vale 30°, já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e o suplementar de 2α será 120°, garantindo, assim, que o triângulo ABP é isósceles, por tanto:



$$cos 30° = \frac{d}{2000}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{2000}$$

$$d = 2000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1000\sqrt{3}$$

ENEM 2013 – 3. Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II — é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;

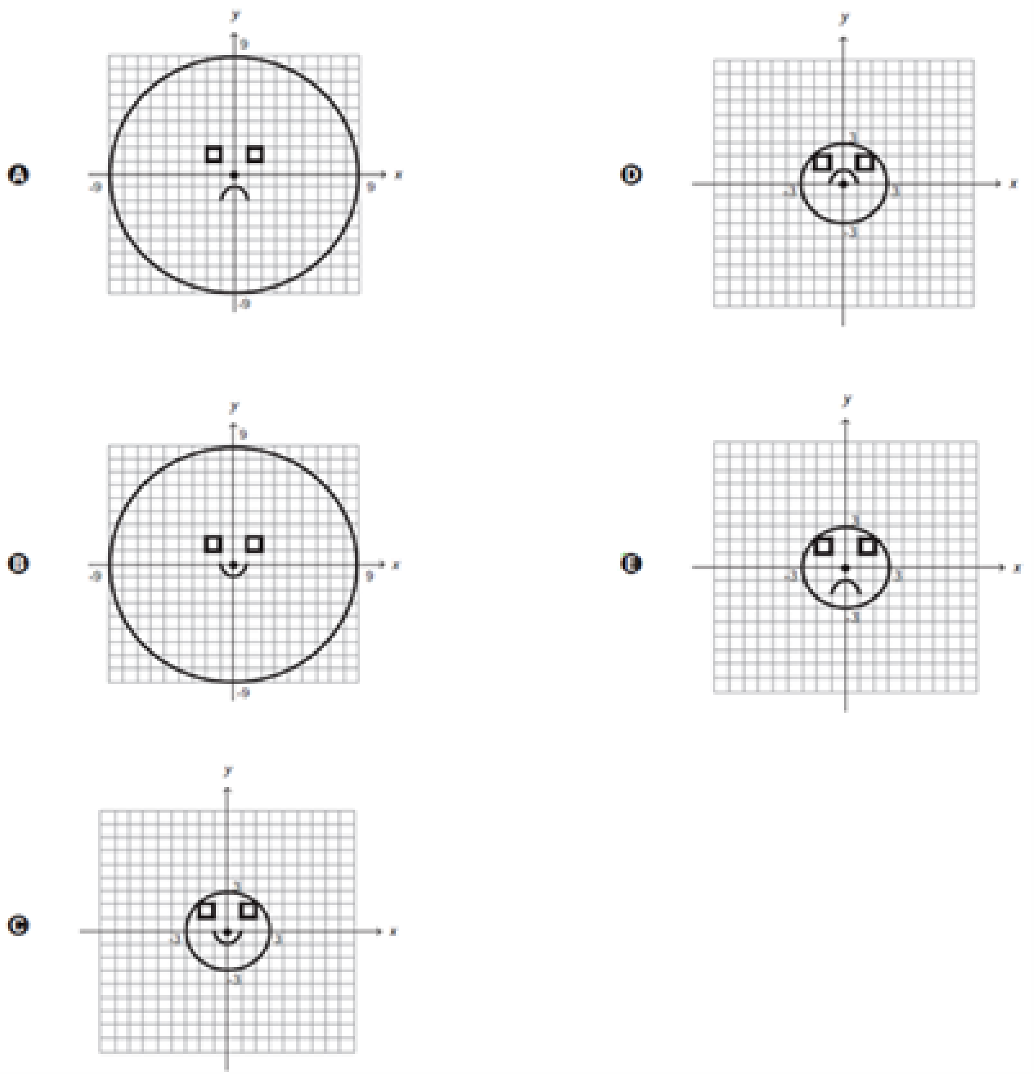
III — é o quadrado formado pelos vértices (-2, 1), (-1, 1), (-1, 2) e (-2, 2);

IV — é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2);

V — é o ponto (0, 0).

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

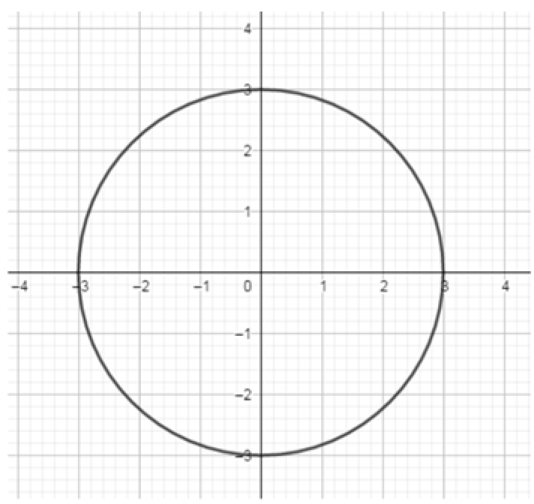
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?



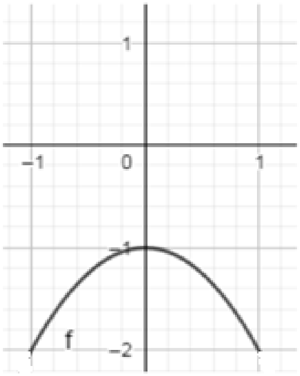
Solução:

Descrevendo os cinco conjuntos algébricos, temos:

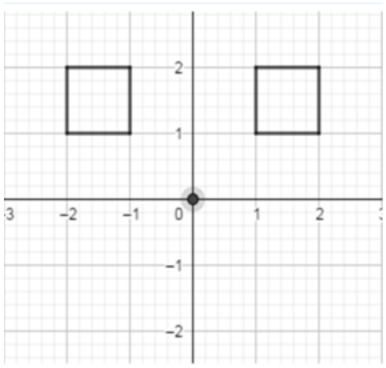
I) circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, tem as coordenadas do centro, o ponto (0,0) e a medida do raio é 3, logo, sua representação no plano cartesiano é:



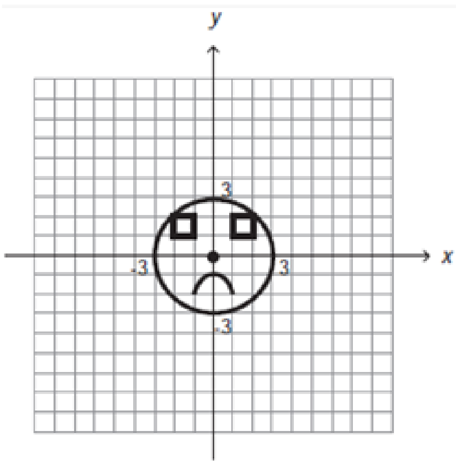
II) Parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com $-1 \leq x \leq 1$. Tem as coordenadas do vértice o ponto $(0,-1)$ e concavidade voltada para baixo, sendo sua representação no plano cartesiano, conforme imagem a seguir:



III) Quadrados de vértices (− 2, 1), (− 1, 1), (− 1, 2) e (− 2, 2)
IV) Quadrado de vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2)
V) Ponto (0, 0)

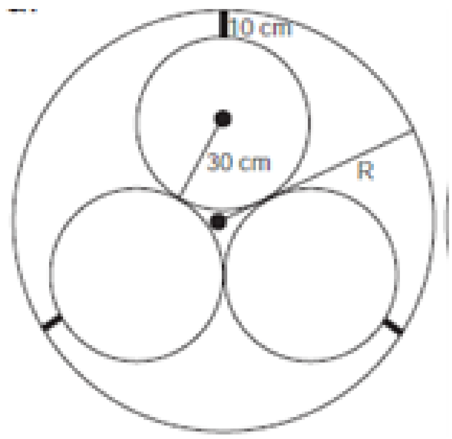


Agora, representando os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, temos:



Logo, a alternativa correta é o item E.

ENEM 2013 – 4. Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



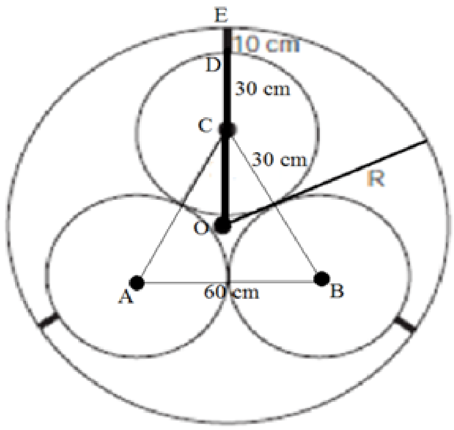
Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O valor de R, em centímetros, é igual a

(A) 64,0. (B) 65,5. (C) 74,0. (D) 81,0. (E) 91,0.

Solução:

Observe na figura que R = OC + CD + DE. Perceba também que o triângulo ABC é equilátero de lado 60 cm, logo, pelas propriedades do triângulo equilátero e do baricentro o segmento OC é igual a 2/3 da altura desse triângulo, daí, temos:



$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{60\sqrt{3}}{2} + 30 + 10$$

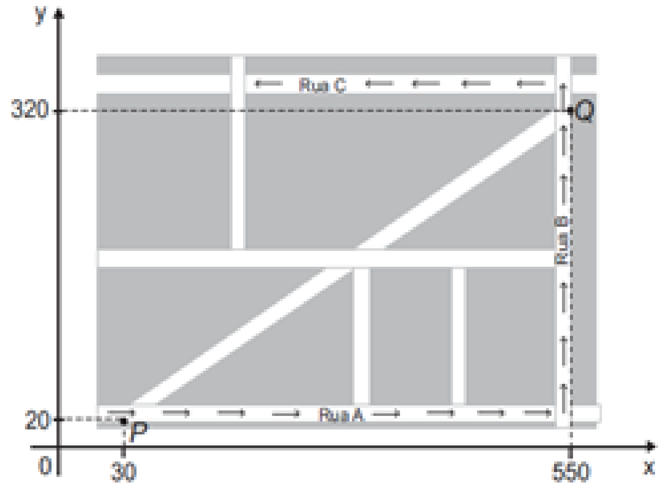
$$R = 20\sqrt{3} + 40$$

$$R = 20 \cdot 1,7 + 40$$

$$R = 34 + 40 = 74\ cm$$

Assim, a alternativa correta é o item C.

ENEM 2015 – 5. Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.
De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são
(A) (290 ; 20). (B) (410 ; 0). (C) (410 ; 20). (D) (440 ; 0). (E) (440 ; 20).

Solução:
Pelo sistema de coordenadas dado, os pontos P e Q possuem, respectivamente, as seguintes coordenadas: (30, 20) e (550, 320). Agora vejamos a distância do percurso feita pelo ônibus entre as paradas P e Q:

$$(550 - 30) + (320 - 20) = 820$$

Como um novo ponto T deve ser instalado nesse trajeto, de forma que as distâncias entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais, isto é, que o deslocamento de P até T seja igual a $\frac{820}{2} = 410$. Logo, para atender as recomendações que os estudos, realizados pela empresa, indicam o ponto T precisará ser nas seguintes coordenadas:

$$(30 + 410; 20) = (440; 20).$$

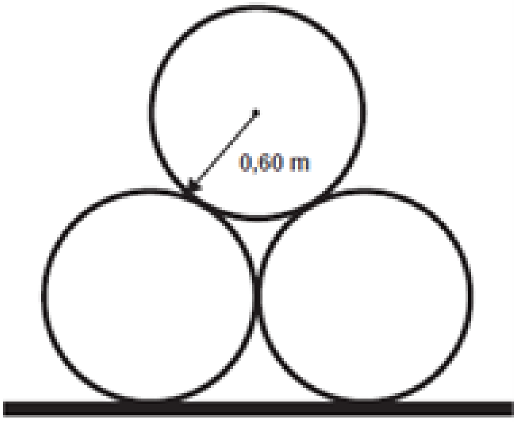
ENEM 2017 – 6. A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado)

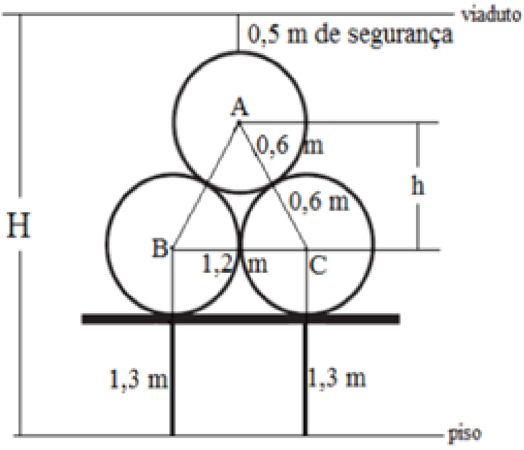
Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.
Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.
Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?
(A) 2,82 (B) 3,52 (C) 3,70 (D) 4,02 (E) 4,20

Solução:

A altura mínima H do viaduto, em metro, para que o caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão, conforme podemos ver na figura, corresponde à soma da altura da carroceria, da medida de dois raios externos dos canos, da altura do triângulo equilátero ABC e do 0,5 m da margem de segurança. Assim, sua altura mínima deveria ser:



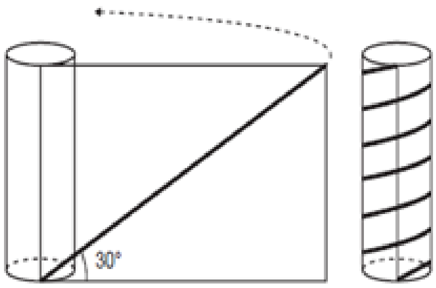
$$H = 1,3 + 2 \cdot 0,6 + \frac{1,2\sqrt{3}}{2} + 0,5$$

$$H = 1,3 + 1,2 + 0,6 \cdot 1,7 + 0,5$$

$$H = 2,5 + 1,02 + 0,5 = 4,02$$

Logo, a alternativa correta é o item D.

ENEM 2018 – 7. Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30º com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

A)$36\sqrt{3}$ B) $24\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 36 E) 72

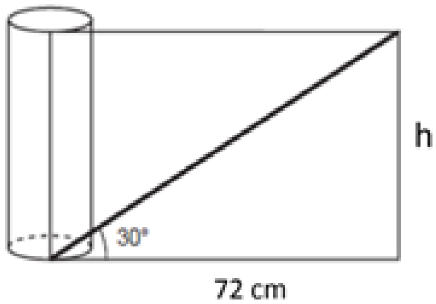
Solução:

Veja que o comprimento da circunferência da base do cilindro de raio $\frac{6}{\pi}$ cm é:

$$2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12\ cm$$

Pela segunda figura é possível perceber que o papel transparente deu seis voltas no cilindro e, portanto, o comprimento do retângulo é de $6 \cdot 12 = 72$ cm.

Dessa forma,



$$tg30° = \frac{h}{72}$$

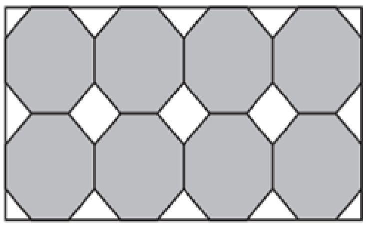
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{72}$$

$$h = 24\sqrt{3}\,cm$$

ENEM 2020 – 8. Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.

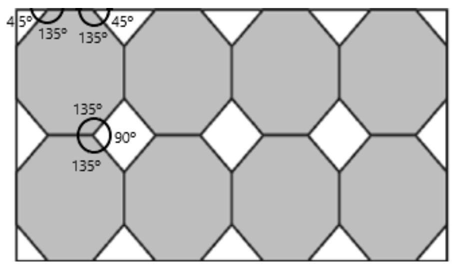


Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:
1 – Triângulo retângulo isósceles;
2 – Triângulo equilátero;
3 – Quadrado.
Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato

(A) 1. (B) 3. (C) 1 e 2. (D) 1 e 3. (E) 2 e 3.

Solução:

Observe a figura:



Pelas propriedades dos polígonos, cada ângulo interno do octógono mede:

$$\frac{180° \cdot (8-2)}{8} = 135°$$

E cada ângulo externo:

$$180° - 135° = 45°$$

Como os octógonos são regulares, os quadriláteros que ficam no meio de quatro octógonos, tem seus lados congruentes e seus ângulos internos de 90°, já que:

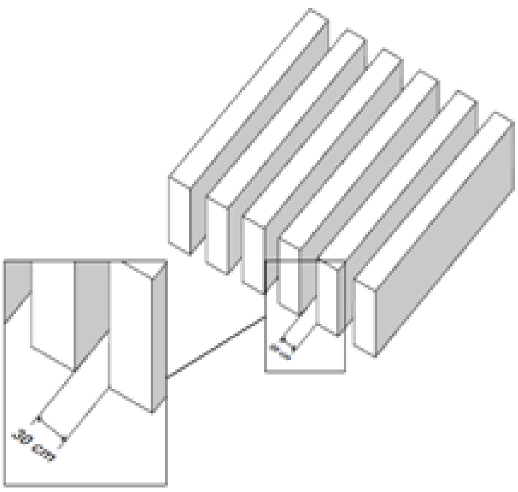
$$135° + 135° + x = 360°$$

$$x = 90°$$

Portanto, esses quadriláteros são quadrados.

Já os triângulos, são retângulos isósceles, pois possuem dois ângulos congruentes de 45° e o terceiro medindo 90°. Logo, as figuras necessárias são triângulos retângulos isósceles e quadrados, que correspondem aos números 1 e 3, alternativa D.

ENEM 2020 – 9. Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



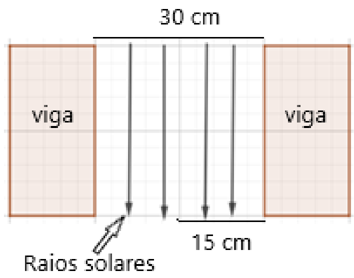
Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de

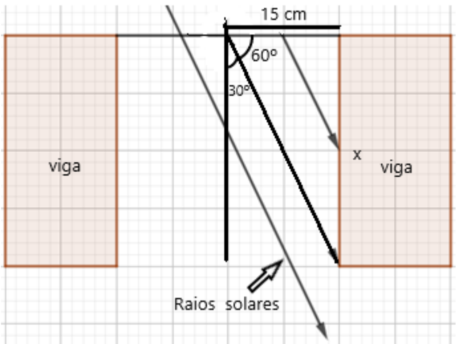
(A) 9. (B) 15. (C) 26. (D) 52. (E) 60.

Solução:

A figura ao lado ilustra a passagem dos raios solares quando o sol está a pino.



Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto e gerar metade da luz quando o sol inclinar 30° em relação a posição a pino, a viga deverá ter a altura x, conforme imagem, cujo valor é calculado através da razão trigonométrica, tangente, assim:



$$tg60° = \frac{x}{15}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{15}$$

$$x = 15\sqrt{3}$$

$$x = 15 \cdot 1,7 = 25,5$$

Logo, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de 26.