

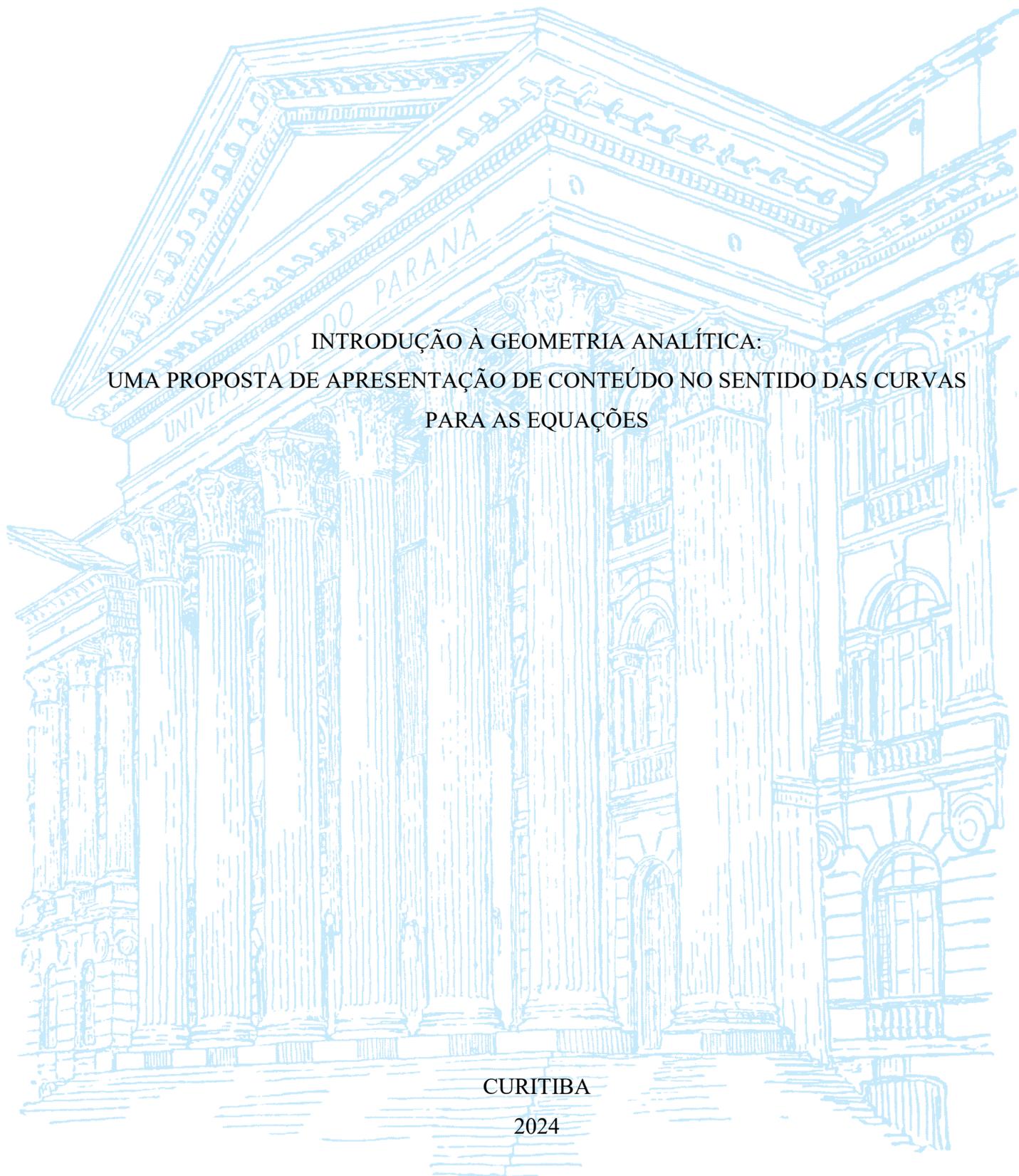
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALESSANDRA CARDOZO

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA:
UMA PROPOSTA DE APRESENTAÇÃO DE CONTEÚDO NO SENTIDO DAS CURVAS
PARA AS EQUAÇÕES

CURITIBA

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALESSANDRA CARDOZO

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA:
UMA PROPOSTA DE APRESENTAÇÃO DE CONTEÚDO NO SENTIDO DAS CURVAS
PARA AS EQUAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre, Curso do PROFMAT – Mestrado Profissional de Matemática, Setor de Ciências Exatas, pólo da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto.

CURITIBA
2024

Ficha catalográfica



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **ALESSANDRA CARDOZO** intitulada: **INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA : NO SENTIDO DAS CURVAS PARA AS EQUAÇÕES**, sob orientação do Prof. Dr. ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **Aprovação** no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 21 de Junho de 2024.

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO

Presidente da Banca Examinadora

WESLEY DOS SANTOS VILLELA BATISTA

Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Documento assinado digitalmente

gov.br

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Data: 21/06/2024 22:06:58-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

*À todos os profissionais que buscam sentido no ensino e aprendizagem
da Geometria Analítica.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram para a realização desta dissertação.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, **Professor Dr. Aldemir José da Silva Pinto**, por sua orientação precisa, paciência e apoio contínuo ao longo deste percurso. Sua expertise e conselhos foram fundamentais para a realização deste trabalho.

À memória do meu pai, **Alexandrino Cardozo**. Sua sabedoria, valores e ensinamentos continuam a guiar-me em todos os aspectos da minha vida. Agradeço profundamente por todo o amor, apoio e inspiração que me proporcionou. Embora não esteja fisicamente presente para compartilhar este momento, sinto sua presença e influência em cada conquista minha.

À minha mãe, **Rosiclé Lourdes da Rosa Cardozo**, por seu apoio e encorajamento constante. Seu exemplo de força e dedicação foi fundamental para que eu pudesse perseverar e alcançar meus objetivos.

Agradeço também aos meus colegas e amigos, especialmente **Luiz Aragão e Paula Osório**, por estarem ao meu lado nos momentos de dificuldade e celebrarem comigo as conquistas. Suas palavras de apoio e amizade tornaram este caminho mais leve e prazeroso.

Manifesto minha gratidão aos professores e funcionários da Universidade Federal do Paraná, que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica. Seu compromisso com a educação e dedicação ao ensino foram inspiradores.

A todos, meu mais sincero agradecimento.

“Virando vagarosamente as
páginas em busca de sentidos.”
W. S. Merwin

RESUMO

Esta dissertação investiga métodos eficazes para a apresentação de conteúdos de Geometria Analítica, com foco inicial na modelagem geométrica com a construção de curvas, seguida pela modelagem algébrica por meio de equações. O objetivo principal é desenvolver uma abordagem didática que facilite a compreensão dos conceitos fundamentais da Geometria Analítica. Baseando-se na teoria de Vygotsky, que enfatiza a influência do meio no desenvolvimento cognitivo, esta pesquisa explora como a visualização gráfica (externo) pode auxiliar na compreensão dos conceitos algébricos (interno). A metodologia integra simultaneamente a construção de curvas geométricas com a apresentação das equações matemáticas que as descrevem. As técnicas de modelagem geométrica foram exploradas para criar e analisar diversas curvas utilizando ferramentas visuais. Imediatamente após a construção dessas curvas, foi realizada a transição para a modelagem algébrica, onde as curvas foram descritas por meio de equações matemáticas. Esse processo contínuo permitiu a aplicação de conceitos de Geometria, Álgebra e Análise, traduzindo as representações geométricas em expressões algébricas precisas, mostrando a interconexão entre os conceitos geométricos e algébricos de maneira que faça sentido no ensino-aprendizagem dos estudantes. Os resultados indicam que a abordagem integrada proposta melhora significativamente a compreensão dos alunos sobre a relação entre a Geometria e a Álgebra na Geometria Analítica. A combinação de modelagem geométrica e algébrica demonstrou ser eficaz para ilustrar conceitos complexos e promover uma aprendizagem mais profunda e significativa. As conclusões destacam a importância de integrar ferramentas visuais e interativas no ensino da Geometria Analítica, sugerindo que essa metodologia pode ser aplicada em diversos níveis educacionais para melhorar a eficácia do ensino. Recomenda-se a realização de estudos futuros para explorar a implementação desta abordagem em diferentes ambientes de ensino e com diversas populações de alunos.

Palavras-chave: Geometria Analítica, modelagem geométrica, construção de curvas, modelagem algébrica, teoria de Vygotsky, ensino de matemática.

ABSTRACT

This dissertation investigates effective methods for presenting Analytic Geometry content, initially focusing on geometric modeling with curve construction, followed by algebraic modeling through equations. The main objective is to develop a didactic approach that facilitates the understanding of fundamental concepts in Analytic Geometry. Drawing on Vygotsky's theory, which emphasizes the influence of the environment on cognitive development, this research explores how graphical visualization (external) can aid in understanding algebraic concepts (internal). The methodology simultaneously integrates the construction of geometric curves with the presentation of the mathematical equations that describe them. Geometric modeling techniques were explored to create and analyze various curves using visual tools. Immediately after the construction of these curves, a transition to algebraic modeling was conducted, where the curves were described through mathematical equations. This continuous process allowed for the application of concepts from Geometry, Algebra, and Analysis, translating geometric representations into precise algebraic expressions, showing the interconnection between geometric and algebraic concepts in a way that makes sense in student learning. The results indicate that the proposed integrated approach significantly improves students' understanding of the relationship between Geometry and Algebra in Analytic Geometry. The combination of geometric and algebraic modeling proved effective in illustrating complex concepts and promoting deeper and more meaningful learning. The conclusions highlight the importance of integrating visual and interactive tools in teaching Analytic Geometry, suggesting that this methodology can be applied at various educational levels to improve teaching effectiveness. Further studies are recommended to explore the implementation of this approach in different educational environments and with diverse student populations.

Keywords: Analytic Geometry, geometric modeling, curve construction, algebraic modeling, Vygotsky's theory, mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Representação de ponto, reta e plano.....	27
Figura 2 –	Representação da reta	29
Figura 3 –	Três pontos alinhados sobre uma reta.....	30
Figura 4 –	Algumas posições entre duas retas	30
Figura 5 –	Representação de pontos que dividem a reta em partes.....	31
Figura 6 –	Representação de parte da reta limitada pelos pontos A e B	32
Figura 7 –	Partes de uma reta	33
Figura 8 –	Representação de segmentos orientados.....	34
Figura 9 –	Possibilidades de posições de três pontos colineares em um segmento	35
Figura 10 –	Representação de pontos em uma reta orientada	36
Figura 11 –	Sistema plano de coordenadas	39
Figura 12 –	Representação de pontos no plano de coordenadas	41
Figura 13 –	Representação do triângulo do exemplo 3.13	42
Figura 14 –	Distância entre dois pontos dados.....	44
Figura 15 –	Ângulo entre duas retas concorrentes	46
Figura 16 –	Representação do ângulo de inclinação de reta	47
Figura 17 –	Representação do ângulo de inclinação de uma retadeterminada por dois pontos	48
Figura 18 –	Representação da reta do exemplo 3.20.....	50
Figura 19 –	Relação entre duas retas no plano coordenado	51
Figura 20 –	Representação dos pontos do exemplo 3.24	55
Figura 21 –	Representação do paralelogramo do exemplo 3.24	56
Figura 22 –	Representação de uma reta no plano sistema coordenado com alguns de seus pontos.....	57
Figura 23 –	Representação de pontos de interseção de um lugar geométrico e os eixos de um plano coordenado	58
Figura 24 –	Representação da simetria de dois pontos em relação a um eixo	59
Figura 25 –	Representação da simetria de dois pontos em relação a um ponto	59
Figura 26 –	Ideia de uma reta simétrica em relação ao eixo das abscissas	60
Figura 27 –	Exemplo de assíntota vertical e aoblíqua de uma curva	62
Figura 28 –	Representação de dois pontos distintos que definem apenas uma reta.....	63

Figura 29 –	Representação de uma reta definida por um ponto conhecido e sua declividade	64
Figura 30 –	Representação da reta do exemplo 3.34.....	65
Figura 31 –	Representação de uma reta descrita pela forma declividade-interseção	66
Figura 32 –	Representação de uma reta e suas interseções aos eixos coordenados.....	69
Figura 33 –	Família de retas com inclinação -3	79
Figura 34 –	Família de retas que passam pelo ponto (-1, 3)	80
Figura 35 –	Representação da circunferência \mathcal{C}	83
Figura 36 –	Circunferência de centro C e raio r	84
Figura 37 –	Circunferência de centro na origem.....	87
Figura 38 –	Representação da circunferência do exemplo 4.14.....	97
Figura 39 –	Representação parcial da família de circunferências com centro no ponto $2, -1$	98
Figura 40 –	Representação parcial da família de circunferências com centro na reta $x = -3$	99
Figura 41 –	Representação geométrica da situação do exemplo 4.15.....	103
Figura 42 –	Representação geométrica da situação do exemplo 4.17.....	109
Figura 43 –	Segmento tangente desde um ponto externo à circunferência	110
Figura 44 –	Representação da situação do exemplo 4.21.....	114
Figura 45 –	Representação da situação do exemplo 4.22.....	115
Figura 46 –	Representação da situação do exemplo 4.23.....	117
Figura 47 –	Translado dos eixos coordenados para o centro da circunferência.....	120
Figura 48 –	Análise das coordenadas do ponto P com a translação dos eixos coordenados	121
Figura 49 –	Rotação de eixos coordenados e posicionamento de um ponto p em relação a ambos os eixos	124
Figura 50 –	Curvas do estudo do exemplo 5.7	129
Figura 51 –	Secções cônicas.....	132
Figura 52 –	Superfície cônica circular	132
Figura 53 –	Secções cônicas.....	133
Figura 54 –	Lugar geométrico das cônicas.....	134
Figura 55 –	Primeiro traço da lei de formação da parábola	137
Figura 56 –	Repetição dos traços da formação da parábola	138

Figura 57 –	Local geométrico da parábola.....	139
Figura 58 –	Pontos de tangência da parábola.....	140
Figura 59 –	Pontos de formação da parábola.....	141
Figura 60 –	Ângulos de formação da parábola.....	142
Figura 61 –	Ângulos de formação da parábola em nova notação.....	143
Figura 62 –	Triângulos da formação da parábola.....	144
Figura 63 –	Aproximação dos pontos de tangência da parábola.....	145
Figura 64 –	Relação entre triângulos de formação das propriedades da parábola.....	146
Figura 65 –	Características de uma reta fixa a uma determinada distância da parábola....	147
Figura 66 –	Foco e diretriz de uma parábola.....	148
Figura 67 –	Elementos da análise algébrica da parábola.....	149
Figura 68 –	Elementos da análise algébrica da parábola no plano coordenado.....	150
Figura 69 –	Ponto qualquer da parábola.....	152
Figura 70 –	Casos da parábola $y = \pm 2\sqrt{ax}$	154
Figura 71 –	Casos da parábola $x = \pm 2\sqrt{ay}$	155
Figura 72 –	<i>Latus rectum</i> da parábola.....	155
Figura 73 –	Parábola do exemplo 7.3.....	157
Figura 74 –	Parábola com eixos paralelos aos eixos do plano coordenado.....	158
Figura 75 –	Esboço da parábola do exemplo 7.5.....	160
Figura 76 –	Parábola do exemplo 7.7.....	163
Figura 77 –	Esboço da reta tangente à parábola pelo ponto (1, 2) da curva.....	167
Figura 78 –	Esboço da reta tangente à parábola com declividade -1.....	169
Figura 79 –	Retas tangentes à parábola desde um ponto externo.....	171
Figura 80 –	Família de retas tangentes à parábola do exemplo 7.11.....	172
Figura 81 –	Representação de uma parábola com $a > 0$	175
Figura 82 –	Representação de uma parábola com $a < 0$	175
Figura 83 –	Parábola do exemplo 7.13.....	177

LISTA DE ABREVIATURAS

G.A.	Geometria Analítica.
ed.	edição.
p.	página.
u.c.	unidade de comprimento.
Vol.	volume.

LISTA DE SÍMBOLOS

ε	conjunto épsilon.
α	alfa.
β	beta.
γ	gama.
\overleftrightarrow{AB}	reta AB .
\overrightarrow{AB}	semirreta AB .
\overline{AB}	segmento de reta AB .
d_{AB}	distância entre os pontos A e B .
\leq	menor ou igual que.
$>$	maior que.
$\tan(\alpha)$	tangente do ângulo α .
$\cot(\alpha)$	cotangente do ângulo α .
$A\hat{C}B$	ângulo ACB , com vértice em C .
\equiv	congruência.
\perp	ângulo reto.
$\triangle ABC$	triângulo ABC .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	AS CONTRIBUIÇÕES VYGOTSKERIANA PARA A MATEMATICA E GEOMETRIA ANALITICA	19
2.1	TEORIA DE VYGOTSKY PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA.....	19
2.2	TEORIA SOCIOCONSTRUTIVISTA DE VYGOTSKY.....	20
2.3	ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL (ZDP).....	22
3	CONCEITOS BÁSICOS PARA DAR SENTIDO À GEOMETRIA ANALÍTICA	26
3.1	CONCEITOS GEOMÉTRICOS	26
3.2	A RETA.....	28
3.3	SISTEMA DE COORDENADAS	33
3.3.1	Sistema linear de coordenadas	36
3.3.2	Sistema plano de coordenadas.....	38
3.4	DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS.....	43
3.5	ÂNGULOS	45
3.6	CLASSIFICAÇÃO DAS RETAS	51
3.7	EQUAÇÃO DA RETA	56
3.8	A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DE UMA RETA.....	72
3.8.1	Relações entre duas retas através da equação	75
3.9	FAMÍLIAS DE RETAS	78
4	A CIRCUNFERÊNCIA	83
4.1	A EQUAÇÃO PADRÃO DA CIRCUNFERÊNCIA.....	83
4.2	A EQUAÇÃO CANÔNICA DA CIRCUNFERÊNCIA.....	87
4.3	A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA.....	89
4.4	CIRCUNFERÊNCIAS DETERMINADA POR TRÊS CONDIÇÕES	94

4.5	FAMÍLIAS DE CIRCUNFERÊNCIAS.....	98
4.6	EIXO RADICAL.....	106
4.7	PROBLEMAS SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS RELATIVOS À CIRCUNFERÊNCIA	113
5	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	119
5.1	TRANSLAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS	121
5.2	ROTAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS.....	124
6	AS CÔNICAS	131
7	PARÁBOLA	136
7.1	O LUGAR GEOMÉTRICO DA PARÁBOLA.....	137
7.2	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS.....	140
7.2.1	Propriedades do Foco e da Diretriz	145
7.3	A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA	148
7.3.1	Primeira equação padrão da parábola.....	152
7.3.2	Segunda equação padrão da parábola.....	158
7.4	TANGENTES À PARÁBOLA	164
7.4.1	Tangente em um ponto dado de contato.....	165
7.4.2	Tangente tendo uma declividade dada	168
7.4.3	Tangente desde um ponto externo.....	170
7.5	A FUNÇÃO QUADRÁTICA	174
8	CONCLUSÃO	179
	REFERÊNCIAS	182

1 INTRODUÇÃO

A pesquisa busca uma investigação de uma proposta para apresentação dos conteúdos de Geometria Analítica, destacando uma abordagem inicial na modelagem geométrica através da construção de curvas, seguida pela exploração da modelagem algébrica por meio de equações. O objetivo principal é desenvolver uma estratégia didática que não apenas apresente os conceitos fundamentais da Geometria Analítica, mas também facilite sua compreensão e aplicação por parte dos estudantes. Reconhecendo os desafios enfrentados por muitos ao assimilar os princípios dessa disciplina, esta pesquisa visa fornecer um arcabouço teórico e prático que possa ser adotado no ensino, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e significativa.

O capítulo 1 desta dissertação, intitulado "As Contribuições Vygotskeriana para a Matemática e Geometria Analítica", investiga a aplicação das teorias de Vygotsky no ensino da Matemática, com ênfase na Geometria Analítica. Discute-se a utilização da teoria socioconstrutivista de Vygotsky para criar um ambiente de aprendizagem colaborativo e dinâmico, que facilita a compreensão profunda e a aplicação dos conceitos matemáticos. São abordadas a importância da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e da mediação no processo de aprendizagem, sugerindo-se o uso de ferramentas visuais para mediar o aprendizado e tornar os conceitos abstratos mais acessíveis. A linguagem e a colaboração são destacadas como elementos importantes para a internalização do conhecimento, permitindo que os estudantes discutam, expliquem e justifiquem suas soluções matemáticas de maneira mais eficaz.

No capítulo 2, "Conceitos Básicos para dar sentido à Geometria Analítica", são apresentados os fundamentos essenciais que formam a base da Geometria Analítica. Aborda conceitos geométricos fundamentais, como a reta, o sistema de coordenadas, a distância entre dois pontos e os ângulos. Estes conceitos são desenvolvidos de forma a proporcionar aos estudantes uma compreensão sólida e estruturada, facilitando a transição para tópicos mais avançados. E destaca a importância de entender a classificação das retas, a equação da reta, e as relações entre retas através das equações, estabelecendo um alicerce robusto para o estudo subsequente das curvas geométricas.

O capítulo 3, "A Circunferência", examina a segunda curva geométrica mais familiar aos estudantes após a reta. A abordagem começa com a definição da circunferência como o lugar geométrico de um ponto que mantém uma distância constante de um ponto fixo. O

capítulo explora a equação padrão, a equação canônica, e a forma geral da equação da circunferência, além de discutir as circunferências determinadas por três condições e as famílias de circunferências. A mediação através de representações geométricas e algébricas visa solidificar a compreensão dos alunos sobre este importante conceito.

No capítulo 4, "Transformação de Coordenadas", são exploradas as operações que simplificam a manipulação das equações das curvas, facilitando a compreensão geométrica e algébrica. O foco está nas transformações por translação e rotação dos eixos coordenados, demonstrando como estas operações podem transformar a representação de uma circunferência para um novo sistema de coordenadas. Este capítulo enfatiza a importância dessas transformações para uma compreensão mais profunda e conectada das curvas na geometria analítica.

O capítulo 5, "As Cônicas", aborda as seções cônicas – elipse, parábola e hipérbole – como lugares geométricos de um ponto cuja distância a um ponto fixo é proporcional à sua distância a uma reta fixa. Discute as definições e propriedades das cônicas, explorando suas equações e características no plano coordenado. Através de uma análise das cônicas, o capítulo proporciona uma compreensão abrangente dessas curvas, conectando a teoria clássica com a Geometria Analítica.

E no capítulo 6, "Parábola", é feita uma análise aprofundada da parábola, começando com a definição geométrica e avançando para suas propriedades e equações. Explora a tangente em um ponto dado, a tangente com uma inclinação específica, e a tangente a partir de um ponto externo. A função quadrática também é discutida, proporcionando aos estudantes uma visão completa e integrada sobre a parábola, incluindo suas aplicações e representações algébricas

2 AS CONTRIBUIÇÕES VYGOTSKERIANA PARA A MATEMÁTICA E GEOMETRIA ANALÍTICA.

2.1 TEORIA DE VYGOTSKY PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

O ensino de Matemática no Brasil tem enfrentado muitos desafios nas últimas décadas, tanto no que diz respeito aos processos de ensino e de aprendizagem em si, quanto na forma como a disciplina é vista pela sociedade, de modo geral. Nas pesquisas bibliográficas, bem como na experiência profissional de ensino dessa disciplina, a qual essa mestrandanda atua, há uma concordância por parte dos estudantes que a Matemática é a disciplina que os discentes menos gostam. Muito desse sentimento acerca da Matemática, se dá pela forma que ela enquanto método de ensino no processo de aprendizagem é apresentada ou lida como: complexa, difícil, com números, símbolos e linguagens, que precisam da mediação do docente, que atuará de forma ativa nesse processo. Para tal processo, acredita-se que a contribuição da Psicologia do Desenvolvimento, em específico as teorias e contribuições do psicólogo russo Lev Semionovich Vygotsky.

Lev Semionovich Vygotsky nasceu em Orsha, Bielo-Rússia, em novembro de 1896 e morreu em junho de 1934, com apenas 38 anos, vítima de tuberculose, doença que o acompanhou desde os 20 anos de idade. Embora sua carreira tenha sido breve, suas contribuições à Psicologia deram novos rumos às pesquisas nesta área na época e tornaram-se elementares a compreensão do processo de desenvolvimento do indivíduo até os dias atuais. (SANTOS, CARDOSO, & OLIVEIRA, 2017).

Inúmeras foram as contribuições de Vygotsky para a Psicologia, em específico para área da educação, aprendizagem e desenvolvimento, tais contribuições norteiam a práxis educacionais até a atualidade.

Para Vygotsky, a aprendizagem da criança antecede a entrada na escola, ou seja, desde o nascimento, e que o aprendizado escolar produz algo novo no desenvolvimento infantil, evidenciando as relações interpessoais, essa perspectiva apresenta uma nova compreensão da criança, da Educação Infantil, e do papel do professor. E em se tratando do ensino e aprendizagem em Matemática, esse papel será fundamental para a compreensão dos símbolos e signos presentes na disciplina.

Segundo Vygotsky (1996; 2000; 2001), é o aprendizado coletivo que irá promover o desenvolvimento humano, uma vez que o homem é um ser social, fruto de um agregado de

interações sociais e históricas. A relação do homem com o mundo não é direta, mas sim mediada por instrumentos e signos. O autor ressalta a importância do pensamento e da linguagem.

Embora o autor não seja citado ou tenha o seu trabalho, bem como teorias aplicadas ao ensino de Matemática, e em específico a Geometria Analítica que é o objeto central dessa dissertação, percebe-se que as contribuições das suas teorias para o ensino e compreensão dos símbolos e suas linguagens, aos quais os professores recorrem para explicar e/ou ensinar a Matemática e Geometria Analítica, na tentativa de mudar a percepção descontextualizada e negativa da Matemática manifestada por grande parte dos estudantes.

Para Fernandes, Wielewski *et al* (2022, p. 154):

“ É importante destacar, que a configuração do professor por si só, não deve ser vista como um único dos mediadores possíveis. A partir dos pensamentos Vygostkyano, os mediadores são todos os elementos e objetos que estão presentes na cultura, tanto ferramentas, objetos culturais, obras de arte, mapas, brinquedos, livros, etc., são considerados mediadores.

Todos os recursos supracitados devem estar descritos no plano de ensino do professor, bem como as práticas pedagógicas adotadas a serem aplicadas pelo professor, também como um mecanismo de mediação. Em relação à mediação, Vygotsky (2000; 2010) destaca dois elementos mediadores que são os instrumentos e os signos, eles a mais nessa relação de desenvolvimento e troca que se dão entre o indivíduo e o meio no qual estão inseridos.

Em seu cerne a teoria vygotskeriana é pautada na relação do indivíduo em seu contexto social, sendo a aprendizagem o processo de apropriação dos conhecimentos históricos que fazem parte do nosso patrimônio cultural e social, construído pelos nossos antecessores. Cada indivíduo desenvolve sua consciência a partir dos resultados das suas aprendizagens e das relações estabelecidas socialmente com o seu grupo, conceitos, crenças e hábitos.

2.2 TEORIA SOCIOCONSTRUTIVISTA DE VYGOTSKY

Em seu curto período de vida, Vygotsky produziu um arsenal científico significativo, que conta com uma série de artigos, livros, ensaios e pesquisas que segue contribuindo e influenciando pesquisadores atualmente. Uma das questões que permeiam os trabalhos desse epistemólogo é entender como ocorre o desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

Essa análise e observação possibilitaram que pesquisadores aprofundassem em temas relacionados ao pensamento, a linguagem, a memória e atenção, controle consciente do comportamento, pensamento abstrato, raciocínio dedutivo, entre outros, na busca do entendimento das funções psíquicas se desenvolvem no ser humano como um todo. Nessa perspectiva:

As funções psicológicas especificamente humanas se originam nas relações do seu contexto cultural e social. Isto é, o desenvolvimento mental humano não é dado a priori, não é imutável e universal, não é passivo nem tampouco independente do desenvolvimento histórico e das formas sociais da vida humana. A cultura é, portanto, parte constitutiva da natureza humana, já que sua característica psicológica se dá através da internalização dos modos historicamente determinados e culturalmente organizados de operar com informações. (Rego, 2001, p. 41).

A Teoria Socioconstrutivista afirma que existe o conhecimento do lado de fora do ser humano, um conhecimento que está enraizado na cultura, nos objetos, nas formas e utensílios, e na maneira que vivemos, entretanto, quando o conhecimento é internalizado, é reinterpretado pelo sujeito embasado em sua história de vida. Nesse viés, não se tornam meras cópias do que já existe na cultura. Cada pessoa passa por experiências diferentes ao longo da vida, e isso interfere na forma que esta interpreta o mundo. Com base nessa teoria, o professor participa desse processo como mediador do conhecimento, porém não deve ser vista ou posta como único método mediador, mediadores são todos os elementos e objetos que estão presentes na cultura, tanto ferramentas, objetos culturais, obras de arte, mapas, brinquedos, livros, etc. são considerados mediadores. Nesse contexto, pensando na prática do professor de Matemática que, autores como Silva, Braga e Giordano (2021), dizem:

O professor que ensina Matemática precisa considerar o pressuposto de que o estudante é fruto do contexto histórico-cultural em relação ao meio em que vive. Assim, não podemos compreender que todos os discentes aprendem do mesmo jeito e no mesmo ritmo (BRASIL, 2018). A cultura e a socialização desempenham um papel crucial em seu desenvolvimento pois, para Vygotsky, só há aprendizagem a partir do outro. Na ausência do outro, o homem não se constrói homem. Nessa perspectiva, a formação se dá na relação entre o sujeito e a sociedade a seu redor. Dessa forma, o indivíduo modifica o ambiente e este o modifica de volta.

Ou seja, em relação à Matemática, essa área do conhecimento, como qualquer outra área, mantém uma relação ontológica com o trabalho, ou seja, surgiu para atender a determinada necessidade humana. Em síntese, a Matemática só existe porque o homem precisou dela para criar objetivações para resolver os problemas originados na prática, para solucionar problemas das esferas cotidianas. Acerca dessas práxis, haverá sessões abaixo que

explanara o conteúdo, aqui so um breve tópico e relação com a teoria de Vygotsky. No tocante a Geometria Analítica, essa mesma teoria poderá ser aplicada?

Geometria Analítica, é uma área da Matemática que utiliza os sistemas de coordenadas para estudar e representar geometricamente figuras e problemas algébricos. Integrar os princípios da teoria vygotkyeriana para tal prática, pode melhorar significativamente a compreensão dos alunos. Aqui o propósito é fazer uma breve conceituação acerca do que é a G.A., a título de contextualizar e correlacionar com a teoria supracitada. Nesse sentido Fernandes e Wielewski et al (2022, p. 160):

Isto é, ensinar Geometria é possibilitar ao aluno a desenvolver o pensar geométrico e aprimorar um raciocínio visual. Bem como, facilitar a compreensão e resolução de problemas de várias áreas de conhecimento. Mediante ao exposto, a Teoria Vygotskyana fornece base epistemológica para tal proposta de ensino. Ensinar a Geometria através de Práticas Pedagógicas mais contextualizadas, ancoradas em conteúdos matemáticos bem sistematizados, porém, levando em consideração o diálogo, as vivências, as trocas de experiências de todos os sujeitos, sejam professores, alunos, ou pessoas que vivenciem o espaço escolar.

Correlacionando a teoria vygotkyeriana com o ensino de Matemática, assim como para qualquer área do conhecimento se faz necessário o papel de um mediador, para executar uma atividade, uma criança pode necessitar do auxílio de um adulto ou de uma criança mais experiente (habilidade situada em uma zona de desenvolvimento proximal), mas no futuro a criança será capaz de realizar a tarefa sozinha (habilidade situada em uma zona de desenvolvimento real). Com a próxima sessão pretende-se explicar bem como apresentar tais conceitos.

2.3 ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL (ZDP)

Para compreender a relação entre desenvolvimento e aprendizagem, é necessária a compreensão e a importância do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), em síntese, essa teoria é conhecida também como zona de desenvolvimento atual ou real, isto é, aquilo que a criança consegue realizar sozinha, que caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, as funções já amadurecidas. Para Fernandes e Wielewski (2022):

A obra Vygostkyana sustenta que para se pensar no desenvolvimento da criança, precisa-se analisar os conhecimentos que a criança já possui, e onde essa criança pode chegar em termos de aprendizagem. Ele divide o desenvolvimento em três níveis importantes, que são, o nível de desenvolvimento real, o nível de desenvolvimento proximal e o nível de desenvolvimento potencial.

Ou seja, na medida em que as funções psicológicas e de desenvolvimento dos alunos são desenvolvidas, pode-se ou deve-se pensar na utilização dessa teoria para construir um planejamento pedagógico, em específico para o ensino de Matemática, pois essa fase descreve que a criança organiza seu pensamento e as informações e seu potencial de operacionalização e realizações de forma independente, isto é, sem necessidade da mediação do adulto.

Segundo Santos e Cardoso (2017),

“a Matemática tem, em si, uma lógica específica que deve ser relevada no momento da elaboração de um plano de desenvolvimento, se o objetivo do mesmo for “[...] a formulação de conceitos matemáticos que obviamente será diferenciado de um planejamento voltado para a biologia, por exemplo”. Somos remetidos às especificidades do ensino da Matemática e à importância de o professor conhecê-la e dominar uma didática de ensino que conduza o aluno à aprendizagem dos conteúdos matemáticos.”

Ao aplicar as teorias e contribuições de Vygotsky ao ensino da Geometria Analítica, os docentes podem criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e colaborativo que facilita a compreensão profunda e a aplicação dos conceitos matemáticos, transformando a sala de aula em um ambiente mais interativo e centrado no estudante, onde o desenvolvimento cognitivo é enriquecido através das interações sociais e apoio adequado.

Aqui se faz uma crítica ao ensino da Matemática atuais, que estava presente nas referências bibliográficas, acerca das dificuldades em aprender Matemática em específico ao ensino da Geometria Analítica (G.A.), área da Matemática que requer um conhecimento prévio por parte do estudante acerca do contexto da G.A., onde espera-se que esse estudante já tenha minimamente desenvolvido um raciocínio lógico e organizado.

Mesmo sem ser percebida, a Geometria está presente no nosso cotidiano, e em diversas áreas do conhecimento como na natureza, nas tecnologias, nas construções, na arquitetura, nos jogos virtuais ou até mesmo manuais, nas artes, na Matemática pura ou aplicada. E sua compreensão analítica se faz importante para a aplicabilidade e funcionalidade.

Uma vez compreendida as teorias vygotskyeriana, segue descrição dos conceitos e de que forma eles podem ser utilizados na práxis do professor, bem como adoção dessas teorias nos planos pedagógicos escolares.

- 1. Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)**, ao introduzir novos conceitos, como a equação de uma reta ou a parábola, o professor pode primeiro resolver

problemas junto com os alunos, orientando-os através dos passos necessários. Exemplificando e explicando cada símbolo ali presente nos conceitos da G.A., dessa forma criar uma vinculação dos conceitos teóricos, dando aos estudantes o tempo necessário para que os alunos pratiquem de forma independente, usando a ZDP, para fortalecer suas habilidades.

2. **Aprendizagem Mediada:** Para além dos professores outros recursos podem ser utilizados como ferramentas uteis para a explanação da G.A., utilizando recursos visuais e tecnológicas, como softwares de geometria dinâmica (GeoGebra, por exemplo), para mediar a aprendizagem. A visualização gráfica de uma curva e posterior a de equações e transformações geométricas pode auxiliar os estudantes a compreender conceitos abstratos.
3. **Importância da Linguagem:** Nessa etapa deve-se encorajar os estudantes a discutir e explicar conceitos geométricos em suas próprias palavras, bem como a descrever processos matemáticos e justificar suas soluções, pode facilitar a compreensão profunda. A exemplo, ao aprender sobre a distância entre dois pontos, os estudantes podem verbalizar cada etapa do analítico.
4. **Ferramentas Culturais:** Introduzir a história da Geometria Analítica e as suas aplicações práticas na resolução de problemas reais, em áreas de interseção como na Física e na Engenharia pode tornar o aprendizado mais relevante e engajador, ou seja, utilizar contextos do cotidiano onde os conteúdos dessa área são aplicados pode proporcionar um entendimento mais profundo e conectado.
5. **Aprendizagem Colaborativa:** Essa etapa sugere a criação de projetos de grupo, onde os estudantes trabalham juntos para resolver problemas mais complexos, como encontrar a interseção de duas curvas ou analisar o comportamento de funções quadráticas, podem promover a troca de ideias e estratégias, enriquecendo o aprendizado coletivo.

Isto é, ensinar Geometria Analítica, pautado nas teorias de Vygotsky permite ao estudante desenvolver o pensar geométrico e aprimorar o raciocínio algébrico. Possibilitando de forma educativa e assertiva a compreensão e resolução de problemas de várias áreas de conhecimento.

Diante dos conceitos expostos, pode-se compreender que a Teoria Vygotskyana fornece base epistemológica para uma proposta de apresentação de conteúdo de Geometria

Analítica. Ensinar a Geometria Analítica, através das ferramentas supracitadas, aplicadas e correlacionadas aos conteúdos matemáticos de forma sistêmica, levando em consideração o diálogo, as vivências, as trocas de experiências de todos os sujeitos, sejam professores, estudantes, ou pessoas que vivenciem o espaço escolar.

3 CONCEITOS BÁSICOS PARA DAR SENTIDO À GEOMETRIA ANALÍTICA

O estudo de Geometria Analítica requer conhecimento da Geometria, ou seja, para análise das situações-problemas dessa área deve-se ter conhecimento dos conceitos básicos de Geometria para trazer sentido ao seu aprendizado.

Propende que o estudo de Geometria Analítica inicie pela retomada dos conceitos de Geometria. E sendo o objetivo deste estudo uma possível proposta de apresentação de conteúdo para o estudo dessa área, então será perpassado os conhecimentos da Geometria para seguir e dar sentido ao estudo da Geometria Analítica.

Nessa perspectiva, o professor assume o papel de mediador na apresentação do conteúdo, ajustando-o conforme o nível de ensino dos estudantes. Portanto, a proposta inclui desde os conceitos fundamentais para a educação básica até os teoremas avançados abordados na educação superior. Dessa forma, a pesquisa visa apresentar uma proposta de apresentação de conteúdo que atenda diversos níveis educacionais, buscando maneiras em que os estudantes adquiram uma compreensão sólida e progressiva da Geometria Analítica.

3.1 CONCEITOS GEOMÉTRICOS

“In the logical development of any branch of mathematics, each definition of a concept or relation involves other concepts and relations. Therefore the only way to avoid a vicious circle is to allow certain primitive concepts and relations (usually as few as possible) to remain undefined¹.” (SYNG, p. 32-34, apud COXETER, 1980, p.4).

Coxeter (1980, p. 4) faz a citação acima para se referir de maneira similar que para comprovar proposições são necessárias outras proposições e, certamente, proposições primitivas. As proposições primitivas são referências aos axiomas, ou seja, são aceitas sem demonstrações. Porém, antes de apresentar a ideia de axioma se faz necessária a apresentação das ideias primitivas que dão origem aos estudos geométricos.

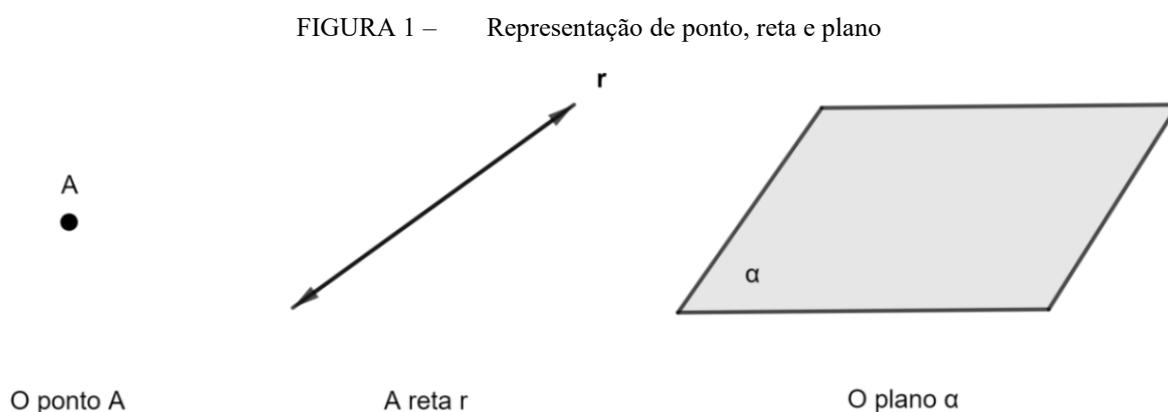
Iniciando com os conceitos primitivos, que são os elementos matemáticos que dão base para a construção do conhecimento geométrico, considera-se que “um conjunto \mathcal{E} de

¹ “No desenvolvimento lógico de qualquer ramo da matemática, cada definição de um conceito ou relação envolve outros conceitos e relações. Portanto, a única maneira de evitar um círculo vicioso é permitir que certos conceitos e relações primitivos (geralmente o mínimo possível) permaneçam indefinidos.” (Tradução da pesquisadora).

elementos denominados pontos, dotado de subconjuntos chamados retas e subconjuntos que têm o nome de planos². (CASTRUCCI, 1968, p. 73)

Com isso, entende-se que o plano é visto como o conjunto cujos seus elementos são os pontos e seus subconjuntos são as retas. Essas ideias não são demonstráveis, por isso estão no campo da intuição, são ideias intuitivas

Para esse estudo, a designação do ponto será dada por letras latinas maiúsculas (A , B , C , ...), a da reta por letras latinas minúsculas (a , b , c , ...) e a do plano por letras gregas minúsculas (α , β , γ , ...), tendo como representações o que é apresentado na FIGURA 1.



FONTE: Pesquisadora.

No caso da representação do plano, o estudante deve ter em mente que as dimensões não são limitadas. Porém, para a sua representação usa-se comumente a imagem de um polígono fechado para formar a ideia desse conceito. Essas ideias intuitivas são fundamentais para Geometria e são formalizadas nos estudos de Euclides.

Euclides, um matemático grego do século III a.C., é amplamente reconhecido como o "pai da geometria" devido à sua obra "Os Elementos," uma coleção de treze livros que sistematiza o conhecimento geométrico da época. A parte inicial da obra é dedicada aos cinco axiomas ou postulados que servem como os fundamentos da geometria euclidiana.

Em relação aos axiomas, Neto (2013, p. 2) apresenta como “uma propriedade imposta como verdadeira”, compreendendo que a comprovação é dispensável por ser intuitiva, que é evidente por si mesma.

Os escritos de Euclides foram um grande marco à introdução do método axiomático presente nos estudos matemáticos, contribuindo de forma significativa à Geometria e a

² Grifo do próprio autor.

Geometria Analítica. Esse método consiste em estabelecer um conjunto de proposições que são admitidas como verdadeiras sem demonstrações algébricas.

De acordo com Morgado, Wagner e Jorge (2008, p. 5), “o conjunto de proposições que servem de fundamento a uma ciência é seu SISTEMA DE AXIOMAS³”. Logo, sua utilização “é uma das características fundamentais da Matemática como ciência” (NETO, 2013, p. 2).

O Sistema Axiomático foi muito estudado pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1942), o qual compôs um sistema de axiomas, que hoje é referenciado nos estudos da Matemática. Hilbert (2003, p. 1), escreve:

“Podemos dividir os axiomas da geometria em cinco grupos; exprimindo cada um destes grupos, por si só, certos factos fundamentais da nossa intuição que estão naturalmente associados. Designamos do seguinte modo estes grupos de axiomas:

I	1-8	Axiomas da <i>Incidência</i>
II	1-4	Axiomas da <i>Ordem</i>
III	1-5	Axiomas da <i>Congruência</i>
IV		Axiomas das <i>Paralelas</i>
V	1-2	Axiomas da <i>Continuidade</i> ”.

Os axiomas são base para as deduções e demonstrações de outras verdades matemáticas, em específico nesse estudo para a Geometria.

Para a continuidade dos estudos da Geometria Analítica, é imperativo abordar outros conceitos fundamentais da Geometria que são essenciais para uma compreensão aprofundada e eficaz. Entre esses conceitos, destaca-se o estudo detalhado da reta, que desempenha um papel crucial na Geometria Analítica, dando base para os estudos posteriores.

3.2 A RETA

Não há como adentrar nos estudos ditos próprios da Geometria Analítica sem perpassar pelo conceito de reta, pois é o que sustenta a definição de analítica como o estudo da Geometria sobre um plano formado por retas em sentidos perpendiculares.

A reta é um dos elementos mais básicos e importantes na Geometria, servindo como fundamento para a compreensão de diversas outras figuras e conceitos geométricos. Na Geometria, o estudo da reta envolve a análise de suas propriedades, como inclinação, intersecção e paralelismo, bem como a compreensão de suas equações e representações

³ Destaque dos próprios autores.

gráficas. A reta também é essencial para a compreensão de relações espaciais e para a derivação de outros conceitos, como planos e ângulos.

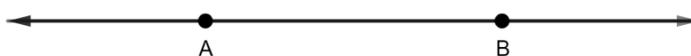
Em Geometria Analítica, o estudo da reta é expandido para incluir sua representação em coordenadas cartesianas, a formulação de suas equações (tanto na forma ponto-declividade quanto na forma geral), e a análise de suas interseções com outras retas e curvas. Além disso, a compreensão completa da reta facilita o estudo de figuras mais complexas, como cônicas e outras curvas, que são essenciais em diversas aplicações práticas da Geometria Analítica, incluindo otimização, modelagem matemática e engenharia.

Para estabelecer o conceito de reta, se faz necessário o estudo dos axiomas de incidência. Os axiomas deste primeiro grupo composto por Hilbert (2003, p. 1) estabelecem entre os elementos do conjunto \mathcal{E} uma incidência, ou seja, referem-se à ocorrência, acontecimento e/ou existência nas relações entre o ponto, a reta e o plano.

“[A – 1] Para cada dois pontos A, B há sempre uma reta que está associada com cada um dos dois pontos A, B .
 [A – 2] Para dois pontos A, B não há mais do que uma reta que está associada com cada um dos dois pontos A, B .
 [A – 3] Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta.” (HILBERT, 2003, p. 1)

Os axiomas mostram que a reta tem uma relação direta com pontos. Em resumo dos axiomas tem-se, por exemplo, que por dois pontos distintos, A e B , pertencentes ao plano é traçado uma única reta denominada reta r , conforme FIGURA 2.

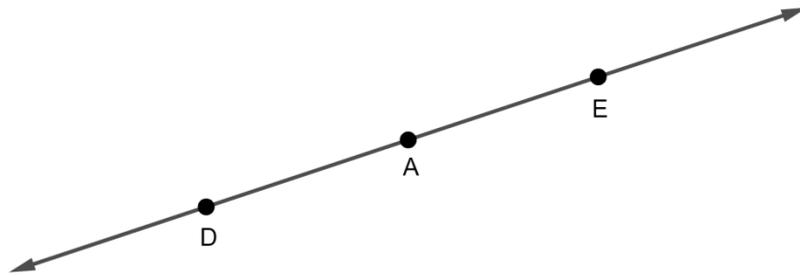
FIGURA 2 – Representação da reta



FONTE: Pesquisadora.

A notação, sendo a reta r definida por tais pontos citados, é dada por $r = \overleftrightarrow{AB}$. E com os dois axiomas de incidência pode-se então definir características da relação entre ponto e reta, como o fato de que três pontos podem estar sobre uma mesma reta, sendo caracterizados como pontos alinhados.

FIGURA 3 – Três pontos alinhados sobre uma reta



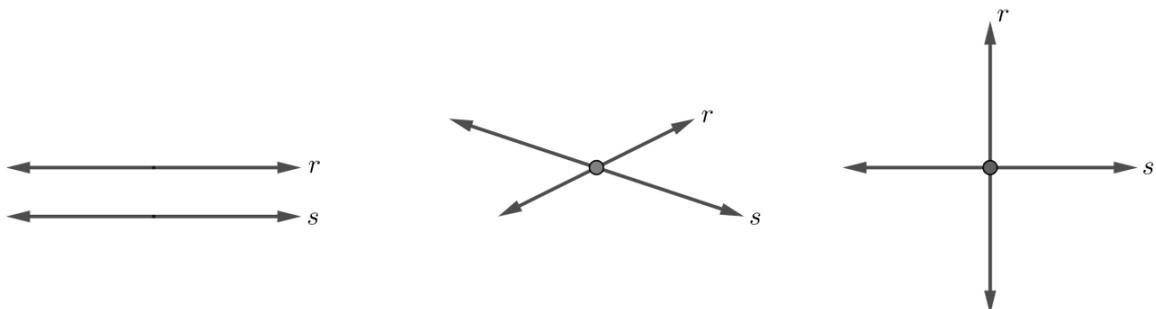
FONTE: Pesquisadora.

Ao observar a FIGURA 3, nota-se que os pontos D , A e E são pertencentes a uma mesma reta por estarem alinhados, ou por estarem alinhados pertencem a uma mesma reta. Isso traz uma compreensão à definição apresentada por Gerônimo e Franco (2003, p. 8),

DEFINIÇÃO 3.1: Se três (ou mais) pontos estão sobre uma mesma reta, é denominado que eles são *colineares*⁴.

Tendo a ideia intuitiva de reta e os axiomas, há a percepção do estudante que pode haver relações existentes entre duas ou mais retas, observando determinadas características de posicionamento entre elas.

FIGURA 4 – Algumas posições entre duas retas



FONTE: Pesquisadora.

Analisando a FIGURA 4, com base nos axiomas de Hilbert (2003, p. 1), há percepção de que se a intersecção de duas retas contiver pelo menos dois pontos distintos, então essas retas não serão distintas, o que é uma contradição. Portanto, as retas se

⁴ Destaque dos próprios autores.

interceptam no máximo em um ponto. Com isso, por Gerônimo e Franco (2003, p. 9), apresenta-se a seguinte proposição:

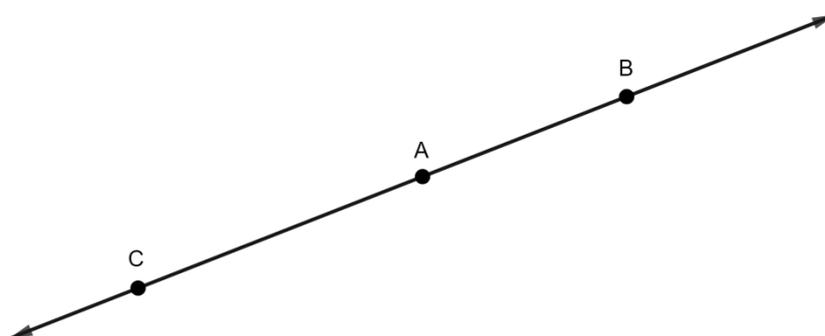
PROPOSIÇÃO 3.2: Dadas duas retas distintas, elas possuem no máximo um ponto de intersecção.

Entende-se que entre duas retas distintas haverá somente duas possibilidades, a de terem um ponto em comum ou a de não terem nenhum ponto em comum. Assim, podem ser retomados os conceitos da classificação das posições relativas entre duas retas. Toma-se como uma retomada, pois são conceitos estudados nos anos finais do ensino fundamental brasileiro. Com isso, segue a definição:

DEFINIÇÃO 3.3: Duas retas são *paralelas* se não se interseccionam e são coplanares⁵, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas. E duas retas distintas que se interseccionam são denominadas retas *concorrentes*.

A partir dos conhecimentos apresentados e relacionando com o terceiro axioma de incidência, devem ser retomados os conhecimentos sobre partes de uma reta. Sendo fato que há pontos pertencentes a uma reta e que uma reta é formada por pelo menos dois pontos, analisa-se que um ponto pode demarcar a divisão de uma reta em duas partes.

FIGURA 5 – Representação de pontos que dividem a reta em partes



FONTE: Pesquisadora.

⁵ Retas coplanares são aquelas que se encontram no mesmo plano geométrico, ou seja, compartilham uma mesma superfície bidimensional, de modo que, se desenhar ambas, elas podem ser completamente contidas dentro de um único plano.

É perceptível na FIGURA 5 que, ao tomar o ponto A como referência, existe uma parte da reta que está no sentido do ponto B e outra parte que está no sentido do ponto C . Conforme Muniz Neto (2013, p. 4), esse conhecimento gera a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.4: Um ponto A , situado sobre uma reta r , a divide em duas partes, quais sejam, as *semirretas* de origem A .

Sendo B e C pontos pertencentes a r , um em cada um das tais partes, denota-se as semirretas de origem A por \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} . E tomando os pontos A e B como referência, outro fato perceptível é que eles delimitam outra parte da reta

FIGURA 6 – Representação de parte da reta limitada pelos pontos A e B



FONTE: Pesquisadora.

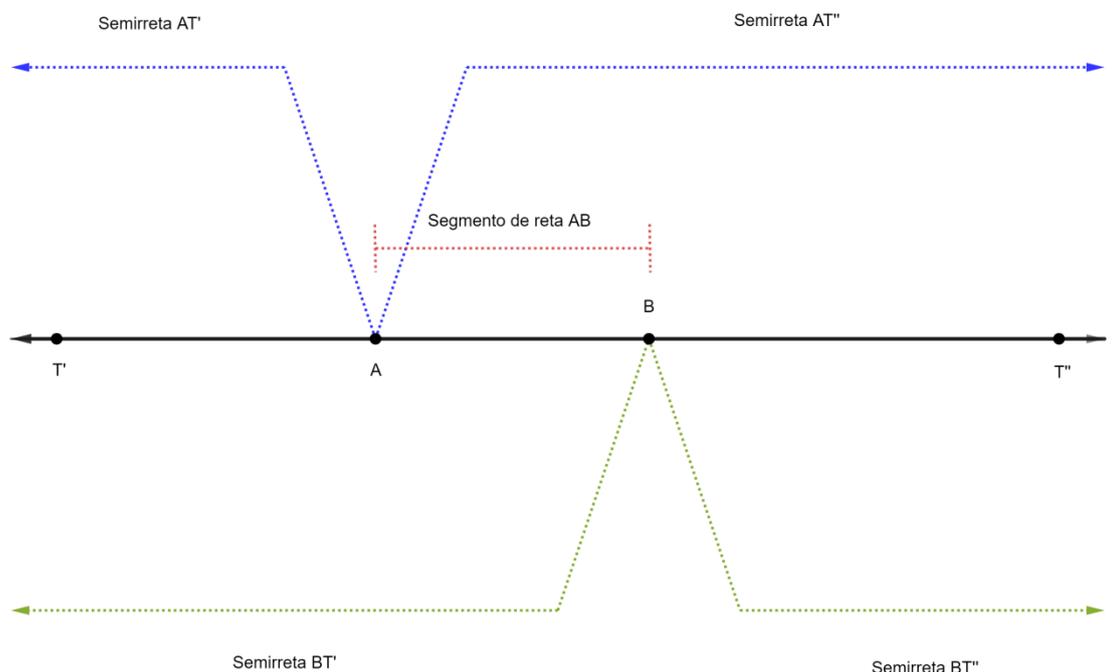
Por Muniz Neto (2013, p. 4) sobre a análise de pontos colineares, gera-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.5: Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r , o *segmento retilíneo* AB , ou apenas *segmento* AB , é a porção da reta r situada de A a B .

A FIGURA 6 representa o segmento de reta limitado pelos pontos A a B , que é usualmente denotado por \overline{AB} .

Trazendo a imagem como um recurso para melhor dar sentido e compreensão ao conhecimento matemático do estudante, a representação das partes de uma reta pode ser esquematizada conforme FIGURA 7

FIGURA 7 – Partes de uma reta



FONTE: A pesquisadora.

Com os conceitos de Geometria retomados, utilizando as imagens como base para um melhor sentido no conhecimento, segue para uma revisitação e ampliação nos estudos específicos da Geometria Analítica, iniciando pelo sistema de coordenadas.

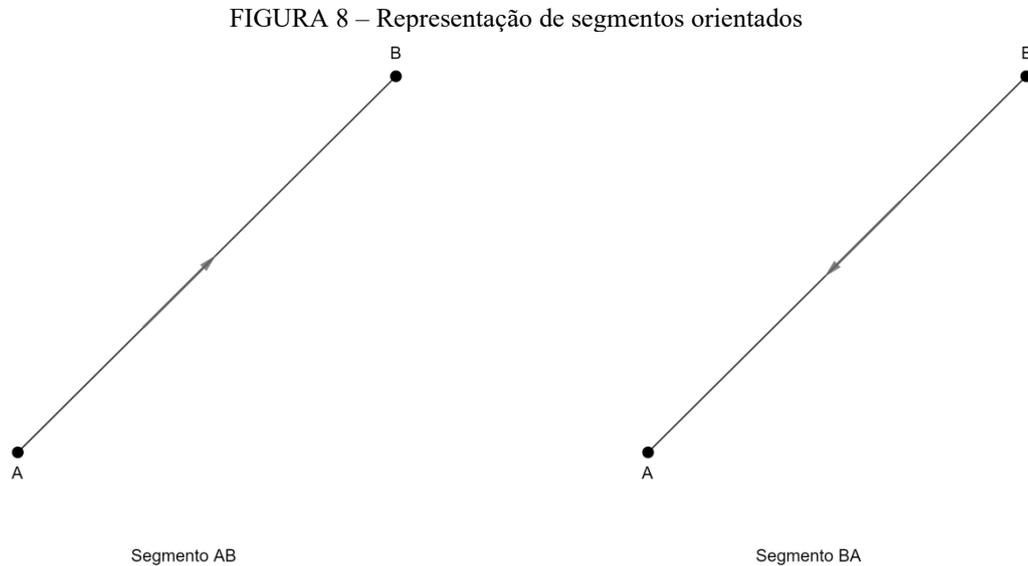
3.3 SISTEMA DE COORDENADAS

O sistema de coordenadas é o que caracteriza a Geometria Analítica, e foi desvelado pela primeira vez em 1637, pelo matemático francês René Descartes (1596 – 1650), sendo este o motivo de a Geometria Analítica ser frequentemente denominada *Geometria Cartesiana*.

Para o estudo matemático dessa área, “o estudante deve ter em mente que agora ele está seguindo um curso de *Geometria Analítica* e que a solução de um problema geométrico não terá sido efetuada por métodos *analíticos*⁶ a menos que tenha sido empregado um sistema de coordenadas” (LEHMANN, 1982, p. 9). Desta maneira, segue-se o estudo tendo uma nova análise de conceitos geométricos já estudados.

⁶ Destaque do próprio autor.

A partir de um segmento de reta definido com pontos extremos A e B , pode ser pensado na sua orientação, ou seja, se esse segmento está no sentido de A para B ou se está no sentido de B para A .



FONTE: Pesquisadora.

A FIGURA 8 mostra exemplo de representação de segmentos orientados, o segmento AB e o segmento BA . No primeiro caso, o extremo A é denominado origem e o ponto B extremidade, sendo denotado por \overline{AB} . E no segundo caso, o segmento está orientado de B para A , sendo então o ponto B é a origem e o ponto A o extremo, designado por \overline{BA} . Assim, compreende-se que o sentido de um segmento retilíneo orientado é sempre indicado escrevendo-se primeiro a origem.

Com base nos escritos de Lehmann (1982, p. 1), tem-se:

DEFINIÇÃO 3.6: O segmento retilíneo AB está *orientado*⁷ de A para B quando se inclui um sentido ou orientação a esse segmento.

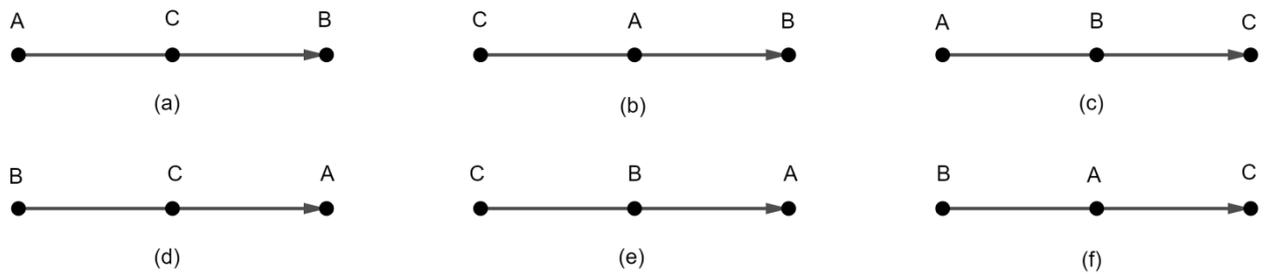
Observa-se que nos estudo de Geometria, o comprimento de \overline{AB} e \overline{BA} são iguais, dizem-se então congruentes, $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Entretanto, para a Geometria Analítica se faz uma distinção entre os *sinais* destes comprimentos, especificando arbitrariamente que um

⁷ Destaque do próprio autor.

segmento com certa orientação tem sentido *positivo*, ao mesmo tempo em que outro segmento opostamente orientado terá sentido *negativo*. Neste caso, $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Ao considerar três pontos distintos, A , B e C , pertencentes a uma mesma reta de orientação positiva, da esquerda para a direita, pode ser analisado por representação as possibilidades de posições entre esses pontos.

FIGURA 9 – Possibilidades de posições de três pontos colineares em um segmento



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Conforme FIGURA 9, haverá seis possibilidades de posições para estes pontos. Com isso, considerando apenas segmentos retilíneos orientados com comprimento positivo, há as seguintes relações:

- (a) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$
- (b) $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$
- (c) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
- (d) $\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}$
- (e) $\overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA}$
- (f) $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$

Porém, uma única relação é fundamental:

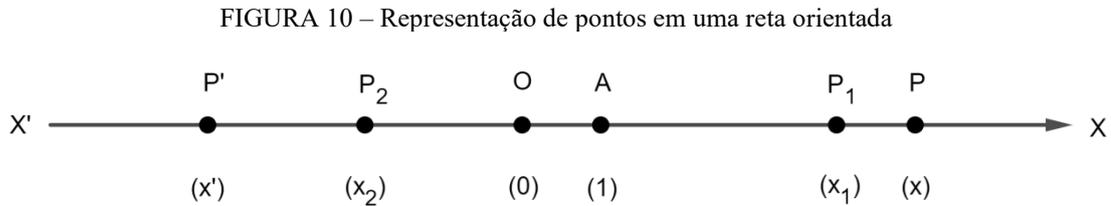
$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}. \quad (1)$$

A relação (1) indica a relação existente entre quaisquer três pontos pertencentes a um segmento retilíneo orientado, que a medida do comprimento de um segmento equivale a soma das medidas do segmento da origem até um ponto do segmento com o segmento formado desse ponto ao extremo.

Assim, com essas informações, pode ser estudado o *Sistema Linear de Coordenadas*.

3.3.1 SISTEMA LINEAR DE COORDENADAS

Para início, representa-se $\overrightarrow{X'X}$ de orientação positiva, ou seja, seguindo da esquerda para a direita, e alguns pontos pertencentes a essa reta.



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Pela representação gráfica e por outra área de conhecimento da Matemática, como o eixo temático números, compreende-se que cada número tenha uma relação bionívoca com um ponto, ou seja, cada ponto corresponde a um, e apenas um, ponto; e cada ponto corresponde a um, e apenas um, número real.

Segundo Moise e Downs (1971, p. 27), para o estudo da distância entre pontos é necessário adotar uma unidade de medida. Conforme FIGURA 10, tomando o ponto O como um ponto fixo dessa reta, denominado *origem*, e A um ponto distinto de O e a direita do mesmo, então adota o comprimento de \overline{OA} como a unidade de comprimento.

Sendo P um ponto qualquer da $\overrightarrow{X'X}$ e posicionado a direita de O , tal que o segmento retilíneo orientado OP tem um comprimento *positivo* e contém x vezes o comprimento adotado como unitário, é dito então que P *corresponde* ao número *positivo* x . De modo análogo, sendo P' um ponto qualquer da $\overrightarrow{X'X}$ e posicionado a esquerda de O , tal que o segmento retilíneo orientado OP' tem um comprimento *negativo* de x' unidades, diz-se então que P' *corresponde* ao número *negativo* x' .

Seguindo este pensamento, se tem que qualquer número real pode ser representado por um ponto sobre uma reta orientada e, reciprocamente, qualquer ponto sobre uma reta orientada representa um número real, cujo valor numérico é igual ao comprimento do segmento da origem ao ponto indicado.

Com este esquema construído no qual é estabelecida uma correspondência bionívoca entre os pontos geométricos e números reais é denominado como *sistema de coordenadas*.

Há o caso particular, quando todos os pontos pertencem à mesma reta é denominado *sistema unidimensional de coordenadas* ou *linear*. Tomando como exemplo de sistema linear da FIGURA 10, denomina-se $\overleftrightarrow{X'X}$ de *eixo* e de *origem* o ponto O . E o número real x , correspondente ao ponto P , sendo referido como *coordenada* de P e representado por (x) . Assim, a origem O tem coordenada (0) e o ponto A tem coordenada (1) . Com isso, é dito que o ponto P , de coordenada (x) , é a *representação geométrica* ou *gráfica* do número real x , e a coordenada (x) é a *representação analítica* do ponto P ; comumente escritos $P(x)$.

Em Geometria Analítica um ponto é dado quando sua coordenada é conhecida. E uma vez escolhida a unidade de comprimento, a cada par de pontos, P_1 e P_2 , corresponderá um número que dirá o quão distante está P_1 de P_2 , o que é formalizado, em Moise e Downs (1971, p. 27), pelo seguinte postulado:

POSTULADO 3.7 (O Postulado da Distância): a todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.

A partir disso, dados $P_1(x_1)$ e $P_2(x_2)$, conforme FIGURA 10, a análise do comprimento do segmento retilíneo determinado por dois pontos, conforme a relação, é dado por:

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}.$$

Como $\overline{OP_1} = x_1$ e $\overline{OP_2} = x_2$, vem:

$$x_1 = \overline{P_1P_2} = x_2.$$

Logo, organizando a equação:

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1.$$

De forma geral, o comprimento do segmento retilíneo orientado é obtido subtraindo-se a coordenada do ponto inicial da coordenada da extremidade. Assim, a *distância* entre dois pontos colineares é definida como o valor numérico ou *absoluto* do comprimento do segmento retilíneo determinado por estes dois pontos. Representando a distância por d , então se tem:

$$d = |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1|,$$

ou

$$d = |\overline{P_2P_1}| = |x_1 - x_2|.$$

Segundo Lehmann (1982, p. 4), este resultado é formalizado pelo seguinte teorema:

TEOREMA 3.8: Num sistema linear de coordenadas o comprimento do segmento retilíneo orientado determinado por dois pontos dados é obtido, tanto em grandeza como em sinal, subtraindo-se a coordenada do ponto inicial da coordenada da extremidade.

Para melhor compreensão do estudante, apresenta-se a seguir exemplos de aplicação do **TEOREMA 3.8**.

EXEMPLO 3.9: Determinar a distância entre os pontos $P_1(7)$ e $P_2(19)$.

Solução: Sendo P_1 e P_2 pontos dados, vem:

$$d = |7 - 19|$$

$$d = |-12|$$

$$d = 12$$

Portanto, a distância entre os pontos é de 12 u.c.

EXEMPLO 3.10: Determinar a distância entre os pontos $P_1(-9)$ e $P_2(-5)$.

Solução: Sendo dados os pontos, tem-se:

$$d = |-9 - (-5)|$$

$$d = |-9 + 5|$$

$$d = |-4|$$

$$d = 4$$

Portanto, a distância entre P_1 e P_2 é de 4 u.c.

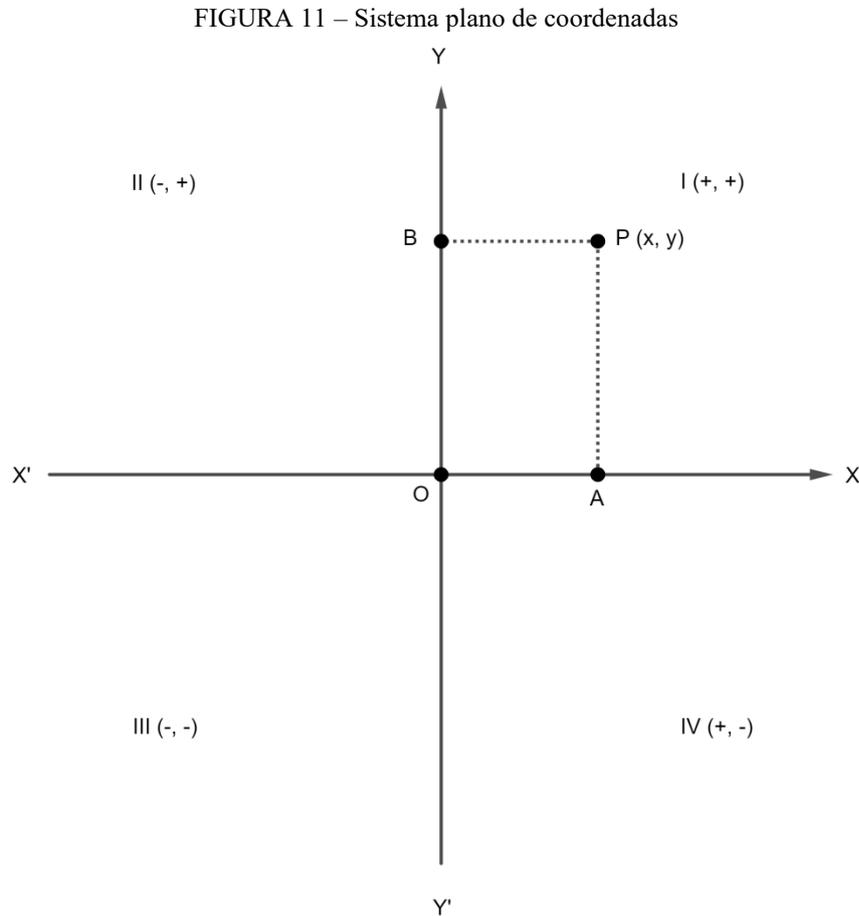
Após a análise dos conceitos vistos nessa sessão, compreende-se que os estudantes terão base para uma ampliação de conceitos. Pois, um sistema linear restringe as investigações analíticas de propriedades geométricas, sendo então necessário apresentar um plano de coordenadas.

3.3.2 SISTEMA PLANO DE COORDENADAS

A introdução de um plano de coordenadas, também conhecido como plano cartesiano, é um passo essencial para ampliar o escopo das investigações geométricas. Este sistema facilita a análise de relações geométricas e algébricas de maneira integrada, permitindo a aplicação de técnicas analíticas a uma variedade de problemas geométricos.

Além disso, o plano cartesiano serve como base para o desenvolvimento de conceitos mais avançados, como a análise de cônicas, transformações geométricas, e o estudo de vetores e suas aplicações.

Pensando em um sistema em que o ponto se move livremente em todas as direções, tem-se a necessidade de utilizar em conjunto dois sistemas lineares de coordenadas. Adotando a mesma unidade de medida para os dois eixos e com origem coincidentes com a intersecção das retas do par fixado, têm-se duas retas orientadas: $\overleftrightarrow{X'X}$ e $\overleftrightarrow{Y'Y}$. Essas retas são denominadas *eixos coordenados*, construídas mutuamente perpendiculares, das quais $\overleftrightarrow{X'X}$ tem denominação de *eixo das abscissas* e $\overleftrightarrow{Y'Y}$ de *eixo das ordenadas*; e O , ponto de intersecção de ambos, é a *origem*, conforme FIGURA 11.



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Esse sistema em que um ponto pode ser representado em movimento em várias direções é denominado *sistema bidimensional* ou *plano de coordenadas*.

Barsotti (1972, p. 35), escreve que o plano de coordenadas retangulares é uma correspondência biunívoca entres dois pontos pertencentes a retas orientadas distintas e não paralelas. Dessa forma,

DEFINIÇÃO 3.11: O *sistema plano de coordenadas* ou *sistema de coordenadas cartesianas* estabelece uma correspondência entre os pontos próprios de um plano e os pares de números reais fixando-se no plano um par de retas orientadas, não paralelas, sobre cada uma das quais se introduz um *sistema linear de coordenadas* ou *sistema de abscissas*.

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões organizadas numericamente e no sentido anti-horário, como mostra a FIGURA 11. O eixo das abscissas tem orientação positiva à direita e o eixo das ordenadas tem orientação positiva para cima. Adaptando para o estudo, por Valladares (1990, p. 4) tem-se,

DEFINIÇÃO 3.12: O eixo $\overleftrightarrow{X'X}$ é conhecido como *eixo das abscissas* e o eixo $\overleftrightarrow{Y'Y}$, como *eixo das ordenadas*. Estes eixos dividem o plano em quatro quadrantes.⁸

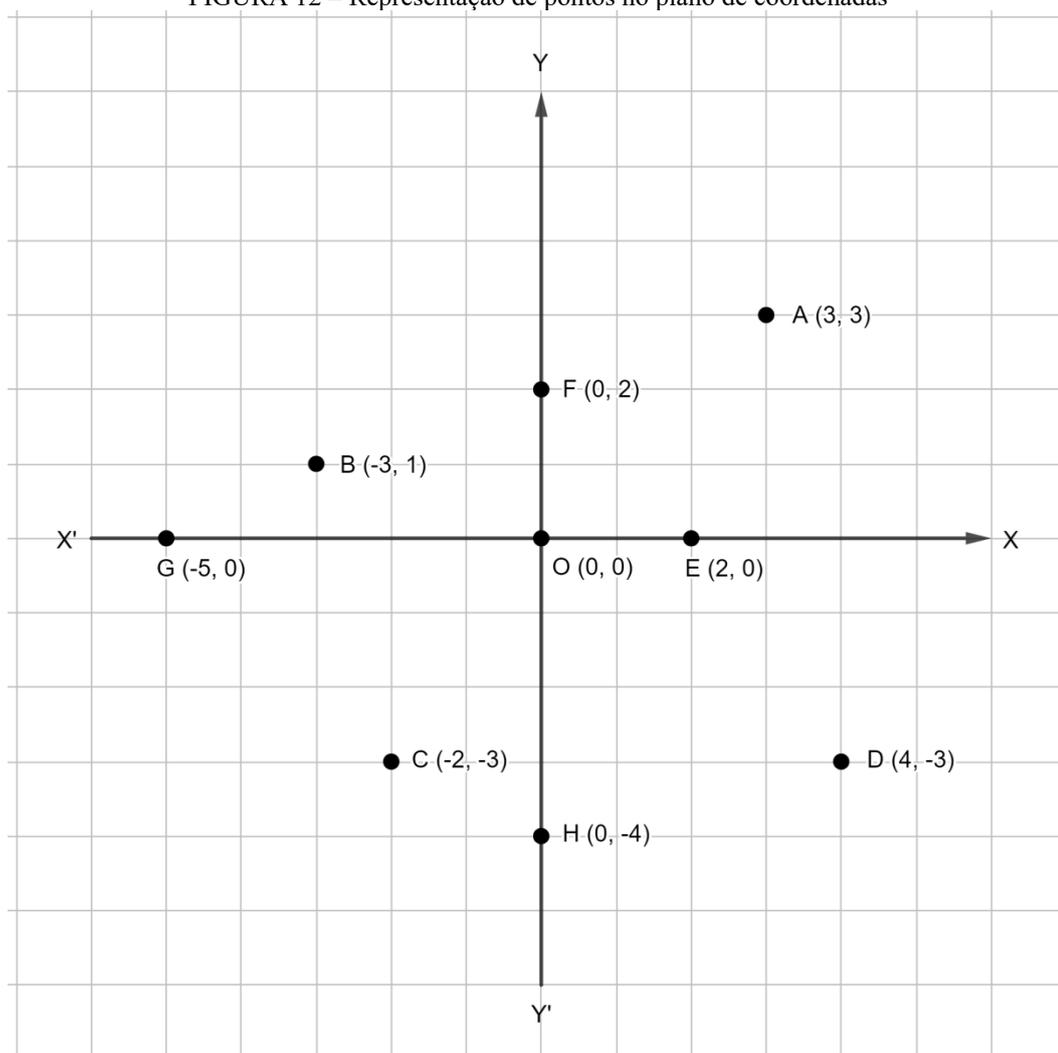
É inteligível que cada ponto P do plano coordenado tem um e apenas um par de coordenadas (x, y) . E pelo pensamento inverso, qualquer par de coordenadas (x, y) corresponde a um e apenas um ponto no plano coordenado, nessa caso, o ponto P .

No sistema de coordenadas cartesianas, um ponto é marcado por um par ordenado (x, y) . Para localizar o ponto, começa-se na origem $(0, 0)$. Desloca-se horizontalmente ao longo do eixo da abscissas: à direita se x for positivo e à esquerda se for negativo. Em seguida, move-se verticalmente ao longo do eixo das ordenadas: para cima se y for positivo e para baixo se for negativo. O ponto onde essas duas posições se encontram representa as coordenadas (x, y) no plano.

Isso fica mais bem compreendido com exemplos práticos de representações de pontos no plano de coordenadas, onde cada ponto específico ilustra como as coordenadas x e y determinam sua posição exata.

⁸ Destaque do próprio autor.

FIGURA 12 – Representação de pontos no plano de coordenadas



FONTE: Pesquisadora.

A localização de um ponto através de sua coordenada é denominada de gráfico do ponto. Conforme FIGURA 12, o ponto *A* tem localização do seu gráfico no *quadrante I* ou *primeiro quadrante*, pois está 3 unidades à direita e 3 unidade acima da origem, tendo coordenada $(3, 3)$; e o ponto *C* por estar a 2 unidades à esquerda e 3 unidades abaixo da origem tem seu gráfico no *quadrante III* ou *terceiro quadrante*.

Além disso, há pontos com seus gráficos localizados sobre o eixo das abscissas por terem sua ordenada 0, como $E(2, 0)$ e $G(-5, 0)$; e há outros com gráficos sobre o eixo das ordenadas, por exemplo, $F(0, 2)$ e $H(0, -4)$, devido à abscissa ser 0; e isso reduz o sistema plano de coordenadas ao sistema linear de coordenada. Portanto, o sistema linear de coordenadas é um caso especial do sistema plano de coordenadas.

De modo geral, o ponto com coordenada (x, y) é distinto do ponto com coordenada (y, x) , quando $x \neq y$, o que se torna importante escrever as coordenadas na ordem adequada,

no qual se tem em primeiro lugar a abscissa e em segundo a ordenada. Este é o motivo pelo qual um par de coordenadas no plano é denominado um *par ordenado* de números reais. Com isso, conforme Lehmann (1982, p. 6), “o sistema de coordenadas retangulares no plano estabelece uma correspondência biunívoca entre cada ponto do plano e um par ordenado de números reais⁹”.

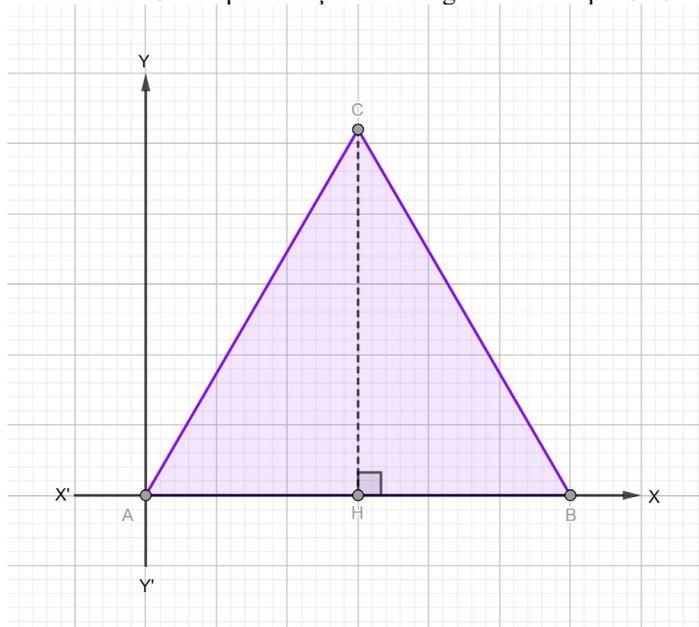
Para um estudante inicial das ideias de Geometria Analítica, o gráfico será de fácil compreensão ao utilizar a *malha quadrangular*, pois está dividida em quadrados de comprimentos iguais a unidade adotada. Observando alguns exemplos,

EXEMPLO 3.13: Um triângulo equilátero de lado com comprimento de 6 unidades, tem dois de seus vértices localizados sobre o eixo das abscissas, sendo o gráfico de um deles exatamente na origem, e o terceiro localizado no primeiro quadrante. Determinar as coordenadas dos vértices e sua área.

Solução: Sendo ABC o triângulo referido na situação, assume posição no sistema plano de coordenadas conforme FIGURA 13.

Sendo A o ponto de gráfico sobre a origem, então sua coordenada é $(0,0)$, logo $A(0,0)$. E sendo B o segundo ponto sobre o eixo das abscissas também tem ordenada 0, e como $\overline{AB} = 6$ então a sua abscissa é 6, logo $B(6,0)$.

FIGURA 13 – Representação do triângulo do exemplo 3.13



FONTE: Pesquisadora.

⁹ Destaque do próprio autor.

Traçando a altura \overline{BH} em relação ao lado \overline{AB} do triângulo, da Geometria tem-se que H é o ponto médio de \overline{AB} . Portanto a abscissa de H é $\frac{6}{2} = 3$. E sendo \overline{CH} paralelo ao eixo das ordenadas, então a abscissa de C também é 3. A ordenada de C pode ser encontrada utilizando o Teorema de Pitágoras, assim:

$$(\overline{CB})^2 = (\overline{CH})^2 + (\overline{HB})^2$$

$$(6)^2 = (\overline{CH})^2 + (3)^2$$

$$(\overline{CH})^2 = 27$$

$$\overline{CH} = 3\sqrt{3}$$

Assim, a coordenada de C é $3\sqrt{3}$. Logo, $C(3, 3\sqrt{3})$.

Portanto, as coordenadas dos vértices são $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ e $C(3, 3\sqrt{3})$.

A progressão dos estudos de Geometria Analítica demonstra que equações e processos algébricos podem ser vantajosamente empregados nas resoluções de situações-problemas da Geometria. Inversamente, os métodos da Geometria Analítica podem ser usados para obter uma representação de equações e relações funcionais.

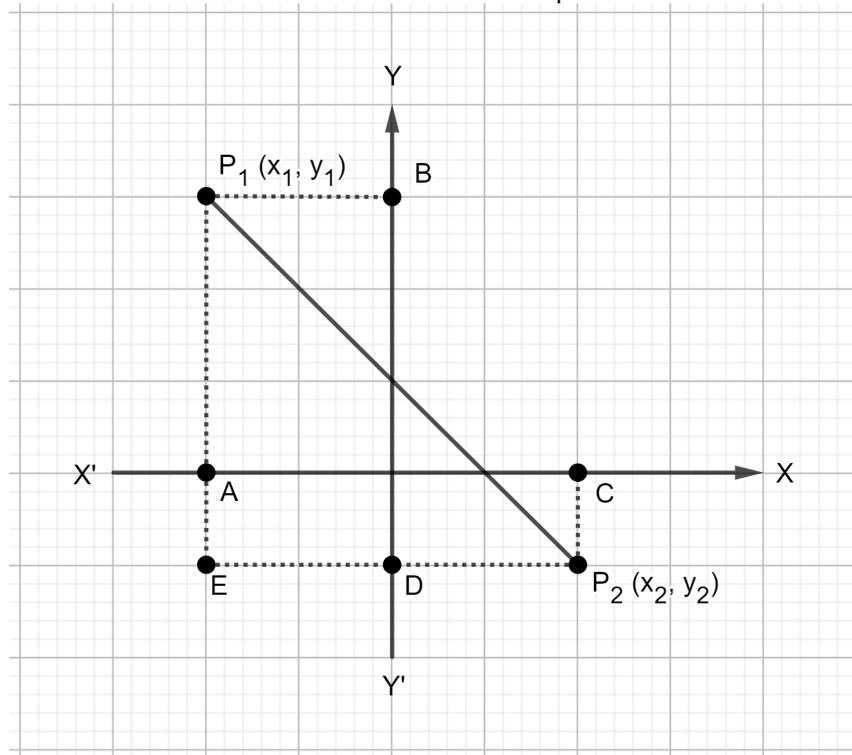
Uma grande variedade de situações-problemas pode ser resolvida muito facilmente por meio do processo uniforme associado com o uso de um sistema de coordenadas. Com os descritos até aqui, “o estudante deve ter em mente que agora ele está seguindo um curso de Geometria Analítica e que a solução de um problema geométrico não terá sido efetuada por métodos *analíticos* a menos que tenha sido empregado um sistema de coordenadas” (LEHMANN, 1982, p. 9).

Segue-se na ampliação de conhecimentos para a análise de distância entre dois pontos dados em um sistema plano de coordenadas.

3.4 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

A distância entre dois pontos é o número dado pelo o postulado da distância, **POSTULADO 3.7**. Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer dados, como representado na FIGURA 14, almeja-se determinar a distância d entre P_1 e P_2 , calculando $d = |\overline{P_1P_2}|$.

FIGURA 14 – Distância entre dois pontos dados



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Analisando, conforme FIGURA 14, é traçado de P_1 e P_2 retas perpendiculares a ambos os eixos coordenados, sendo E a interseção entre $\overline{P_1A}$ e $\overline{P_2D}$, formando o triângulo P_1EP_2 . E sendo o triângulo retângulo, pode ser aplicado o Teorema de Pitágoras para o estudo da distância d . Assim:

$$d^2 = (\overline{P_1P_2})^2$$

$$d^2 = (\overline{P_2E})^2 + (\overline{EP_1})^2 \quad (2)$$

Sendo $A(x_1, 0)$, $B(0, y_1)$, $C(x_2, 0)$ e $D(0, y_2)$, então pelo **TEOREMA 3.8** vem:

$$\overline{P_2E} = \overline{CA} = x_1 - x_2. \quad (3)$$

E, da mesma forma:

$$\overline{EP_1} = \overline{DB} = y_1 - y_2. \quad (4)$$

Substituindo as relações (3) e (4) na relação (2), obtém-se:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (5)$$

Desse estudo da distância entre pontos, tem-se que a relação (5) fornece uma base sólida para análises mais abrangentes, importante para o entendimento de propriedades geométricas e algébricas no plano cartesiano.

Assim, conforme Lehmann, (1982, p. 10), segue o seguinte teorema:

TEOREMA 3.14: A distância d entre dois pontos conhecidos, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, é dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

A demonstração do **TEOREMA 3.14** é para casos gerais, pois não se faz referência aos quadrantes em que os pontos dados estão situados. A posição de um ponto num quadrante particular é sempre indicada pelos sinais de suas coordenadas.

EXEMPLO 3.15: Analise se os pontos $A(-2, -1)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 6)$ e $D(-4, 5)$ são vértices de um retângulo.

Solução: Tendo conhecimento que um retângulo tem seus pares opostos de lados congruentes, então para essa situação analisa a distância entre pontos. Assim:

$$d_{AB} = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + [0 - (-1)]^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (6 - 0)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$d_{CD} = \sqrt{[-4 - (-1)]^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{DA} = \sqrt{[-2 - (-4)]^2 + (-1 - 5)^2} = 2\sqrt{10}$$

Como $d_{AB} = d_{CD}$ e $d_{BC} = d_{DA}$, então conclui que os pontos são vértices de um retângulo.

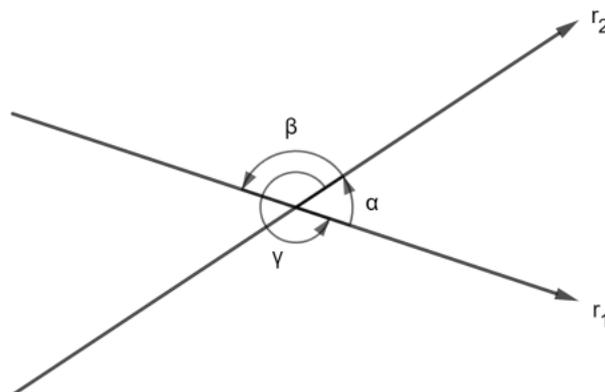
Para dar sentido ao aprendizado sobre retas, o estudante precisa compreender não apenas a importância da distância entre pontos conhecidos que definem uma reta, mas também reconhecer e analisar o comportamento relativo entre retas. Isso inclui entender o ângulo formado entre duas retas, o que é crucial para uma compreensão mais profunda das interações e propriedades geométricas.

3.5 ÂNGULOS

Para a Geometria, ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem, que determina dois setores angulares, um convexo e outro não convexo desde que as semirretas que o formam não sejam opostas. Em Geometria Analítica, o estudo de ângulos se faz necessário para a análise da declividade da reta.

Inicia-se o estudo pela análise dos ângulos formados entre duas retas orientadas, tomando como base a representação a seguir, conhecida por muitos estudantes por ser apresentada nos estudos dos anos finais do Ensino Fundamental.

FIGURA 15 – Ângulo entre duas retas concorrentes



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Quando duas retas, r_1 e r_2 , se interceptam são formados dois pares de ângulos opostos pelo vértice, o que torna ambígua a expressão “o ângulo entre duas retas”, pois tal ângulo pode ser α ou seu suplementar β , conforme FIGURA 15.

Para a Geometria Analítica, este conceito deve ser analisado levando em consideração a orientação das retas em estudo. Com isso, por Lehmann (1982, p. 13), tem-se:

DEFINIÇÃO 3.16: O ângulo entre duas retas orientadas é o ângulo cujos lados estão orientados desde o vértice.

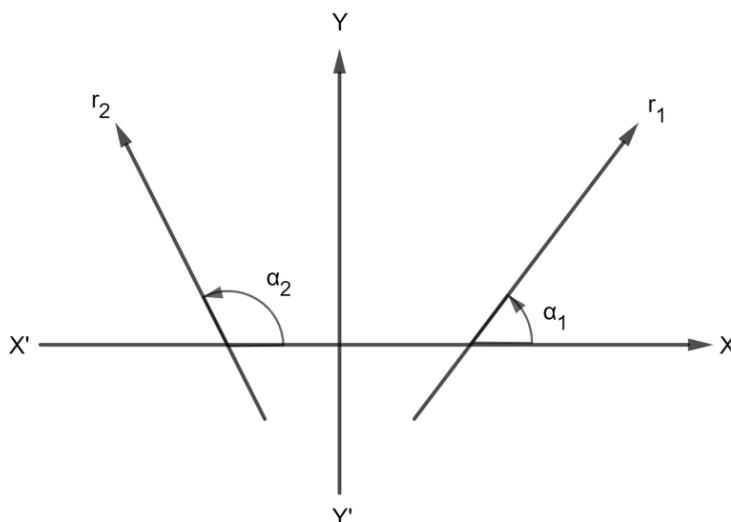
Pela FIGURA 15, as retas r_1 e r_2 são orientadas e o ângulo entre elas é definido como o ângulo α . Se, entretanto, uma destas retas é orientada no sentido inverso, o ângulo a ser considerado é o β . Para o caso de r_1 e r_2 serem paralelas então é dito que o ângulo entre elas é 0° quando têm a mesma orientação e 180° quando têm orientação oposta.

Uma observação que se faz com as retas orientadas da FIGURA 15 é a do ângulo $\gamma = 360^\circ - \alpha$ também satisfazer a definição, porém a análise nessa pesquisa irá considerar ângulo menor ou igual a 180° . Um ângulo tal como $\gamma > 180^\circ$ é denominado *ângulo reentrante*¹⁰.

¹⁰ O ângulo reentrante é um tipo de ângulo que mede mais que 180° , mas menos que 360° .

Para trazer a discussão que uma reta tem ângulo formado com o eixo das abscissas, apresenta-se a FIGURA 16.

FIGURA 16 – Representação do ângulo de inclinação de reta



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

A FIGURA 16 mostra que a inclinação da reta r_1 é α_1 e da reta r_2 é α_2 . Logo, é visto que o *intervalo de variação* do ângulo está entre 0° e 180° , ou seja, $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Com isso, por Lehmann (1982, p. 14), tem-se:

DEFINIÇÃO 3.17: O *ângulo de inclinação* de uma reta é o ângulo formado pelo eixo das abscissas e esta reta considerada com a orientação para cima do referido eixo.

Com a elucidação do conhecimento de ângulo de inclinação, o estudante terá base para entender a declividade de uma reta. De modo habitual e frequente, muitos autores denominam por m a declividade de uma reta. Donde se escreve:

$$m = \tan(\alpha).$$

Analisando, a declividade pode assumir *todos* os valores reais. Se o ângulo é agudo a declividade é positiva e a declividade terá valor negativo se o ângulo é obtuso, como no caso de α_1 e α_2 , respectivamente, na FIGURA 16. Qualquer reta coincidente ou paralela ao eixo das ordenadas será perpendicular ao eixo das abscissas e, assim, seu ângulo de inclinação será de 90° . Visto que não é definida $\tan(90^\circ)$, então a declividade de tal reta não existe. Portanto, estabelece que *qualquer reta perpendicular ao eixo das abscissas não tem declividade*.

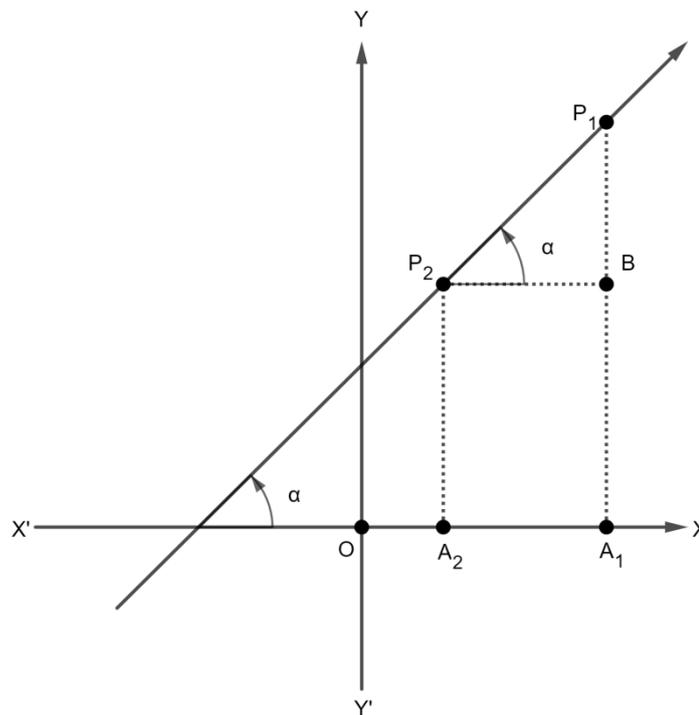
O que deve ficar claro ao estudante ao ser analisado que $\tan(90^\circ) = \infty$ é que essa sentença se refere ao fato de que à medida que o ângulo agudo α se aproxima do valor de 90° , a $\tan(\alpha)$ torna-se e permanece maior do que qualquer número positivo prefixado.

Com isso, por Lehmann (1982, p. 14), segue a definição:

DEFINIÇÃO 3.18: A *declividade* de uma reta é a tangente de seu ângulo de inclinação.

A partir do conceito, o estudante parte para o pensamento do cálculo da declividade de uma reta apresentando a ideia de um ângulo α ser ângulo de inclinação da reta que é determinada por P_1 e P_2 , representado na FIGURA 17.

FIGURA 17 – Representação do ângulo de inclinação de uma retadeterminada por dois pontos



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Traçando de P_1 e P_2 as perpendiculares $\overline{P_1A_1}$ e $\overline{P_2A_2}$, respectivamente, ao eixo das abscissas, e a partir de P_2 uma reta paralela em relação ao eixo das abscissas, interceptando $\overline{P_1A_1}$ em B , tem-se então que $\widehat{P_1P_2B} = \alpha$.

Sendo o triângulo P_1P_2B retângulo em B , então utilizando os conhecimentos de trigonometria tem-se:

$$m = \tan(\alpha) = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_2B}} \quad (6)$$

Como as coordenadas são $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, 0)$ e $B(x_1, y_2)$ então, pelo **TEOREMA 3.8**, vem:

$$\overline{BP_1} = y_1 - y_2 \quad \text{e} \quad \overline{P_2B} = \overline{A_2A_1} = x_1 - x_2 \quad (7)$$

Substituindo a relação (7) na relação (6) se obtém o resultado que,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Essas informações geram o teorema sobre a declividade da reta, segundo Lehmann (1982, p. 15), apresentado como:

TEOREMA 3.19: Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são dois pontos quaisquer distintos dados sobre uma linha reta, sua declividade é dada por:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2. \quad (8)$$

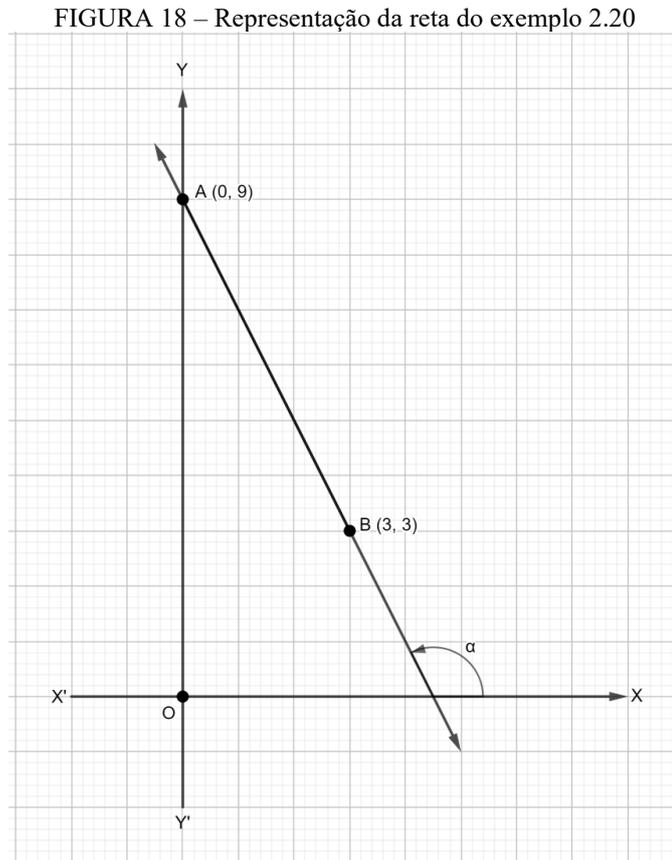
Observa-se que o valor de m dado pela relação (8) não é definido analiticamente para $x_1 = x_2$. A interpretação geométrica neste caso é que uma reta determinada por dois pontos distintos com iguais abscissas é paralela ao eixo das ordenadas e, portanto, não tem declividade.

Esse conceito é fundamental não apenas para a Geometria Analítica, mas também para diversas aplicações em Engenharia Civil, Arquitetura, Geologia, Topografia e outras áreas relacionadas, nas quais a compreensão da inclinação de uma reta ou superfície é crucial para o planejamento, projeto e análise de estruturas, terrenos, caminhos e outras características físicas do ambiente. Além disso, a noção de declividade é essencial para a realização de estudos de viabilidade, elaboração de mapas topográficos, definição de trajetórias para construções de estradas e ferrovias, bem como para a modelagem e simulação de processos naturais, como a erosão do solo e o escoamento de água.

Apresenta-se, com isso, um exemplo no qual o cálculo da declividade é essencial para compreender a inclinação de uma reta em relação aos eixos coordenados.

EXEMPLO 3.20: Calcular a declividade e o ângulo de inclinação da reta determinada pelos pontos $A(0, 9)$ e $B(3, 3)$.

Solução: Sendo a reta determinada pelos pontos indicados na situação representada na FIGURA 18.



FONTE: Pesquisadora.

Pelo **TEOREMA 3.19** tem que a declividade é dada por:

$$m = \frac{3-9}{3-0}$$

$$m = \frac{-6}{3}$$

$$m = -2$$

Com a declividade negativa, o ângulo de inclinação será obtuso. Assim, o ângulo de inclinação será dado por:

$$\tan(\alpha) = -2$$

$$\alpha = \arctan(-2)$$

$$\alpha = 116^{\circ}34'$$

Portanto, $\alpha = 116^{\circ}34'$.

Com o estudo da declividade e do ângulo formado entre retas desponta para a análise do comportamento entre retas, ou seja, a classificação das retas.

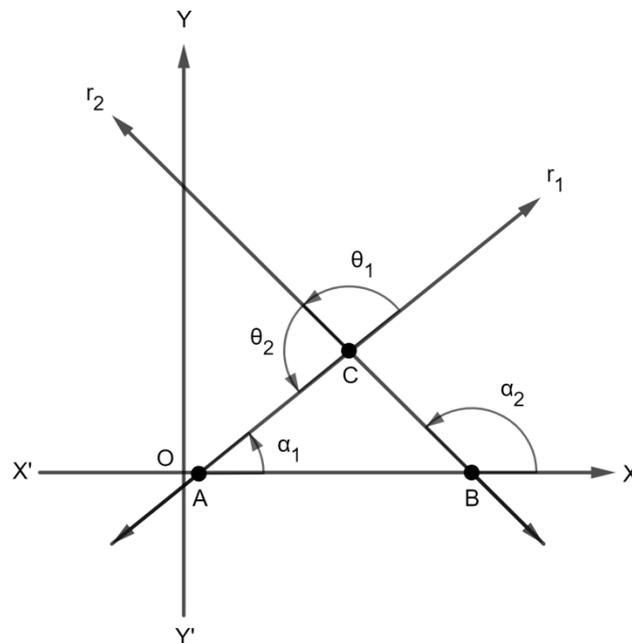
3.6 CLASSIFICAÇÃO DAS RETAS

O estudo da classificação das retas é um tema supostamente conhecido pelo estudante, pois sua ideia e conceito acerca apenas da posição relativa entre retas são estudados no ensino básico brasileiro.

Para o estudo específico da Geometria Analítica, a classificação das retas ocorre por uma comparação de suas posições, ou seja, verifica-se a partir da relação de posição existente entre duas retas em um mesmo espaço. E essa classificação, no estudo da Geometria Analítica, está diretamente ligada à declividade e, conseqüentemente, ao ângulo de inclinação de cada uma das retas.

Considerando duas retas, r_1 e r_2 , que se interceptam no ponto C e interceptam o eixo das abscissas em A e B , respectivamente, formando entre si os ângulos θ_1 e θ_2 , mostra-se ao estudante a representação da FIGURA 19 para elucidação.

FIGURA 19 – Relação entre duas retas no plano coordenado



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Os ângulos θ_1 e θ_2 são suplementares e identificados por um arco no sentido *anti-horário* ou *positivo*, conforme estudos da Trigonometria. Sendo denominada *reta origem* a

reta da qual parte o ângulo e *reta extremidade* a reta para qual o ângulo está orientado, então as declividades dessas retas são denominadas, respectivamente, *declividade origem* e *declividade extremidade*.

Para a reta r_1 o ângulo de inclinação é α_1 e tomado por m_1 a declividade; e para a reta r_2 tem-se α_2 e m_2 para seu ângulo de inclinação e declividade, respectivamente. Logo, o ângulo θ_1 tem sua reta de origem r_1 e sua declividade origem m_1 , assim como, tem sua reta extremidade r_2 e sua declividade extremidade m_2 . De modo análogo, para o ângulo θ_2 a reta e a declividade iniciais, bem como a reta e a declividade extremidades são, respectivamente, r_2 , m_2 , r_1 e m_1 .

A continuidade do estudo analisa a determinação dos ângulos θ_1 e θ_2 em função das declividades m_1 e m_2 . Para tal, seguindo o conhecimento da Geometria, tem-se que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Assim, como no triângulo ABC da FIGURA 19, o $\widehat{ACB} \equiv \theta_1$ então:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1.$$

Resscrevendo a equação, tem-se:

$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (9)$$

E pela **DEFINIÇÃO 3.18**, calculando a tangente em ambos os membros da relação (9) junto com uma análise trigonométrica, vem:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_1) &= \tan(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \tan(\theta_1) &= \frac{\tan(\alpha_2) - \tan(\alpha_1)}{1 + \tan(\alpha_2) \cdot \tan(\alpha_1)} \\ \tan(\theta_1) &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \end{aligned} \quad (10)$$

De modo análogo, para θ_2 como ângulo exterior do triângulo ABC obtém-se:

$$\theta_2 = \alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2). \quad (11)$$

Assim, analisando a declividade para a relação (11) tem-se:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_2) &= \tan[\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2)] \\ \tan(\theta_2) &= \frac{\tan(\alpha_1) + \tan(180^\circ - \alpha_2)}{1 - \tan(\alpha_1) \cdot \tan(180^\circ - \alpha_2)} \\ \tan(\theta_2) &= \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1) \cdot \tan(\alpha_2)} \\ \tan(\theta_2) &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \end{aligned} \quad (12)$$

Visto que os ângulos θ_1 e θ_2 são suplementares, observa-se nas relações (10) e (12) que se diferem no sinal. Com isso, observa-se de maneira geral que em ambos os resultados o numerador é dado pela *subtração da declividade origem pela declividade extremidade*. Consequentemente, um teorema é obtido.

Por Lehmann (1982, p. 19):

TEOREMA 3.21: O ângulo θ , formado por duas retas, é dado por

$$\tan(\theta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}, \text{ se } m_1 \cdot m_2 \neq -1, \quad (13)$$

onde m_1 é a declividade de origem e m_2 a declividade extremidade para o ângulo θ .

Com o **TEOREMA 3.21** deduzem-se dois casos importantes para a classificação de retas, ou seja, pode-se analisar o comportamento de retas paralelas e de retas concorrentes.

Visto que o ângulo formado entre duas retas paralelas é 0° ou 180° , então pela relação tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ 0 &= m_2 - m_1 \\ m_1 &= m_2. \end{aligned}$$

Assim, as declividades são iguais.

E analisando a situação inversamente, a relação se reduz a $\tan(\theta) = 0$, o que mostra θ ser 0° ou 180° , e as retas são paralelas. Portanto, para que duas retas sejam paralelas deverá ocorrer de terem suas declividades iguais.

Isto mostra, por Lehmann (1982, p. 15),

COROLÁRIO 3.22: Duas retas são paralelas se, e somente se, suas declividades são iguais.

Se duas retas são mutuamente perpendiculares então o ângulo formado entre elas é 90° , o qual não pode ser usado para a relação. Assim, essa relação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\cot(\theta) = \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1}. \quad (14)$$

Analisando (14) com o ângulo de 90° , a relação é dada por:

$$\begin{aligned}\cot(90^\circ) &= \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1} \\ 0 &= \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1} \\ 0 &= 1 + m_1 \cdot m_2 \\ m_1 \cdot m_2 &= -1.\end{aligned}$$

E analisando de modo inverso, quando $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$ a relação (14) se

reduz a:

$$\begin{aligned}\cot(\theta) &= \frac{1 + (-1)}{-\frac{1}{m_1} - m_1} \\ \cot(\theta) &= \frac{0}{-\frac{1}{m_1} - m_1} \\ \cot(\theta) &= 0,\end{aligned}$$

a qual tem-se $\theta = 90^\circ$ indicando que as retas são perpendiculares.

Como consequência, sugere um corolário. Por Lehmann (1982, p. 20):

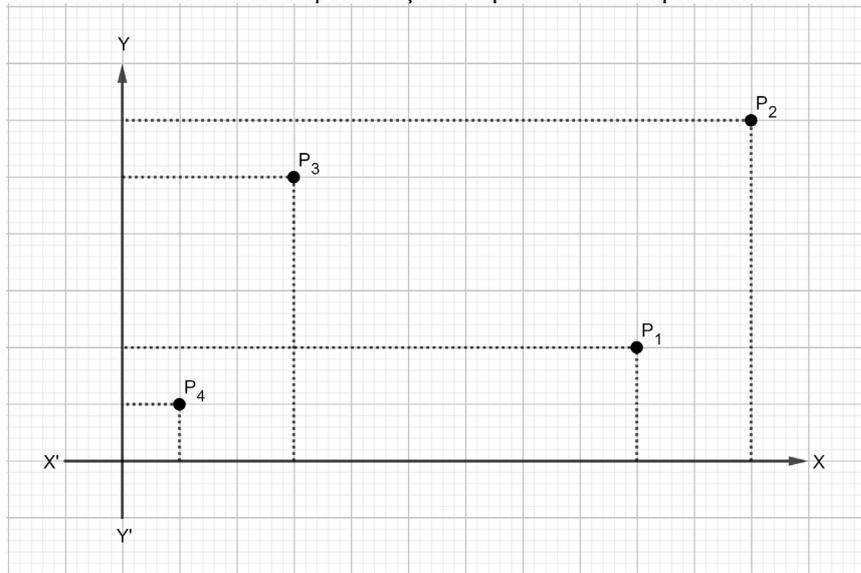
COROLÁRIO 3.23: Duas retas são mutuamente perpendiculares se, e somente se, o produto de suas declividades é igual a -1 .

Apresenta-se um exemplo para elucidar o estudo.

EXEMPLO 3.24: Analise por meio da declividade se os pontos $P_1(9, 2)$, $P_2(11, 6)$, $P_3(3, 5)$ e $P_4(1, 1)$ são os vértices de um paralelogramo.

Solução: Sabe-se que o paralelogramo possui dois pares de lados paralelos. Sendo quatro pontos no qual uma reta é formada da combinação de pelo menos dois deles, devem ser analisadas as seis possibilidades. Porém, antes pode ser feita a observação da posição dos pontos no plano coordenado, conforme FIGURA 20.

FIGURA 20 – Representação dos pontos do exemplo 2.24



FONTE: Pesquisadora.

Assim, analisando apenas as quatro possibilidades vêm:

- Para $P_1(9, 2)$ e $P_2(11, 6)$:

$$m_{P_1P_2} = \frac{2-6}{9-11}$$

$$m_{P_1P_2} = \frac{-4}{-2}$$

$$m_{P_1P_2} = 2$$

- Para $P_1(9, 2)$ e $P_4(1, 1)$:

$$m_{P_1P_4} = \frac{2-1}{9-1}$$

$$m_{P_1P_4} = \frac{1}{8}$$

- Para $P_2(11, 6)$ e $P_3(3, 5)$:

$$m_{P_2P_3} = \frac{6-5}{11-3}$$

$$m_{P_2P_3} = \frac{1}{8}$$

- Para $P_3(3, 5)$ e $P_4(1, 1)$:

$$m_{P_3P_4} = \frac{5-1}{3-1}$$

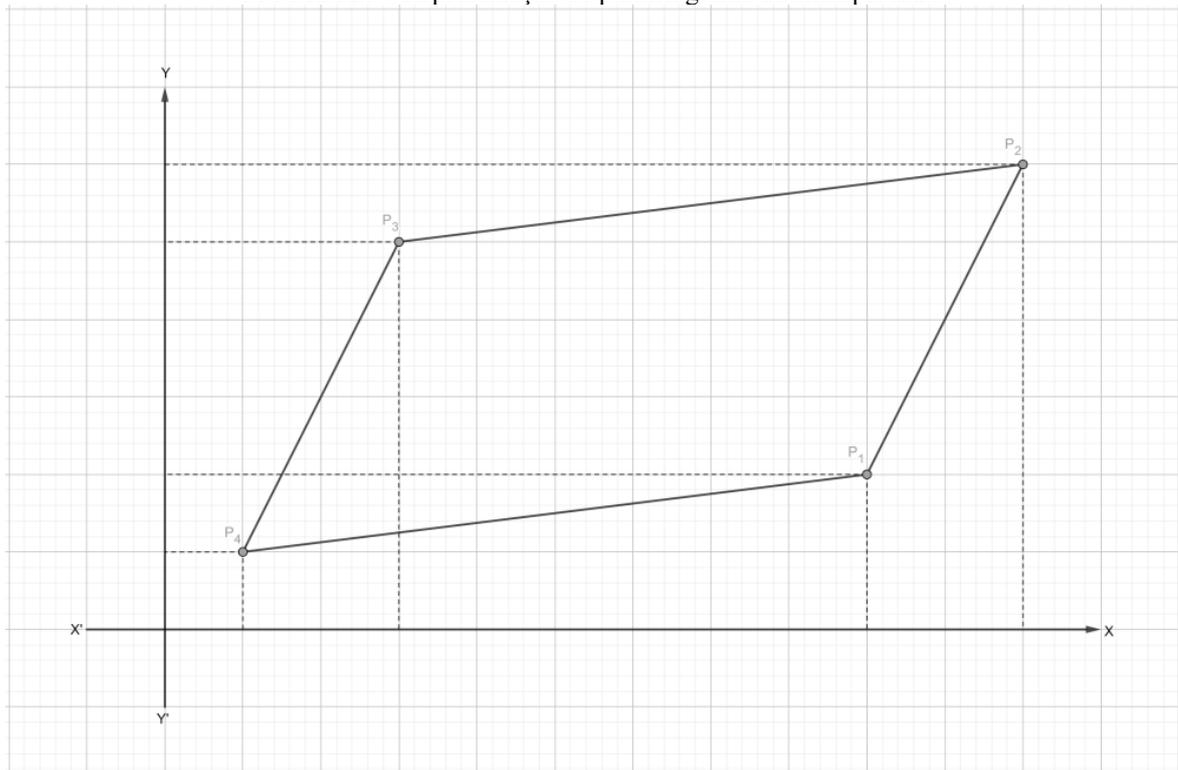
$$m_{P_3P_4} = \frac{4}{2}$$

$$m_{P_3P_4} = 2$$

Assim, visto que $m_{P_1P_2} = m_{P_3P_4}$ e $m_{P_1P_4} = m_{P_2P_3}$ então, pelo **COROLÁRIO 3.22**, tem-se $\overline{P_1P_2}$ é paralelo a $\overline{P_3P_4}$, da mesma forma que $\overline{P_1P_4}$ e $\overline{P_2P_3}$ são paralelos também.

Portanto, os pontos $P_1(9, 2)$, $P_2(11, 6)$, $P_3(3, 5)$ e $P_4(1, 1)$ são os vértices de um paralelogramo, apresentado na FIGURA 21.

FIGURA 21 – Representação do paralelogramo do exemplo 2.24



FONTE: Pesquisadora.

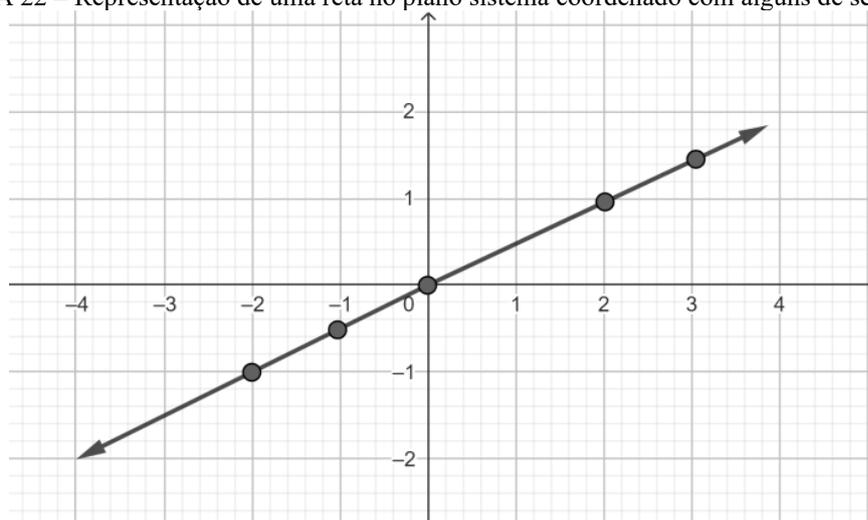
Acredita-se que com os conhecimentos de Geometria Analítica até o momento apresentados, os estudantes têm base para avançar ao estudo algébrico, apresentando na sequência a equação geral da reta.

3.7 EQUAÇÃO DA RETA

O conhecimento da equação de uma reta permite uma análise do comportamento dessa curva e compreender outras características através do método analítico.

Para a compreensão de uma equação o estudante precisa ter o conhecimento sobre o lugar geométrico da curva, que é formada por infinitos pontos e, a partir disso, suas características serem descritas algebricamente.

FIGURA 22 – Representação de uma reta no plano sistema coordenado com alguns de seus pontos



FONTE: Pesquisadora.

Segundo Lehmann (1982, p. 27), o estudante precisa ter em mente que ao supor que dada uma equação em duas variáveis x e y , que abreviadamente pode ser escrita como:

$$f(x, y) = 0. \quad (15)$$

De maneira geral há infinitos pares de valores x e y que satisfazem (15). Cada um desses pares de valores reais será tomado como *coordenadas* (x, y) de um ponto do plano coordenado.

Entende-se que se as coordenadas de um ponto satisfazem uma equação então o ponto se encontra sobre o lugar geométrico dessa equação e, de forma recíproca, se um ponto está situado no lugar geométrico de uma equação então suas coordenadas satisfazem à equação.

“(…) Uma vez que as coordenadas dos pontos de um lugar geométrico são condicionadas por sua equação, tais pontos, em geral, estão localizados em posições que, tomadas em conjunto, formam uma linha definida denominada uma *curva* assim como um gráfico ou lugar geométrico.” (LEHMANN, 1982, p. 28)

Com isso, por Lehmann (1982, p. 27), tem-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.25: A totalidade de pontos, e *somente* estes pontos, cujas coordenadas satisfazem a equação $f(x, y) = 0$, é denominada o *lugar geométrico* ou *gráfico da equação*¹¹.

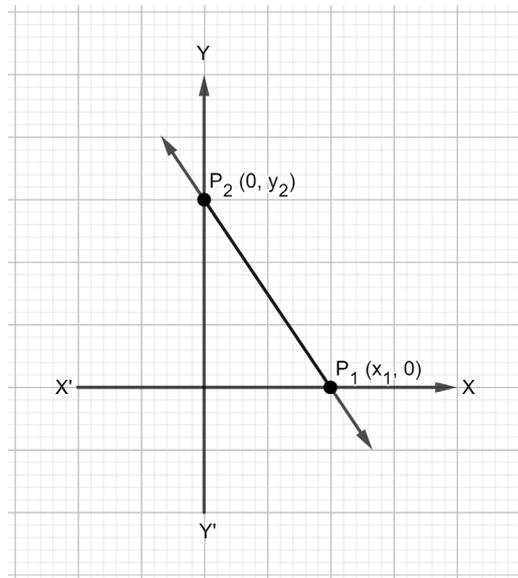
¹¹ Destaque do próprio autor.

Por Lehmann (1982, p. 27), ainda define-se:

DEFINIÇÃO 3.26: Diz-se que qualquer ponto cujas coordenadas satisfazem uma equação $f(x, y) = 0$ pertence ao lugar geométrico da equação¹².

Com isso, a análise das interseções do lugar geométrico com o plano de eixos coordenados, apresentando a FIGURA 23, são estudados.

FIGURA 23 – Representação de pontos de interseção de um lugar geométrico e os eixos de um plano coordenado



FONTE: Pesquisadora.

Na FIGURA 23, há vários pontos coordenados que estão no lugar geométrico de uma reta. Porém, $P_1(x_1, 0)$ é o ponto de interseção entre a reta e o eixo das abscissas, sendo então x_1 a referência da interseção nas abscissas; e y_2 é a referência da interseção nas ordenadas, pois $P_2(0, y_2)$ é o ponto de interseção entre o eixo das ordenadas e a reta.

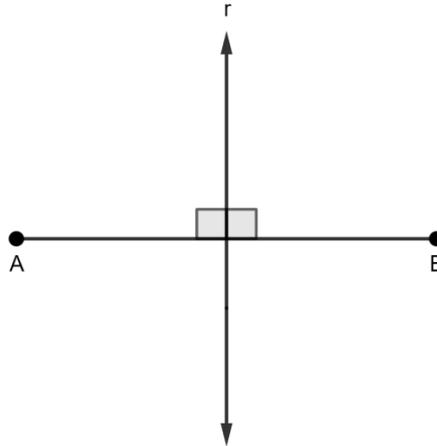
Assim, por Lehmann (1982, p. 29), vem a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.27: A *interseção* de um lugar geométrico com o eixo das abscissas corresponde à abscissa do ponto de interseção do lugar geométrico com o eixo. E a *interseção* do lugar geométrico com o eixo das ordenadas é a ordenada do ponto de interseção do eixo com o lugar geométrico.

¹² Destaque do próprio autor.

Outra ideia a ser analisada é a *simetria* de um lugar geométrico. Pensando em A e B como pontos pertencentes a uma mesma reta e a reta r como um eixo de simetria, tem-se a representação dessas ideias na FIGURA 24.

FIGURA 24 – Representação da simetria de dois pontos em relação a um eixo



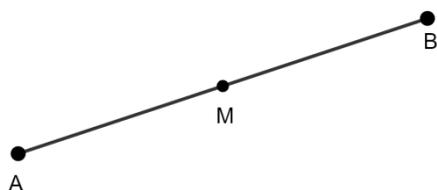
FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Pela FIGURA 24, os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria r se, e somente se, \overline{AB} esteja dividido em metades e perpendiculares por r . Assim, a reta r é denominada por *eixo de simetria*. Logo, por Lehmann (1982, p. 30), vem a definição:

DEFINIÇÃO 3.28: Diz-se que dois pontos distintos são *simétricos em relação a uma reta* se, e somente se, o segmento de reta que une esses dois pontos é dividido ao meio e perpendicular pela referida reta.

Seguindo a ideia de simetria, a FIGURA 25 é pensada em consonância com as ideias dos estudantes sobre existir dois pontos, A e B , que são simétricos em relação a outro ponto M pertencente a mesma reta.

FIGURA 25 – Representação da simetria de dois pontos em relação a um ponto



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

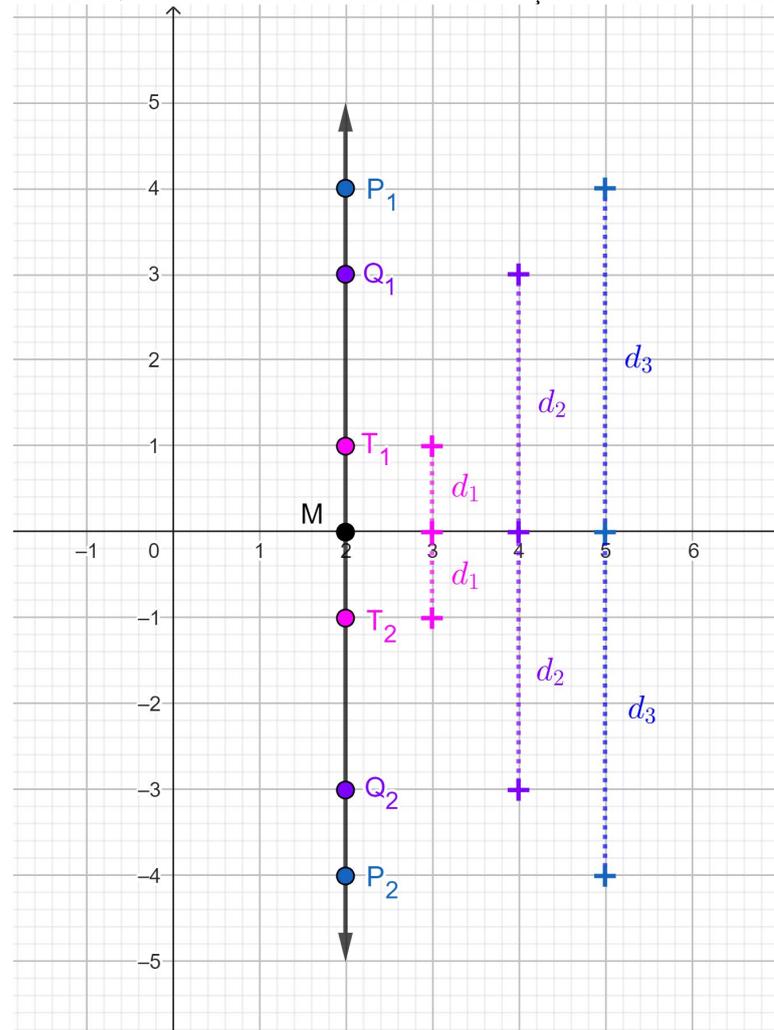
De acordo com a FIGURA 25, o ponto M é denominado *centro de simetria*, pois os pontos A e B são simétricos em relação ao ponto M . E isso ocorre se, e somente se, M seja o ponto médio de \overline{AB} .

Com isso, Lehmann (1982, p. 30) apresenta:

DEFINIÇÃO 3.29: Diz-se que dois pontos distintos são *simétricos em relação a um ponto M* se, e somente se, M for o ponto médio do segmento retilíneo que une estes dois pontos.

Com as definições de simetria apresentada anteriormente, pode ser analisada a simetria de um lugar geométrico em relação a um dos eixos coordenados. Construindo a ideia de uma reta ser simétrica em relação ao eixo das abscissas, apresenta-se a FIGURA 26.

FIGURA 26 – Ideia de uma reta simétrica em relação ao eixo das abscissas



FONTE: Pesquisadora.

Pela FIGURA 26, observa-se que para a reta apresentada tem-se que os pontos P_1 e P_2 são simétricos em relação a um ponto M pertencente ao eixo e em relação à reta base do eixo das abscissas. E percebe-se que ocorre o mesmo com os pontos Q_1 e Q_2 , e com os pontos T_1 e T_2 . Logo, pela **DEFINIÇÃO 3.2** e **DEFINIÇÃO 3.29**, dizemos que a reta do caso é simétrica em relação ao eixo das abscissas.

Porém, deve-se ficar claro aos estudantes que essa característica de simetria em relação a um eixo de simetria não é exclusiva do estudo de retas, mas sim do estudo de todas as curvas estudadas pela Geometria Analítica.

Com isso, conforme Lehmann (1982, p. 30), apresenta-se a definição:

DEFINIÇÃO 3.30: Diz-se que uma curva é *simétrica em relação a um eixo de simetria* desde que para cada ponto da curva há um ponto correspondente também sobre a curva tais que estes dois pontos sejam simétricos em relação ao eixo.

E, ainda por Lehmann (1982, p. 30), expande-se:

DEFINIÇÃO 3.31: Diz-se que uma curva é *simétrica em relação a um centro de simetria* M desde que para cada ponto da curva haja um ponto correspondente também sobre a curva tais que estes dois pontos sejam simétricos em relação à M .

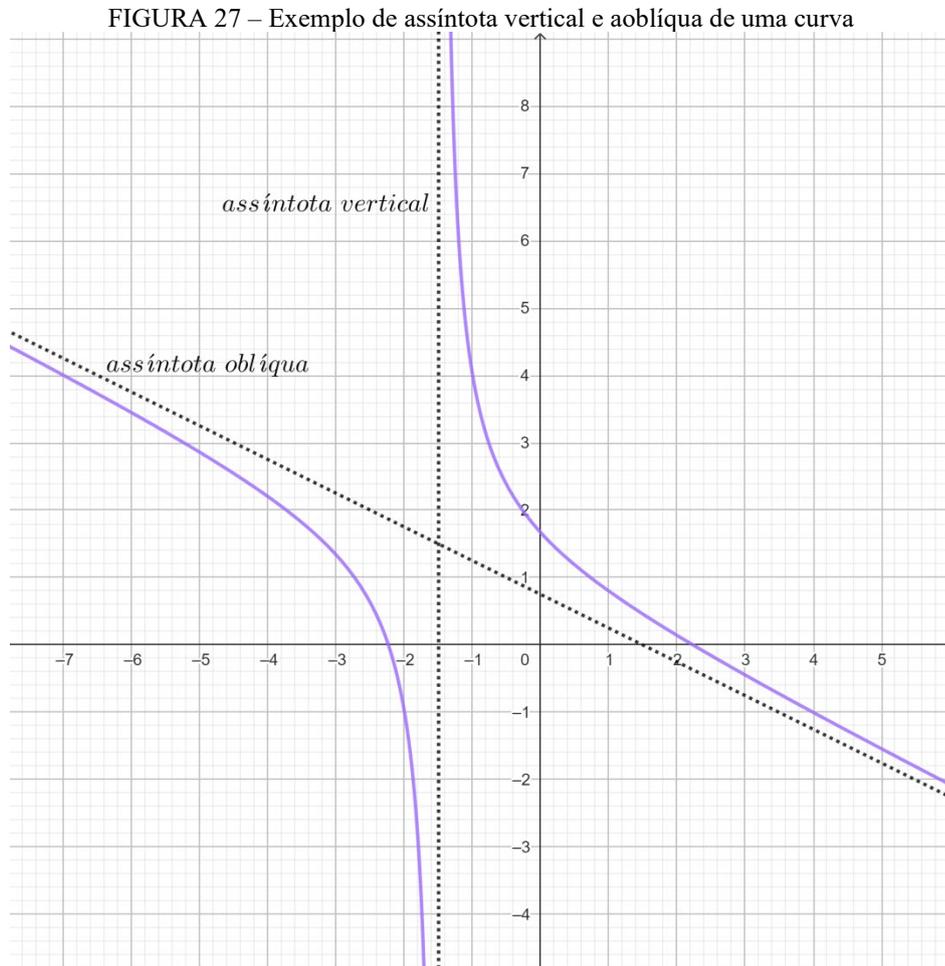
Outra característica que deve ser considerada para estudos posteriores da reta é o conceito de assíntota que o lugar geométrico possa ter. Pensando que existe uma reta fixa que a medida que uma curva se afasta da origem, então a distância da curva a essa reta fica cada vez menor, mas nunca uma distância nula, inicia a ideia de assíntota.

Por Lehmann (1982, p. 34), a ideia de assíntota implica em duas análises: a primeira é a de que uma curva que possui uma assíntota não é finita ou fechada, mas se estende indefinidamente; e a segunda é a de que a curva irá se aproximar de sua assíntota à medida em que se estende ao plano coordenado.

E devido à assíntota ser uma reta então há três posições particulares que ela pode assumir, recebendo denominações especiais. Se a assíntota estiver em posição paralela ou coincidente ao eixo das abscissas tem denominação de *assíntota horizontal*; se estiver em posição paralela ou coincidente ao eixo das ordenadas então sua denominação será de

assíntota vertical; e caso sua posição não seja paralela a nenhum dos eixos do plano coordenado então se denomina de *assíntota oblíqua*.

A FIGURA 27 representa a assíntota vertical e oblíqua de uma curva.



FONTE: Pesquisadora.

Com essas ideias, por Lehmann (1982, p. 34), apresenta-se a definição de assíntotas:

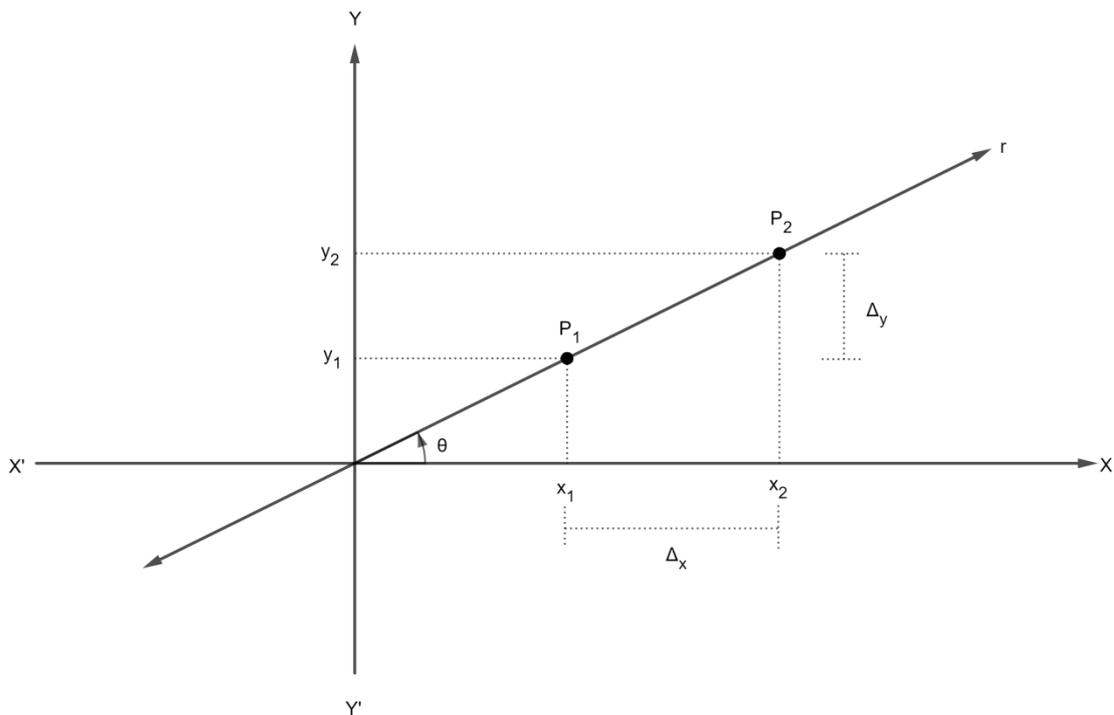
DEFINIÇÃO 3.32: Se, para uma curva dada, há uma reta tal que, à medida que um ponto sobre a curva se afasta indefinidamente da origem, a distância do referido ponto à reta diminui continuamente e tende à zero, então a reta é denominada uma *assíntota* da curva.

Uma observação que deve ser deixada clara ao estudante é a de que não necessariamente uma curva terá uma ou mais assíntotas, pois há curvas que não as possui. Porém, as assíntotas serão de grande valor analítico ao estudo do lugar geométrico quando a curva a possuir.

Assim, após a apresentação de todos os conceitos até o momento, pode ser analisada a identificação do lugar geométrico de uma reta e sua equação.

Pelo segundo axioma de Hilbert, entende-se que dois pontos distintos determinam uma reta, isto é, existe apenas uma única reta que passa por esses dois pontos. E a representação de uma reta r em um plano coordenado pode ser dada considerando dois pontos distintos, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, pertencentes a essa reta.

FIGURA 28 – Representação de dois pontos distintos que definem apenas uma reta



FONTE: Pesquisadora.

Conforme FIGURA 28, considera-se θ o ângulo de inclinação da reta r e Δ como a variação entre as coordenadas dos pontos, ou seja,

$$\Delta_x = x_1 - x_2 \quad \text{e} \quad \Delta_y = y_1 - y_2.$$

Pelo **TEOREMA 3.19**, a declividade m da reta r é dada por $m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$. Logo, pode-se

entender a representação dessa reta pela equação:

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

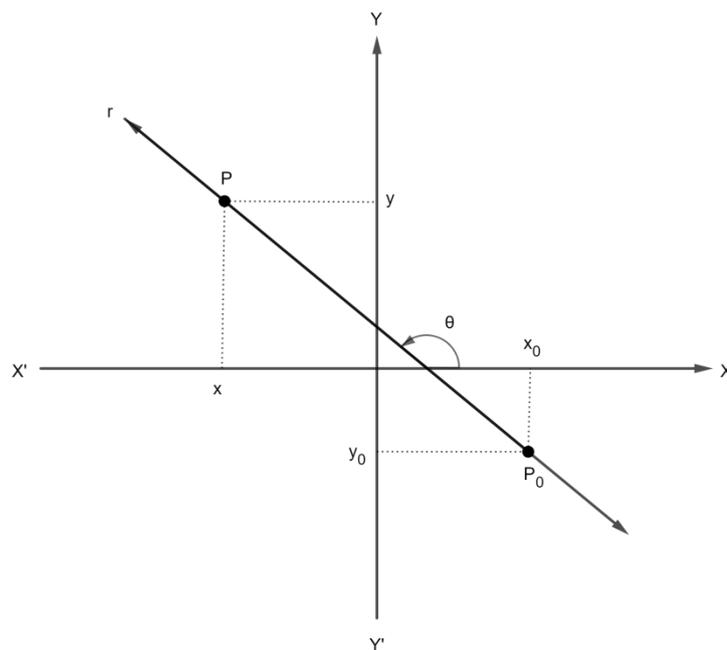
$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

Pela Geometria, uma reta é identificada sem equívocos por um de seus pontos e por sua direção.

Analiticamente, uma reta é determinada, sem erros, ao ser conhecido um de seus pontos e seu ângulo de inclinação. Assim, entende-se que um ponto sobre o plano cartesiano, $P_0(x_0, y_0)$, e uma declividade, m , determinam uma reta.

Analisando a representação de uma reta r passando por $P_0(x_0, y_0)$, considera-se $P(x, y)$ um ponto genérico pertencente a essa reta, conforme FIGURA 29.

FIGURA 29 – Representação de uma reta definida por um ponto conhecido e sua declividade



FONTE: Pesquisadora.

Com essa análise, segue-se o seguinte teorema:

TEOREMA 3.33: A reta que passa pelo por um ponto dado $P_0(x_0, y_0)$ e com declividade dada m tem por equação,

$$y - y_0 = m(x - x_0) .$$

Com este teorema, duas observações devem ser feitas ao estudante: primeiro que a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ independe da localização do ponto P_0 e se a sua declividade é positiva ou negativa; e a segunda é que se a reta for paralela ou coincidente ao eixo das

ordenadas então todos os pontos dela têm a mesma abscissa e sua equação será expressa por $x = x_0$.

Uma reta é denominada *forma ponto-declividade* quando sua equação é dada em função de um ponto e da declividade.

Segue um exemplo para melhor entender os conceitos apresentados.

EXEMPLO 3.34: Determinar a equação forma ponto-declividade da reta que tem ângulo de inclinação de 45° e o ponto $P(-6, -3)$ pertence a ela.

Solução: Tomando por r como a reta para esse estudo, pela **DEFINIÇÃO 3.18**, a sua declividade é dada por:

$$m = \tan(45^\circ)$$

$$m = 1$$

Logo, pelo **TEOREMA 3.33**, a equação da reta será:

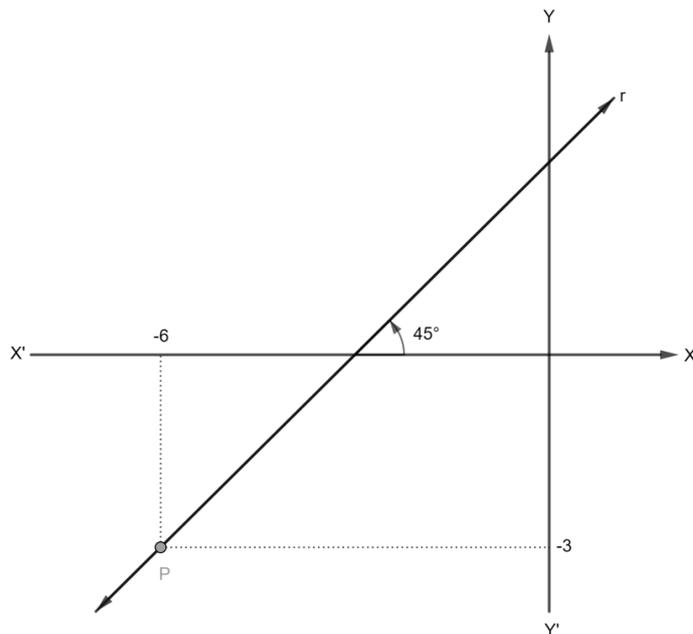
$$y - (-3) = 1 \cdot [x - (-6)]$$

$$y + 3 = x + 6$$

$$x - y + 3 = 0$$

E sua representação é dada na FIGURA 30.

FIGURA 30 – Representação da reta do exemplo 2,34



FONTE: Pesquisador.

Portanto, a equação da reta apresentada na situação é $x - y + 3 = 0$.

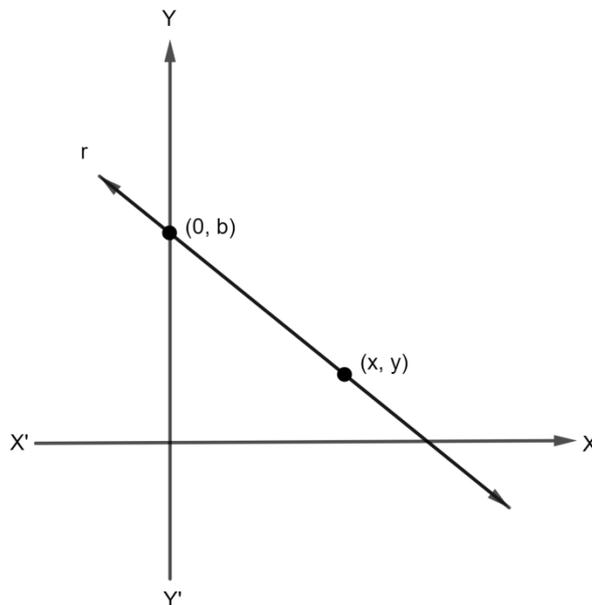
Com o **TEOREMA 3.33**, duas observações devem ser feitas ao estudante sobre a forma que a equação da reta pode se apresentar. A primeira é que a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ representa de forma geral uma reta, independe da localização do ponto P_0 e se a sua declividade é positiva ou negativa; e a segunda é que se a reta for paralela ou coincidente ao eixo das ordenadas então todos os pontos dela têm a mesma abscissa e sua equação será expressa por $x = x_0$.

Porém, outras três formas de apresentar a equação de uma reta de acordo com as características apresentadas por seu lugar geométrico. Elucidado por Lehmann (1982, p. 49), seguem os seguintes maneiras:

- a. **Forma declividade-interseção** é a denominação dada à reta r cuja declividade m e cuja interseção ao eixo das ordenadas é b .

Pensando em uma reta r , passando pelos pontos de coordenadas $(0, b)$ e (x, y) , mostra-se sua representação na FIGURA 31.

FIGURA 31 – Representação de uma reta descrita pela forma declividade-interseção



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Visto que o ponto de interseção com o eixo das ordenadas tem coordenada $(0, b)$ então, pelo **TEOREMA 2.33**, a equação da reta é dada por:

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b.$$

Deste item sobre a apresentação da equação da reta na forma declividade-interseção gera, por Lehmann (1982, p. 50), o teorema a seguir, que é estudado no Ensino Médio, porém requer todos os estudos apresentados anteriormente para ter um sentido.

TEOREMA 3.35: A reta com declividade m e com interseção b sobre o eixo das ordenadas dadas tem como equação a forma declividade-interseção

$$y = mx + b.$$

Para elucidar esse teorema, apresenta-se um exemplo de estudo.

EXEMPLO 3.36: Determinar a equação da reta cuja declividade é -3 e interseção sobre o eixo das ordenadas é -2 .

Solução: Sendo a declividade $m = -3$ e a interseção sobre o eixo das ordenadas $b = -2$ então, pelo **TEOREMA 3.35**, a equação da reta é dada por:

$$y = -3x + (-2)$$

$$y = -3x - 2.$$

Assim, a equação da reta é dada por $y = -3x - 2$.

b. Forma dois-pontos é a denominação dada à uma reta na qual sua equação é inequivocamente determinada por dois quaisquer de seus pontos, desde que sejam distintos e suas coordenadas conhecidas.

Tomando uma reta que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tem sua declividade dada por:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, x_1 \neq x_2.$$

Com a declividade e o ponto $P_1(x_1, y_1)$ a situação-problema se reduz à forma ponto-declividade, a qual é dada, pelo **TEOREMA 3.33**, por:

$$y_1 - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 - x_2), x_1 \neq x_2.$$

Esse estudo gera, por Lehmann (1982, p. 50), o seguinte teorema, que encapsula os princípios fundamentais discutidos e estabelece uma base sólida para futuras investigações.

TEOREMA 3.37: A reta que passa por dois pontos distintos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tem por equação a forma dois-pontos

$$y_1 - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2), \quad x_1 \neq x_2. \quad (16)$$

Pelo **TEOREMA 3.37**, de acordo com Lehmann (1982, p. 50), duas observações são feitas:

1.^a : Se x_1 e x_2 forem iguais então a forma dois-pontos não é conveniente. Porém, obtém-se como resultado uma reta paralela ao eixo das ordenadas e a equação é dada por $x = x_1$.

2.^a : Pode ser analisada pela relação (16) conforme operações algébricas e organizações que seguem:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2) \\ yx_1 - yx_2 - y_1x_1 + y_1x_2 &= y_1x - y_1x_1 - y_2x + y_2x_1 \\ 0 &= -yx_1 + yx_2 + y_1x_1 - y_1x_2 + y_1x - y_1x_1 - y_2x + y_2x_1 \\ x_1y_2 + xy_1 + x_2y - x_2y_1 - xy_2 - x_1y &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Com isso, analisa-se que a relação (17) pode ser escrita na forma de um determinante de ordem 3, o qual os elementos da terceira coluna é 1.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A partir disso, apresenta-se um exemplo para melhor compreensão dos conceitos.

EXEMPLO 3.38: Determinar a equação da reta que tem os pontos $(4, 2)$ e $(-5, 7)$ pertencentes a ela.

Solução: Sendo $(4, 2)$ e $(-5, 7)$ pontos pertencentes a uma mesma reta, então a equação desta reta pode ser definida pela forma dois-pontos. Assim, pelo **TEOREMA 3.37**, vem:

$$y - 2 = \frac{2 - 7}{4 - (-5)}(x - 4)$$

$$y - 2 = -\frac{5}{9}(x - 4)$$

$$9y - 18 = -5x + 20$$

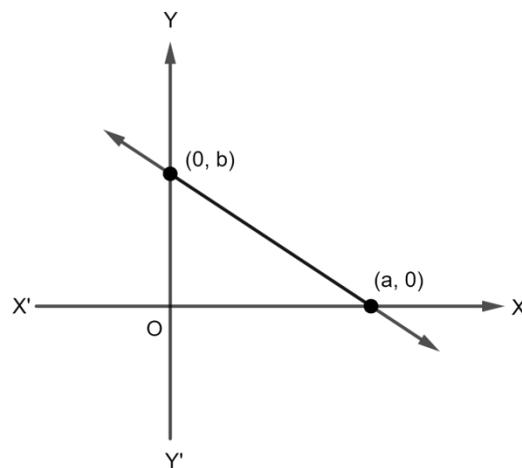
$$5x + 9y - 38 = 0$$

Portanto, a reta que tem os pontos $(4, 2)$ e $(-5, 7)$ pertencentes a ela é representada pela equação $5x + 9y - 38 = 0$.

c. **Forma segmentária** é a denominação dada à equação da reta definida pelos pontos de interseção com os eixos coordenados.

Tomando a como a interseção no eixo das abscissas e b como a interseção no eixo das ordenadas, sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então os pontos de coordenadas $(a, 0)$ e $(0, b)$ são pontos pertencentes à reta, conforme FIGURA 32, o que define encontrar a equação da reta pela forma dois-pontos.

FIGURA 32 – Representação de uma reta e suas interseções aos eixos coordenados



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Assim, pelo **TEOREMA 3.37** tem-se:

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

A partir dessa análise, segue o teorema apresentado por Lehmann (1982, p. 52):

TEOREMA 3.39: A reta cujas interseções nos eixos coordenados das abscissas e ordenadas são $a \neq 0$ e $b \neq 0$, respectivamente, tem a equação na forma segmentária dada por

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (18)$$

Pelo **TEOREMA 3.39**, se faz necessária uma observação que sendo $a = 0$ logo terá $b = 0$ e a equação na forma segmentária não terá conveniência no seu uso, pois nesse caso apenas um ponto, a origem, é conhecido e essa informação não é suficiente para determinar uma única reta.

A seguir, apresenta-se exemplos para elucidar os conceitos apresentados.

EXEMPLO 3.40: Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(7, 8)$ e é paralela ao segmento retilíneo cujos extremos são $(-2, 2)$ e $(3, -4)$.

Solução: Sabendo que, pelo **COROLÁRIO 3.22**, a reta é paralela ao segmento retilíneo então tem a mesma declividade que este segmento. Calculando a declividade, pelo **TEOREMA 3.19**, tem-se:

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-2)}$$

$$m = -\frac{6}{5}$$

Assim, pelo **TEOREMA 3.33**, a equação é dada por:

$$y - 8 = -\frac{6}{5}(x - 7)$$

$$5y - 40 = -6x + 42$$

$$6x + 5y - 82 = 0$$

Portanto, a equação da reta da situação é $6x + 5y - 82 = 0$.

EXEMPLO 3.41: Determinar a equação da mediatriz do segmento retilíneo cujos extremos são $(-3, 2)$ e $(1, 6)$.

Solução: Sabendo que a mediatriz de um segmento é uma reta perpendicular a este segmento em seu ponto médio. Assim, tomando por M_S o ponto médio do segmento, vem:

$$M_S \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2} \right)$$

$$M_S \left(-\frac{2}{2}, \frac{8}{2} \right)$$

$$M_S(-1, 4)$$

O ponto $M_S(-1, 4)$ é o ponto pertencente a mediatriz. E como, pelo **COROLÁRIO 3.23**, o produto das declividades de duas retas perpendiculares é -1 então tomando por m_S a declividade do segmento tem-se que, pelo **TEOREMA 3.19**, a declividade do segmento é dada por:

$$m_S = \frac{2-6}{-3-1}$$

$$m_S = \frac{-4}{-4}$$

$$m_S = 1$$

Logo, a declividade da reta em estudo é $m = -1$. Com isso, pelo **TEOREMA 3.33**, a equação é dada por:

$$y - 4 = -1[x - (-1)]$$

$$y - 4 = -1(x + 1)$$

$$y - 4 = -x - 1$$

$$x + y - 3 = 0$$

Portanto, a equação da reta da situação é $x + y - 3 = 0$.

Tendo como base essa sugestão de seguimento de estudos, é desejado que o estudante tenha adquirido até o momento a compreensão de que a equação de uma reta vem da análise de um lugar geométrico de uma curva, que nesse caso específico é a reta. Através dessa abordagem, espera-se que o estudante tenha internalizado a relação entre os pontos de uma reta e sua representação algébrica.

Intenciona-se que, a partir desse ponto, o estudo inverso se torne de fácil entendimento para o estudante. Isso significa que, com o conceito de reta bem estabelecido a partir de sua visualização no plano de eixos coordenados, o estudante deve estar apto a compreender melhor a reta a partir de sua equação. Esta metodologia reforça a conexão entre a geometria e a álgebra, mas também facilita uma aprendizagem mais profunda, onde o estudante pode transitar entre a visualização geométrica e a formulação algébrica com maior fluidez.

3.8 A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DE UMA RETA

Nos estudos desse capítulo, analisou e formalizou que a equação de uma reta no plano de eixos coordenados é escrita de uma maneira geral por

$$Ax + By + C = 0, \quad (19)$$

onde ou $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ e C pode ser ou não igual a zero. A relação (19) é denominada *forma geral* da equação de uma reta.

Como observado, o estudante de Geometria Analítica pode seguir com o estudo pensando a partir da equação de uma reta, isto é, analisar se dada uma equação como (19) se seu lugar geométrico é uma reta. Para isso, dois casos devem ser estudados sobre o coeficiente de y , o caso $B = 0$ e o caso $B \neq 0$.

1.º caso: $B = 0$.

Se $B = 0$ então $A \neq 0$ e a equação (19) pode ser analisada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Ax + 0y + C &= 0 \\ Ax + C &= 0 \\ Ax &= -C \\ x &= -\frac{C}{A}. \end{aligned} \quad (20)$$

A equação (20) é da forma $x = x_0$, que das observações feitas a partir do **TEOREMA 3.33**, mostra ser uma reta paralela ao eixo das ordenadas.

2.º caso: $B \neq 0$.

Se $B \neq 0$ então a equação (19) pode ser analisada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ By &= -Ax - C \\ y &= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \end{aligned} \quad (21)$$

A relação (21) está na forma declividade-interseção e, de acordo com os estudos do **TEOREMA 3.35**, corresponde a uma reta cuja declividade é $-\frac{A}{B}$ e interseção no eixo das ordenadas ocorre em $-\frac{C}{B}$.

Com isso, observa-se que os dois casos levam a conclusão de que a relação (19) leva ao lugar geométrico de uma reta. Essa análise, segundo Lehmann (1982, p. 55), concluem-se no seguinte teorema:

TEOREMA 3.42: Uma equação tem uma reta por lugar geométrico no plano de eixos coordenados se, e somente se, é linear nas variáveis x e y .

Visto que a equação de qualquer reta é dada pela relação (19), então se verifica que há a necessidade de determinar os coeficientes A , B e C para um caso particular, o que mostra que esses coeficientes são de importância fundamental no estudo da equação de uma reta. Lehmann (1982, p. 56) afirma que em uma equação de uma reta há apenas duas constantes independentes, pois se analisar a equação (19) supondo $A \neq 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Assim, percebe-se que pela relação (22) há apenas duas constantes independentes na equação de uma reta.

“Logo, analiticamente, a equação de uma linha reta é inequivocamente determinada por duas condições independentes¹³. Geometricamente, uma linha reta é também inequivocamente determinada por duas condições independentes; assim, uma linha reta é determinada por dois quaisquer de seus pontos distintos, ou por um de seus pontos e sua direção.” (LEHMANN, 1982, p. 56)

Assim, segue exemplo para melhor compreensão dos conceitos.

EXEMPLO 3.43: Determinar os valores adequados da equação geral de uma reta que tem os pontos $(1, -1)$ e $(4, 7)$ pertencentes a ela.

Solução: Sendo os pontos $(1, -1)$ e $(4, 7)$ pertencentes à reta, então eles devem satisfazer a equação $Ax + By + C = 0$. Analisando para cada um dos pontos, vem:

Para $(1, -1)$:

$$A - B + C = 0. \quad (23)$$

Para $(4, 7)$:

$$4A + 7B + C = 0. \quad (24)$$

¹³ Destaque do próprio autor.

De (23) e (24), se tem:

$$\begin{cases} A - B + C = 0 \\ 4A + 7B + C = 0 \end{cases}$$

Organizando a primeira equação com a multiplicação por 7, tem-se:

$$\begin{cases} 7A - 7B + 7C = 0 \\ 4A + 7B + C = 0 \end{cases}$$

Somando as equações membro a membro, obtém-se:

$$11A + 8C = 0$$

$$A = -\frac{8}{11}C \quad (25)$$

Logo, substituindo (25) em (23) se tem:

$$-\frac{8}{11}C - B + C = 0$$

$$B = -\frac{8}{11}C + C.$$

$$B = \frac{3}{11}C \quad (26)$$

Substituindo os valores de (25) e (26) na equação geral, obtém-se:

$$-\frac{8}{11}Cx + \frac{3}{11}Cy + C = 0$$

$$-\frac{8}{11}x + \frac{3}{11}y + 1 = 0$$

$$-8x + 3y + 11 = 0$$

Portanto, para essa situação-problema os coeficientes são $A = -8$, $B = 3$ e $C = 11$.

Deve ser observado ao estudante que para a resolução desse exemplo para $C = 0$, as relações (23) e (24) devem ser analisadas para A e C em função de B se $B \neq 0$, ou para B e C em função de A se $A \neq 0$.

Com isso, pode-se avançar ao estudo da relação entre retas, utilizando a análise de suas equações como base. Esse próximo passo envolve explorar como diferentes equações de retas interagem entre si no plano coordenado, permitindo a investigação de conceitos como paralelismo, perpendicularidade e interseção de retas.

3.8.1 RELAÇÕES ENTRE DUAS RETAS ATRAVÉS DA EQUAÇÃO

Ao entender as equações das retas, os estudantes podem identificar rapidamente se duas retas são paralelas (possuem a mesma inclinação), perpendiculares (inclinações cujo produto é -1) ou se elas se interceptam em algum ponto específico. Essa análise aprofundada das relações entre as retas, mediada por suas representações algébricas, é fundamental para resolver problemas complexos em Geometria Analítica e para aplicações práticas em diversas áreas.

Para analisar as relações existentes entre duas retas consideram-se as suas equações na forma geral a seguir:

$$Ax + By + C = 0, \quad (27)$$

$$A'x + B'y + C' = 0. \quad (28)$$

Analisando as possibilidades de relações entre retas, tem-se:

a. *Relação de paralelismo:*

A declividade de relação (27) sendo $-\frac{A}{B}$, se $B \neq 0$, e a declividade de relação (28) sendo $-\frac{A'}{B'}$, se $B' \neq 0$, então de acordo com o **COROLÁRIO 3.22** para que as relações (27) e (28) sejam paralelas deve ocorrer a condição de:

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}.$$

Organizando a equação para um sinal positivo, tem-se:

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}, \quad (29)$$

isto é, que os coeficiente das variáveis x e y sejam proporcionais.

Mas se $B = 0$ então a reta da relação (27) será paralela ao eixo das ordenadas, tendo também $B' = 0$. Logo, a reta da relação (28) deve ser paralela a reta da relação (27) e por consequência paralela ao eixo das ordenadas. Porém, para este caso a proporção da relação (29) fica sem sentido. A mesma observação se dá para o caso de ambas as retas serem paralelas ao eixo das abscissas para o caso de $A = 0$ e $A' = 0$. Mas a relação se torna válida para todos os casos ao ser escrita como:

$$AB' - A'B = 0.$$

b. Relação de perpendicularismo:

Pelo **COROLÁRIO 3.23**, uma condição necessária e suficiente para que as retas das relações (28) e (29) sejam perpendiculares é:

$$\left(-\frac{A}{B}\right) \cdot \left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1,$$

Fazendo manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{A}{B} &= \frac{B'}{A'} \\ AA' + BB' &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

A relação (30) é válida mesmo que a reta da relação (28) ou a reta da relação (29) seja paralela ao eixo das ordenadas ou não tenha declividade.

c. Relação de coincidência:

As retas apresentadas nas relações (27) e (28) serão coincidentes se, e somente se, tiverem um ponto em comum e a mesma direção ou declividade. Fazendo a análise da interseção da reta da relação (27) com o eixo das abscissas, vem:

$$\begin{aligned} Ax + B \cdot 0 + C &= 0 \\ Ax + C &= 0 \\ x &= -\frac{C}{A}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo para a reta (28), vem:

$$\begin{aligned} A'x + B' \cdot 0 + C' &= 0 \\ A'x + C' &= 0 \\ x &= -\frac{C'}{A'}. \end{aligned}$$

Logo, para cumprir com as condições deve-se ter:

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}.$$

Reorganizando a equação, tem-se:

$$\frac{C}{C'} = \frac{A}{A'}. \quad (31)$$

Além disso, observando a condição que as declividades devem ser iguais, então:

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}.$$

E reorganizando a equação, tem-se:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \quad (32)$$

Assim, pelas relações (31) e (32) tem-se:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \quad (33)$$

isto quer dizer, duas retas são coincidentes se, e somente se, seus coeficientes correspondentes são proporcionais.

Analisando o fato de que a proporção da relação (33) é gerada pela hipótese de que todos os coeficientes nas equações apresentadas nas relações (27) e (28) são diferentes e zero, pois se esses coeficientes forem iguais a zero a proporção se torna sem sentido. Porém, será válido em todos os casos ao escrever as relações como:

$$A = kA', \quad B = kB' \quad \text{e} \quad C = kC',$$

onde k é uma constante não nula.

d. Relação de intercepção em apenas um ponto:

Pela Geometria Pura, duas retas irão se interceptar em um, e apenas um, ponto se, e somente se, elas não forem paralelas. Disso, pela análise da Geometria Analítica, conforme **COROLÁRIO 3.22**, as retas (27) e (28) terão uma relação de intercepção em apenas um ponto, seguindo o item (a), se:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \quad \text{ou} \quad AB' - A'B \neq 0.$$

Com essas análises de relação entre retas pela equação, o estudante compreende o seguinte teorema que resume os resultados.

TEOREMA 3.44: Sendo $Ax + By + C = 0$ e $A'x + B'y + C' = 0$ as equações de duas retas, então as relações seguintes são condições necessárias e suficientes para:

- a. Paralelismo $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ou $AB' - A'B = 0$;
- b. Perpendicularismo $AA' + BB' = 0$;
- c. Coincidência $A = kA', B = kB'$ e $C = kC'$, com $k \neq 0$;
- d. Interseção em um, e apenas um, ponto $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ ou $AB' - A'B \neq 0$.

O exemplo a seguir é apresentado para dar compreensão ao estudo.

EXEMPLO 3.45: Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(-1, -3)$ e é perpendicular a reta $3x - 4y + 11 = 0$.

Solução: Sabendo que a equação da reta $Ax + By + C = 0$ é perpendicular à reta $3x - 4y + 11 = 0$, então pelo **TEOREMA 3.44** tem-se:

$$\begin{aligned} A \cdot 3 + B \cdot (-4) &= 0 \\ 3A - 4B &= 0 \\ 3A &= 4B \\ A &= \frac{4}{3}B. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}Bx + By + C &= 0 \\ 4Bx + 3By + 3C &= 0 \\ 4x + 3y + \frac{3C}{B} &= 0 \end{aligned}$$

Tomando por $k = \frac{3C}{B}$, tem-se:

$$4x + 3y + k = 0$$

Como a reta requerida passa pelo ponto $(-1, -3)$, então:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) + k &= 0 \\ -4 - 9 + k &= 0 \\ -13 + k &= 0 \\ k &= 13 \end{aligned}$$

Portanto, a equação da reta procurada é $4x + 3y + 13 = 0$.

Com os estudos sobre reta até o momento, o estudante pode seguir para a compreensão de famílias de retas.

3.9 FAMÍLIAS DE RETAS

O estudo da família de retas é importante na Geometria Analítica, pois permite uma compreensão mais profunda de como as retas podem ser caracterizadas e manipuladas no

plano cartesiano. Quando uma reta é definida por duas condições, ela é única. No entanto, se apenas uma condição é aplicada, resulta em uma infinidade de retas que compartilham uma propriedade comum, formando uma família de retas.

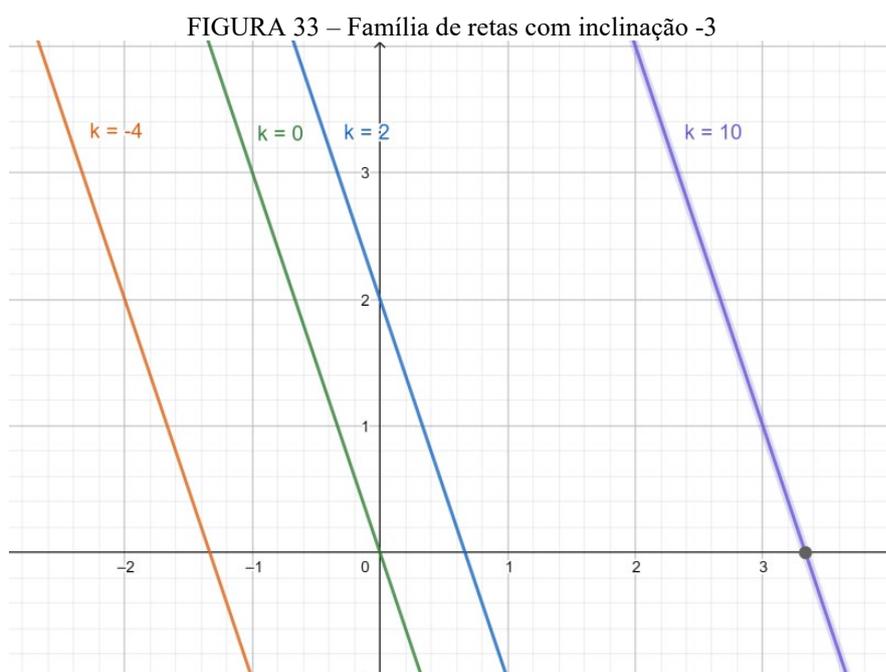
O estudo de retas mostra que uma reta e sua equação são, cada uma, incontestavelmente determinadas sempre por duas condições. Assim, se uma reta satisfaz apenas uma condição então ela não é mais única, ou seja, há uma infinidade de tais retas, com cada uma delas tendo uma propriedade comum associada à condição única. Como consequência desse fato, Lemahnn (1982, p. 77), apresenta a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.46: A totalidade de retas que satisfazem uma só condição geométrica é denominada uma *família* ou *sistema de retas*¹⁴.

Para elucidar a definição, analisa-se o caso a considerar todas as retas com a condição única de declividade -3 . A totalidade dessas retas é uma família de retas paralelas, com todas apresentando a declividade -3 , e são representadas analiticamente pela equação:

$$y = -3x + k, \quad (34)$$

onde k é uma constante arbitrária pertencente ao conjunto dos números reais. A FIGURA 33 ilustra essa família de retas representada pela equação da relação (34).



Fonte: Pesquisadora.

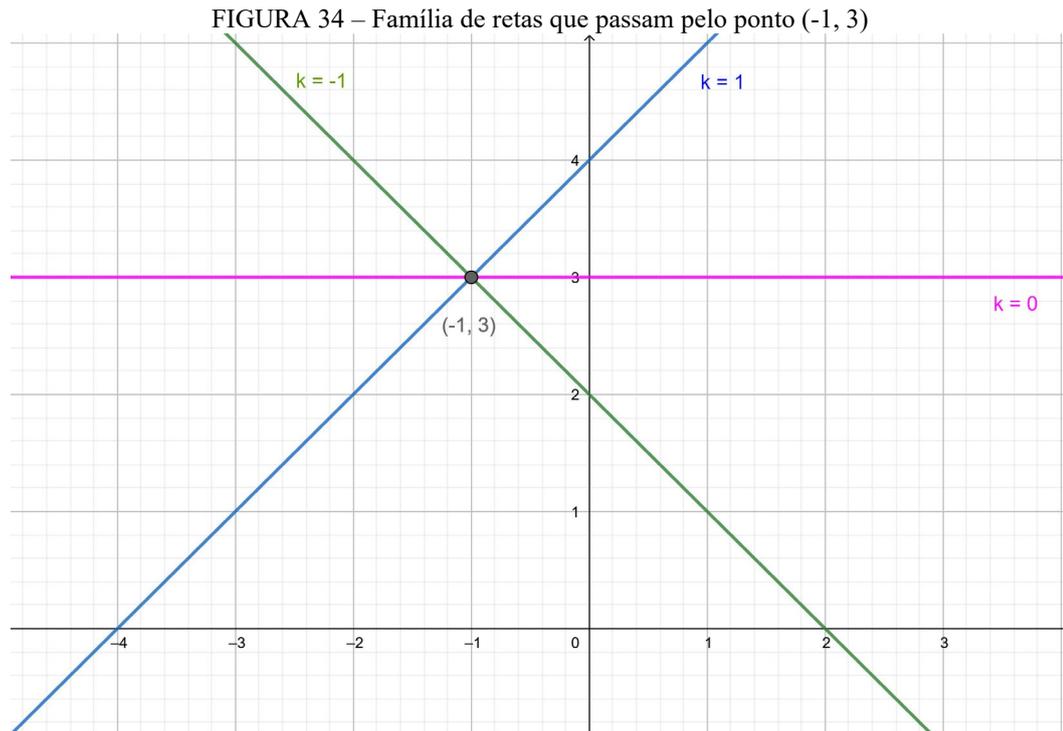
¹⁴ Destaque do próprio autor.

Outro exemplo a ser citado é o caso de todas as retas que passam pelo ponto $(-1, 3)$, no qual a família de retas pode ser analiticamente representada pela equação:

$$y - 3 = k(x + 1), \quad (35)$$

onde k é a declividade e pode assumir qualquer valor real.

A família de retas representada pela equação (35) é representada na FIGURA 34.



Fonte: Pesquisadora

Como k não é definido para uma reta paralela ao eixo das ordenadas, então a equação da relação (35) não inclui a reta $x = -1$, que também passa pelo ponto $(-1, 3)$. A família de retas representadas pela equação da relação (35) é denominada *feixe de retas* com ponto $(-1, 3)$ como seu *vértice*.

Observa que das relações (34) e (35), se obteve uma reta de uma família atribuindo um valor particular à constante arbitrária k . Devido à grande importância dessa constante, k é denominado um *parâmetro* da família.

Por Valladares (1990, p. 56) tem-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.47: Dado um ponto em \mathbb{R}^2 , $P_0(x_0, y_0)$, chama-se de *feixe de retas de centro* P_0 , ao conjunto $F(P_0)$, de todas as retas que se interceptam em P_0 .

Assim, entende-se que uma reta qualquer $r \in F(P_0)$ se, e somente se, cumprir com o item (d) do **TEOREMA 3.44**.

O conceito de família de retas é favorável para a determinação da equação de uma reta particular. Lehmann (1982, p. 77), comenta que deve estar claro para o estudante que para essa determinação de uma reta particular, o processo consiste em duas etapas: “Primeiro, a equação da família de retas é escrita de maneira a satisfazer uma dada condição; segundo, o valor do parâmetro da família é então determinado por aplicação da outra condição dada.”

Segue uma situação para exemplificar esses conceitos apresentados.

EXEMPLO 3.48: Determinar o parâmetro k de maneira que uma reta da família $kx - y + 8 = 0$ possa passar pelo ponto $(-2, 4)$. Então, determinar a equação da reta.

Solução: A família de retas foi dada nessa situação. Organizando, tem-se:

$$\begin{aligned} kx - y + 8 &= 0 \\ kx - y &= -8 \\ \frac{kx}{-8} + \frac{y}{8} &= 1 \\ \frac{x}{-\frac{8}{k}} + \frac{y}{8} &= 1 \end{aligned}$$

Pelo **TEOREMA 3.39**, a família de retas intercepta o eixo das coordenadas no ponto $(0, 8)$, sendo esse o seu vértice.

Como uma condição, uma das retas da família passa pelo ponto $(-2, 4)$. Substituindo na equação que representa a família, tem-se:

$$\begin{aligned} k(-2) - 4 + 8 &= 0 \\ -2k &= 4 - 8 \\ -2k &= -4 \\ k &= 2. \end{aligned}$$

E, para determinar da reta que passa pelo ponto $(-2, 4)$, substituí o valor encontrado do parâmetro k na equação da família, o que resulta:

$$\begin{aligned} 2x - y + 8 &= 0 \\ y &= 2x + 8. \end{aligned}$$

Logo, a equação procurada é $y = 2x + 8$.

Considerando todos os conceitos discutidos neste capítulo, estruturados de acordo com a sequência inspirada pelas ideias de Vygotsky, pode-se inferir que o estudante de Geometria Analítica desenvolve uma compreensão sólida e encontra significado no estudo das retas. A abordagem progressiva e orientada permite que o estudante internalize os fundamentos das retas, facilitando a transição para a análise de outras curvas. Esta metodologia não apenas reforça a compreensão conceitual, mas também promove a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos, preparando o estudante para enfrentar problemas mais complexos.

À medida que o estudante avança no estudo das curvas, ele é introduzido a uma variedade de formas geométricas, cada uma com suas propriedades e aplicações específicas. Esse aprofundamento é essencial para a compreensão completa da Geometria Analítica, pois permite a exploração de elipses, parábolas, hipérbolas e outras curvas. A transição gradual do estudo das retas para outras curvas assegura que o estudante desenvolva uma visão abrangente e integrada da Geometria, capacitando-o a aplicar esses conceitos em contextos variados, tanto teóricos quanto práticos.

Assim, a progressão do conteúdo, aliada a uma base teórica sólida, facilita o desenvolvimento das habilidades analíticas e críticas necessárias para o domínio da Geometria Analítica. Este método, fundamentado na pedagogia de Vygotsky, valoriza o processo de aprendizagem contínua e contextualizada, garantindo que o estudante esteja bem preparado para desafios acadêmicos e profissionais futuros.

4 A CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência é também uma curva familiar ao estudante de Geometria. Como a reta, a circunferência também é definida baseada em um conjunto de pontos, mas com uma organização de distância constante entre esses pontos e um ponto fixo, tendo assim seu lugar geométrico.

“A circunferência é uma linha fechada em um plano, em que todos os pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado centro. Cada segmento de reta com uma extremidade no centro e outra na circunferência é chamado de raio.”
(SOUZA, 2010)

Segundo Lehmann (1982, p. 85), o lugar geométrico de uma circunferência é o movimento de um ponto permanecendo sempre a uma distância constante de um ponto fixo.

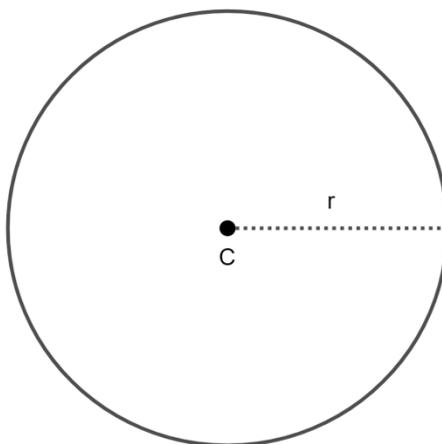
Para fazer sentido, sugerimos nessa pesquisa o estudo da circunferência partindo do conceito do seu lugar geométrico para posteriormente analisar suas representações geométricas e algébricas.

4.1 A EQUAÇÃO PADRÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Sendo a circunferência uma curva conhecida, analisam-se então dois conceitos que acredita que conflitam, mas que se complementam para a definição da curva.

Pensando em uma curva com dois pontos equidistantes, no qual um é fixo e outro é móvel, tem-se a representação desse lugar geométrico pela FIGURA 35.

FIGURA 35 – Representação da circunferência C



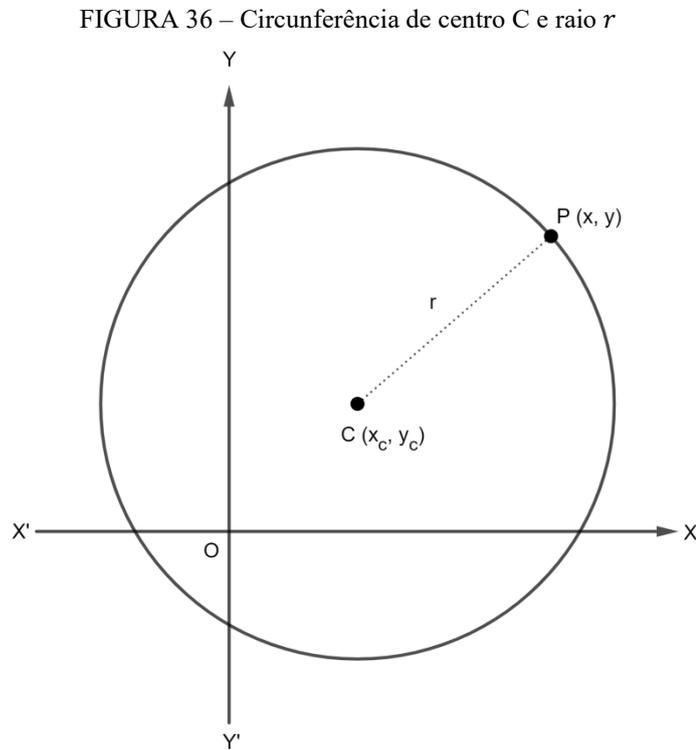
FONTE: Pesquisadora.

Segundo Lehmann (1982, p. 85), por essa representação segue a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.1: Uma *circunferência* é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que está sempre a uma distância constante de um ponto fixo no referido plano¹⁵.

O ponto fixo recebe a denominação de *centro* da circunferência e a distância constante de *raio* da circunferência.

Agora, pensando em $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à circunferência cujo centro está em $C(x_c, y_c)$ pode ser representado conforme FIGURA 36.



FONTE: Pesquisadora.

E por Rezende & Queiroz (2008, p. 25), tem-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.2: Seja C um ponto e r um número real positivo. Define-se a *circunferência* de centro C e raio r , a qual se denota por $\mathcal{C}(C, r)$, como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto C .

¹⁵ Destaque do próprio autor.

Então, pela **DEFINIÇÃO 4.2**, o ponto P deve satisfazer a condição geométrica de

$$|\overline{CP}| = r, \quad (36)$$

que, pelo **TEOREMA 3.14**, pode ser expressa analiticamente pela equação:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2. \end{aligned} \quad (37)$$

De modo inverso, sendo $P_1(x_1, y_1)$ um ponto qualquer cujas coordenadas satisfazem a equação da relação (37), então:

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= r^2 \\ \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} &= r, \end{aligned}$$

que é a expressão analítica da condição (36) aplicada no ponto P_1 .

Com isso, adaptando a apresentação de Lehmann (1982, p. 85), tem-se o seguinte teorema:

TEOREMA 4.3: A circunferência cujo centro é o ponto dado $C(x_c, y_c)$ e cujo raio é a constante dada r , tem por equação:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2. \quad (38)$$

A equação (38) é denominada de *equação padrão* ou a *forma padrão* de uma circunferência. A partir da equação padrão de uma curva se obtém características importantes sem muitas manipulações algébricas, como no caso da equação padrão da circunferência que informa de maneira imediata as coordenadas do seu centro e do seu raio.

Para melhor compreender esses conceitos, seguem-se exemplos.

EXEMPLO 4.4: Determinar a equação padrão de uma circunferência cujo centro é $(-3, 2)$ e o raio é 4.

Solução: Sendo o centro $(-3, 2)$ e o raio 4 então, pelo **TEOREMA 4.3**, tem-se:

$$\begin{aligned} [x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 &= 4^2 \\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16. \end{aligned}$$

Portanto, a equação padrão da circunferência referida é $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

EXEMPLO 4.5: Encontrar a equação padrão da circunferência que tem um diâmetro cujos extremos são $(2, 3)$ e $(-4, 5)$.

Solução: Sabendo que, pela Geometria, o diâmetro é um segmento que passa pelo centro de uma circunferência ligando dois de seus pontos. Então, sendo $(2, 3)$ e $(-4, 5)$ os extremos do diâmetro da circunferência requerida, tem-se que o diâmetro corresponde à distância entre os pontos. Tomando por d o diâmetro então, pelo **TEOREMA 3.1**, obtém-se:

$$d = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (5 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 4}$$

$$d = \sqrt{40}$$

$$d = 2\sqrt{10}.$$

Sendo o raio de uma circunferência a metade do diâmetro, então:

$$r = \frac{d}{2}$$

$$r = \frac{2\sqrt{10}}{2}$$

$$r = \sqrt{10}.$$

E, sendo o centro o ponto médio entre os extremos do diâmetro, tem-se:

$$C\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{-2}{2}, \frac{8}{2}\right)$$

$$C(-1, 4).$$

Assim, pelo **TEOREMA 4.3**, obtém-se:

$$[x - (-1)]^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10.$$

Portanto, a equação padrão da circunferência referida é $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$.

Conhecer e calcular a equação de uma circunferência permite a modelagem precisa de fenômenos circulares. A equação facilita a determinação de propriedades importantes como o raio, o centro e a localização de pontos em relação à circunferência, possibilitando análises e projeções precisas em diversas aplicações práticas e teóricas.

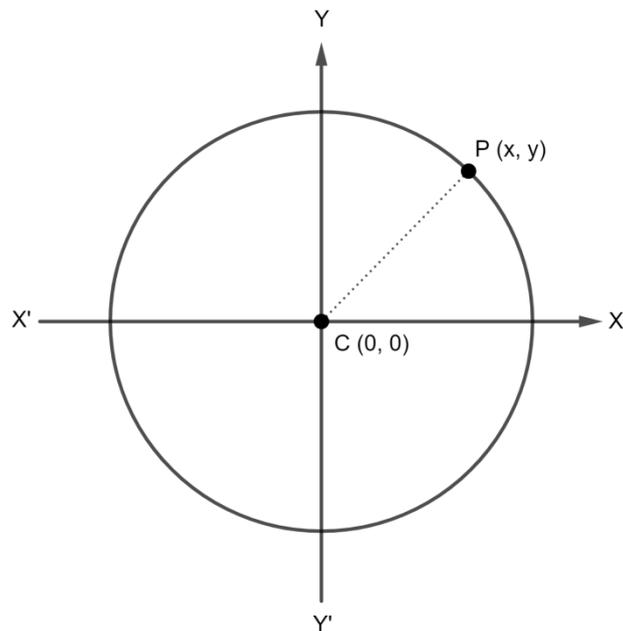
4.2 A EQUAÇÃO CANÔNICA DA CIRCUNFERÊNCIA

Entender e calcular a equação canônica de uma circunferência é importante porque permite identificar diretamente o centro e o raio da circunferência. Essa equação simplifica a análise geométrica e facilita a resolução de problemas relacionados a distâncias, interseções e posicionamento de objetos circulares. Isso é fundamental em disciplinas como Geometria, Engenharia e Computação Gráfica, onde a precisão e a clareza na representação de formas circulares são essenciais.

O ponto fixo da circunferência, o centro, pode estar localizado em qualquer local do plano de eixos coordenados, porém quando a origem for sua posição então haverá um caso especial de análise.

Partindo de que o centro está sobre a origem observa-se que então têm coordenadas $(0, 0)$, conforme FIGURA 37.

FIGURA 37 – Circunferência de centro na origem



FONTE: Pesquisadora.

Sabendo que a circunferência em análise tem $x_c = 0$ e $y_c = 0$ então, pelo **TEOREMA 4.3**, segue que:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Analisando a equação acima, observa uma escrita mais simples da equação padrão da circunferência para o caso do seu centro estar localizado na origem. Com isso, por Lehmann (1982, p. 86), segue o seguinte corolário:

COROLÁRIO 4.6: A circunferência cujo centro é a origem e cujo raio é a constante dada r tem por equação

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (39)$$

Em Matemática, quando se referencia uma forma simples de apresentar algum objeto matemático como *forma canônica*. Uma equação na *forma canônica* é a forma mais simples de uma equação padrão de uma curva. Portanto, a equação (39) é a forma canônica da equação de uma circunferência.

Segue à um exemplo para exemplificar o conceito de equação canônica de uma circunferência.

EXEMPLO 4.7: Determinar a equação da circunferência que passa pelo ponto $(7, -5)$ e cujo centro é a origem.

Solução: Sendo o centro da circunferência em estudo está na origem, então a coordenada é dada por $(0, 0)$ e sendo $(7, -5)$ um ponto pertencente a essa circunferência, então pelo **COROLÁRIO 4.6** tem-se:

$$7^2 + (-5)^2 = r^2$$

$$49 + 25 = r^2$$

$$r^2 = 74.$$

Portanto, a equação na forma canônica da circunferência referida é $x^2 + y^2 = 74$.

O conceito de equação canônica deve estar claro ao estudante, pois ela se refere à circunferência cujo centro coincide com a origem do plano cartesiano. Com esse entendimento, é possível explorar outras formas de representar a circunferência pela escrita algébrica de uma equação, permitindo a análise de circunferências deslocadas no plano e facilitando a compreensão de suas propriedades e aplicações em problemas mais complexos. Além disso, o domínio dessas equações é crucial para a resolução de questões práticas e teóricas em diversas áreas da ciência e engenharia.

4.3 A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Entende-se que uma curva pode ser apresentada de diversas maneiras, perpassando pela representação geométrica, observando e entendendo o comportamento dessa curva em um plano coordenado, à representação algébrica, que trata de uma visão geral e abstrata representada por equações que modelam um padrão geral da curva.

O desenvolvimento desse modelo algébrico, a equação da curva, tem sua origem do desenvolvimento do pensamento algébrico que tem sua importância na ampliação do estudante organizar e resolver situações-problemas de diversas áreas.

Segundo Becher e Groenwald (2010, p. 246),

“Na opinião dos pesquisadores em Educação Matemática, existe uma convergência, no sentido de que o pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial.”

Compreende-se, portanto, a relevância em apresentar o desenvolvimento algébrico da representação da circunferência, ou seja, desenvolver em conjunto com os estudantes de Geometria Analítica a representação geral dessa curva levando em consideração os seus conhecimentos.

Assim, ao ser definida a equação padrão de uma circunferência, um estudo algébrico pode ser feito a partir dela. Assim, desenvolvendo a equação (38):

$$\begin{aligned}(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2xx_c + x_c^2 + y^2 - 2yy_c + y_c^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2xx_c - 2yy_c + x_c^2 + y_c^2 - r^2 &= 0.\end{aligned}\tag{40}$$

Tomando por $D = -2x_c$, $E = -2y_c$ e $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2$ então se reescreve (40) como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.\tag{41}$$

Dos estudos anteriores, há o conhecimento que uma equação é dita *geral* quando reorganizada de forma a estar igualada ao elemento nulo da adição. Portanto, a equação (41) é a *equação geral* da circunferência.

Assim, tem-se que qualquer circunferência pode ser escrita na forma (41). Porém, necessita analisar se o processo inverso é válido, ou seja, se toda equação da forma geral (41) representa uma circunferência.

Para encontrar uma resposta a essa análise, deve ser reescrita a equação da forma (41) na forma da equação (37), ou seja, reorganizando e completando quadrados tem-se:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\
 (x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) &= -F \\
 \left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) &= -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} \\
 \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 &= \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Comparando (41) e (37), observa-se que o segundo membro de (41) é o critério que determina se essa equação define ou não uma circunferência, pois se tem pela comparação que:

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.$$

Por essa análise, há algumas considerações a serem feitas. Portanto, três casos a serem analisados:

a) Caso $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

Se $D^2 + E^2 - 4F > 0$ implica em (41) representar uma circunferência de centro é o ponto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e raio igual a $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

b) Caso $D^2 + E^2 - 4F = 0$.

Se $D^2 + E^2 - 4F = 0$ implica em (41) representar uma circunferência de centro é o ponto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e raio igual a zero. Essa circunferência é denominada como uma *circunferência ponto* ou uma *circunferência nula*. Portanto, pode ser considerado que a equação (41) representa o ponto isolado $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ como seu lugar geométrico.

c) Caso $D^2 + E^2 - 4F < 0$.

Se $D^2 + E^2 - 4F < 0$ implica em (41) representar uma circunferência imaginária. Portanto, para o estudo da Geometria no campo real, essa circunferência *não tem lugar geométrico*.

Observa-se que o caso **(b)** representa uma forma limite do caso **(a)**. Porém, para trazer sentido ao estudante que não tem um aprofundamento no ensino básico, é considerado que uma equação representa uma circunferência como seu lugar geométrico se, e somente se, a equação recair no caso **(a)**. Desse fato, segue o seguinte teorema:

TEOREMA 4.8: A equação $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência de raio não nulo se, e somente se, $D^2 + E^2 - 4F > 0$. Então, as coordenadas do seu centro são $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e o seu raio é $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

Lehmann (1982, p. 90) faz uma nota comentando que,

“Se a equação de uma circunferência é dada na forma geral, o estudante é advertido a não proceder de maneira mecânica e usar os valores dados no teorema [...] como fórmulas para obtenção do centro e do raio. Em vez disso deverá reduzir a equação à forma padrão pelo método de completar quadrados, como na dedução do próprio teorema.”

Pensa-se que esse processo descrito em nota pelo pesquisador traz mais sentido no entendimento da situação-problema apresentado, pois não é meramente uma aplicação de fórmulas e sim um estudo do caso apresentado.

Com isso, apresenta os seguintes exemplos como forma de elucidar o estudo apresentado da equação geral da circunferência.

EXEMPLO 4.9: Analise se a equação $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ representa uma circunferência.

Solução: Reorganizando e aplicando o método de completar quadrado na equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 &= 0 \\ (2x^2 - 6x) + (2y^2 + 10y) &= -7 \\ \left(2x^2 - 6x + \frac{9}{4}\right) + \left(2y^2 + 10y + \frac{25}{4}\right) &= -7 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\ 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{8}\right) + 2\left(y^2 + 5y + \frac{25}{8}\right) &= \frac{6}{4} \\ \left(x^2 - 3x + \frac{9}{8}\right) + \left(y^2 + 5y + \frac{25}{8}\right) &= \frac{6}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{8} + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8} &= \frac{6}{8} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{6}{8} + \frac{9}{8} + \frac{25}{8} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 &= 5. \end{aligned}$$

Portanto, a equação $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ representa uma circunferência de centro no ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ e raio $\sqrt{5}$.

EXEMPLO 4.10: Verifique se a equação $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$ determina ou não uma circunferência.

Solução: Reorganizando e aplicando o método de completar quadrado na equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 &= 0 \\ (4x^2 + 28x) + (4y^2 - 8y) &= -53 \\ (4x^2 + 28x + 49) + (4y^2 - 8y + 4) &= -53 + 49 + 4 \\ 4\left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right) + 4(y^2 - 2y + 1) &= 0 \\ \left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right) + (y^2 - 2y + 1) &= 0 \\ \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a equação $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$ representa o ponto $\left(-\frac{7}{2}, 1\right)$.

EXEMPLO 4.11: Dada a equação $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$, analise se ela representa ou não uma circunferência.

Solução: Reorganizando e aplicando o método de completar quadrado na equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 &= 0 \\ (16x^2 - 64x) + (16y^2 + 8y) &= -177 \\ (16x^2 - 64x + 2) + (16y^2 + 8y + 1) &= -177 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16\left(x^2 - 4x + \frac{1}{8}\right) + 16\left(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) &= -174 \\
\left(x^2 - 4x + \frac{1}{8}\right) + \left(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) &= -\frac{174}{16} \\
(x-2)^2 + \frac{1}{8} + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &= -\frac{87}{8} \\
(x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &= -\frac{87}{8} - \frac{1}{8} \\
(x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &= -11
\end{aligned}$$

Portanto, a equação $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$ não tem lugar geométrico.

A forma geral da equação da circunferência desempenha um papel importante em diversas aplicações práticas e teóricas. Por exemplo, na Engenharia Civil, essa equação é frequentemente utilizada para projetar estruturas circulares, como pontes e túneis, garantindo sua estabilidade e segurança. Em Física, a equação geral da circunferência é empregada na análise de movimentos circulares e na descrição de órbitas de corpos celestes, auxiliando na compreensão dos fenômenos cósmicos e na navegação espacial. Além disso, na Computação Gráfica, essa equação é essencial para gerar imagens de objetos circulares em telas digitais, possibilitando a criação de interfaces intuitivas e realistas em aplicativos e jogos. Em resumo, a forma geral da equação da circunferência é uma ferramenta versátil que permeia diversos campos do conhecimento, contribuindo significativamente para o avanço da ciência, tecnologia e engenharia.

Assim, com os conceitos apresentados até agora, o estudante de Geometria Analítica obterá uma base sólida para entender os estudos posteriores, que abordarão outras propriedades e aplicações da circunferência. Essa compreensão inicial é fundamental para avançar em tópicos mais complexos, como tangentes, secantes, arcos e setores, bem como para resolver problemas práticos e teóricos que envolvem a circunferência em diferentes contextos matemáticos e científicos.

O estudo avançará para a determinação de circunferências através de três condições específicas, o que permitirá ao estudante aprofundar ainda mais seu conhecimento e aplicação das propriedades geométricas das circunferências.

4.4 CIRCUNFERÊNCIAS DETERMINADA POR TRÊS CONDIÇÕES

SONNETS OF A GEOMETER

The Circle

*Few things are perfect: we bear Eden's scar;
 Yet faulty man was godlike in design
 He drew me on the sand. Then what could mar
 His joy in that obedient mystic line;
 And then, computing with a zeal divine,
 He called π 3-point-14159
 And knew my lovely circuit $2\pi r!$*

*A circle is a happy thing to be –
 Think how the joyful perpendicular
 Erected at the kiss of a tangency
 Must meet my central point, my avatar!
 They talk of 14 points: yet only 3
 Determine every circle: Q. E. D.¹⁶ (MORLEY, 1920, p. 73)*

O *Soneto de um Geômetra: o Círculo*, de Christopher Morley (1880 – 1957), citado em livros de pesquisa científica por vários geômetras como Carrol & Rykken (2018, p. 189) e Coxeter (1980, p. 79), apresenta de forma poética algumas características e propriedades do círculo e, por consequência, da circunferência como o fato de três pontos distintos a determinarem.

Para a Geometria, nesse caso de estudo euclidiano, três pontos distintos definem uma circunferência. Pois sabendo que com três pontos distintos pode ser definido um triângulo, no qual esses pontos serão seus vértices, e circunscrevendo uma circunferência ao redor de um triângulo então o circuncentro desse triângulo também será o centro e os vértices pertencerão a essa circunferência.

Disso há a seguinte proposição, apresentada por Neto (2013, p. 116):

¹⁶“Poucas coisas são perfeitas: carregamos a cicatriz do Éden;
 No entanto, o homem defeituoso era um design divino
 Ele me desenhou na areia. Então o que poderia estragar
 Sua alegria naquela linha mística obediente;
 E que, computando com zelo divino,
 Ele chamou π 3-ponto-14159
 E conhecia meu lindo circuito $2\pi r!$ ”

Um círculo é uma coisa feliz de ser –
 Pense como a alegre perpendicular
 Erguida no beijo de uma tangência
 Deve atender meu ponto central, meu avatar!
 Eles falam de 14 pontos: mas apenas 3
 Determine cada círculo: C. Q. D.” (Tradução pela pesquisadora).

PROPOSIÇÃO 4.12: Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito *circunscrito* ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.

Disso, geometricamente se tem que uma circunferência é inequivocamente determinada por três condições independentes. Observando pelo lado da Geometria Analítica, ou seja, analisando as equações já definidas tem-se que na equação padrão (38):

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2,$$

há três constantes arbitrárias, x_C , y_C e r .

De mesma observação, a equação geral (41):

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

também dispõem de três constantes arbitrárias, D , E e F .

Se toda circunferência pode ser representada de maneira algébrica pela equação padrão (38) ou pela equação geral (41), então a equação de qualquer circunferência particular pode ser obtida através da determinação dos valores das três constantes.

Apresentam-se os exemplos a seguir para melhor elucidar o estudo.

EXEMPLO 4.13: Determinar a equação, centro e raio da circunferência em que os pontos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ e $(4, 6)$ são pertencentes.

Solução: Sabendo que a circunferência passa pelos pontos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ e $(4, 6)$, então substituindo os pontos na equação geral tem-se:

Para $(2, -2)$:

$$\begin{aligned} 2^2 + (-2)^2 + D \cdot 2 + E \cdot (-2) + F &= 0 \\ 4 + 4 + 2D - 2E + F &= 0 \\ 2D - 2E + F &= -8 \end{aligned} \tag{43}$$

Para $(-1, 4)$:

$$\begin{aligned} (-1)^2 + 4^2 + D \cdot (-1) + E \cdot 4 + F &= 0 \\ 1 + 16 - D + 4E + F &= 0 \\ -D + 4E + F &= -17 \end{aligned} \tag{44}$$

Para $(4, 6)$:

$$\begin{aligned} 4^2 + 6^2 + D \cdot 4 + E \cdot 6 + F &= 0 \\ 16 + 36 + 4D + 6E + F &= 0 \\ 4D + 6E + F &= -52 \end{aligned} \tag{45}$$

Das equações (43), (44) e (45) resulta o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2D - 2E + F = -8 \\ -D + 4E + F = -17, \\ 4D + 6E + F = -52 \end{cases}$$

que tem por solução:

$$D = -\frac{16}{3}, \quad E = -\frac{25}{6}, \quad F = -\frac{17}{3}.$$

Substituindo a solução encontrada na equação geral e organizando, vem:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} &= 0 \\ 6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Fazendo as manipulações algébricas em (46) para completar quadrado, segue:

$$\begin{aligned} (6x^2 - 32x) + (6y^2 - 25y) &= 34 \\ 6\left(x^2 - \frac{16}{3}x\right) + 6\left(y^2 - \frac{25}{6}y\right) &= 34 \\ \left(x^2 - \frac{16}{3}x\right) + \left(y^2 - \frac{25}{6}y\right) &= \frac{34}{6} \\ \left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9}\right) + \left(y^2 - \frac{25}{6}y + \frac{625}{144}\right) &= \frac{34}{6} + \frac{64}{9} + \frac{625}{144} \\ \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{12}\right)^2 &= \frac{2465}{144} \end{aligned}$$

Portanto, a circunferência em estudo tem equação geral $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$, cujo centro é $\left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$ e o raio é $\frac{\sqrt{2465}}{12}$.

EXEMPLO 4.14: Determinar a equação da circunferência cujo centro está sobre a reta $4x + 7y + 5 = 0$ e os pontos $(-1, -4)$ e $(2, -1)$ são pertencentes a ela.

Solução: Sendo o centro $C(x_C, y_C)$ pertencente à reta $4x + 7y + 5 = 0$, então as coordenadas do ponto satisfazem as condições da reta. Logo,

$$\begin{aligned} 4x_C + 7y_C + 5 &= 0 \\ 4x_C + 7y_C &= -5. \end{aligned} \quad (47)$$

E sabe-se que os pontos $(-1, -4)$ e $(2, -1)$ pertencem a circunferência, então substituindo suas coordenadas na equação padrão, tem-se:

Para $(-1, -4)$:

$$(-1 - x_C)^2 + (-4 - y_C)^2 = r^2 \quad (48)$$

E para $(2, -1)$:

$$(2 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = r^2. \quad (49)$$

As equações (47), (48) e (49) formam um sistema nas incógnitas x_C , y_C e r , o qual possui como solução:

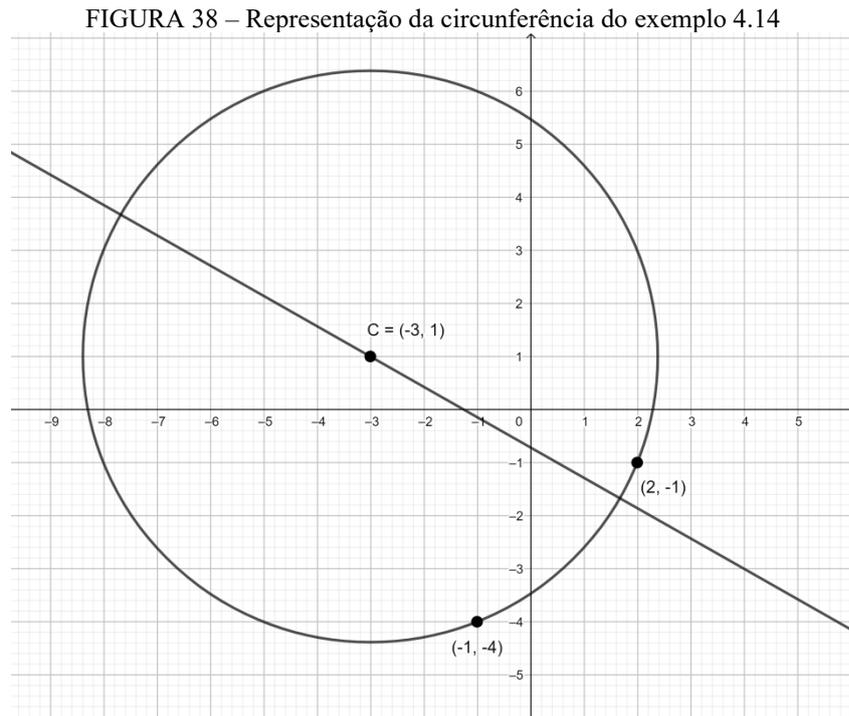
$$x = -3, \quad y = 1, \quad r = \sqrt{29}.$$

Logo, a equação da circunferência é dada por:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{29})^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29.$$

Portanto, a circunferência em estudo tem equação padrão $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$, cuja representação gráfica é apresentada na FIGURA 38.



FONTE: Pesquisadora.

Os estudos apresentados até o momento como sugestões de sequência didática, são conhecimentos que dão base ao estudante de Geometria Analítica compreender a ideia de circunferência, bem como compreender suas condições de existência, escritas algébricas e representações geométricas. Além disso, esses estudos propiciam o estudante a compreender famílias de circunferência, assunto que se sugere como continuidade de sequência.

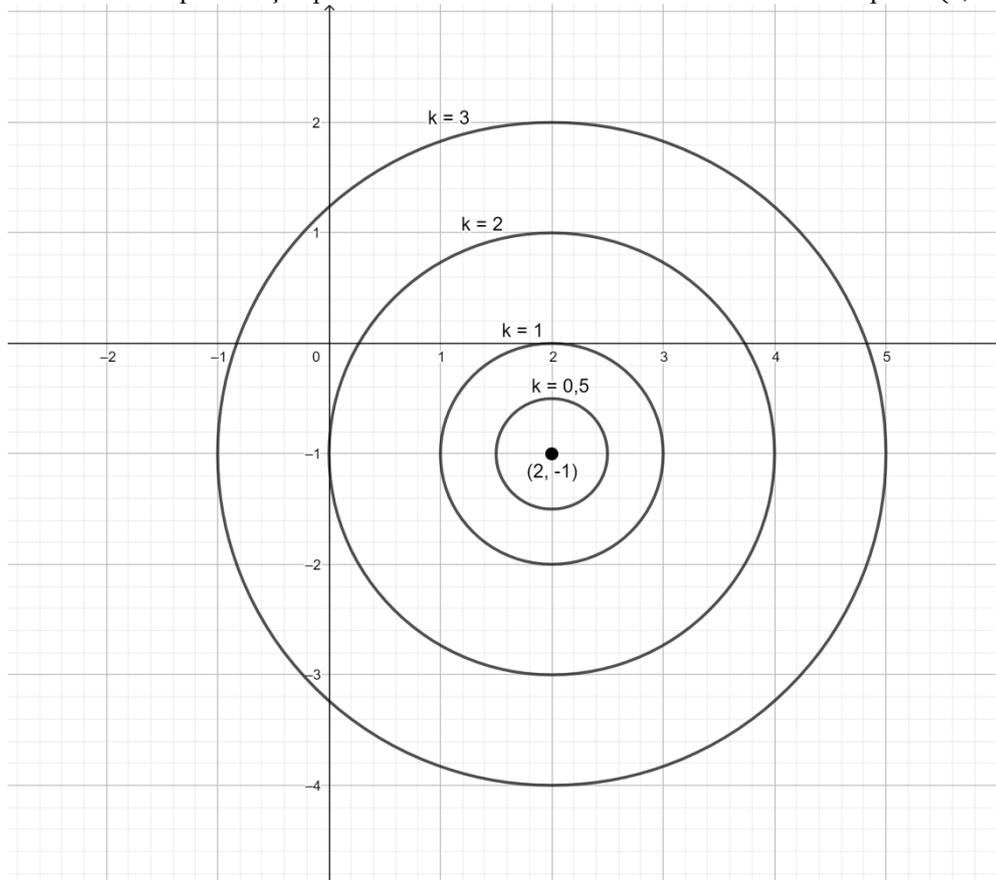
4.5 FAMÍLIAS DE CIRCUNFERÊNCIAS

Com os estudos anteriores, compreende-se que uma circunferência é determinada por três condições, sendo geométrica ou algebricamente. Porém, observa-se que uma circunferência não será única ao satisfazer menos de três condições.

Quando uma circunferência satisfaz duas condições e a terceira deixa arbitrária isso fará com que tenha uma equação com uma constante arbitrária, denominada *parâmetro*, e tal equação representa uma *família uniparamétrica*.

Para conjecturar essa ideia, apresenta-se a representações de algumas circunferências de centro $(2, -1)$, conforme FIGURA 39.

FIGURA 39 – Representação parcial da família de circunferências com centro no ponto $(2, -1)$

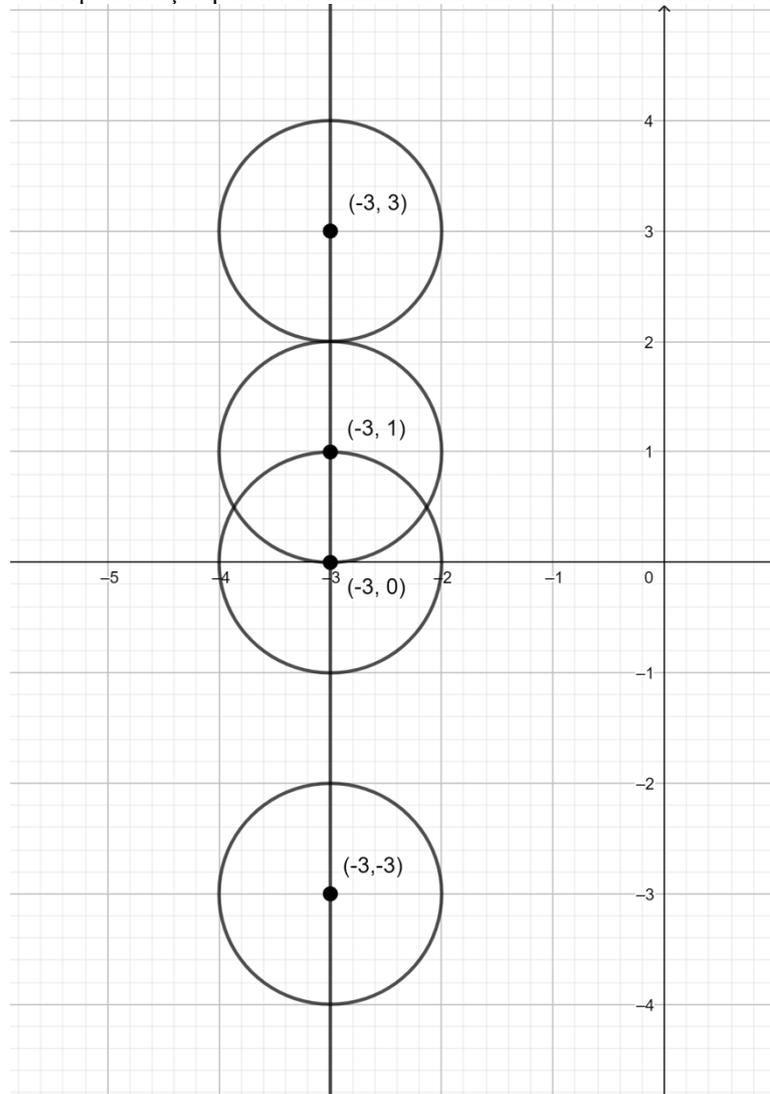


FONTE: Pesquisadora.

Essa imagem da FIGURA 39, elucida o conceito de uma família de circunferências com centro $(2, -1)$, que tem como equação padrão $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = k^2$, onde k é o parâmetro, definido por números positivos conforme **TEOREMA 4.8**.

Outra representação que pode ser pensada em conjunto com os estudantes são as circunferências com centro em uma reta, como exemplo apresentado na FIGURA 40.

FIGURA 40 – Representação parcial da família de circunferências com centro na reta $x = -3$



FONTE: Pesquisadora.

A imagem anterior elucidada o conceito é a família de circunferências de raio 1 e cujo centro está sobre a reta $x = -3$, que tem por equação padrão $(x + 3)^2 + (y - k)^2 = 1$, na qual o parâmetro refere-se à ordenada do centro.

Pensa-se que compreendendo o que é família de circunferências, o estudante terá base para dar continuidade ao estudo da relação de uma família de curvas com circunferências, ou seja, poderá seguir para o estudo do caso de famílias de curvas que passam pelas interseções de duas circunferências conhecidas.

Iniciando conhecendo duas circunferências genéricas C_1 e C_2 distintas, cujas representações algébricas são as seguintes equações gerais:

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad (50)$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \quad (51)$$

Como as interseções são dadas pela igualdade entre as equações, então se observa que as curvas que passam pelos pontos de interseção são representadas algebricamente pela combinação linear entre as equações (50) e (51), ou seja,

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0, \quad (52)$$

na qual o parâmetro k pode assumir valores reais.

Assim, se faz necessário analisar a relação entre as circunferências C_1 e C_2 para melhor compreender a família de circunferências que passam pela interseção entre elas.

a) Caso de C_1 e C_2 serem circunferências secantes.

Supondo os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ distintos serem os pontos de interseção entre C_1 e C_2 , então se as coordenadas (x_1, y_1) de P_1 satisfazem as equações (50) e (51) logo satisfarão a equação (50), se reduzindo a forma $0 + k \cdot 0 = 0$.

E, de forma análoga, então se as coordenadas (x_2, y_2) de P_2 satisfazem as equações (50) e (51) logo satisfarão a equação (50) para todos os valores de k . Assim, a equação (50) representa a família de curvas que passam pelos pontos de interseção das circunferências C_1 e C_2 .

Reorganizando a escrita da equação (50), colocando fatores comuns em evidência, tem-se:

$$(k + 1)x^2 + (k + 1)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0, \quad (53)$$

que é a equação que determina a natureza da família de curvas que passa pela interseção das circunferências C_1 e C_2 .

Pela equação (53), observa-se que:

- Se $k = -1$ então a equação é reduzida a uma equação do primeiro grau, representando uma reta.
- Se $k \neq -1$ então, pelo **TEOREMA 4.8**, a equação representa uma circunferência. Observa-se que no caso particular do parâmetro $k = 0$ a equação se reduz à C_1 .

b) Caso de C_1 e C_2 serem circunferências tangentes.

Supondo o ponto $P_1(x_1, y_1)$ o ponto de tangência entre as circunferências então, pela mesma argumentação do caso (a), mostra-se que para cada valor de $k \neq -1$ a equação representa uma circunferência tangente à C_1 e à C_2 .

c) Caso de C_1 e C_2 serem circunferências externas.

Considerando as circunferências C_1 e C_2 não terem ponto em comum, então analisa que as coordenadas de um ponto que satisfaz a equação (50) não irão satisfazer a equação (51) e, portanto, também não irão satisfazer a equação (53) para qualquer valor que o parâmetro k assumir.

De maneira semelhante, as coordenadas de um ponto que satisfaz a equação (50) não irão satisfazer a equação (51) e, portanto, também não irão satisfazer a equação (53) para qualquer valor que o parâmetro k assumir com exceção de $k = 0$ que reduz a equação à C_1 .

Assim, nenhuma circunferência da família, com exceção de C_1 , tem ponto em comum com C_1 e com C_2 . Para uma melhor análise, supondo $P_1(x_1, y_1)$ um ponto situado em qualquer membro da família (53), exceto C_1 , ao substituir suas coordenadas em (50) e (51) encontraremos valores não nulos, como k_1 e k_2 , respectivamente, o que torna a equação (53) da forma $k_1 + k \cdot k_2 = 0$, onde $k = -\frac{k_1}{k_2}$.

Isso significa que há apenas uma única circunferência da família da relação (53) que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$. Como P_1 foi tomado como qualquer ponto situado sobre qualquer membro da família de circunferências exceto C_1 , se conclui que não há duas circunferências da família da relação (53) com pontos comuns. Logo, o ponto P_1 não pode se situar sobre C_2 .

Para ficar mais claro esse conteúdo, segue um exemplo.

EXEMPLO 4.15: Determinar a equação da circunferência que passa pelas interseções entre as circunferências $C_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$, tendo seu centro sobre a reta $l: 2x + y - 14 = 0$.

Solução: Sabendo que a família de circunferências que passam pela interseção das duas circunferências em estudo é dada por:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + k(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) &= 0 \\
 x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + kx^2 + ky^2 - 4kx + 4ky - 8k &= 0 \\
 (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (-8-4k)x + (-4+4k)y + (11-8k) &= 0 \\
 x^2 + y^2 + \left(\frac{-8-4k}{k+1}\right)x + \left(\frac{-4+4k}{k+1}\right)y + \left(\frac{11-8k}{k+1}\right) &= 0,
 \end{aligned}$$

onde o parâmetro k deve ser determinado pela condição de que o centro da circunferência procurada está sobre a reta $2x + y - 14 = 0$.

Pelo **TEOREMA 4.8**, temos que o centro da circunferência procurada é dado por:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{-8-4k}{k+1}, \frac{-4+4k}{k+1} \right) \\
 &\left(\frac{8+4k}{2(k+1)}, \frac{4-4k}{2(k+1)} \right).
 \end{aligned}$$

Logo, o centro da circunferência procurada deve satisfazer a equação da reta. Assim, substituindo, tem-se:

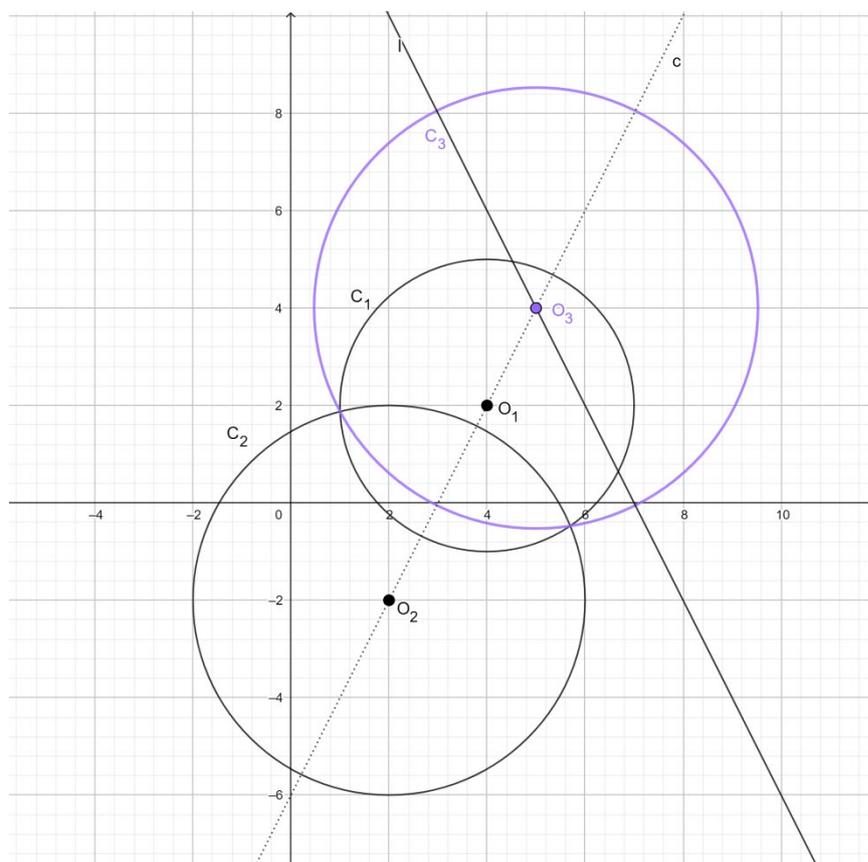
$$\begin{aligned}
 2 \cdot \frac{8+4k}{2(k+1)} + \frac{4-4k}{2(k+1)} - 14 &= 0 \\
 2(8+4k) + (4-4k) - 2(k+1)14 &= 0 \\
 -24k - 8 &= 0 \\
 k &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de k na equação que determina as famílias de curvas, vem:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + \left(\frac{-8+4\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}+1} \right)x + \left(\frac{-4+4\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}+1} \right)y + \left(\frac{11-8\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}+1} \right) &= 0 \\
 x^2 + y^2 - 10x - 8y + \frac{41}{2} &= 0 \\
 2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 &= 0
 \end{aligned}$$

Fazendo um análise geométrica da situação, obtém-se a imagem colocada na sequência:

FIGURA 41 – Representação geométrica da situação do exemplo 4.15



FONTE: Pesquisadora.

Portanto, a equação procurada é $2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 = 0$.

A reta que passa pelos centros de duas circunferências não concêntricas é denominada *reta dos centros*. Na FIGURA 41, foi traçada a reta c que passa pelos pontos O_1 e O_2 , centros das circunferências C_1 e C_2 , ou seja, a reta c é uma reta dos centros. Nota-se que O_3 está sobre a reta c .

Com isso, deseja-se mostrar que todas as circunferências da família da relação (50) têm uma reta dos centros comum com os centros das relações (50) e (49), denominadas por C_1 e C_2 .

De fato, pelo **TEOREMA 4.8**, o centro de C_1 é $\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$ e de C_2 é $\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$ logo, pelo **TEOREMA 3.37**, a equação da reta que contém esses dois pontos é dada por:

$$\begin{aligned}
y - \left(-\frac{E_1}{2}\right) &= \frac{-\frac{E_1}{2} - \left(-\frac{E_2}{2}\right)}{-\frac{D_1}{2} - \left(-\frac{D_2}{2}\right)} \left[x - \left(-\frac{D_1}{2}\right) \right] \\
y + \frac{E_1}{2} &= \frac{-\frac{E_1}{2} + \frac{E_2}{2}}{-\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2}} \left(x + \frac{D_1}{2} \right) \\
\frac{2y + E_1}{2} &= \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(\frac{2x + D_1}{2} \right) \\
2y + E_1 &= \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} (2x + D_1) \\
(2y + E_1)(-D_1 + D_2) &= (-E_1 + E_2)(2x + D_1) \\
-2D_1y - 2D_2y - D_1E_1 + D_2E_1 &= 2E_1x - D_1E_1 + 2E_2x + D_1E_2 \\
2E_1x - 2E_2x - 2D_1y - 2D_2y + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0 \\
2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Reorganizando a equação (54), tem-se:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{D_1 + kD_2}{k+1}\right)x + \left(\frac{E_1 + kE_2}{k+1}\right)y = -\frac{F_1 + kF_2}{k+1},$$

a qual, pelo **TEOREMA 4.8**, tem seu centro no ponto $\left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(k+1)}, -\frac{E_1 + kE_2}{2(k+1)}\right)$ então basta

analisar se as coordenadas satisfazem a relação (52). De fato,

$$\begin{aligned}
2(E_1 - E_2) \left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(k+1)}\right) - 2(D_1 - D_2) \left(-\frac{E_1 + kE_2}{2(k+1)}\right) + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0 \\
(E_1 - E_2) \left(-\frac{D_1 + kD_2}{k+1}\right) - (D_1 - D_2) \left(-\frac{E_1 + kE_2}{k+1}\right) &= D_1E_2 - D_2E_1 \\
(E_1 - E_2)(-D_1 - kD_2) - (D_1 - D_2)(-E_1 - kE_2) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
-D_1E_1 - kD_2E_1 + D_1E_2 + kD_2E_2 - (-D_1E_1 - kD_1E_2 + D_2E_1 + kD_2E_2) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
-D_1E_1 - kD_2E_1 + D_1E_2 + kD_2E_2 - D_1E_1 + kD_1E_2 - D_2E_1 - kD_2E_2 &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
-kD_2E_1 + D_1E_2 + kD_1E_2 - D_2E_1 &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
k(D_1E_2 - D_2E_1) + (D_1E_2 - D_2E_1) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
(D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1).
\end{aligned}$$

Portanto, todas as circunferências da família (50) têm uma reta dos centros comum com C_1 e C_2 .

Para esse contexto, compreende-se como família um conjunto de curvas com características comuns. No caso de uma circunferência, que para ser única deve satisfazer três condições, quando satisfaz duas condições abre similaridade com outras circunferências, tendo assim sua família.

Lehmann (1982, pp. 97-98), a partir dessas análises sobre família de circunferências, apresenta o seguinte teorema.

TEOREMA 4.16: Sendo as equações de quaisquer duas circunferências distintas, C_1 e C_2 , dadas por:

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

então a equação

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

representa uma família de circunferências todas elas tendo uma reta dos centros comum com C_1 e C_2 .

- Se C_1 e C_2 são circunferências secantes então para todos os valores de k , $k \neq -1$, a equação representa todas as circunferências que passam pelos dois pontos de interseção de C_1 e C_2 , com a única exceção da própria circunferência C_2 .
- Se C_1 e C_2 são circunferências mutuamente tangentes então para todos os valores de k , $k \neq -1$, a equação representa todas as circunferências que são tangentes tanto à C_1 quanto à C_2 em seu ponto comum, com a única exceção da própria C_2 .

Se C_1 e C_2 são circunferências externas, a equação representa uma circunferência para cada valor de k , $k \neq -1$, e tal que a equação resultante tem coeficientes satisfazendo as condições especificadas no **TEOREMA 4.8**. Não há duas circunferências da família tendo um ponto comum entre si ou com as circunferências C_1 e C_2 .

Até agora, o estudo da circunferência foi abordado detalhadamente, respeitando suas condições de existência e propriedades fundamentais. No entanto, para proporcionar um conhecimento mais completo e aprofundado ao estudante de Geometria Analítica, é imprescindível continuar explorando outras características e aspectos relevantes dessa figura geométrica. Essas informações adicionais devem ser apresentadas de maneira sequencial e lógica, facilitando a compreensão e assimilação dos conceitos por parte dos alunos, além de integrá-los de forma coerente ao conteúdo previamente estudado.

4.6 EIXO RADICAL

O estudo do eixo radical das circunferências é fundamental na Geometria Analítica devido às suas diversas aplicações em problemas geométricos e algébricos. O eixo radical, definido como o locus dos pontos que possuem potências iguais em relação a duas circunferências distintas, possui propriedades notáveis que facilitam a resolução de problemas complexos.

Primeiramente, o eixo radical é uma ferramenta crucial para determinar a posição relativa entre duas circunferências, fornecendo um método rigoroso para identificar se elas são tangentes, secantes ou não se interceptam. Essa análise é essencial em diversas áreas da matemática, incluindo a teoria das cônicas e a geometria do espaço. Além disso, o conceito de eixo radical tem aplicações práticas significativas em áreas como a física e a engenharia. Por exemplo, em problemas de localização e navegação, a utilização do eixo radical pode simplificar a determinação de pontos equidistantes a duas fontes de sinal, como em sistemas de posicionamento global (GPS). Outra aplicação relevante é encontrada na solução de problemas de potência de um ponto em relação a circunferências. O eixo radical facilita a determinação de tangentes comuns a duas circunferências, o que é frequentemente necessário em construções geométricas e otimização de trajetórias.

A compreensão do eixo radical também se estende a áreas mais avançadas da matemática, como a geometria diferencial e a topologia. Em particular, no estudo das superfícies e dos espaços métricos, o eixo radical oferece uma base para a generalização de conceitos e a exploração de novas propriedades geométricas.

Com o conceito de famílias de circunferências, o estudante teve como definição de duas circunferências distintas dadas, C_1 e C_2 , as equações (50) e (51). Destas equações, formou-se a equação (52), após uma reorganização algébrica, representando uma família de circunferências para todos os valores de $k \neq -1$. Porém, apresentou uma observação para $k = -1$, a qual se pretende apresentar uma discussão nesse momento.

Assumindo o valor de $k = -1$, a equação (52) toma a seguinte forma:

$$(-1 + 1)x^2 + (-1 + 1)y^2 + [D_1 + (-1)D_2]x + [E_1 + (-1)E_2]y + F_1 + (-1)F_2 = 0$$

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \quad (55)$$

Pela equação (53), não sendo as circunferências C_1 e C_2 concêntricas, então tem-se $D_1 \neq D_2$ ou $E_1 \neq E_2$ ou ambas as condições, de maneira a sempre ter pelo menos um dos

coeficientes, x e y , presentes. Com isso, essa equação representa uma reta denominada *eixo radical* de C_1 e C_2 .

Assim, tomando como base o **TEOREMA 4.16**, tem-se a seguinte análise:

- Se C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos distintos, então o eixo radical passa por esses dois pontos e, assim, coincide com sua corda comum.
- Se C_1 e C_2 são mutuamente tangentes, então seu eixo radical é tangente a ambas as circunferências em seu ponto comum.
- Se C_1 e C_2 não têm ponto em comum e não são concêntricas, então seu eixo radical não tem ponto em comum com qualquer uma das circunferências.

Com esses conceitos, passa-se a analisar a posição entre o eixo radical e a reta dos centros. No estudo de famílias de circunferências, a equação (52) representa a equação da reta dos centros de duas circunferências distintas, tomadas por C_1 e C_2 . Analisando sua declividade, tem-se:

$$\begin{aligned} 2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0 \\ 2(D_1 - D_2)y &= 2(E_1 - E_2)x + D_2E_1 - D_1E_2 \\ y &= \frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}x + \frac{D_2E_1 - D_1E_2}{2(D_1 - D_2)}. \end{aligned}$$

Logo, a declividade da reta dos centros de C_1 e C_2 é dada por $\frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}$, com $D_1 \neq$

D_2 .

E para a declividade do eixo radical, analisa-se a equação (53) que representa o eixo radical de duas circunferências quaisquer, tomadas por C_1 e C_2 . Assim,

$$\begin{aligned} (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 &= 0 \\ (E_1 - E_2)y &= -(D_1 - D_2)x - (F_1 - F_2) \\ y &= -\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}x - \frac{F_1 - F_2}{E_1 - E_2}. \end{aligned}$$

Logo, a declividade do eixo radical é dada por $-\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}$, para $E_1 \neq E_2$.

Analisando o produto da declividade da reta dos centros e do eixo radical de duas circunferências quais C_1 e C_2 , tem-se:

$$\frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2} \cdot \left(-\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2} \right) = -1.$$

Portanto, pelo **COROLÁRIO 3.23**, conclui-se que o eixo radical de quaisquer duas circunferências é *perpendicular* à sua reta dos centros.

Para melhor elucidar os conceitos apresentados, segue um exemplo.

EXEMPLO 4.17: Determinar a equação do eixo radical das circunferências $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ e $4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$ e mostrar que é perpendicular à sua reta dos centros.

Solução: Vamos tomar por:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$$

$$C_2: 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$$

Então, aplicando a resolução por sistemas, tem-se:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0 \end{cases}$$

Fazendo a multiplicação da equação de C_1 por 4, apresenta-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 8x - 40y + 40 = 0 & \text{(I)} \\ 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre (I) e (II), tem-se a equação:

$$-24x + 28y - 3 = 0$$

$$l: 24x - 28y + 3 = 0,$$

que é a equação do eixo radical.

E analisando a declividade:

$$24x - 28y + 3 = 0$$

$$28y = 24x + 3$$

$$y = \frac{24}{28}x + \frac{3}{28}.$$

Logo, a declividade do eixo radical é dada por $\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$.

Analisando os centros das circunferências C_1 e C_2 , tem-se:

- Para C_1 :

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y = -10$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) = -10 + 1 + 25$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 16$$

Logo, o centro de C_1 é no ponto $(1, 5)$.

- Para C_2 :

$$4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$$

$$(4x^2 - 32x + 64) + (4y^2 - 12y + 9) = -37 + 64 + 9$$

$$4\left(x^2 - 8x + 16\right) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = 36$$

$$(x-4)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$$

Logo, o centro de C_2 é no ponto $\left(4, \frac{3}{2}\right)$.

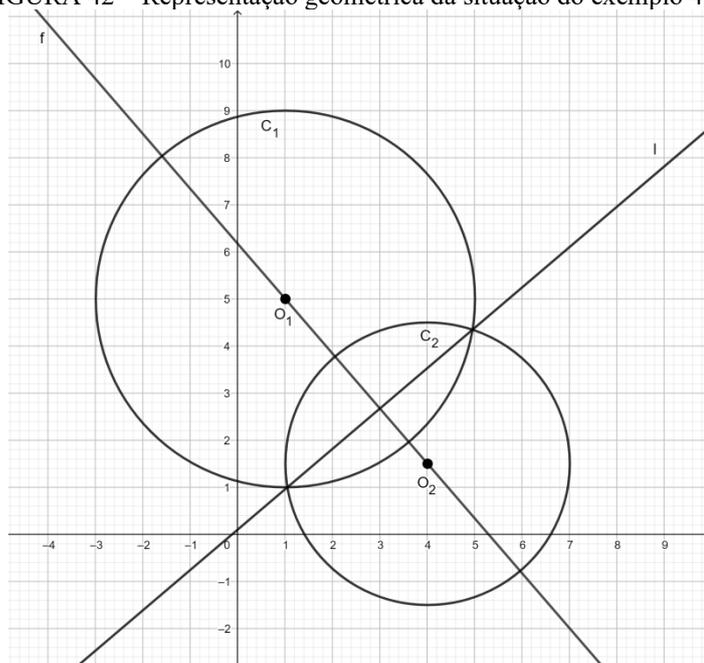
Assim, a declividade de sua reta dos centros é dada por:

$$\frac{\frac{3}{2} - 5}{4 - 1} = \frac{-\frac{7}{2}}{3} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}.$$

Assim, ao analisar o produto da declividade do eixo radical e da reta dos centros, tem-se $\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = -1$, o que faz o eixo radical é perpendicular à reta dos centros.

As circunferências C_1 e C_2 , sua reta dos centros e seu eixo radical l podem ser representadas graficamente, conforme mostra a FIGURA 42.

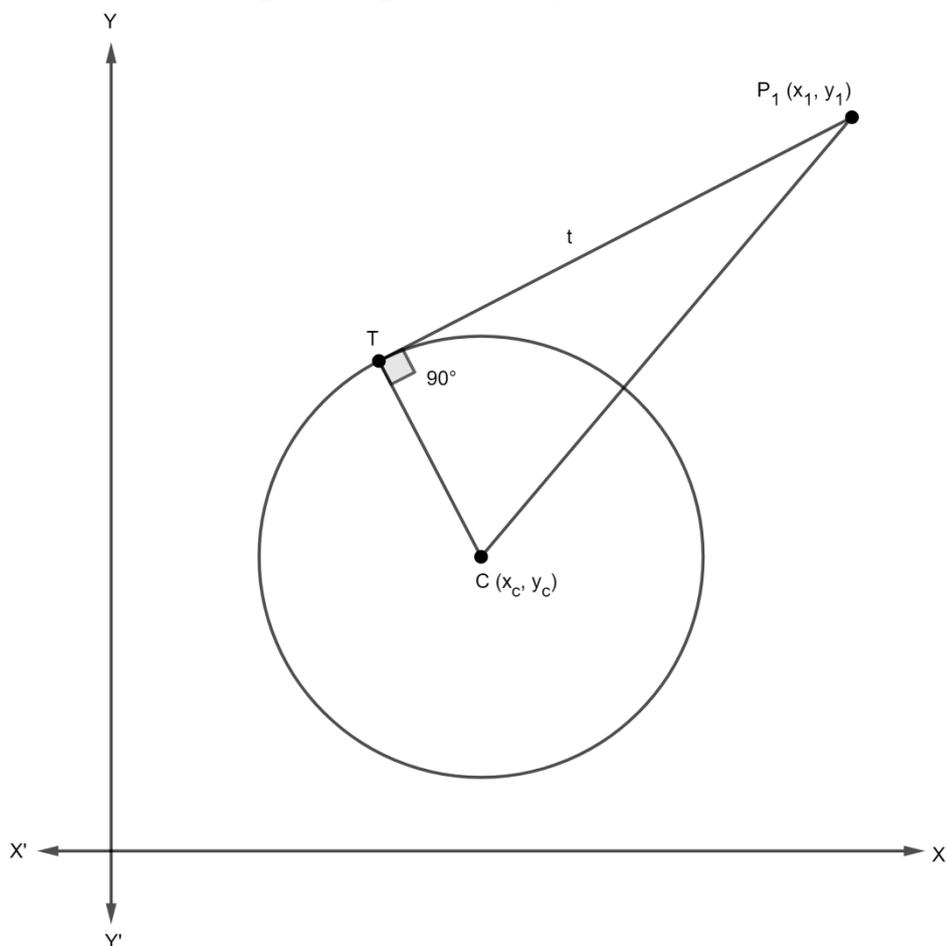
FIGURA 42 – Representação geométrica da situação do exemplo 4.17



FONTE: Pesquisadora.

Com objetivo de deduzir uma importante propriedade do eixo radical, toma-se por T o ponto de tangência de modo que $t = \overline{P_1T}$, conforme FIGURA 43. Sendo $\overline{P_1T}$ tangente à circunferência de centro $C(x_C, y_C)$, então o raio $r = \overline{CT}$ é perpendicular a $\overline{P_1T}$.

FIGURA 43 – Segmento tangente desde um ponto externo à circunferência



FONTE: Lehmann (1982, p. 100)

Sendo o triângulo P_1TC retângulo, então aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\begin{aligned} (\overline{CP_1})^2 &= t^2 + r^2 \\ t^2 &= (\overline{CP_1})^2 - r^2 \end{aligned} \quad (56)$$

Pelo **TEOREMA 3.14**, tem-se que:

$$(\overline{CP_1})^2 = (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 \quad (57)$$

Substituindo a equação (57) na equação (56), tem-se:

$$\begin{aligned} t^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2 \\ t &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2}. \end{aligned}$$

Com os conceitos apresentados, compreende-se melhor o seguinte teorema, apresentado por Lehmann (1982, p. 100),

TEOREMA 4.18: Se t é o comprimento do segmento de tangente traçada desde um ponto externo dado $P_1(x_1, y_1)$ a uma circunferência dada $(x - x_c)^2 - (y - y_c)^2 = r^2$, então

$$t = \sqrt{(x_1 - x_c)^2 - (y_1 - y_c)^2 - r^2}.$$

Uma observação que se faz do **TEOREMA 4.18** é que se tem conhecimento que por $P_1(x_1, y_1)$ podem ser traçadas duas tangentes à circunferência, porém deve ser deixado claro aos estudantes que essas tangentes possuem a mesma medida de comprimento e que, portanto, o resultado final não será modificado.

Segue um exemplo para clarificar o teorema apresentado.

EXEMPLO 4.19: Determinar o comprimento do segmento de tangente traçada desde o ponto $(3, 4)$ à circunferência $3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$.

Solução: Organizando a equação da circunferência, vem:

$$3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + \frac{4}{3}y - \frac{35}{3} = 0.$$

Pelo **TEOREMA 4.18**, tem-se:

$$t^2 = x^2 + y^2 + 4x + \frac{4}{3}y - \frac{35}{3}.$$

Logo, substituindo o ponto $(3, 4)$ para encontrar o valor do comprimento de tangente desejado, tem-se:

$$t^2 = 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 4 - \frac{35}{3}$$

$$t^2 = 9 + 16 + 12 + \frac{16}{3} - \frac{35}{3}$$

$$t^2 = \frac{92}{3}$$

$$t = \frac{2}{3}\sqrt{69}$$

Portanto, o comprimento da tangente é $\frac{2}{3}\sqrt{69}$ u.c.

Com base no **TEOREMA 4.18**, Lehmann (1982, p. 101) afirma que pode ser demonstrado que “o eixo radical de duas circunferências não concêntricas é o lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que os comprimentos dos segmentos de tangentes traçadas desde ele até às duas circunferências são iguais¹⁷”.

Para analisar esse fato, tomam-se como equação de duas circunferências não concêntricas, C_1 e C_2 , conforme as relações (50) e (51):

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

E tomando por $P(x, y)$ o ponto móvel e por t_1 e t_2 os comprimentos das tangentes traçadas desde P até C_1 e C_2 , respectivamente, então pelo **TEOREMA 4.18** tem-se:

$$t_1^2 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 \quad \text{e} \quad t_2^2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$$

Por hipótese, os comprimentos dos segmentos de tangentes traçadas são iguais, ou seja,

$$t_1^2 = t_2^2$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$$

$$D_1x - D_2x + E_1y - E_2y + F_1 - F_2 = 0$$

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

o que chega a equação (53), a equação do eixo radical.

Inversamente, pode ser estudado a mostrar que se um ponto $P_1(x_1, y_1)$ é um ponto que se encontra no eixo radical, então os comprimentos dos segmentos das tangentes traçadas desde P_1 a C_1 e C_2 são iguais.

Esses resultados, por Lehmann (1982, p. 101), geram o seguinte teorema:

TEOREMA 4.20: Se as equações de duas circunferências não concêntricas C_1 e C_2 são

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

então a eliminação de x^2 e y^2 entre essas duas equações gera a equação linear

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$$

denominada equação do eixo radical de C_1 e C_2 .

Assim:

¹⁷ Grifo do próprio autor.

Se C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos distintos, seu eixo radical é coincidente com sua secante comum;

Se C_1 e C_2 são tangentes mutuamente, seu eixo radical é sua tangente comum;

Se C_1 e C_2 não tem pontos em comum, seu eixo radical não tem ponto em comum com nenhuma delas.

O eixo radical de C_1 e C_2 é perpendicular à sua reta dos centros; é também o lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que os comprimentos dos segmentos das tangentes traçadas desde o mesmo a C_1 e C_2 são iguais.

Estudar a interação entre múltiplas circunferências revela propriedades geométricas interessantes. Considerando três circunferências, onde pelo menos duas delas não são concêntricas, cada par de circunferências possui um eixo radical. No caso de três circunferências, analisadas em pares, surgem três eixos radicais distintos. Se estas três circunferências não compartilham uma linha de centros comum, então os três eixos radicais convergem em um ponto único conhecido como o *centro radical*. Este ponto de interseção é uma característica importante na geometria das circunferências, pois define a relação espacial entre as três figuras.

4.7 PROBLEMAS SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS RELATIVOS À CIRCUNFERÊNCIA

Muitos são os teoremas ou as situações-problemas, comentadas como clássicas em Geometria, relacionadas a lugares geométricos relativos à circunferência. Acredita-se que com as definições apresentadas nesse capítulo, o estudante de Geometria Analítica seja capaz de analisar e resolver, ou encontrar argumentos plausíveis, para essas situações.

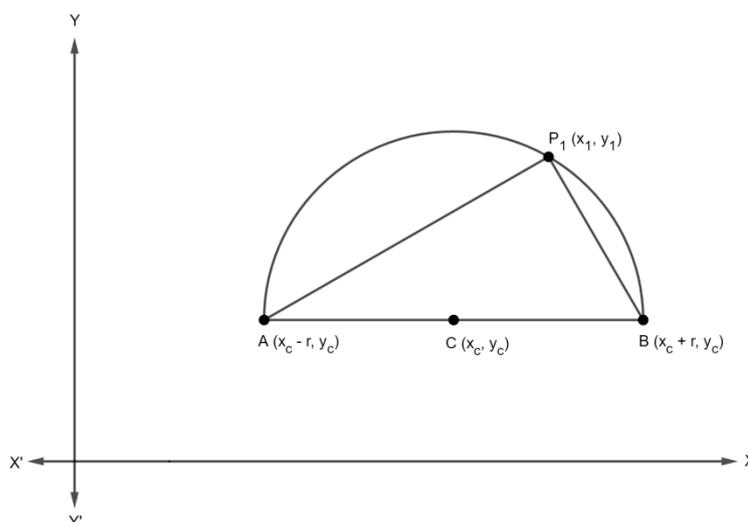
Apresentam-se alguns casos como exemplo:

EXEMPLO 4.21: Demonstrar analiticamente que qualquer ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.

Solução: Para o caso, toma-se como $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ a equação de uma circunferência qualquer, cujo centro é $C(x_C, y_C)$ e raio r .

Seja $P_1(x_1, y_1)$ qualquer ponto sobre a semicircunferência e sendo A e B os pontos extremos de seu diâmetro, então temos a situação apresentada na FIGURA 44.

FIGURA 44 – Representação da situação do exemplo 4.21



FONTE: A pesquisadora.

Seja $(x_c - r, y_c)$ e $(x_c + r, y_c)$ as coordenadas dos pontos A e B , respectivamente, quer-se mostrar que $\overline{P_1A}$ é perpendicular a $\overline{P_1B}$.

Tomando como m_1 e m_2 como as declividades de $\overline{P_1A}$ e $\overline{P_1B}$ respectivamente, então para encontrar a solução analítica da situação, basta mostrar um estudo sobre o produto das declividades, de modo que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Pelo **TEOREMA 3.19**, tem-se:

$$m_1 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - (x_c - r)} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - (x_c + r)}$$

$$m_1 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c + r} \quad m_2 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c - r}$$

Logo, o produto das declividades é dado por:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c + r} \cdot \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c - r}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{(y_1 - y_c)^2}{(x_1 - x_c)^2 - r^2} \quad (58)$$

Como $P_1(x_1, y_1)$ se encontra sobre a semicircunferência então ele satisfaz a equação da circunferência, de tal modo que:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 &= r^2 \\ -(y_1 - y_C)^2 &= (x_1 - x_C)^2 - r^2.\end{aligned}\tag{59}$$

Substituindo a equação (59) na equação (58), tem-se:

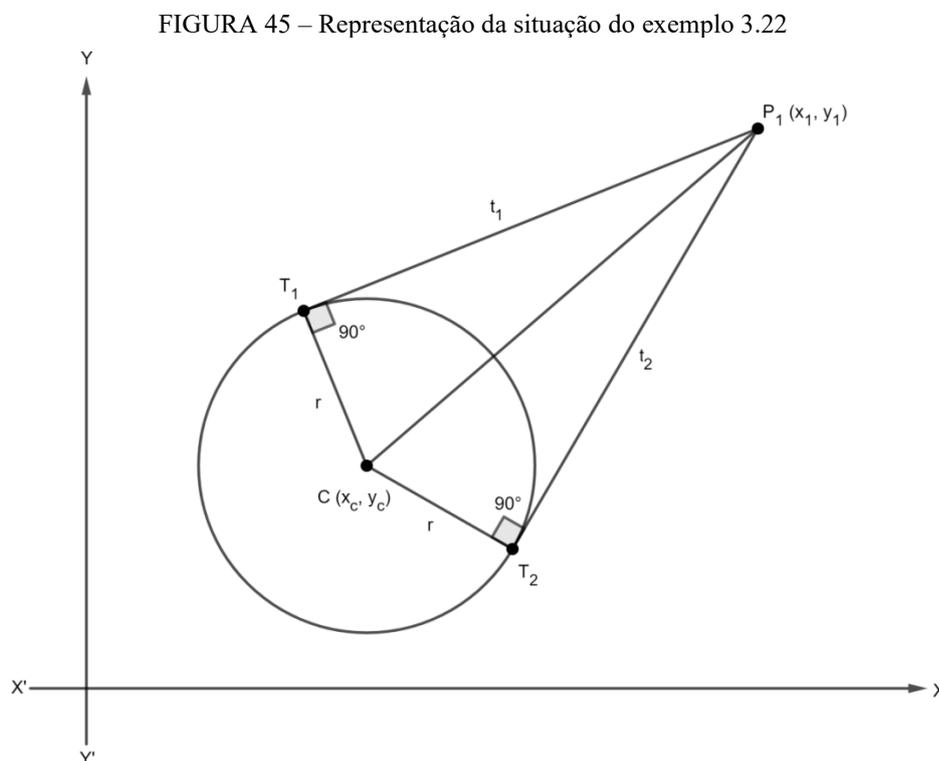
$$\begin{aligned}m_1 \cdot m_2 &= \frac{(y_1 - y_C)^2}{-(y_1 - y_C)^2} \\ m_1 \cdot m_2 &= -1\end{aligned}$$

Portanto, qualquer ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.

EXEMPLO 4.22: Os dois segmentos de tangente traçadas a uma circunferência desde um ponto externo são de mesmo comprimento.

Solução: Para o caso, toma-se como $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ a equação de uma circunferência qualquer, cujo centro é $C(x_C, y_C)$ e raio r . E sejam T_1 e T_2 os pontos de tangência dos segmentos t_1 e t_2 , respectivamente, que partem de $P_1(x_1, y_1)$, que é ponto externo a circunferência.

Por hipótese, $\overline{P_1T_1}$ tangente à circunferência, então $\overline{P_1T_1} \perp \overline{CT_1}$. De modo análogo, sendo $\overline{P_1T_2}$ tangente à circunferência, então $\overline{P_1T_2} \perp \overline{CT_2}$. A situação é representada na FIGURA 45.



FONTE: A pesquisadora.

Quer-se mostrar que $t_1 \equiv t_2$. E para isso, pelo **TEOREMA 3.14**, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{P_1C} &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2} \\ (\overline{P_1C})^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2. \end{aligned}$$

Como o triângulo P_1CT_1 é retângulo, aplicando o teorema de Pitágoras tem-se:

$$\begin{aligned} (\overline{P_1C})^2 &= r^2 + t_1^2 \\ (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 &= r^2 + t_1^2 \\ t_1^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2 \\ t_1 &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2} \end{aligned}$$

E de modo análogo para o triângulo P_1CT_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} (\overline{P_1C})^2 &= r^2 + t_2^2 \\ (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 &= r^2 + t_2^2 \\ t_2^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2 \\ t_2 &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2} \end{aligned}$$

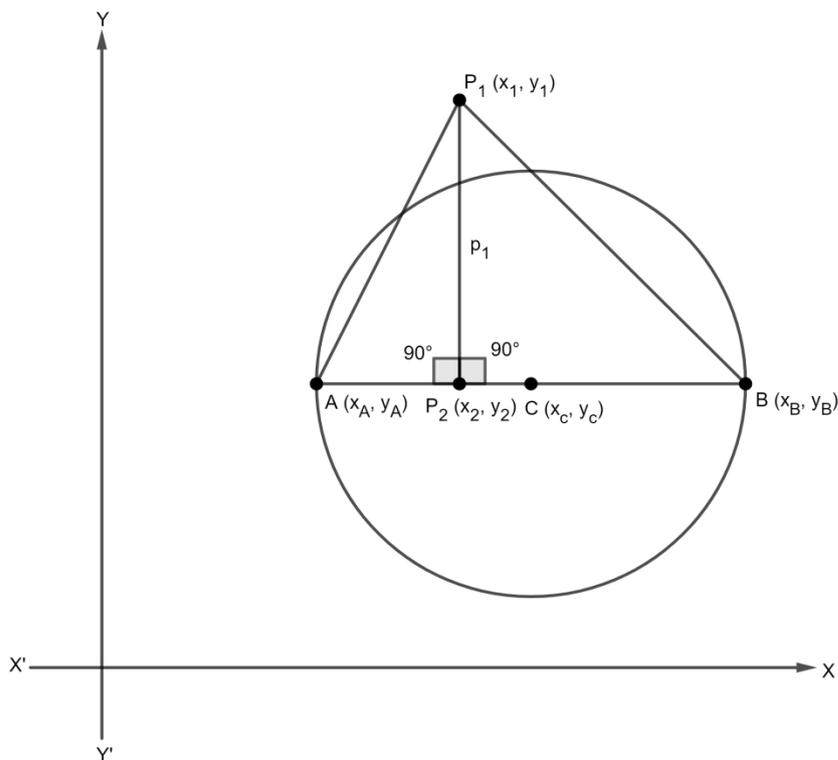
Comparando os comprimentos das tangentes à circunferência, traçadas a partir do ponto $P_1(x_1, y_1)$, tem-se que $t_1 \equiv t_2$.

EXEMPLO 4.23: Mostre que se for traçada desde um ponto qualquer sobre uma circunferência uma perpendicular a um diâmetro, o comprimento da perpendicular é média proporcional entre os comprimentos dos segmentos em que ela divide o diâmetro.

Solução: Para o caso, toma-se como $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ a equação de uma circunferência qualquer, cujo centro é $C(x_C, y_C)$, raio r e um diâmetro com os pontos A e B como extremos.

Seja $P_1(x_1, y_1)$ um ponto qualquer de onde parte um segmento perpendicular com o diâmetro da circunferência até P_2 e tomando por p_1 o comprimento desse segmento, representado na FIGURA 46.

FIGURA 46 – Representação da situação do exemplo 4.23



FONTE: A pesquisadora.

Observa-se que os triângulos AP_2P_1 e P_2P_1B são retângulos e com um dos lados em comum, então há uma proporcionalidade entre seus lados, ou seja, entre as distâncias entre os pontos de tal forma que:

$$\frac{d_{AP_2}}{d_{P_1P_2}} = \frac{d_{P_1P_2}}{d_{BP_2}}$$

$$\frac{\sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2}}$$

$$\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 = \sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2} \cdot \sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \sqrt{\left[(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2\right] \cdot \left[(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2\right]}$$

$$p_1 = \sqrt{d_{AP_2} \cdot d_{BP_2}}$$

Logo, o comprimento da perpendicular é média proporcional entre os comprimentos dos segmentos em que ela divide o diâmetro.

Dessa forma, após a exposição detalhada de todos esses conceitos e definições, acredita-se que os estudantes de Geometria Analítica estarão devidamente preparados para compreender o tópico de transformação de coordenadas.

Este entendimento é importante, pois a transformação de coordenadas é uma ferramenta fundamental que facilita a análise e manipulação de diversas curvas e figuras geométricas. A habilidade de transformar coordenadas permite aos estudantes simplificar problemas complexos, visualizar figuras em diferentes sistemas de referência e aplicar técnicas analíticas com maior eficácia.

Esse conhecimento servirá como base essencial para a exploração e compreensão das próximas curvas que serão abordadas, fornecendo um alicerce sólido para seguir a estudos geométricos mais avançados e complexos.

5 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A compreensão profunda das curvas na Geometria Analítica transcende a mera manipulação de equações algébricas; ela demanda uma apreciação visual e intuitiva das formas geométricas subjacentes. Nesse contexto, as transformações de coordenadas emergem como uma ferramenta fundamental, proporcionando uma ponte crucial entre a representação gráfica e a formulação algébrica das curvas. Assim, este estudo objetiva explorar a importância vital dessas transformações no estudo das curvas, destacando sua capacidade de fornecer insights geométricos profundos.

Inspirado pelas ideias de Vygotsky, que enfatizou a importância do desenvolvimento cognitivo por meio da interação entre o aprendiz e o ambiente, busca não apenas apresentar a curva geometricamente, mas também ilustrar como as transformações de coordenadas facilitam uma compreensão mais rica e conectada. Ao traçar um caminho que vai além da abstração algébrica, este estudo visa proporcionar aos estudantes uma experiência de aprendizado mais integrada, estimulando a construção ativa de conhecimento sobre as curvas na geometria analítica.

A Geometria Analítica tem como objetivo descrever curvas geométricas utilizando sistema de coordenadas, determinando as propriedades existentes em cada uma dessas curvas. Entretanto, à medida que o estudo progride, outros conceitos devem ser introduzidos para que o objetivo seja alcançado de uma forma compreensível.

De acordo com Lehmann (1982, p. 113),

DEFINIÇÃO 5.1: Uma *transformação* é uma operação por meio da qual uma relação, expressão ou figura é mudada em outra de acordo com uma dada lei. Analiticamente a lei dada é expressa por uma ou mais equações denominadas *equações de transformação*¹⁸.

A transformação de coordenadas traz o sentido de simplificar as equações das curvas para um melhor entendimento.

Considerando uma circunferência de raio r e centro $C(x_C, y_C)$, expressa pela equação (36),

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2,$$

¹⁸ Destaque do próprio autor.

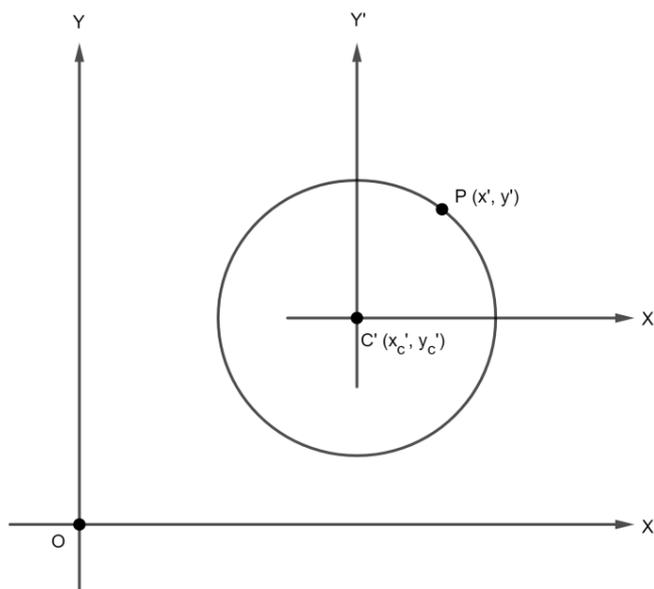
essa equação é transformada quando o seu centro muda de posição, por exemplo, centro na origem, em que $C(0, 0)$, tendo assim a equação ditar estar na forma canônica representada pela equação (37),

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Segundo Righetto (1982, p. 275), “quando conhecemos a equação [...] de uma curva em relação a um *sistema particular de coordenadas*, podemos obter a equação da mesma curva, referida a um *novo sistema de coordenadas*, mediante a transformação de coordenadas¹⁹”.

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente a uma circunferência com centro na origem C , em um plano coordenado, com os eixos denominados apenas por X e Y . Ao mover os eixos coordenados, de forma paralela a si mesmo, e coincidindo a origem com o centro $C'(x_c', y_c')$ da circunferência, denominados esses eixos apenas por X' e Y' , ocorre uma transformação de coordenadas desse ponto para $P'(x', y')$ quando referido aos novos eixos, apresentado na FIGURA 47.

FIGURA 47 – Translado dos eixos coordenados para o centro da circunferência



FONTE: Adaptado Lehmann (1982, p. 114).

Logo, a equação da circunferência é transformada, sendo dada por:

$$x'^2 + y'^2 = r'^2.$$

¹⁹ Destaque do próprio autor.

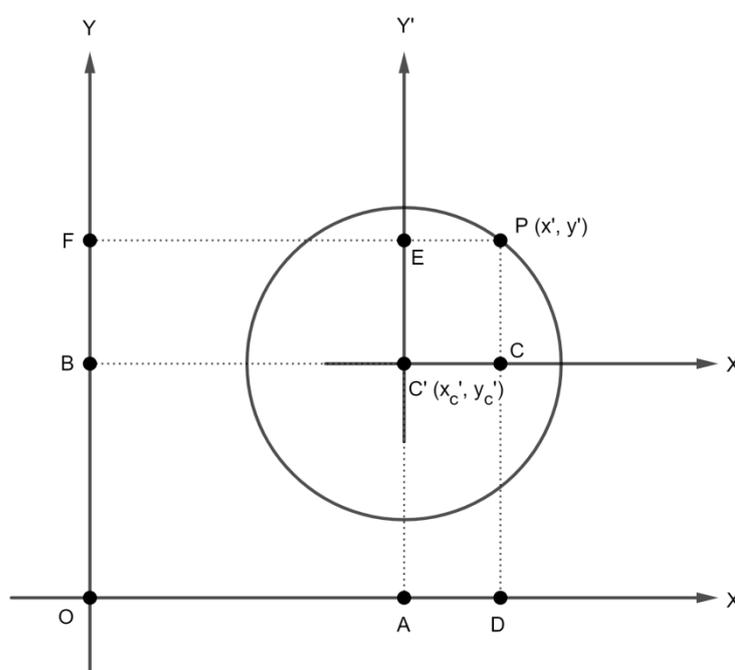
Com essa primeira ideia, sugere-se apresentar aos estudantes a translação dos eixos coordenados no estudo das curvas.

5.1 TRANSLAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS

A ação de mover os eixos coordenados paralelamente as suas posições no plano coordenado é denominada *translação dos eixos coordenados*. Segundo Righetto (1982, p. 275), “na translação dos eixos coordenados mudamos a origem e conservamos as direções e sentidos destes eixos”.

Analisando a afirmação de Righetto tendo a circunferência de centro $C'(x_c', y_c')$ e raio r , X e Y os eixos originais e X' e Y' os eixos transladados, no qual a nova origem coincide com o centro da circunferência, conforme FIGURA 48.

FIGURA 48 – Análise das coordenadas do ponto P com a translação dos eixos coordenados



FONTE: Adaptado Lehmann (1982, p. 115).

Se $P'(x', y')$ um ponto pertencente à circunferência em estudo, traça a partir dele segmentos de retas perpendiculares aos eixos coordenados, denominados por C e D as interseções com X' e X , respectivamente, e por E e F as intersecções com Y' e Y , respectivamente. E prolongando o eixo X' tem-se o ponto A como intersecção com X , e prolongando o eixo Y' tem-se o ponto B como a intersecção com Y .

Utilizando a relação fundamental do segmento retilíneo orientado, apresentado por , a análise da relação entre as coordenadas abscissas é dada por:

$$\begin{aligned}x &= \overline{OD} \\x &= \overline{OA} + \overline{AD} \\x &= \overline{OA} + \overline{C'C} \\x &= x_C' + x'.\end{aligned}$$

E, de maneira análoga, a relação entre as coordenadas ordenadas é dada por:

$$\begin{aligned}y &= \overline{OF} \\y &= \overline{OB} + \overline{BF} \\y &= \overline{OB} + \overline{C'E} \\y &= y_C' + y'.\end{aligned}$$

Essa análise das relações das variáveis tem como consequência o seguinte teorema, apresentado por Lehmann (1982, p. 114):

TEOREMA 5.2: Se os eixos coordenados são transladados para uma nova origem $C'(x_C', y_C')$ e se as coordenadas de qualquer ponto P antes e depois da translação são (x, y) e (x', y') , respectivamente, então as equações de transformação das antigas para as novas coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned}x &= x_C' + x' \\y &= y_C' + y'.\end{aligned}$$

Com esse teorema, se compreende a relação entre as variáveis conectadas aos eixos originais e as variáveis conectadas aos eixos transladados, tornando prático o seu uso para estudos envolvendo curvas em sistemas coordenados.

Para trazer mais sentido, apresentam-se exemplos da aplicabilidade a seguir.

EXEMPLO 5.3: Transformar a equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ dada por translação dos eixos coordenados para a nova origem $(-1, 3)$.

Solução: Sendo $(-1, 3)$ a nova origem, então pelo **TEOREMA 5.2** as equações de transformações são:

$$x = x' - 1 \quad \text{e} \quad y = y' + 3.$$

Substituindo as equações transformações na equação que se deseja transformar e organizando, vem:

$$\begin{aligned}(x' - 1)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 1) - 6(y' + 3) + 6 &= 0 \\ x'^2 - 2x' + 1 + y'^2 + 6y' + 9 + 2x' - 2 - 6y' - 18 + 6 &= 0 \\ x'^2 + y'^2 - 4 &= 0 \\ x'^2 + y'^2 &= 4\end{aligned}$$

Portanto, a transformação da equação é $x'^2 + y'^2 = 4$.

EXEMPLO 5.4: Por uma translação de eixos coordenados, transformar a equação $4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 = 0$ em outra desprovida de termos do primeiro grau.

Solução: Organizando a equação em estudo pelo método de completar quadrado, vem:

$$\begin{aligned}4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 &= 0 \\ 4x^2 + 32x + 4y^2 - 4y &= -45 \\ 4(x^2 + 8x) + 4(y^2 - y) &= -45 \\ 4(x^2 + 8x + 16) + 4\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) &= -45 + 64 + 1 \\ 4(x + 4)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 20 \\ (x + 4)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 5.\end{aligned}$$

Pelo **TEOREMA 5.2**, observando a equação resultando, tem-se que:

$$\begin{aligned}x + 4 &= x' \\ x &= x' - 4\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}y - \frac{1}{2} &= y' \\ y &= y' + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Substituindo esses valores na equação em estudo, tem-se:

$$\begin{aligned}(x' - 4 + 4)^2 + \left(y' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 &= 5 \\ x'^2 + y'^2 &= 5\end{aligned}$$

Portanto, a transformação da equação é $x'^2 + y'^2 = 5$.

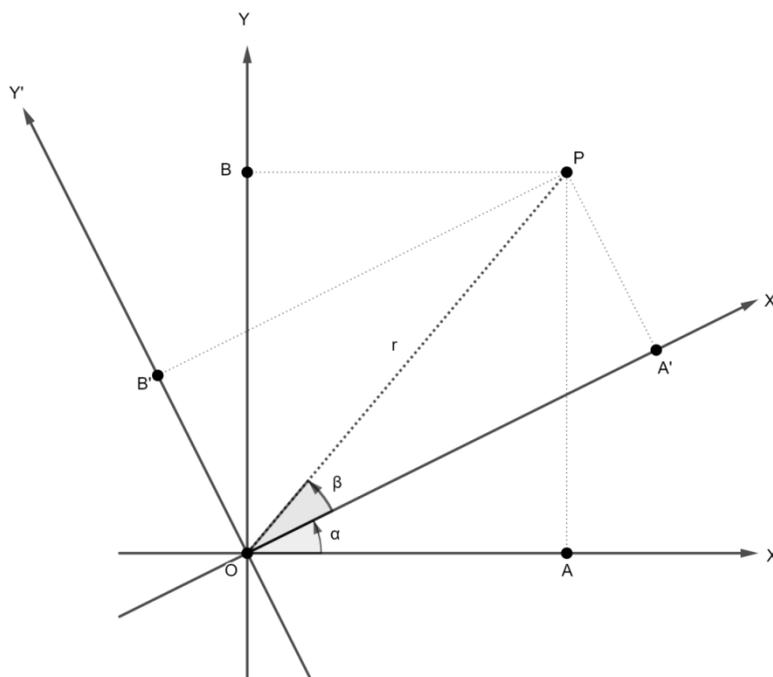
Familiarizados com o conceito de translação, apresenta-se aos estudantes o conceito de rotação dos eixos coordenados na sequência.

5.2 ROTAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS

No estudo de curvas em eixos coordenados observou a possibilidade de utilizar a translação de eixos para trazer mais sentido e facilidade na compreensão algébrica e analítica das curvas. Outro estudo apresentado pela Geometria Analítica é a rotação dos eixos coordenados com a mesma finalidade de simplificar as equações das curvas em um estudo. Porém, para essa análise o estudante precisa ter conhecimentos prévios da trigonometria, nesse caso, o conhecimento das relações trigonométricas de um triângulo retângulo.

Iniciando da ideia apresentada desde o início dessa pesquisa sobre eixos coordenados, denominados X e Y , e um ponto P de coordenadas (x, y) relacionadas a esses eixos. Rotacionando os eixos sobre a origem $O(0, 0)$, em um ângulo α , tem-se os novos eixos sobre a denominação de X' e Y' , conforme FIGURA 49, o ponto P terá novas coordenadas quando relacionado aos novos eixos.

FIGURA 49 – Rotação de eixos coordenados e posicionamento de um ponto p em relação a ambos os eixos



FONTE: Adaptado Lehmann (1982, p. 118).

Traçando perpendiculares a partir do ponto P em relação aos eixos X e Y , encontra os pontos de interseção A e B . De modo análogo aos eixos X' e Y' , se tem os pontos A' e B' .

Tomando como r o segmento linear \overline{OP} , observam-se as relações trigonométricas no triângulo AOP :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OA}}{r} \\ \overline{OA} &= r \cdot \cos(\alpha + \beta).\end{aligned}\tag{60}$$

E,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \\ \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{AP}}{r} \\ \overline{AP} &= r \cdot \sin(\alpha + \beta).\end{aligned}\tag{61}$$

Analisando as coordenadas do ponto P em relação aos eixos X e Y , vem:

$$x = \overline{OA}.\tag{62}$$

E,

$$y = \overline{OB} = \overline{AP}.\tag{63}$$

Substituindo (60) em (62) e (61) em (63), tem-se:

$$x = r \cdot \cos(\alpha + \beta)\tag{64}$$

E,

$$y = r \cdot \sin(\alpha + \beta)\tag{65}$$

Do mesmo modo, analisando as relações trigonométricas no triângulo $A'OP$, tem-se:

$$\begin{aligned}\cos(\beta) &= \frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}} \\ \cos(\beta) &= \frac{\overline{OA'}}{r} \\ \overline{OA'} &= r \cdot \cos(\beta).\end{aligned}\tag{66}$$

E,

$$\begin{aligned}\sin(\beta) &= \frac{\overline{A'P}}{\overline{OP}} \\ \sin(\beta) &= \frac{\overline{A'P}}{r} \\ \overline{A'P} &= r \cdot \sin(\beta).\end{aligned}\tag{67}$$

Analisando as coordenadas do ponto P em relação aos eixos X' e Y' , vem:

$$x' = \overline{OA'}.\tag{68}$$

E,

$$y' = \overline{OB'} = \overline{A'P}.\tag{69}$$

Substituindo (66) em (68), e (67) em (69), tem-se:

$$x' = r \cdot \cos(\beta)\tag{70}$$

E,

$$y' = r \cdot \sin(\beta)\tag{71}$$

Analisando a equação (64) pela soma de arcos em um cosseno, vem:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ x &= r \cdot [\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)] \\ x &= r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}\tag{72}$$

Substituindo (70) e (71) em (72), tem-se:

$$x = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha).$$

E analisando a equação (65) pela soma de arcos em um seno, vem:

$$\begin{aligned}y &= r \cdot \sin(\alpha + \beta) \\ y &= r \cdot [\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)] \\ y &= r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + r \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{73}$$

Substituindo (70) e (71) em (73), tem-se:

$$y = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha).$$

Portanto, as novas coordenadas do ponto P em relação aos eixos rotacionados são dadas por:

$$x = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha) \quad \text{e} \quad y = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha).$$

Com essa análise, por Lehmann (1982, p. 118), deriva o seguinte teorema:

TEOREMA 5.5: Se os eixos coordenados são girados de um ângulo α em torno da sua origem O como ponto fixo e se as coordenadas de qualquer ponto P são (x, y) e (x', y') antes e depois da rotação, respectivamente, então as equações de transformações antigas para as novas coordenadas são dadas por

$$x = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha)$$

$$y = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha).$$

Para uma melhor compreensão, segue exemplos desse estudo.

EXEMPLO 5.6: Determinar as novas coordenadas do ponto $(3, -4)$ quando os eixos coordenados são rotacionados em um ângulo de 30° na origem.

Solução: Sendo $(3, -4)$ a coordenada do ponto em estudo, e então pelo **TEOREMA 5.5** tem-se:

$$3 = x' \cdot \cos(30^\circ) - y' \cdot \sin(30^\circ)$$

$$3 = x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \cdot \frac{1}{2}$$

$$6 = \sqrt{3}x' - y' \tag{74}$$

E,

$$-4 = x' \cdot \sin(30^\circ) + y' \cdot \cos(30^\circ)$$

$$-4 = x' \cdot \frac{1}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-8 = x' + \sqrt{3}y' \tag{75}$$

Resolvendo um sistema com as equações (74) e (75), vem:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x' - y' = 6 \\ x' + \sqrt{3}y' = -8 \end{cases}$$

Reorganizando as equações do sistema:

$$\begin{cases} 3x' - \sqrt{3}y' = 6\sqrt{3} \\ x' + \sqrt{3}y' = -8 \end{cases}$$

Somando as equações membro a membro, tem-se:

$$4x' = 6\sqrt{3} - 8$$

$$x' = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2$$

E substituindo o valor de x' em uma das equações sistema, tem-se:

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}y' = -8$$

$$\sqrt{3}y' = -8 - \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2$$

$$\sqrt{3}y' = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - 6$$

$$y' = -\frac{3}{2} - \frac{6}{3}\sqrt{3}$$

$$y' = -2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$$

Portanto, as novas coordenadas do ponto é $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2, -2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$.

EXEMPLO 5.7: Transformar a equação $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ dada por rotação dos eixos coordenados do ângulo 45° .

Solução: Pelo **TEOREMA 5.5**, as equações de transformação são dadas por:

$$x = x' \cdot \cos(45^\circ) - y' \cdot \sin(45^\circ)$$

$$x = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

E,

$$y = x' \cdot \sin(45^\circ) + y' \cdot \cos(45^\circ)$$

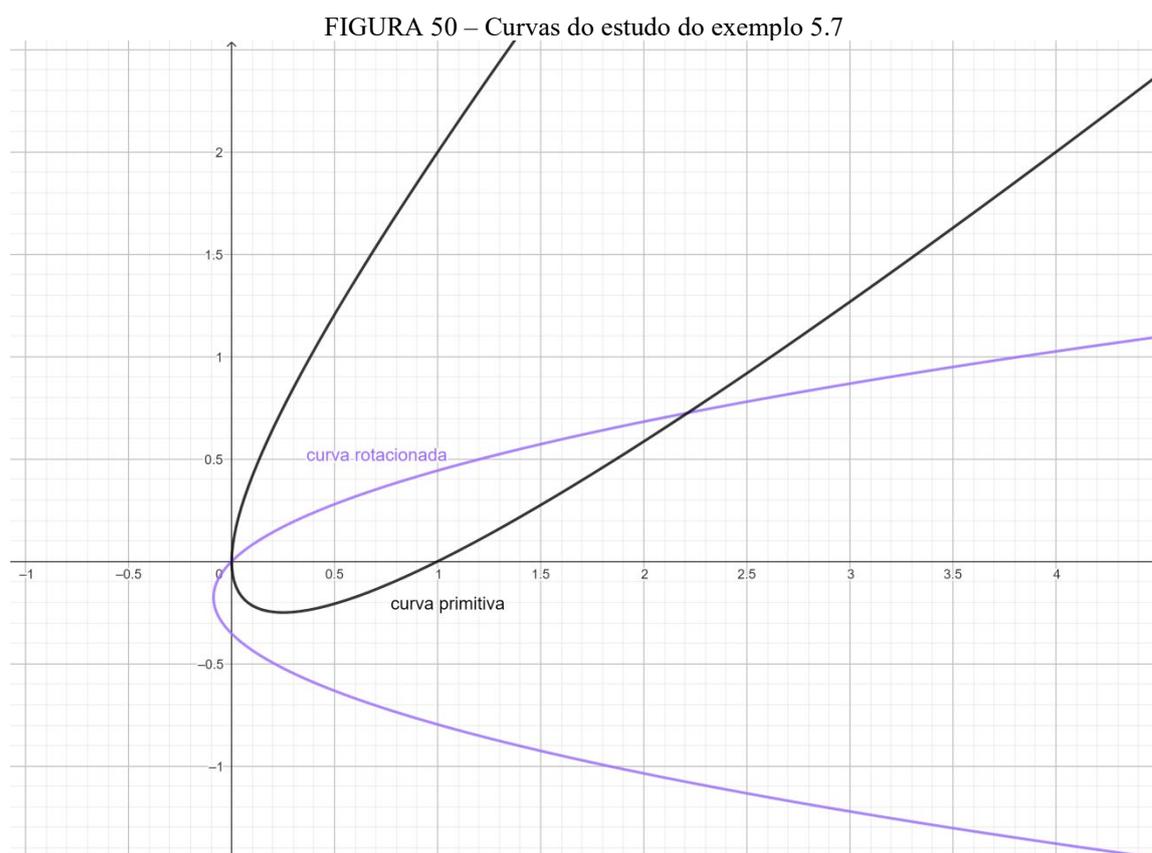
$$y = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Fazendo a substituição dos valores de x e y na equação que se deseja transformar, tem-se:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right]^2 - 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right] + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right]^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') &= 0 \\ \frac{1}{2}(x' - y')^2 - (x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') &= 0 \\ \frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 + \frac{y'^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' &= 0 \\ 2y'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' &= 0 \\ 4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' &= 0 \end{aligned}$$

A FIGURA 50 apresenta $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ como a curva primitiva, ou seja, a curva em análise antes da rotação, e apresenta $4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$ como a curva rotacionada em relação a origem.



FONTE: A pesquisadora.

As curvas em questão, conhecidas pelos estudantes como parábolas, são de grande importância no campo da Geometria Analítica. Com os estudos até agora apresentados nesta pesquisa, foi estabelecida uma base sólida que permitirá aos estudantes iniciar a exploração detalhada dessas curvas.

A compreensão dos conceitos fundamentais, como equações quadráticas e suas transformações, possibilita uma análise mais profunda das propriedades das parábolas. Este alicerce teórico prepara os estudantes para investigar as características específicas das parábolas, incluindo seus vértices, focos, diretrizes e a forma como essas curvas se comportam sob diferentes transformações de coordenadas. Além disso, essa base facilita a aplicação de técnicas analíticas para resolver problemas práticos envolvendo parábolas, promovendo uma compreensão mais abrangente e robusta das curvas que são essenciais em diversas áreas da matemática e suas aplicações práticas.

6 AS CÔNICAS

*“In addition to the straight lines, circles, planes and spheres with which every student of Euclid is familiar, the Greeks knew the properties of the curves given by cutting a cone with a plane—the ellipse, parabola and hyperbola. Kepler discovered by analysis of astronomical observations, and Newton proved mathematically on the basis of the inverse square law of gravitational attraction, that the planets move in ellipses. The geometry of ancient Greece thus became the cornerstone of modern astronomy.”²⁰
J. L. Synge (Synge 2, p.32, apud Coxeter, p. 115)*

Pesquisadores como Coxeter (p. 115) e Bicudo – introdução da tradução da obra *Os Elementos* de Euclides – (EUCLIDES, 2009, p. 43) comentam, no contexto histórico da Geometria Analítica, sobre a importância dos matemáticos gregos para a Geometria como os estudos de Apolônio, o qual formalizou oito livros sobre cônicas a fim de completar os livros de Euclides sobre o assunto.

Inserir a História da Matemática para o estudo gera não apenas um conhecimento histórico, mas também um sentido no conhecimento, de como foi desenvolvido e quais os motivos da época levaram aos estudos.

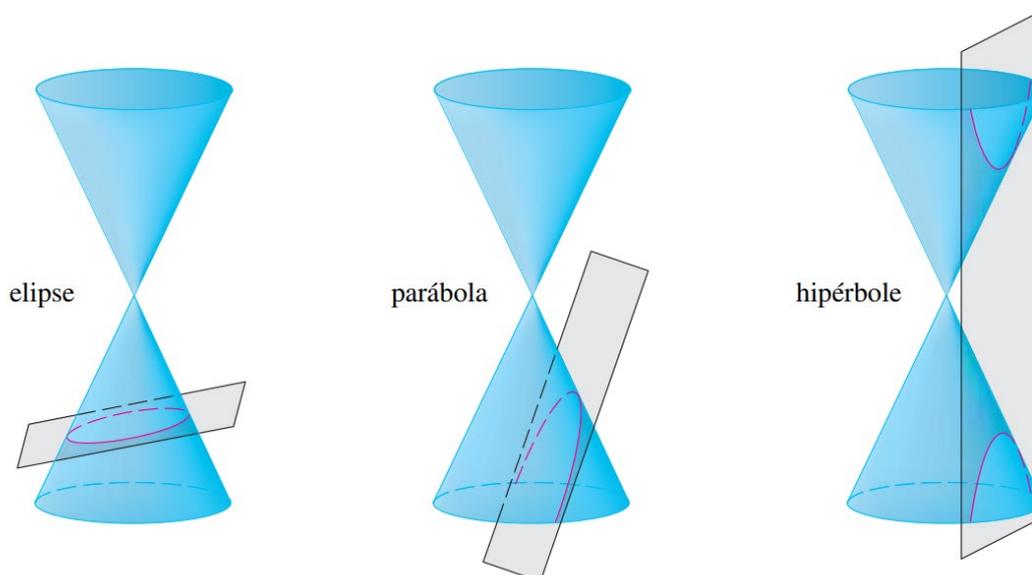
“A História da Matemática motiva e estimula a participação dos alunos no processo educativo, enriquece o desenvolvimento das aulas, esclarece dúvidas e questionamentos, demonstra a evolução dos conceitos e das ideias matemáticas ao longo do tempo, deixando claro que esta ciência está em constante evolução, em permanente transformação, rompendo assim com as ideias de alguns professores e alunos que concebem a Matemática como um saber estático, hermético, composto de conhecimentos inquestionáveis e imutáveis.” (PAIVA, 2018, p. 98)

Nesse sentido, tem importância que o estudante de Geometria Analítica saiba que no estudo das curvas há algumas que foram analisadas a partir da intersecção de um plano, por angulações diferentes, em um cone, conforme FIGURA 51. Essas intersecções deram origem a três curvas denominadas secções cônicas, ou simplesmente cônicas, sendo elas definidas por suas características como parábola, elipse e hipérbole.

Apresentar a imagem das secções cônicas anterior ao cálculo é alimentar o campo do pensamento algébrico antes da formalização pelos cálculos.

²⁰ “Além das linhas retas, círculos, planos e esferas com os quais todos os estudantes de Euclides estão familiarizados, os gregos conheciam as propriedades das curvas dadas ao cortar um cone com um plano - a elipse, a parábola e a hipérbole. Kepler descobriu pela análise de observações astronômicas, e Newton provou matematicamente com base na lei do inverso do quadrado da atração gravitacional, que os planetas se movem em elipses. A geometria da Grécia antiga tornou-se assim a pedra angular da astronomia moderna.”

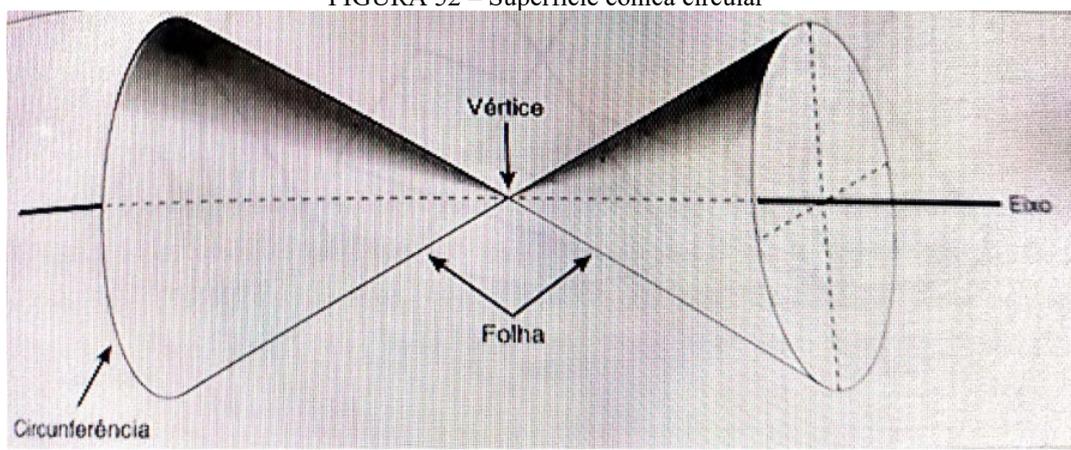
FIGURA 51 – Secções cônicas



FONTE: Stewart (2013, p. 606).

Para dar sentido, Boulos & Camargo (1997, p. 167) descrevem a obtenção dessas curvas pela intersecção de um plano com a superfície cônica circular reta, apresentada na FIGURA 52. Assim, inicialmente, apresenta-se a imagem da superfície cônica circular para a compreensão do assunto a ser estudado, ou seja, da constituição das curvas por planos interseccionadores a essa superfície.

FIGURA 52 – Superfície cônica circular



FONTE: Boulos & Camargo (1997, p. 167)

Seguindo para a formalização, se denominar por S a superfície cônica e por α o plano interseccionador, e tendo como geratriz da superfície cônica S a reta que passa pelo vértice V , então há três situações de análise quando α não passa pelo vértice V :

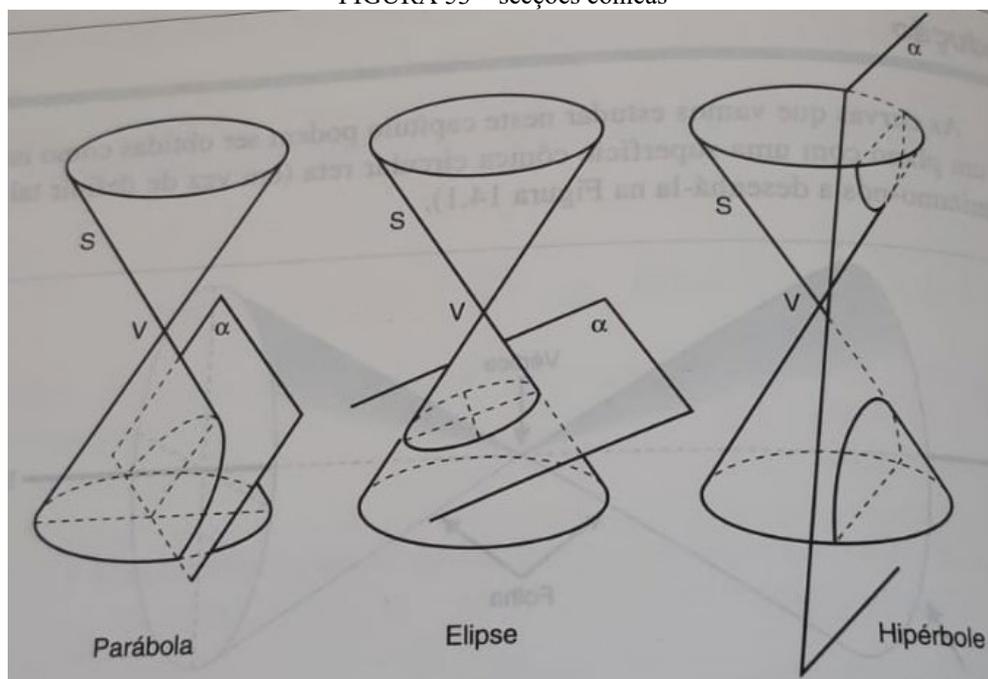
1.^a situação: Se α é paralelo a uma geratriz então a intersecção gera uma curva denominada *parábola*.

2.^a situação: se α não é paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas de S então a intersecção gera uma curva denominada *elipse*. Há um caso particular, quando a inclinação do plano intersector tem uma angulação perpendicular ao eixo, que gera uma circunferência.

3.^a situação: se α não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas de S , então a intersecção, formada por duas partes separadas, partes essas designadas *ramos*, gera uma curva denominada *hipérbole*.

As curvas das situações são apresentadas na FIGURA 53.

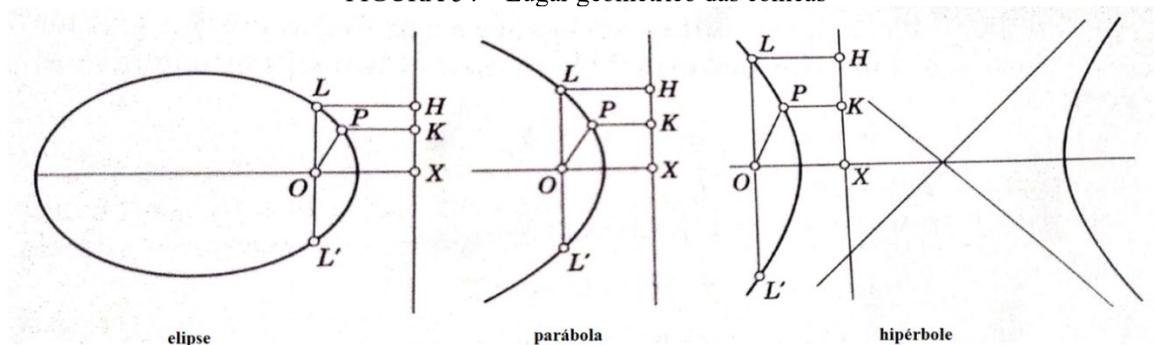
FIGURA 53 – secções cônicas



FONTE: Boulos & Camargo (1997, p. 168)

Quando o estudo das cônicas passa a ter a ótica da Geometria Analítica, ou seja, as curvas são analisadas em um plano coordenado, então suas características observadas mostram que as cônicas são um lugar geométrico de um ponto, cuja sua distância até um ponto fixo tem relação com a sua distância até uma reta fixa.

FIGURA 54 – Lugar geométrico das cônicas



FONTE: Coxeter (p. 115).

Pela FIGURA 54, o ponto O é denominado por *foco* e a linha HX por *diretriz*. Segundo Coxeter (p. 115), não há uma única maneira de definir as cônicas, mas uma maneira mais direta com a ótica da Geometria Analítica, tomando por base a figura anterior, é a que segue:

DEFINIÇÃO 6.1: Uma cônica é o lugar geométrico de um ponto P cuja distância OP de um ponto fixo O é ε vezes a sua distância PK de uma linha fixa HX , onde ε é uma constante positiva.

Coxeter (p. 115) também cita outra definição proposta por Manaechmus, por volta de 340 d.C., que foi conectada com a proposta por Pappus de Alexandria (século IV d.C.) ou possivelmente com a de Euclides. Segue:

DEFINIÇÃO 6.2: A cônica é denominada uma *elipse* se $\varepsilon < 1$, uma *parábola* se $\varepsilon = 1$ e uma *hipérbole* de $\varepsilon > 1$.

O número ε é denominado como *excentricidade* da curva e a corda LL' , que passa pelo foco e paralela a diretriz, é denominada *latus rectum* ou *corda focal mínima*, cujo comprimento é denotado por $2l$, de modo que:

$$l = \overline{OL}$$

$$l = \varepsilon \overline{LH}.$$

Por Coxeter (p. 115), os termos parábola, elipse e hipérbole são dos escritos de Apolônio. Eves (2011, p. 199), explicita melhor esse fato:

“Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta (isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento), eles diziam que se tinha um caso de “ellipsis”, “parabole” ou “hyperbole”, conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia.”

Muitos fatos históricos apresentam o estudo e desenvolvimento dos conceitos das cônicas para as comprovações que hoje perpetuam nos livros de Geometria Analítica. Cada curva tem suas similaridades, mas há muita particularidade em seus conceitos e, devido a isso, cada uma delas deve ter um estudo dedicado. Por isso, sucede-se a análise de cada curva e seus conceitos, pensando no melhor roteiro para trazer sentido ao estudante.

Nesse estudo, em particular, segue a discussão da parábola. De acordo com as normativas educacionais brasileiras, a BNCC – Base Nacional Comum Curricular, a circunferência e a parábola são as cônicas que os estudantes do ensino médio devem estudar. Assim, a parábola é conhecida pelos estudantes que seguem ao ensino superior. Assim, para um estudante de Geometria Analítica, a abordagem sugerida nesse estudo pode ser uma ampliação de conhecimentos.

As demais cônicas, não serão explicitadas em capítulos específicos nesse estudo, mas pensa que as ideias de abordagem sugeridas até o próximo capítulo são bases para o professor continuar nesse pensamento de trazer sentido através da exploração visual das curvas antes da formalização dos conceitos algébricos sobre as mesmas.

7 PARÁBOLA

A parábola é uma curva conhecida pelo estudante de Geometria Analítica, pois é um conteúdo que faz parte do currículo básico da educação brasileira. O avanço no estudo de Geometria Analítica para esse conteúdo faz compreender a curva e a formalização da sua equação.

Nos dias atuais, encontram-se livros de Geometria Analítica, permeados por uma educação brasileira tradicionalista, que apresentam as equações das curvas para posteriormente apresentar seu estudo geométrico, o que segue um sentido contrário da construção histórica dos conceitos.

Nesse estudo não se deseja levantar uma discussão sobre a vivência e contradições da educação tradicionalista na Matemática, mas sim apresentar o conceito das curvas pelo sentido de visualização para a abstração, ou seja, apresentar um roteiro de estudos que apresenta o lugar geométrico, o traço e a equação da parábola, para que então seu estudo analítico tenha um maior sentido de aprendizado.

Seguindo nesse viés, confabulam as ideias propostas por E. H. Lock Wood em sua obra *A Book of Curves*.

“Plane curves offer a rich and to some extent unexplored fields of study which may be approached from a quite elementary level. Anyone who can draw a circle with a given centre and a given radius can draw a cardioid or a limaçon. Anyone who can use a set square can draw a parabola or a strophoid. Anyone who knows a few of the simpler propositions of Euclid can deduce a number of properties of these beautiful and fascinating curves.”²¹ (LOCK WOOD, 1961)

Como este estudo propôs a apresentação preliminar de algumas proposições de Euclides, conforme sugerido por Lock Wood, foi estabelecida uma base teórica sólida para que o estudante possa compreender tanto os lugares geométricos quanto a curva parábola que serão abordados na sequência. A introdução das proposições euclidianas permite aos estudantes familiarizarem-se com os fundamentos da geometria clássica, que são essenciais para a compreensão das propriedades e comportamentos das parábolas. A luz das sugestões de Lock Wood, esta abordagem garante que os estudantes possuam o conhecimento necessário

²¹ “As curvas planas oferecem um campo de estudo rico e até certo ponto inexplorado, que pode ser abordado a partir de um nível bastante elementar. Quem pode desenhar um círculo com um determinado centro e um determinado raio pode desenhar uma cardioide ou uma limaçon. Qualquer um que saiba usar um esquadro pode desenhar uma parábola ou uma estrofóide. Qualquer pessoa que conheça algumas das proposições mais simples de Euclides pode deduzir várias propriedades dessas belas e fascinantes curvas.” Tradução pela pesquisadora.

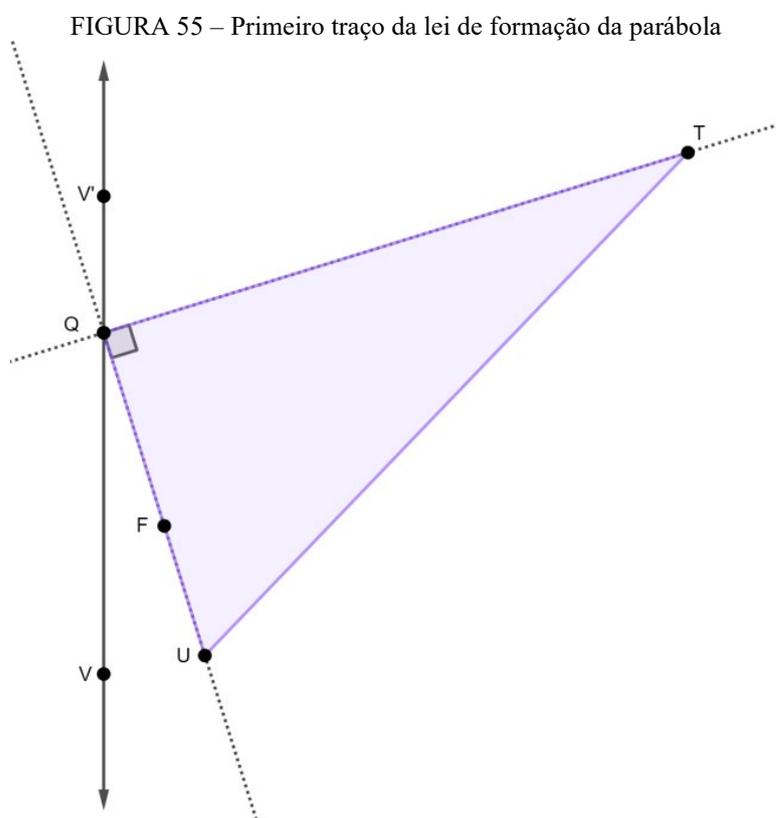
para aprofundar-se nos conceitos e aplicações das curvas parabólicas, facilitando uma transição mais fluida para os tópicos avançados subsequentes.

7.1 O LUGAR GEOMÉTRICO DA PARÁBOLA

O conceito de lugar geométrico emerge como um elemento essencial que estabelece a interface entre a geometria e a álgebra. Este termo refere-se ao conjunto de pontos que atendem a condições ou restrições matemáticas específicas. Explorar o lugar geométrico proporciona uma abordagem robusta para descrever padrões e relações intrínsecas entre as curvas.

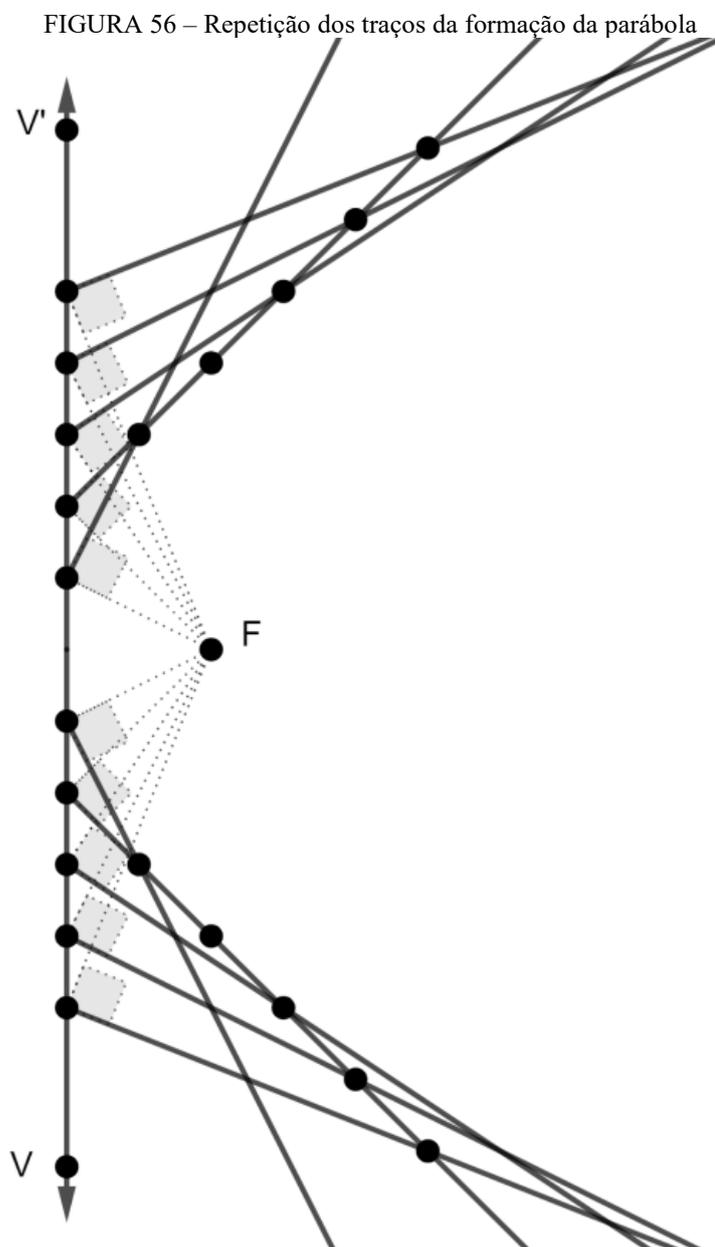
Definir parábola envolve conhecer o lugar geométrico de um ponto que se move de acordo com uma específica lei de formação.

Com base nos escritos de Lock Wood (1961, pp. 3-12), o estudo dessa curva inicia tomando uma reta fixa, denominada $\overline{VV'}$ e marcando um ponto fixo F fora dessa reta, ou seja, $F \notin \overline{VV'}$. Dado um ponto fixo Q , com $Q \in \overline{VV'}$, traça-se um ângulo $U\hat{Q}T$, com ângulo reto em Q e o lado \overline{QU} passando por F , então traça a reta \overline{QT} , conforme FIGURA 55.



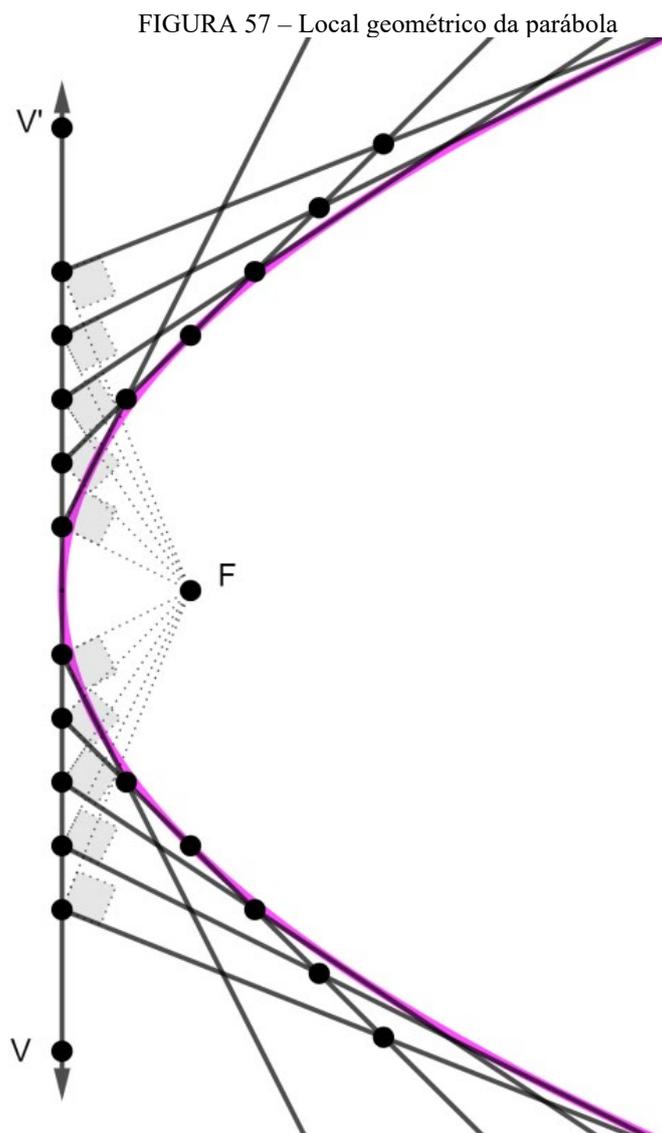
FONTE: Adaptado de Lock Wood (1961, p. 3).

Esse é o primeiro traço para compreender o lugar geométrico da curva. Quando for elaborado em um grande número de posições, a parábola pode ser desenhada a mão livre, tocando em cada uma das linhas desenhadas, como pode ser observada na FIGURA 56.



FONTE: A pesquisadora.

Com esse estudo geométrico, compreende-se uma curva específica vai sendo entendida no espaço de estudo, curva presente no campo da abstração, conforme FIGURA 57. Essa curva é denominada por parábola.



FONTE: A pesquisadora.

A compreensão do lugar geométrico não apenas aprimora a teoria matemática subjacente, mas também desempenha um papel crucial em aplicações práticas diversas, como design gráfico, modelagem computacional e engenharia. Neste contexto, este estudo visou a apreciação do conceito de lugar geométrico, explorando suas implicações teóricas e suas contribuições para a formalização algébrica, bem como para a resolução de desafios geométricos.

A partir desse lugar geométrico, há uma percepção visual da curva que será abordada posteriormente de maneira algébrica. Com essa alusão da curva, segue para o estudo das suas particularidades, tomando como base as especificidades utilizadas nos traços iniciais.

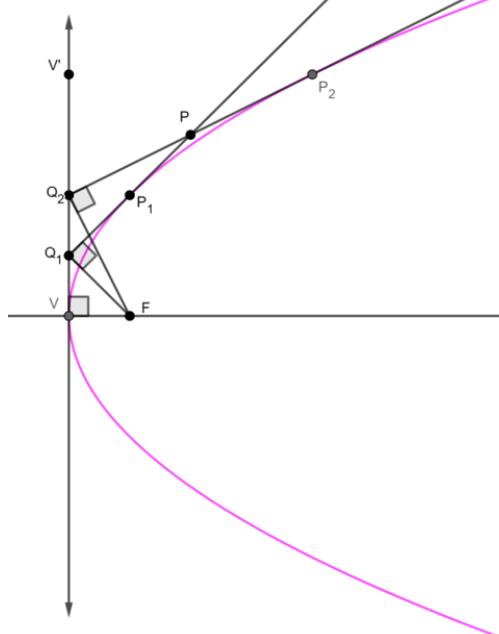
7.2 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Em Geometria Analítica, o estudo das curvas envolve a exploração minuciosa das suas propriedades geométricas, que são características intrínsecas responsáveis por definir a forma e o comportamento particular das mesmas por meio do plano cartesiano. Essas propriedades desempenham um papel importante na compreensão da estrutura de uma curva, oferecendo percepções valiosas sobre sua curvatura, oscilações e pontos de inflexão. No contexto desta dissertação, o termo "propriedades geométricas" refere-se a atributos matemáticos que não apenas descrevem as características físicas da curva, mas também fornecem ferramentas analíticas para classificação e representação eficaz.

Essa abordagem geométrica não apenas enriquece a compreensão teórica das curvas, mas também tem implicações práticas em diversas áreas, desde a representação gráfica até a aplicação computacional em campos como design e modelagem. Assim, o exame das propriedades geométricas das curvas é essencial para dar sentido a todo processo educacional, aprofundando a compreensão matemática e promovendo avanços em aplicações práticas nas áreas particulares que cada estudante de geometria analítica se debruça.

Seguindo à teoria para a compreensão das propriedades geométricas, a partir da ideia apresentada na FIGURA 55 e em conjunto com os estudantes, \overline{SV} é traçada perpendicularmente a $\overline{VV'}$.

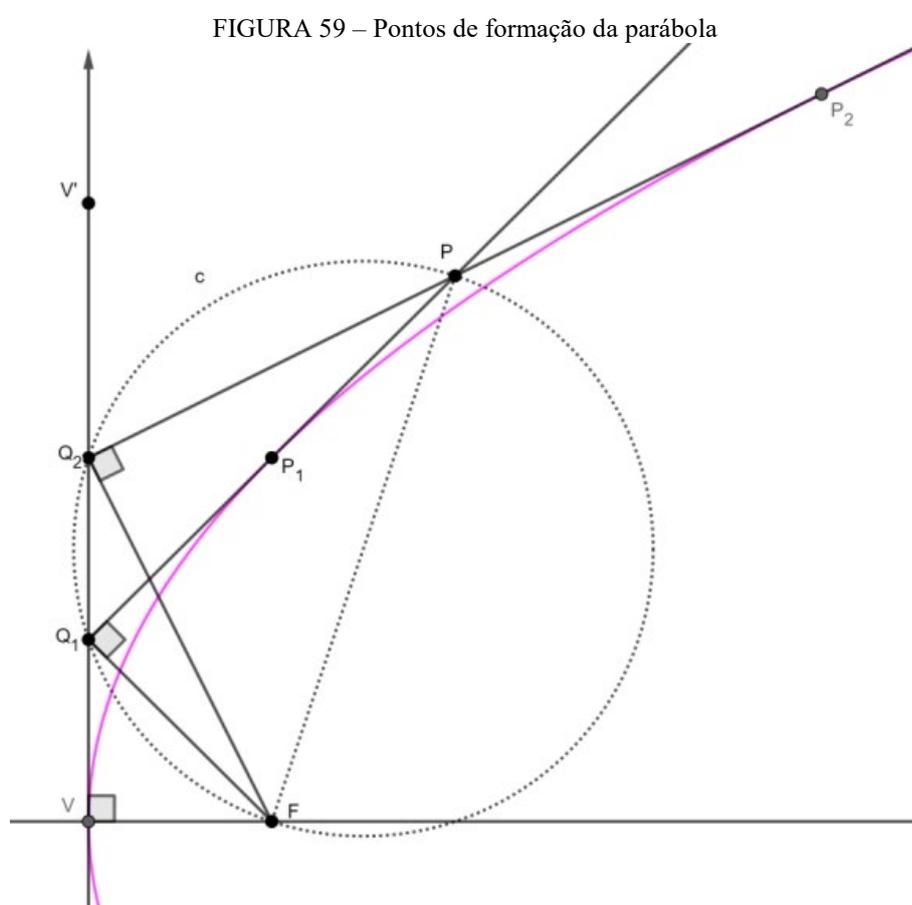
FIGURA 58 – Pontos de tangência da parábola



FONTE: A pesquisadora.

O que se percebe, pela FIGURA 58, que a curva é simétrica sobre o eixo \overleftrightarrow{VS} , o que faz a denominação do ponto V de *vértice*. Além disso, apresentam-se duas semirretas, a $\overline{Q_1P_1}$ e a $\overline{Q_2P_2}$, que são tangentes à parábola em P_1 e P_2 , respectivamente, e se intersectam em P .

Ao fazer o traçado de \overline{FP} , formam-se os triângulos FQ_1P e FQ_2P , que são triângulos retângulos em Q_1 e Q_2 , respectivamente, pela construção. Os triângulos possuem o lado \overline{FP} comum, sendo também a hipotenusa de ambos. Esse fato define os triângulos como inscritíveis em uma mesma circunferência, denominada na FIGURA 59 como circunferência c . Com isso, os pontos F , Q_1 , Q_2 e P são definidos pontos concíclicos.



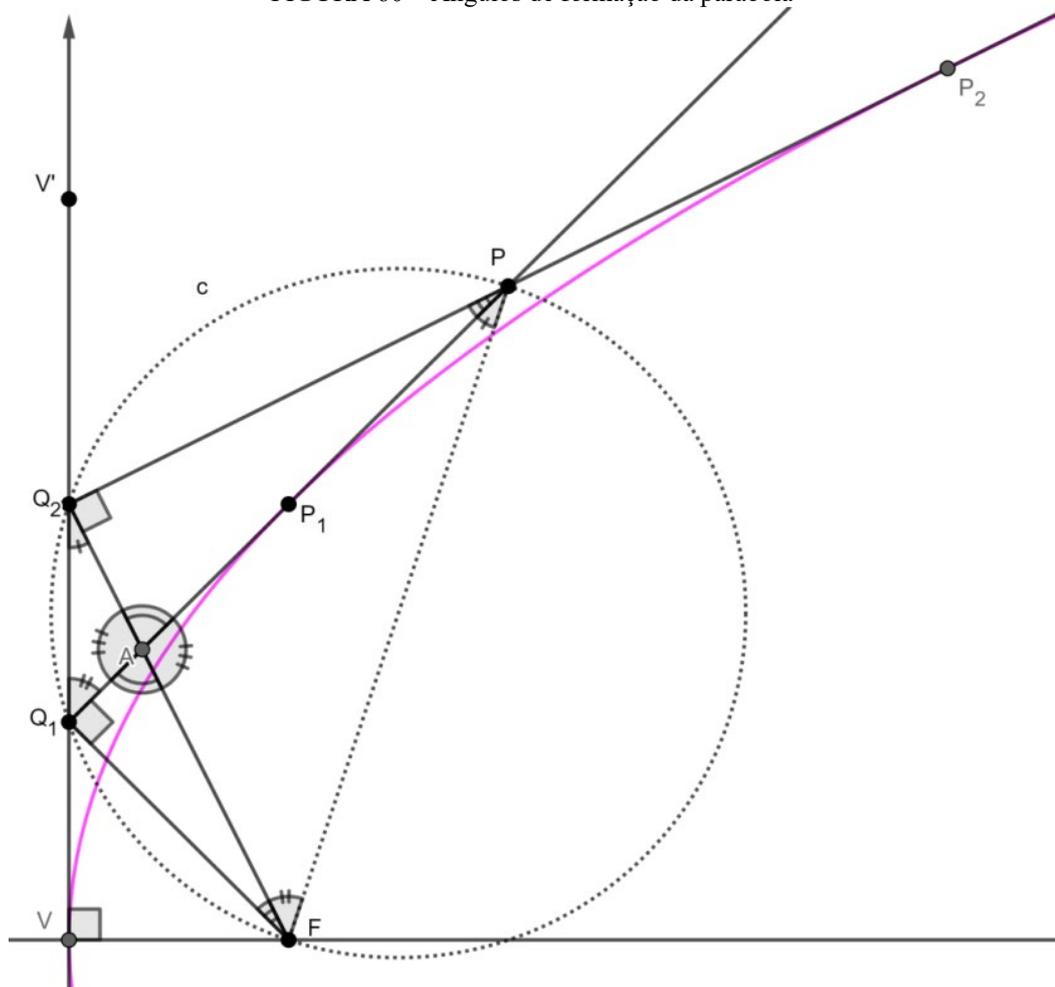
FONTE: A pesquisadora.

Os ângulos $Q_1\widehat{Q_2}F$ e $Q_1\widehat{P}F$ estão sob o mesmo arco da circunferência c , o que são definidos como congruentes. Pelo mesmo raciocínio, os ângulos $Q_2\widehat{Q_1}P$ e $Q_2\widehat{F}P$ são congruentes por estarem sob o mesmo arco de circunferência. Observa-se que os ângulos $Q_1\widehat{F}Q_2$ e $Q_1\widehat{P}Q_2$ também estão sob o mesmo arco da circunferência c , sendo então dados como congruentes.

Os segmentos $\overline{FQ_2}$ e $\overline{Q_1P}$ intersectam-se em um ponto que será tomado por A . Com isso, os ângulos $Q_1\hat{A}Q_2$ e $F\hat{A}P$ são opostos pelo vértice, sendo então congruentes. O mesmo ocorre com os ângulos $Q_1\hat{A}F$ e $Q_2\hat{A}P$, que são congruentes por serem ângulos opostos pelo vértice.

Assim, os triângulos Q_1AQ_2 e FAP são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo-ângulo de semelhança de triângulos. De modo análogo, os triângulos Q_1AF e Q_2AP são semelhantes, visto à FIGURA 60.

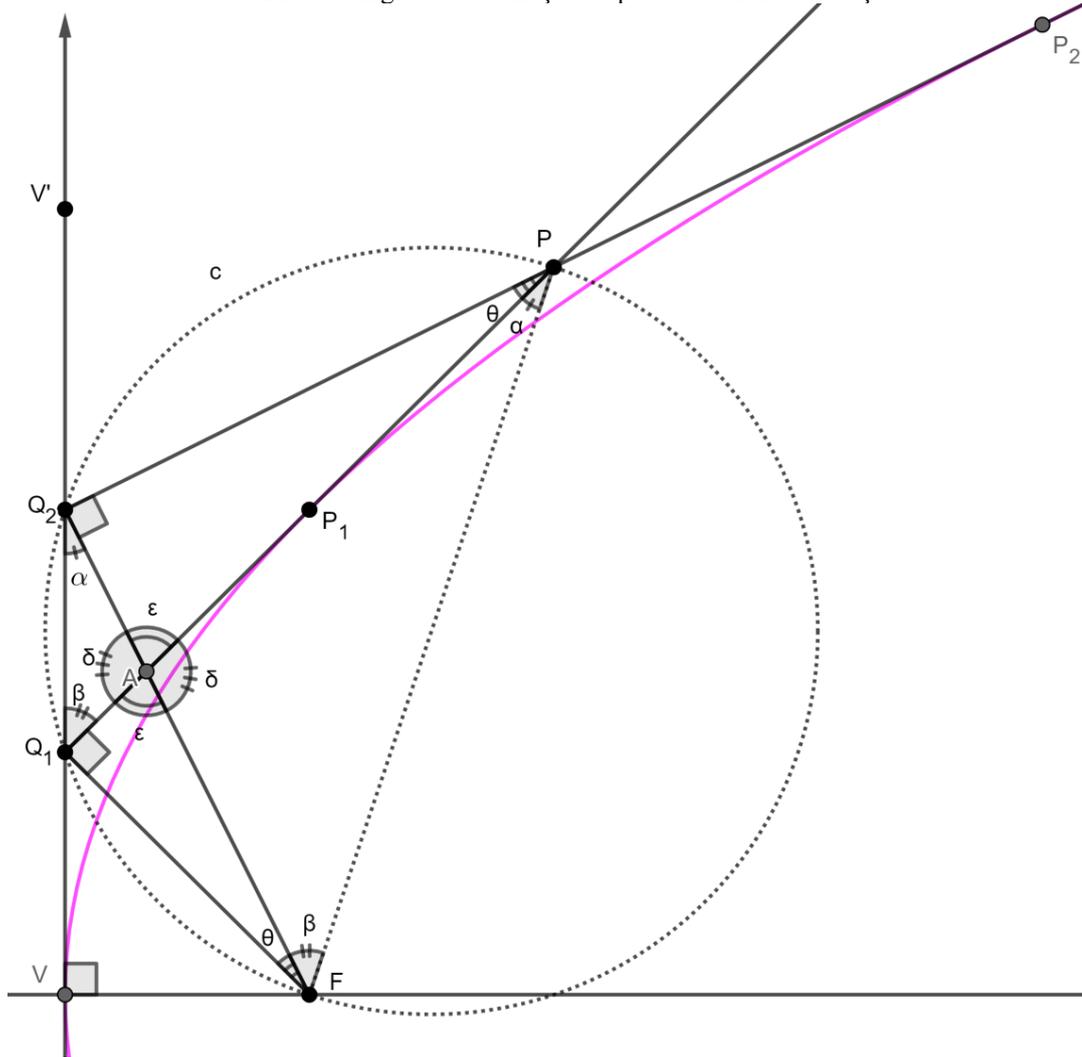
FIGURA 60 – Ângulos de formação da parábola



FONTE: A pesquisadora.

Para facilitar a compreensão dos próximos argumentos, toma-se por $\alpha = Q_1\widehat{Q_2}F = Q_1\hat{P}F$, $\beta = Q_2\widehat{Q_1}P = Q_2\hat{F}P$, $\delta = Q_1\hat{A}Q_2 = F\hat{A}P$, $\varepsilon = Q_1\hat{A}F = Q_2\hat{A}P$ e $\theta = Q_1\hat{F}Q_2 = Q_1\hat{P}Q_2$, apresentados na FIGURA 61 nessa nova notação.

FIGURA 61 – Ângulos de formação da parábola em nova notação



FONTE: A pesquisadora.

A partir disso, se tomar por $V\hat{F}Q_1 = x$, tem-se $V\hat{F}Q_2 = x + \theta$. Utilizando o conhecimento da soma dos ângulos internos de um triângulo para $\triangle VFQ_2$, obtém-se:

$$\begin{aligned} x + \theta + \alpha + 90^\circ &= 180^\circ \\ x &= 90^\circ - \alpha - \theta \end{aligned} \quad (76)$$

E, pelo mesmo pensamento para o triângulo Q_1FP , tem-se:

$$\begin{aligned} \beta + \theta + 90^\circ + \alpha &= 180^\circ \\ \beta &= 90^\circ - \alpha - \theta. \end{aligned} \quad (77)$$

Dos resultados de (76) e (77), observa-se que $x = \beta$. Isso implica que $V\hat{F}Q_1 = \beta$.

De maneira análoga, denomina-se $V\hat{Q}_1F = y$ no $\triangle VFQ_1$, obtendo assim:

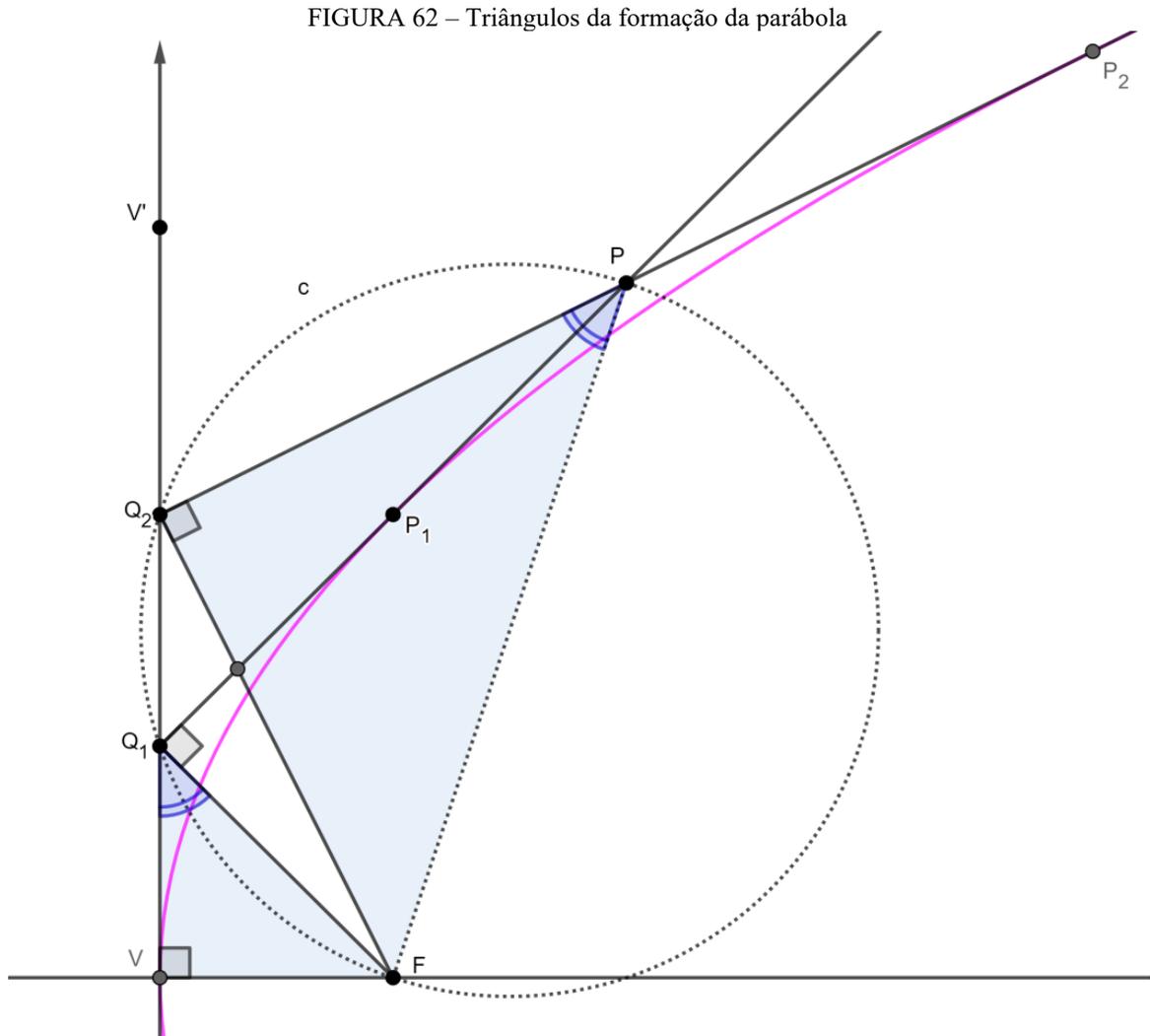
$$\begin{aligned} y + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ y &= 90^\circ - \beta \end{aligned} \quad (78)$$

Inserindo o resultado da equação (77) na equação (78), analisa-se:

$$y = 90^\circ - (90^\circ - \alpha - \theta)$$

$$y = \alpha + \theta$$

Com isso, os ângulos $V\widehat{Q}_1F$ e $Q_2\widehat{P}F$ são congruentes. Assim, mostra-se que $V\widehat{Q}_1F \equiv Q_2\widehat{P}F$, conforme FIGURA 62.

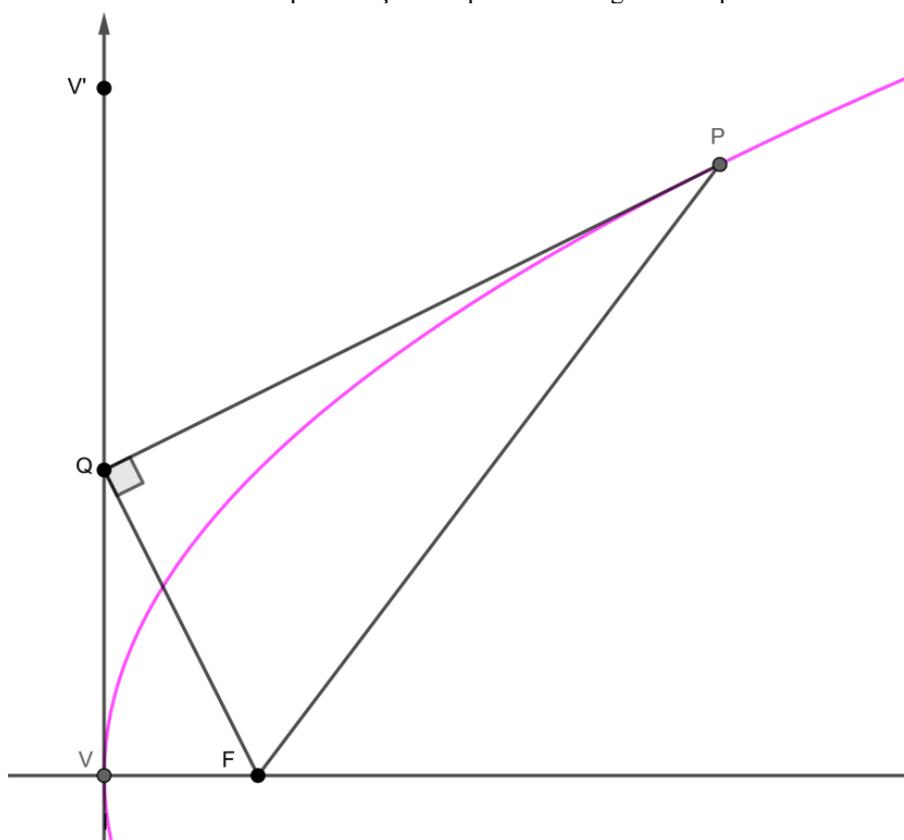


FONTE: A pesquisadora.

O ponto P não é pertencente à parábola, mas quanto mais próximas estiverem as duas tangentes, mais próximo da curva esse ponto estará.

Conjeturando uma aproximação de Q_2 a Q_1 , tem-se que P se aproximará de P_1 e o ângulo $Q_1\widehat{P}F$ se tornará $Q_2\widehat{P}_1F$, visto pela na FIGURA 63.

FIGURA 63 – Aproximação dos pontos de tangência da parábola



FONTE: A pesquisadora.

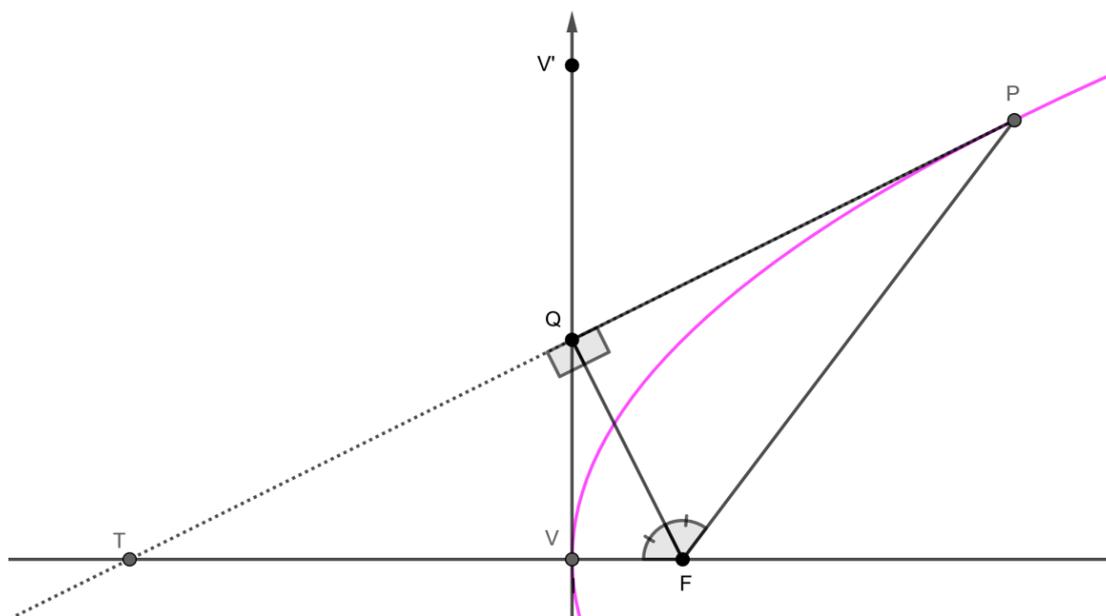
Com essa imagem, o estudante de Geometria Analítica tem a consciência da curva denominada parábola. E com isso, pode ser dado o estudo de propriedades de foco e diretriz, importantes para a compreensão de sua definição e equação.

7.2.1 PROPRIEDADES DO FOCO E DA DIRETRIZ

As propriedades sobre o foco e diretriz da parábola são geralmente apresentadas de forma direta em algumas referências, ou seja, apresentam-se as equações sem prévias explicações sobre seu objetivo existencial. A ideia é trazer sentido, mostrando essas propriedades através do estudo da curva inicialmente construída.

Seguindo a luz de Lock Wood, com base na FIGURA 63, ao ser prolongado \overline{PQ} de forma a interseccionar \overline{VF} no ponto T , serão formados $\triangle FQT$ e $\triangle FQP$.

FIGURA 64 – Relação entre triângulos de formação das propriedades da parábola

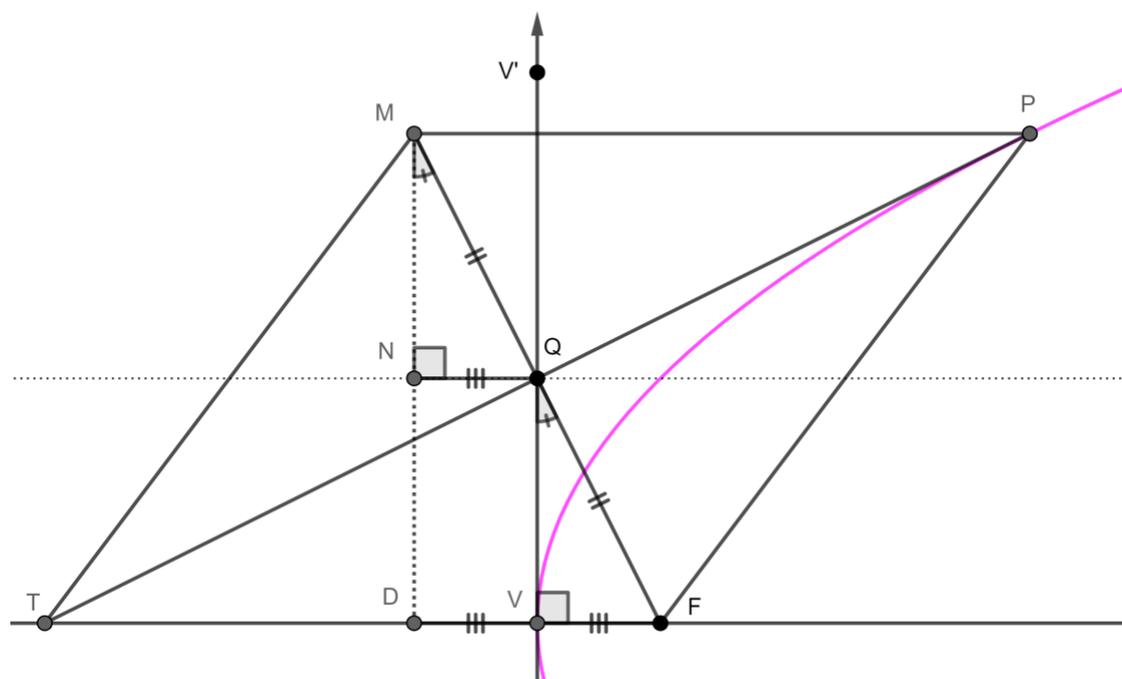


FONTE: A pesquisadora.

Ao analisar a relação entre esses dois triângulos, visto na FIGURA 64, percebe-se que \overline{FQ} é lado comum de $\triangle FQT$ e $\triangle FQP$. E sendo o $F\hat{Q}T$ complementar a $F\hat{Q}P$ então $F\hat{Q}T = 90^\circ$, assim tendo $F\hat{Q}T \equiv F\hat{Q}P$. Além disso, observa-se dos estudos anteriores que $T\hat{F}Q \equiv P\hat{F}Q$. Com essas informações, pelo caso de congruência ângulo-lado-ângulo, tem-se $\triangle FQT \equiv \triangle FQP$. Portanto, com a congruência desses triângulos conclui-se que $\overline{FP} \equiv \overline{FT}$.

Seguindo pela ideia da FIGURA 64, se o losango $PFTM$ é completado, e \overline{MD} é traçado perpendicular \overline{FT} , traçamos por Q uma paralela de \overline{VF} , encontrando o ponto N de intersecção com \overline{MD} . Com isso, analisa-se que os ângulos $Q\hat{M}N$ e $F\hat{Q}V$ são ângulos correspondentes, tendo $Q\hat{M}N \equiv F\hat{Q}V$. E sendo $Q\hat{N}M = 90^\circ = F\hat{V}Q$, então conclui-se que $\triangle QMN \equiv \triangle FQV$, implicando que $\overline{FQ} \equiv \overline{QM}$. E sendo $\overline{QN} // \overline{FT}$ e $\overline{MD} // \overline{VV'}$, então tem-se $\overline{DV} \equiv \overline{NQ}$ e, por transitividade $\overline{DV} \equiv \overline{VF}$. Essas características são apresentadas na FIGURA 65.

FIGURA 65 – Características de uma reta fixa a uma determinada distância da parábola



FONTE: Adaptado de Lock Wood (1961, p. 4).

Ao tomar D como ponto fixo e \overline{MD} como um segmento de reta fixo, observando as propriedades do losango $PFTM$, nota-se $\overline{PM} \equiv \overline{FT}$. Como visto $\overline{FP} \equiv \overline{FT}$, então por transitividade tem-se $\overline{MP} \equiv \overline{FP}$.

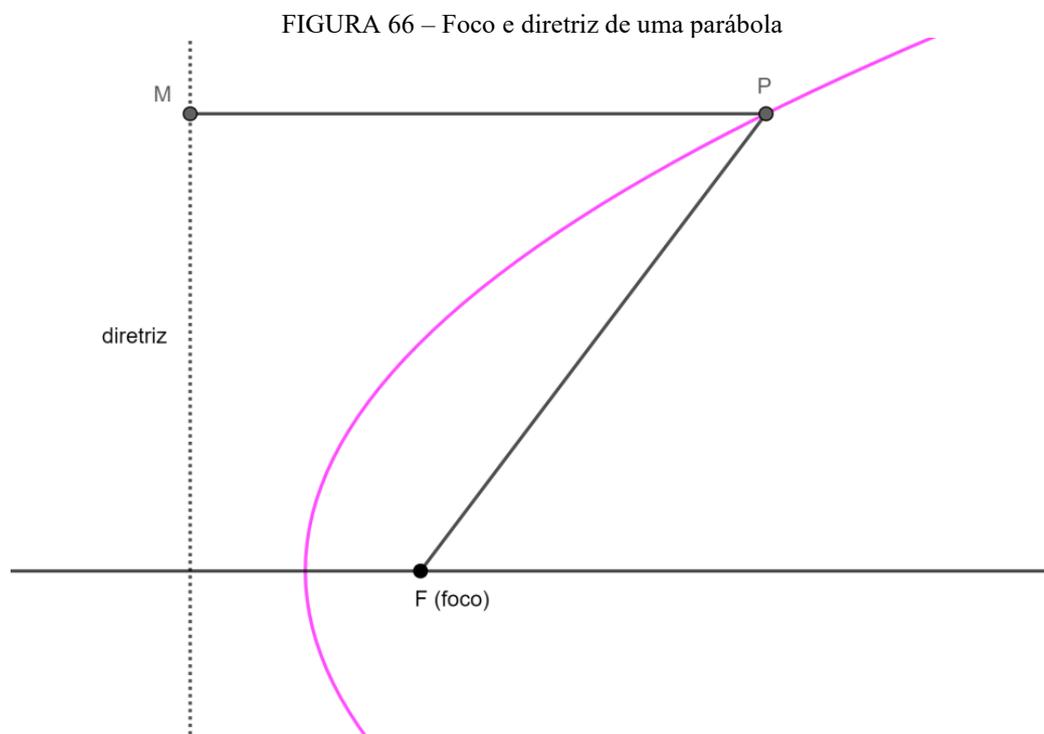
Levando em consideração a linguagem algébrica da Geometria Analítica de distância entre dois pontos generaliza-se, por P representar qualquer ponto pertencente à parábola, que $d_{PM} = d_{FP}$.

Assim, a parábola pode ser definida como o lugar geométrico de um ponto P , cuja distância de um ponto fixo F é igual à sua distância \overline{PM} de uma reta fixa passando por D .

Com esse primeiro momento, o estudante de Geometria Analítica tem um sentido à existência da parábola, podendo ser apresentada sua definição. Assim, segue a definição apresentada por Lehmann (1982, p. 127):

DEFINIÇÃO 7.1: Uma *parábola* é um lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que sua distância a uma reta fixa no plano é sempre igual à sua distância a um ponto fixo no plano e não situado sobre a reta.

O ponto fixo é denominado *foco* e a reta fixa é denominada *diretriz* da parábola. O caso em que o foco encontra-se sobre a diretriz é excluído, por não formar uma curva como a descrita. A FIGURA 66 apresenta as propriedades de foco e diretriz de uma parábola.



FONTE: Adaptado de Lock Wood (1961, p. 5).

Com esses conhecimentos da curva, o estudante de Geometria Analítica tem base para iniciar o processo de compreensão algébrica a generalização da parábola por meio de uma equação.

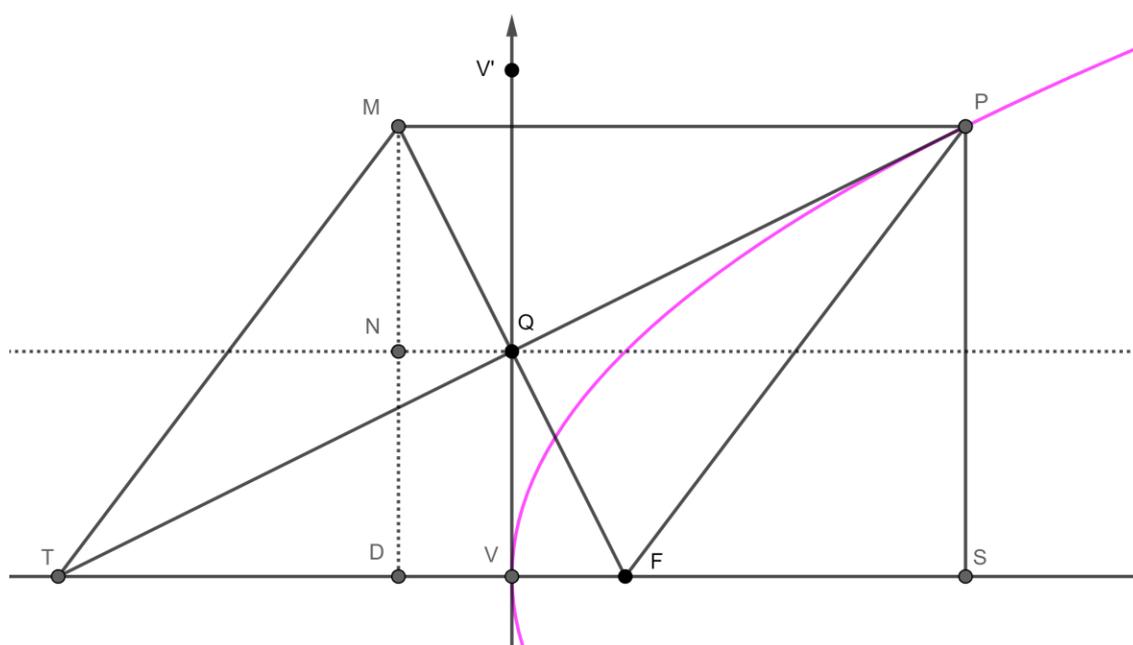
7.3 A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

A exploração de curvas geométricas por meio de equações desempenha um papel importante na Geometria Analítica, fornecendo uma estrutura matemática robusta para a compreensão e análise da curva em estudo. A representação algébrica da parábola simplifica a descrição e também oferece uma visão sistemática de suas propriedades intrínsecas que nem sempre são percebidas graficamente. Antes de formalizar equacionalmente, foi imperativo explorar o lugar geométrico da curva, proporcionando uma visualização clara de sua configuração espacial.

A abordagem visual é essencial para a intuição inicial e apreciação da geometria subjacente. A transição do lugar geométrico para a formulação da equação permite uma generalização eficaz, abrindo caminho para análises abrangentes e aplicações práticas. Ao vincular a imagem visual ao formalismo matemático, é possível não apenas compreender a estrutura da curva, mas também derivar propriedades específicas. Dessa forma, o estudo das curvas geométricas por meio de equações não apenas simplifica a análise, mas também enriquece a compreensão, tornando-se uma ferramenta fundamental para investigações teóricas e aplicações práticas em diversos campos.

Para uma representação algébrica da curva da parábola, parte-se dos principais elementos presentes na FIGURA 65, na qual traça uma perpendicular em relação a \overrightarrow{VF} partindo de P , tendo o ponto S como interseção, constituindo então o \overline{PS} , apresentado na FIGURA 67.

FIGURA 67 – Elementos da análise algébrica da parábola



FONTE: Adaptado de Lock Wood (1961, p. 4).

Sendo $\overline{PS} \equiv \overline{MD}$ e $\overline{MN} \equiv \overline{ND} \equiv \overline{QV}$ então se tem que:

$$\overline{PS} = 2 \cdot \overline{QV} \quad (79)$$

Elevando o quadrado ambos os membros da equação (79), vem:

$$\begin{aligned} (\overline{PS})^2 &= (2 \cdot \overline{QV})^2 \\ \overline{PS}^2 &= 4 \cdot \overline{QV}^2 \end{aligned} \quad (80)$$

Como visto em estudo das propriedades geométricas da formação da parábola, o $\triangle FQT$ é retângulo em Q e $\overline{QA} \perp \overline{FT}$, cabem as relações métrica do triângulo retângulo. Com isso,

$$\overline{QV}^2 = \overline{VF} \cdot \overline{VT} \quad (81)$$

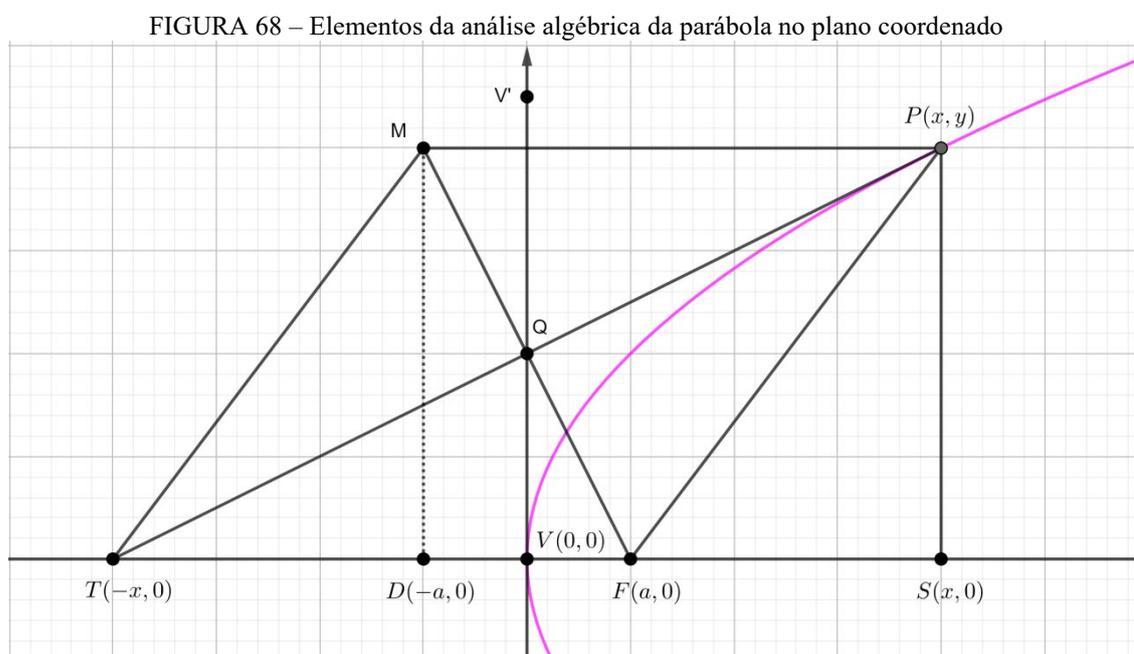
Substituindo (81) em (80),vem:

$$\overline{PS}^2 = 4 \cdot \overline{VF} \cdot \overline{VT} \quad (82)$$

Pela construção, tem-se que $\overline{FQ} \equiv \overline{QM}$, $\overline{QP} \equiv \overline{QT}$ e $M\hat{Q}T \equiv F\hat{Q}P$ devido a serem ângulos opostos pelo vértice, então $\triangle MQT \equiv \triangle FQT$, logo $\overline{MT} \equiv \overline{FP}$. Com $\overline{MT} \equiv \overline{FP}$, observa-se que $\overline{MD} \equiv \overline{PS}$ e $M\hat{D}T = 90^\circ = P\hat{S}F$ então $\triangle MDT \equiv \triangle PSF$ e, conseqüentemente, $\overline{DT} \equiv \overline{SF}$. Logo, com $\overline{DT} \equiv \overline{SF}$ e $\overline{VD} \equiv \overline{VF}$ tem-se $\overline{VT} \equiv \overline{VS}$. Assim, a equação (82) pode ser reescrita como:

$$\overline{PS}^2 = 4 \cdot \overline{VF} \cdot \overline{VS} \quad (83)$$

Para a compreensão da parábola sob os conceitos da Geometria Analítica, insere-se a FIGURA 67 sob o plano cartesiano, tendo \overline{VF} como o eixo das abscissas e $\overline{VV'}$ como o eixo das ordenadas. Se tomar as coordenadas de P como (x, y) , tendo a FIGURA 68 ilustrando o caso.



FONTE: A pesquisadora.

Com isso, pelo **TEOREMA 3.14**, tem-se:

$$\begin{aligned}d_{VF} &= \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} \\d_{VF} &= \sqrt{a^2 + 0^2} \\d_{VF} &= \sqrt{a^2} \\d_{VF} &= a.\end{aligned}\tag{84}$$

E, de modo análogo, tem-se:

$$\begin{aligned}d_{VS} &= \sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2} \\d_{VS} &= \sqrt{x^2 + 0^2} \\d_{VS} &= \sqrt{x^2} \\d_{VS} &= x.\end{aligned}\tag{85}$$

Bem como,

$$\begin{aligned}d_{PS} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2} \\d_{PS} &= \sqrt{0^2 + y^2} \\d_{PS} &= \sqrt{y^2} \\d_{PS} &= y.\end{aligned}\tag{86}$$

Assim, substituindo (84), (85) e (86) na equação (83), tem-se:

$$y^2 = 4ax.\tag{87}$$

Essa equação é denominada como uma das formas da *primeira equação padrão da parábola*.

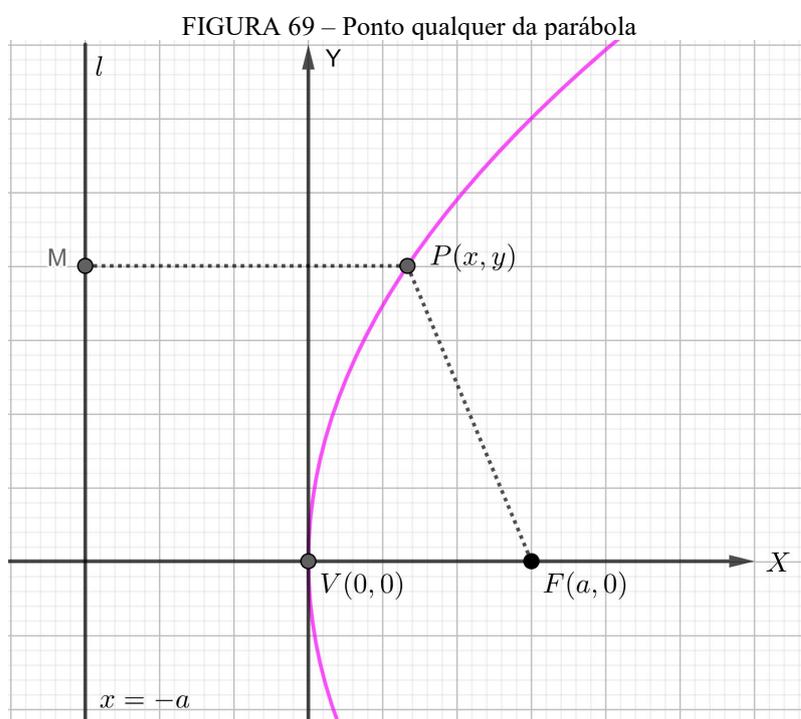
A compreensão dessas ideias sobre a curva permitirá ao estudante dar um significado mais profundo ao estudo da parábola, conforme abordado nas obras de Geometria Analítica. Com isso, o estudante poderá entender melhor as propriedades e aplicações da parábola, situando-a dentro de um contexto matemático mais amplo e conectando-a a conceitos fundamentais dessa disciplina. A assimilação dessas concepções não só facilita a visualização e manipulação das parábolas em diversos problemas, mas também enriquece a compreensão das inter-relações entre diferentes formas geométricas e suas representações algébricas.

Assim, a abordagem proposta pela Geometria Analítica fornece uma base sólida para que o estudante possa explorar de forma crítica e aplicada o comportamento das parábolas em diversas situações práticas e teóricas.

7.3.1 PRIMEIRA EQUAÇÃO PADRÃO DA PARÁBOLA

Seguindo por base os escritos de Lehmann (1982, p. 128), considera-se a parábola com vértice na origem cujo eixo coincide com o eixo das abscissas, ou seja, o foco encontra-se nesse eixo. Tomando as coordenadas do foco $F(a, 0)$ e do vértice $V(0, 0)$ então, pela **DEFINIÇÃO 7.1**, tem a equação da diretriz l como $x = -a$.

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre a parábola, traça um segmento paralelo ao eixo das abscissas de P à diretriz l , encontrando o ponto M , apresentado na FIGURA 69.



FONTE: Adaptado de Lehmann (1982, p. 128).

Pela definição, o ponto P deve satisfazer a condição:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PM}|. \quad (88)$$

Logo, pelo **TEOREMA 3.14**, vem:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} \\ |\overline{FP}| &= \sqrt{(x - a)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (89)$$

E pelo **TEOREMA 3.8**, tem-se:

$$\begin{aligned} |\overline{PM}| &= |x - (-a)| \\ |\overline{PM}| &= |x + a|. \end{aligned} \quad (90)$$

Substituindo (88) e (89) em (90), e fazendo manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= |x+a| \\ (\sqrt{(x-a)^2 + y^2})^2 &= (x+a)^2 \\ (x-a)^2 + y^2 &= (x+a)^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ y^2 &= 4ax.\end{aligned}\tag{91}$$

De maneira inversa, sendo $P_1(x_1, y_1)$ um ponto qualquer cujas coordenadas satisfazem a equação (91), de modo que $y_1^2 = 4ax_1$.

Adicionando $(x_1 - a)^2$ em ambos os membros e fazendo manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned}y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= 4ax_1 + (x_1 - a)^2 \\ y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= 4ax_1 + x_1^2 - 2ax_1 + a^2 \\ y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= x_1^2 + 2ax_1 + a^2 \\ y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= (x_1 + a)^2 \\ \sqrt{y_1^2 + (x_1 - a)^2} &= \sqrt{(x_1 + a)^2} \\ \sqrt{y_1^2 + (x_1 - a)^2} &= |x_1 + a|\end{aligned}\tag{92}$$

A equação (92) satisfaz a condição geométrica (88) aplicada ao ponto P_1 . Logo, P_1 é um ponto da parábola cuja equação é (91).

A parábola (91) tem apenas um interseção com o eixo das abscissas, tendo simetria única em relação a esse eixo. Reescrevendo a equação, temos:

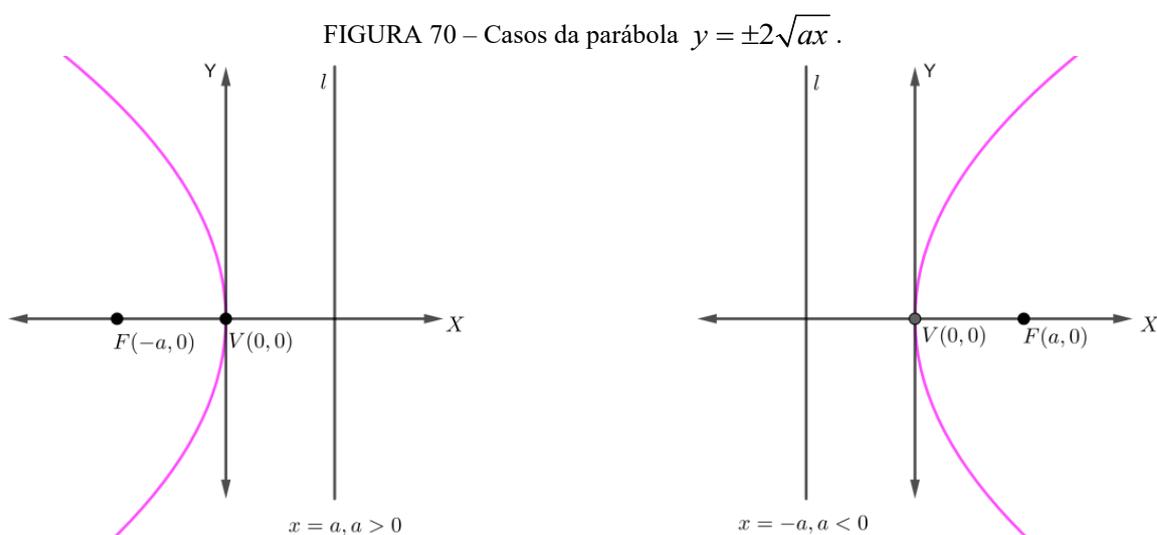
$$\begin{aligned}\sqrt{y^2} &= \sqrt{4ax} \\ y &= \pm 2\sqrt{ax}.\end{aligned}\tag{93}$$

Assim, para valores reais não nulos as variáveis y , x e a possuem o mesmo sinal.

Em consequência há dois casos a observar:

- Caso $a > 0$: não são assumidos os valores negativos de x , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente a direita do eixo das ordenadas, porém simetricamente em relação ao eixo das abscissas.
- Caso $a < 0$: não são assumidos os valores positivos de x , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente a esquerda do eixo das ordenadas, porém simetricamente em relação ao eixo das abscissas.

A FIGURA 70 descreve esses casos.



FONTE: A pesquisadora.

Outro fato a ser observado é quando o eixo da parábola está na origem, mas seu eixo é coincidente com o eixo das ordenadas. A equação que descreve essa parábola pode ser encontrada de maneira análoga ao estudo anterior, sendo dada por:

$$x^2 = 4ay,$$

onde o foco é o ponto $F(0, a)$.

E com manipulações algébricas adequadas, tem-se:

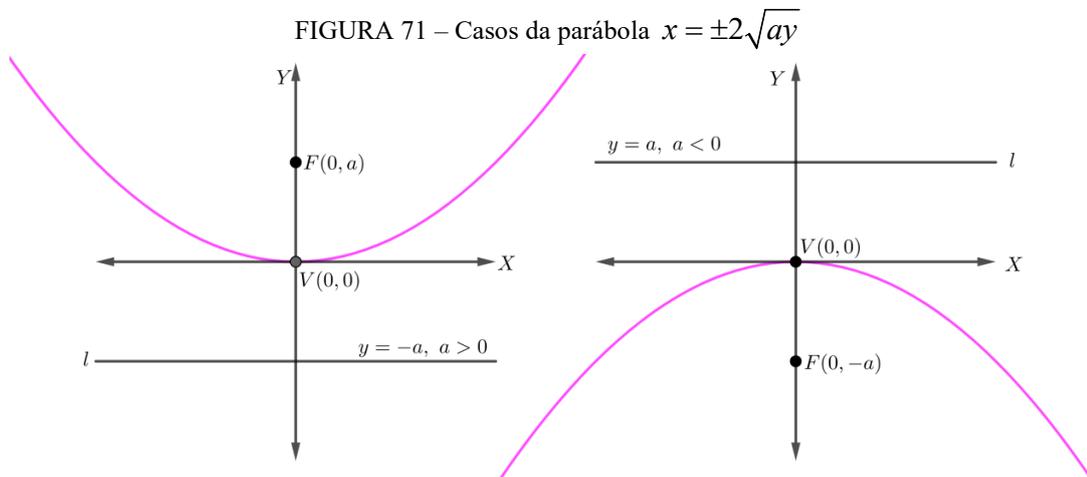
$$x = \pm 2\sqrt{ay}, \tag{94}$$

que para valores reais não nulos as variáveis y , x e a possuem o mesmo sinal

Isso oportuniza o estudo de dois casos:

- Caso $a > 0$: não são assumidos os valores negativos de y , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente acima do eixo das abscissas, porém simetricamente em relação ao eixo das ordenadas.
- Caso $a < 0$: não são assumidos os valores positivos de y , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente a abaixo do eixo das abscissas, porém simetricamente em relação ao eixo das ordenadas.

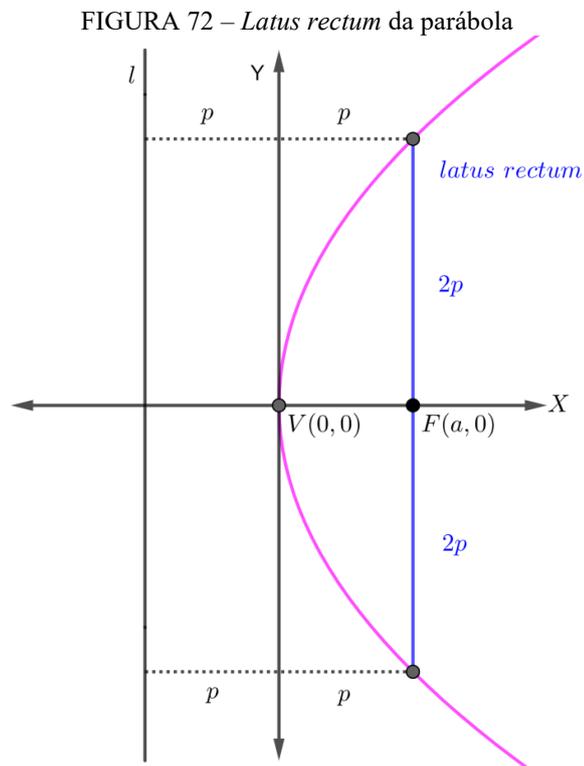
Esses casos são mostrados na FIGURA 71.



FONTE: A pesquisadora.

Das equações (93) e (94) resulta que há dois pontos pertencentes à parábola com cada um deles com coordenada da abscissa igual a a , logo há um ponto de coordenada $(a, 2a)$ e outro com coordenada $(a, -2a)$. Como a abscissa do foco é a , então o comprimento do *latus rectum* ou corda focal mínima é, em valor absoluto, igual à $4a$.

Observe FIGURA 72, que explicita esse caso.



FONTE: A pesquisadora.

Desses fatos, por Lehmann (1982, p. 130), tem-se o seguinte teorema:

TEOREMA 7.2: Se o eixo de uma parábola é coincidente com o eixo das abscissas e o vértice se encontra na origem, então sua equação é dada pela primeira forma padrão:

$$y^2 = 4ax,$$

onde o foco tem coordenadas $(a, 0)$ e a equação diretriz por $x = -a$. Se $a > 0$ a concavidade da parábola está para a direita e se $a < 0$ a concavidade está para a esquerda.

Se o eixo da parábola é coincidente com o eixo das ordenadas e o vértice está na origem, então sua equação é dada pela primeira forma padrão:

$$x^2 = 4ay,$$

onde o foco tem coordenadas $(0, a)$ e a equação diretriz por $y = -a$. Se $a > 0$ a concavidade da parábola está para a cima e se $a < 0$ a concavidade está para baixo.

Em cada um dos casos o comprimento do *latus rectum* é dado pelo valor absoluto de $4a$, coeficiente do termo de primeiro grau.

Segue um exemplo para melhor compreensão do teorema.

EXEMPLO 7.3: Uma parábola cujo vértice está na origem e cujo eixo é coincidente como eixo das abscissas passa pelo ponto $(-2, 4)$. Determinar a equação da parábola, as coordenadas de seu foco, a equação da sua diretriz e o comprimento de seu *latus rectum*.

Solução: Sendo o vértice com coordenadas $(0, 0)$, então o eixo é coincidente com o eixo das abscissas, e pelo **TEOREMA 7.2** a equação da parábola tem a forma $y^2 = 4ax$. Como a parábola passa pelo ponto $(-2, 4)$, então as coordenadas satisfazem sua equação. Logo:

$$4^2 = 4a(-2)$$

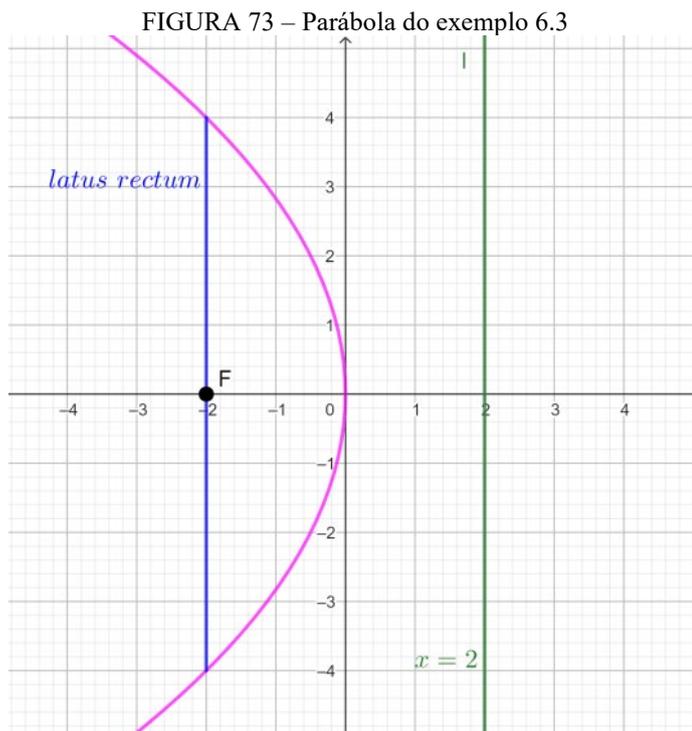
$$16 = -8a.$$

Assim, a equação da parábola é:

$$y^2 = 4(-2)x$$

$$y^2 = -8x$$

Sendo o foco dado pelas coordenadas $(a, 0)$, então $F(-2, 0)$. E a equação da diretriz é dada por $x = -a$, logo $x = 2$. Assim, como o *latus rectum* é dado por $|4a|$, então tem-se que é 8. Portanto, a FIGURA 73 ilustra o exemplo.



FONTE: A pesquisadora.

Compreender a primeira equação padrão da parábola, dada por $y^2 = 4ax$ ou $x^2 = 4ay$, é fundamental para estudantes de Geometria Analítica que desejam aprofundar seus conhecimentos na análise de conicidades. Esta equação descreve uma parábola com um vértice na origem e é importante para entender a estrutura e as propriedades geométricas dessa curva.

Primeiramente, a equação $y^2 = 4ax$ fornece uma descrição clara da relação entre os pontos na parábola e seu foco. O parâmetro a representa a distância focal, que é a distância entre o vértice e o foco. Esta informação é essencial para a análise detalhada das propriedades focais e diretrizes da parábola, que são cruciais em várias aplicações práticas e teóricas da Geometria Analítica.

Além disso, o conhecimento da primeira equação padrão facilita a transição para a segunda equação padrão da parábola, que representa parábolas em posições gerais e orientações diversas. A segunda equação padrão é mais complexa e requer uma compreensão sólida das propriedades fundamentais das parábolas, adquiridas através do estudo da primeira equação padrão.

Ao dominar a primeira equação padrão, o estudante desenvolve habilidades analíticas e geométricas necessárias para manipular e compreender equações mais complexas. Isso inclui a capacidade de completar o quadrado, identificar e interpretar os coeficientes das

equações, bem como entender a rotação e translação das coordenadas para simplificar a análise de conicidades.

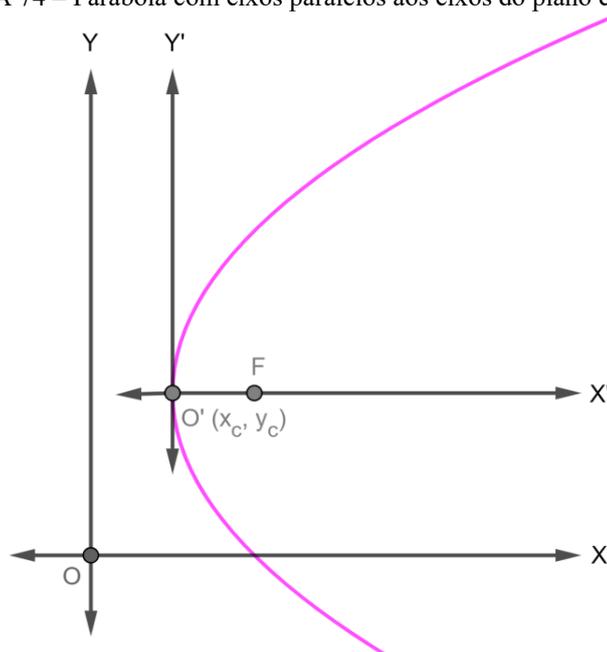
Além disso, o estudo da primeira equação padrão da parábola serve como base para a exploração de outras conicidades, como elipses e hipérbolas, uma vez que muitos dos conceitos e técnicas são compartilhados entre essas curvas. Portanto, a familiaridade com a equação $y^2 = 4ax$ é um passo inicial indispensável para qualquer estudante de Geometria Analítica, preparando-o para um estudo mais aprofundado e abrangente das conicidades e suas aplicações.

Em resumo, a compreensão da primeira equação padrão da parábola não só é essencial para o estudo avançado da própria parábola em suas diversas formas, mas também constitui um fundamento crítico para o entendimento mais amplo da Geometria Analítica como um todo. Com isso, segue para o estudo da segunda equação padrão da parábola.

7.3.2 SEGUNDA EQUAÇÃO PADRÃO DA PARÁBOLA

De modo geral, refletir sobre uma parábola cujo vértice não está sob a origem e seus eixos não coincidentes aos eixos coordenados, mas sim eixos paralelos aos do plano cartesiano, conforme FIGURA 74, abrange um maior número de estudos de aplicações.

FIGURA 74 – Parábola com eixos paralelos aos eixos do plano coordenado



FONTE: Adaptado de Lehmann (1982, p. 132).

Se os eixos coordenados são transladados de modo a origem O' ser coincidente ao vértice de coordenadas (x_C, y_C) , então sua equação em referência aos novos eixos, segundo **TEOREMA 7.2**, é dada por:

$$y'^2 = 4ax' \quad (95)$$

Logo, pelo **TEOREMA 5.2**, as variáveis serão configuradas como:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_C \\ x' &= x - x_C \end{aligned} \quad (96)$$

E,

$$\begin{aligned} y &= y' + y_C \\ y' &= y - y_C \end{aligned} \quad (97)$$

Substituindo (96) e (97) em (95), obtém-se:

$$(y - y_C)^2 = 4a(x - x_C). \quad (98)$$

Analogamente, a parábola cujo eixo é paralelo a Y e tem vértice com coordenadas (x_C, y_C) tem sua equação dada por:

$$(x - x_C)^2 = 4a(y - y_C) \quad (99)$$

Nas equações (98) e (99), $|a|$ é o comprimento da parte do eixo delimitada entre o vértice e o foco. Além disso, essas duas equações são denominadas *segunda equação padrão da parábola*.

Desse estudo, por Lehmann (1982, p. 132), segue o seguinte teorema:

TEOREMA 7.4: O vértice de uma parábola está no ponto (x_C, y_C) e $|a|$ é o comprimento da parte de seu eixo delimitada entre o foco e o vértice.

Se o eixo da parábola é paralelo ao eixo das abscissas então sua equação é dada pela segunda forma padrão

$$(y - y_C)^2 = 4a(x - x_C)$$

Se $p > 0$ a parábola tem concavidade voltada à direita e se $p < 0$ a parábola tem concavidade voltada à esquerda.

Se o eixo da parábola é paralelo ao eixo das ordenadas então sua equação é dada pela segunda forma padrão

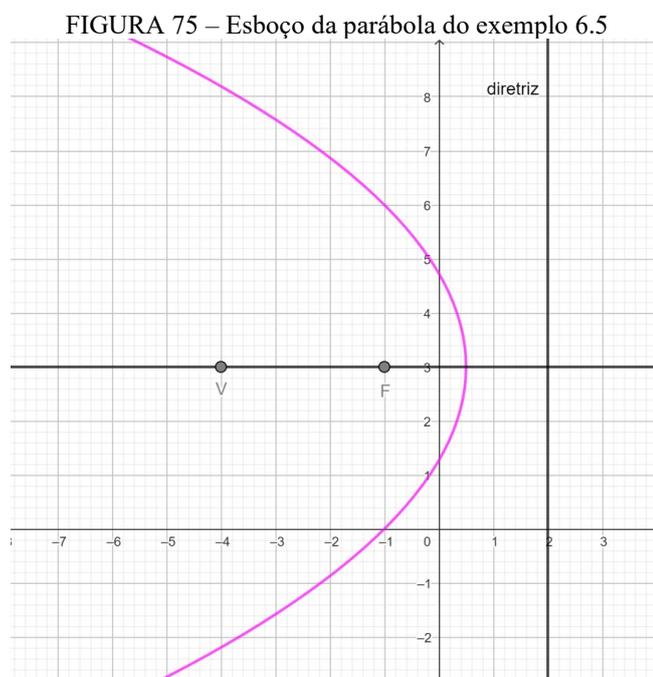
$$(x - x_C)^2 = 4a(y - y_C)$$

Se $p > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e se $p < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Para proporcionar uma compreensão mais clara e detalhada do teorema, apresentamos um exemplo prático a seguir. Este exemplo tem como objetivo demonstrar a aplicação do teorema em uma situação específica, destacando os passos necessários e as implicações dos resultados obtidos. Ao explorar este exemplo, esperamos que os conceitos envolvidos no teorema se tornem mais acessíveis e que sua relevância e utilidade sejam evidenciadas de forma concreta.

EXEMPLO 7.5: Determinar a equação da parábola cujo vértice e o foco são, respectivamente, os pontos $(-4, 3)$ e $(-1, 3)$.

Solução: Sendo o vértice com coordenadas $(-4, 3)$ e o foco com coordenadas $(-1, 3)$, conforme esboço apresentado na FIGURA 75.



FONTE: A pesquisadora.

Observa-se que estão sobre o eixo da parábola, devido a cada um dos pontos terem ordenada 3. Assim, o eixo da parábola é paralelo ao eixo das abscissas do plano e, pelo **TEOREMA 7.4**, a equação da parábola é dada por:

$$(y - y_c)^2 = 4a(x - x_c)$$

Substituindo as coordenadas do vértice na equação, tem-se:

$$(y - 3)^2 = 4a[x - (-4)]$$

$$(y - 3)^2 = 4a(x + 4)$$

Como a porção entre o foco e o vértice é dado por:

$$|a| = |\overline{FV}|$$

$$|a| = |-4 - (-1)|$$

$$|a| = |-4 + 1|$$

$$|a| = |-3|$$

$$|a| = 3$$

Logo, substituindo na equação da parábola tem-se:

$$(y - 3)^2 = 4 \cdot 3(x + 4)$$

$$(y - 3)^2 = 12(x + 4)$$

Portanto, a parábola em estudo tem equação $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$.

A equação (98) pode ser reescrita desenvolvendo as operações e reordenando os termos nos membros do seguinte modo:

$$(y - y_c)^2 = 4a(x - x_c)$$

$$y^2 - 2yy_c + y_c^2 = 4ax - 4ax_c$$

$$y^2 - 4ax - 2yy_c + y_c^2 + 4ax_c = 0 \quad (100)$$

A equação (100), tomando as constantes por $c_1 = -4a$, $c_2 = -2y_c$ e $c_3 = y_c^2 + 4ax_c$, pode ser apresentada como:

$$y^2 + c_1x + c_2y + c_3 = 0 \quad (101)$$

Utilizar o método de completar quadrado na equação (101), será apresentado uma equação que representa uma parábola com eixo paralelo ao eixo das abscissas.

E ao pensar em $c_1 = 0$, equação (101) terá a forma:

$$y^2 + c_2y + c_3 = 0, \quad (102)$$

que é uma equação quadrática com uma variável.

Analisando que uma equação quadrática pode ter raízes reais ou complexas. Logo, tomando por r_1 e r_2 as raízes da equação (102), ser reescrita como:

$$(y - r_1) \cdot (y - r_2) = 0.$$

Dessa forma,

- Se $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2$ então o lugar geométrico consiste em duas retas distintas, $y = r_1$ e $y = r_2$, paralelas ao eixo das abscissas.
- Se $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 = r_2$ então o lugar geométrico consiste em duas retas coincidentes, representada geometricamente por uma única reta paralela ao eixo das abscissas.
- Se $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ então não há lugar geométrico.

E a equação (99) pode ser analisada de forma similar.

Por Lehmann (1982, p. 134), os resultados desse estudo geram o seguinte teorema:

TEOREMA 7.6: A equação do segundo grau nas variáveis x e y , mas desprovida do termo em xy , pode ser escrita na forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$, a equação representa uma parábola cujo eixo é paralelo (ou coincidente) ao eixo das abscissas.

Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D = 0$, a equação representa duas retas distintas paralelas ao eixo das abscissas, duas retas coincidentes paralelas ao eixo das abscissas, ou nenhum lugar geométrico, conforme as raízes de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sejam reais e diferentes, reais e iguais ou complexas.

Se $A \neq 0$, $C = 0$ e $E \neq 0$, a equação representa uma parábola cujo eixo é paralelo (ou coincidente) ao eixo das ordenadas.

Se $A \neq 0$, $C = 0$ e $E = 0$, a equação representa duas retas distintas paralelas ao eixo das ordenadas, duas retas coincidentes paralelas ao eixo das ordenadas, ou nenhum lugar geométrico, conforme as raízes de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sejam reais e diferentes, reais e iguais ou complexas.

Apresenta-se um exemplo para elucidar o teorema.

EXEMPLO 7.7: Mostrar que a equação $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$ representa uma parábola e determinar as coordenadas do vértice e do foco, as equações da diretriz e do eixo e o comprimento de seu *latus rectum*.

Solução: Sendo $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$ a equação estudo representa, pelo **TEOREMA 7.6**, uma parábola cujo eixo é paralelo ao eixo das abscissas.

Aplicando o método de completar quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 48x - 20y - 71 &= 0 \\ 4y^2 - 20y &= 48x + 71 \\ 4(y^2 - 5y) &= 48x + 71 \\ 4\left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) &= 48x + 71 + 25 \end{aligned}$$

$$4\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 48x + 96$$

$$4\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 48(x + 2)$$

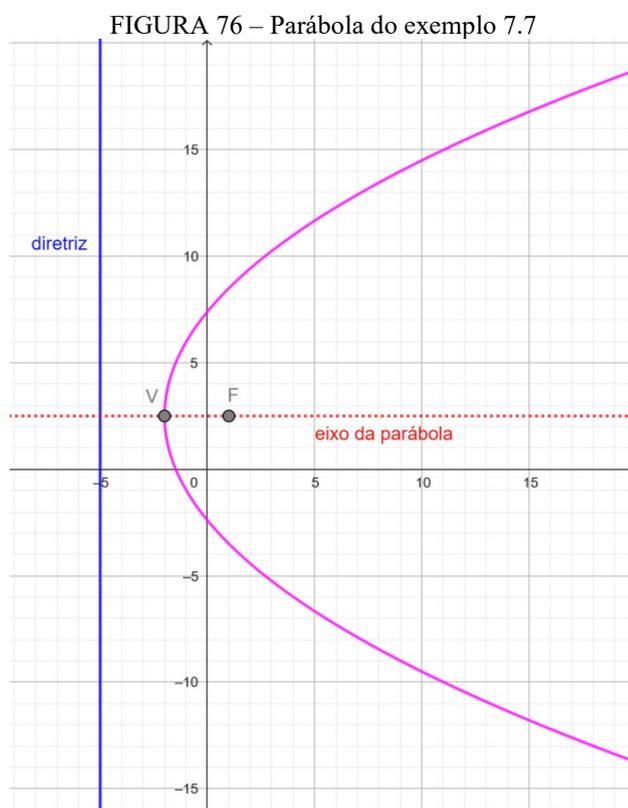
$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2)$$

Pela equação escrita na segunda forma padrão, as coordenadas do vértice são $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$.

Sendo $4a = 12$ então $a = 3$ e a parábola tem concavidade voltada para a direita.

O foco encontra-se sobre o eixo, que é paralelo ao eixo das abscissas, tendo suas coordenadas $\left(-2 + 3, \frac{5}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$.

A equação da diretriz é $x = -2 - 3$ ou $x = -5$. A equação do eixo é $y = \frac{5}{2}$. E o comprimento do *latus rectum* é $|4a| = 12$. A FIGURA 76 é a representação geométrica da parábola representada algebricamente por $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$.



FONTE: A pesquisadora.

Os conhecimentos a respeito da representação algébrica de uma parábola conferem ao estudante de Geometria Analítica uma base sólida para compreender não apenas sua estrutura fundamental, mas também para explorar outras características inerentes a essa curva. A habilidade de expressar a parábola por meio de uma equação algébrica não apenas simplifica sua descrição, mas também proporciona uma compreensão mais profunda dos elementos geométricos envolvidos.

O estudo aprofundado, por sua vez, lança luz sobre os comportamentos das retas tangentes à parábola, um aspecto crucial no estudo da curva. Ao explorar a representação algébrica, o estudante ganha uma perspectiva mais abrangente sobre como as propriedades intrínsecas da parábola influenciam a dinâmica das retas tangentes, ampliando assim sua compreensão da geometria analítica e fornecendo insights valiosos para análises mais avançadas.

7.4 TANGENTES À PARÁBOLA

Na investigação das propriedades geométricas de curvas, a análise das tangentes à parábola emerge como um componente no entendimento mais profundo dessa curva clássica. A abordagem das tangentes à parábola transcende a mera identificação de pontos de contato, proporciona um meio fundamental de explorar o comportamento local da curva e a dinâmica das mudanças em sua inclinação ao longo de diferentes pontos.

A compreensão dessas retas tangentes é intrinsecamente ligada à representação algébrica da parábola, e os conhecimentos resultantes não apenas refinam a descrição da curva, mas também oferecem uma base para análises mais avançadas. Este estudo, portanto, visa apenas elucidar a natureza geométrica das tangentes à parábola e destacar sua relevância na ampliação do escopo da Geometria Analítica e na contribuição para investigações mais sofisticadas e aprofundadas no âmbito matemático.

As tangentes à uma parábola é representada por uma equação linear visto que se tratam de retas. De acordo com Lehmann (1982, p. 137), há três casos a ser considerado no estudo da tangente à uma parábola: em um ponto dado de contato, havendo uma declividade dada e desde um ponto externo.

7.4.1 TANGENTE EM UM PONTO DADO DE CONTATO

Ao estudar a tangente a uma curva em um ponto específico, estamos interessados na reta que melhor se ajusta à curva nesse ponto, ou seja, aquela que compartilha o mesmo ponto de contato e possui a mesma inclinação da curva naquele ponto.

Utilizando para estudo, pelo **TEOREMA 7.2**, a parábola representada pela equação

$$y^2 = 4ax \quad (103)$$

E sendo a tangente uma reta, pelo **TEOREMA 3.33**, a sua equação é da forma:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y &= mx - mx_0 + y_0 \end{aligned} \quad (104)$$

Para a determinação da declividade da reta tangente e seguindo pelo fato da tangente ter um ponto em comum à parábola, dado por (x_0, y_0) , então ao substituir o valor de y indicado em (104) na equação (103), obtém-se:

$$\begin{aligned} (mx - mx_0 + y_0)^2 &= 4ax \\ (mx - mx_0)^2 + 2(mx - mx_0)y_0 + y_0^2 &= 4ax \\ m^2x^2 - 2m^2xx_0 + m^2x_0^2 + 2mxy_0 - 2mx_0y_0 + y_0^2 &= 4ax \\ m^2x^2 - 2m^2xx_0 + m^2x_0^2 + 2mxy_0 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - 4ax &= 0 \\ m^2x^2 + (-2m^2x_0 + 2my_0 - 4a)x + (y_0^2 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (105)$$

Para a tangência em um ponto, o discriminante da equação (105) deve ser nulo.

$$\begin{aligned} (-2m^2x_0 + 2my_0 - 4a)^2 - 4m^2(y_0^2 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0) &= 0 \\ (-2m^2x_0)^2 + 2(-2m^2x_0)(2my_0 - 4a) + (2my_0 - 4a)^2 - 4m^2y_0^2 - 4m^4x_0^2 + 8m^3x_0y_0 &= 0 \\ 4m^4x_0^2 - 8m^3x_0y_0 + 16m^2x_0a + 4m^2y_0^2 - 16my_0a + 16a^2 - 4m^2y_0^2 - 4m^4x_0^2 + 8m^3x_0y_0 &= 0 \\ 16m^2x_0a - 16my_0a + 16a^2 &= 0 \\ 16(m^2x_0 - my_0 + a) &= 0 \\ x_0m^2 - y_0m + a &= 0 \end{aligned} \quad (106)$$

Pela equação (106), tem-se:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-(-y_0) \pm \sqrt{(-y_0)^2 - 4x_0a}}{2x_0} \\ m &= \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4x_0a}}{2x_0} \end{aligned} \quad (107)$$

Como o ponto (x_0, y_0) pertence a parábola, então:

$$y_0^2 = 4ax_0 \quad (108)$$

Substituindo (108) em (107), obtém-se:

$$m = \frac{y_0 \pm \sqrt{4x_0a - 4x_0a}}{2x_0}$$

$$m = \frac{y_0}{2x_0} \quad (109)$$

E substituindo (109) na equação (104), vem:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

$$2x_0y - 2x_0y_0 = xy_0 - x_0y_0$$

$$2x_0y = y_0(x + x_0) \quad (110)$$

Reescrevendo a equação (108), obtém-se:

$$2x_0 = \frac{y_0^2}{2a} \quad (111)$$

Logo, inserindo o valor indicado em (111) na equação (110), tem-se:

$$\frac{y_0^2}{2a}y = y_0(x + x_0)$$

$$y_0^2y = 2ay_0(x + x_0)$$

$$y_0y = 2a(x + x_0)$$

Assim, a equação $y_0y = 2a(x + x_0)$ é a mais comum forma da equação da tangente.

Diversas propriedades da parábola estão associadas à tangente em qualquer ponto da curva. O registro desse resultado, por Lehmann (1982, p. 138), é dado pelo teorema a seguir.

TEOREMA 7.7: A tangente à parábola $y^2 = 4ax$ em qualquer ponto $P_0(x_0, y_0)$ sobre a curva tem por equação

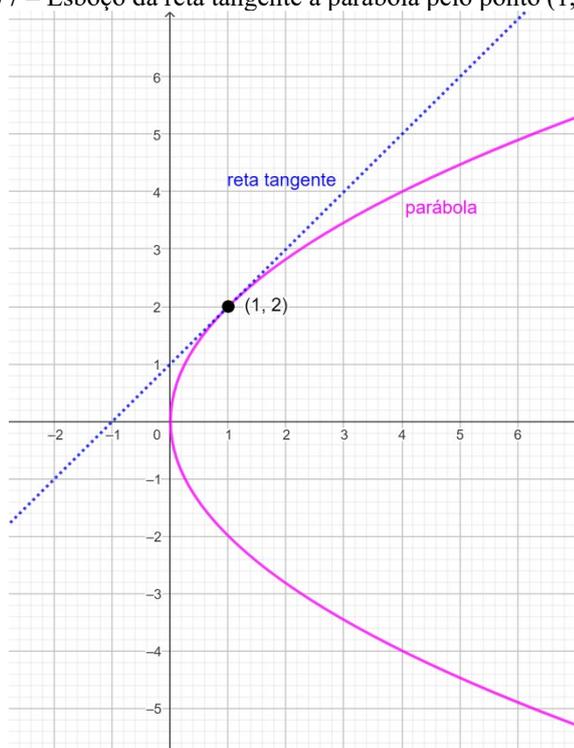
$$y_0y = 2a(x + x_0).$$

Para proporcionar uma compreensão mais clara desse teorema, apresentamos um exemplo prático a seguir. Neste exemplo, exploraremos a equação da tangente a uma parábola, detalhando os passos necessários para derivar essa equação e demonstrando sua aplicação em um caso específico.

EXEMPLO 7.8: Determinar para a parábola $y^2 - 4x = 0$ a equação da tangente ao ponto $(1, 2)$ pertencente à curva.

Solução: Sendo a parábola $y^2 - 4x = 0$, deseja determinar a equação da tangente ao ponto $(1, 2)$ pertencente à curva, conforme FIGURA 77.

FIGURA 77 – Esboço da reta tangente à parábola pelo ponto $(1, 2)$ da curva



FONTE: A pesquisadora.

Reescrevendo a equação da parábola, como mostrada no **TEOREMA 7.2**, pelo método de completar quadrado, vem:

$$y^2 - 4x = 0$$

$$y^2 = 4x$$

Como $4a = 4$ isso implica que $a = 1$.

Assim, pelo **TEOREMA 7.7**, obtém-se:

$$2y = 2 \cdot 1 \cdot (x + 1)$$

$$2y = 2x + 2$$

$$2x - 2y + 2 = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

Portanto, a equação da tangente à parábola é $x - y + 1 = 0$.

A tangente em um ponto de contato fornece uma aproximação linear local da curva, sendo uma ferramenta valiosa na análise de comportamentos locais e na resolução de problemas práticos em diversas áreas de conhecimento.

7.4.2 TANGENTE TENDO UMA DECLIVIDADE DADA

No contexto da Geometria Analítica, a tangente com uma declividade dada é uma abordagem que enriquece a compreensão das características locais de uma curva. Ao considerar uma curva em um ponto específico e procurar uma tangente com uma declividade predefinida, estamos essencialmente buscando uma reta que, além de compartilhar o ponto de contato, também possui uma inclinação específica, ou seja, uma determinada taxa de variação. Este conceito é particularmente relevante ao examinar problemas práticos nos quais a taxa de mudança em um ponto específico é conhecida ou desejada.

Para encontrar a equação da reta tangente à uma parábola quando dada um determinada declividade, toma-se a parábola, pelo **TEOREMA 7.2**, sendo representada pela equação:

$$y^2 = 4ax \quad (112)$$

Se faz necessário ter em mente que a tangente é uma reta. Então, pelo **TEOREMA 3.33**, a tangente é representada pela equação:

$$y = mx + b, \quad (113)$$

onde m é a declividade dada e b é uma constante que deve ser determinada.

Substituindo o valor de y indicado por (112) na equação (113), obtém-se:

$$\begin{aligned} (mx + b)^2 &= 4ax \\ m^2x^2 + 2mbx + b^2 - 4ax &= 0 \\ m^2x^2 + (2mb - 4a)x + b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Visto que a equação recai a uma equação quadrática, então a condição de tangência é dada cumprida para o discriminante nulo, ou seja,

$$\begin{aligned} (2mb - 4a)^2 - 4m^2b^2 &= 0 \\ 4m^2b^2 - 16mba + 16a^2 - 4m^2b^2 &= 0 \\ 16a(-mb + a) &= 0 \\ -mb + a &= 0 \\ b &= \frac{a}{m} \end{aligned} \quad (114)$$

Substituindo o valor da constante b indicada em (114) na equação (113), encontra-se:

$$y = mx + \frac{a}{m},$$

donde $m \neq 0$.

Essas discussões, por Lehmann (1982, p. 139), geram o seguinte teorema:

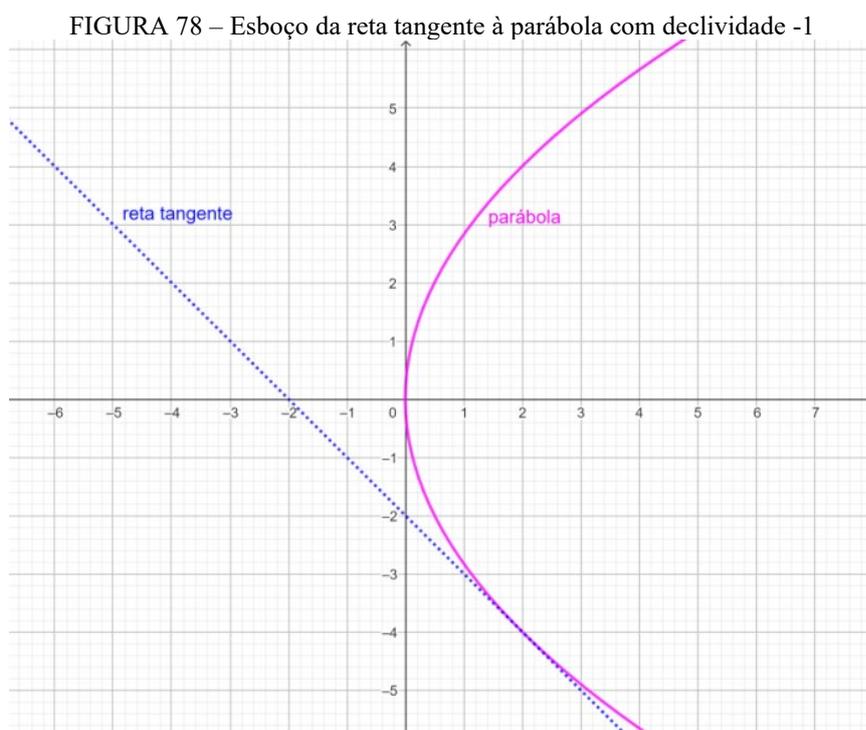
TEOREMA 7.9: A tangente de declividade m à parábola $y^2 = 4ax$ tem por equação

$$y = mx + \frac{a}{m}, \quad m \neq 0.$$

Para melhor compreensão do teorema, segue exemplo.

EXEMPLO 7.10: Determinar a equação da tangente de declividade -1 à parábola $y^2 - 8x = 0$.

Solução: Sendo a parábola $y^2 - 8x = 0$, deseja determinar a equação da tangente de declividade -1 pertencente à curva. Sendo a declividade -1 , então a reta tangente será decrescente, conforme esboço apresentado na FIGURA 78.



FONTE: A pesquisadora.

Reescrevendo a equação da parábola, como mostrada no **TEOREMA 7.2**, pelo método de completar quadrado, vem:

$$y^2 - 8x = 0$$

$$y^2 = 8x$$

Como $4a = 8$ isso implica que $a = 2$.

Assim, pelo **TEOREMA 7.9**, obtém-se:

$$y = -1x + \frac{2}{(-1)}$$

$$y = -x - 2$$

$$x + y + 2 = 0$$

Portanto, a equação da tangente à parábola é $x + y + 2 = 0$.

A tangente com uma declividade dada oferece uma abordagem perspicaz para analisar e resolver questões locais em diversas disciplinas, desde otimização até modelagem matemática de fenômenos naturais.

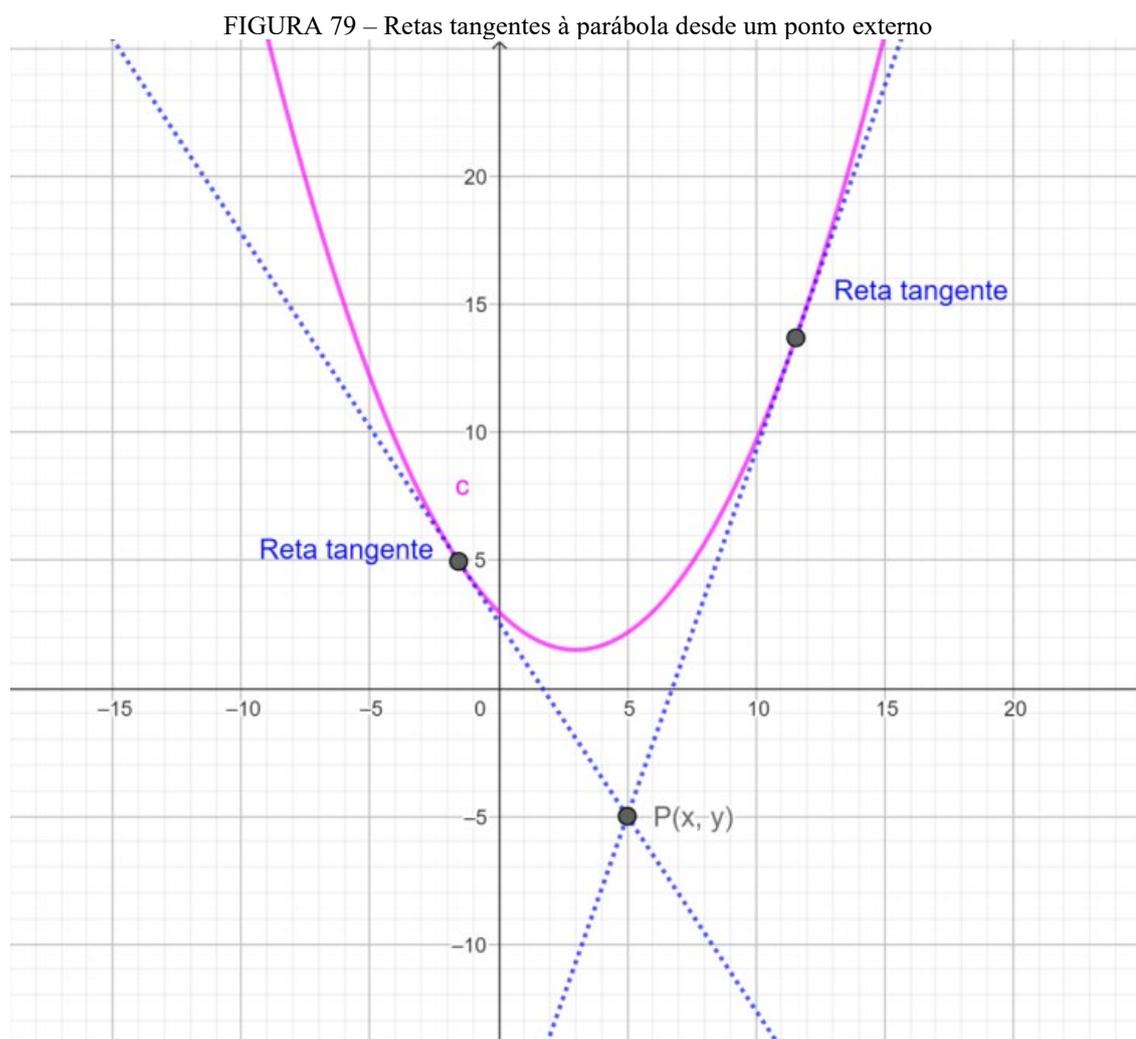
Essa perspectiva avançada da tangente permite uma compreensão mais refinada das relações entre variáveis e é importante para a modelagem precisa de fenômenos complexos em diferentes campos de estudo.

7.4.3 TANGENTE DESDE UM PONTO EXTERNO

Ao investigar a tangente a partir de um ponto externo específico, estamos interessados na reta que toca a curva em um ponto distinto, proporcionando uma visão única das propriedades locais da curva nesse ponto.

Este conceito é particularmente valioso quando se examinam problemas práticos nos quais é necessário entender como uma curva responde a perturbações em pontos externos específicos.

Com isso, deseja-se conhecer a família de retas que intersectam um ponto $P(x, y)$ qualquer externo a parábola, conforme ilustra o exemplo da FIGURA 79.



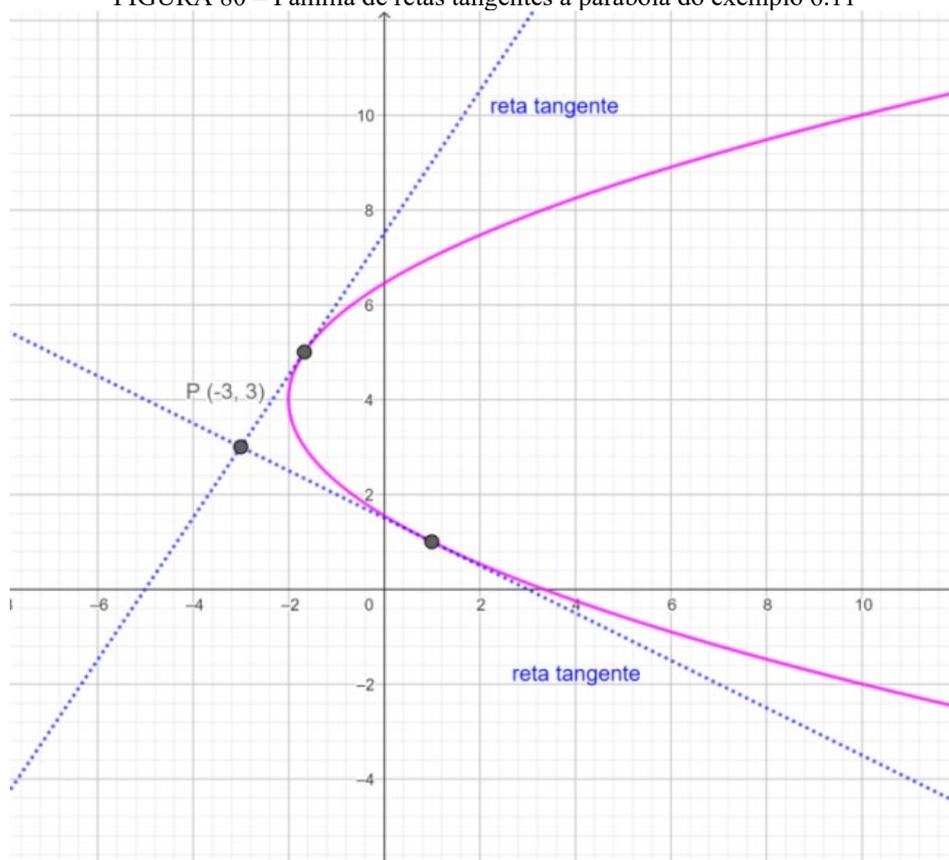
FONTE: A pesquisadora.

Para elucidar o esse conceito, será apresentado um exemplo.

EXEMPLO 6.11: Determinar as equações das retas tangentes traçadas desde o ponto $(-3, 3)$ à parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

Solução: Sendo $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$ uma parábola e o ponto $(-3, 3)$ um ponto externo à curva, deseja-se determinar as equações das retas tangentes a essa parábola e intersectam esse ponto externo.

FIGURA 80 – Família de retas tangentes à parábola do exemplo 6.11



FONTE: A pesquisadora.

A equação da família de retas que intersectam o ponto $(-3, 3)$, segundo **TEOREMA 3.33**, é dada por:

$$y - 3 = m[x - (-3)]$$

$$y - 3 = m(x + 3),$$

onde m é a declividade da reta tangente procurada.

Reorganizando a equação da reta tangente, vem:

$$y - 3 = mx + 3m$$

$$y = mx + 3m + 3$$

Substituindo o valor de y na equação da parábola em estudo, obtém-se:

$$(mx + 3m + 3)^2 - 3x - 8(mx + 3m + 3) + 10 = 0$$

$$m^2x^2 + 2mx(3m + 3) + (3m + 3)^2 - 8(mx + 3m + 3) + 10 = 0$$

$$m^2x^2 + 6m^2x + 6mx + 9m^2 + 18m + 9 - 3x - 8mx - 24m - 24 + 10 = 0$$

$$m^2x^2 + (6m^2 + 6m - 8m - 3)x + (9m^2 + 18m + 9 - 24m - 24 + 10) = 0$$

$$m^2x^2 + (6m^2 - 2m - 3)x + (9m^2 - 6m - 5) = 0$$

Visto que a equação recai a uma equação quadrática, então a condição de tangência é dada cumprida para o discriminante nulo. Logo:

$$\begin{aligned}(6m^2 - 2m - 3)^2 - 4m^2(9m^2 - 6m - 5) &= 0 \\ (6m^2 - 2m)^2 - 6(6m^2 - 2m) + 9 - 36m^4 + 24m^3 + 20m^2 &= 0 \\ 36m^4 - 24m^3 + 4m^2 + 12m + 9 - 36m^4 + 24m^3 + 20m^2 &= 0 \\ -12m^2 + 12m + 9 &= 0\end{aligned}$$

Calculando o valor de m , temos:

$$\begin{aligned}m &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 9}}{2 \cdot (-12)} \\ m &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 432}}{-24} \\ m &= \frac{-12 \pm 24}{-24}\end{aligned}$$

Assim:

$$m = \frac{12}{-24} \quad \text{ou} \quad m = \frac{-38}{-24}$$

Para a equação quadrática $-12m^2 + 12m + 9 = 0$ encontra-se $m = -\frac{1}{2}$ e $m = \frac{3}{2}$.

Para $m = -\frac{1}{2}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}y - 3 &= -\frac{1}{2}(x + 3) \\ 2y - 6 &= -x - 3 \\ 2y + x - 3 &= 0\end{aligned}$$

E para $m = \frac{3}{2}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}y - 3 &= \frac{3}{2}(x + 3) \\ 2y - 6 &= 3x + 9 \\ 2y - 3x - 15 &= 0\end{aligned}$$

Portanto, as equações das retas tangentes à parábola desde o ponto externo são $2y + x - 3 = 0$ e $2y - 3x - 15 = 0$.

A tangente a partir de um ponto externo oferece uma abordagem essencial para analisar a sensibilidade local de uma curva em relação a variações externas, sendo uma ferramenta em áreas como otimização, controle e modelagem matemática de sistemas dinâmicos. O estudo desta perspectiva amplia a compreensão das interações complexas entre uma curva e seu ambiente externo, proporcionando insights valiosos para a resolução de problemas práticos e avançando o conhecimento em diversas disciplinas.

7.5 A FUNÇÃO QUADRÁTICA

No domínio da matemática, a parábola, concebida através de uma equação quadrática, transcende sua estrutura algébrica para desempenhar um papel significativo na compreensão mais ampla das formas e padrões no mundo natural e além.

O **TEOREMA 7.6**, apresenta que a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma parábola, admitindo alguns critérios na sua representação algébrica.

Assim, a equação:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (115)$$

uma função quadrática na variável x , representa uma parábola que, graficamente, tem seu eixo paralelo ou coincidente ao eixo das ordenadas.

Ao reduzir a equação (115) à segunda forma padrão da equação da parábola, pelo método de completar quadrado na variável x , obtém-se:

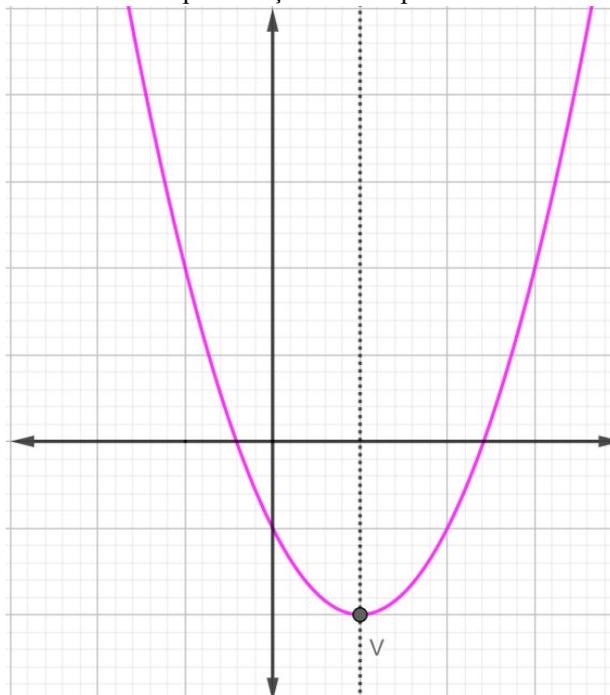
$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= y - c \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= \frac{y}{a} - \frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{1}{a}\left(y - c + \frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned} \quad (116)$$

A equação (116) é a equação de uma parábola com eixo paralelo ou coincidente ao eixo das ordenadas e cujo vértice é o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Assim, a parábola descrita pela equação (115) segue a condição:

- Se $a > 0$ a sua concavidade será voltada para cima;

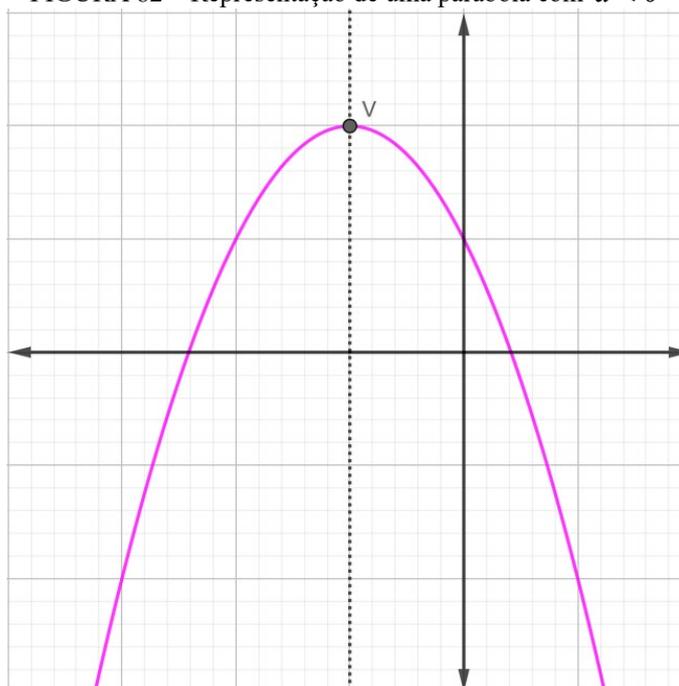
FIGURA 81 – Representação de uma parábola com $a > 0$



FONTE: A pesquisadora.

- Se $a < 0$ a sua concavidade será voltada para baixo.

FIGURA 82 – Representação de uma parábola com $a < 0$



FONTE: A pesquisadora.

Outra característica a ser abordada é o fato de um ponto sobre uma curva contínua cuja ordenada é algebricamente maior do que a de qualquer ponto em sua vizinhança sobre a curva é denominado um **ponto de máximo** da curva. Pela FIGURA 81, quando $a > 0$, a parábola tem um único ponto mínimo, o vértice.

De modo análogo, um ponto cuja ordenada é algebricamente menor do que a de qualquer ponto na vizinhança sobre a curva é denominado **ponto mínimo** da curva. E pela FIGURA 82, quando $a < 0$, a parábola tem um único ponto máximo, o vértice.

Pela interpretação analítica, sendo $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ as coordenadas do vértice da parábola, tem-se:

- Se $a > 0$, a parábola indicada pela equação (115) tem um valor mínimo igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.
- Se $a < 0$, a parábola indicada pela equação (115) tem um valor máximo igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.

Os resultados desse estudo, por Lehmann (1982, p. 142), é dado pelo seguinte teorema:

TEOREMA 7.12: A parábola representada pela função quadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

cujo o eixo é paralelo (ou coincidente) ao eixo das ordenadas e cujo vértice é o ponto

$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, tem características:

- Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e seu vértice é um ponto mínimo, cujo valor é igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.
- Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e seu vértice é um ponto máximo, cujo valor é igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.

Segue exemplo para melhor elucidar o teorema.

EXEMPLO 7.13: Para a função quadrática $y = 4x^2 + 16x + 19$ que representa uma parábola, determinar sua concavidade, seu vértice e seu valor máximo ou mínimo.

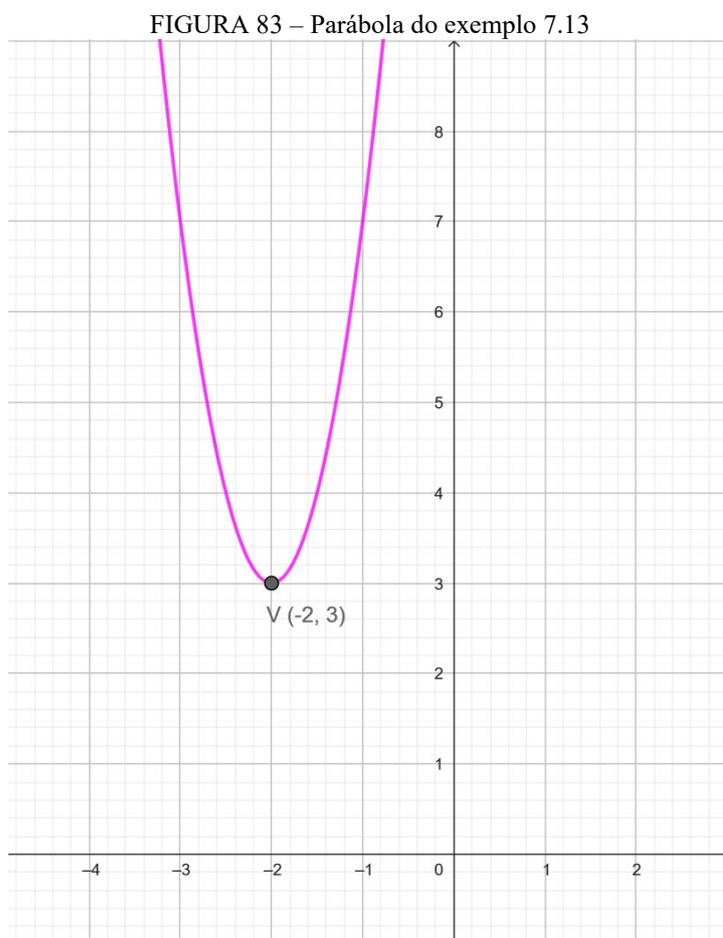
Solução: Sendo $y = 4x^2 + 16x + 19$ uma parábola na qual $a = 4 > 0$, então tem sua concavidade voltada para cima.

Pelo **TEOREMA 7.12**, o vértice dessa parábola é dado no ponto:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{16}{2 \cdot 4}, -\frac{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 19}{4 \cdot 4} \right) &= \left(-\frac{16}{8}, -\frac{(256 - 304)}{16} \right) \\ &= \left(-2, -\frac{(-48)}{16} \right) \\ &= (-2, 3) \end{aligned}$$

Logo, a parábola tem seu valor de mínimo igual a 3 quando a abscissa é igual a -2 .

A FIGURA 83 é a representação gráfica da parábola em estudo.



FONTE: A pesquisadora.

O estudo das propriedades geométricas e algébricas da parábola é essencial para compreender fenômenos naturais, modelar comportamentos físicos e resolver uma variedade de problemas em diferentes campos, desde física e engenharia até economia e ciências computacionais. A versatilidade da parábola enquanto representação gráfica de uma equação quadrática a torna uma ferramenta indispensável na análise matemática aplicada e teórica.

8 CONCLUSÃO

Na vastidão conceitual da Geometria, as noções intuitivas de ponto, reta e plano transcendem suas representações formais, revelando-se como pilares fundamentais na compreensão do espaço. O ponto, em sua singularidade, é o ponto primordial a partir do qual emergem as demais entidades geométricas. Ele encarna a ideia mais elementar de posição e localização. A reta, por sua vez, é uma trilha linear que se estende indefinidamente, conectando pontos em uma trajetória clara e direta. Sua linearidade intrínseca é uma expressão da continuidade e ordem no espaço. O plano, enquanto superfície que se estende sem limites, proporciona uma extensão natural das retas, oferecendo uma noção de expansão bidimensional. Essas entidades geométricas fundamentais não se restringem a meros objetos de estudo, mas representam ideias abstratas que servem como alicerce para a construção de todo o edifício geométrico. A geometria, através dessas intuitivas noções de ponto, reta e plano, transcende a formalidade matemática, conectando-se de maneira intrínseca com nossa percepção do espaço e desempenhando um papel fundamental na nossa apreciação estética e compreensão do mundo à nossa volta.

Explorar as ideias fundamentais de ponto, reta e plano na Geometria, além de ser uma jornada conceptual rica em significado, tem implicações profundas ao transcender para o plano coordenado, base da Geometria Analítica. Enquanto as noções intuitivas fornecem uma compreensão inerente do espaço, a transição para o plano coordenado permite uma abordagem mais formal e quantitativa. O ponto, inicialmente uma abstração de posição, ganha coordenadas específicas, conferindo-lhe uma identidade numérica. A reta, que antes era uma trilha linear no espaço, é agora representada por uma equação matemática, conectando diretamente a geometria intuitiva à álgebra. O plano coordenado, ao proporcionar uma estrutura quantitativa para as ideias geométricas, revela uma simbiose entre a intuição e a precisão matemática. Essa transição não apenas enriquece nossa compreensão do espaço, mas também capacita a modelagem e análise de fenômenos complexos, proporcionando um elo essencial entre a geometria intuitiva e a análise matemática rigorosa. A Geometria Analítica, assim, emerge como uma ponte valiosa que conecta a beleza intuitiva das formas geométricas à precisão formal das coordenadas, ampliando o alcance da geometria e fortalecendo suas aplicações em diversas disciplinas.

Na teoria das retas, encontramos um conceito fundamental que vai além de suas representações algébricas, revelando-se como uma abstração rica em significado. As retas, em sua essência geométrica, são infinitas extensões lineares que conectam pontos sem curvatura. Elas são a manifestação da linearidade e ordem no espaço. Ao explorar a teoria das retas, transcendemos as equações algébricas para apreciar a ideia de uma trajetória ininterrupta que se estende indefinidamente em ambas as direções. As retas, por sua simplicidade e clareza, tornam-se a base para a construção de estruturas geométricas mais complexas. Além de seu papel evidente na geometria, as retas também desempenham um papel central em outras áreas da matemática e além, servindo como ferramenta fundamental para a modelagem de relações lineares em diversos contextos, da física à estatística. A abstração das retas não se limita à sua representação gráfica, mas simboliza a linearidade intrínseca encontrada em muitos fenômenos naturais e sistemas conceituais, revelando uma simplicidade que permeia a complexidade matemática e além.

A circunferência se revela como uma figura teórica que transcende suas raízes em expressões algébricas para se tornar um conceito visualmente enriquecedor. Sem recorrer a fórmulas, consideramos a circunferência como a fronteira perfeita e contínua que envolve um espaço geométrico. O centro da circunferência desempenha um papel crucial ao proporcionar simetria e um ponto de referência para sua expansão ao redor. O raio, por sua vez, é a medida que define o alcance dessa forma única. A teoria por trás da circunferência vai além de sua representação como uma entidade geométrica, estendendo-se a uma narrativa visual de equilíbrio e harmonia. Seu papel vai muito além de ser uma simples curva, encontrando aplicação em contextos tão diversos quanto a modelagem das trajetórias dos planetas e a criação de objetos tão fundamentais como rodas. Em um sentido mais amplo, a circunferência não é apenas uma curva, mas um princípio fundamental que conecta as intrincadas relações entre forma, simetria e movimento no vasto tecido do pensamento matemático.

A elegância da parábola reside na sua representação gráfica, que se assemelha a uma curva suave e simétrica. O vértice da parábola, um ponto crítico, é central para sua estética, determinando o ponto mais alto ou mais baixo da curva e carregando consigo nuances de equilíbrio e proporção. A inclinação e a abertura da parábola, influenciadas pelo coeficiente quadrático "a", contribuem para a expressividade dessa forma matemática. A análise mais profunda da parábola não se limita à árida álgebra, mas se estende à sua interpretação geométrica como uma representação intrínseca de fenômenos naturais, como o movimento dos projéteis, padrões de luz em espelhos côncavos, e a trajetória dos planetas. Assim, a

parábola, além de sua utilidade na resolução de problemas matemáticos, torna-se uma linguagem visual que desvenda os segredos da natureza e possibilita a apreciação da estética matemática em nosso universo.

Conclui-se que a aplicação das teorias de Vygotsky no ensino da geometria analítica, conforme discutido nessa pesquisa, é relevante para proporcionar uma compreensão mais significativa dos conceitos matemáticos. A teoria socioconstrutivista de Vygotsky, com ênfase na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e na mediação, sugere que a aprendizagem é mais eficaz quando os alunos estão engajados em atividades colaborativas que exploram as representações gráficas antes de abordar as análises algébricas. A construção das curvas permite que os estudantes visualizem e compreendam os conceitos abstratos. Isso facilita não apenas a internalização dos conhecimentos, mas também o desenvolvimento de habilidades críticas de resolução de problemas e pensamento analítico.

Esta pesquisa tem por objetivo integrar o conhecimento da Álgebra e da Geometria, destacando a importância de dar sentido ao ensino da Geometria Analítica através da representação gráfica. Ao abordar inicialmente a representação gráfica, os estudantes desenvolvem uma intuição geométrica essencial para a posterior transição para a análise algébrica. Esta abordagem torna a aprendizagem mais interativa e envolvente, mas também alinha-se com a perspectiva de Vygotsky de que a linguagem e a colaboração são fundamentais para a construção do conhecimento.

Portanto, a integração de representações gráficas antes das análises algébricas enriquece o entendimento dos estudantes, como também promove uma aprendizagem mais integrada e conectada dos conceitos de Geometria Analítica. Adicionalmente, esta pesquisa serve como um referencial para estudos futuros e como um recurso para educadores em sua formação e no planejamento de suas práticas pedagógicas, auxiliando-os a criar estratégias de ensino mais eficazes e significativas.

REFERÊNCIAS

- BARSOZZI, L. (1972). *Geometria Analítica com Vetores e Matrizes*. Curitiba: A. M. Cavalcanti.
- BOULOS, P., & CAMARGO, I. (1997). *Introdução à Geometria Analítica no Espaço*. São Paulo: Makron Books.
- CARROLL, M. T., & RYKKEN, E. (2018). *Geometry: The line and the circle* (Vol. 44). Providence: MAAPress.
- CASTRUCCI, B. (1968). *Geometria curso moderno* (3.^a ed., Vol. 1). São Paulo: Livraria Nobel S. A.
- COXETER, H. S. *Introduction to Geometry*. Wiley Classics Library.
- COXETER, H. S. (1980). *Introduction to Geometry* (2.^a ed.). Toronto: Wiley Classic Library.
- EUCLIDES. (2009). *Os Elementos*. (I. Bicudo, Trad.) São Paulo: UNESP.
- Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática* (5.^a ed.). (H. H. Domingues, Trad.) Campinas: Editora da Unicamp.
- FERNANDES, J. P. (2022). Prática pedagógica no ensino de geometria e a teoria socioconstrutivista de Vygotsky. *Connectionline* (29), 149 - 162.
- GERÔNIMO, J. R., & FRANCO, V. S. (2003). *Geometria Plana e Espacial - Um Estudo Axiomático* (1.^a ed.). Maringá: Eduem.
- GROENWALD, C. L., & BECHER, E. L. (2010). Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1.^o ano do Ensino Médio. *Educação Matemática Pesquisa*, 12, 242 - 270.
- HILBERT, D. (2003). *Fundamentos da Geometria* (1.^a ed.). (G. Valente, Ed., & L. Unger, Trad.) Lisboa, Portugal: Gradiva.
- LEHMANN, C. H. (1982). *Geometria Analítica* (4.^a ed.). Porto Alegre: Editora Globo.
- LOCK WOOD, E. H. (1961). *A Book of Curves*. Londres: Universidade de Cambridge.
- MOISE, E. E., & DOWNS, F. L. (1971). *Geometria Moderna - parte I*. (R. G. Watanabe, & D. A. Mello, Trads.) São Paulo: Edgard Blücher.
- MORGADO, A. C., WAGNER, E., & JORGE, M. (2008). *Geometria I*. Fortaleza: VestSeller.
- MORLEY, C. (1920). *Hide and seek*. New York: George H. Doran Co.
- NETO, A. C. (2013). *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana* (1.^a ed.). (H. Alencar, Ed.) Rio de Janeiro, Brasil: SBM.

- PAIVA, A. B. (2018). A História da Matemática no ensino e na aprendizagem da multiplicação. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 5, 98 - 108.
- REGO, T. C. (2001). *Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação* (12 ed.). Rio de Janeiro: Vozes.
- REZENDE, E. Q., & QUEIROZ, M. L. (2008). *Geometria Euclidiana Plana* (2.^a ed.). Campinas: Editora da Unicamp.
- RIGHETTO, A. (1982). *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: IBLC.
- SANTOS, A. O., CARDOSO, M. R., & OLIVEIRA, G. S. (1 de Outubro de 2017). *O ensino e a aprendizagem de matemática na educação infantil numa perspectiva histórico-cultural*. Acesso em 18 de Maio de 2024, disponível em https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/32386/1/2017_art_egsouzahafreeres.pdf
- SIVLVA, A. W., BRAGA, R. M., & GIORDANO, C. C. (2021). Contribuições do pensamento vygotskiano para a modelagem matemática. *Rev. Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 16, 1681 - 1693.
- SOUZA, J. R. (2010). *Matemática: Novo Olhar*. São Paulo: FTD.
- STEWART, J. (2013). *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning.
- VALLADARES, R. J. (1990). *Geometria Analítica do Plano e do Espaço*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **ALESSANDRA CARDOZO** intitulada: **INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA : NO SENTIDO DAS CURVAS PARA AS EQUAÇÕES**, sob orientação do Prof. Dr. ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **Aprovação** no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 21 de Junho de 2024.

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO

Presidente da Banca Examinadora

WESLEY DOS SANTOS VILLELA BATISTA

Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Documento assinado digitalmente

gov.br

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Data: 21/06/2024 22:06:58-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

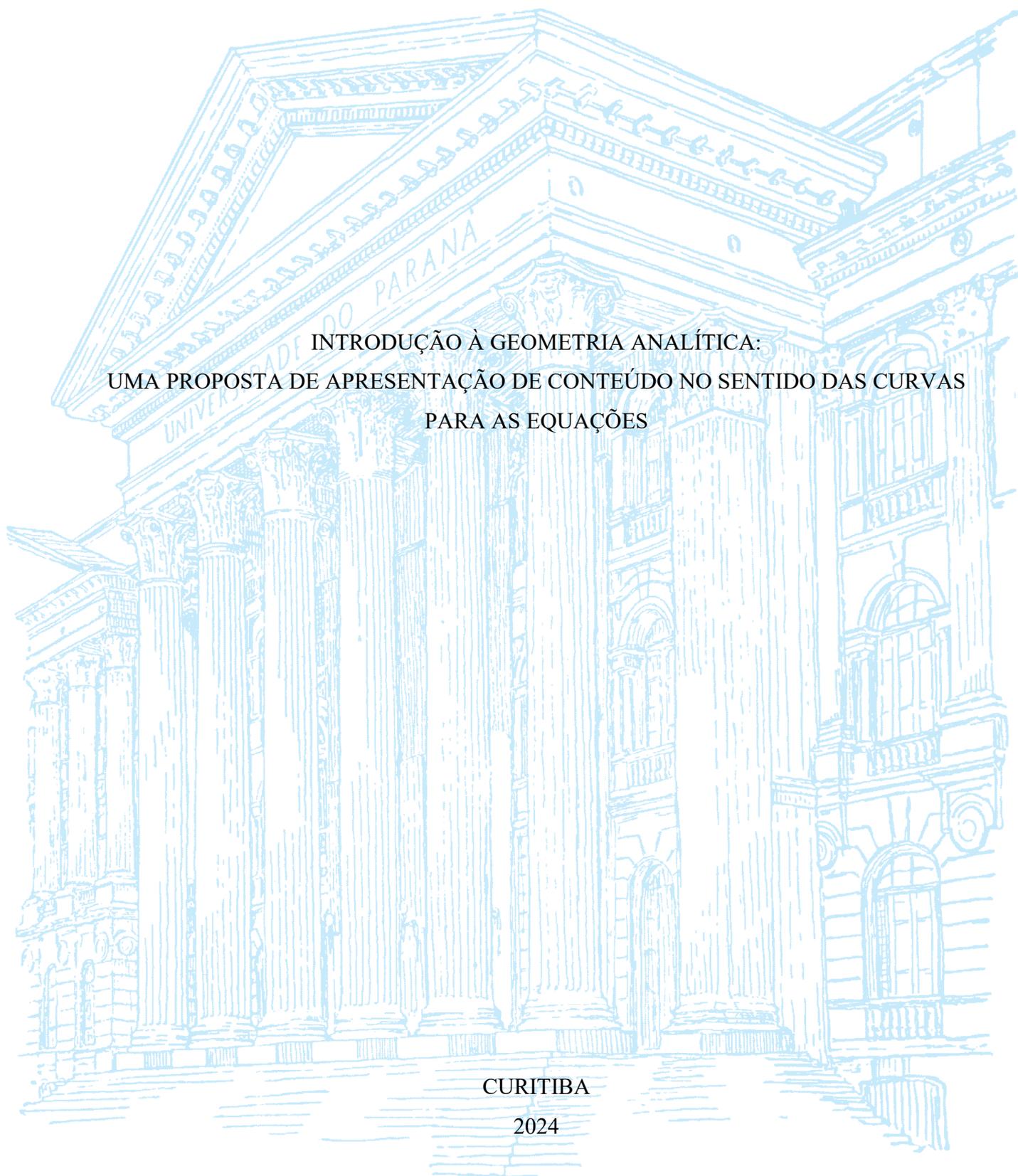
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALESSANDRA CARDOZO

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA:
UMA PROPOSTA DE APRESENTAÇÃO DE CONTEÚDO NO SENTIDO DAS CURVAS
PARA AS EQUAÇÕES

CURITIBA

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALESSANDRA CARDOZO

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA:
UMA PROPOSTA DE APRESENTAÇÃO DE CONTEÚDO NO SENTIDO DAS CURVAS
PARA AS EQUAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre, Curso do PROFMAT – Mestrado Profissional de Matemática, Setor de Ciências Exatas, pólo da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto.

CURITIBA
2024

Ficha catalográfica

Folha/termo de aprovação

*À todos os profissionais que buscam sentido no ensino e aprendizagem
da Geometria Analítica.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram para a realização desta dissertação.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, **Professor Dr. Aldemir José da Silva Pinto**, por sua orientação precisa, paciência e apoio contínuo ao longo deste percurso. Sua expertise e conselhos foram fundamentais para a realização deste trabalho.

À memória do meu pai, **Alexandrino Cardozo**. Sua sabedoria, valores e ensinamentos continuam a guiar-me em todos os aspectos da minha vida. Agradeço profundamente por todo o amor, apoio e inspiração que me proporcionou. Embora não esteja fisicamente presente para compartilhar este momento, sinto sua presença e influência em cada conquista minha.

À minha mãe, **Rosiclé Lourdes da Rosa Cardozo**, por seu apoio e encorajamento constante. Seu exemplo de força e dedicação foi fundamental para que eu pudesse perseverar e alcançar meus objetivos.

Agradeço também aos meus colegas e amigos, especialmente **Luiz Aragão e Paula Osório**, por estarem ao meu lado nos momentos de dificuldade e celebrarem comigo as conquistas. Suas palavras de apoio e amizade tornaram este caminho mais leve e prazeroso.

Manifesto minha gratidão aos professores e funcionários da Universidade Federal do Paraná, que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica. Seu compromisso com a educação e dedicação ao ensino foram inspiradores.

A todos, meu mais sincero agradecimento.

“Virando vagarosamente as
páginas em busca de sentidos.”
W. S. Merwin

RESUMO

Esta dissertação investiga métodos eficazes para a apresentação de conteúdos de Geometria Analítica, com foco inicial na modelagem geométrica com a construção de curvas, seguida pela modelagem algébrica por meio de equações. O objetivo principal é desenvolver uma abordagem didática que facilite a compreensão dos conceitos fundamentais da Geometria Analítica. Baseando-se na teoria de Vygotsky, que enfatiza a influência do meio no desenvolvimento cognitivo, esta pesquisa explora como a visualização gráfica (externo) pode auxiliar na compreensão dos conceitos algébricos (interno). A metodologia integra simultaneamente a construção de curvas geométricas com a apresentação das equações matemáticas que as descrevem. As técnicas de modelagem geométrica foram exploradas para criar e analisar diversas curvas utilizando ferramentas visuais. Imediatamente após a construção dessas curvas, foi realizada a transição para a modelagem algébrica, onde as curvas foram descritas por meio de equações matemáticas. Esse processo contínuo permitiu a aplicação de conceitos de Geometria, Álgebra e Análise, traduzindo as representações geométricas em expressões algébricas precisas, mostrando a interconexão entre os conceitos geométricos e algébricos de maneira que faça sentido no ensino-aprendizagem dos estudantes. Os resultados indicam que a abordagem integrada proposta melhora significativamente a compreensão dos alunos sobre a relação entre a Geometria e a Álgebra na Geometria Analítica. A combinação de modelagem geométrica e algébrica demonstrou ser eficaz para ilustrar conceitos complexos e promover uma aprendizagem mais profunda e significativa. As conclusões destacam a importância de integrar ferramentas visuais e interativas no ensino da Geometria Analítica, sugerindo que essa metodologia pode ser aplicada em diversos níveis educacionais para melhorar a eficácia do ensino. Recomenda-se a realização de estudos futuros para explorar a implementação desta abordagem em diferentes ambientes de ensino e com diversas populações de alunos.

Palavras-chave: Geometria Analítica, modelagem geométrica, construção de curvas, modelagem algébrica, teoria de Vygotsky, ensino de matemática.

ABSTRACT

This dissertation investigates effective methods for presenting Analytic Geometry content, initially focusing on geometric modeling with curve construction, followed by algebraic modeling through equations. The main objective is to develop a didactic approach that facilitates the understanding of fundamental concepts in Analytic Geometry. Drawing on Vygotsky's theory, which emphasizes the influence of the environment on cognitive development, this research explores how graphical visualization (external) can aid in understanding algebraic concepts (internal). The methodology simultaneously integrates the construction of geometric curves with the presentation of the mathematical equations that describe them. Geometric modeling techniques were explored to create and analyze various curves using visual tools. Immediately after the construction of these curves, a transition to algebraic modeling was conducted, where the curves were described through mathematical equations. This continuous process allowed for the application of concepts from Geometry, Algebra, and Analysis, translating geometric representations into precise algebraic expressions, showing the interconnection between geometric and algebraic concepts in a way that makes sense in student learning. The results indicate that the proposed integrated approach significantly improves students' understanding of the relationship between Geometry and Algebra in Analytic Geometry. The combination of geometric and algebraic modeling proved effective in illustrating complex concepts and promoting deeper and more meaningful learning. The conclusions highlight the importance of integrating visual and interactive tools in teaching Analytic Geometry, suggesting that this methodology can be applied at various educational levels to improve teaching effectiveness. Further studies are recommended to explore the implementation of this approach in different educational environments and with diverse student populations.

Keywords: Analytic Geometry, geometric modeling, curve construction, algebraic modeling, Vygotsky's theory, mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Representação de ponto, reta e plano.....	27
Figura 2 –	Representação da reta	29
Figura 3 –	Três pontos alinhados sobre uma reta.....	30
Figura 4 –	Algumas posições entre duas retas	30
Figura 5 –	Representação de pontos que dividem a reta em partes.....	31
Figura 6 –	Representação de parte da reta limitada pelos pontos A e B	32
Figura 7 –	Partes de uma reta	33
Figura 8 –	Representação de segmentos orientados.....	34
Figura 9 –	Possibilidades de posições de três pontos colineares em um segmento	35
Figura 10 –	Representação de pontos em uma reta orientada	36
Figura 11 –	Sistema plano de coordenadas	39
Figura 12 –	Representação de pontos no plano de coordenadas	41
Figura 13 –	Representação do triângulo do exemplo 3.13	42
Figura 14 –	Distância entre dois pontos dados.....	44
Figura 15 –	Ângulo entre duas retas concorrentes	46
Figura 16 –	Representação do ângulo de inclinação de reta	47
Figura 17 –	Representação do ângulo de inclinação de uma retadeterminada por dois pontos	48
Figura 18 –	Representação da reta do exemplo 3.20.....	50
Figura 19 –	Relação entre duas retas no plano coordenado	51
Figura 20 –	Representação dos pontos do exemplo 3.24	55
Figura 21 –	Representação do paralelogramo do exemplo 3.24	56
Figura 22 –	Representação de uma reta no plano sistema coordenado com alguns de seus pontos.....	57
Figura 23 –	Representação de pontos de interseção de um lugar geométrico e os eixos de um plano coordenado	58
Figura 24 –	Representação da simetria de dois pontos em relação a um eixo	59
Figura 25 –	Representação da simetria de dois pontos em relação a um ponto	59
Figura 26 –	Ideia de uma reta simétrica em relação ao eixo das abscissas	60
Figura 27 –	Exemplo de assíntota vertical e aoblíqua de uma curva	62
Figura 28 –	Representação de dois pontos distintos que definem apenas uma reta.....	63

Figura 29 –	Representação de uma reta definida por um ponto conhecido e sua declividade	64
Figura 30 –	Representação da reta do exemplo 3.34.....	65
Figura 31 –	Representação de uma reta descrita pela forma declividade-interseção	66
Figura 32 –	Representação de uma reta e suas interseções aos eixos coordenados.....	69
Figura 33 –	Família de retas com inclinação -3	79
Figura 34 –	Família de retas que passam pelo ponto (-1, 3)	80
Figura 35 –	Representação da circunferência \mathcal{C}	83
Figura 36 –	Circunferência de centro C e raio r	84
Figura 37 –	Circunferência de centro na origem.....	87
Figura 38 –	Representação da circunferência do exemplo 4.14.....	97
Figura 39 –	Representação parcial da família de circunferências com centro no ponto $2, -1$	98
Figura 40 –	Representação parcial da família de circunferências com centro na reta $x = -3$	99
Figura 41 –	Representação geométrica da situação do exemplo 4.15.....	103
Figura 42 –	Representação geométrica da situação do exemplo 4.17.....	109
Figura 43 –	Segmento tangente desde um ponto externo à circunferência	110
Figura 44 –	Representação da situação do exemplo 4.21.....	114
Figura 45 –	Representação da situação do exemplo 4.22.....	115
Figura 46 –	Representação da situação do exemplo 4.23.....	117
Figura 47 –	Translado dos eixos coordenados para o centro da circunferência.....	120
Figura 48 –	Análise das coordenadas do ponto P com a translação dos eixos coordenados	121
Figura 49 –	Rotação de eixos coordenados e posicionamento de um ponto p em relação a ambos os eixos	124
Figura 50 –	Curvas do estudo do exemplo 5.7	129
Figura 51 –	Secções cônicas.....	132
Figura 52 –	Superfície cônica circular	132
Figura 53 –	Secções cônicas.....	133
Figura 54 –	Lugar geométrico das cônicas.....	134
Figura 55 –	Primeiro traço da lei de formação da parábola	137
Figura 56 –	Repetição dos traços da formação da parábola	138

Figura 57 –	Local geométrico da parábola.....	139
Figura 58 –	Pontos de tangência da parábola.....	140
Figura 59 –	Pontos de formação da parábola.....	141
Figura 60 –	Ângulos de formação da parábola.....	142
Figura 61 –	Ângulos de formação da parábola em nova notação.....	143
Figura 62 –	Triângulos da formação da parábola.....	144
Figura 63 –	Aproximação dos pontos de tangência da parábola.....	145
Figura 64 –	Relação entre triângulos de formação das propriedades da parábola.....	146
Figura 65 –	Características de uma reta fixa a uma determinada distância da parábola....	147
Figura 66 –	Foco e diretriz de uma parábola.....	148
Figura 67 –	Elementos da análise algébrica da parábola.....	149
Figura 68 –	Elementos da análise algébrica da parábola no plano coordenado.....	150
Figura 69 –	Ponto qualquer da parábola.....	152
Figura 70 –	Casos da parábola $y = \pm 2\sqrt{ax}$	154
Figura 71 –	Casos da parábola $x = \pm 2\sqrt{ay}$	155
Figura 72 –	<i>Latus rectum</i> da parábola.....	155
Figura 73 –	Parábola do exemplo 7.3.....	157
Figura 74 –	Parábola com eixos paralelos aos eixos do plano coordenado.....	158
Figura 75 –	Esboço da parábola do exemplo 7.5.....	160
Figura 76 –	Parábola do exemplo 7.7.....	163
Figura 77 –	Esboço da reta tangente à parábola pelo ponto (1, 2) da curva.....	167
Figura 78 –	Esboço da reta tangente à parábola com declividade -1.....	169
Figura 79 –	Retas tangentes à parábola desde um ponto externo.....	171
Figura 80 –	Família de retas tangentes à parábola do exemplo 7.11.....	172
Figura 81 –	Representação de uma parábola com $a > 0$	175
Figura 82 –	Representação de uma parábola com $a < 0$	175
Figura 83 –	Parábola do exemplo 7.13.....	177

LISTA DE ABREVIATURAS

G.A.	Geometria Analítica.
ed.	edição.
p.	página.
u.c.	unidade de comprimento.
Vol.	volume.

LISTA DE SÍMBOLOS

ε	conjunto épsilon.
α	alfa.
β	beta.
γ	gama.
\overleftrightarrow{AB}	reta AB .
\overrightarrow{AB}	semirreta AB .
\overline{AB}	segmento de reta AB .
d_{AB}	distância entre os pontos A e B .
\leq	menor ou igual que.
$>$	maior que.
$\tan(\alpha)$	tangente do ângulo α .
$\cot(\alpha)$	cotangente do ângulo α .
$\hat{A}CB$	ângulo ACB , com vértice em C .
\equiv	congruência.
\perp	ângulo reto.
$\triangle ABC$	triângulo ABC .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	AS CONTRIBUIÇÕES VYGOTSKERIANA PARA A MATEMATICA E GEOMETRIA ANALITICA	19
2.1	TEORIA DE VYGOTSKY PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA.....	19
2.2	TEORIA SOCIOCONSTRUTIVISTA DE VYGOTSKY.....	20
2.3	ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL (ZDP).....	22
3	CONCEITOS BÁSICOS PARA DAR SENTIDO À GEOMETRIA ANALÍTICA	26
3.1	CONCEITOS GEOMÉTRICOS	26
3.2	A RETA.....	28
3.3	SISTEMA DE COORDENADAS	33
3.3.1	Sistema linear de coordenadas	36
3.3.2	Sistema plano de coordenadas.....	38
3.4	DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS.....	43
3.5	ÂNGULOS	45
3.6	CLASSIFICAÇÃO DAS RETAS	51
3.7	EQUAÇÃO DA RETA	56
3.8	A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DE UMA RETA.....	72
3.8.1	Relações entre duas retas através da equação	75
3.9	FAMÍLIAS DE RETAS	78
4	A CIRCUNFERÊNCIA	83
4.1	A EQUAÇÃO PADRÃO DA CIRCUNFERÊNCIA.....	83
4.2	A EQUAÇÃO CANÔNICA DA CIRCUNFERÊNCIA.....	87
4.3	A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA.....	89
4.4	CIRCUNFERÊNCIAS DETERMINADA POR TRÊS CONDIÇÕES	94

4.5	FAMÍLIAS DE CIRCUNFERÊNCIAS.....	98
4.6	EIXO RADICAL.....	106
4.7	PROBLEMAS SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS RELATIVOS À CIRCUNFERÊNCIA	113
5	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	119
5.1	TRANSLAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS	121
5.2	ROTAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS.....	124
6	AS CÔNICAS	131
7	PARÁBOLA	136
7.1	O LUGAR GEOMÉTRICO DA PARÁBOLA.....	137
7.2	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS.....	140
7.2.1	Propriedades do Foco e da Diretriz	145
7.3	A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA	148
7.3.1	Primeira equação padrão da parábola.....	152
7.3.2	Segunda equação padrão da parábola.....	158
7.4	TANGENTES À PARÁBOLA	164
7.4.1	Tangente em um ponto dado de contato.....	165
7.4.2	Tangente tendo uma declividade dada	168
7.4.3	Tangente desde um ponto externo.....	170
7.5	A FUNÇÃO QUADRÁTICA	174
8	CONCLUSÃO	179
	REFERÊNCIAS	182

1 INTRODUÇÃO

A pesquisa busca uma investigação de uma proposta para apresentação dos conteúdos de Geometria Analítica, destacando uma abordagem inicial na modelagem geométrica através da construção de curvas, seguida pela exploração da modelagem algébrica por meio de equações. O objetivo principal é desenvolver uma estratégia didática que não apenas apresente os conceitos fundamentais da Geometria Analítica, mas também facilite sua compreensão e aplicação por parte dos estudantes. Reconhecendo os desafios enfrentados por muitos ao assimilar os princípios dessa disciplina, esta pesquisa visa fornecer um arcabouço teórico e prático que possa ser adotado no ensino, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e significativa.

O capítulo 1 desta dissertação, intitulado "As Contribuições Vygotskeriana para a Matemática e Geometria Analítica", investiga a aplicação das teorias de Vygotsky no ensino da Matemática, com ênfase na Geometria Analítica. Discute-se a utilização da teoria socioconstrutivista de Vygotsky para criar um ambiente de aprendizagem colaborativo e dinâmico, que facilita a compreensão profunda e a aplicação dos conceitos matemáticos. São abordadas a importância da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e da mediação no processo de aprendizagem, sugerindo-se o uso de ferramentas visuais para mediar o aprendizado e tornar os conceitos abstratos mais acessíveis. A linguagem e a colaboração são destacadas como elementos importantes para a internalização do conhecimento, permitindo que os estudantes discutam, expliquem e justifiquem suas soluções matemáticas de maneira mais eficaz.

No capítulo 2, "Conceitos Básicos para dar sentido à Geometria Analítica", são apresentados os fundamentos essenciais que formam a base da Geometria Analítica. Aborda conceitos geométricos fundamentais, como a reta, o sistema de coordenadas, a distância entre dois pontos e os ângulos. Estes conceitos são desenvolvidos de forma a proporcionar aos estudantes uma compreensão sólida e estruturada, facilitando a transição para tópicos mais avançados. E destaca a importância de entender a classificação das retas, a equação da reta, e as relações entre retas através das equações, estabelecendo um alicerce robusto para o estudo subsequente das curvas geométricas.

O capítulo 3, "A Circunferência", examina a segunda curva geométrica mais familiar aos estudantes após a reta. A abordagem começa com a definição da circunferência como o lugar geométrico de um ponto que mantém uma distância constante de um ponto fixo. O

capítulo explora a equação padrão, a equação canônica, e a forma geral da equação da circunferência, além de discutir as circunferências determinadas por três condições e as famílias de circunferências. A mediação através de representações geométricas e algébricas visa solidificar a compreensão dos alunos sobre este importante conceito.

No capítulo 4, "Transformação de Coordenadas", são exploradas as operações que simplificam a manipulação das equações das curvas, facilitando a compreensão geométrica e algébrica. O foco está nas transformações por translação e rotação dos eixos coordenados, demonstrando como estas operações podem transformar a representação de uma circunferência para um novo sistema de coordenadas. Este capítulo enfatiza a importância dessas transformações para uma compreensão mais profunda e conectada das curvas na geometria analítica.

O capítulo 5, "As Cônicas", aborda as seções cônicas – elipse, parábola e hipérbole – como lugares geométricos de um ponto cuja distância a um ponto fixo é proporcional à sua distância a uma reta fixa. Discute as definições e propriedades das cônicas, explorando suas equações e características no plano coordenado. Através de uma análise das cônicas, o capítulo proporciona uma compreensão abrangente dessas curvas, conectando a teoria clássica com a Geometria Analítica.

E no capítulo 6, "Parábola", é feita uma análise aprofundada da parábola, começando com a definição geométrica e avançando para suas propriedades e equações. Explora a tangente em um ponto dado, a tangente com uma inclinação específica, e a tangente a partir de um ponto externo. A função quadrática também é discutida, proporcionando aos estudantes uma visão completa e integrada sobre a parábola, incluindo suas aplicações e representações algébricas

2 AS CONTRIBUIÇÕES VYGOTSKERIANA PARA A MATEMÁTICA E GEOMETRIA ANALÍTICA.

2.1 TEORIA DE VYGOTSKY PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

O ensino de Matemática no Brasil tem enfrentado muitos desafios nas últimas décadas, tanto no que diz respeito aos processos de ensino e de aprendizagem em si, quanto na forma como a disciplina é vista pela sociedade, de modo geral. Nas pesquisas bibliográficas, bem como na experiência profissional de ensino dessa disciplina, a qual essa mestrandanda atua, há uma concordância por parte dos estudantes que a Matemática é a disciplina que os discentes menos gostam. Muito desse sentimento acerca da Matemática, se dá pela forma que ela enquanto método de ensino no processo de aprendizagem é apresentada ou lida como: complexa, difícil, com números, símbolos e linguagens, que precisam da mediação do docente, que atuará de forma ativa nesse processo. Para tal processo, acredita-se que a contribuição da Psicologia do Desenvolvimento, em específico as teorias e contribuições do psicólogo russo Lev Semionovich Vygotsky.

Lev Semionovich Vygotsky nasceu em Orsha, Bielo-Rússia, em novembro de 1896 e morreu em junho de 1934, com apenas 38 anos, vítima de tuberculose, doença que o acompanhou desde os 20 anos de idade. Embora sua carreira tenha sido breve, suas contribuições à Psicologia deram novos rumos às pesquisas nesta área na época e tornaram-se elementares a compreensão do processo de desenvolvimento do indivíduo até os dias atuais. (SANTOS, CARDOSO, & OLIVEIRA, 2017).

Inúmeras foram as contribuições de Vygotsky para a Psicologia, em específico para área da educação, aprendizagem e desenvolvimento, tais contribuições norteiam a práxis educacionais até a atualidade.

Para Vygotsky, a aprendizagem da criança antecede a entrada na escola, ou seja, desde o nascimento, e que o aprendizado escolar produz algo novo no desenvolvimento infantil, evidenciando as relações interpessoais, essa perspectiva apresenta uma nova compreensão da criança, da Educação Infantil, e do papel do professor. E em se tratando do ensino e aprendizagem em Matemática, esse papel será fundamental para a compreensão dos símbolos e signos presentes na disciplina.

Segundo Vygotsky (1996; 2000; 2001), é o aprendizado coletivo que irá promover o desenvolvimento humano, uma vez que o homem é um ser social, fruto de um agregado de

interações sociais e históricas. A relação do homem com o mundo não é direta, mas sim mediada por instrumentos e signos. O autor ressalta a importância do pensamento e da linguagem.

Embora o autor não seja citado ou tenha o seu trabalho, bem como teorias aplicadas ao ensino de Matemática, e em específico a Geometria Analítica que é o objeto central dessa dissertação, percebe-se que as contribuições das suas teorias para o ensino e compreensão dos símbolos e suas linguagens, aos quais os professores recorrem para explicar e/ou ensinar a Matemática e Geometria Analítica, na tentativa de mudar a percepção descontextualizada e negativa da Matemática manifestada por grande parte dos estudantes.

Para Fernandes, Wielewski *et al* (2022, p. 154):

“ É importante destacar, que a configuração do professor por si só, não deve ser vista como um único dos mediadores possíveis. A partir dos pensamentos Vygostkyano, os mediadores são todos os elementos e objetos que estão presentes na cultura, tanto ferramentas, objetos culturais, obras de arte, mapas, brinquedos, livros, etc., são considerados mediadores.

Todos os recursos supracitados devem estar descritos no plano de ensino do professor, bem como as práticas pedagógicas adotadas a serem aplicadas pelo professor, também como um mecanismo de mediação. Em relação à mediação, Vygotsky (2000; 2010) destaca dois elementos mediadores que são os instrumentos e os signos, eles a mais nessa relação de desenvolvimento e troca que se dão entre o indivíduo e o meio no qual estão inseridos.

Em seu cerne a teoria vygotskeriana é pautada na relação do indivíduo em seu contexto social, sendo a aprendizagem o processo de apropriação dos conhecimentos históricos que fazem parte do nosso patrimônio cultural e social, construído pelos nossos antecessores. Cada indivíduo desenvolve sua consciência a partir dos resultados das suas aprendizagens e das relações estabelecidas socialmente com o seu grupo, conceitos, crenças e hábitos.

2.2 TEORIA SOCIOCONSTRUTIVISTA DE VYGOTSKY

Em seu curto período de vida, Vygotsky produziu um arsenal científico significativo, que conta com uma série de artigos, livros, ensaios e pesquisas que segue contribuindo e influenciando pesquisadores atualmente. Uma das questões que permeiam os trabalhos desse epistemólogo é entender como ocorre o desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

Essa análise e observação possibilitaram que pesquisadores aprofundassem em temas relacionados ao pensamento, a linguagem, a memória e atenção, controle consciente do comportamento, pensamento abstrato, raciocínio dedutivo, entre outros, na busca do entendimento das funções psíquicas se desenvolvem no ser humano como um todo. Nessa perspectiva:

As funções psicológicas especificamente humanas se originam nas relações do seu contexto cultural e social. Isto é, o desenvolvimento mental humano não é dado a priori, não é imutável e universal, não é passivo nem tampouco independente do desenvolvimento histórico e das formas sociais da vida humana. A cultura é, portanto, parte constitutiva da natureza humana, já que sua característica psicológica se dá através da internalização dos modos historicamente determinados e culturalmente organizados de operar com informações. (Rego, 2001, p. 41).

A Teoria Socioconstrutivista afirma que existe o conhecimento do lado de fora do ser humano, um conhecimento que está enraizado na cultura, nos objetos, nas formas e utensílios, e na maneira que vivemos, entretanto, quando o conhecimento é internalizado, é reinterpretado pelo sujeito embasado em sua história de vida. Nesse viés, não se tornam meras cópias do que já existe na cultura. Cada pessoa passa por experiências diferentes ao longo da vida, e isso interfere na forma que esta interpreta o mundo. Com base nessa teoria, o professor participa desse processo como mediador do conhecimento, porém não deve ser vista ou posta como único método mediador, mediadores são todos os elementos e objetos que estão presentes na cultura, tanto ferramentas, objetos culturais, obras de arte, mapas, brinquedos, livros, etc. são considerados mediadores. Nesse contexto, pensando na prática do professor de Matemática que, autores como Silva, Braga e Giordano (2021), dizem:

O professor que ensina Matemática precisa considerar o pressuposto de que o estudante é fruto do contexto histórico-cultural em relação ao meio em que vive. Assim, não podemos compreender que todos os discentes aprendem do mesmo jeito e no mesmo ritmo (BRASIL, 2018). A cultura e a socialização desempenham um papel crucial em seu desenvolvimento pois, para Vygotsky, só há aprendizagem a partir do outro. Na ausência do outro, o homem não se constrói homem. Nessa perspectiva, a formação se dá na relação entre o sujeito e a sociedade a seu redor. Dessa forma, o indivíduo modifica o ambiente e este o modifica de volta.

Ou seja, em relação à Matemática, essa área do conhecimento, como qualquer outra área, mantém uma relação ontológica com o trabalho, ou seja, surgiu para atender a determinada necessidade humana. Em síntese, a Matemática só existe porque o homem precisou dela para criar objetivações para resolver os problemas originados na prática, para solucionar problemas das esferas cotidianas. Acerca dessas práxis, haverá sessões abaixo que

explanara o conteúdo, aqui so um breve tópico e relação com a teoria de Vygotsky. No tocante a Geometria Analítica, essa mesma teoria poderá ser aplicada?

Geometria Analítica, é uma área da Matemática que utiliza os sistemas de coordenadas para estudar e representar geometricamente figuras e problemas algébricos. Integrar os princípios da teoria vygotkyeriana para tal prática, pode melhorar significativamente a compreensão dos alunos. Aqui o propósito é fazer uma breve conceituação acerca do que é a G.A., a título de contextualizar e correlacionar com a teoria supracitada. Nesse sentido Fernandes e Wielewski et al (2022, p. 160):

Isto é, ensinar Geometria é possibilitar ao aluno a desenvolver o pensar geométrico e aprimorar um raciocínio visual. Bem como, facilitar a compreensão e resolução de problemas de várias áreas de conhecimento. Mediante ao exposto, a Teoria Vygotskyana fornece base epistemológica para tal proposta de ensino. Ensinar a Geometria através de Práticas Pedagógicas mais contextualizadas, ancoradas em conteúdos matemáticos bem sistematizados, porém, levando em consideração o diálogo, as vivências, as trocas de experiências de todos os sujeitos, sejam professores, alunos, ou pessoas que vivenciem o espaço escolar.

Correlacionando a teoria vygotkyeriana com o ensino de Matemática, assim como para qualquer área do conhecimento se faz necessário o papel de um mediador, para executar uma atividade, uma criança pode necessitar do auxílio de um adulto ou de uma criança mais experiente (habilidade situada em uma zona de desenvolvimento proximal), mas no futuro a criança será capaz de realizar a tarefa sozinha (habilidade situada em uma zona de desenvolvimento real). Com a próxima sessão pretende-se explicar bem como apresentar tais conceitos.

2.3 ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL (ZDP)

Para compreender a relação entre desenvolvimento e aprendizagem, é necessária a compreensão e a importância do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), em síntese, essa teoria é conhecida também como zona de desenvolvimento atual ou real, isto é, aquilo que a criança consegue realizar sozinha, que caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, as funções já amadurecidas. Para Fernandes e Wielewski (2022):

A obra Vygostkyana sustenta que para se pensar no desenvolvimento da criança, precisa-se analisar os conhecimentos que a criança já possui, e onde essa criança pode chegar em termos de aprendizagem. Ele divide o desenvolvimento em três níveis importantes, que são, o nível de desenvolvimento real, o nível de desenvolvimento proximal e o nível de desenvolvimento potencial.

Ou seja, na medida em que as funções psicológicas e de desenvolvimento dos alunos são desenvolvidas, pode-se ou deve-se pensar na utilização dessa teoria para construir um planejamento pedagógico, em específico para o ensino de Matemática, pois essa fase descreve que a criança organiza seu pensamento e as informações e seu potencial de operacionalização e realizações de forma independente, isto é, sem necessidade da mediação do adulto.

Segundo Santos e Cardoso (2017),

“a Matemática tem, em si, uma lógica específica que deve ser relevada no momento da elaboração de um plano de desenvolvimento, se o objetivo do mesmo for “[...] a formulação de conceitos matemáticos que obviamente será diferenciado de um planejamento voltado para a biologia, por exemplo”. Somos remetidos às especificidades do ensino da Matemática e à importância de o professor conhecê-la e dominar uma didática de ensino que conduza o aluno à aprendizagem dos conteúdos matemáticos.”

Ao aplicar as teorias e contribuições de Vygotsky ao ensino da Geometria Analítica, os docentes podem criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e colaborativo que facilita a compreensão profunda e a aplicação dos conceitos matemáticos, transformando a sala de aula em um ambiente mais interativo e centrado no estudante, onde o desenvolvimento cognitivo é enriquecido através das interações sociais e apoio adequado.

Aqui se faz uma crítica ao ensino da Matemática atuais, que estava presente nas referências bibliográficas, acerca das dificuldades em aprender Matemática em específico ao ensino da Geometria Analítica (G.A.), área da Matemática que requer um conhecimento prévio por parte do estudante acerca do contexto da G.A., onde espera-se que esse estudante já tenha minimamente desenvolvido um raciocínio lógico e organizado.

Mesmo sem ser percebida, a Geometria está presente no nosso cotidiano, e em diversas áreas do conhecimento como na natureza, nas tecnologias, nas construções, na arquitetura, nos jogos virtuais ou até mesmo manuais, nas artes, na Matemática pura ou aplicada. E sua compreensão analítica se faz importante para a aplicabilidade e funcionalidade.

Uma vez compreendida as teorias vygotskyeriana, segue descrição dos conceitos e de que forma eles podem ser utilizados na práxis do professor, bem como adoção dessas teorias nos planos pedagógicos escolares.

- 1. Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)**, ao introduzir novos conceitos, como a equação de uma reta ou a parábola, o professor pode primeiro resolver

problemas junto com os alunos, orientando-os através dos passos necessários. Exemplificando e explicando cada símbolo ali presente nos conceitos da G.A., dessa forma criar uma vinculação dos conceitos teóricos, dando aos estudantes o tempo necessário para que os alunos pratiquem de forma independente, usando a ZDP, para fortalecer suas habilidades.

2. **Aprendizagem Mediada:** Para além dos professores outros recursos podem ser utilizados como ferramentas uteis para a explanação da G.A., utilizando recursos visuais e tecnológicas, como softwares de geometria dinâmica (GeoGebra, por exemplo), para mediar a aprendizagem. A visualização gráfica de uma curva e posterior a de equações e transformações geométricas pode auxiliar os estudantes a compreender conceitos abstratos.
3. **Importância da Linguagem:** Nessa etapa deve-se encorajar os estudantes a discutir e explicar conceitos geométricos em suas próprias palavras, bem como a descrever processos matemáticos e justificar suas soluções, pode facilitar a compreensão profunda. A exemplo, ao aprender sobre a distância entre dois pontos, os estudantes podem verbalizar cada etapa do analítico.
4. **Ferramentas Culturais:** Introduzir a história da Geometria Analítica e as suas aplicações práticas na resolução de problemas reais, em áreas de interseção como na Física e na Engenharia pode tornar o aprendizado mais relevante e engajador, ou seja, utilizar contextos do cotidiano onde os conteúdos dessa área são aplicados pode proporcionar um entendimento mais profundo e conectado.
5. **Aprendizagem Colaborativa:** Essa etapa sugere a criação de projetos de grupo, onde os estudantes trabalham juntos para resolver problemas mais complexos, como encontrar a interseção de duas curvas ou analisar o comportamento de funções quadráticas, podem promover a troca de ideias e estratégias, enriquecendo o aprendizado coletivo.

Isto é, ensinar Geometria Analítica, pautado nas teorias de Vygotsky permite ao estudante desenvolver o pensar geométrico e aprimorar o raciocínio algébrico. Possibilitando de forma educativa e assertiva a compreensão e resolução de problemas de várias áreas de conhecimento.

Diante dos conceitos expostos, pode-se compreender que a Teoria Vygotskyana fornece base epistemológica para uma proposta de apresentação de conteúdo de Geometria

Analítica. Ensinar a Geometria Analítica, através das ferramentas supracitadas, aplicadas e correlacionadas aos conteúdos matemáticos de forma sistêmica, levando em consideração o diálogo, as vivências, as trocas de experiências de todos os sujeitos, sejam professores, estudantes, ou pessoas que vivenciem o espaço escolar.

3 CONCEITOS BÁSICOS PARA DAR SENTIDO À GEOMETRIA ANALÍTICA

O estudo de Geometria Analítica requer conhecimento da Geometria, ou seja, para análise das situações-problemas dessa área deve-se ter conhecimento dos conceitos básicos de Geometria para trazer sentido ao seu aprendizado.

Propende que o estudo de Geometria Analítica inicie pela retomada dos conceitos de Geometria. E sendo o objetivo deste estudo uma possível proposta de apresentação de conteúdo para o estudo dessa área, então será perpassado os conhecimentos da Geometria para seguir e dar sentido ao estudo da Geometria Analítica.

Nessa perspectiva, o professor assume o papel de mediador na apresentação do conteúdo, ajustando-o conforme o nível de ensino dos estudantes. Portanto, a proposta inclui desde os conceitos fundamentais para a educação básica até os teoremas avançados abordados na educação superior. Dessa forma, a pesquisa visa apresentar uma proposta de apresentação de conteúdo que atenda diversos níveis educacionais, buscando maneiras em que os estudantes adquiram uma compreensão sólida e progressiva da Geometria Analítica.

3.1 CONCEITOS GEOMÉTRICOS

“In the logical development of any branch of mathematics, each definition of a concept or relation involves other concepts and relations. Therefore the only way to avoid a vicious circle is to allow certain primitive concepts and relations (usually as few as possible) to remain undefined¹.” (SYNG, p. 32-34, apud COXETER, 1980, p.4).

Coxeter (1980, p. 4) faz a citação acima para se referir de maneira similar que para comprovar proposições são necessárias outras proposições e, certamente, proposições primitivas. As proposições primitivas são referências aos axiomas, ou seja, são aceitas sem demonstrações. Porém, antes de apresentar a ideia de axioma se faz necessária a apresentação das ideias primitivas que dão origem aos estudos geométricos.

Iniciando com os conceitos primitivos, que são os elementos matemáticos que dão base para a construção do conhecimento geométrico, considera-se que “um conjunto \mathcal{E} de

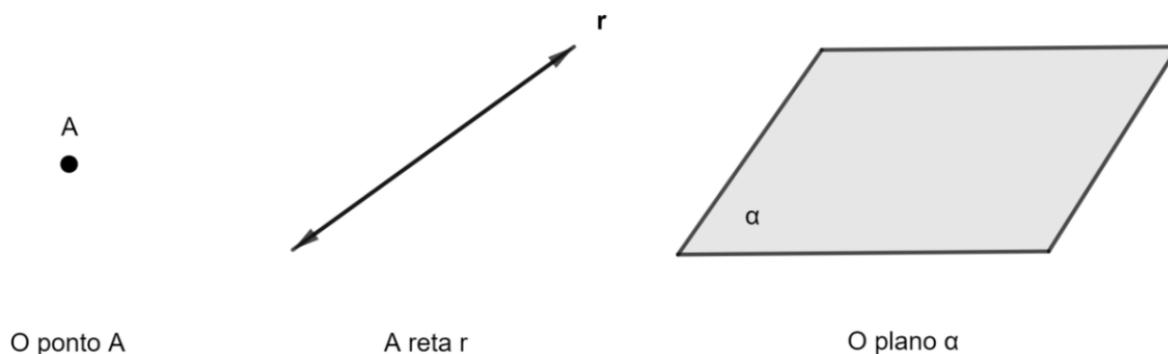
¹ “No desenvolvimento lógico de qualquer ramo da matemática, cada definição de um conceito ou relação envolve outros conceitos e relações. Portanto, a única maneira de evitar um círculo vicioso é permitir que certos conceitos e relações primitivos (geralmente o mínimo possível) permaneçam indefinidos.” (Tradução da pesquisadora).

elementos denominados pontos, dotado de subconjuntos chamados retas e subconjuntos que têm o nome de planos². (CASTRUCCI, 1968, p. 73)

Com isso, entende-se que o plano é visto como o conjunto cujos seus elementos são os pontos e seus subconjuntos são as retas. Essas ideias não são demonstráveis, por isso estão no campo da intuição, são ideias intuitivas

Para esse estudo, a designação do ponto será dada por letras latinas maiúsculas (A , B , C , ...), a da reta por letras latinas minúsculas (a , b , c , ...) e a do plano por letras gregas minúsculas (α , β , γ , ...), tendo como representações o que é apresentado na FIGURA 1.

FIGURA 1 – Representação de ponto, reta e plano



FONTE: Pesquisadora.

No caso da representação do plano, o estudante deve ter em mente que as dimensões não são limitadas. Porém, para a sua representação usa-se comumente a imagem de um polígono fechado para formar a ideia desse conceito. Essas ideias intuitivas são fundamentais para Geometria e são formalizadas nos estudos de Euclides.

Euclides, um matemático grego do século III a.C., é amplamente reconhecido como o "pai da geometria" devido à sua obra "Os Elementos," uma coleção de treze livros que sistematiza o conhecimento geométrico da época. A parte inicial da obra é dedicada aos cinco axiomas ou postulados que servem como os fundamentos da geometria euclidiana.

Em relação aos axiomas, Neto (2013, p. 2) apresenta como “uma propriedade imposta como verdadeira”, compreendendo que a comprovação é dispensável por ser intuitiva, que é evidente por si mesma.

Os escritos de Euclides foram um grande marco à introdução do método axiomático presente nos estudos matemáticos, contribuindo de forma significativa à Geometria e a

² Grifo do próprio autor.

Geometria Analítica. Esse método consiste em estabelecer um conjunto de proposições que são admitidas como verdadeiras sem demonstrações algébricas.

De acordo com Morgado, Wagner e Jorge (2008, p. 5), “o conjunto de proposições que servem de fundamento a uma ciência é seu SISTEMA DE AXIOMAS³”. Logo, sua utilização “é uma das características fundamentais da Matemática como ciência” (NETO, 2013, p. 2).

O Sistema Axiomático foi muito estudado pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1942), o qual compôs um sistema de axiomas, que hoje é referenciado nos estudos da Matemática. Hilbert (2003, p. 1), escreve:

“Podemos dividir os axiomas da geometria em cinco grupos; exprimindo cada um destes grupos, por si só, certos factos fundamentais da nossa intuição que estão naturalmente associados. Designamos do seguinte modo estes grupos de axiomas:

I	1-8	Axiomas da <i>Incidência</i>
II	1-4	Axiomas da <i>Ordem</i>
III	1-5	Axiomas da <i>Congruência</i>
IV		Axiomas das <i>Paralelas</i>
V	1-2	Axiomas da <i>Continuidade</i> ”.

Os axiomas são base para as deduções e demonstrações de outras verdades matemáticas, em específico nesse estudo para a Geometria.

Para a continuidade dos estudos da Geometria Analítica, é imperativo abordar outros conceitos fundamentais da Geometria que são essenciais para uma compreensão aprofundada e eficaz. Entre esses conceitos, destaca-se o estudo detalhado da reta, que desempenha um papel crucial na Geometria Analítica, dando base para os estudos posteriores.

3.2 A RETA

Não há como adentrar nos estudos ditos próprios da Geometria Analítica sem perpassar pelo conceito de reta, pois é o que sustenta a definição de analítica como o estudo da Geometria sobre um plano formado por retas em sentidos perpendiculares.

A reta é um dos elementos mais básicos e importantes na Geometria, servindo como fundamento para a compreensão de diversas outras figuras e conceitos geométricos. Na Geometria, o estudo da reta envolve a análise de suas propriedades, como inclinação, intersecção e paralelismo, bem como a compreensão de suas equações e representações

³ Destaque dos próprios autores.

gráficas. A reta também é essencial para a compreensão de relações espaciais e para a derivação de outros conceitos, como planos e ângulos.

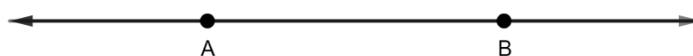
Em Geometria Analítica, o estudo da reta é expandido para incluir sua representação em coordenadas cartesianas, a formulação de suas equações (tanto na forma ponto-declividade quanto na forma geral), e a análise de suas interseções com outras retas e curvas. Além disso, a compreensão completa da reta facilita o estudo de figuras mais complexas, como cônicas e outras curvas, que são essenciais em diversas aplicações práticas da Geometria Analítica, incluindo otimização, modelagem matemática e engenharia.

Para estabelecer o conceito de reta, se faz necessário o estudo dos axiomas de incidência. Os axiomas deste primeiro grupo composto por Hilbert (2003, p. 1) estabelecem entre os elementos do conjunto \mathcal{E} uma incidência, ou seja, referem-se à ocorrência, acontecimento e/ou existência nas relações entre o ponto, a reta e o plano.

“[A – 1] Para cada dois pontos A, B há sempre uma reta que está associada com cada um dos dois pontos A, B .
 [A – 2] Para dois pontos A, B não há mais do que uma reta que está associada com cada um dos dois pontos A, B .
 [A – 3] Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta.” (HILBERT, 2003, p. 1)

Os axiomas mostram que a reta tem uma relação direta com pontos. Em resumo dos axiomas tem-se, por exemplo, que por dois pontos distintos, A e B , pertencentes ao plano é traçado uma única reta denominada reta r , conforme FIGURA 2.

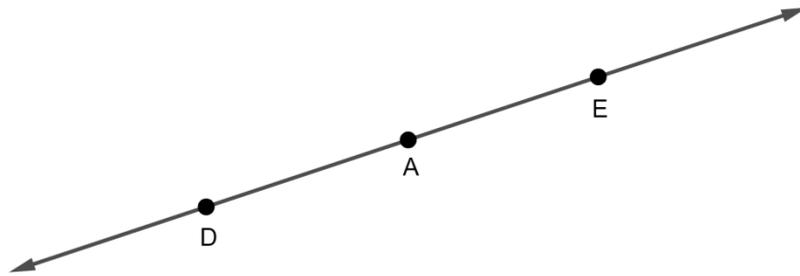
FIGURA 2 – Representação da reta



FONTE: Pesquisadora.

A notação, sendo a reta r definida por tais pontos citados, é dada por $r = \overleftrightarrow{AB}$. E com os dois axiomas de incidência pode-se então definir características da relação entre ponto e reta, como o fato de que três pontos podem estar sobre uma mesma reta, sendo caracterizados como pontos alinhados.

FIGURA 3 – Três pontos alinhados sobre uma reta



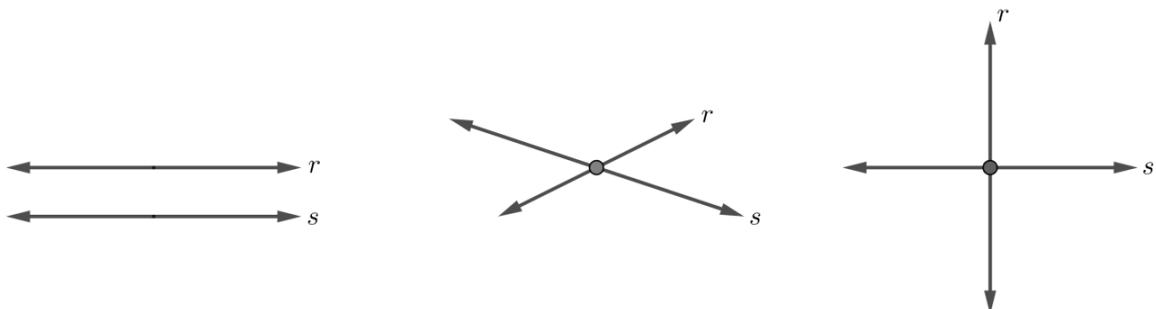
FONTE: Pesquisadora.

Ao observar a FIGURA 3, nota-se que os pontos D , A e E são pertencentes a uma mesma reta por estarem alinhados, ou por estarem alinhados pertencem a uma mesma reta. Isso traz uma compreensão à definição apresentada por Gerônimo e Franco (2003, p. 8),

DEFINIÇÃO 3.1: Se três (ou mais) pontos estão sobre uma mesma reta, é denominado que eles são *colineares*⁴.

Tendo a ideia intuitiva de reta e os axiomas, há a percepção do estudante que pode haver relações existentes entre duas ou mais retas, observando determinadas características de posicionamento entre elas.

FIGURA 4 – Algumas posições entre duas retas



FONTE: Pesquisadora.

Analisando a FIGURA 4, com base nos axiomas de Hilbert (2003, p. 1), há percepção de que se a intersecção de duas retas contiver pelo menos dois pontos distintos, então essas retas não serão distintas, o que é uma contradição. Portanto, as retas se

⁴ Destaque dos próprios autores.

interceptam no máximo em um ponto. Com isso, por Gerônimo e Franco (2003, p. 9), apresenta-se a seguinte proposição:

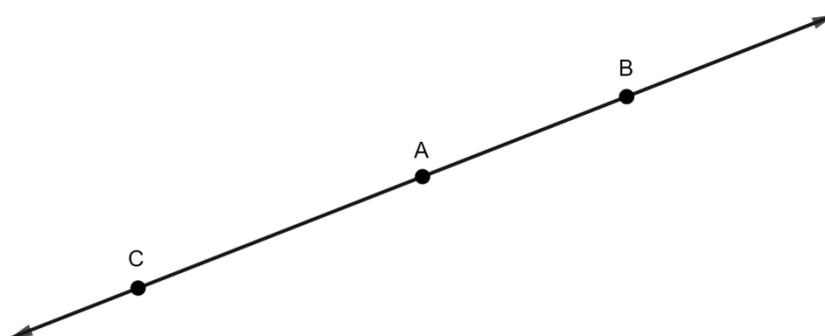
PROPOSIÇÃO 3.2: Dadas duas retas distintas, elas possuem no máximo um ponto de intersecção.

Entende-se que entre duas retas distintas haverá somente duas possibilidades, a de terem um ponto em comum ou a de não terem nenhum ponto em comum. Assim, podem ser retomados os conceitos da classificação das posições relativas entre duas retas. Toma-se como uma retomada, pois são conceitos estudados nos anos finais do ensino fundamental brasileiro. Com isso, segue a definição:

DEFINIÇÃO 3.3: Duas retas são *paralelas* se não se interseccionam e são coplanares⁵, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas. E duas retas distintas que se interseccionam são denominadas retas *concorrentes*.

A partir dos conhecimentos apresentados e relacionando com o terceiro axioma de incidência, devem ser retomados os conhecimentos sobre partes de uma reta. Sendo fato que há pontos pertencentes a uma reta e que uma reta é formada por pelo menos dois pontos, analisa-se que um ponto pode demarcar a divisão de uma reta em duas partes.

FIGURA 5 – Representação de pontos que dividem a reta em partes



FONTE: Pesquisadora.

⁵ Retas coplanares são aquelas que se encontram no mesmo plano geométrico, ou seja, compartilham uma mesma superfície bidimensional, de modo que, se desenhar ambas, elas podem ser completamente contidas dentro de um único plano.

É perceptível na FIGURA 5 que, ao tomar o ponto A como referência, existe uma parte da reta que está no sentido do ponto B e outra parte que está no sentido do ponto C . Conforme Muniz Neto (2013, p. 4), esse conhecimento gera a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.4: Um ponto A , situado sobre uma reta r , a divide em duas partes, quais sejam, as *semirretas* de origem A .

Sendo B e C pontos pertencentes a r , um em cada um das tais partes, denota-se as semirretas de origem A por \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} . E tomando os pontos A e B como referência, outro fato perceptível é que eles delimitam outra parte da reta

FIGURA 6 – Representação de parte da reta limitada pelos pontos A e B



FONTE: Pesquisadora.

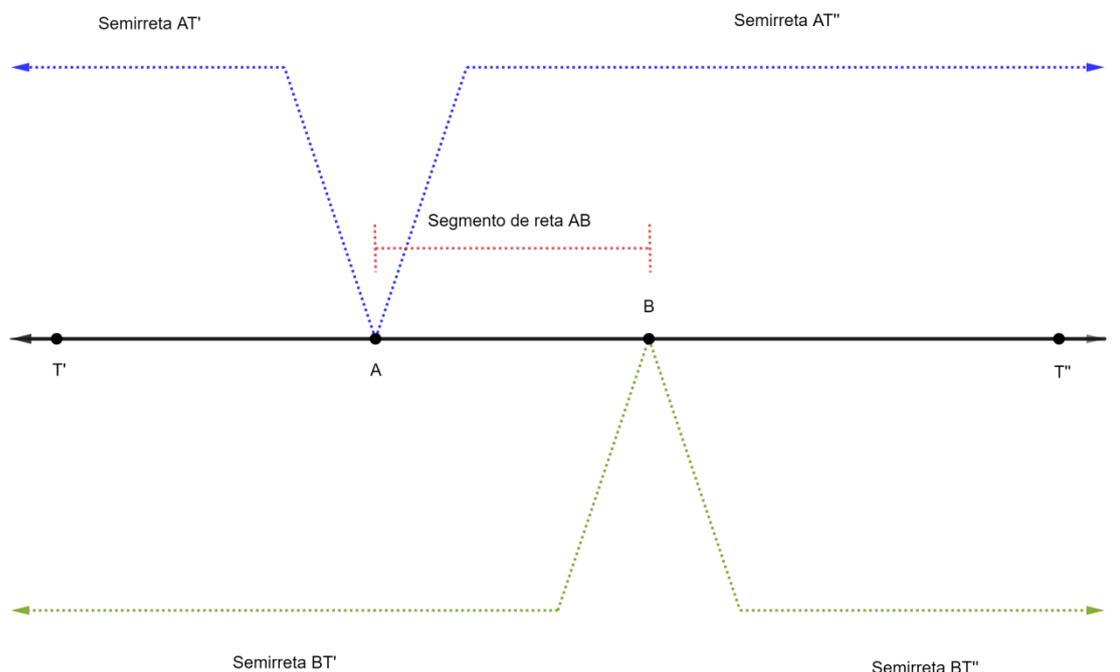
Por Muniz Neto (2013, p. 4) sobre a análise de pontos colineares, gera-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.5: Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r , o *segmento retilíneo* AB , ou apenas *segmento* AB , é a porção da reta r situada de A a B .

A FIGURA 6 representa o segmento de reta limitado pelos pontos A a B , que é usualmente denotado por \overline{AB} .

Trazendo a imagem como um recurso para melhor dar sentido e compreensão ao conhecimento matemático do estudante, a representação das partes de uma reta pode ser esquematizada conforme FIGURA 7

FIGURA 7 – Partes de uma reta



FONTE: A pesquisadora.

Com os conceitos de Geometria retomados, utilizando as imagens como base para um melhor sentido no conhecimento, segue para uma revisitação e ampliação nos estudos específicos da Geometria Analítica, iniciando pelo sistema de coordenadas.

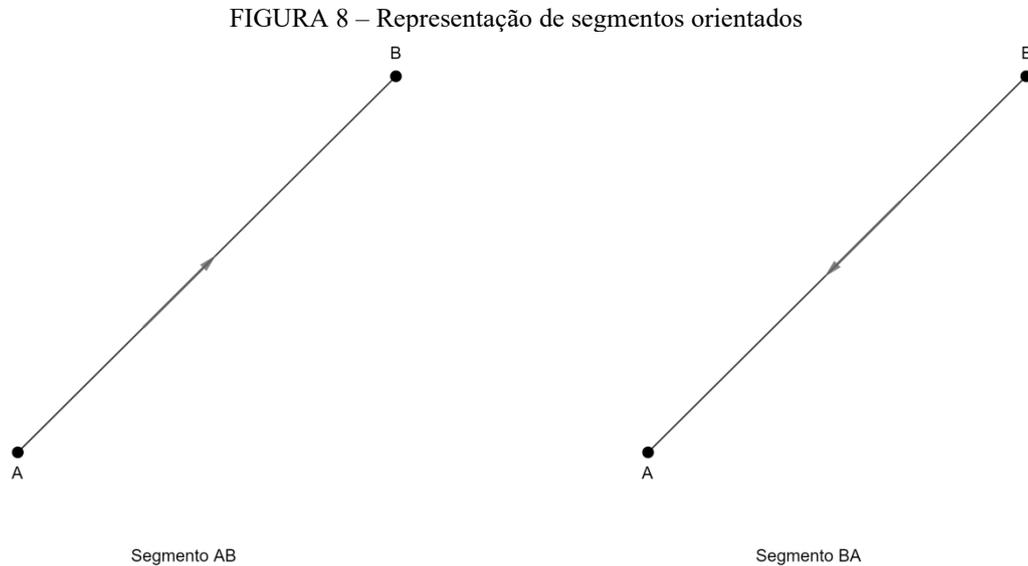
3.3 SISTEMA DE COORDENADAS

O sistema de coordenadas é o que caracteriza a Geometria Analítica, e foi desvelado pela primeira vez em 1637, pelo matemático francês René Descartes (1596 – 1650), sendo este o motivo de a Geometria Analítica ser frequentemente denominada *Geometria Cartesiana*.

Para o estudo matemático dessa área, “o estudante deve ter em mente que agora ele está seguindo um curso de *Geometria Analítica* e que a solução de um problema geométrico não terá sido efetuada por métodos *analíticos*⁶ a menos que tenha sido empregado um sistema de coordenadas” (LEHMANN, 1982, p. 9). Desta maneira, segue-se o estudo tendo uma nova análise de conceitos geométricos já estudados.

⁶ Destaque do próprio autor.

A partir de um segmento de reta definido com pontos extremos A e B , pode ser pensado na sua orientação, ou seja, se esse segmento está no sentido de A para B ou se está no sentido de B para A .



FONTE: Pesquisadora.

A FIGURA 8 mostra exemplo de representação de segmentos orientados, o segmento AB e o segmento BA . No primeiro caso, o extremo A é denominado origem e o ponto B extremidade, sendo denotado por \overline{AB} . E no segundo caso, o segmento está orientado de B para A , sendo então o ponto B é a origem e o ponto A o extremo, designado por \overline{BA} . Assim, compreende-se que o sentido de um segmento retilíneo orientado é sempre indicado escrevendo-se primeiro a origem.

Com base nos escritos de Lehmann (1982, p. 1), tem-se:

DEFINIÇÃO 3.6: O segmento retilíneo AB está *orientado*⁷ de A para B quando se inclui um sentido ou orientação a esse segmento.

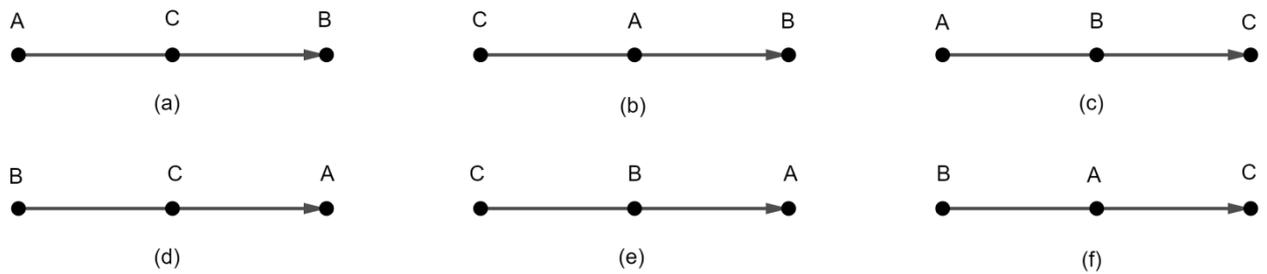
Observa-se que nos estudo de Geometria, o comprimento de \overline{AB} e \overline{BA} são iguais, dizem-se então congruentes, $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Entretanto, para a Geometria Analítica se faz uma distinção entre os *sinais* destes comprimentos, especificando arbitrariamente que um

⁷ Destaque do próprio autor.

segmento com certa orientação tem sentido *positivo*, ao mesmo tempo em que outro segmento opostamente orientado terá sentido *negativo*. Neste caso, $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Ao considerar três pontos distintos, A , B e C , pertencentes a uma mesma reta de orientação positiva, da esquerda para a direita, pode ser analisado por representação as possibilidade de posições entre esses pontos.

FIGURA 9 – Possibilidades de posições de três pontos colineares em um segmento



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Conforme FIGURA 9, haverá seis possibilidades de posições para estes pontos. Com isso, considerando apenas segmentos retilíneos orientados com comprimento positivo, há as seguintes relações:

- (a) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$
- (b) $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$
- (c) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
- (d) $\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}$
- (e) $\overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA}$
- (f) $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$

Porém, uma única relação é fundamental:

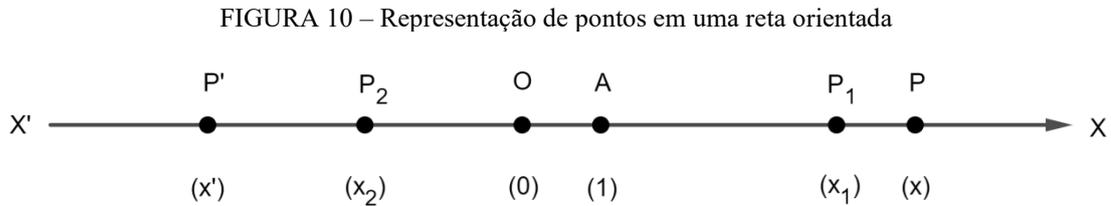
$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}. \quad (1)$$

A relação (1) indica a relação existente entre quaisquer três pontos pertencentes a um segmento retilíneo orientado, que a medida do comprimento de um segmento equivale a soma das medidas do segmento da origem até um ponto do segmento com o segmento formado desse ponto ao extremo.

Assim, com essas informações, pode ser estudado o *Sistema Linear de Coordenadas*.

3.3.1 SISTEMA LINEAR DE COORDENADAS

Para início, representa-se $\overrightarrow{X'X}$ de orientação positiva, ou seja, seguindo da esquerda para a direita, e alguns pontos pertencentes a essa reta.



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Pela representação gráfica e por outra área de conhecimento da Matemática, como o eixo temático números, compreende-se que cada número tenha uma relação bionívoca com um ponto, ou seja, cada ponto corresponde a um, e apenas um, ponto; e cada ponto corresponde a um, e apenas um, número real.

Segundo Moise e Downs (1971, p. 27), para o estudo da distância entre pontos é necessário adotar uma unidade de medida. Conforme FIGURA 10, tomando o ponto O como um ponto fixo dessa reta, denominado *origem*, e A um ponto distinto de O e a direita do mesmo, então adota o comprimento de \overline{OA} como a unidade de comprimento.

Sendo P um ponto qualquer da $\overrightarrow{X'X}$ e posicionado a direita de O , tal que o segmento retilíneo orientado OP tem um comprimento *positivo* e contém x vezes o comprimento adotado como unitário, é dito então que P *corresponde* ao número *positivo* x . De modo análogo, sendo P' um ponto qualquer da $\overrightarrow{X'X}$ e posicionado a esquerda de O , tal que o segmento retilíneo orientado OP' tem um comprimento *negativo* de x' unidades, diz-se então que P' *corresponde* ao número *negativo* x' .

Seguindo este pensamento, se tem que qualquer número real pode ser representado por um ponto sobre uma reta orientada e, reciprocamente, qualquer ponto sobre uma reta orientada representa um número real, cujo valor numérico é igual ao comprimento do segmento da origem ao ponto indicado.

Com este esquema construído no qual é estabelecida uma correspondência bionívoca entre os pontos geométricos e números reais é denominado como *sistema de coordenadas*.

Há o caso particular, quando todos os pontos pertencem à mesma reta é denominado *sistema unidimensional de coordenadas* ou *linear*. Tomando como exemplo de sistema linear da FIGURA 10, denomina-se $\overleftrightarrow{X'X}$ de *eixo* e de *origem* o ponto O . E o número real x , correspondente ao ponto P , sendo referido como *coordenada* de P e representado por (x) . Assim, a origem O tem coordenada (0) e o ponto A tem coordenada (1) . Com isso, é dito que o ponto P , de coordenada (x) , é a *representação geométrica* ou *gráfica* do número real x , e a coordenada (x) é a *representação analítica* do ponto P ; comumente escritos $P(x)$.

Em Geometria Analítica um ponto é dado quando sua coordenada é conhecida. E uma vez escolhida a unidade de comprimento, a cada par de pontos, P_1 e P_2 , corresponderá um número que dirá o quão distante está P_1 de P_2 , o que é formalizado, em Moise e Downs (1971, p. 27), pelo seguinte postulado:

POSTULADO 3.7 (O Postulado da Distância): a todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.

A partir disso, dados $P_1(x_1)$ e $P_2(x_2)$, conforme FIGURA 10, a análise do comprimento do segmento retilíneo determinado por dois pontos, conforme a relação, é dado por:

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}.$$

Como $\overline{OP_1} = x_1$ e $\overline{OP_2} = x_2$, vem:

$$x_1 = \overline{P_1P_2} = x_2.$$

Logo, organizando a equação:

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1.$$

De forma geral, o comprimento do segmento retilíneo orientado é obtido subtraindo-se a coordenada do ponto inicial da coordenada da extremidade. Assim, a *distância* entre dois pontos colineares é definida como o valor numérico ou *absoluto* do comprimento do segmento retilíneo determinado por estes dois pontos. Representando a distância por d , então se tem:

$$d = |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1|,$$

ou

$$d = |\overline{P_2P_1}| = |x_1 - x_2|.$$

Segundo Lehmann (1982, p. 4), este resultado é formalizado pelo seguinte teorema:

TEOREMA 3.8: Num sistema linear de coordenadas o comprimento do segmento retilíneo orientado determinado por dois pontos dados é obtido, tanto em grandeza como em sinal, subtraindo-se a coordenada do ponto inicial da coordenada da extremidade.

Para melhor compreensão do estudante, apresenta-se a seguir exemplos de aplicação do **TEOREMA 3.8**.

EXEMPLO 3.9: Determinar a distância entre os pontos $P_1(7)$ e $P_2(19)$.

Solução: Sendo P_1 e P_2 pontos dados, vem:

$$d = |7 - 19|$$

$$d = |-12|$$

$$d = 12$$

Portanto, a distância entre os pontos é de 12 u.c.

EXEMPLO 3.10: Determinar a distância entre os pontos $P_1(-9)$ e $P_2(-5)$.

Solução: Sendo dados os pontos, tem-se:

$$d = |-9 - (-5)|$$

$$d = |-9 + 5|$$

$$d = |-4|$$

$$d = 4$$

Portanto, a distância entre P_1 e P_2 é de 4 u.c.

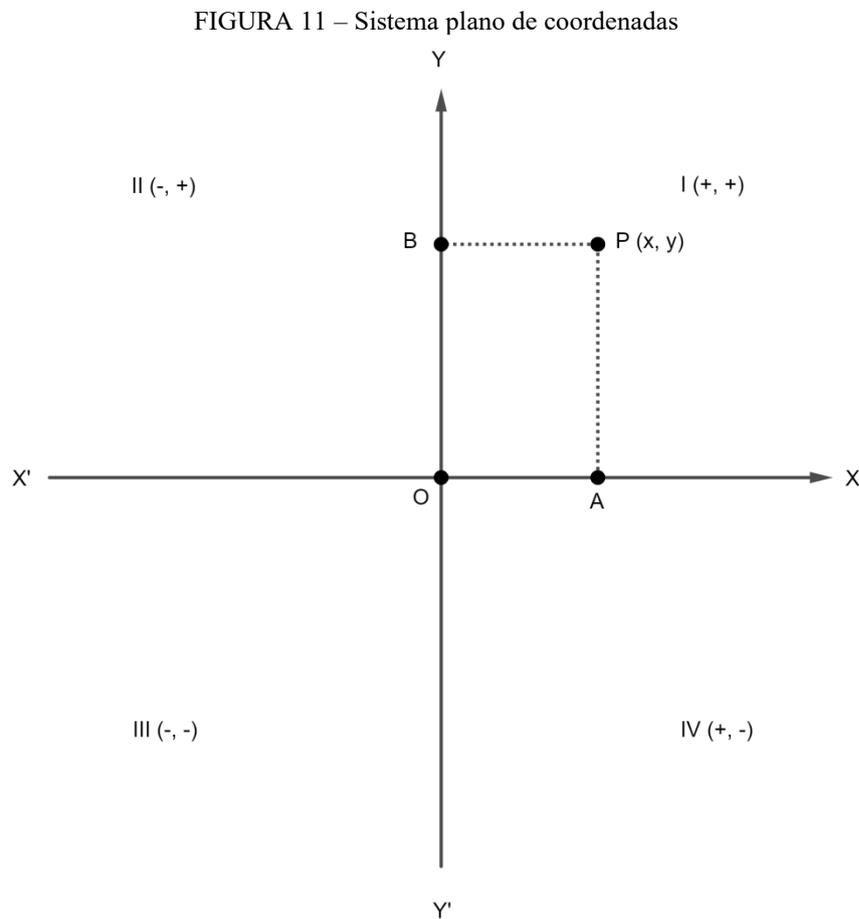
Após a análise dos conceitos vistos nessa sessão, compreende-se que os estudantes terão base para uma ampliação de conceitos. Pois, um sistema linear restringe as investigações analíticas de propriedades geométricas, sendo então necessário apresentar um plano de coordenadas.

3.3.2 SISTEMA PLANO DE COORDENADAS

A introdução de um plano de coordenadas, também conhecido como plano cartesiano, é um passo essencial para ampliar o escopo das investigações geométricas. Este sistema facilita a análise de relações geométricas e algébricas de maneira integrada, permitindo a aplicação de técnicas analíticas a uma variedade de problemas geométricos.

Além disso, o plano cartesiano serve como base para o desenvolvimento de conceitos mais avançados, como a análise de cônicas, transformações geométricas, e o estudo de vetores e suas aplicações.

Pensando em um sistema em que o ponto se move livremente em todas as direções, tem-se a necessidade de utilizar em conjunto dois sistemas lineares de coordenadas. Adotando a mesma unidade de medida para os dois eixos e com origem coincidentes com a intersecção das retas do par fixado, têm-se duas retas orientadas: $\overleftrightarrow{X'X}$ e $\overleftrightarrow{Y'Y}$. Essas retas são denominadas *eixos coordenados*, construídas mutuamente perpendiculares, das quais $\overleftrightarrow{X'X}$ tem denominação de *eixo das abscissas* e $\overleftrightarrow{Y'Y}$ de *eixo das ordenadas*; e O , ponto de intersecção de ambos, é a *origem*, conforme FIGURA 11.



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Esse sistema em que um ponto pode ser representado em movimento em várias direções é denominado *sistema bidimensional* ou *plano de coordenadas*.

Barsotti (1972, p. 35), escreve que o plano de coordenadas retangulares é uma correspondência biunívoca entres dois pontos pertencentes a retas orientadas distintas e não paralelas. Dessa forma,

DEFINIÇÃO 3.11: O *sistema plano de coordenadas* ou *sistema de coordenadas cartesianas* estabelece uma correspondência entre os pontos próprios de um plano e os pares de números reais fixando-se no plano um par de retas orientadas, não paralelas, sobre cada uma das quais se introduz um *sistema linear de coordenadas* ou *sistema de abscissas*.

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões organizadas numericamente e no sentido anti-horário, como mostra a FIGURA 11. O eixo das abscissas tem orientação positiva à direita e o eixo das ordenadas tem orientação positiva para cima. Adaptando para o estudo, por Valladares (1990, p. 4) tem-se,

DEFINIÇÃO 3.12: O eixo $\overleftrightarrow{X'X}$ é conhecido como *eixo das abscissas* e o eixo $\overleftrightarrow{Y'Y}$, como *eixo das ordenadas*. Estes eixos dividem o plano em quatro quadrantes.⁸

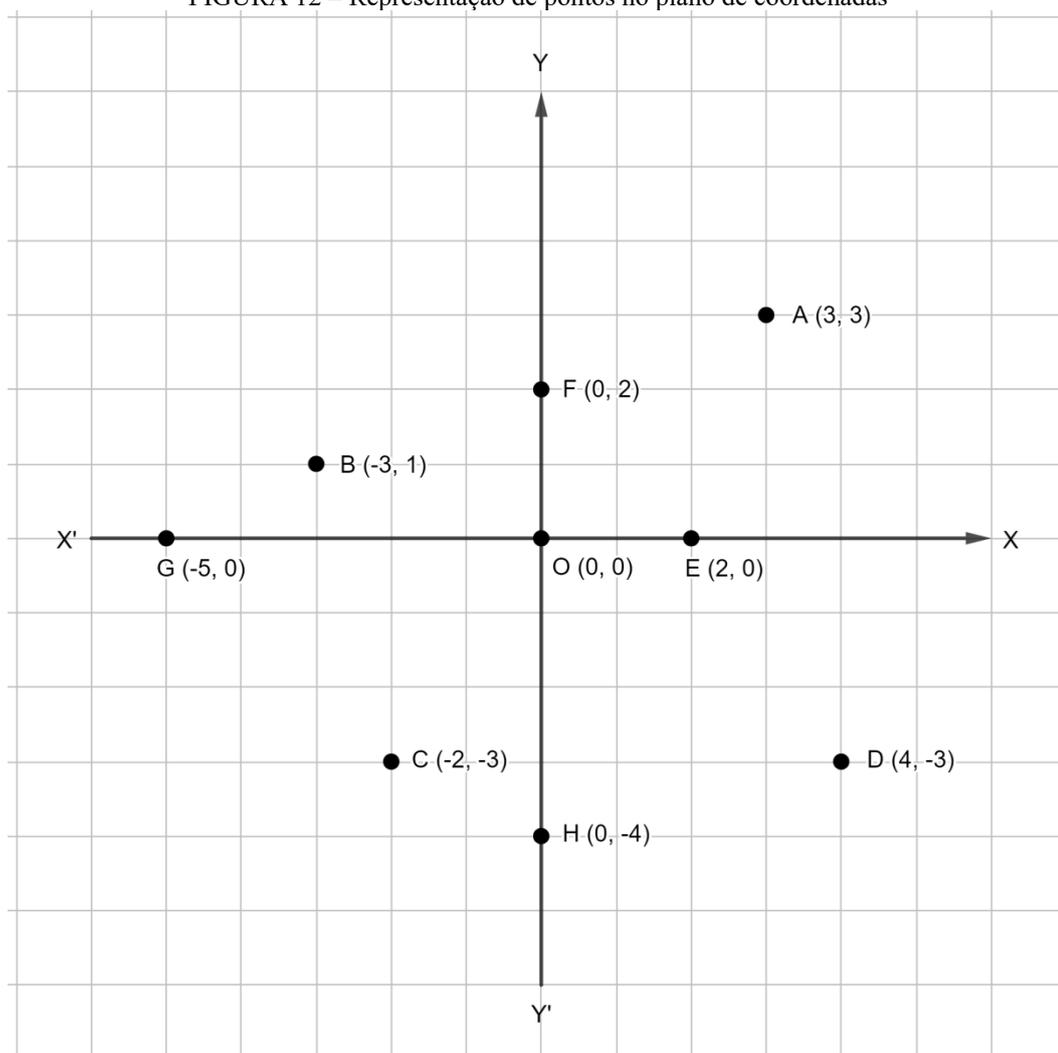
É inteligível que cada ponto P do plano coordenado tem um e apenas um par de coordenadas (x, y) . E pelo pensamento inverso, qualquer par de coordenadas (x, y) corresponde a um e apenas um ponto no plano coordenado, nessa caso, o ponto P .

No sistema de coordenadas cartesianas, um ponto é marcado por um par ordenado (x, y) . Para localizar o ponto, começa-se na origem $(0, 0)$. Desloca-se horizontalmente ao longo do eixo da abscissas: à direita se x for positivo e à esquerda se for negativo. Em seguida, move-se verticalmente ao longo do eixo das ordenadas: para cima se y for positivo e para baixo se for negativo. O ponto onde essas duas posições se encontram representa as coordenadas (x, y) no plano.

Isso fica mais bem compreendido com exemplos práticos de representações de pontos no plano de coordenadas, onde cada ponto específico ilustra como as coordenadas x e y determinam sua posição exata.

⁸ Destaque do próprio autor.

FIGURA 12 – Representação de pontos no plano de coordenadas



FONTE: Pesquisadora.

A localização de um ponto através de sua coordenada é denominada de gráfico do ponto. Conforme FIGURA 12, o ponto *A* tem localização do seu gráfico no *quadrante I* ou *primeiro quadrante*, pois está 3 unidades à direita e 3 unidade acima da origem, tendo coordenada $(3, 3)$; e o ponto *C* por estar a 2 unidades à esquerda e 3 unidades abaixo da origem tem seu gráfico no *quadrante III* ou *terceiro quadrante*.

Além disso, há pontos com seus gráficos localizados sobre o eixo das abscissas por terem sua ordenada 0, como $E(2, 0)$ e $G(-5, 0)$; e há outros com gráficos sobre o eixo das ordenadas, por exemplo, $F(0, 2)$ e $H(0, -4)$, devido à abscissa ser 0; e isso reduz o sistema plano de coordenadas ao sistema linear de coordenada. Portanto, o sistema linear de coordenadas é um caso especial do sistema plano de coordenadas.

De modo geral, o ponto com coordenada (x, y) é distinto do ponto com coordenada (y, x) , quando $x \neq y$, o que se torna importante escrever as coordenadas na ordem adequada,

no qual se tem em primeiro lugar a abscissa e em segundo a ordenada. Este é o motivo pelo qual um par de coordenadas no plano é denominado um *par ordenado* de números reais. Com isso, conforme Lehmann (1982, p. 6), “o sistema de coordenadas retangulares no plano estabelece uma correspondência biunívoca entre cada ponto do plano e um par ordenado de números reais⁹”.

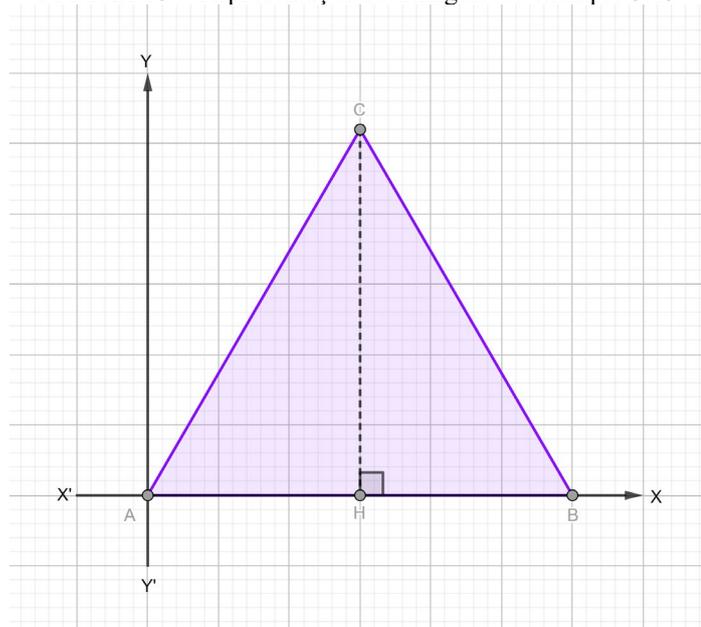
Para um estudante inicial das ideias de Geometria Analítica, o gráfico será de fácil compreensão ao utilizar a *malha quadrangular*, pois está dividida em quadrados de comprimentos iguais a unidade adotada. Observando alguns exemplos,

EXEMPLO 3.13: Um triângulo equilátero de lado com comprimento de 6 unidades, tem dois de seus vértices localizados sobre o eixo das abscissas, sendo o gráfico de um deles exatamente na origem, e o terceiro localizado no primeiro quadrante. Determinar as coordenadas dos vértices e sua área.

Solução: Sendo ABC o triângulo referido na situação, assume posição no sistema plano de coordenadas conforme FIGURA 13.

Sendo A o ponto de gráfico sobre a origem, então sua coordenada é $(0,0)$, logo $A(0,0)$. E sendo B o segundo ponto sobre o eixo das abscissas também tem ordenada 0, e como $\overline{AB} = 6$ então a sua abscissa é 6, logo $B(6,0)$.

FIGURA 13 – Representação do triângulo do exemplo 3.13



FONTE: Pesquisadora.

⁹ Destaque do próprio autor.

Traçando a altura \overline{BH} em relação ao lado \overline{AB} do triângulo, da Geometria tem-se que H é o ponto médio de \overline{AB} . Portanto a abscissa de H é $\frac{6}{2} = 3$. E sendo \overline{CH} paralelo ao eixo das ordenadas, então a abscissa de C também é 3. A ordenada de C pode ser encontrada utilizando o Teorema de Pitágoras, assim:

$$(\overline{CB})^2 = (\overline{CH})^2 + (\overline{HB})^2$$

$$(6)^2 = (\overline{CH})^2 + (3)^2$$

$$(\overline{CH})^2 = 27$$

$$\overline{CH} = 3\sqrt{3}$$

Assim, a coordenada de C é $3\sqrt{3}$. Logo, $C(3, 3\sqrt{3})$.

Portanto, as coordenadas dos vértices são $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ e $C(3, 3\sqrt{3})$.

A progressão dos estudos de Geometria Analítica demonstra que equações e processos algébricos podem ser vantajosamente empregados nas resoluções de situações-problemas da Geometria. Inversamente, os métodos da Geometria Analítica podem ser usados para obter uma representação de equações e relações funcionais.

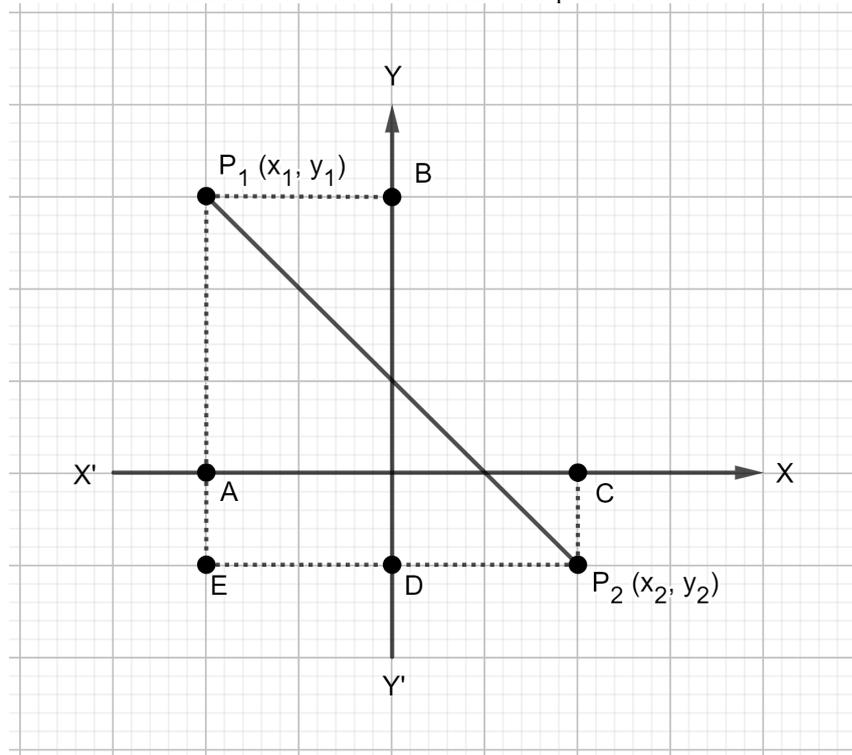
Uma grande variedade de situações-problemas pode ser resolvida muito facilmente por meio do processo uniforme associado com o uso de um sistema de coordenadas. Com os descritos até aqui, “o estudante deve ter em mente que agora ele está seguindo um curso de Geometria Analítica e que a solução de um problema geométrico não terá sido efetuada por métodos *analíticos* a menos que tenha sido empregado um sistema de coordenadas” (LEHMANN, 1982, p. 9).

Segue-se na ampliação de conhecimentos para a análise de distância entre dois pontos dados em um sistema plano de coordenadas.

3.4 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

A distância entre dois pontos é o número dado pelo o postulado da distância, **POSTULADO 3.7**. Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer dados, como representado na FIGURA 14, almeja-se determinar a distância d entre P_1 e P_2 , calculando $d = |\overline{P_1P_2}|$.

FIGURA 14 – Distância entre dois pontos dados



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Analisando, conforme FIGURA 14, é traçado de P_1 e P_2 retas perpendiculares a ambos os eixos coordenados, sendo E a interseção entre $\overline{P_1A}$ e $\overline{P_2D}$, formando o triângulo P_1EP_2 . E sendo o triângulo retângulo, pode ser aplicado o Teorema de Pitágoras para o estudo da distância d . Assim:

$$d^2 = (\overline{P_1P_2})^2$$

$$d^2 = (\overline{P_2E})^2 + (\overline{EP_1})^2 \quad (2)$$

Sendo $A(x_1, 0)$, $B(0, y_1)$, $C(x_2, 0)$ e $D(0, y_2)$, então pelo **TEOREMA 3.8** vem:

$$\overline{P_2E} = \overline{CA} = x_1 - x_2. \quad (3)$$

E, da mesma forma:

$$\overline{EP_1} = \overline{DB} = y_1 - y_2. \quad (4)$$

Substituindo as relações (3) e (4) na relação (2), obtém-se:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (5)$$

Desse estudo da distância entre pontos, tem-se que a relação (5) fornece uma base sólida para análises mais abrangentes, importante para o entendimento de propriedades geométricas e algébricas no plano cartesiano.

Assim, conforme Lehmann, (1982, p. 10), segue o seguinte teorema:

TEOREMA 3.14: A distância d entre dois pontos conhecidos, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, é dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

A demonstração do **TEOREMA 3.14** é para casos gerais, pois não se faz referência aos quadrantes em que os pontos dados estão situados. A posição de um ponto num quadrante particular é sempre indicada pelos sinais de suas coordenadas.

EXEMPLO 3.15: Analise se os pontos $A(-2, -1)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 6)$ e $D(-4, 5)$ são vértices de um retângulo.

Solução: Tendo conhecimento que um retângulo tem seus pares opostos de lados congruentes, então para essa situação analisa a distância entre pontos. Assim:

$$d_{AB} = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + [0 - (-1)]^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (6 - 0)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$d_{CD} = \sqrt{[-4 - (-1)]^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{DA} = \sqrt{[-2 - (-4)]^2 + (-1 - 5)^2} = 2\sqrt{10}$$

Como $d_{AB} = d_{CD}$ e $d_{BC} = d_{DA}$, então conclui que os pontos são vértices de um retângulo.

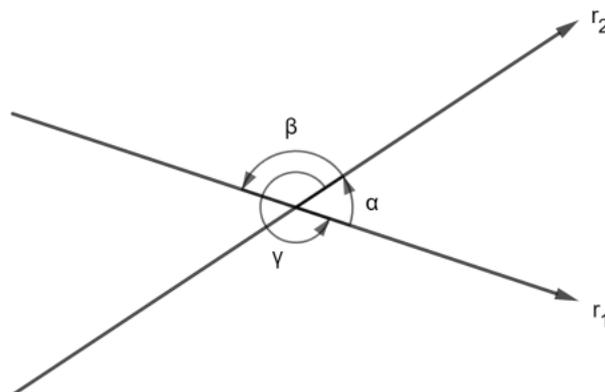
Para dar sentido ao aprendizado sobre retas, o estudante precisa compreender não apenas a importância da distância entre pontos conhecidos que definem uma reta, mas também reconhecer e analisar o comportamento relativo entre retas. Isso inclui entender o ângulo formado entre duas retas, o que é crucial para uma compreensão mais profunda das interações e propriedades geométricas.

3.5 ÂNGULOS

Para a Geometria, ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem, que determina dois setores angulares, um convexo e outro não convexo desde que as semirretas que o formam não sejam opostas. Em Geometria Analítica, o estudo de ângulos se faz necessário para a análise da declividade da reta.

Inicia-se o estudo pela análise dos ângulos formados entre duas retas orientadas, tomando como base a representação a seguir, conhecida por muitos estudantes por ser apresentada nos estudos dos anos finais do Ensino Fundamental.

FIGURA 15 – Ângulo entre duas retas concorrentes



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Quando duas retas, r_1 e r_2 , se interceptam são formados dois pares de ângulos opostos pelo vértice, o que torna ambígua a expressão “o ângulo entre duas retas”, pois tal ângulo pode ser α ou seu suplementar β , conforme FIGURA 15.

Para a Geometria Analítica, este conceito deve ser analisado levando em consideração a orientação das retas em estudo. Com isso, por Lehmann (1982, p. 13), tem-se:

DEFINIÇÃO 3.16: O ângulo entre duas retas orientadas é o ângulo cujos lados estão orientados desde o vértice.

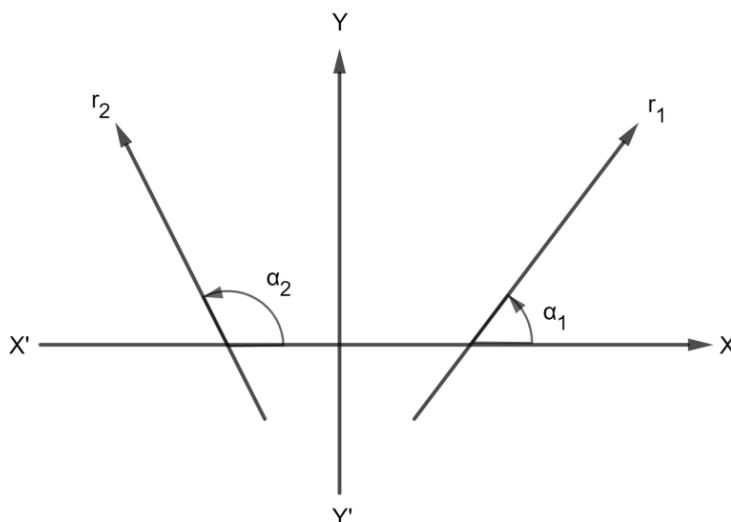
Pela FIGURA 15, as retas r_1 e r_2 são orientadas e o ângulo entre elas é definido como o ângulo α . Se, entretanto, uma destas retas é orientada no sentido inverso, o ângulo a ser considerado é o β . Para o caso de r_1 e r_2 serem paralelas então é dito que o ângulo entre elas é 0° quando têm a mesma orientação e 180° quando têm orientação oposta.

Uma observação que se faz com as retas orientadas da FIGURA 15 é a do ângulo $\gamma = 360^\circ - \alpha$ também satisfazer a definição, porém a análise nessa pesquisa irá considerar ângulo menor ou igual a 180° . Um ângulo tal como $\gamma > 180^\circ$ é denominado *ângulo reentrante*¹⁰.

¹⁰ O ângulo reentrante é um tipo de ângulo que mede mais que 180° , mas menos que 360° .

Para trazer a discussão que uma reta tem ângulo formado com o eixo das abscissas, apresenta-se a FIGURA 16.

FIGURA 16 – Representação do ângulo de inclinação de reta



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

A FIGURA 16 mostra que a inclinação da reta r_1 é α_1 e da reta r_2 é α_2 . Logo, é visto que o *intervalo de variação* do ângulo está entre 0° e 180° , ou seja, $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Com isso, por Lehmann (1982, p. 14), tem-se:

DEFINIÇÃO 3.17: O *ângulo de inclinação* de uma reta é o ângulo formado pelo eixo das abscissas e esta reta considerada com a orientação para cima do referido eixo.

Com a elucidação do conhecimento de ângulo de inclinação, o estudante terá base para entender a declividade de uma reta. De modo habitual e frequente, muitos autores denominam por m a declividade de uma reta. Donde se escreve:

$$m = \tan(\alpha).$$

Analisando, a declividade pode assumir *todos* os valores reais. Se o ângulo é agudo a declividade é positiva e a declividade terá valor negativo se o ângulo é obtuso, como no caso de α_1 e α_2 , respectivamente, na FIGURA 16. Qualquer reta coincidente ou paralela ao eixo das ordenadas será perpendicular ao eixo das abscissas e, assim, seu ângulo de inclinação será de 90° . Visto que não é definida $\tan(90^\circ)$, então a declividade de tal reta não existe. Portanto, estabelece que *qualquer reta perpendicular ao eixo das abscissas não tem declividade*.

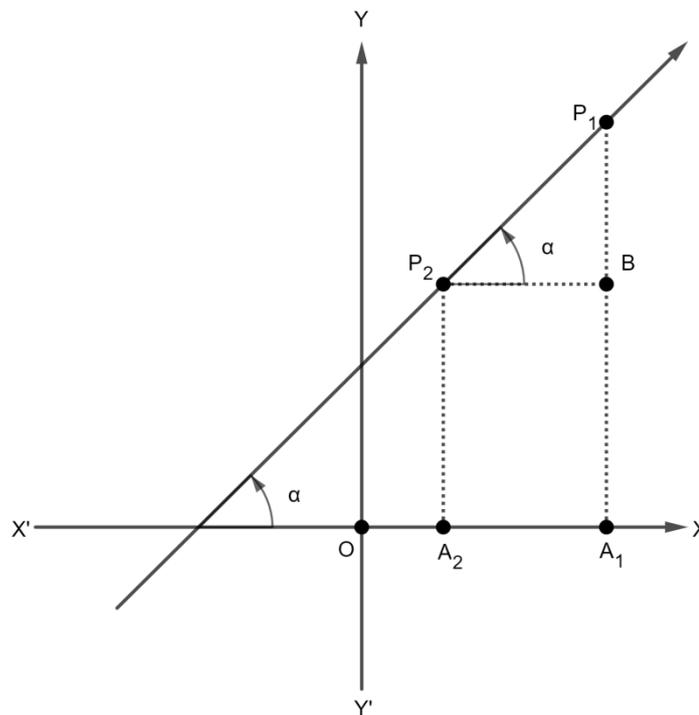
O que deve ficar claro ao estudante ao ser analisado que $\tan(90^\circ) = \infty$ é que essa sentença se refere ao fato de que à medida que o ângulo agudo α se aproxima do valor de 90° , a $\tan(\alpha)$ torna-se e permanece maior do que qualquer número positivo prefixado.

Com isso, por Lehmann (1982, p. 14), segue a definição:

DEFINIÇÃO 3.18: A *declividade* de uma reta é a tangente de seu ângulo de inclinação.

A partir do conceito, o estudante parte para o pensamento do cálculo da declividade de uma reta apresentando a ideia de um ângulo α ser ângulo de inclinação da reta que é determinada por P_1 e P_2 , representado na FIGURA 17.

FIGURA 17 – Representação do ângulo de inclinação de uma retadeterminada por dois pontos



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Traçando de P_1 e P_2 as perpendiculares $\overline{P_1A_1}$ e $\overline{P_2A_2}$, respectivamente, ao eixo das abscissas, e a partir de P_2 uma reta paralela em relação ao eixo das abscissas, interceptando $\overline{P_1A_1}$ em B , tem-se então que $\widehat{P_1P_2B} = \alpha$.

Sendo o triângulo P_1P_2B retângulo em B , então utilizando os conhecimentos de trigonometria tem-se:

$$m = \tan(\alpha) = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_2B}} \quad (6)$$

Como as coordenadas são $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, 0)$ e $B(x_1, y_2)$ então, pelo **TEOREMA 3.8**, vem:

$$\overline{BP_1} = y_1 - y_2 \quad \text{e} \quad \overline{P_2B} = \overline{A_2A_1} = x_1 - x_2 \quad (7)$$

Substituindo a relação (7) na relação (6) se obtém o resultado que,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Essas informações geram o teorema sobre a declividade da reta, segundo Lehmann (1982, p. 15), apresentado como:

TEOREMA 3.19: Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são dois pontos quaisquer distintos dados sobre uma linha reta, sua declividade é dada por:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2. \quad (8)$$

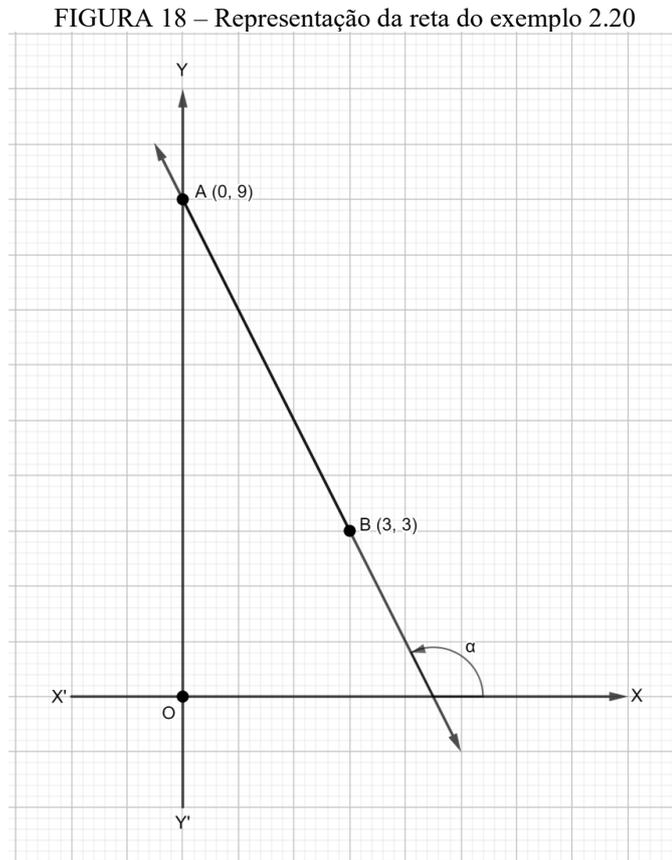
Observa-se que o valor de m dado pela relação (8) não é definido analiticamente para $x_1 = x_2$. A interpretação geométrica neste caso é que uma reta determinada por dois pontos distintos com iguais abscissas é paralela ao eixo das ordenadas e, portanto, não tem declividade.

Esse conceito é fundamental não apenas para a Geometria Analítica, mas também para diversas aplicações em Engenharia Civil, Arquitetura, Geologia, Topografia e outras áreas relacionadas, nas quais a compreensão da inclinação de uma reta ou superfície é crucial para o planejamento, projeto e análise de estruturas, terrenos, caminhos e outras características físicas do ambiente. Além disso, a noção de declividade é essencial para a realização de estudos de viabilidade, elaboração de mapas topográficos, definição de trajetórias para construções de estradas e ferrovias, bem como para a modelagem e simulação de processos naturais, como a erosão do solo e o escoamento de água.

Apresenta-se, com isso, um exemplo no qual o cálculo da declividade é essencial para compreender a inclinação de uma reta em relação aos eixos coordenados.

EXEMPLO 3.20: Calcular a declividade e o ângulo de inclinação da reta determinada pelos pontos $A(0, 9)$ e $B(3, 3)$.

Solução: Sendo a reta determinada pelos pontos indicados na situação representada na FIGURA 18.



FONTE: Pesquisadora.

Pelo **TEOREMA 3.19** tem que a declividade é dada por:

$$m = \frac{3-9}{3-0}$$

$$m = \frac{-6}{3}$$

$$m = -2$$

Com a declividade negativa, o ângulo de inclinação será obtuso. Assim, o ângulo de inclinação será dado por:

$$\tan(\alpha) = -2$$

$$\alpha = \arctan(-2)$$

$$\alpha = 116^{\circ}34'$$

Portanto, $\alpha = 116^{\circ}34'$.

Com o estudo da declividade e do ângulo formado entre retas desponta para a análise do comportamento entre retas, ou seja, a classificação das retas.

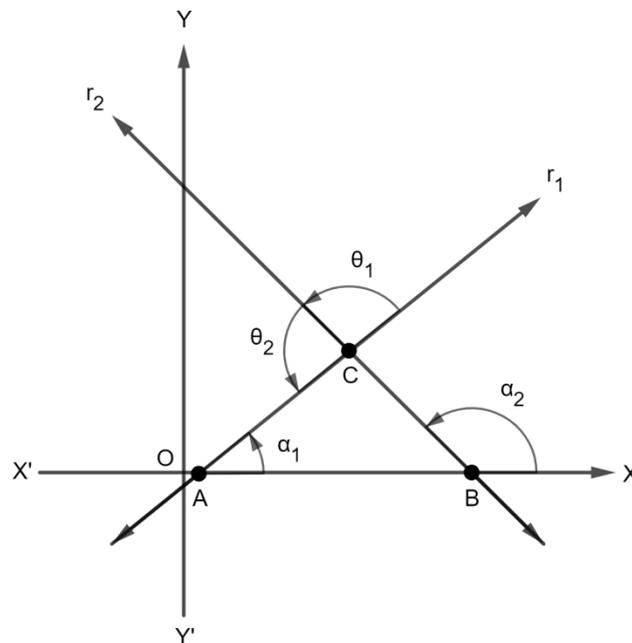
3.6 CLASSIFICAÇÃO DAS RETAS

O estudo da classificação das retas é um tema supostamente conhecido pelo estudante, pois sua ideia e conceito acerca apenas da posição relativa entre retas são estudados no ensino básico brasileiro.

Para o estudo específico da Geometria Analítica, a classificação das retas ocorre por uma comparação de suas posições, ou seja, verifica-se a partir da relação de posição existente entre duas retas em um mesmo espaço. E essa classificação, no estudo da Geometria Analítica, está diretamente ligada à declividade e, conseqüentemente, ao ângulo de inclinação de cada uma das retas.

Considerando duas retas, r_1 e r_2 , que se interceptam no ponto C e interceptam o eixo das abscissas em A e B , respectivamente, formando entre si os ângulos θ_1 e θ_2 , mostra-se ao estudante a representação da FIGURA 19 para elucidação.

FIGURA 19 – Relação entre duas retas no plano coordenado



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Os ângulos θ_1 e θ_2 são suplementares e identificados por um arco no sentido *anti-horário* ou *positivo*, conforme estudos da Trigonometria. Sendo denominada *reta origem* a

reta da qual parte o ângulo e *reta extremidade* a reta para qual o ângulo está orientado, então as declividades dessas retas são denominadas, respectivamente, *declividade origem* e *declividade extremidade*.

Para a reta r_1 o ângulo de inclinação é α_1 e tomado por m_1 a declividade; e para a reta r_2 tem-se α_2 e m_2 para seu ângulo de inclinação e declividade, respectivamente. Logo, o ângulo θ_1 tem sua reta de origem r_1 e sua declividade origem m_1 , assim como, tem sua reta extremidade r_2 e sua declividade extremidade m_2 . De modo análogo, para o ângulo θ_2 a reta e a declividade iniciais, bem como a reta e a declividade extremidades são, respectivamente, r_2 , m_2 , r_1 e m_1 .

A continuidade do estudo analisa a determinação dos ângulos θ_1 e θ_2 em função das declividades m_1 e m_2 . Para tal, seguindo o conhecimento da Geometria, tem-se que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Assim, como no triângulo ABC da FIGURA 19, o $\widehat{ACB} \equiv \theta_1$ então:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1.$$

Resscrevendo a equação, tem-se:

$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (9)$$

E pela **DEFINIÇÃO 3.18**, calculando a tangente em ambos os membros da relação (9) junto com uma análise trigonométrica, vem:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_1) &= \tan(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \tan(\theta_1) &= \frac{\tan(\alpha_2) - \tan(\alpha_1)}{1 + \tan(\alpha_2) \cdot \tan(\alpha_1)} \\ \tan(\theta_1) &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \end{aligned} \quad (10)$$

De modo análogo, para θ_2 como ângulo exterior do triângulo ABC obtém-se:

$$\theta_2 = \alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2). \quad (11)$$

Assim, analisando a declividade para a relação (11) tem-se:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_2) &= \tan[\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2)] \\ \tan(\theta_2) &= \frac{\tan(\alpha_1) + \tan(180^\circ - \alpha_2)}{1 - \tan(\alpha_1) \cdot \tan(180^\circ - \alpha_2)} \\ \tan(\theta_2) &= \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1) \cdot \tan(\alpha_2)} \\ \tan(\theta_2) &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \end{aligned} \quad (12)$$

Visto que os ângulos θ_1 e θ_2 são suplementares, observa-se nas relações (10) e (12) que se diferem no sinal. Com isso, observa-se de maneira geral que em ambos os resultados o numerador é dado pela *subtração da declividade origem pela declividade extremidade*. Consequentemente, um teorema é obtido.

Por Lehmann (1982, p. 19):

TEOREMA 3.21: O ângulo θ , formado por duas retas, é dado por

$$\tan(\theta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}, \text{ se } m_1 \cdot m_2 \neq -1, \quad (13)$$

onde m_1 é a declividade de origem e m_2 a declividade extremidade para o ângulo θ .

Com o **TEOREMA 3.21** deduzem-se dois casos importantes para a classificação de retas, ou seja, pode-se analisar o comportamento de retas paralelas e de retas concorrentes.

Visto que o ângulo formado entre duas retas paralelas é 0° ou 180° , então pela relação tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ 0 &= m_2 - m_1 \\ m_1 &= m_2. \end{aligned}$$

Assim, as declividades são iguais.

E analisando a situação inversamente, a relação se reduz a $\tan(\theta) = 0$, o que mostra θ ser 0° ou 180° , e as retas são paralelas. Portanto, para que duas retas sejam paralelas deverá ocorrer de terem suas declividades iguais.

Isto mostra, por Lehmann (1982, p. 15),

COROLÁRIO 3.22: Duas retas são paralelas se, e somente se, suas declividades são iguais.

Se duas retas são mutuamente perpendiculares então o ângulo formado entre elas é 90° , o qual não pode ser usado para a relação. Assim, essa relação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\cot(\theta) = \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1}. \quad (14)$$

Analisando (14) com o ângulo de 90° , a relação é dada por:

$$\begin{aligned}\cot(90^\circ) &= \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1} \\ 0 &= \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_2 - m_1} \\ 0 &= 1 + m_1 \cdot m_2 \\ m_1 \cdot m_2 &= -1.\end{aligned}$$

E analisando de modo inverso, quando $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$ a relação (14) se

reduz a:

$$\begin{aligned}\cot(\theta) &= \frac{1 + (-1)}{-\frac{1}{m_1} - m_1} \\ \cot(\theta) &= \frac{0}{-\frac{1}{m_1} - m_1} \\ \cot(\theta) &= 0,\end{aligned}$$

a qual tem-se $\theta = 90^\circ$ indicando que as retas são perpendiculares.

Como consequência, sugere um corolário. Por Lehmann (1982, p. 20):

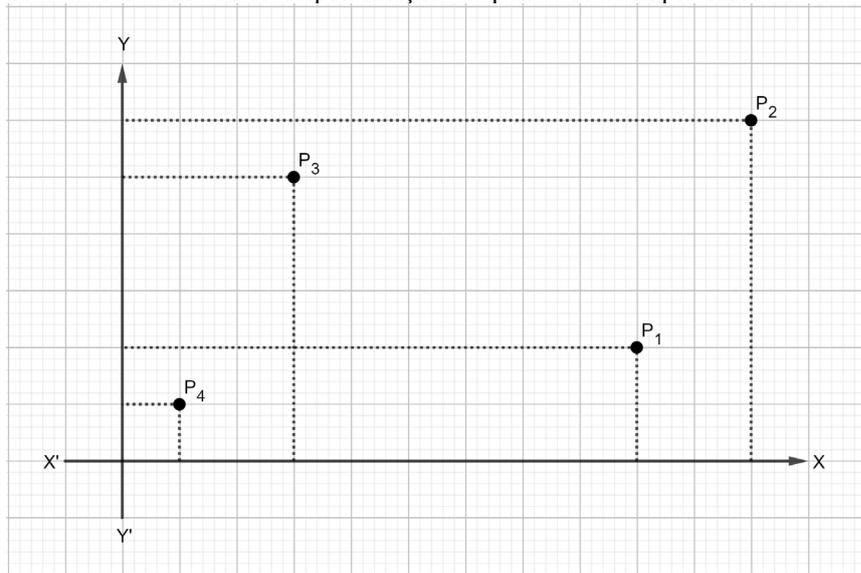
COROLÁRIO 3.23: Duas retas são mutuamente perpendiculares se, e somente se, o produto de suas declividades é igual a -1 .

Apresenta-se um exemplo para elucidar o estudo.

EXEMPLO 3.24: Analise por meio da declividade se os pontos $P_1(9, 2)$, $P_2(11, 6)$, $P_3(3, 5)$ e $P_4(1, 1)$ são os vértices de um paralelogramo.

Solução: Sabe-se que o paralelogramo possui dois pares de lados paralelos. Sendo quatro pontos no qual uma reta é formada da combinação de pelo menos dois deles, devem ser analisadas as seis possibilidades. Porém, antes pode ser feita a observação da posição dos pontos no plano coordenado, conforme FIGURA 20.

FIGURA 20 – Representação dos pontos do exemplo 2.24



FONTE: Pesquisadora.

Assim, analisando apenas as quatro possibilidades vêm:

- Para $P_1(9, 2)$ e $P_2(11, 6)$:

$$m_{P_1P_2} = \frac{2-6}{9-11}$$

$$m_{P_1P_2} = \frac{-4}{-2}$$

$$m_{P_1P_2} = 2$$

- Para $P_1(9, 2)$ e $P_4(1, 1)$:

$$m_{P_1P_4} = \frac{2-1}{9-1}$$

$$m_{P_1P_4} = \frac{1}{8}$$

- Para $P_2(11, 6)$ e $P_3(3, 5)$:

$$m_{P_2P_3} = \frac{6-5}{11-3}$$

$$m_{P_2P_3} = \frac{1}{8}$$

- Para $P_3(3, 5)$ e $P_4(1, 1)$:

$$m_{P_3P_4} = \frac{5-1}{3-1}$$

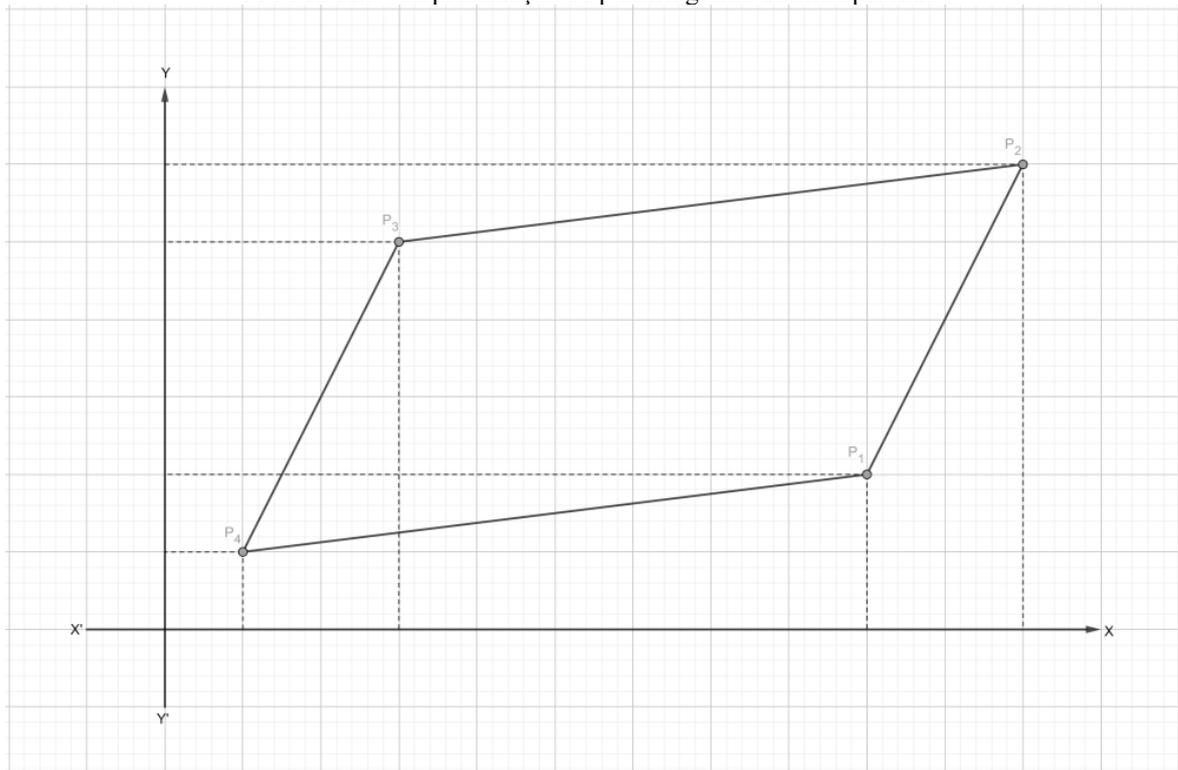
$$m_{P_3P_4} = \frac{4}{2}$$

$$m_{P_3P_4} = 2$$

Assim, visto que $m_{P_1P_2} = m_{P_3P_4}$ e $m_{P_1P_4} = m_{P_2P_3}$ então, pelo **COROLÁRIO 3.22**, tem-se $\overline{P_1P_2}$ é paralelo a $\overline{P_3P_4}$, da mesma forma que $\overline{P_1P_4}$ e $\overline{P_2P_3}$ são paralelos também.

Portanto, os pontos $P_1(9, 2)$, $P_2(11, 6)$, $P_3(3, 5)$ e $P_4(1, 1)$ são os vértices de um paralelogramo, apresentado na FIGURA 21.

FIGURA 21 – Representação do paralelogramo do exemplo 2.24



FONTE: Pesquisadora.

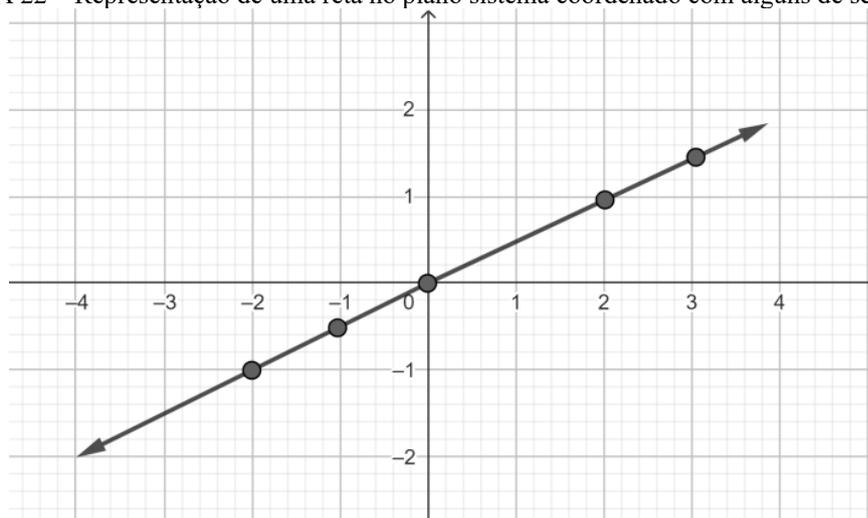
Acredita-se que com os conhecimentos de Geometria Analítica até o momento apresentados, os estudantes têm base para avançar ao estudo algébrico, apresentando na sequência a equação geral da reta.

3.7 EQUAÇÃO DA RETA

O conhecimento da equação de uma reta permite uma análise do comportamento dessa curva e compreender outras características através do método analítico.

Para a compreensão de uma equação o estudante precisa ter o conhecimento sobre o lugar geométrico da curva, que é formada por infinitos pontos e, a partir disso, suas características serem descritas algebricamente.

FIGURA 22 – Representação de uma reta no plano sistema coordenado com alguns de seus pontos



FONTE: Pesquisadora.

Segundo Lehmann (1982, p. 27), o estudante precisa ter em mente que ao supor que dada uma equação em duas variáveis x e y , que abreviadamente pode ser escrita como:

$$f(x, y) = 0. \quad (15)$$

De maneira geral há infinitos pares de valores x e y que satisfazem (15). Cada um desses pares de valores reais será tomado como *coordenadas (x, y) de um ponto do plano coordenado*.

Entende-se que se as coordenadas de um ponto satisfazem uma equação então o ponto se encontra sobre o lugar geométrico dessa equação e, de forma recíproca, se um ponto está situado no lugar geométrico de uma equação então suas coordenadas satisfazem à equação.

“(...) Uma vez que as coordenadas dos pontos de um lugar geométrico são condicionadas por sua equação, tais pontos, em geral, estão localizados em posições que, tomadas em conjunto, formam uma linha definida denominada uma *curva* assim como um gráfico ou lugar geométrico.” (LEHMANN, 1982, p. 28)

Com isso, por Lehmann (1982, p. 27), tem-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.25: A totalidade de pontos, e *somente* estes pontos, cujas coordenadas satisfazem a equação $f(x, y) = 0$, é denominada o *lugar geométrico* ou *gráfico da equação*¹¹.

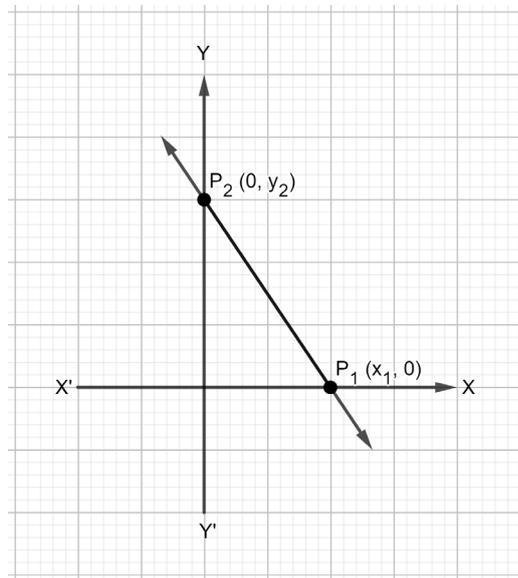
¹¹ Destaque do próprio autor.

Por Lehmann (1982, p. 27), ainda define-se:

DEFINIÇÃO 3.26: Diz-se que qualquer ponto cujas coordenadas satisfazem uma equação $f(x, y) = 0$ pertence ao lugar geométrico da equação¹².

Com isso, a análise das interseções do lugar geométrico com o plano de eixos coordenados, apresentando a FIGURA 23, são estudados.

FIGURA 23 – Representação de pontos de interseção de um lugar geométrico e os eixos de um plano coordenado



FONTE: Pesquisadora.

Na FIGURA 23, há vários pontos coordenados que estão no lugar geométrico de uma reta. Porém, $P_1(x_1, 0)$ é o ponto de interseção entre a reta e o eixo das abscissas, sendo então x_1 a referência da interseção nas abscissas; e y_2 é a referência da interseção nas ordenadas, pois $P_2(0, y_2)$ é o ponto de interseção entre o eixo das ordenadas e a reta.

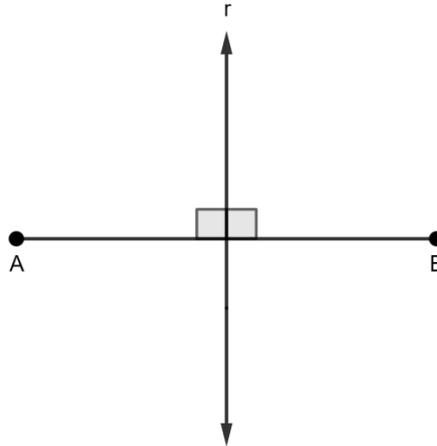
Assim, por Lehmann (1982, p. 29), vem a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.27: A *interseção* de um lugar geométrico com o eixo das abscissas corresponde à abscissa do ponto de interseção do lugar geométrico com o eixo. E a *interseção* do lugar geométrico com o eixo das ordenadas é a ordenada do ponto de interseção do eixo com o lugar geométrico.

¹² Destaque do próprio autor.

Outra ideia a ser analisada é a *simetria* de um lugar geométrico. Pensando em A e B como pontos pertencentes a uma mesma reta e a reta r como um eixo de simetria, tem-se a representação dessas ideias na FIGURA 24.

FIGURA 24 – Representação da simetria de dois pontos em relação a um eixo



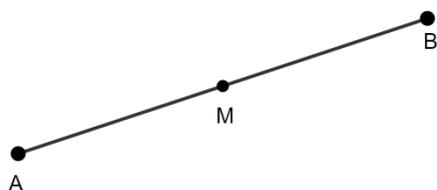
FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Pela FIGURA 24, os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria r se, e somente se, \overline{AB} esteja dividido em metades e perpendiculares por r . Assim, a reta r é denominada por *eixo de simetria*. Logo, por Lehmann (1982, p. 30), vem a definição:

DEFINIÇÃO 3.28: Diz-se que dois pontos distintos são *simétricos em relação a uma reta* se, e somente se, o segmento de reta que une esses dois pontos é dividido ao meio e perpendicular pela referida reta.

Seguindo a ideia de simetria, a FIGURA 25 é pensada em consonância com as ideias dos estudantes sobre existir dois pontos, A e B , que são simétricos em relação a outro ponto M pertencente a mesma reta.

FIGURA 25 – Representação da simetria de dois pontos em relação a um ponto



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

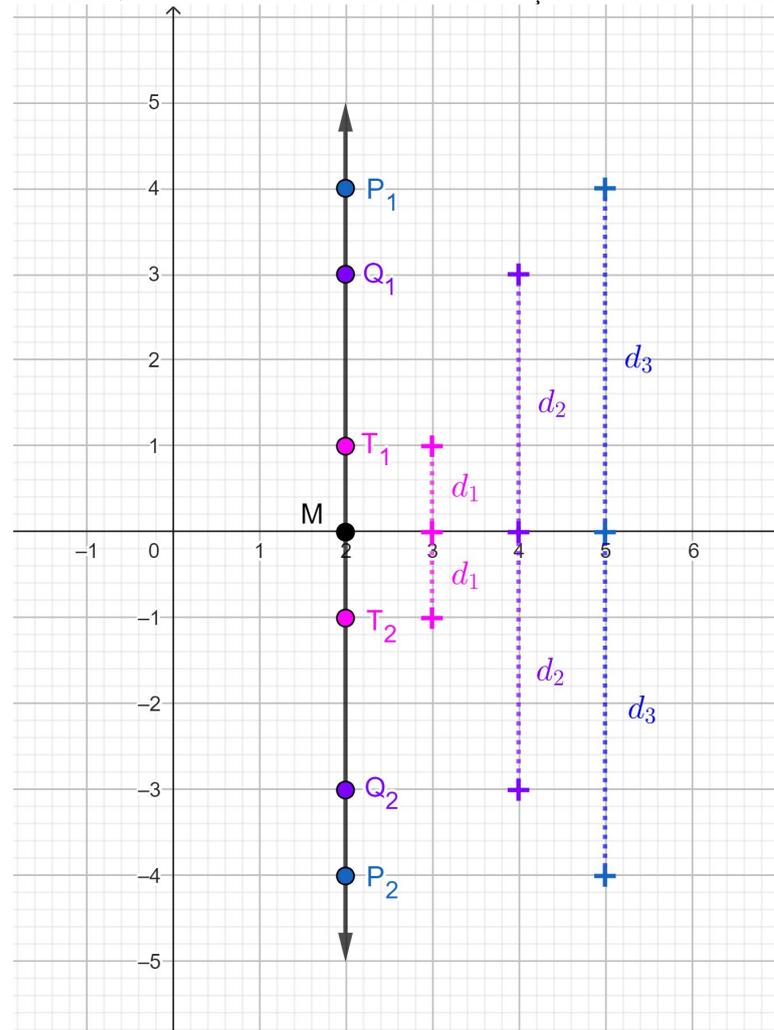
De acordo com a FIGURA 25, o ponto M é denominado *centro de simetria*, pois os pontos A e B são simétricos em relação ao ponto M . E isso ocorre se, e somente se, M seja o ponto médio de \overline{AB} .

Com isso, Lehmann (1982, p. 30) apresenta:

DEFINIÇÃO 3.29: Diz-se que dois pontos distintos são *simétricos em relação a um ponto M* se, e somente se, M for o ponto médio do segmento retilíneo que une estes dois pontos.

Com as definições de simetria apresentada anteriormente, pode ser analisada a simetria de um lugar geométrico em relação a um dos eixos coordenados. Construindo a ideia de uma reta ser simétrica em relação ao eixo das abscissas, apresenta-se a FIGURA 26.

FIGURA 26 – Ideia de uma reta simétrica em relação ao eixo das abscissas



FONTE: Pesquisadora.

Pela FIGURA 26, observa-se que para a reta apresentada tem-se que os pontos P_1 e P_2 são simétricos em relação a um ponto M pertencente ao eixo e em relação à reta base do eixo das abscissas. E percebe-se que ocorre o mesmo com os pontos Q_1 e Q_2 , e com os pontos T_1 e T_2 . Logo, pela **DEFINIÇÃO 3.2** e **DEFINIÇÃO 3.29**, dizemos que a reta do caso é simétrica em relação ao eixo das abscissas.

Porém, deve-se ficar claro aos estudantes que essa característica de simetria em relação a um eixo de simetria não é exclusiva do estudo de retas, mas sim do estudo de todas as curvas estudadas pela Geometria Analítica.

Com isso, conforme Lehmann (1982, p. 30), apresenta-se a definição:

DEFINIÇÃO 3.30: Diz-se que uma curva é *simétrica em relação a um eixo de simetria* desde que para cada ponto da curva há um ponto correspondente também sobre a curva tais que estes dois pontos sejam simétricos em relação ao eixo.

E, ainda por Lehmann (1982, p. 30), expande-se:

DEFINIÇÃO 3.31: Diz-se que uma curva é *simétrica em relação a um centro de simetria* M desde que para cada ponto da curva haja um ponto correspondente também sobre a curva tais que estes dois pontos sejam simétricos em relação à M .

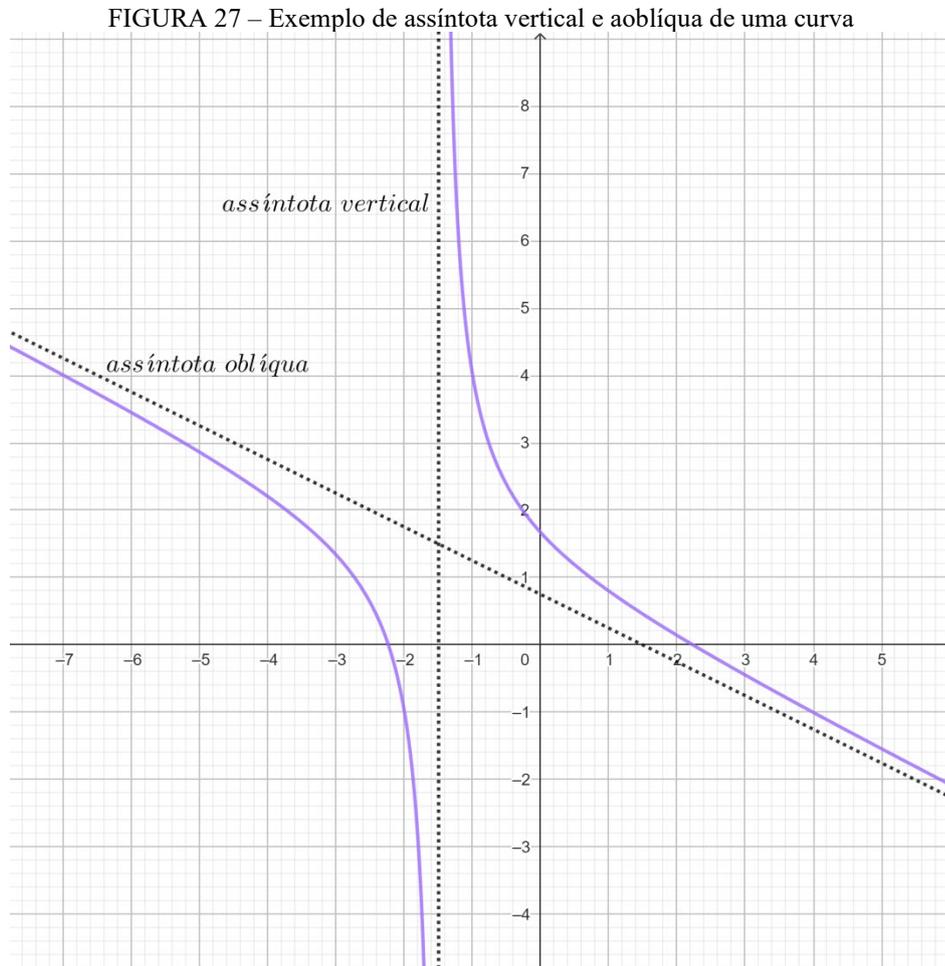
Outra característica que deve ser considerada para estudos posteriores da reta é o conceito de assíntota que o lugar geométrico possa ter. Pensando que existe uma reta fixa que a medida que uma curva se afasta da origem, então a distância da curva a essa reta fica cada vez menor, mas nunca uma distância nula, inicia a ideia de assíntota.

Por Lehmann (1982, p. 34), a ideia de assíntota implica em duas análises: a primeira é a de que uma curva que possui uma assíntota não é finita ou fechada, mas se estende indefinidamente; e a segunda é a de que a curva irá se aproximar de sua assíntota à medida em que se estende ao plano coordenado.

E devido à assíntota ser uma reta então há três posições particulares que ela pode assumir, recebendo denominações especiais. Se a assíntota estiver em posição paralela ou coincidente ao eixo das abscissas tem denominação de *assíntota horizontal*; se estiver em posição paralela ou coincidente ao eixo das ordenadas então sua denominação será de

assíntota vertical; e caso sua posição não seja paralela a nenhum dos eixos do plano coordenado então se denomina de *assíntota oblíqua*.

A FIGURA 27 representa a assíntota vertical e oblíqua de uma curva.



FONTE: Pesquisadora.

Com essas ideias, por Lehmann (1982, p. 34), apresenta-se a definição de assíntotas:

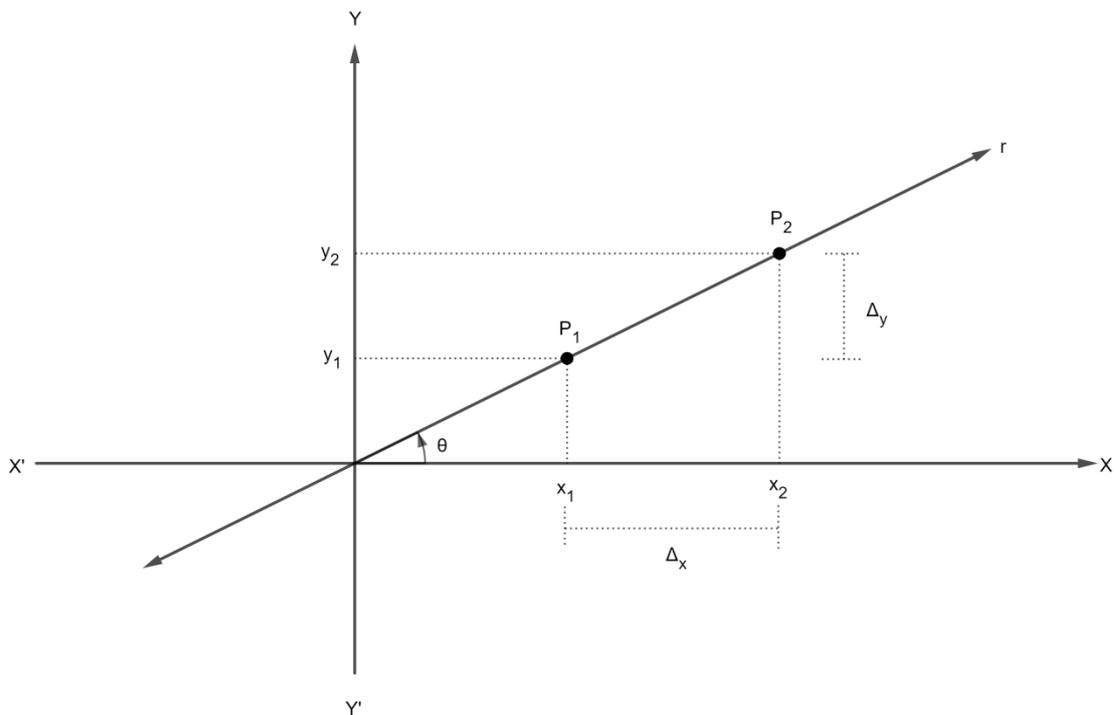
DEFINIÇÃO 3.32: Se, para uma curva dada, há uma reta tal que, à medida que um ponto sobre a curva se afasta indefinidamente da origem, a distância do referido ponto à reta diminui continuamente e tende à zero, então a reta é denominada uma *assíntota* da curva.

Uma observação que deve ser deixada clara ao estudante é a de que não necessariamente uma curva terá uma ou mais assíntotas, pois há curvas que não as possui. Porém, as assíntotas serão de grande valor analítico ao estudo do lugar geométrico quando a curva a possuir.

Assim, após a apresentação de todos os conceitos até o momento, pode ser analisada a identificação do lugar geométrico de uma reta e sua equação.

Pelo segundo axioma de Hilbert, entende-se que dois pontos distintos determinam uma reta, isto é, existe apenas uma única reta que passa por esses dois pontos. E a representação de uma reta r em um plano coordenado pode ser dada considerando dois pontos distintos, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, pertencentes a essa reta.

FIGURA 28 – Representação de dois pontos distintos que definem apenas uma reta



FONTE: Pesquisadora.

Conforme FIGURA 28, considera-se θ o ângulo de inclinação da reta r e Δ como a variação entre as coordenadas dos pontos, ou seja,

$$\Delta_x = x_1 - x_2 \quad \text{e} \quad \Delta_y = y_1 - y_2.$$

Pelo **TEOREMA 3.19**, a declividade m da reta r é dada por $m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$. Logo, pode-se

entender a representação dessa reta pela equação:

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

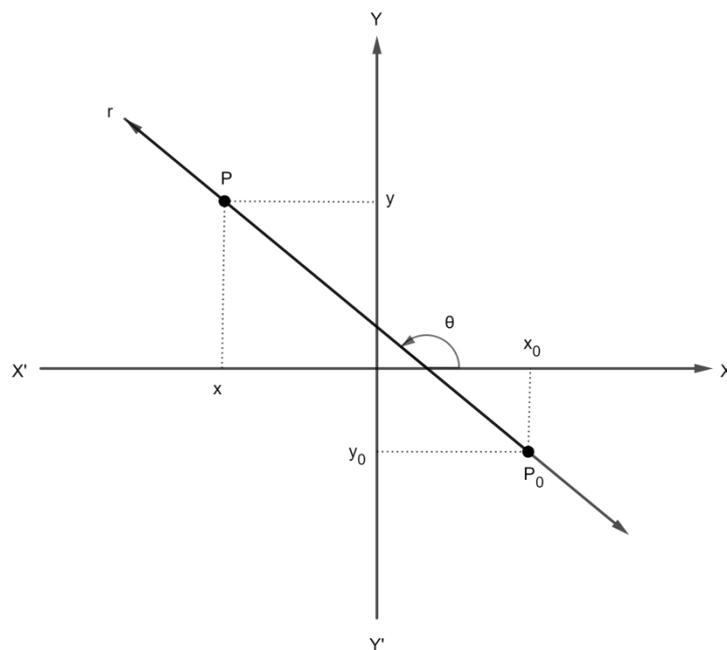
$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

Pela Geometria, uma reta é identificada sem equívocos por um de seus pontos e por sua direção.

Analiticamente, uma reta é determinada, sem erros, ao ser conhecido um de seus pontos e seu ângulo de inclinação. Assim, entende-se que um ponto sobre o plano cartesiano, $P_0(x_0, y_0)$, e uma declividade, m , determinam uma reta.

Analisando a representação de uma reta r passando por $P_0(x_0, y_0)$, considera-se $P(x, y)$ um ponto genérico pertencente a essa reta, conforme FIGURA 29.

FIGURA 29 – Representação de uma reta definida por um ponto conhecido e sua declividade



FONTE: Pesquisadora.

Com essa análise, segue-se o seguinte teorema:

TEOREMA 3.33: A reta que passa pelo por um ponto dado $P_0(x_0, y_0)$ e com declividade dada m tem por equação,

$$y - y_0 = m(x - x_0) .$$

Com este teorema, duas observações devem ser feitas ao estudante: primeiro que a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ independe da localização do ponto P_0 e se a sua declividade é positiva ou negativa; e a segunda é que se a reta for paralela ou coincidente ao eixo das

ordenadas então todos os pontos dela têm a mesma abscissa e sua equação será expressa por $x = x_0$.

Uma reta é denominada *forma ponto-declividade* quando sua equação é dada em função de um ponto e da declividade.

Segue um exemplo para melhor entender os conceitos apresentados.

EXEMPLO 3.34: Determinar a equação forma ponto-declividade da reta que tem ângulo de inclinação de 45° e o ponto $P(-6, -3)$ pertence a ela.

Solução: Tomando por r como a reta para esse estudo, pela **DEFINIÇÃO 3.18**, a sua declividade é dada por:

$$m = \tan(45^\circ)$$

$$m = 1$$

Logo, pelo **TEOREMA 3.33**, a equação da reta será:

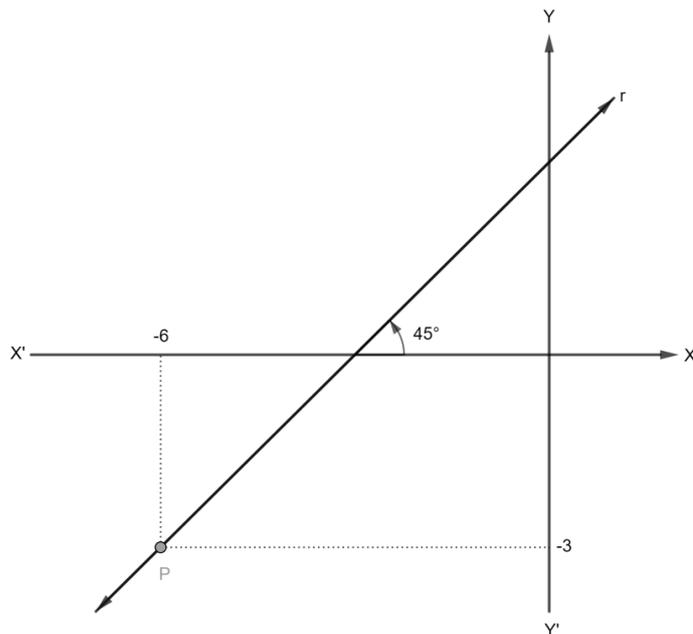
$$y - (-3) = 1 \cdot [x - (-6)]$$

$$y + 3 = x + 6$$

$$x - y + 3 = 0$$

E sua representação é dada na FIGURA 30.

FIGURA 30 – Representação da reta do exemplo 2,34



FONTE: Pesquisador.

Portanto, a equação da reta apresentada na situação é $x - y + 3 = 0$.

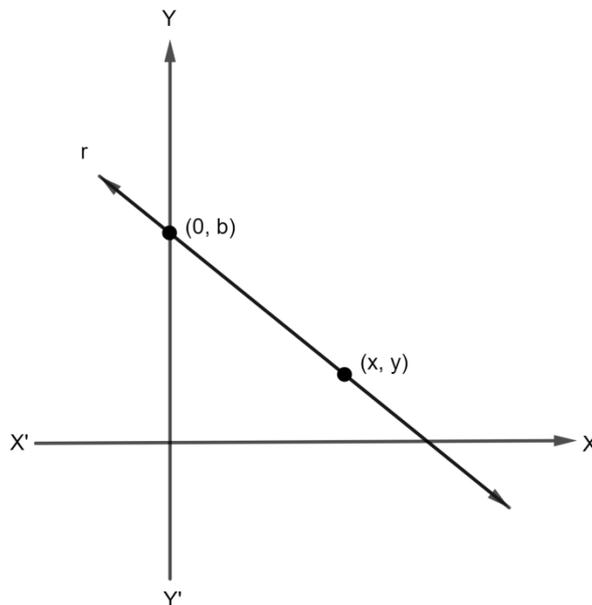
Com o **TEOREMA 3.33**, duas observações devem ser feitas ao estudante sobre a forma que a equação da reta pode se apresentar. A primeira é que a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ representa de forma geral uma reta, independente da localização do ponto P_0 e se a sua declividade é positiva ou negativa; e a segunda é que se a reta for paralela ou coincidente ao eixo das ordenadas então todos os pontos dela têm a mesma abscissa e sua equação será expressa por $x = x_0$.

Porém, outras três formas de apresentar a equação de uma reta de acordo com as características apresentadas por seu lugar geométrico. Elucidado por Lehmann (1982, p. 49), seguem os seguintes maneiras:

- a. **Forma declividade-interseção** é a denominação dada à reta r cuja declividade m e cuja interseção ao eixo das ordenadas é b .

Pensando em uma reta r , passando pelos pontos de coordenadas $(0, b)$ e (x, y) , mostra-se sua representação na FIGURA 31.

FIGURA 31 – Representação de uma reta descrita pela forma declividade-interseção



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Visto que o ponto de interseção com o eixo das ordenadas tem coordenada $(0, b)$ então, pelo **TEOREMA 2.33**, a equação da reta é dada por:

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b.$$

Deste item sobre a apresentação da equação da reta na forma declividade-interseção gera, por Lehmann (1982, p. 50), o teorema a seguir, que é estudado no Ensino Médio, porém requer todos os estudos apresentados anteriormente para ter um sentido.

TEOREMA 3.35: A reta com declividade m e com interseção b sobre o eixo das ordenadas dadas tem como equação a forma declividade-interseção

$$y = mx + b.$$

Para elucidar esse teorema, apresenta-se um exemplo de estudo.

EXEMPLO 3.36: Determinar a equação da reta cuja declividade é -3 e interseção sobre o eixo das ordenadas é -2 .

Solução: Sendo a declividade $m = -3$ e a interseção sobre o eixo das ordenadas $b = -2$ então, pelo **TEOREMA 3.35**, a equação da reta é dada por:

$$y = -3x + (-2)$$

$$y = -3x - 2.$$

Assim, a equação da reta é dada por $y = -3x - 2$.

b. Forma dois-pontos é a denominação dada à uma reta na qual sua equação é inequivocamente determinada por dois quaisquer de seus pontos, desde que sejam distintos e suas coordenadas conhecidas.

Tomando uma reta que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tem sua declividade dada por:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, x_1 \neq x_2.$$

Com a declividade e o ponto $P_1(x_1, y_1)$ a situação-problema se reduz à forma ponto-declividade, a qual é dada, pelo **TEOREMA 3.33**, por:

$$y_1 - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 - x_2), x_1 \neq x_2.$$

Esse estudo gera, por Lehmann (1982, p. 50), o seguinte teorema, que encapsula os princípios fundamentais discutidos e estabelece uma base sólida para futuras investigações.

TEOREMA 3.37: A reta que passa por dois pontos distintos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tem por equação a forma dois-pontos

$$y_1 - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2), \quad x_1 \neq x_2. \quad (16)$$

Pelo **TEOREMA 3.37**, de acordo com Lehmann (1982, p. 50), duas observações são feitas:

1.^a : Se x_1 e x_2 forem iguais então a forma dois-pontos não é conveniente. Porém, obtém-se como resultado uma reta paralela ao eixo das ordenadas e a equação é dada por $x = x_1$.

2.^a : Pode ser analisada pela relação (16) conforme operações algébricas e organizações que seguem:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2) \\ yx_1 - yx_2 - y_1x_1 + y_1x_2 &= y_1x - y_1x_1 - y_2x + y_2x_1 \\ 0 &= -yx_1 + yx_2 + y_1x_1 - y_1x_2 + y_1x - y_1x_1 - y_2x + y_2x_1 \\ x_1y_2 + xy_1 + x_2y - x_2y_1 - xy_2 - x_1y &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Com isso, analisa-se que a relação (17) pode ser escrita na forma de um determinante de ordem 3, o qual os elementos da terceira coluna é 1.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A partir disso, apresenta-se um exemplo para melhor compreensão dos conceitos.

EXEMPLO 3.38: Determinar a equação da reta que tem os pontos $(4, 2)$ e $(-5, 7)$ pertencentes a ela.

Solução: Sendo $(4, 2)$ e $(-5, 7)$ pontos pertencentes a uma mesma reta, então a equação desta reta pode ser definida pela forma dois-pontos. Assim, pelo **TEOREMA 3.37**, vem:

$$y - 2 = \frac{2 - 7}{4 - (-5)}(x - 4)$$

$$y - 2 = -\frac{5}{9}(x - 4)$$

$$9y - 18 = -5x + 20$$

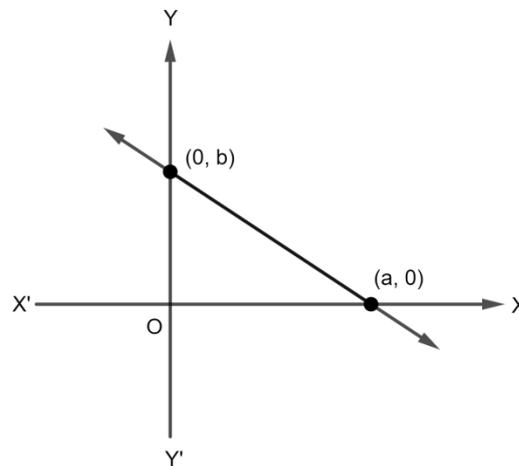
$$5x + 9y - 38 = 0$$

Portanto, a reta que tem os pontos $(4, 2)$ e $(-5, 7)$ pertencentes a ela é representada pela equação $5x + 9y - 38 = 0$.

c. **Forma segmentária** é a denominação dada à equação da reta definida pelos pontos de interseção com os eixos coordenados.

Tomando a como a interseção no eixo das abscissas e b como a interseção no eixo das ordenadas, sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então os pontos de coordenadas $(a, 0)$ e $(0, b)$ são pontos pertencentes à reta, conforme FIGURA 32, o que define encontrar a equação da reta pela forma dois-pontos.

FIGURA 32 – Representação de uma reta e suas interseções aos eixos coordenados



FONTE: Adaptado de Lehmann, 1982.

Assim, pelo **TEOREMA 3.37** tem-se:

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

A partir dessa análise, segue o teorema apresentado por Lehmann (1982, p. 52):

TEOREMA 3.39: A reta cujas interseções nos eixos coordenados das abscissas e ordenadas são $a \neq 0$ e $b \neq 0$, respectivamente, tem a equação na forma segmentária dada por

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (18)$$

Pelo **TEOREMA 3.39**, se faz necessária uma observação que sendo $a = 0$ logo terá $b = 0$ e a equação na forma segmentária não terá conveniência no seu uso, pois nesse caso apenas um ponto, a origem, é conhecido e essa informação não é suficiente para determinar uma única reta.

A seguir, apresenta-se exemplos para elucidar os conceitos apresentados.

EXEMPLO 3.40: Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(7, 8)$ e é paralela ao segmento retilíneo cujos extremos são $(-2, 2)$ e $(3, -4)$.

Solução: Sabendo que, pelo **COROLÁRIO 3.22**, a reta é paralela ao segmento retilíneo então tem a mesma declividade que este segmento. Calculando a declividade, pelo **TEOREMA 3.19**, tem-se:

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-2)}$$

$$m = -\frac{6}{5}$$

Assim, pelo **TEOREMA 3.33**, a equação é dada por:

$$y - 8 = -\frac{6}{5}(x - 7)$$

$$5y - 40 = -6x + 42$$

$$6x + 5y - 82 = 0$$

Portanto, a equação da reta da situação é $6x + 5y - 82 = 0$.

EXEMPLO 3.41: Determinar a equação da mediatriz do segmento retilíneo cujos extremos são $(-3, 2)$ e $(1, 6)$.

Solução: Sabendo que a mediatriz de um segmento é uma reta perpendicular a este segmento em seu ponto médio. Assim, tomando por M_S o ponto médio do segmento, vem:

$$M_S \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2} \right)$$

$$M_S \left(-\frac{2}{2}, \frac{8}{2} \right)$$

$$M_S(-1, 4)$$

O ponto $M_S(-1, 4)$ é o ponto pertencente a mediatriz. E como, pelo **COROLÁRIO 3.23**, o produto das declividades de duas retas perpendiculares é -1 então tomando por m_S a declividade do segmento tem-se que, pelo **TEOREMA 3.19**, a declividade do segmento é dada por:

$$m_S = \frac{2-6}{-3-1}$$

$$m_S = \frac{-4}{-4}$$

$$m_S = 1$$

Logo, a declividade da reta em estudo é $m = -1$. Com isso, pelo **TEOREMA 3.33**, a equação é dada por:

$$y - 4 = -1[x - (-1)]$$

$$y - 4 = -1(x + 1)$$

$$y - 4 = -x - 1$$

$$x + y - 3 = 0$$

Portanto, a equação da reta da situação é $x + y - 3 = 0$.

Tendo como base essa sugestão de seguimento de estudos, é desejado que o estudante tenha adquirido até o momento a compreensão de que a equação de uma reta vem da análise de um lugar geométrico de uma curva, que nesse caso específico é a reta. Através dessa abordagem, espera-se que o estudante tenha internalizado a relação entre os pontos de uma reta e sua representação algébrica.

Intenciona-se que, a partir desse ponto, o estudo inverso se torne de fácil entendimento para o estudante. Isso significa que, com o conceito de reta bem estabelecido a partir de sua visualização no plano de eixos coordenados, o estudante deve estar apto a compreender melhor a reta a partir de sua equação. Esta metodologia reforça a conexão entre a geometria e a álgebra, mas também facilita uma aprendizagem mais profunda, onde o estudante pode transitar entre a visualização geométrica e a formulação algébrica com maior fluidez.

3.8 A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DE UMA RETA

Nos estudos desse capítulo, analisou e formalizou que a equação de uma reta no plano de eixos coordenados é escrita de uma maneira geral por

$$Ax + By + C = 0, \quad (19)$$

onde ou $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ e C pode ser ou não igual a zero. A relação (19) é denominada *forma geral* da equação de uma reta.

Como observado, o estudante de Geometria Analítica pode seguir com o estudo pensando a partir da equação de uma reta, isto é, analisar se dada uma equação como (19) se seu lugar geométrico é uma reta. Para isso, dois casos devem ser estudados sobre o coeficiente de y , o caso $B = 0$ e o caso $B \neq 0$.

1.º caso: $B = 0$.

Se $B = 0$ então $A \neq 0$ e a equação (19) pode ser analisada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Ax + 0y + C &= 0 \\ Ax + C &= 0 \\ Ax &= -C \\ x &= -\frac{C}{A}. \end{aligned} \quad (20)$$

A equação (20) é da forma $x = x_0$, que das observações feitas a partir do **TEOREMA 3.33**, mostra ser uma reta paralela ao eixo das ordenadas.

2.º caso: $B \neq 0$.

Se $B \neq 0$ então a equação (19) pode ser analisada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ By &= -Ax - C \\ y &= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \end{aligned} \quad (21)$$

A relação (21) está na forma declividade-interseção e, de acordo com os estudos do **TEOREMA 3.35**, corresponde a uma reta cuja declividade é $-\frac{A}{B}$ e interseção no eixo das ordenadas ocorre em $-\frac{C}{B}$.

Com isso, observa-se que os dois casos levam a conclusão de que a relação (19) leva ao lugar geométrico de uma reta. Essa análise, segundo Lehmann (1982, p. 55), concluem-se no seguinte teorema:

TEOREMA 3.42: Uma equação tem uma reta por lugar geométrico no plano de eixos coordenados se, e somente se, é linear nas variáveis x e y .

Visto que a equação de qualquer reta é dada pela relação (19), então se verifica que há a necessidade de determinar os coeficientes A , B e C para um caso particular, o que mostra que esses coeficientes são de importância fundamental no estudo da equação de uma reta. Lehmann (1982, p. 56) afirma que em uma equação de uma reta há apenas duas constantes independentes, pois se analisar a equação (19) supondo $A \neq 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Assim, percebe-se que pela relação (22) há apenas duas constantes independentes na equação de uma reta.

“Logo, analiticamente, a equação de uma linha reta é inequivocamente determinada por duas condições independentes¹³. Geometricamente, uma linha reta é também inequivocamente determinada por duas condições independentes; assim, uma linha reta é determinada por dois quaisquer de seus pontos distintos, ou por um de seus pontos e sua direção.” (LEHMANN, 1982, p. 56)

Assim, segue exemplo para melhor compreensão dos conceitos.

EXEMPLO 3.43: Determinar os valores adequados da equação geral de uma reta que tem os pontos $(1, -1)$ e $(4, 7)$ pertencentes a ela.

Solução: Sendo os pontos $(1, -1)$ e $(4, 7)$ pertencentes à reta, então eles devem satisfazer a equação $Ax + By + C = 0$. Analisando para cada um dos pontos, vem:

Para $(1, -1)$:

$$A - B + C = 0. \quad (23)$$

Para $(4, 7)$:

$$4A + 7B + C = 0. \quad (24)$$

¹³ Destaque do próprio autor.

De (23) e (24), se tem:

$$\begin{cases} A - B + C = 0 \\ 4A + 7B + C = 0 \end{cases}$$

Organizando a primeira equação com a multiplicação por 7, tem-se:

$$\begin{cases} 7A - 7B + 7C = 0 \\ 4A + 7B + C = 0 \end{cases}$$

Somando as equações membro a membro, obtém-se:

$$11A + 8C = 0$$

$$A = -\frac{8}{11}C \quad (25)$$

Logo, substituindo (25) em (23) se tem:

$$-\frac{8}{11}C - B + C = 0$$

$$B = -\frac{8}{11}C + C.$$

$$B = \frac{3}{11}C \quad (26)$$

Substituindo os valores de (25) e (26) na equação geral, obtém-se:

$$-\frac{8}{11}Cx + \frac{3}{11}Cy + C = 0$$

$$-\frac{8}{11}x + \frac{3}{11}y + 1 = 0$$

$$-8x + 3y + 11 = 0$$

Portanto, para essa situação-problema os coeficientes são $A = -8$, $B = 3$ e $C = 11$.

Deve ser observado ao estudante que para a resolução desse exemplo para $C = 0$, as relações (23) e (24) devem ser analisadas para A e C em função de B se $B \neq 0$, ou para B e C em função de A se $A \neq 0$.

Com isso, pode-se avançar ao estudo da relação entre retas, utilizando a análise de suas equações como base. Esse próximo passo envolve explorar como diferentes equações de retas interagem entre si no plano coordenado, permitindo a investigação de conceitos como paralelismo, perpendicularidade e interseção de retas.

3.8.1 RELAÇÕES ENTRE DUAS RETAS ATRAVÉS DA EQUAÇÃO

Ao entender as equações das retas, os estudantes podem identificar rapidamente se duas retas são paralelas (possuem a mesma inclinação), perpendiculares (inclinações cujo produto é -1) ou se elas se interceptam em algum ponto específico. Essa análise aprofundada das relações entre as retas, mediada por suas representações algébricas, é fundamental para resolver problemas complexos em Geometria Analítica e para aplicações práticas em diversas áreas.

Para analisar as relações existentes entre duas retas consideram-se as suas equações na forma geral a seguir:

$$Ax + By + C = 0, \quad (27)$$

$$A'x + B'y + C' = 0. \quad (28)$$

Analisando as possibilidades de relações entre retas, tem-se:

a. *Relação de paralelismo:*

A declividade de relação (27) sendo $-\frac{A}{B}$, se $B \neq 0$, e a declividade de relação (28) sendo $-\frac{A'}{B'}$, se $B' \neq 0$, então de acordo com o **COROLÁRIO 3.22** para que as relações (27) e (28) sejam paralelas deve ocorrer a condição de:

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}.$$

Organizando a equação para um sinal positivo, tem-se:

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}, \quad (29)$$

isto é, que os coeficiente das variáveis x e y sejam proporcionais.

Mas se $B = 0$ então a reta da relação (27) será paralela ao eixo das ordenadas, tendo também $B' = 0$. Logo, a reta da relação (28) deve ser paralela a reta da relação (27) e por consequência paralela ao eixo das ordenadas. Porém, para este caso a proporção da relação (29) fica sem sentido. A mesma observação se dá para o caso de ambas as retas serem paralelas ao eixo das abscissas para o caso de $A = 0$ e $A' = 0$. Mas a relação se torna válida para todos os casos ao ser escrita como:

$$AB' - A'B = 0.$$

b. Relação de perpendicularismo:

Pelo **COROLÁRIO 3.23**, uma condição necessária e suficiente para que as retas das relações (28) e (29) sejam perpendiculares é:

$$\left(-\frac{A}{B}\right) \cdot \left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1,$$

Fazendo manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{A}{B} &= \frac{B'}{A'} \\ AA' + BB' &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

A relação (30) é válida mesmo que a reta da relação (28) ou a reta da relação (29) seja paralela ao eixo das ordenadas ou não tenha declividade.

c. Relação de coincidência:

As retas apresentadas nas relações (27) e (28) serão coincidentes se, e somente se, tiverem um ponto em comum e a mesma direção ou declividade. Fazendo a análise da interseção da reta da relação (27) com o eixo das abscissas, vem:

$$\begin{aligned} Ax + B \cdot 0 + C &= 0 \\ Ax + C &= 0 \\ x &= -\frac{C}{A}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo para a reta (28), vem:

$$\begin{aligned} A'x + B' \cdot 0 + C' &= 0 \\ A'x + C' &= 0 \\ x &= -\frac{C'}{A'}. \end{aligned}$$

Logo, para cumprir com as condições deve-se ter:

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}.$$

Reorganizando a equação, tem-se:

$$\frac{C}{C'} = \frac{A}{A'}. \quad (31)$$

Além disso, observando a condição que as declividades devem ser iguais, então:

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}.$$

E reorganizando a equação, tem-se:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \quad (32)$$

Assim, pelas relações (31) e (32) tem-se:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \quad (33)$$

isto quer dizer, duas retas são coincidentes se, e somente se, seus coeficientes correspondentes são proporcionais.

Analisando o fato de que a proporção da relação (33) é gerada pela hipótese de que todos os coeficientes nas equações apresentadas nas relações (27) e (28) são diferentes e zero, pois se esses coeficientes forem iguais a zero a proporção se torna sem sentido. Porém, será válido em todos os casos ao escrever as relações como:

$$A = kA', \quad B = kB' \quad \text{e} \quad C = kC',$$

onde k é uma constante não nula.

d. Relação de intercepção em apenas um ponto:

Pela Geometria Pura, duas retas irão se interceptar em um, e apenas um, ponto se, e somente se, elas não forem paralelas. Disso, pela análise da Geometria Analítica, conforme **COROLÁRIO 3.22**, as retas (27) e (28) terão uma relação de intercepção em apenas um ponto, seguindo o item (a), se:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \quad \text{ou} \quad AB' - A'B \neq 0.$$

Com essas análises de relação entre retas pela equação, o estudante compreende o seguinte teorema que resume os resultados.

TEOREMA 3.44: Sendo $Ax + By + C = 0$ e $A'x + B'y + C' = 0$ as equações de duas retas, então as relações seguintes são condições necessárias e suficientes para:

- a. Paralelismo $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ou $AB' - A'B = 0$;
- b. Perpendicularismo $AA' + BB' = 0$;
- c. Coincidência $A = kA', B = kB'$ e $C = kC'$, com $k \neq 0$;
- d. Interseção em um, e apenas um, ponto $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ ou $AB' - A'B \neq 0$.

O exemplo a seguir é apresentado para dar compreensão ao estudo.

EXEMPLO 3.45: Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(-1, -3)$ e é perpendicular a reta $3x - 4y + 11 = 0$.

Solução: Sabendo que a equação da reta $Ax + By + C = 0$ é perpendicular à reta $3x - 4y + 11 = 0$, então pelo **TEOREMA 3.44** tem-se:

$$\begin{aligned} A \cdot 3 + B \cdot (-4) &= 0 \\ 3A - 4B &= 0 \\ 3A &= 4B \\ A &= \frac{4}{3}B. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}Bx + By + C &= 0 \\ 4Bx + 3By + 3C &= 0 \\ 4x + 3y + \frac{3C}{B} &= 0 \end{aligned}$$

Tomando por $k = \frac{3C}{B}$, tem-se:

$$4x + 3y + k = 0$$

Como a reta requerida passa pelo ponto $(-1, -3)$, então:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) + k &= 0 \\ -4 - 9 + k &= 0 \\ -13 + k &= 0 \\ k &= 13 \end{aligned}$$

Portanto, a equação da reta procurada é $4x + 3y + 13 = 0$.

Com os estudos sobre reta até o momento, o estudante pode seguir para a compreensão de famílias de retas.

3.9 FAMÍLIAS DE RETAS

O estudo da família de retas é importante na Geometria Analítica, pois permite uma compreensão mais profunda de como as retas podem ser caracterizadas e manipuladas no

plano cartesiano. Quando uma reta é definida por duas condições, ela é única. No entanto, se apenas uma condição é aplicada, resulta em uma infinidade de retas que compartilham uma propriedade comum, formando uma família de retas.

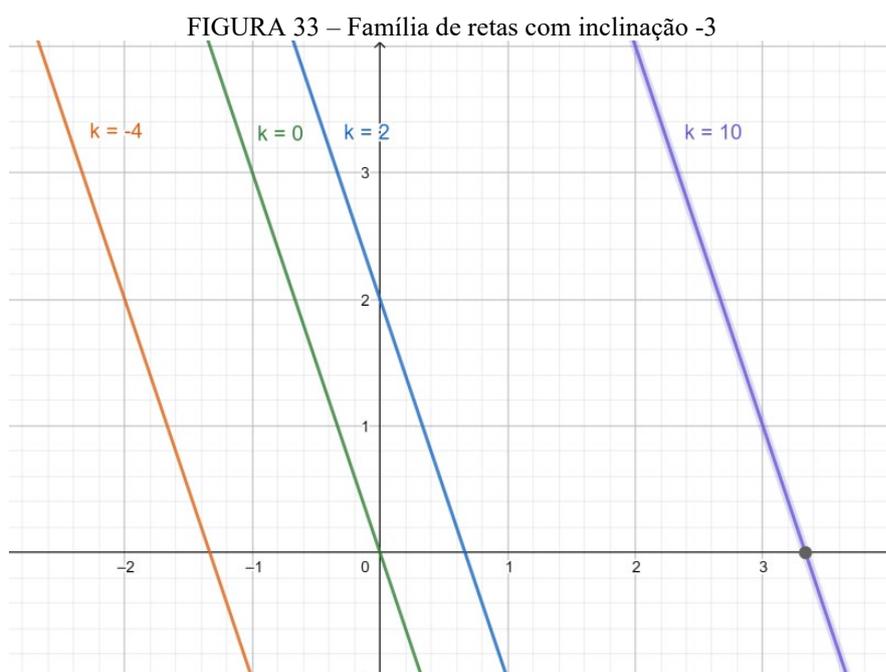
O estudo de retas mostra que uma reta e sua equação são, cada uma, incontestavelmente determinadas sempre por duas condições. Assim, se uma reta satisfaz apenas uma condição então ela não é mais única, ou seja, há uma infinidade de tais retas, com cada uma delas tendo uma propriedade comum associada à condição única. Como consequência desse fato, Lemahnn (1982, p. 77), apresenta a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.46: A totalidade de retas que satisfazem uma só condição geométrica é denominada uma *família* ou *sistema de retas*¹⁴.

Para elucidar a definição, analisa-se o caso a considerar todas as retas com a condição única de declividade -3 . A totalidade dessas retas é uma família de retas paralelas, com todas apresentando a declividade -3 , e são representadas analiticamente pela equação:

$$y = -3x + k, \quad (34)$$

onde k é uma constante arbitrária pertencente ao conjunto dos números reais. A FIGURA 33 ilustra essa família de retas representada pela equação da relação (34).



Fonte: Pesquisadora.

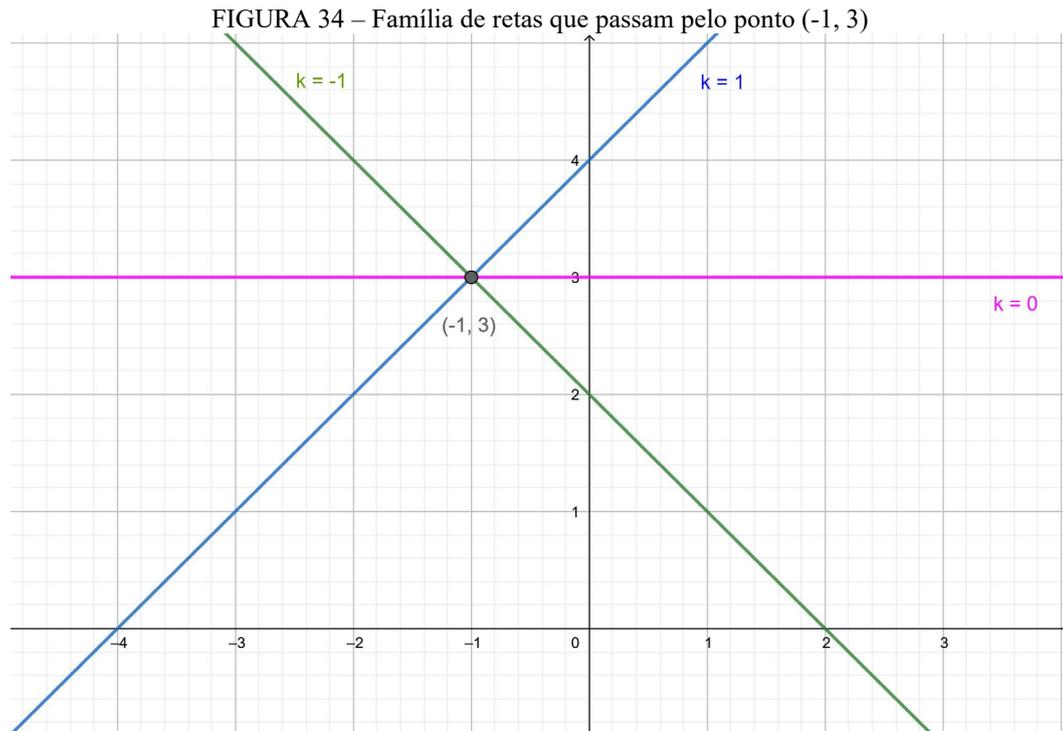
¹⁴ Destaque do próprio autor.

Outro exemplo a ser citado é o caso de todas as retas que passam pelo ponto $(-1, 3)$, no qual a família de retas pode ser analiticamente representada pela equação:

$$y - 3 = k(x + 1), \quad (35)$$

onde k é a declividade e pode assumir qualquer valor real.

A família de retas representada pela equação (35) é representada na FIGURA 34.



Fonte: Pesquisadora

Como k não é definido para uma reta paralela ao eixo das ordenadas, então a equação da relação (35) não inclui a reta $x = -1$, que também passa pelo ponto $(-1, 3)$. A família de retas representadas pela equação da relação (35) é denominada *feixe de retas* com ponto $(-1, 3)$ como seu *vértice*.

Observa que das relações (34) e (35), se obteve uma reta de uma família atribuindo um valor particular à constante arbitrária k . Devido à grande importância dessa constante, k é denominado um *parâmetro* da família.

Por Valladares (1990, p. 56) tem-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.47: Dado um ponto em \mathbb{R}^2 , $P_0(x_0, y_0)$, chama-se de *feixe de retas de centro* P_0 , ao conjunto $F(P_0)$, de todas as retas que se interceptam em P_0 .

Assim, entende-se que uma reta qualquer $r \in F(P_0)$ se, e somente se, cumprir com o item (d) do **TEOREMA 3.44**.

O conceito de família de retas é favorável para a determinação da equação de uma reta particular. Lehmann (1982, p. 77), comenta que deve estar claro para o estudante que para essa determinação de uma reta particular, o processo consiste em duas etapas: “Primeiro, a equação da família de retas é escrita de maneira a satisfazer uma dada condição; segundo, o valor do parâmetro da família é então determinado por aplicação da outra condição dada.”

Segue uma situação para exemplificar esses conceitos apresentados.

EXEMPLO 3.48: Determinar o parâmetro k de maneira que uma reta da família $kx - y + 8 = 0$ possa passar pelo ponto $(-2, 4)$. Então, determinar a equação da reta.

Solução: A família de retas foi dada nessa situação. Organizando, tem-se:

$$\begin{aligned} kx - y + 8 &= 0 \\ kx - y &= -8 \\ \frac{kx}{-8} + \frac{y}{8} &= 1 \\ \frac{x}{-\frac{8}{k}} + \frac{y}{8} &= 1 \end{aligned}$$

Pelo **TEOREMA 3.39**, a família de retas intercepta o eixo das coordenadas no ponto $(0, 8)$, sendo esse o seu vértice.

Como uma condição, uma das retas da família passa pelo ponto $(-2, 4)$. Substituindo na equação que representa a família, tem-se:

$$\begin{aligned} k(-2) - 4 + 8 &= 0 \\ -2k &= 4 - 8 \\ -2k &= -4 \\ k &= 2. \end{aligned}$$

E, para determinar da reta que passa pelo ponto $(-2, 4)$, substitui o valor encontrado do parâmetro k na equação da família, o que resulta:

$$\begin{aligned} 2x - y + 8 &= 0 \\ y &= 2x + 8. \end{aligned}$$

Logo, a equação procurada é $y = 2x + 8$.

Considerando todos os conceitos discutidos neste capítulo, estruturados de acordo com a sequência inspirada pelas ideias de Vygotsky, pode-se inferir que o estudante de Geometria Analítica desenvolve uma compreensão sólida e encontra significado no estudo das retas. A abordagem progressiva e orientada permite que o estudante internalize os fundamentos das retas, facilitando a transição para a análise de outras curvas. Esta metodologia não apenas reforça a compreensão conceitual, mas também promove a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos, preparando o estudante para enfrentar problemas mais complexos.

À medida que o estudante avança no estudo das curvas, ele é introduzido a uma variedade de formas geométricas, cada uma com suas propriedades e aplicações específicas. Esse aprofundamento é essencial para a compreensão completa da Geometria Analítica, pois permite a exploração de elipses, parábolas, hipérbolas e outras curvas. A transição gradual do estudo das retas para outras curvas assegura que o estudante desenvolva uma visão abrangente e integrada da Geometria, capacitando-o a aplicar esses conceitos em contextos variados, tanto teóricos quanto práticos.

Assim, a progressão do conteúdo, aliada a uma base teórica sólida, facilita o desenvolvimento das habilidades analíticas e críticas necessárias para o domínio da Geometria Analítica. Este método, fundamentado na pedagogia de Vygotsky, valoriza o processo de aprendizagem contínua e contextualizada, garantindo que o estudante esteja bem preparado para desafios acadêmicos e profissionais futuros.

4 A CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência é também uma curva familiar ao estudante de Geometria. Como a reta, a circunferência também é definida baseada em um conjunto de pontos, mas com uma organização de distância constante entre esses pontos e um ponto fixo, tendo assim seu lugar geométrico.

“A circunferência é uma linha fechada em um plano, em que todos os pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado centro. Cada segmento de reta com uma extremidade no centro e outra na circunferência é chamado de raio.”
(SOUZA, 2010)

Segundo Lehmann (1982, p. 85), o lugar geométrico de uma circunferência é o movimento de um ponto permanecendo sempre a uma distância constante de um ponto fixo.

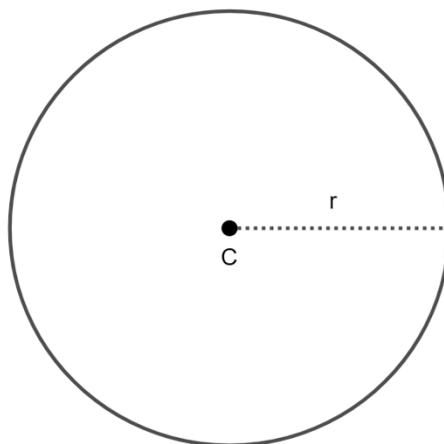
Para fazer sentido, sugerimos nessa pesquisa o estudo da circunferência partindo do conceito do seu lugar geométrico para posteriormente analisar suas representações geométricas e algébricas.

4.1 A EQUAÇÃO PADRÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Sendo a circunferência uma curva conhecida, analisam-se então dois conceitos que acredita que conflitam, mas que se complementam para a definição da curva.

Pensando em uma curva com dois pontos equidistantes, no qual um é fixo e outro é móvel, tem-se a representação desse lugar geométrico pela FIGURA 35.

FIGURA 35 – Representação da circunferência C



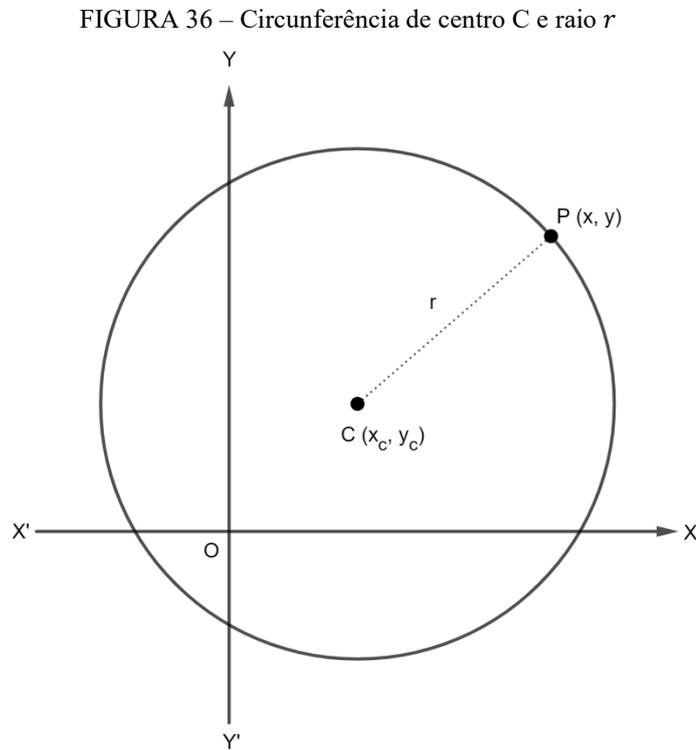
FONTE: Pesquisadora.

Segundo Lehmann (1982, p. 85), por essa representação segue a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.1: Uma *circunferência* é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que está sempre a uma distância constante de um ponto fixo no referido plano¹⁵.

O ponto fixo recebe a denominação de *centro* da circunferência e a distância constante de *raio* da circunferência.

Agora, pensando em $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente à circunferência cujo centro está em $C(x_c, y_c)$ pode ser representado conforme FIGURA 36.



FONTE: Pesquisadora.

E por Rezende & Queiroz (2008, p. 25), tem-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.2: Seja C um ponto e r um número real positivo. Define-se a *circunferência* de centro C e raio r , a qual se denota por $\mathcal{C}(C, r)$, como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto C .

¹⁵ Destaque do próprio autor.

Então, pela **DEFINIÇÃO 4.2**, o ponto P deve satisfazer a condição geométrica de

$$|\overline{CP}| = r, \quad (36)$$

que, pelo **TEOREMA 3.14**, pode ser expressa analiticamente pela equação:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2. \end{aligned} \quad (37)$$

De modo inverso, sendo $P_1(x_1, y_1)$ um ponto qualquer cujas coordenadas satisfazem a equação da relação (37), então:

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= r^2 \\ \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} &= r, \end{aligned}$$

que é a expressão analítica da condição (36) aplicada no ponto P_1 .

Com isso, adaptando a apresentação de Lehmann (1982, p. 85), tem-se o seguinte teorema:

TEOREMA 4.3: A circunferência cujo centro é o ponto dado $C(x_c, y_c)$ e cujo raio é a constante dada r , tem por equação:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2. \quad (38)$$

A equação (38) é denominada de *equação padrão* ou a *forma padrão* de uma circunferência. A partir da equação padrão de uma curva se obtém características importantes sem muitas manipulações algébricas, como no caso da equação padrão da circunferência que informa de maneira imediata as coordenadas do seu centro e do seu raio.

Para melhor compreender esses conceitos, seguem-se exemplos.

EXEMPLO 4.4: Determinar a equação padrão de uma circunferência cujo centro é $(-3, 2)$ e o raio é 4.

Solução: Sendo o centro $(-3, 2)$ e o raio 4 então, pelo **TEOREMA 4.3**, tem-se:

$$\begin{aligned} [x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 &= 4^2 \\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16. \end{aligned}$$

Portanto, a equação padrão da circunferência referida é $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

EXEMPLO 4.5: Encontrar a equação padrão da circunferência que tem um diâmetro cujos extremos são $(2, 3)$ e $(-4, 5)$.

Solução: Sabendo que, pela Geometria, o diâmetro é um segmento que passa pelo centro de uma circunferência ligando dois de seus pontos. Então, sendo $(2, 3)$ e $(-4, 5)$ os extremos do diâmetro da circunferência requerida, tem-se que o diâmetro corresponde à distância entre os pontos. Tomando por d o diâmetro então, pelo **TEOREMA 3.1**, obtém-se:

$$d = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (5 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 4}$$

$$d = \sqrt{40}$$

$$d = 2\sqrt{10}.$$

Sendo o raio de uma circunferência a metade do diâmetro, então:

$$r = \frac{d}{2}$$

$$r = \frac{2\sqrt{10}}{2}$$

$$r = \sqrt{10}.$$

E, sendo o centro o ponto médio entre os extremos do diâmetro, tem-se:

$$C\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{-2}{2}, \frac{8}{2}\right)$$

$$C(-1, 4).$$

Assim, pelo **TEOREMA 4.3**, obtém-se:

$$[x - (-1)]^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10.$$

Portanto, a equação padrão da circunferência referida é $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$.

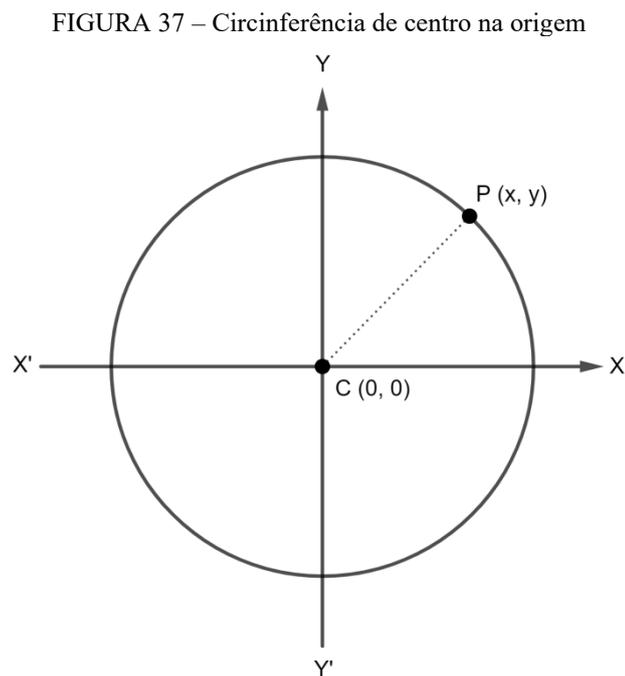
Conhecer e calcular a equação de uma circunferência permite a modelagem precisa de fenômenos circulares. A equação facilita a determinação de propriedades importantes como o raio, o centro e a localização de pontos em relação à circunferência, possibilitando análises e projeções precisas em diversas aplicações práticas e teóricas.

4.2 A EQUAÇÃO CANÔNICA DA CIRCUNFERÊNCIA

Entender e calcular a equação canônica de uma circunferência é importante porque permite identificar diretamente o centro e o raio da circunferência. Essa equação simplifica a análise geométrica e facilita a resolução de problemas relacionados a distâncias, interseções e posicionamento de objetos circulares. Isso é fundamental em disciplinas como Geometria, Engenharia e Computação Gráfica, onde a precisão e a clareza na representação de formas circulares são essenciais.

O ponto fixo da circunferência, o centro, pode estar localizado em qualquer local do plano de eixos coordenados, porém quando a origem for sua posição então haverá um caso especial de análise.

Partindo de que o centro está sobre a origem observa-se que então têm coordenadas $(0, 0)$, conforme FIGURA 37.



FONTE: Pesquisadora.

Sabendo que a circunferência em análise tem $x_c = 0$ e $y_c = 0$ então, pelo **TEOREMA 4.3**, segue que:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Analisando a equação acima, observa uma escrita mais simples da equação padrão da circunferência para o caso do seu centro estar localizado na origem. Com isso, por Lehmann (1982, p. 86), segue o seguinte corolário:

COROLÁRIO 4.6: A circunferência cujo centro é a origem e cujo raio é a constante dada r tem por equação

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (39)$$

Em Matemática, quando se referencia uma forma simples de apresentar algum objeto matemático como *forma canônica*. Uma equação na *forma canônica* é a forma mais simples de uma equação padrão de uma curva. Portanto, a equação (39) é a forma canônica da equação de uma circunferência.

Segue à um exemplo para exemplificar o conceito de equação canônica de uma circunferência.

EXEMPLO 4.7: Determinar a equação da circunferência que passa pelo ponto $(7, -5)$ e cujo centro é a origem.

Solução: Sendo o centro da circunferência em estudo está na origem, então a coordenada é dada por $(0, 0)$ e sendo $(7, -5)$ um ponto pertencente a essa circunferência, então pelo **COROLÁRIO 4.6** tem-se:

$$7^2 + (-5)^2 = r^2$$

$$49 + 25 = r^2$$

$$r^2 = 74.$$

Portanto, a equação na forma canônica da circunferência referida é $x^2 + y^2 = 74$.

O conceito de equação canônica deve estar claro ao estudante, pois ela se refere à circunferência cujo centro coincide com a origem do plano cartesiano. Com esse entendimento, é possível explorar outras formas de representar a circunferência pela escrita algébrica de uma equação, permitindo a análise de circunferências deslocadas no plano e facilitando a compreensão de suas propriedades e aplicações em problemas mais complexos. Além disso, o domínio dessas equações é crucial para a resolução de questões práticas e teóricas em diversas áreas da ciência e engenharia.

4.3 A FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Entende-se que uma curva pode ser apresentada de diversas maneiras, perpassando pela representação geométrica, observando e entendendo o comportamento dessa curva em um plano coordenado, à representação algébrica, que trata de uma visão geral e abstrata representada por equações que modelam um padrão geral da curva.

O desenvolvimento desse modelo algébrico, a equação da curva, tem sua origem do desenvolvimento do pensamento algébrico que tem sua importância na ampliação do estudante organizar e resolver situações-problemas de diversas áreas.

Segundo Becher e Groenwald (2010, p. 246),

“Na opinião dos pesquisadores em Educação Matemática, existe uma convergência, no sentido de que o pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial.”

Compreende-se, portanto, a relevância em apresentar o desenvolvimento algébrico da representação da circunferência, ou seja, desenvolver em conjunto com os estudantes de Geometria Analítica a representação geral dessa curva levando em consideração os seus conhecimentos.

Assim, ao ser definida a equação padrão de uma circunferência, um estudo algébrico pode ser feito a partir dela. Assim, desenvolvendo a equação (38):

$$\begin{aligned}(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2xx_c + x_c^2 + y^2 - 2yy_c + y_c^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2xx_c - 2yy_c + x_c^2 + y_c^2 - r^2 &= 0.\end{aligned}\tag{40}$$

Tomando por $D = -2x_c$, $E = -2y_c$ e $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2$ então se reescreve (40) como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.\tag{41}$$

Dos estudos anteriores, há o conhecimento que uma equação é dita *geral* quando reorganizada de forma a estar igualada ao elemento nulo da adição. Portanto, a equação (41) é a *equação geral* da circunferência.

Assim, tem-se que qualquer circunferência pode ser escrita na forma (41). Porém, necessita analisar se o processo inverso é válido, ou seja, se toda equação da forma geral (41) representa uma circunferência.

Para encontrar uma resposta a essa análise, deve ser reescrita a equação da forma (41) na forma da equação (37), ou seja, reorganizando e completando quadrados tem-se:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\
 (x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) &= -F \\
 \left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) &= -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} \\
 \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 &= \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Comparando (41) e (37), observa-se que o segundo membro de (41) é o critério que determina se essa equação define ou não uma circunferência, pois se tem pela comparação que:

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.$$

Por essa análise, há algumas considerações a serem feitas. Portanto, três casos a serem analisados:

a) Caso $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

Se $D^2 + E^2 - 4F > 0$ implica em (41) representar uma circunferência de centro é o ponto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e raio igual a $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

b) Caso $D^2 + E^2 - 4F = 0$.

Se $D^2 + E^2 - 4F = 0$ implica em (41) representar uma circunferência de centro é o ponto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e raio igual a zero. Essa circunferência é denominada como uma *circunferência ponto* ou uma *circunferência nula*. Portanto, pode ser considerado que a equação (41) representa o ponto isolado $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ como seu lugar geométrico.

c) Caso $D^2 + E^2 - 4F < 0$.

Se $D^2 + E^2 - 4F < 0$ implica em (41) representar uma circunferência imaginária. Portanto, para o estudo da Geometria no campo real, essa circunferência *não tem lugar geométrico*.

Observa-se que o caso **(b)** representa uma forma limite do caso **(a)**. Porém, para trazer sentido ao estudante que não tem um aprofundamento no ensino básico, é considerado que uma equação representa uma circunferência como seu lugar geométrico se, e somente se, a equação recair no caso **(a)**. Desse fato, segue o seguinte teorema:

TEOREMA 4.8: A equação $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência de raio não nulo se, e somente se, $D^2 + E^2 - 4F > 0$. Então, as coordenadas do seu centro são $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e o seu raio é $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

Lehmann (1982, p. 90) faz uma nota comentando que,

“Se a equação de uma circunferência é dada na forma geral, o estudante é advertido a não proceder de maneira mecânica e usar os valores dados no teorema [...] como fórmulas para obtenção do centro e do raio. Em vez disso deverá reduzir a equação à forma padrão pelo método de completar quadrados, como na dedução do próprio teorema.”

Pensa-se que esse processo descrito em nota pelo pesquisador traz mais sentido no entendimento da situação-problema apresentado, pois não é meramente uma aplicação de fórmulas e sim um estudo do caso apresentado.

Com isso, apresenta os seguintes exemplos como forma de elucidar o estudo apresentado da equação geral da circunferência.

EXEMPLO 4.9: Analise se a equação $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ representa uma circunferência.

Solução: Reorganizando e aplicando o método de completar quadrado na equação, tem-se:

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 &= 0 \\
 (2x^2 - 6x) + (2y^2 + 10y) &= -7 \\
 \left(2x^2 - 6x + \frac{9}{4}\right) + \left(2y^2 + 10y + \frac{25}{4}\right) &= -7 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\
 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{8}\right) + 2\left(y^2 + 5y + \frac{25}{8}\right) &= \frac{6}{4} \\
 \left(x^2 - 3x + \frac{9}{8}\right) + \left(y^2 + 5y + \frac{25}{8}\right) &= \frac{6}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{8} + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8} &= \frac{6}{8} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{6}{8} + \frac{9}{8} + \frac{25}{8} \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 &= 5. \end{aligned}$$

Portanto, a equação $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ representa uma circunferência de centro no ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ e raio $\sqrt{5}$.

EXEMPLO 4.10: Verifique se a equação $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$ determina ou não uma circunferência.

Solução: Reorganizando e aplicando o método de completar quadrado na equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 &= 0 \\ (4x^2 + 28x) + (4y^2 - 8y) &= -53 \\ (4x^2 + 28x + 49) + (4y^2 - 8y + 4) &= -53 + 49 + 4 \\ 4\left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right) + 4(y^2 - 2y + 1) &= 0 \\ \left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right) + (y^2 - 2y + 1) &= 0 \\ \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a equação $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$ representa o ponto $\left(-\frac{7}{2}, 1\right)$.

EXEMPLO 4.11: Dada a equação $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$, analise se ela representa ou não uma circunferência.

Solução: Reorganizando e aplicando o método de completar quadrado na equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 &= 0 \\ (16x^2 - 64x) + (16y^2 + 8y) &= -177 \\ (16x^2 - 64x + 2) + (16y^2 + 8y + 1) &= -177 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16\left(x^2 - 4x + \frac{1}{8}\right) + 16\left(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) &= -174 \\
\left(x^2 - 4x + \frac{1}{8}\right) + \left(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) &= -\frac{174}{16} \\
(x-2)^2 + \frac{1}{8} + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &= -\frac{87}{8} \\
(x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &= -\frac{87}{8} - \frac{1}{8} \\
(x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &= -11
\end{aligned}$$

Portanto, a equação $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$ não tem lugar geométrico.

A forma geral da equação da circunferência desempenha um papel importante em diversas aplicações práticas e teóricas. Por exemplo, na Engenharia Civil, essa equação é frequentemente utilizada para projetar estruturas circulares, como pontes e túneis, garantindo sua estabilidade e segurança. Em Física, a equação geral da circunferência é empregada na análise de movimentos circulares e na descrição de órbitas de corpos celestes, auxiliando na compreensão dos fenômenos cósmicos e na navegação espacial. Além disso, na Computação Gráfica, essa equação é essencial para gerar imagens de objetos circulares em telas digitais, possibilitando a criação de interfaces intuitivas e realistas em aplicativos e jogos. Em resumo, a forma geral da equação da circunferência é uma ferramenta versátil que permeia diversos campos do conhecimento, contribuindo significativamente para o avanço da ciência, tecnologia e engenharia.

Assim, com os conceitos apresentados até agora, o estudante de Geometria Analítica obterá uma base sólida para entender os estudos posteriores, que abordarão outras propriedades e aplicações da circunferência. Essa compreensão inicial é fundamental para avançar em tópicos mais complexos, como tangentes, secantes, arcos e setores, bem como para resolver problemas práticos e teóricos que envolvem a circunferência em diferentes contextos matemáticos e científicos.

O estudo avançará para a determinação de circunferências através de três condições específicas, o que permitirá ao estudante aprofundar ainda mais seu conhecimento e aplicação das propriedades geométricas das circunferências.

4.4 CIRCUNFERÊNCIAS DETERMINADA POR TRÊS CONDIÇÕES

SONNETS OF A GEOMETER
The Circle

*Few things are perfect: we bear Eden's scar;
Yet faulty man was godlike in design
He drew me on the sand. Then what could mar
His joy in that obedient mystic line;
And then, computing with a zeal divine,
He called π 3-point-14159
And knew my lovely circuit $2\pi r!$*

*A circle is a happy thing to be –
Think how the joyful perpendicular
Erected at the kiss of a tangency
Must meet my central point, my avatar!
They talk of 14 points: yet only 3
Determine every circle: Q. E. D.¹⁶ (MORLEY, 1920, p. 73)*

O *Soneto de um Geômetra: o Círculo*, de Christopher Morley (1880 – 1957), citado em livros de pesquisa científica por vários geômetras como Carrol & Rykken (2018, p. 189) e Coxeter (1980, p. 79), apresenta de forma poética algumas características e propriedades do círculo e, por consequência, da circunferência como o fato de três pontos distintos a determinarem.

Para a Geometria, nesse caso de estudo euclidiano, três pontos distintos definem uma circunferência. Pois sabendo que com três pontos distintos pode ser definido um triângulo, no qual esses pontos serão seus vértices, e circunscrevendo uma circunferência ao redor de um triângulo então o circuncentro desse triângulo também será o centro e os vértices pertencerão a essa circunferência.

Disso há a seguinte proposição, apresentada por Neto (2013, p. 116):

¹⁶“Poucas coisas são perfeitas: carregamos a cicatriz do Éden;
No entanto, o homem defeituoso era um design divino
Ele me desenhou na areia. Então o que poderia estragar
Sua alegria naquela linha mística obediente;
E que, computando com zelo divino,
Ele chamou π 3-ponto-14159
E conhecia meu lindo circuito $2\pi r!$

Um círculo é uma coisa feliz de ser –
Pense como a alegre perpendicular
Erguida no beijo de uma tangência
Deve atender meu ponto central, meu avatar!
Eles falam de 14 pontos: mas apenas 3
Determine cada círculo: C. Q. D.” (Tradução pela pesquisadora).

PROPOSIÇÃO 4.12: Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito *circunscrito* ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.

Disso, geometricamente se tem que uma circunferência é inequivocamente determinada por três condições independentes. Observando pelo lado da Geometria Analítica, ou seja, analisando as equações já definidas tem-se que na equação padrão (38):

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2,$$

há três constantes arbitrárias, x_C , y_C e r .

De mesma observação, a equação geral (41):

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

também dispõem de três constantes arbitrárias, D , E e F .

Se toda circunferência pode ser representada de maneira algébrica pela equação padrão (38) ou pela equação geral (41), então a equação de qualquer circunferência particular pode ser obtida através da determinação dos valores das três constantes.

Apresentam-se os exemplos a seguir para melhor elucidar o estudo.

EXEMPLO 4.13: Determinar a equação, centro e raio da circunferência em que os pontos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ e $(4, 6)$ são pertencentes.

Solução: Sabendo que a circunferência passa pelos pontos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ e $(4, 6)$, então substituindo os pontos na equação geral tem-se:

Para $(2, -2)$:

$$\begin{aligned} 2^2 + (-2)^2 + D \cdot 2 + E \cdot (-2) + F &= 0 \\ 4 + 4 + 2D - 2E + F &= 0 \\ 2D - 2E + F &= -8 \end{aligned} \tag{43}$$

Para $(-1, 4)$:

$$\begin{aligned} (-1)^2 + 4^2 + D \cdot (-1) + E \cdot 4 + F &= 0 \\ 1 + 16 - D + 4E + F &= 0 \\ -D + 4E + F &= -17 \end{aligned} \tag{44}$$

Para $(4, 6)$:

$$\begin{aligned} 4^2 + 6^2 + D \cdot 4 + E \cdot 6 + F &= 0 \\ 16 + 36 + 4D + 6E + F &= 0 \\ 4D + 6E + F &= -52 \end{aligned} \tag{45}$$

Das equações (43), (44) e (45) resulta o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2D - 2E + F = -8 \\ -D + 4E + F = -17, \\ 4D + 6E + F = -52 \end{cases}$$

que tem por solução:

$$D = -\frac{16}{3}, \quad E = -\frac{25}{6}, \quad F = -\frac{17}{3}.$$

Substituindo a solução encontrada na equação geral e organizando, vem:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} &= 0 \\ 6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Fazendo as manipulações algébricas em (46) para completar quadrado, segue:

$$\begin{aligned} (6x^2 - 32x) + (6y^2 - 25y) &= 34 \\ 6\left(x^2 - \frac{16}{3}x\right) + 6\left(y^2 - \frac{25}{6}y\right) &= 34 \\ \left(x^2 - \frac{16}{3}x\right) + \left(y^2 - \frac{25}{6}y\right) &= \frac{34}{6} \\ \left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9}\right) + \left(y^2 - \frac{25}{6}y + \frac{625}{144}\right) &= \frac{34}{6} + \frac{64}{9} + \frac{625}{144} \\ \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{12}\right)^2 &= \frac{2465}{144} \end{aligned}$$

Portanto, a circunferência em estudo tem equação geral $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$, cujo centro é $\left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$ e o raio é $\frac{\sqrt{2465}}{12}$.

EXEMPLO 4.14: Determinar a equação da circunferência cujo centro está sobre a reta $4x + 7y + 5 = 0$ e os pontos $(-1, -4)$ e $(2, -1)$ são pertencentes a ela.

Solução: Sendo o centro $C(x_C, y_C)$ pertencente à reta $4x + 7y + 5 = 0$, então as coordenadas do ponto satisfazem as condições da reta. Logo,

$$\begin{aligned} 4x_C + 7y_C + 5 &= 0 \\ 4x_C + 7y_C &= -5. \end{aligned} \quad (47)$$

E sabe-se que os pontos $(-1, -4)$ e $(2, -1)$ pertencem a circunferência, então substituindo suas coordenadas na equação padrão, tem-se:

Para $(-1, -4)$:

$$(-1 - x_C)^2 + (-4 - y_C)^2 = r^2 \quad (48)$$

E para $(2, -1)$:

$$(2 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = r^2. \quad (49)$$

As equações (47), (48) e (49) formam um sistema nas incógnitas x_C , y_C e r , o qual possui como solução:

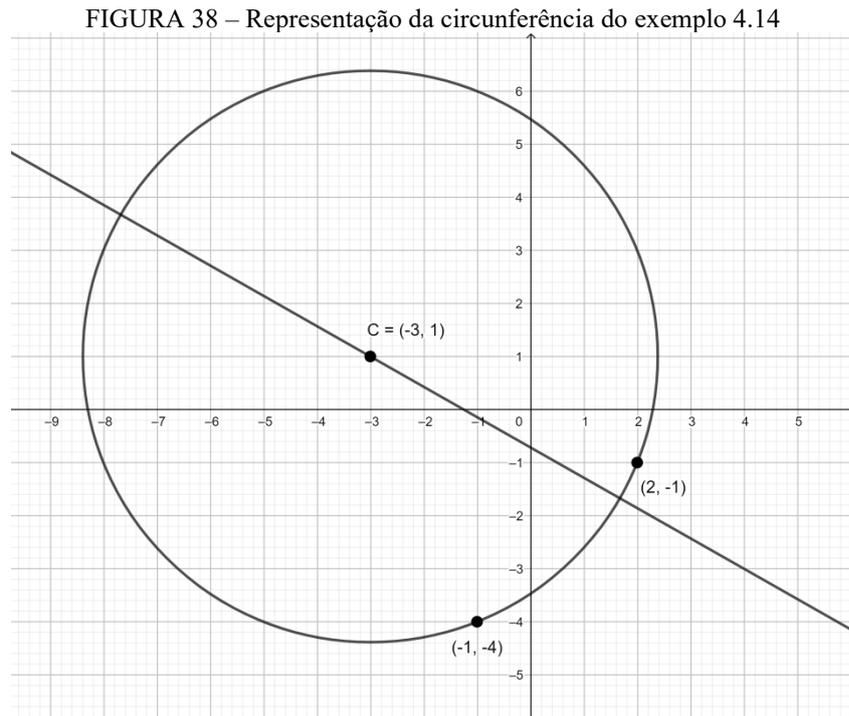
$$x = -3, \quad y = 1, \quad r = \sqrt{29}.$$

Logo, a equação da circunferência é dada por:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{29})^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29.$$

Portanto, a circunferência em estudo tem equação padrão $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$, cuja representação gráfica é apresentada na FIGURA 38.



FONTE: Pesquisadora.

Os estudos apresentados até o momento como sugestões de sequência didática, são conhecimentos que dão base ao estudante de Geometria Analítica compreender a ideia de circunferência, bem como compreender suas condições de existência, escritas algébricas e representações geométricas. Além disso, esses estudos propiciam o estudante a compreender famílias de circunferência, assunto que se sugere como continuidade de sequência.

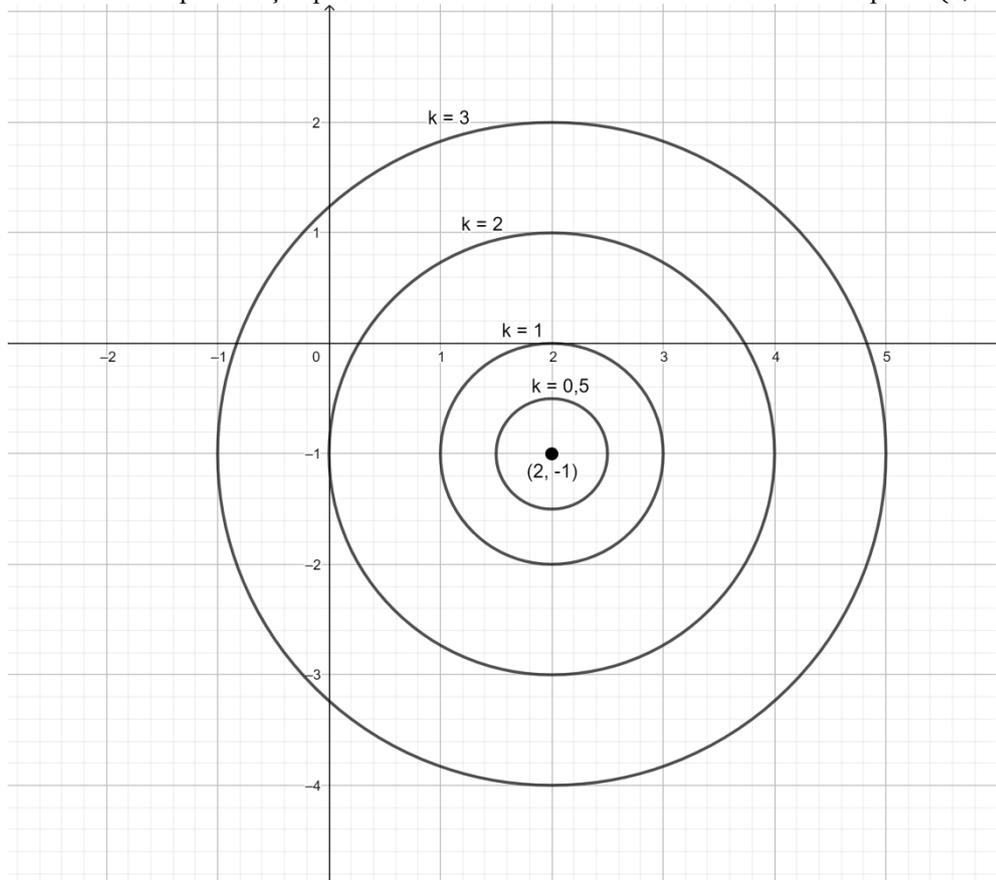
4.5 FAMÍLIAS DE CIRCUNFERÊNCIAS

Com os estudos anteriores, compreende-se que uma circunferência é determinada por três condições, sendo geométrica ou algebricamente. Porém, observa-se que uma circunferência não será única ao satisfazer menos de três condições.

Quando uma circunferência satisfaz duas condições e a terceira deixa arbitrária isso fará com que tenha uma equação com uma constante arbitrária, denominada *parâmetro*, e tal equação representa uma *família uniparamétrica*.

Para conjecturar essa ideia, apresenta-se a representações de algumas circunferências de centro $(2, -1)$, conforme FIGURA 39.

FIGURA 39 – Representação parcial da família de circunferências com centro no ponto $(2, -1)$

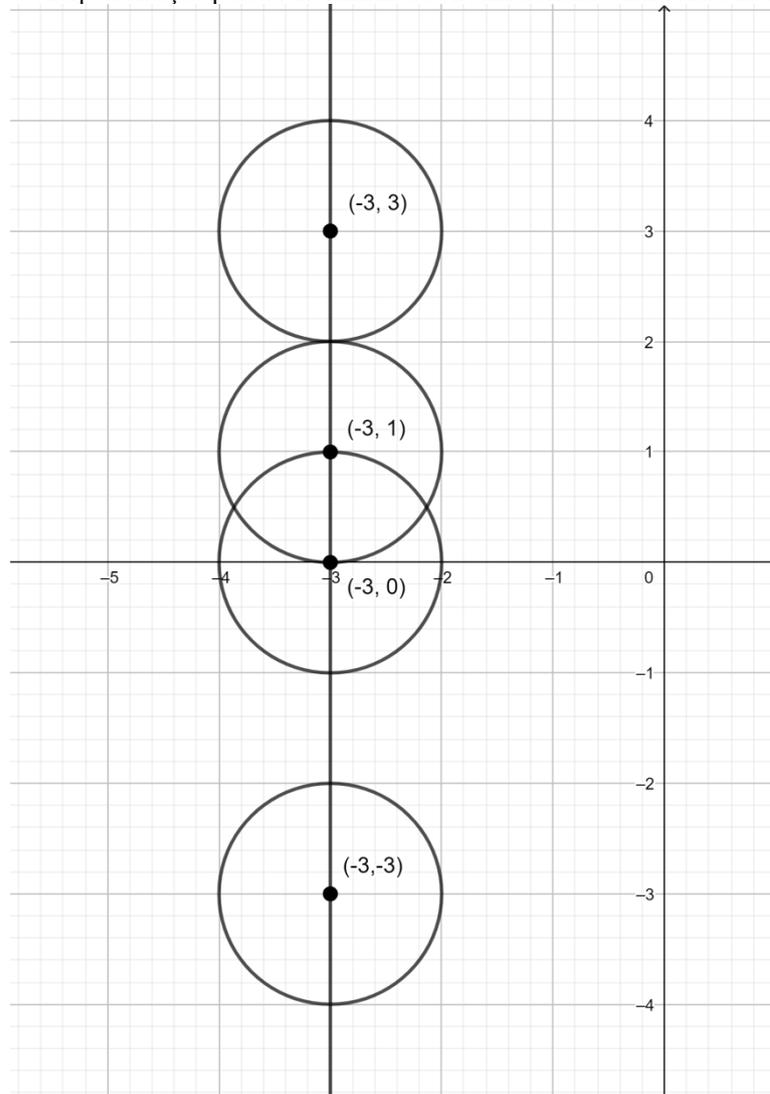


FONTE: Pesquisadora.

Essa imagem da FIGURA 39, elucida o conceito de uma família de circunferências com centro $(2, -1)$, que tem como equação padrão $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = k^2$, onde k é o parâmetro, definido por números positivos conforme **TEOREMA 4.8**.

Outra representação que pode ser pensada em conjunto com os estudantes são as circunferências com centro em uma reta, como exemplo apresentado na FIGURA 40.

FIGURA 40 – Representação parcial da família de circunferências com centro na reta $x = -3$



FONTE: Pesquisadora.

A imagem anterior elucidada o conceito é a família de circunferências de raio 1 e cujo centro está sobre a reta $x = -3$, que tem por equação padrão $(x + 3)^2 + (y - k)^2 = 1$, na qual o parâmetro refere-se à ordenada do centro.

Pensa-se que compreendendo o que é família de circunferências, o estudante terá base para dar continuidade ao estudo da relação de uma família de curvas com circunferências, ou seja, poderá seguir para o estudo do caso de famílias de curvas que passam pelas interseções de duas circunferências conhecidas.

Iniciando conhecendo duas circunferências genéricas C_1 e C_2 distintas, cujas representações algébricas são as seguintes equações gerais:

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad (50)$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \quad (51)$$

Como as interseções são dadas pela igualdade entre as equações, então se observa que as curvas que passam pelos pontos de interseção são representadas algebricamente pela combinação linear entre as equações (50) e (51), ou seja,

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0, \quad (52)$$

na qual o parâmetro k pode assumir valores reais.

Assim, se faz necessário analisar a relação entre as circunferências C_1 e C_2 para melhor compreender a família de circunferências que passam pela interseção entre elas.

a) Caso de C_1 e C_2 serem circunferências secantes.

Supondo os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ distintos serem os pontos de interseção entre C_1 e C_2 , então se as coordenadas (x_1, y_1) de P_1 satisfazem as equações (50) e (51) logo satisfarão a equação (50), se reduzindo a forma $0 + k \cdot 0 = 0$.

E, de forma análoga, então se as coordenadas (x_2, y_2) de P_2 satisfazem as equações (50) e (51) logo satisfarão a equação (50) para todos os valores de k . Assim, a equação (50) representa a família de curvas que passam pelos pontos de interseção das circunferências C_1 e C_2 .

Reorganizando a escrita da equação (50), colocando fatores comuns em evidência, tem-se:

$$(k + 1)x^2 + (k + 1)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0, \quad (53)$$

que é a equação que determina a natureza da família de curvas que passa pela interseção das circunferências C_1 e C_2 .

Pela equação (53), observa-se que:

- Se $k = -1$ então a equação é reduzida a uma equação do primeiro grau, representando uma reta.
- Se $k \neq -1$ então, pelo **TEOREMA 4.8**, a equação representa uma circunferência. Observa-se que no caso particular do parâmetro $k = 0$ a equação se reduz à C_1 .

b) Caso de C_1 e C_2 serem circunferências tangentes.

Supondo o ponto $P_1(x_1, y_1)$ o ponto de tangência entre as circunferências então, pela mesma argumentação do caso (a), mostra-se que para cada valor de $k \neq -1$ a equação representa uma circunferência tangente à C_1 e à C_2 .

c) Caso de C_1 e C_2 serem circunferências externas.

Considerando as circunferências C_1 e C_2 não terem ponto em comum, então analisa que as coordenadas de um ponto que satisfaz a equação (50) não irão satisfazer a equação (51) e, portanto, também não irão satisfazer a equação (53) para qualquer valor que o parâmetro k assumir.

De maneira semelhante, as coordenadas de um ponto que satisfaz a equação (50) não irão satisfazer a equação (51) e, portanto, também não irão satisfazer a equação (53) para qualquer valor que o parâmetro k assumir com exceção de $k = 0$ que reduz a equação à C_1 .

Assim, nenhuma circunferência da família, com exceção de C_1 , tem ponto em comum com C_1 e com C_2 . Para uma melhor análise, supondo $P_1(x_1, y_1)$ um ponto situado em qualquer membro da família (53), exceto C_1 , ao substituir suas coordenadas em (50) e (51) encontraremos valores não nulos, como k_1 e k_2 , respectivamente, o que torna a equação (53) da forma $k_1 + k \cdot k_2 = 0$, onde $k = -\frac{k_1}{k_2}$.

Isso significa que há apenas uma única circunferência da família da relação (53) que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$. Como P_1 foi tomado como qualquer ponto situado sobre qualquer membro da família de circunferências exceto C_1 , se conclui que não há duas circunferências da família da relação (53) com pontos comuns. Logo, o ponto P_1 não pode se situar sobre C_2 .

Para ficar mais claro esse conteúdo, segue um exemplo.

EXEMPLO 4.15: Determinar a equação da circunferência que passa pelas interseções entre as circunferências $C_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$, tendo seu centro sobre a reta $l: 2x + y - 14 = 0$.

Solução: Sabendo que a família de circunferências que passam pela interseção das duas circunferências em estudo é dada por:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + k(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) &= 0 \\
 x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + kx^2 + ky^2 - 4kx + 4ky - 8k &= 0 \\
 (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (-8-4k)x + (-4+4k)y + (11-8k) &= 0 \\
 x^2 + y^2 + \left(\frac{-8-4k}{k+1}\right)x + \left(\frac{-4+4k}{k+1}\right)y + \left(\frac{11-8k}{k+1}\right) &= 0,
 \end{aligned}$$

onde o parâmetro k deve ser determinado pela condição de que o centro da circunferência procurada está sobre a reta $2x + y - 14 = 0$.

Pelo **TEOREMA 4.8**, temos que o centro da circunferência procurada é dado por:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{-8-4k}{k+1}, \frac{-4+4k}{k+1} \right) \\
 &\left(\frac{8+4k}{2(k+1)}, \frac{4-4k}{2(k+1)} \right).
 \end{aligned}$$

Logo, o centro da circunferência procurada deve satisfazer a equação da reta. Assim, substituindo, tem-se:

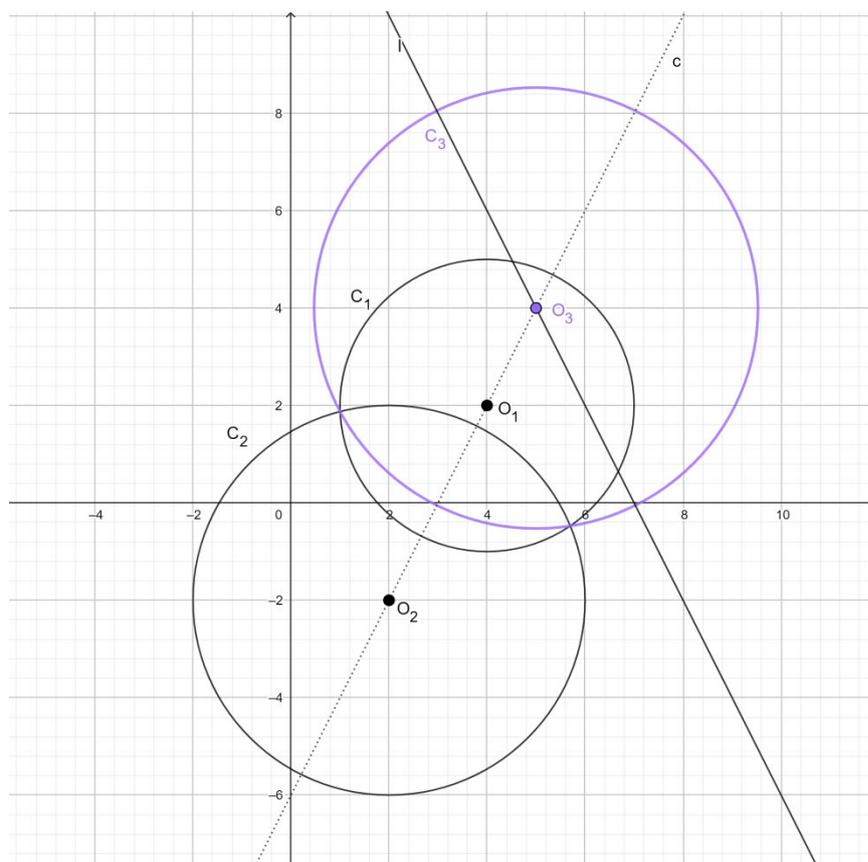
$$\begin{aligned}
 2 \cdot \frac{8+4k}{2(k+1)} + \frac{4-4k}{2(k+1)} - 14 &= 0 \\
 2(8+4k) + (4-4k) - 2(k+1)14 &= 0 \\
 -24k - 8 &= 0 \\
 k &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de k na equação que determina as famílias de curvas, vem:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + \left(\frac{-8+4\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}+1} \right)x + \left(\frac{-4+4\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}+1} \right)y + \left(\frac{11-8\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}+1} \right) &= 0 \\
 x^2 + y^2 - 10x - 8y + \frac{41}{2} &= 0 \\
 2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 &= 0
 \end{aligned}$$

Fazendo um análise geométrica da situação, obtém-se a imagem colocada na sequência:

FIGURA 41 – Representação geométrica da situação do exemplo 4.15



FONTE: Pesquisadora.

Portanto, a equação procurada é $2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 = 0$.

A reta que passa pelos centros de duas circunferências não concêntricas é denominada *reta dos centros*. Na FIGURA 41, foi traçada a reta c que passa pelos pontos O_1 e O_2 , centros das circunferências C_1 e C_2 , ou seja, a reta c é uma reta dos centros. Nota-se que O_3 está sobre a reta c .

Com isso, deseja-se mostrar que todas as circunferências da família da relação (50) têm uma reta dos centros comum com os centros das relações (50) e (49), denominadas por C_1 e C_2 .

De fato, pelo **TEOREMA 4.8**, o centro de C_1 é $\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$ e de C_2 é $\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$ logo, pelo **TEOREMA 3.37**, a equação da reta que contém esses dois pontos é dada por:

$$\begin{aligned}
y - \left(-\frac{E_1}{2} \right) &= \frac{-\frac{E_1}{2} - \left(-\frac{E_2}{2} \right)}{-\frac{D_1}{2} - \left(-\frac{D_2}{2} \right)} \left[x - \left(-\frac{D_1}{2} \right) \right] \\
y + \frac{E_1}{2} &= \frac{-\frac{E_1}{2} + \frac{E_2}{2}}{-\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2}} \left(x + \frac{D_1}{2} \right) \\
\frac{2y + E_1}{2} &= \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} \left(\frac{2x + D_1}{2} \right) \\
2y + E_1 &= \frac{-E_1 + E_2}{-D_1 + D_2} (2x + D_1) \\
(2y + E_1)(-D_1 + D_2) &= (-E_1 + E_2)(2x + D_1) \\
-2D_1y - 2D_2y - D_1E_1 + D_2E_1 &= 2E_1x - D_1E_1 + 2E_2x + D_1E_2 \\
2E_1x - 2E_2x - 2D_1y - 2D_2y + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0 \\
2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Reorganizando a equação (54), tem-se:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{D_1 + kD_2}{k+1} \right)x + \left(\frac{E_1 + kE_2}{k+1} \right)y = -\frac{F_1 + kF_2}{k+1},$$

a qual, pelo **TEOREMA 4.8**, tem seu centro no ponto $\left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(k+1)}, -\frac{E_1 + kE_2}{2(k+1)} \right)$ então basta

analisar se as coordenadas satisfazem a relação (52). De fato,

$$\begin{aligned}
2(E_1 - E_2) \left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(k+1)} \right) - 2(D_1 - D_2) \left(-\frac{E_1 + kE_2}{2(k+1)} \right) + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0 \\
(E_1 - E_2) \left(-\frac{D_1 + kD_2}{k+1} \right) - (D_1 - D_2) \left(-\frac{E_1 + kE_2}{k+1} \right) &= D_1E_2 - D_2E_1 \\
(E_1 - E_2)(-D_1 - kD_2) - (D_1 - D_2)(-E_1 - kE_2) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
-D_1E_1 - kD_2E_1 + D_1E_2 + kD_2E_2 - (-D_1E_1 - kD_1E_2 + D_2E_1 + kD_2E_2) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
-D_1E_1 - kD_2E_1 + D_1E_2 + kD_2E_2 - D_1E_1 + kD_1E_2 - D_2E_1 - kD_2E_2 &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
-kD_2E_1 + D_1E_2 + kD_1E_2 - D_2E_1 &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
k(D_1E_2 - D_2E_1) + (D_1E_2 - D_2E_1) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) \\
(D_1E_2 - D_2E_1)(k+1) &= (D_1E_2 - D_2E_1)(k+1).
\end{aligned}$$

Portanto, todas as circunferências da família (50) têm uma reta dos centros comum com C_1 e C_2 .

Para esse contexto, compreende-se como família um conjunto de curvas com características comuns. No caso de uma circunferência, que para ser única deve satisfazer três condições, quando satisfaz duas condições abre similaridade com outras circunferências, tendo assim sua família.

Lehmann (1982, pp. 97-98), a partir dessas análises sobre família de circunferências, apresenta o seguinte teorema.

TEOREMA 4.16: Sendo as equações de quaisquer duas circunferências distintas, C_1 e C_2 , dadas por:

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

então a equação

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

representa uma família de circunferências todas elas tendo uma reta dos centros comum com C_1 e C_2 .

- Se C_1 e C_2 são circunferências secantes então para todos os valores de k , $k \neq -1$, a equação representa todas as circunferências que passam pelos dois pontos de interseção de C_1 e C_2 , com a única exceção da própria circunferência C_2 .
- Se C_1 e C_2 são circunferências mutuamente tangentes então para todos os valores de k , $k \neq -1$, a equação representa todas as circunferências que são tangentes tanto à C_1 quanto à C_2 em seu ponto comum, com a única exceção da própria C_2 .

Se C_1 e C_2 são circunferências externas, a equação representa uma circunferência para cada valor de k , $k \neq -1$, e tal que a equação resultante tem coeficientes satisfazendo as condições especificadas no **TEOREMA 4.8**. Não há duas circunferências da família tendo um ponto comum entre si ou com as circunferências C_1 e C_2 .

Até agora, o estudo da circunferência foi abordado detalhadamente, respeitando suas condições de existência e propriedades fundamentais. No entanto, para proporcionar um conhecimento mais completo e aprofundado ao estudante de Geometria Analítica, é imprescindível continuar explorando outras características e aspectos relevantes dessa figura geométrica. Essas informações adicionais devem ser apresentadas de maneira sequencial e lógica, facilitando a compreensão e assimilação dos conceitos por parte dos alunos, além de integrá-los de forma coerente ao conteúdo previamente estudado.

4.6 EIXO RADICAL

O estudo do eixo radical das circunferências é fundamental na Geometria Analítica devido às suas diversas aplicações em problemas geométricos e algébricos. O eixo radical, definido como o locus dos pontos que possuem potências iguais em relação a duas circunferências distintas, possui propriedades notáveis que facilitam a resolução de problemas complexos.

Primeiramente, o eixo radical é uma ferramenta crucial para determinar a posição relativa entre duas circunferências, fornecendo um método rigoroso para identificar se elas são tangentes, secantes ou não se interceptam. Essa análise é essencial em diversas áreas da matemática, incluindo a teoria das cônicas e a geometria do espaço. Além disso, o conceito de eixo radical tem aplicações práticas significativas em áreas como a física e a engenharia. Por exemplo, em problemas de localização e navegação, a utilização do eixo radical pode simplificar a determinação de pontos equidistantes a duas fontes de sinal, como em sistemas de posicionamento global (GPS). Outra aplicação relevante é encontrada na solução de problemas de potência de um ponto em relação a circunferências. O eixo radical facilita a determinação de tangentes comuns a duas circunferências, o que é frequentemente necessário em construções geométricas e otimização de trajetórias.

A compreensão do eixo radical também se estende a áreas mais avançadas da matemática, como a geometria diferencial e a topologia. Em particular, no estudo das superfícies e dos espaços métricos, o eixo radical oferece uma base para a generalização de conceitos e a exploração de novas propriedades geométricas.

Com o conceito de famílias de circunferências, o estudante teve como definição de duas circunferências distintas dadas, C_1 e C_2 , as equações (50) e (51). Destas equações, formou-se a equação (52), após uma reorganização algébrica, representando uma família de circunferências para todos os valores de $k \neq -1$. Porém, apresentou uma observação para $k = -1$, a qual se pretende apresentar uma discussão nesse momento.

Assumindo o valor de $k = -1$, a equação (52) toma a seguinte forma:

$$(-1 + 1)x^2 + (-1 + 1)y^2 + [D_1 + (-1)D_2]x + [E_1 + (-1)E_2]y + F_1 + (-1)F_2 = 0$$

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \quad (55)$$

Pela equação (53), não sendo as circunferências C_1 e C_2 concêntricas, então tem-se $D_1 \neq D_2$ ou $E_1 \neq E_2$ ou ambas as condições, de maneira a sempre ter pelo menos um dos

coeficientes, x e y , presentes. Com isso, essa equação representa uma reta denominada *eixo radical* de C_1 e C_2 .

Assim, tomando como base o **TEOREMA 4.16**, tem-se a seguinte análise:

- Se C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos distintos, então o eixo radical passa por esses dois pontos e, assim, coincide com sua corda comum.
- Se C_1 e C_2 são mutuamente tangentes, então seu eixo radical é tangente a ambas as circunferências em seu ponto comum.
- Se C_1 e C_2 não têm ponto em comum e não são concêntricas, então seu eixo radical não tem ponto em comum com qualquer uma das circunferências.

Com esses conceitos, passa-se a analisar a posição entre o eixo radical e a reta dos centros. No estudo de famílias de circunferências, a equação (52) representa a equação da reta dos centros de duas circunferências distintas, tomadas por C_1 e C_2 . Analisando sua declividade, tem-se:

$$\begin{aligned} 2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 &= 0 \\ 2(D_1 - D_2)y &= 2(E_1 - E_2)x + D_2E_1 - D_1E_2 \\ y &= \frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}x + \frac{D_2E_1 - D_1E_2}{2(D_1 - D_2)}. \end{aligned}$$

Logo, a declividade da reta dos centros de C_1 e C_2 é dada por $\frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}$, com $D_1 \neq$

D_2 .

E para a declividade do eixo radical, analisa-se a equação (53) que representa o eixo radical de duas circunferências quaisquer, tomadas por C_1 e C_2 . Assim,

$$\begin{aligned} (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 &= 0 \\ (E_1 - E_2)y &= -(D_1 - D_2)x - (F_1 - F_2) \\ y &= -\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}x - \frac{F_1 - F_2}{E_1 - E_2}. \end{aligned}$$

Logo, a declividade do eixo radical é dada por $-\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}$, para $E_1 \neq E_2$.

Analisando o produto da declividade da reta dos centros e do eixo radical de duas circunferências quais C_1 e C_2 , tem-se:

$$\frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2} \cdot \left(-\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2} \right) = -1.$$

Portanto, pelo **COROLÁRIO 3.23**, conclui-se que o eixo radical de quaisquer duas circunferências é *perpendicular* à sua reta dos centros.

Para melhor elucidar os conceitos apresentados, segue um exemplo.

EXEMPLO 4.17: Determinar a equação do eixo radical das circunferências $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ e $4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$ e mostrar que é perpendicular à sua reta dos centros.

Solução: Vamos tomar por:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$$

$$C_2: 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$$

Então, aplicando a resolução por sistemas, tem-se:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0 \end{cases}$$

Fazendo a multiplicação da equação de C_1 por 4, apresenta-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 8x - 40y + 40 = 0 & \text{(I)} \\ 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre (I) e (II), tem-se a equação:

$$-24x + 28y - 3 = 0$$

$$l: 24x - 28y + 3 = 0,$$

que é a equação do eixo radical.

E analisando a declividade:

$$24x - 28y + 3 = 0$$

$$28y = 24x + 3$$

$$y = \frac{24}{28}x + \frac{3}{28}.$$

Logo, a declividade do eixo radical é dada por $\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$.

Analisando os centros das circunferências C_1 e C_2 , tem-se:

- Para C_1 :

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y = -10$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) = -10 + 1 + 25$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 16$$

Logo, o centro de C_1 é no ponto $(1, 5)$.

- Para C_2 :

$$4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$$

$$(4x^2 - 32x + 64) + (4y^2 - 12y + 9) = -37 + 64 + 9$$

$$4\left(x^2 - 8x + 16\right) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = 36$$

$$(x-4)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$$

Logo, o centro de C_2 é no ponto $\left(4, \frac{3}{2}\right)$.

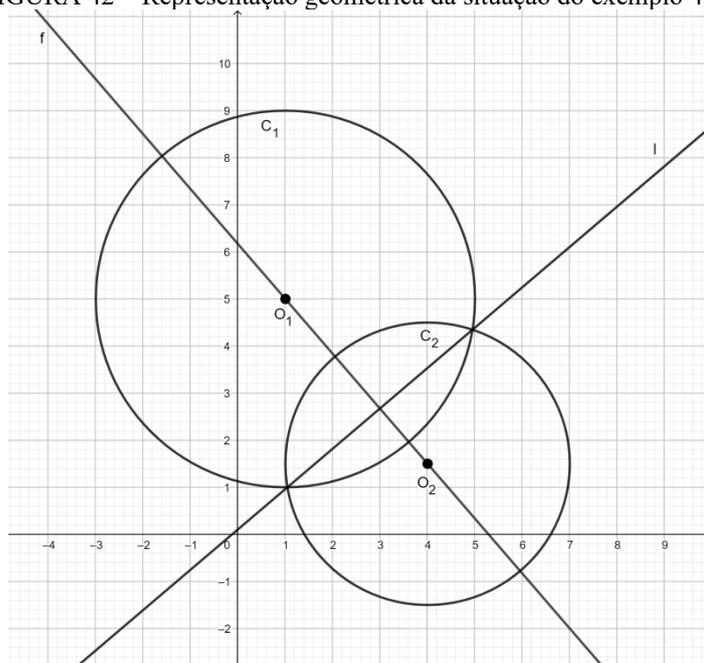
Assim, a declividade de sua reta dos centros é dada por:

$$\frac{\frac{3}{2} - 5}{4 - 1} = \frac{-\frac{7}{2}}{3} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}.$$

Assim, ao analisar o produto da declividade do eixo radical e da reta dos centros, tem-se $\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = -1$, o que faz o eixo radical é perpendicular à reta dos centros.

As circunferências C_1 e C_2 , sua reta dos centros e seu eixo radical l podem ser representadas graficamente, conforme mostra a FIGURA 42.

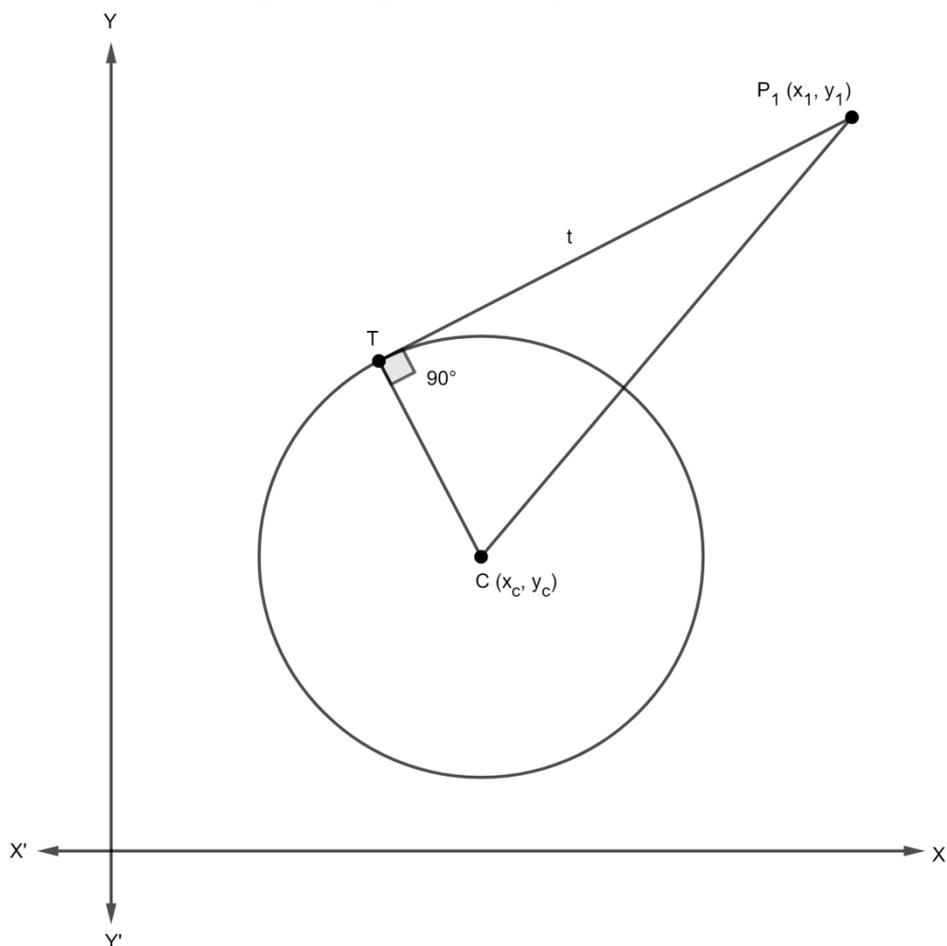
FIGURA 42 – Representação geométrica da situação do exemplo 4.17



FONTE: Pesquisadora.

Com objetivo de deduzir uma importante propriedade do eixo radical, toma-se por T o ponto de tangência de modo que $t = \overline{P_1T}$, conforme FIGURA 43. Sendo $\overline{P_1T}$ tangente à circunferência de centro $C(x_C, y_C)$, então o raio $r = \overline{CT}$ é perpendicular a $\overline{P_1T}$.

FIGURA 43 – Segmento tangente desde um ponto externo à circunferência



FONTE: Lehmann (1982, p. 100)

Sendo o triângulo P_1TC retângulo, então aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\begin{aligned} (\overline{CP_1})^2 &= t^2 + r^2 \\ t^2 &= (\overline{CP_1})^2 - r^2 \end{aligned} \quad (56)$$

Pelo **TEOREMA 3.14**, tem-se que:

$$(\overline{CP_1})^2 = (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 \quad (57)$$

Substituindo a equação (57) na equação (56), tem-se:

$$\begin{aligned} t^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2 \\ t &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2}. \end{aligned}$$

Com os conceitos apresentados, compreende-se melhor o seguinte teorema, apresentado por Lehmann (1982, p. 100),

TEOREMA 4.18: Se t é o comprimento do segmento de tangente traçada desde um ponto externo dado $P_1(x_1, y_1)$ a uma circunferência dada $(x - x_C)^2 - (y - y_C)^2 = r^2$, então

$$t = \sqrt{(x_1 - x_C)^2 - (y_1 - y_C)^2 - r^2}.$$

Uma observação que se faz do **TEOREMA 4.18** é que se tem conhecimento que por $P_1(x_1, y_1)$ podem ser traçadas duas tangentes à circunferência, porém deve ser deixado claro aos estudantes que essas tangentes possuem a mesma medida de comprimento e que, portanto, o resultado final não será modificado.

Segue um exemplo para clarificar o teorema apresentado.

EXEMPLO 4.19: Determinar o comprimento do segmento de tangente traçada desde o ponto $(3, 4)$ à circunferência $3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$.

Solução: Organizando a equação da circunferência, vem:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + \frac{4}{3}y - \frac{35}{3} &= 0. \end{aligned}$$

Pelo **TEOREMA 4.18**, tem-se:

$$t^2 = x^2 + y^2 + 4x + \frac{4}{3}y - \frac{35}{3}.$$

Logo, substituindo o ponto $(3, 4)$ para encontrar o valor do comprimento de tangente desejado, tem-se:

$$t^2 = 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 4 - \frac{35}{3}$$

$$t^2 = 9 + 16 + 12 + \frac{16}{3} - \frac{35}{3}$$

$$t^2 = \frac{92}{3}$$

$$t = \frac{2}{3}\sqrt{69}$$

Portanto, o comprimento da tangente é $\frac{2}{3}\sqrt{69}$ u.c.

Com base no **TEOREMA 4.18**, Lehmann (1982, p. 101) afirma que pode ser demonstrado que “o eixo radical de duas circunferências não concêntricas é o lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que os comprimentos dos segmentos de tangentes traçadas desde ele até às duas circunferências são iguais¹⁷”.

Para analisar esse fato, tomam-se como equação de duas circunferências não concêntricas, C_1 e C_2 , conforme as relações (50) e (51):

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

E tomando por $P(x, y)$ o ponto móvel e por t_1 e t_2 os comprimentos das tangentes traçadas desde P até C_1 e C_2 , respectivamente, então pelo **TEOREMA 4.18** tem-se:

$$t_1^2 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 \quad \text{e} \quad t_2^2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$$

Por hipótese, os comprimentos dos segmentos de tangentes traçadas são iguais, ou seja,

$$t_1^2 = t_2^2$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$$

$$D_1x - D_2x + E_1y - E_2y + F_1 - F_2 = 0$$

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

o que chega a equação (53), a equação do eixo radical.

Inversamente, pode ser estudado a mostrar que se um ponto $P_1(x_1, y_1)$ é um ponto que se encontra no eixo radical, então os comprimentos dos segmentos das tangentes traçadas desde P_1 a C_1 e C_2 são iguais.

Esses resultados, por Lehmann (1982, p. 101), geram o seguinte teorema:

TEOREMA 4.20: Se as equações de duas circunferências não concêntricas C_1 e C_2 são

$$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

então a eliminação de x^2 e y^2 entre essas duas equações gera a equação linear

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$$

denominada equação do eixo radical de C_1 e C_2 .

Assim:

¹⁷ Grifo do próprio autor.

Se C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos distintos, seu eixo radical é coincidente com sua secante comum;

Se C_1 e C_2 são tangentes mutuamente, seu eixo radical é sua tangente comum;

Se C_1 e C_2 não tem pontos em comum, seu eixo radical não tem ponto em comum com nenhuma delas.

O eixo radical de C_1 e C_2 é perpendicular à sua reta dos centros; é também o lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que os comprimentos dos segmentos das tangentes traçadas desde o mesmo a C_1 e C_2 são iguais.

Estudar a interação entre múltiplas circunferências revela propriedades geométricas interessantes. Considerando três circunferências, onde pelo menos duas delas não são concêntricas, cada par de circunferências possui um eixo radical. No caso de três circunferências, analisadas em pares, surgem três eixos radicais distintos. Se estas três circunferências não compartilham uma linha de centros comum, então os três eixos radicais convergem em um ponto único conhecido como o *centro radical*. Este ponto de interseção é uma característica importante na geometria das circunferências, pois define a relação espacial entre as três figuras.

4.7 PROBLEMAS SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS RELATIVOS À CIRCUNFERÊNCIA

Muitos são os teoremas ou as situações-problemas, comentadas como clássicas em Geometria, relacionadas a lugares geométricos relativos à circunferência. Acredita-se que com as definições apresentadas nesse capítulo, o estudante de Geometria Analítica seja capaz de analisar e resolver, ou encontrar argumentos plausíveis, para essas situações.

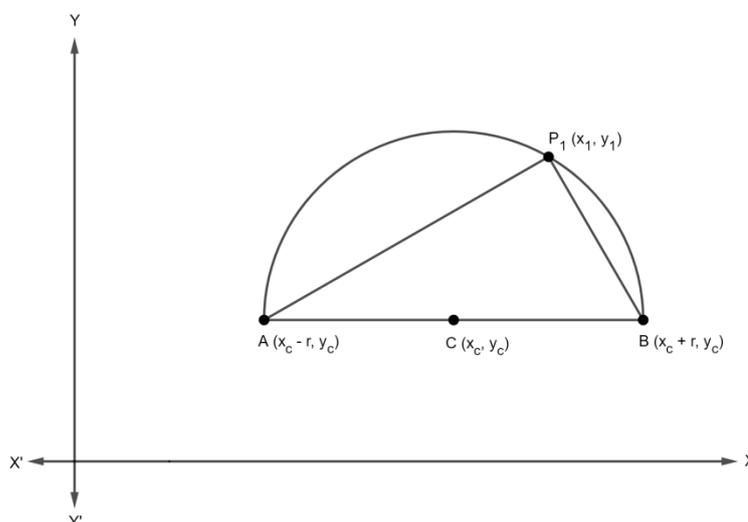
Apresentam-se alguns casos como exemplo:

EXEMPLO 4.21: Demonstrar analiticamente que qualquer ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.

Solução: Para o caso, toma-se como $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ a equação de uma circunferência qualquer, cujo centro é $C(x_C, y_C)$ e raio r .

Seja $P_1(x_1, y_1)$ qualquer ponto sobre a semicircunferência e sendo A e B os pontos extremos de seu diâmetro, então temos a situação apresentada na FIGURA 44.

FIGURA 44 – Representação da situação do exemplo 4.21



FONTE: A pesquisadora.

Seja $(x_c - r, y_c)$ e $(x_c + r, y_c)$ as coordenadas dos pontos A e B , respectivamente, quer-se mostrar que $\overline{P_1A}$ é perpendicular a $\overline{P_1B}$.

Tomando como m_1 e m_2 como as declividades de $\overline{P_1A}$ e $\overline{P_1B}$ respectivamente, então para encontrar a solução analítica da situação, basta mostrar um estudo sobre o produto das declividades, de modo que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Pelo **TEOREMA 3.19**, tem-se:

$$m_1 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - (x_c - r)} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - (x_c + r)}$$

$$m_1 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c + r} \quad m_2 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c - r}$$

Logo, o produto das declividades é dado por:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c + r} \cdot \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c - r}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{(y_1 - y_c)^2}{(x_1 - x_c)^2 - r^2} \quad (58)$$

Como $P_1(x_1, y_1)$ se encontra sobre a semicircunferência então ele satisfaz a equação da circunferência, de tal modo que:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 &= r^2 \\ -(y_1 - y_C)^2 &= (x_1 - x_C)^2 - r^2.\end{aligned}\tag{59}$$

Substituindo a equação (59) na equação (58), tem-se:

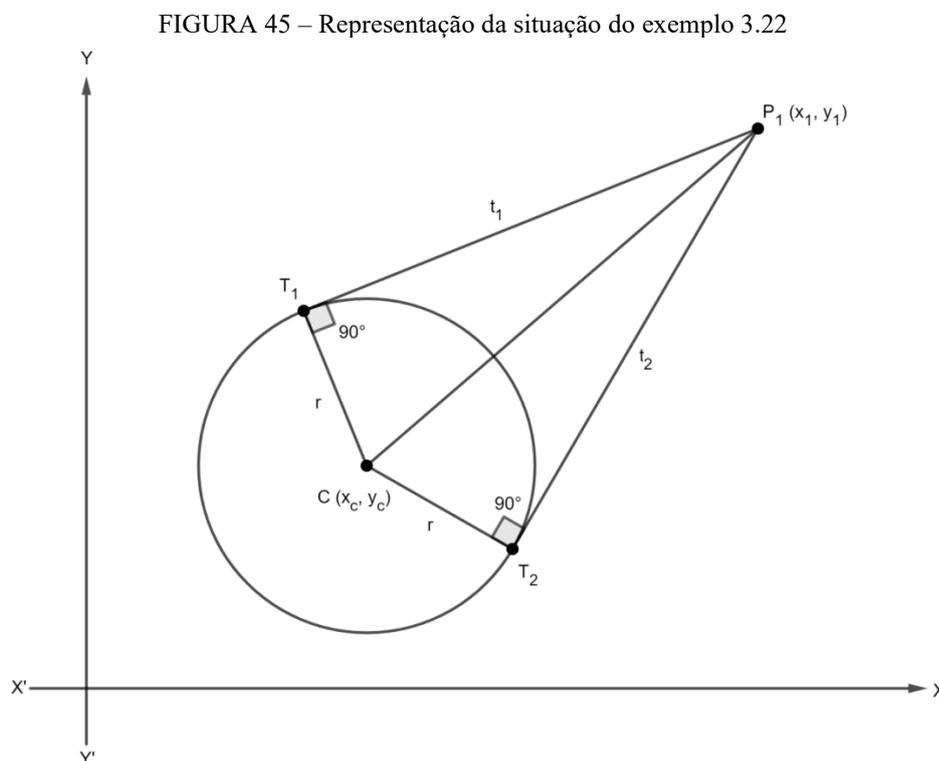
$$\begin{aligned}m_1 \cdot m_2 &= \frac{(y_1 - y_C)^2}{-(y_1 - y_C)^2} \\ m_1 \cdot m_2 &= -1\end{aligned}$$

Portanto, qualquer ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.

EXEMPLO 4.22: Os dois segmentos de tangente traçadas a uma circunferência desde um ponto externo são de mesmo comprimento.

Solução: Para o caso, toma-se como $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ a equação de uma circunferência qualquer, cujo centro é $C(x_C, y_C)$ e raio r . E sejam T_1 e T_2 os pontos de tangência dos segmentos t_1 e t_2 , respectivamente, que partem de $P_1(x_1, y_1)$, que é ponto externo a circunferência.

Por hipótese, $\overline{P_1T_1}$ tangente à circunferência, então $\overline{P_1T_1} \perp \overline{CT_1}$. De modo análogo, sendo $\overline{P_1T_2}$ tangente à circunferência, então $\overline{P_1T_2} \perp \overline{CT_2}$. A situação é representada na FIGURA 45.



FONTE: A pesquisadora.

Quer-se mostrar que $t_1 \equiv t_2$. E para isso, pelo **TEOREMA 3.14**, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{P_1C} &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2} \\ (\overline{P_1C})^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2. \end{aligned}$$

Como o triângulo P_1CT_1 é retângulo, aplicando o teorema de Pitágoras tem-se:

$$\begin{aligned} (\overline{P_1C})^2 &= r^2 + t_1^2 \\ (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 &= r^2 + t_1^2 \\ t_1^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2 \\ t_1 &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2} \end{aligned}$$

E de modo análogo para o triângulo P_1CT_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} (\overline{P_1C})^2 &= r^2 + t_2^2 \\ (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 &= r^2 + t_2^2 \\ t_2^2 &= (x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2 \\ t_2 &= \sqrt{(x_1 - x_C)^2 + (y_1 - y_C)^2 - r^2} \end{aligned}$$

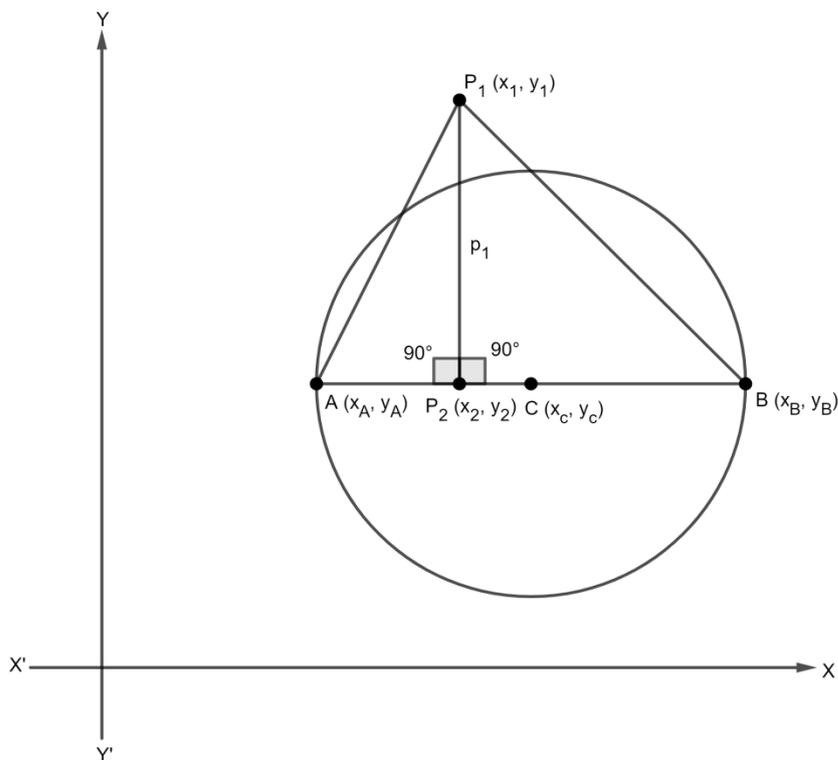
Comparando os comprimentos das tangentes à circunferência, traçadas a partir do ponto $P_1(x_1, y_1)$, tem-se que $t_1 \equiv t_2$.

EXEMPLO 4.23: Mostre que se for traçada desde um ponto qualquer sobre uma circunferência uma perpendicular a um diâmetro, o comprimento da perpendicular é média proporcional entre os comprimentos dos segmentos em que ela divide o diâmetro.

Solução: Para o caso, toma-se como $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ a equação de uma circunferência qualquer, cujo centro é $C(x_C, y_C)$, raio r e um diâmetro com os pontos A e B como extremos.

Seja $P_1(x_1, y_1)$ um ponto qualquer de onde parte um segmento perpendicular com o diâmetro da circunferência até P_2 e tomando por p_1 o comprimento desse segmento, representado na FIGURA 46.

FIGURA 46 – Representação da situação do exemplo 4.23



FONTE: A pesquisadora.

Observa-se que os triângulos AP_2P_1 e P_2P_1B são retângulos e com um dos lados em comum, então há uma proporcionalidade entre seus lados, ou seja, entre as distâncias entre os pontos de tal forma que:

$$\frac{d_{AP_2}}{d_{P_1P_2}} = \frac{d_{P_1P_2}}{d_{BP_2}}$$

$$\frac{\sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2}}$$

$$\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 = \sqrt{(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2} \cdot \sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \sqrt{\left[(x_A - x_2)^2 + (y_A - y_2)^2\right] \cdot \left[(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2\right]}$$

$$p_1 = \sqrt{d_{AP_2} \cdot d_{BP_2}}$$

Logo, o comprimento da perpendicular é média proporcional entre os comprimentos dos segmentos em que ela divide o diâmetro.

Dessa forma, após a exposição detalhada de todos esses conceitos e definições, acredita-se que os estudantes de Geometria Analítica estarão devidamente preparados para compreender o tópico de transformação de coordenadas.

Este entendimento é importante, pois a transformação de coordenadas é uma ferramenta fundamental que facilita a análise e manipulação de diversas curvas e figuras geométricas. A habilidade de transformar coordenadas permite aos estudantes simplificar problemas complexos, visualizar figuras em diferentes sistemas de referência e aplicar técnicas analíticas com maior eficácia.

Esse conhecimento servirá como base essencial para a exploração e compreensão das próximas curvas que serão abordadas, fornecendo um alicerce sólido para seguir a estudos geométricos mais avançados e complexos.

5 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A compreensão profunda das curvas na Geometria Analítica transcende a mera manipulação de equações algébricas; ela demanda uma apreciação visual e intuitiva das formas geométricas subjacentes. Nesse contexto, as transformações de coordenadas emergem como uma ferramenta fundamental, proporcionando uma ponte crucial entre a representação gráfica e a formulação algébrica das curvas. Assim, este estudo objetiva explorar a importância vital dessas transformações no estudo das curvas, destacando sua capacidade de fornecer insights geométricos profundos.

Inspirado pelas ideias de Vygotsky, que enfatizou a importância do desenvolvimento cognitivo por meio da interação entre o aprendiz e o ambiente, busca não apenas apresentar a curva geometricamente, mas também ilustrar como as transformações de coordenadas facilitam uma compreensão mais rica e conectada. Ao traçar um caminho que vai além da abstração algébrica, este estudo visa proporcionar aos estudantes uma experiência de aprendizado mais integrada, estimulando a construção ativa de conhecimento sobre as curvas na geometria analítica.

A Geometria Analítica tem como objetivo descrever curvas geométricas utilizando sistema de coordenadas, determinando as propriedades existentes em cada uma dessas curvas. Entretanto, à medida que o estudo progride, outros conceitos devem ser introduzidos para que o objetivo seja alcançado de uma forma compreensível.

De acordo com Lehmann (1982, p. 113),

DEFINIÇÃO 5.1: Uma *transformação* é uma operação por meio da qual uma relação, expressão ou figura é mudada em outra de acordo com uma dada lei. Analiticamente a lei dada é expressa por uma ou mais equações denominadas *equações de transformação*¹⁸.

A transformação de coordenadas traz o sentido de simplificar as equações das curvas para um melhor entendimento.

Considerando uma circunferência de raio r e centro $C(x_C, y_C)$, expressa pela equação (36),

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2,$$

¹⁸ Destaque do próprio autor.

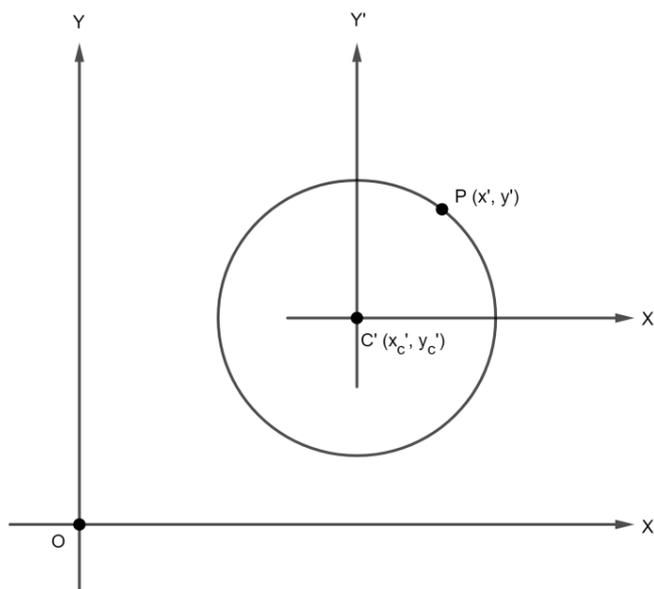
essa equação é transformada quando o seu centro muda de posição, por exemplo, centro na origem, em que $C(0, 0)$, tendo assim a equação ditar estar na forma canônica representada pela equação (37),

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Segundo Righetto (1982, p. 275), “quando conhecemos a equação [...] de uma curva em relação a um *sistema particular de coordenadas*, podemos obter a equação da mesma curva, referida a um *novo sistema de coordenadas*, mediante a transformação de coordenadas¹⁹”.

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente a uma circunferência com centro na origem C , em um plano coordenado, com os eixos denominados apenas por X e Y . Ao mover os eixos coordenados, de forma paralela a si mesmo, e coincidindo a origem com o centro $C'(x_c', y_c')$ da circunferência, denominados esses eixos apenas por X' e Y' , ocorre uma transformação de coordenadas desse ponto para $P'(x', y')$ quando referido aos novos eixos, apresentado na FIGURA 47.

FIGURA 47 – Translado dos eixos coordenados para o centro da circunferência



FONTE: Adaptado Lehmann (1982, p. 114).

Logo, a equação da circunferência é transformada, sendo dada por:

$$x'^2 + y'^2 = r'^2.$$

¹⁹ Destaque do próprio autor.

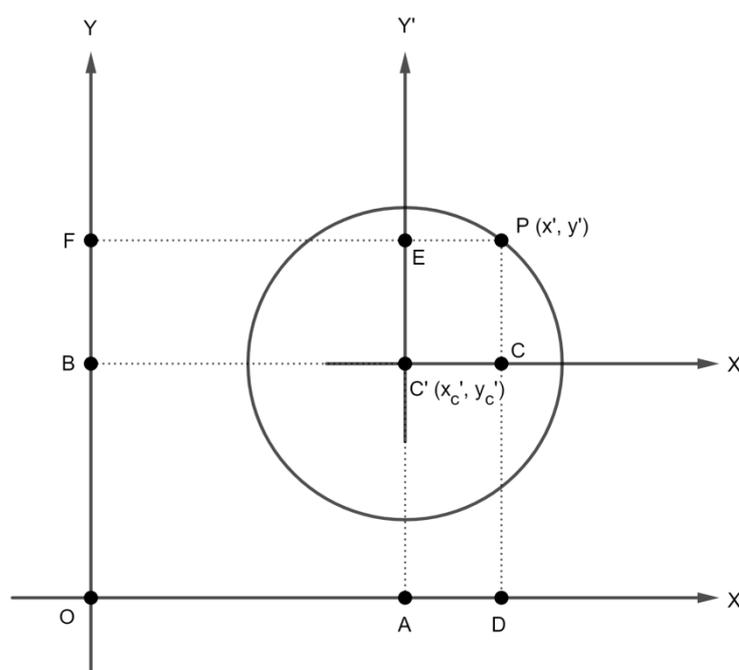
Com essa primeira ideia, sugere-se apresentar aos estudantes a translação dos eixos coordenados no estudo das curvas.

5.1 TRANSLAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS

A ação de mover os eixos coordenados paralelamente as suas posições no plano coordenado é denominada *translação dos eixos coordenados*. Segundo Righetto (1982, p. 275), “na translação dos eixos coordenados mudamos a origem e conservamos as direções e sentidos destes eixos”.

Analisando a afirmação de Righetto tendo a circunferência de centro $C'(x'_c, y'_c)$ e raio r , X e Y os eixos originais e X' e Y' os eixos transladados, no qual a nova origem coincide com o centro da circunferência, conforme FIGURA 48.

FIGURA 48 – Análise das coordenadas do ponto P com a translação dos eixos coordenados



FONTE: Adaptado Lehmann (1982, p. 115).

Se $P'(x', y')$ um ponto pertencente à circunferência em estudo, traça a partir dele segmentos de retas perpendiculares aos eixos coordenados, denominados por C e D as interseções com X' e X , respectivamente, e por E e F as intersecções com Y' e Y , respectivamente. E prolongando o eixo X' tem-se o ponto A como intersecção com X , e prolongando o eixo Y' tem-se o ponto B como a intersecção com Y .

Utilizando a relação fundamental do segmento retilíneo orientado, apresentado por , a análise da relação entre as coordenadas abscissas é dada por:

$$\begin{aligned}x &= \overline{OD} \\x &= \overline{OA} + \overline{AD} \\x &= \overline{OA} + \overline{C'C} \\x &= x_C' + x'.\end{aligned}$$

E, de maneira análoga, a relação entre as coordenadas ordenadas é dada por:

$$\begin{aligned}y &= \overline{OF} \\y &= \overline{OB} + \overline{BF} \\y &= \overline{OB} + \overline{C'E} \\y &= y_C' + y'.\end{aligned}$$

Essa análise das relações das variáveis tem como consequência o seguinte teorema, apresentado por Lehmann (1982, p. 114):

TEOREMA 5.2: Se os eixos coordenados são transladados para uma nova origem $C'(x_C', y_C')$ e se as coordenadas de qualquer ponto P antes e depois da translação são (x, y) e (x', y') , respectivamente, então as equações de transformação das antigas para as novas coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned}x &= x_C' + x' \\y &= y_C' + y'.\end{aligned}$$

Com esse teorema, se compreende a relação entre as variáveis conectadas aos eixos originais e as variáveis conectadas aos eixos transladados, tornando prático o seu uso para estudos envolvendo curvas em sistemas coordenados.

Para trazer mais sentido, apresentam-se exemplos da aplicabilidade a seguir.

EXEMPLO 5.3: Transformar a equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ dada por translação dos eixos coordenados para a nova origem $(-1, 3)$.

Solução: Sendo $(-1, 3)$ a nova origem, então pelo **TEOREMA 5.2** as equações de transformações são:

$$x = x' - 1 \quad \text{e} \quad y = y' + 3.$$

Substituindo as equações transformações na equação que se deseja transformar e organizando, vem:

$$\begin{aligned}(x' - 1)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 1) - 6(y' + 3) + 6 &= 0 \\x'^2 - 2x' + 1 + y'^2 + 6y' + 9 + 2x' - 2 - 6y' - 18 + 6 &= 0 \\x'^2 + y'^2 - 4 &= 0 \\x'^2 + y'^2 &= 4\end{aligned}$$

Portanto, a transformação da equação é $x'^2 + y'^2 = 4$.

EXEMPLO 5.4: Por uma translação de eixos coordenados, transformar a equação $4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 = 0$ em outra desprovida de termos do primeiro grau.

Solução: Organizando a equação em estudo pelo método de completar quadrado, vem:

$$\begin{aligned}4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 &= 0 \\4x^2 + 32x + 4y^2 - 4y &= -45 \\4(x^2 + 8x) + 4(y^2 - y) &= -45 \\4(x^2 + 8x + 16) + 4\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) &= -45 + 64 + 1 \\4(x + 4)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 20 \\(x + 4)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 5.\end{aligned}$$

Pelo **TEOREMA 5.2**, observando a equação resultando, tem-se que:

$$\begin{aligned}x + 4 &= x' \\x &= x' - 4\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}y - \frac{1}{2} &= y' \\y &= y' + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Substituindo esses valores na equação em estudo, tem-se:

$$\begin{aligned}(x' - 4 + 4)^2 + \left(y' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 &= 5 \\x'^2 + y'^2 &= 5\end{aligned}$$

Portanto, a transformação da equação é $x'^2 + y'^2 = 5$.

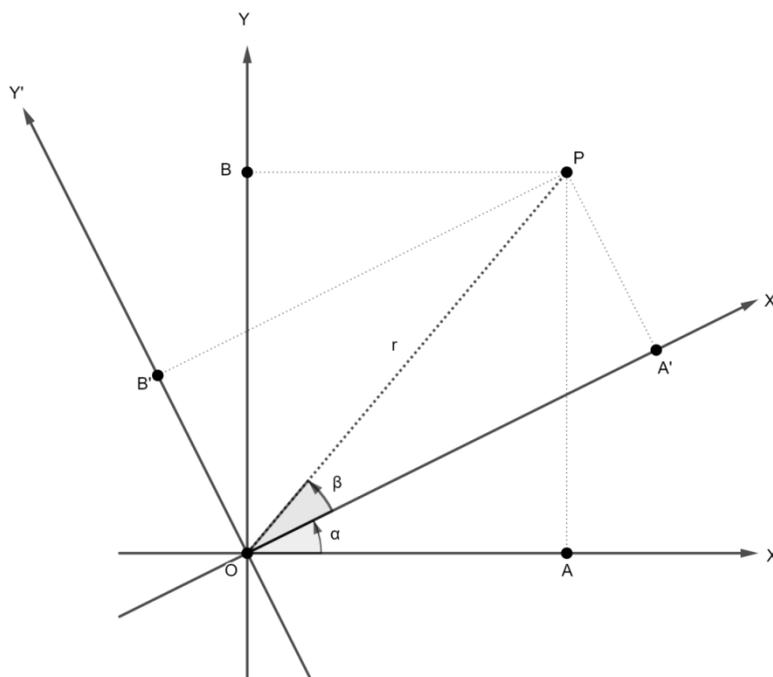
Familiarizados com o conceito de translação, apresenta-se aos estudantes o conceito de rotação dos eixos coordenados na sequência.

5.2 ROTAÇÃO DOS EIXOS COORDENADOS

No estudo de curvas em eixos coordenados observou a possibilidade de utilizar a translação de eixos para trazer mais sentido e facilidade na compreensão algébrica e analítica das curvas. Outro estudo apresentado pela Geometria Analítica é a rotação dos eixos coordenados com a mesma finalidade de simplificar as equações das curvas em um estudo. Porém, para essa análise o estudante precisa ter conhecimentos prévios da trigonometria, nesse caso, o conhecimento das relações trigonométricas de um triângulo retângulo.

Iniciando da ideia apresentada desde o início dessa pesquisa sobre eixos coordenados, denominados X e Y , e um ponto P de coordenadas (x, y) relacionadas a esses eixos. Rotacionando os eixos sobre a origem $O(0, 0)$, em um ângulo α , tem-se os novos eixos sobre a denominação de X' e Y' , conforme FIGURA 49, o ponto P terá novas coordenadas quando relacionado aos novos eixos.

FIGURA 49 – Rotação de eixos coordenados e posicionamento de um ponto p em relação a ambos os eixos



FONTE: Adaptado Lehmann (1982, p. 118).

Traçando perpendiculares a partir do ponto P em relação aos eixos X e Y , encontra os pontos de interseção A e B . De modo análogo aos eixos X' e Y' , se tem os pontos A' e B' .

Tomando como r o segmento linear \overline{OP} , observam-se as relações trigonométricas no triângulo AOP :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OA}}{r} \\ \overline{OA} &= r \cdot \cos(\alpha + \beta).\end{aligned}\tag{60}$$

E,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \\ \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{AP}}{r} \\ \overline{AP} &= r \cdot \sin(\alpha + \beta).\end{aligned}\tag{61}$$

Analisando as coordenadas do ponto P em relação aos eixos X e Y , vem:

$$x = \overline{OA}.\tag{62}$$

E,

$$y = \overline{OB} = \overline{AP}.\tag{63}$$

Substituindo (60) em (62) e (61) em (63), tem-se:

$$x = r \cdot \cos(\alpha + \beta)\tag{64}$$

E,

$$y = r \cdot \sin(\alpha + \beta)\tag{65}$$

Do mesmo modo, analisando as relações trigonométricas no triângulo $A'OP$, tem-se:

$$\begin{aligned}\cos(\beta) &= \frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}} \\ \cos(\beta) &= \frac{\overline{OA'}}{r} \\ \overline{OA'} &= r \cdot \cos(\beta).\end{aligned}\tag{66}$$

E,

$$\begin{aligned}\sin(\beta) &= \frac{\overline{A'P}}{\overline{OP}} \\ \sin(\beta) &= \frac{\overline{A'P}}{r} \\ \overline{A'P} &= r \cdot \sin(\beta).\end{aligned}\tag{67}$$

Analisando as coordenadas do ponto P em relação aos eixos X' e Y' , vem:

$$x' = \overline{OA'}.\tag{68}$$

E,

$$y' = \overline{OB'} = \overline{A'P}.\tag{69}$$

Substituindo (66) em (68), e (67) em (69), tem-se:

$$x' = r \cdot \cos(\beta)\tag{70}$$

E,

$$y' = r \cdot \sin(\beta)\tag{71}$$

Analisando a equação (64) pela soma de arcos em um cosseno, vem:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\ x &= r \cdot [\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)] \\ x &= r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}\tag{72}$$

Substituindo (70) e (71) em (72), tem-se:

$$x = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha).$$

E analisando a equação (65) pela soma de arcos em um seno, vem:

$$\begin{aligned}y &= r \cdot \sin(\alpha + \beta) \\ y &= r \cdot [\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)] \\ y &= r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + r \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{73}$$

Substituindo (70) e (71) em (73), tem-se:

$$y = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha).$$

Portanto, as novas coordenadas do ponto P em relação aos eixos rotacionados são dadas por:

$$x = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha) \quad \text{e} \quad y = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha).$$

Com essa análise, por Lehmann (1982, p. 118), deriva o seguinte teorema:

TEOREMA 5.5: Se os eixos coordenados são girados de um ângulo α em torno da sua origem O como ponto fixo e se as coordenadas de qualquer ponto P são (x, y) e (x', y') antes e depois da rotação, respectivamente, então as equações de transformações antigas para as novas coordenadas são dadas por

$$x = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha)$$

$$y = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha).$$

Para uma melhor compreensão, segue exemplos desse estudo.

EXEMPLO 5.6: Determinar as novas coordenadas do ponto $(3, -4)$ quando os eixos coordenados são rotacionados em um ângulo de 30° na origem.

Solução: Sendo $(3, -4)$ a coordenada do ponto em estudo, e então pelo **TEOREMA 5.5** tem-se:

$$3 = x' \cdot \cos(30^\circ) - y' \cdot \sin(30^\circ)$$

$$3 = x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \cdot \frac{1}{2}$$

$$6 = \sqrt{3}x' - y' \tag{74}$$

E,

$$-4 = x' \cdot \sin(30^\circ) + y' \cdot \cos(30^\circ)$$

$$-4 = x' \cdot \frac{1}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-8 = x' + \sqrt{3}y' \tag{75}$$

Resolvendo um sistema com as equações (74) e (75), vem:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x' - y' = 6 \\ x' + \sqrt{3}y' = -8 \end{cases}$$

Reorganizando as equações do sistema:

$$\begin{cases} 3x' - \sqrt{3}y' = 6\sqrt{3} \\ x' + \sqrt{3}y' = -8 \end{cases}$$

Somando as equações membro a membro, tem-se:

$$4x' = 6\sqrt{3} - 8$$

$$x' = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2$$

E substituindo o valor de x' em uma das equações sistema, tem-se:

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}y' = -8$$

$$\sqrt{3}y' = -8 - \frac{3}{2}\sqrt{3} + 2$$

$$\sqrt{3}y' = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - 6$$

$$y' = -\frac{3}{2} - \frac{6}{3}\sqrt{3}$$

$$y' = -2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$$

Portanto, as novas coordenadas do ponto é $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2, -2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$.

EXEMPLO 5.7: Transformar a equação $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ dada por rotação dos eixos coordenados do ângulo 45° .

Solução: Pelo **TEOREMA 5.5**, as equações de transformação são dadas por:

$$x = x' \cdot \cos(45^\circ) - y' \cdot \sin(45^\circ)$$

$$x = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

E,

$$y = x' \cdot \sin(45^\circ) + y' \cdot \cos(45^\circ)$$

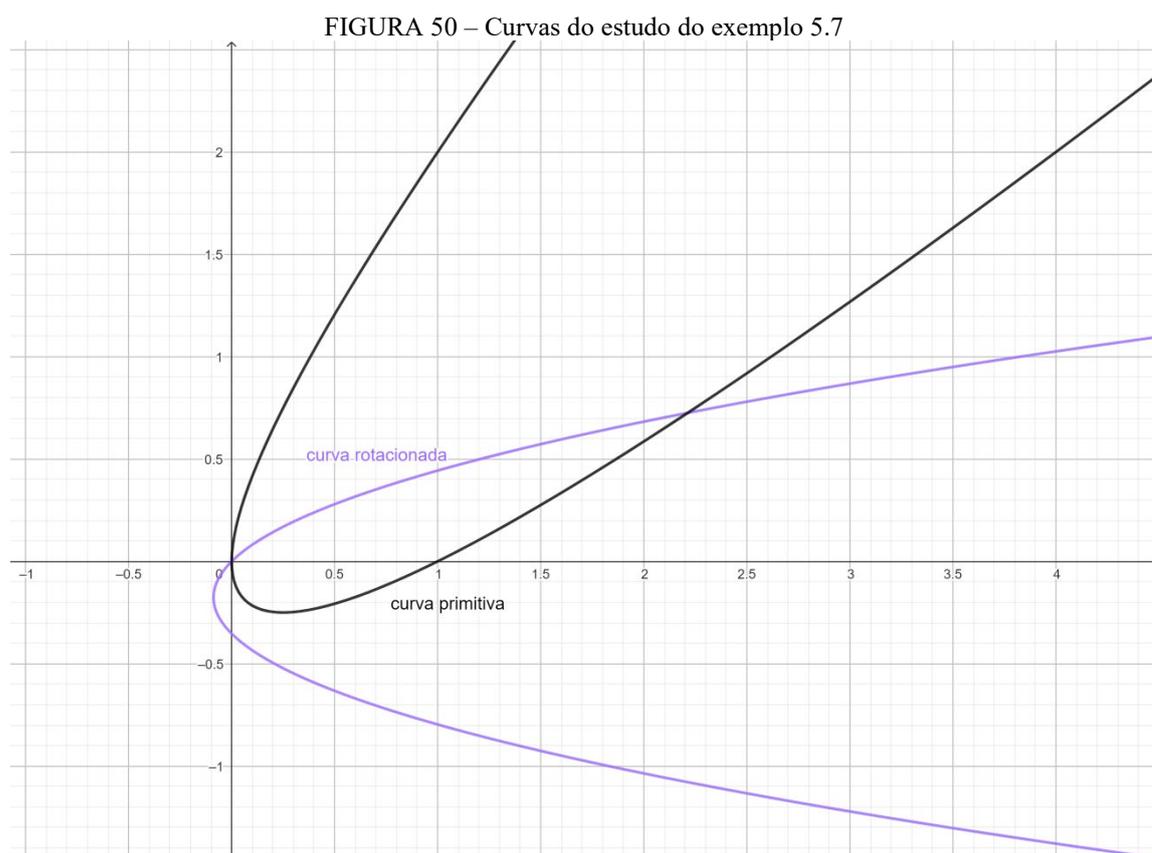
$$y = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Fazendo a substituição dos valores de x e y na equação que se deseja transformar, tem-se:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right]^2 - 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right] + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right]^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') &= 0 \\ \frac{1}{2}(x' - y')^2 - (x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') &= 0 \\ \frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 + \frac{y'^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' &= 0 \\ 2y'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' &= 0 \\ 4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' &= 0 \end{aligned}$$

A FIGURA 50 apresenta $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ como a curva primitiva, ou seja, a curva em análise antes da rotação, e apresenta $4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$ como a curva rotacionada em relação a origem.



FONTE: A pesquisadora.

As curvas em questão, conhecidas pelos estudantes como parábolas, são de grande importância no campo da Geometria Analítica. Com os estudos até agora apresentados nesta pesquisa, foi estabelecida uma base sólida que permitirá aos estudantes iniciar a exploração detalhada dessas curvas.

A compreensão dos conceitos fundamentais, como equações quadráticas e suas transformações, possibilita uma análise mais profunda das propriedades das parábolas. Este alicerce teórico prepara os estudantes para investigar as características específicas das parábolas, incluindo seus vértices, focos, diretrizes e a forma como essas curvas se comportam sob diferentes transformações de coordenadas. Além disso, essa base facilita a aplicação de técnicas analíticas para resolver problemas práticos envolvendo parábolas, promovendo uma compreensão mais abrangente e robusta das curvas que são essenciais em diversas áreas da matemática e suas aplicações práticas.

6 AS CÔNICAS

*“In addition to the straight lines, circles, planes and spheres with which every student of Euclid is familiar, the Greeks knew the properties of the curves given by cutting a cone with a plane—the ellipse, parabola and hyperbola. Kepler discovered by analysis of astronomical observations, and Newton proved mathematically on the basis of the inverse square law of gravitational attraction, that the planets move in ellipses. The geometry of ancient Greece thus became the cornerstone of modern astronomy.”²⁰
J. L. Synge (Synge 2, p.32, apud Coxeter, p. 115)*

Pesquisadores como Coxeter (p. 115) e Bicudo – introdução da tradução da obra *Os Elementos* de Euclides – (EUCLIDES, 2009, p. 43) comentam, no contexto histórico da Geometria Analítica, sobre a importância dos matemáticos gregos para a Geometria como os estudos de Apolônio, o qual formalizou oito livros sobre cônicas a fim de completar os livros de Euclides sobre o assunto.

Inserir a História da Matemática para o estudo gera não apenas um conhecimento histórico, mas também um sentido no conhecimento, de como foi desenvolvido e quais os motivos da época levaram aos estudos.

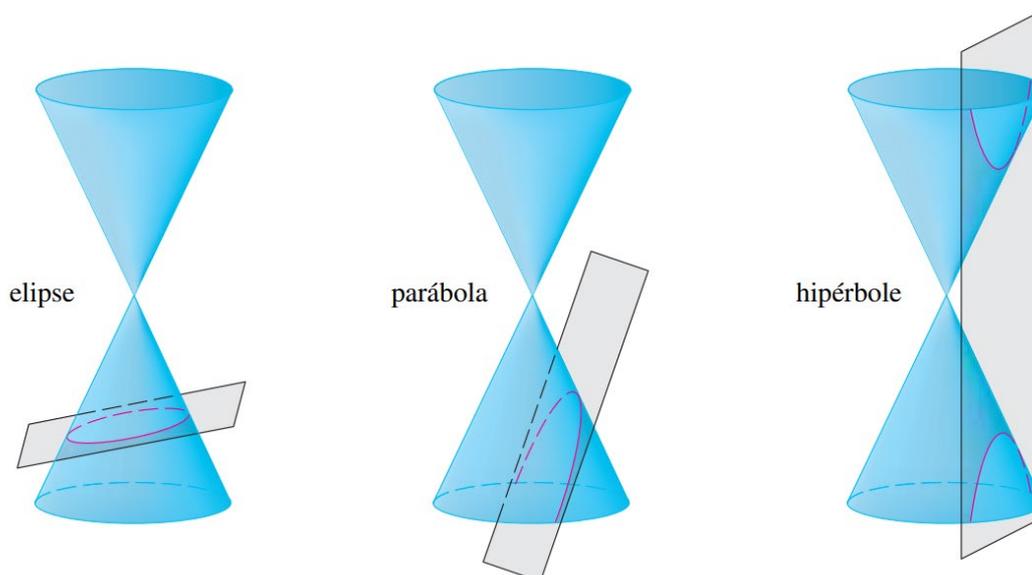
“A História da Matemática motiva e estimula a participação dos alunos no processo educativo, enriquece o desenvolvimento das aulas, esclarece dúvidas e questionamentos, demonstra a evolução dos conceitos e das ideias matemáticas ao longo do tempo, deixando claro que esta ciência está em constante evolução, em permanente transformação, rompendo assim com as ideias de alguns professores e alunos que concebem a Matemática como um saber estático, hermético, composto de conhecimentos inquestionáveis e imutáveis.” (PAIVA, 2018, p. 98)

Nesse sentido, tem importância que o estudante de Geometria Analítica saiba que no estudo das curvas há algumas que foram analisadas a partir da intersecção de um plano, por angulações diferentes, em um cone, conforme FIGURA 51. Essas interseções deram origem a três curvas denominadas secções cônicas, ou simplesmente cônicas, sendo elas definidas por suas características como parábola, elipse e hipérbole.

Apresentar a imagem das secções cônicas anterior ao cálculo é alimentar o campo do pensamento algébrico antes da formalização pelos cálculos.

²⁰ “Além das linhas retas, círculos, planos e esferas com os quais todos os estudantes de Euclides estão familiarizados, os gregos conheciam as propriedades das curvas dadas ao cortar um cone com um plano - a elipse, a parábola e a hipérbole. Kepler descobriu pela análise de observações astronômicas, e Newton provou matematicamente com base na lei do inverso do quadrado da atração gravitacional, que os planetas se movem em elipses. A geometria da Grécia antiga tornou-se assim a pedra angular da astronomia moderna.”

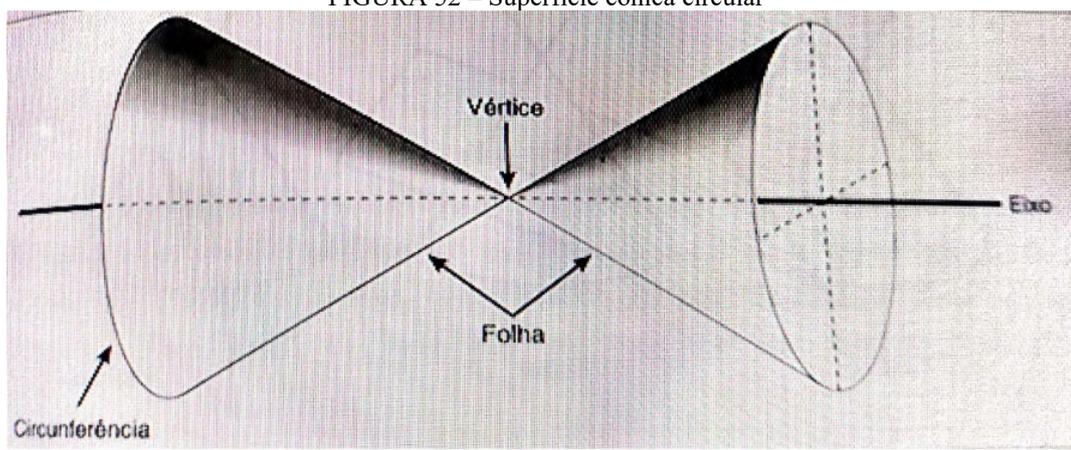
FIGURA 51 – Secções cônicas



FONTE: Stewart (2013, p. 606).

Para dar sentido, Boulos & Camargo (1997, p. 167) descrevem a obtenção dessas curvas pela intersecção de um plano com a superfície cônica circular reta, apresentada na FIGURA 52. Assim, inicialmente, apresenta-se a imagem da superfície cônica circular para a compreensão do assunto a ser estudado, ou seja, da constituição das curvas por planos interseccionadores a essa superfície.

FIGURA 52 – Superfície cônica circular



FONTE: Boulos & Camargo (1997, p. 167)

Seguindo para a formalização, se denominar por S a superfície cônica e por α o plano interseccionador, e tendo como geratriz da superfície cônica S a reta que passa pelo vértice V , então há três situações de análise quando α não passa pelo vértice V :

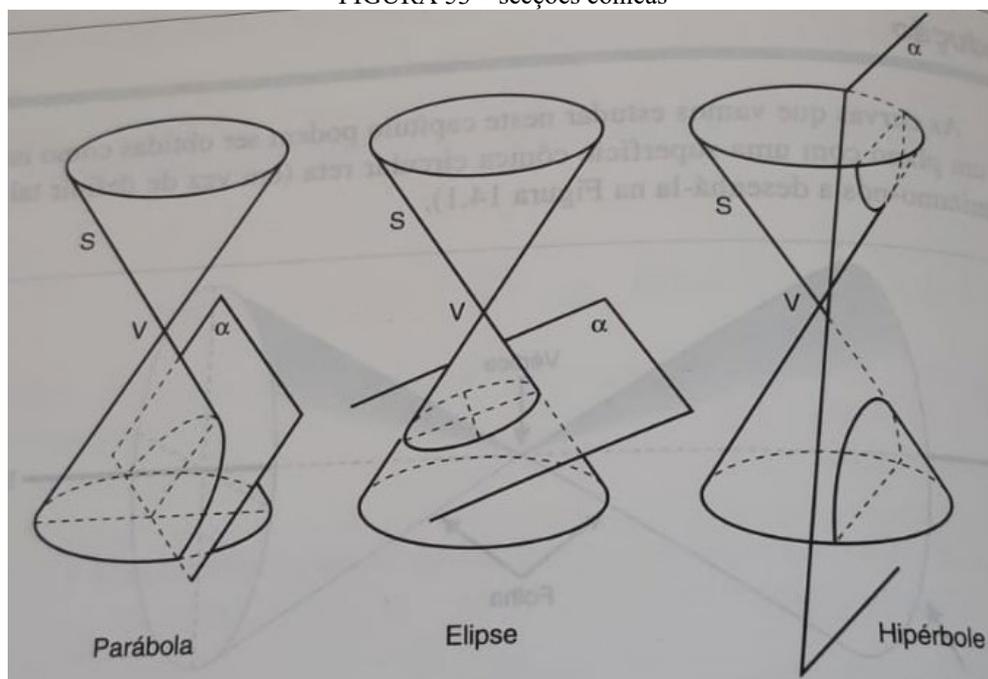
1.^a situação: Se α é paralelo a uma geratriz então a intersecção gera uma curva denominada *parábola*.

2.^a situação: se α não é paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas de S então a intersecção gera uma curva denominada *elipse*. Há um caso particular, quando a inclinação do plano intersector tem uma angulação perpendicular ao eixo, que gera uma circunferência.

3.^a situação: se α não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas de S , então a intersecção, formada por duas partes separadas, partes essas designadas *ramos*, gera uma curva denominada *hipérbole*.

As curvas das situações são apresentadas na FIGURA 53.

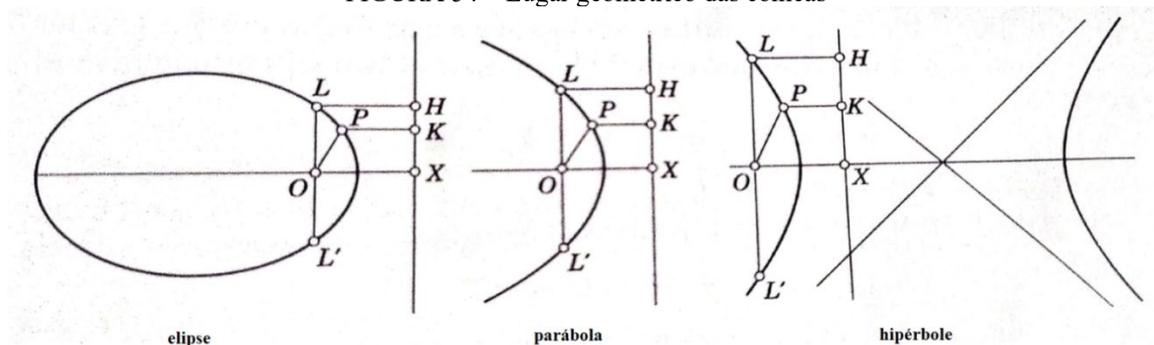
FIGURA 53 – secções cônicas



FONTE: Boulos & Camargo (1997, p. 168)

Quando o estudo das cônicas passa a ter a ótica da Geometria Analítica, ou seja, as curvas são analisadas em um plano coordenado, então suas características observadas mostram que as cônicas são um lugar geométrico de um ponto, cuja sua distância até um ponto fixo tem relação com a sua distância até uma reta fixa.

FIGURA 54 – Lugar geométrico das cônicas



FONTE: Coxeter (p. 115).

Pela FIGURA 54, o ponto O é denominado por *foco* e a linha HX por *diretriz*. Segundo Coxeter (p. 115), não há uma única maneira de definir as cônicas, mas uma maneira mais direta com a ótica da Geometria Analítica, tomando por base a figura anterior, é a que segue:

DEFINIÇÃO 6.1: Uma cônica é o lugar geométrico de um ponto P cuja distância OP de um ponto fixo O é ε vezes a sua distância PK de uma linha fixa HX , onde ε é uma constante positiva.

Coxeter (p. 115) também cita outra definição proposta por Manaechmus, por volta de 340 d.C., que foi conectada com a proposta por Pappus de Alexandria (século IV d.C.) ou possivelmente com a de Euclides. Segue:

DEFINIÇÃO 6.2: A cônica é denominada uma *elipse* se $\varepsilon < 1$, uma *parábola* se $\varepsilon = 1$ e uma *hipérbole* de $\varepsilon > 1$.

O número ε é denominado como *excentricidade* da curva e a corda LL' , que passa pelo foco e paralela a diretriz, é denominada *latus rectum* ou *corda focal mínima*, cujo comprimento é denotado por $2l$, de modo que:

$$l = \overline{OL}$$

$$l = \varepsilon \overline{LH}.$$

Por Coxeter (p. 115), os termos parábola, elipse e hipérbole são dos escritos de Apolônio. Eves (2011, p. 199), explicita melhor esse fato:

“Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta (isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento), eles diziam que se tinha um caso de “ellipsis”, “parabole” ou “hyperbole”, conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia.”

Muitos fatos históricos apresentam o estudo e desenvolvimento dos conceitos das cônicas para as comprovações que hoje perpetuam nos livros de Geometria Analítica. Cada curva tem suas similaridades, mas há muita particularidade em seus conceitos e, devido a isso, cada uma delas deve ter um estudo dedicado. Por isso, sucede-se a análise de cada curva e seus conceitos, pensando no melhor roteiro para trazer sentido ao estudante.

Nesse estudo, em particular, segue a discussão da parábola. De acordo com as normativas educacionais brasileiras, a BNCC – Base Nacional Comum Curricular, a circunferência e a parábola são as cônicas que os estudantes do ensino médio devem estudar. Assim, a parábola é conhecida pelos estudantes que seguem ao ensino superior. Assim, para um estudante de Geometria Analítica, a abordagem sugerida nesse estudo pode ser uma ampliação de conhecimentos.

As demais cônicas, não serão explicitadas em capítulos específicos nesse estudo, mas pensa que as ideias de abordagem sugeridas até o próximo capítulo são bases para o professor continuar nesse pensamento de trazer sentido através da exploração visual das curvas antes da formalização dos conceitos algébricos sobre as mesmas.

7 PARÁBOLA

A parábola é uma curva conhecida pelo estudante de Geometria Analítica, pois é um conteúdo que faz parte do currículo básico da educação brasileira. O avanço no estudo de Geometria Analítica para esse conteúdo faz compreender a curva e a formalização da sua equação.

Nos dias atuais, encontram-se livros de Geometria Analítica, permeados por uma educação brasileira tradicionalista, que apresentam as equações das curvas para posteriormente apresentar seu estudo geométrico, o que segue um sentido contrário da construção histórica dos conceitos.

Nesse estudo não se deseja levantar uma discussão sobre a vivência e contradições da educação tradicionalista na Matemática, mas sim apresentar o conceito das curvas pelo sentido de visualização para a abstração, ou seja, apresentar um roteiro de estudos que apresenta o lugar geométrico, o traço e a equação da parábola, para que então seu estudo analítico tenha um maior sentido de aprendizado.

Seguindo nesse viés, confabulam as ideias propostas por E. H. Lock Wood em sua obra *A Book of Curves*.

“Plane curves offer a rich and to some extent unexplored fields of study which may be approached from a quite elementary level. Anyone who can draw a circle with a given centre and a given radius can draw a cardioid or a limaçon. Anyone who can use a set square can draw a parabola or a strophoid. Anyone who knows a few of the simpler propositions of Euclid can deduce a number of properties of these beautiful and fascinating curves.²¹” (LOCK WOOD, 1961)

Como este estudo propôs a apresentação preliminar de algumas proposições de Euclides, conforme sugerido por Lock Wood, foi estabelecida uma base teórica sólida para que o estudante possa compreender tanto os lugares geométricos quanto a curva parábola que serão abordados na sequência. A introdução das proposições euclidianas permite aos estudantes familiarizarem-se com os fundamentos da geometria clássica, que são essenciais para a compreensão das propriedades e comportamentos das parábolas. A luz das sugestões de Lock Wood, esta abordagem garante que os estudantes possuam o conhecimento necessário

²¹ “As curvas planas oferecem um campo de estudo rico e até certo ponto inexplorado, que pode ser abordado a partir de um nível bastante elementar. Quem pode desenhar um círculo com um determinado centro e um determinado raio pode desenhar uma cardioide ou uma limaçon. Qualquer um que saiba usar um esquadro pode desenhar uma parábola ou uma estrofóide. Qualquer pessoa que conheça algumas das proposições mais simples de Euclides pode deduzir várias propriedades dessas belas e fascinantes curvas.” Tradução pela pesquisadora.

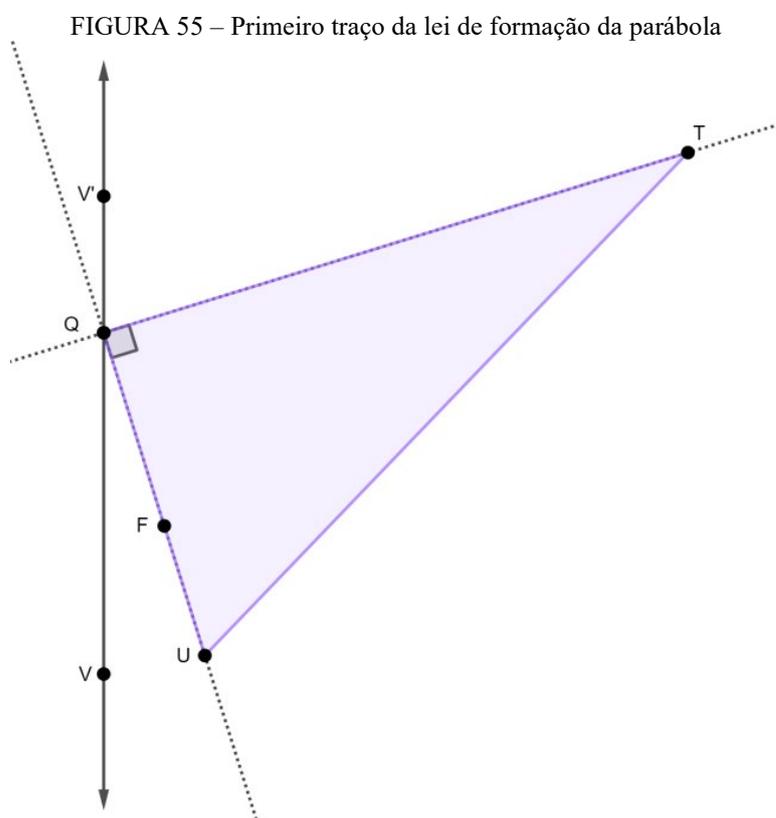
para aprofundar-se nos conceitos e aplicações das curvas parabólicas, facilitando uma transição mais fluida para os tópicos avançados subsequentes.

7.1 O LUGAR GEOMÉTRICO DA PARÁBOLA

O conceito de lugar geométrico emerge como um elemento essencial que estabelece a interface entre a geometria e a álgebra. Este termo refere-se ao conjunto de pontos que atendem a condições ou restrições matemáticas específicas. Explorar o lugar geométrico proporciona uma abordagem robusta para descrever padrões e relações intrínsecas entre as curvas.

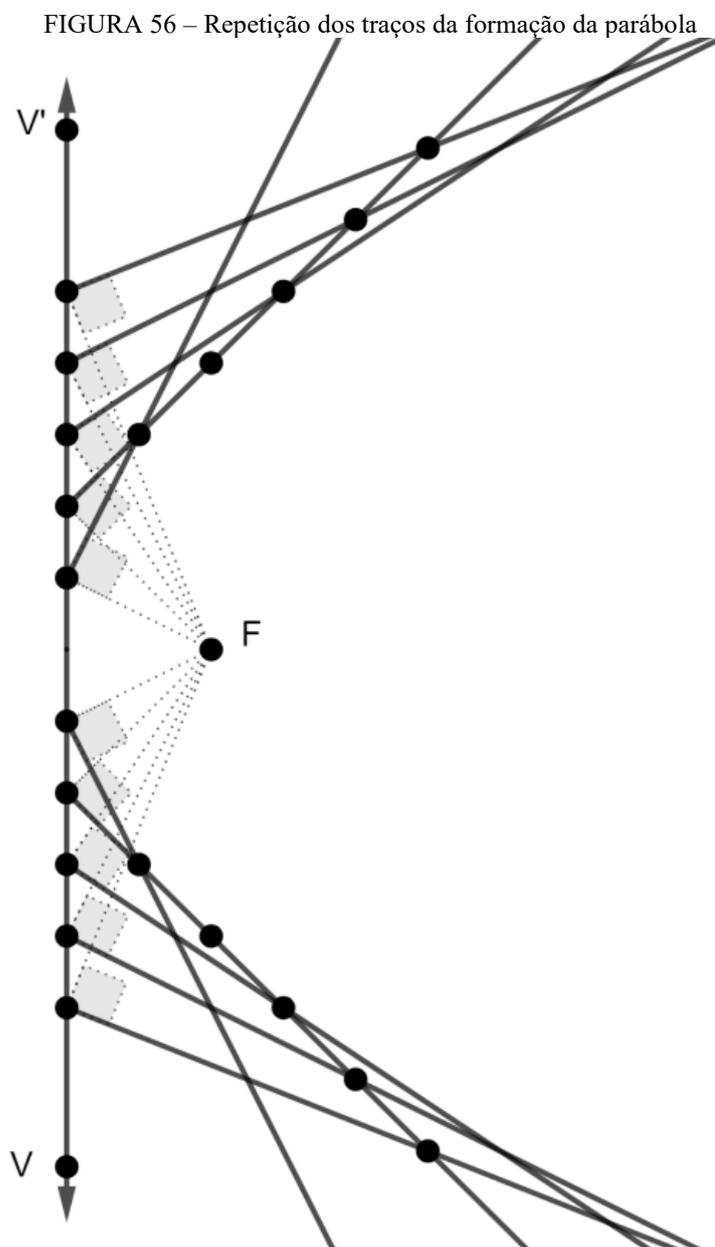
Definir parábola envolve conhecer o lugar geométrico de um ponto que se move de acordo com uma específica lei de formação.

Com base nos escritos de Lock Wood (1961, pp. 3-12), o estudo dessa curva inicia tomando uma reta fixa, denominada $\overline{VV'}$ e marcando um ponto fixo F fora dessa reta, ou seja, $F \notin \overline{VV'}$. Dado um ponto fixo Q , com $Q \in \overline{VV'}$, traça-se um ângulo $U\hat{Q}T$, com ângulo reto em Q e o lado \overline{QU} passando por F , então traça a reta \overline{QT} , conforme FIGURA 55.



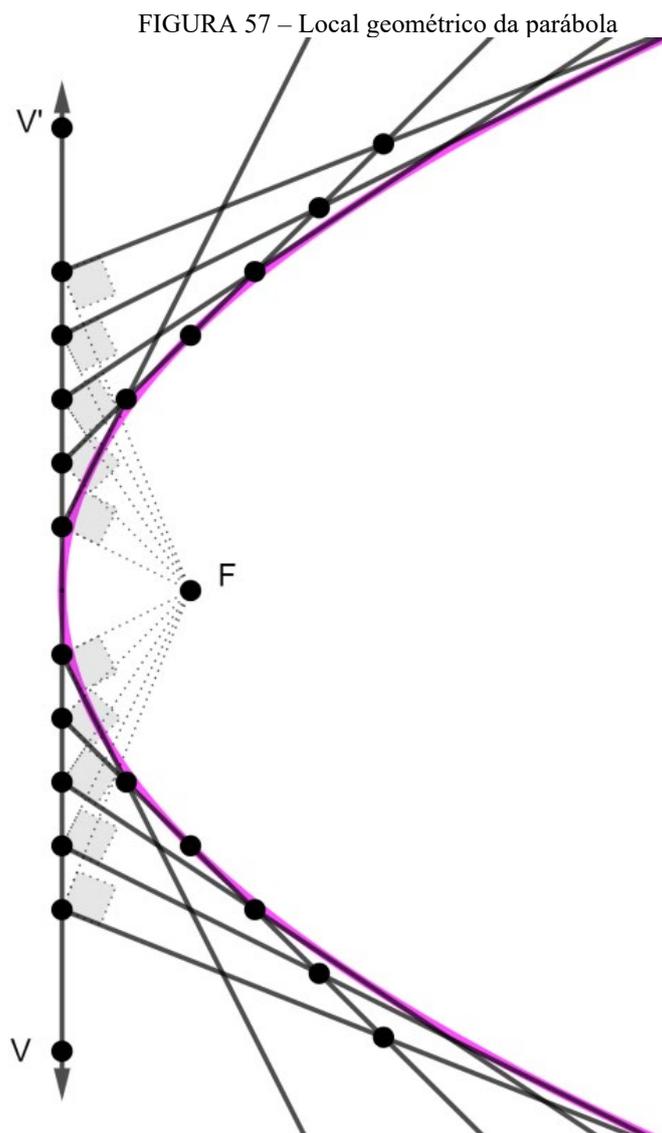
FONTE: Adaptado de Lock Wood (1961, p. 3).

Esse é o primeiro traço para compreender o lugar geométrico da curva. Quando for elaborado em um grande número de posições, a parábola pode ser desenhada a mão livre, tocando em cada uma das linhas desenhadas, como pode ser observada na FIGURA 56.



FONTE: A pesquisadora.

Com esse estudo geométrico, compreende-se uma curva específica vai sendo entendida no espaço de estudo, curva presente no campo da abstração, conforme FIGURA 57. Essa curva é denominada por parábola.



FONTE: A pesquisadora.

A compreensão do lugar geométrico não apenas aprimora a teoria matemática subjacente, mas também desempenha um papel crucial em aplicações práticas diversas, como design gráfico, modelagem computacional e engenharia. Neste contexto, este estudo visou a apreciação do conceito de lugar geométrico, explorando suas implicações teóricas e suas contribuições para a formalização algébrica, bem como para a resolução de desafios geométricos.

A partir desse lugar geométrico, há uma percepção visual da curva que será abordada posteriormente de maneira algébrica. Com essa alusão da curva, segue para o estudo das suas particularidades, tomando como base as especificidades utilizadas nos traços iniciais.

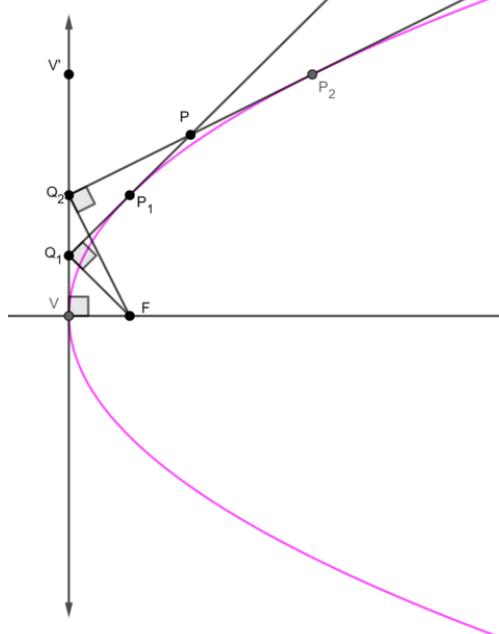
7.2 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Em Geometria Analítica, o estudo das curvas envolve a exploração minuciosa das suas propriedades geométricas, que são características intrínsecas responsáveis por definir a forma e o comportamento particular das mesmas por meio do plano cartesiano. Essas propriedades desempenham um papel importante na compreensão da estrutura de uma curva, oferecendo percepções valiosas sobre sua curvatura, oscilações e pontos de inflexão. No contexto desta dissertação, o termo "propriedades geométricas" refere-se a atributos matemáticos que não apenas descrevem as características físicas da curva, mas também fornecem ferramentas analíticas para classificação e representação eficaz.

Essa abordagem geométrica não apenas enriquece a compreensão teórica das curvas, mas também tem implicações práticas em diversas áreas, desde a representação gráfica até a aplicação computacional em campos como design e modelagem. Assim, o exame das propriedades geométricas das curvas é essencial para dar sentido a todo processo educacional, aprofundando a compreensão matemática e promovendo avanços em aplicações práticas nas áreas particulares que cada estudante de geometria analítica se debruça.

Seguindo à teoria para a compreensão das propriedades geométricas, a partir da ideia apresentada na FIGURA 55 e em conjunto com os estudantes, \overline{SV} é traçada perpendicularmente a $\overline{VV'}$.

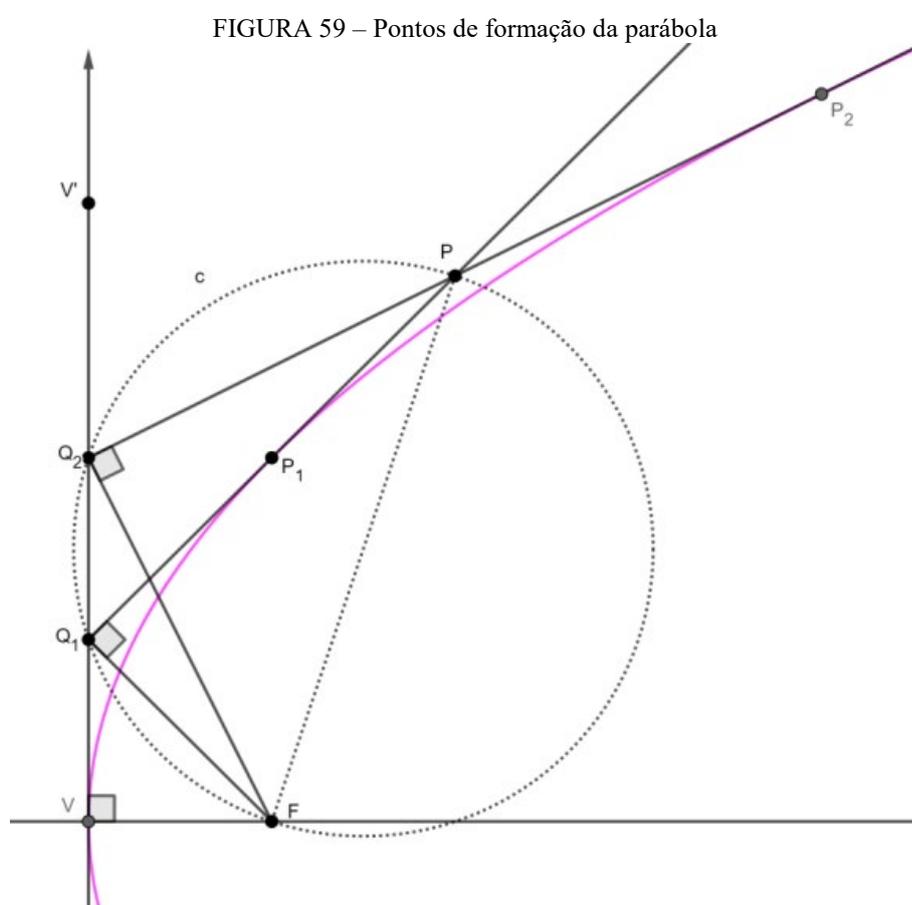
FIGURA 58 – Pontos de tangência da parábola



FONTE: A pesquisadora.

O que se percebe, pela FIGURA 58, que a curva é simétrica sobre o eixo \overleftrightarrow{VS} , o que faz a denominação do ponto V de *vértice*. Além disso, apresentam-se duas semirretas, a $\overline{Q_1P_1}$ e a $\overline{Q_2P_2}$, que são tangentes à parábola em P_1 e P_2 , respectivamente, e se intersectam em P .

Ao fazer o traçado de \overline{FP} , formam-se os triângulos FQ_1P e FQ_2P , que são triângulos retângulos em Q_1 e Q_2 , respectivamente, pela construção. Os triângulos possuem o lado \overline{FP} comum, sendo também a hipotenusa de ambos. Esse fato define os triângulos como inscritíveis em uma mesma circunferência, denominada na FIGURA 59 como circunferência c . Com isso, os pontos F , Q_1 , Q_2 e P são definidos pontos concíclicos.



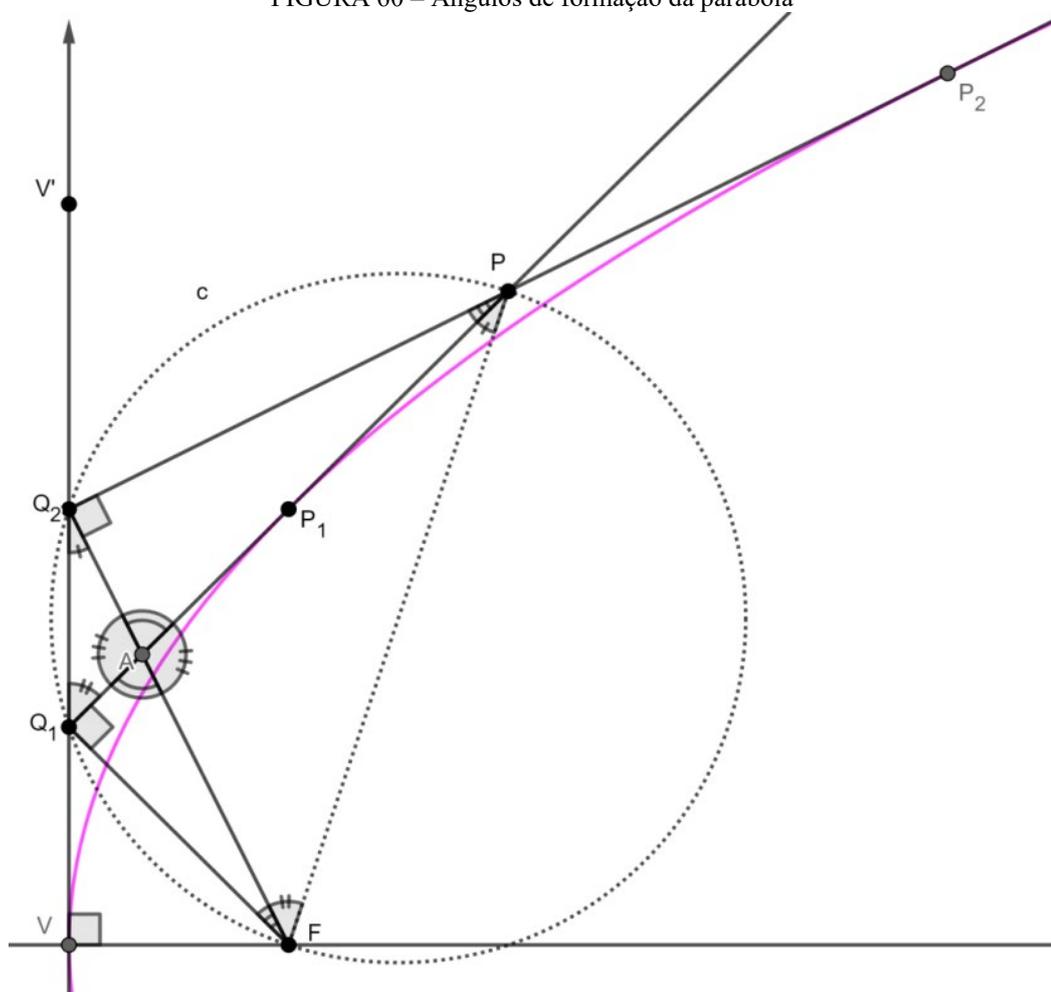
FONTE: A pesquisadora.

Os ângulos $Q_1\widehat{Q_2}F$ e $Q_1\widehat{P}F$ estão sob o mesmo arco da circunferência c , o que são definidos como congruentes. Pelo mesmo raciocínio, os ângulos $Q_2\widehat{Q_1}P$ e $Q_2\widehat{F}P$ são congruentes por estarem sob o mesmo arco de circunferência. Observa-se que os ângulos $Q_1\widehat{F}Q_2$ e $Q_1\widehat{P}Q_2$ também estão sob o mesmo arco da circunferência c , sendo então dados como congruentes.

Os segmentos $\overline{FQ_2}$ e $\overline{Q_1P}$ intersectam-se em um ponto que será tomado por A . Com isso, os ângulos $Q_1\hat{A}Q_2$ e $F\hat{A}P$ são opostos pelo vértice, sendo então congruentes. O mesmo ocorre com os ângulos $Q_1\hat{A}F$ e $Q_2\hat{A}P$, que são congruentes por serem ângulos opostos pelo vértice.

Assim, os triângulos Q_1AQ_2 e FAP são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo-ângulo de semelhança de triângulos. De modo análogo, os triângulos Q_1AF e Q_2AP são semelhantes, visto à FIGURA 60.

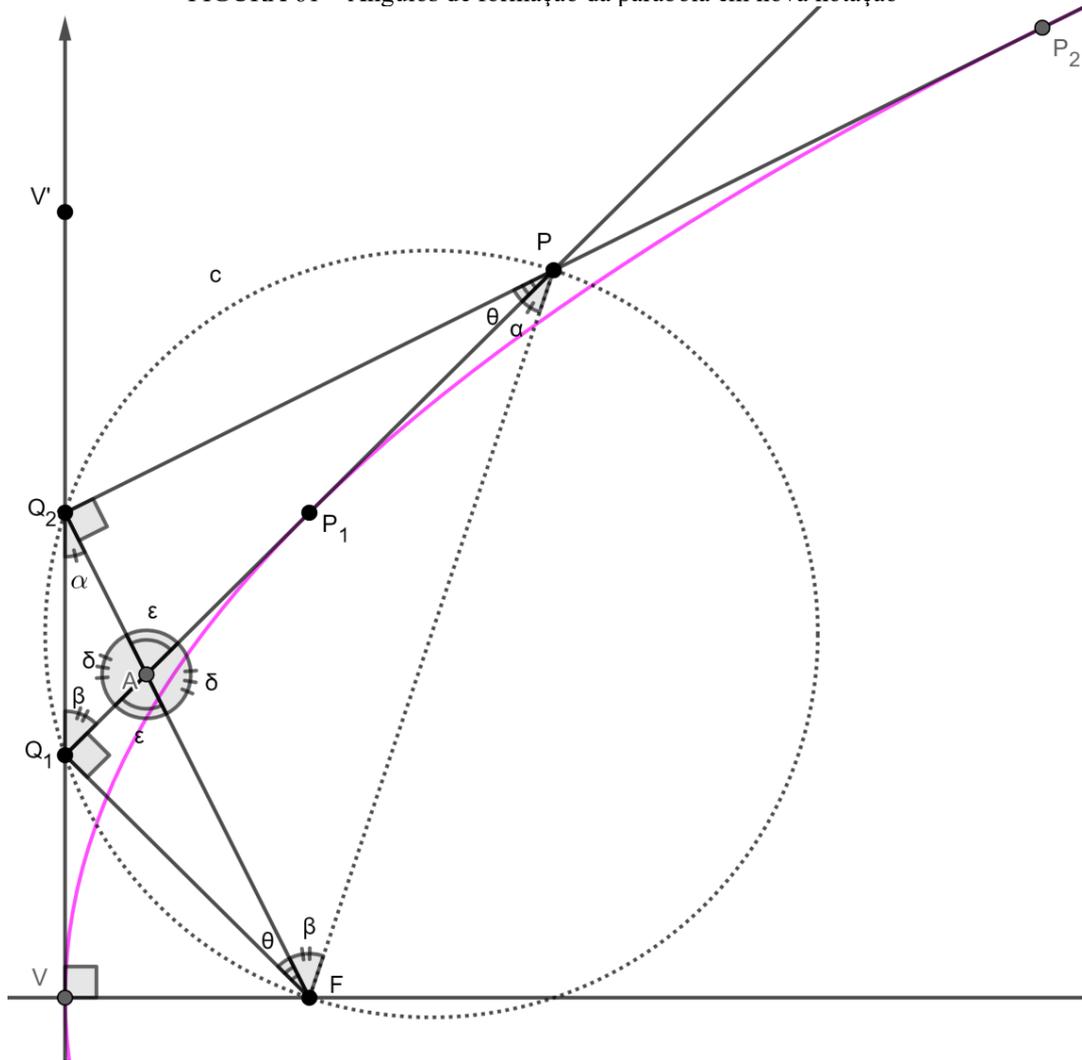
FIGURA 60 – Ângulos de formação da parábola



FONTE: A pesquisadora.

Para facilitar a compreensão dos próximos argumentos, toma-se por $\alpha = Q_1\widehat{Q_2}F = Q_1\hat{P}F$, $\beta = Q_2\widehat{Q_1}P = Q_2\hat{F}P$, $\delta = Q_1\hat{A}Q_2 = F\hat{A}P$, $\varepsilon = Q_1\hat{A}F = Q_2\hat{A}P$ e $\theta = Q_1\hat{F}Q_2 = Q_1\hat{P}Q_2$, apresentados na FIGURA 61 nessa nova notação.

FIGURA 61 – Ângulos de formação da parábola em nova notação



FONTE: A pesquisadora.

A partir disso, se tomar por $V\hat{F}Q_1 = x$, tem-se $V\hat{F}Q_2 = x + \theta$. Utilizando o conhecimento da soma dos ângulos internos de um triângulo para $\triangle VFQ_2$, obtém-se:

$$\begin{aligned} x + \theta + \alpha + 90^\circ &= 180^\circ \\ x &= 90^\circ - \alpha - \theta \end{aligned} \quad (76)$$

E, pelo mesmo pensamento para o triângulo Q_1FP , tem-se:

$$\begin{aligned} \beta + \theta + 90^\circ + \alpha &= 180^\circ \\ \beta &= 90^\circ - \alpha - \theta. \end{aligned} \quad (77)$$

Dos resultados de (76) e (77), observa-se que $x = \beta$. Isso implica que $V\hat{F}Q_1 = \beta$.

De maneira análoga, denomina-se $V\hat{Q}_1F = y$ no $\triangle VFQ_1$, obtendo assim:

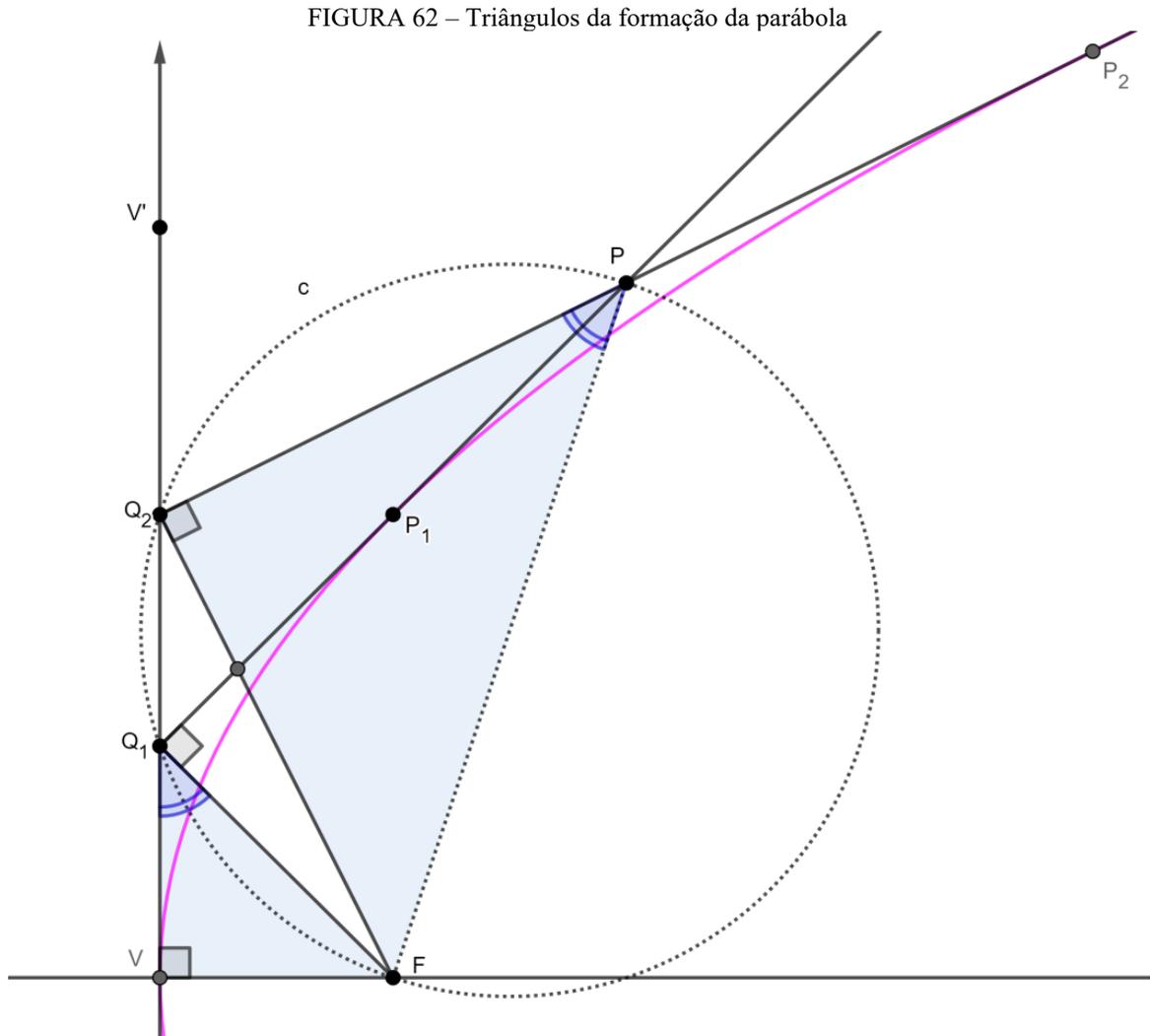
$$\begin{aligned} y + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ y &= 90^\circ - \beta \end{aligned} \quad (78)$$

Inserindo o resultado da equação (77) na equação (78), analisa-se:

$$y = 90^\circ - (90^\circ - \alpha - \theta)$$

$$y = \alpha + \theta$$

Com isso, os ângulos $V\widehat{Q}_1F$ e $Q_2\widehat{P}F$ são congruentes. Assim, mostra-se que $V\widehat{Q}_1F \equiv Q_2\widehat{P}F$, conforme FIGURA 62.

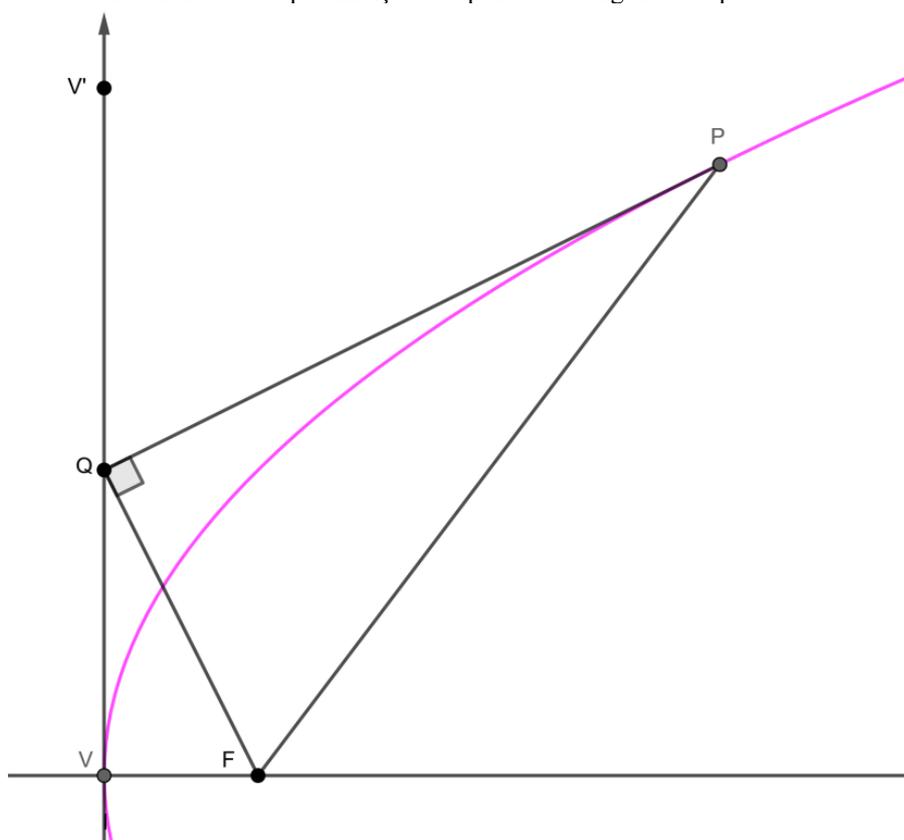


FONTE: A pesquisadora.

O ponto P não é pertencente à parábola, mas quanto mais próximas estiverem as duas tangentes, mais próximo da curva esse ponto estará.

Conjeturando uma aproximação de Q_2 a Q_1 , tem-se que P se aproximará de P_1 e o ângulo $Q_1\widehat{P}F$ se tornará $Q_2\widehat{P}_1F$, visto pela na FIGURA 63.

FIGURA 63 – Aproximação dos pontos de tangência da parábola



FONTE: A pesquisadora.

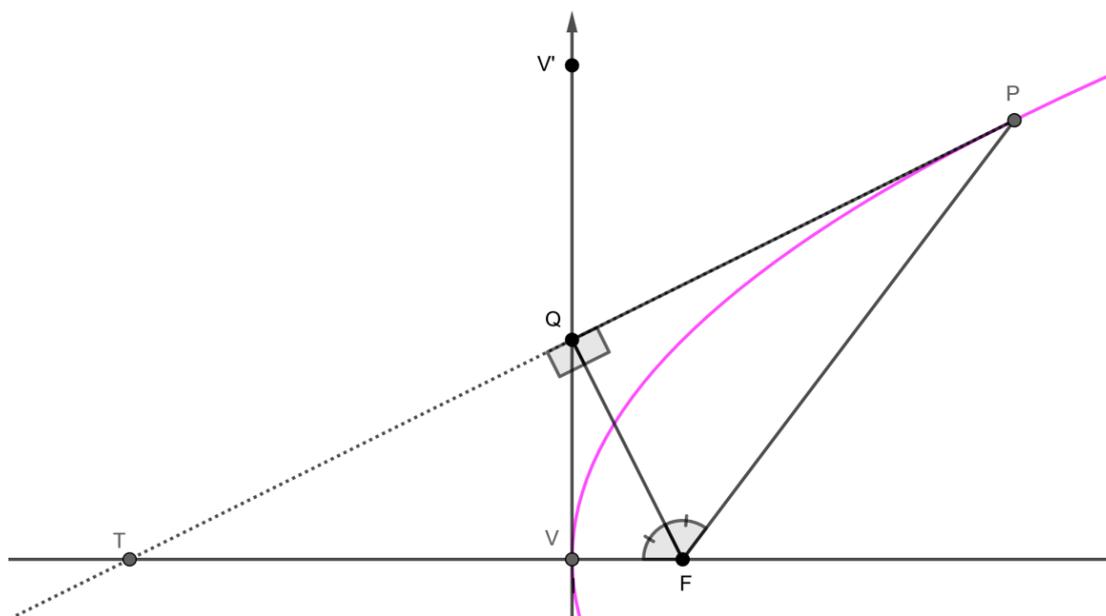
Com essa imagem, o estudante de Geometria Analítica tem a consciência da curva denominada parábola. E com isso, pode ser dado o estudo de propriedades de foco e diretriz, importantes para a compreensão de sua definição e equação.

7.2.1 PROPRIEDADES DO FOCO E DA DIRETRIZ

As propriedades sobre o foco e diretriz da parábola são geralmente apresentadas de forma direta em algumas referências, ou seja, apresentam-se as equações sem prévias explicações sobre seu objetivo existencial. A ideia é trazer sentido, mostrando essas propriedades através do estudo da curva inicialmente construída.

Seguindo a luz de Lock Wood, com base na FIGURA 63, ao ser prolongado \overline{PQ} de forma a interseccionar \overline{VF} no ponto T , serão formados $\triangle FQT$ e $\triangle FQP$.

FIGURA 64 – Relação entre triângulos de formação das propriedades da parábola

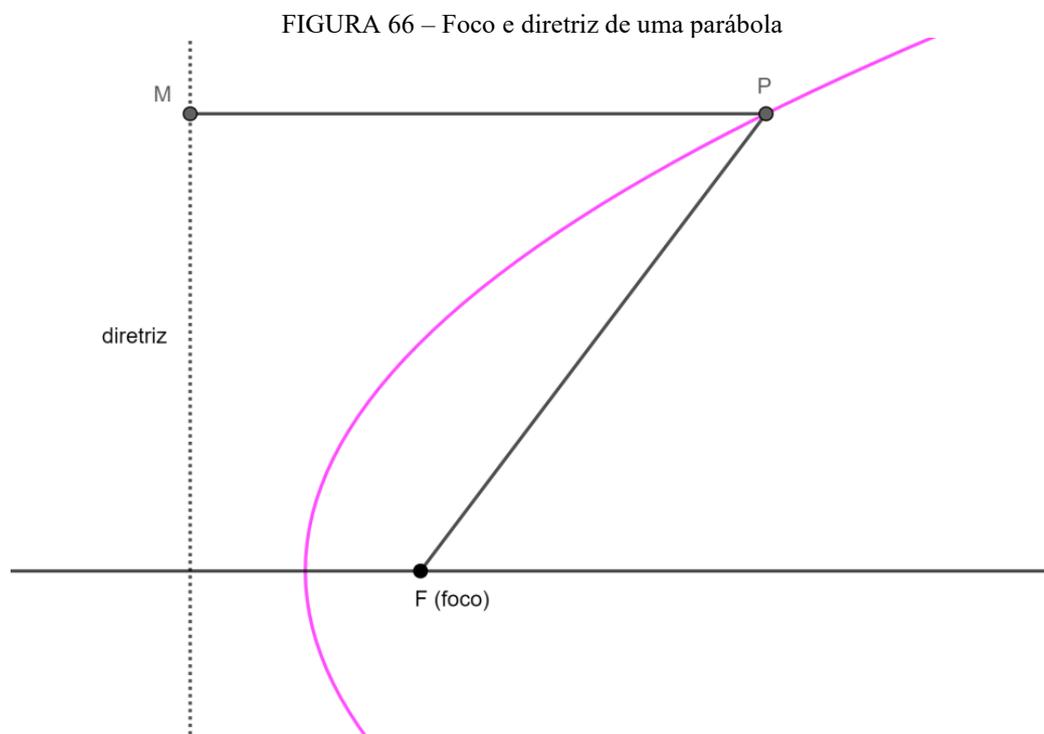


FONTE: A pesquisadora.

Ao analisar a relação entre esses dois triângulos, visto na FIGURA 64, percebe-se que \overline{FQ} é lado comum de $\triangle FQT$ e $\triangle FQP$. E sendo o $F\hat{Q}T$ complementar a $F\hat{Q}P$ então $F\hat{Q}T = 90^\circ$, assim tendo $F\hat{Q}T \equiv F\hat{Q}P$. Além disso, observa-se dos estudos anteriores que $T\hat{F}Q \equiv P\hat{F}Q$. Com essas informações, pelo caso de congruência ângulo-lado-ângulo, tem-se $\triangle FQT \equiv \triangle FQP$. Portanto, com a congruência desses triângulos conclui-se que $\overline{FP} \equiv \overline{FT}$.

Seguindo pela ideia da FIGURA 64, se o losango $PFTM$ é completado, e \overline{MD} é traçado perpendicular \overline{FT} , traçamos por Q uma paralela de \overline{VF} , encontrando o ponto N de intersecção com \overline{MD} . Com isso, analisa-se que os ângulos $Q\hat{M}N$ e $F\hat{Q}V$ são ângulos correspondentes, tendo $Q\hat{M}N \equiv F\hat{Q}V$. E sendo $Q\hat{N}M = 90^\circ = F\hat{V}Q$, então conclui-se que $\triangle QMN \equiv \triangle FQV$, implicando que $\overline{FQ} \equiv \overline{QM}$. E sendo $\overline{QN} // \overline{FT}$ e $\overline{MD} // \overline{VV'}$, então tem-se $\overline{DV} \equiv \overline{NQ}$ e, por transitividade $\overline{DV} \equiv \overline{VF}$. Essas características são apresentadas na FIGURA 65.

O ponto fixo é denominado *foco* e a reta fixa é denominada *diretriz* da parábola. O caso em que o foco encontra-se sobre a diretriz é excluído, por não formar uma curva como a descrita. A FIGURA 66 apresenta as propriedades de foco e diretriz de uma parábola.



FONTE: Adaptado de Lock Wood (1961, p. 5).

Com esses conhecimentos da curva, o estudante de Geometria Analítica tem base para iniciar o processo de compreensão algébrica a generalização da parábola por meio de uma equação.

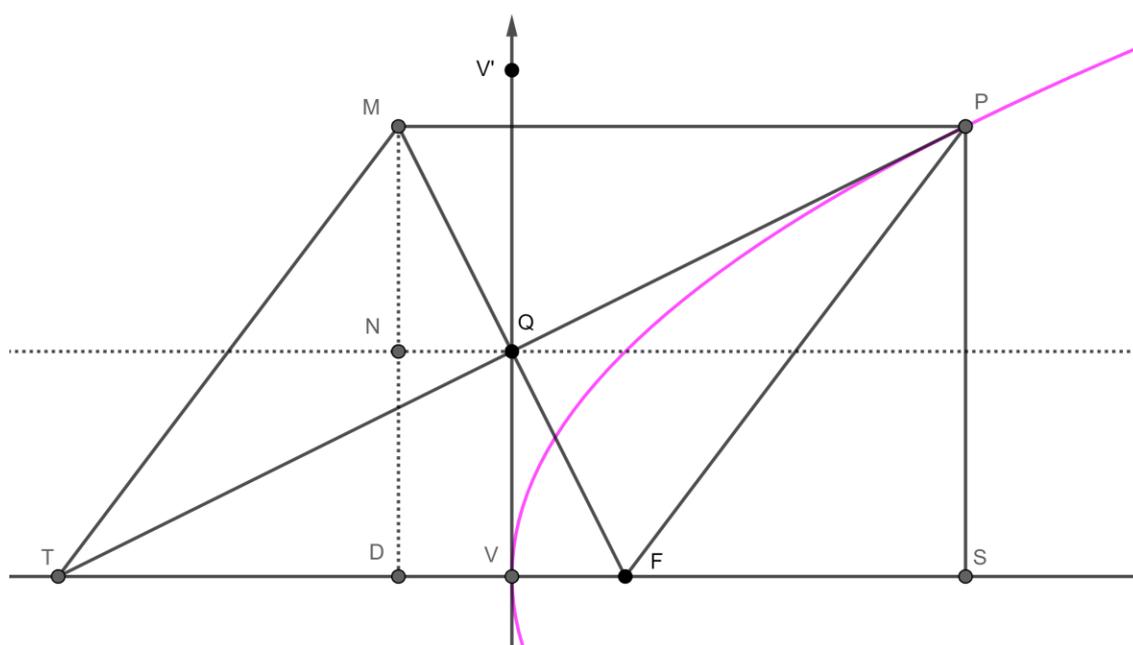
7.3 A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

A exploração de curvas geométricas por meio de equações desempenha um papel importante na Geometria Analítica, fornecendo uma estrutura matemática robusta para a compreensão e análise da curva em estudo. A representação algébrica da parábola simplifica a descrição e também oferece uma visão sistemática de suas propriedades intrínsecas que nem sempre são percebidas graficamente. Antes de formalizar equacionalmente, foi imperativo explorar o lugar geométrico da curva, proporcionando uma visualização clara de sua configuração espacial.

A abordagem visual é essencial para a intuição inicial e apreciação da geometria subjacente. A transição do lugar geométrico para a formulação da equação permite uma generalização eficaz, abrindo caminho para análises abrangentes e aplicações práticas. Ao vincular a imagem visual ao formalismo matemático, é possível não apenas compreender a estrutura da curva, mas também derivar propriedades específicas. Dessa forma, o estudo das curvas geométricas por meio de equações não apenas simplifica a análise, mas também enriquece a compreensão, tornando-se uma ferramenta fundamental para investigações teóricas e aplicações práticas em diversos campos.

Para uma representação algébrica da curva da parábola, parte-se dos principais elementos presentes na FIGURA 65, na qual traça uma perpendicular em relação a \overrightarrow{VF} partindo de P , tendo o ponto S como interseção, constituindo então o \overline{PS} , apresentado na FIGURA 67.

FIGURA 67 – Elementos da análise algébrica da parábola



FONTE: Adaptado de Lock Wood (1961, p. 4).

Sendo $\overline{PS} \equiv \overline{MD}$ e $\overline{MN} \equiv \overline{ND} \equiv \overline{QV}$ então se tem que:

$$\overline{PS} = 2 \cdot \overline{QV} \quad (79)$$

Elevando o quadrado ambos os membros da equação (79), vem:

$$\begin{aligned} (\overline{PS})^2 &= (2 \cdot \overline{QV})^2 \\ \overline{PS}^2 &= 4 \cdot \overline{QV}^2 \end{aligned} \quad (80)$$

Como visto em estudo das propriedades geométricas da formação da parábola, o $\triangle FQT$ é retângulo em Q e $\overline{QA} \perp \overline{FT}$, cabem as relações métrica do triângulo retângulo. Com isso,

$$\overline{QV}^2 = \overline{VF} \cdot \overline{VT} \quad (81)$$

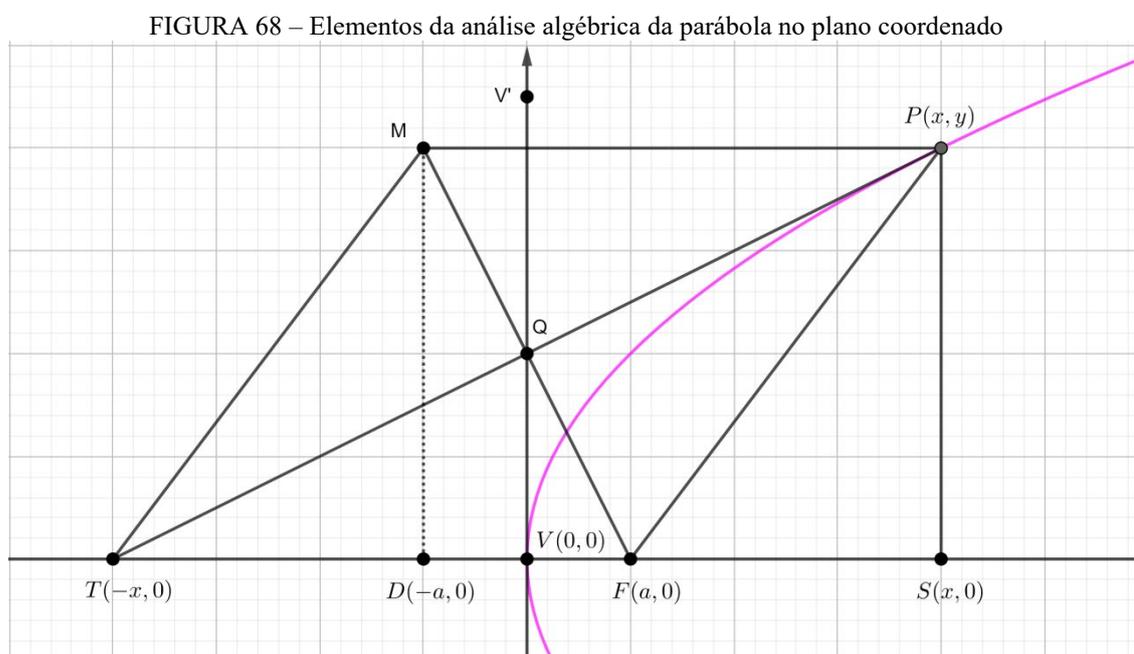
Substituindo (81) em (80),vem:

$$\overline{PS}^2 = 4 \cdot \overline{VF} \cdot \overline{VT} \quad (82)$$

Pela construção, tem-se que $\overline{FQ} \equiv \overline{QM}$, $\overline{QP} \equiv \overline{QT}$ e $M\hat{Q}T \equiv F\hat{Q}P$ devido a serem ângulos opostos pelo vértice, então $\triangle MQT \equiv \triangle FQT$, logo $\overline{MT} \equiv \overline{FP}$. Com $\overline{MT} \equiv \overline{FP}$, observa-se que $\overline{MD} \equiv \overline{PS}$ e $M\hat{D}T = 90^\circ = P\hat{S}F$ então $\triangle MDT \equiv \triangle PSF$ e, conseqüentemente, $\overline{DT} \equiv \overline{SF}$. Logo, com $\overline{DT} \equiv \overline{SF}$ e $\overline{VD} \equiv \overline{VF}$ tem-se $\overline{VT} \equiv \overline{VS}$. Assim, a equação (82) pode ser reescrita como:

$$\overline{PS}^2 = 4 \cdot \overline{VF} \cdot \overline{VS} \quad (83)$$

Para a compreensão da parábola sob os conceitos da Geometria Analítica, insere-se a FIGURA 67 sob o plano cartesiano, tendo \overline{VF} como o eixo das abscissas e $\overline{VV'}$ como o eixo das ordenadas. Se tomar as coordenadas de P como (x, y) , tendo a FIGURA 68 ilustrando o caso.



FONTE: A pesquisadora.

Com isso, pelo **TEOREMA 3.14**, tem-se:

$$\begin{aligned}d_{VF} &= \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} \\d_{VF} &= \sqrt{a^2 + 0^2} \\d_{VF} &= \sqrt{a^2} \\d_{VF} &= a.\end{aligned}\tag{84}$$

E, de modo análogo, tem-se:

$$\begin{aligned}d_{VS} &= \sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2} \\d_{VS} &= \sqrt{x^2 + 0^2} \\d_{VS} &= \sqrt{x^2} \\d_{VS} &= x.\end{aligned}\tag{85}$$

Bem como,

$$\begin{aligned}d_{PS} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2} \\d_{PS} &= \sqrt{0^2 + y^2} \\d_{PS} &= \sqrt{y^2} \\d_{PS} &= y.\end{aligned}\tag{86}$$

Assim, substituindo (84), (85) e (86) na equação (83), tem-se:

$$y^2 = 4ax.\tag{87}$$

Essa equação é denominada como uma das formas da *primeira equação padrão da parábola*.

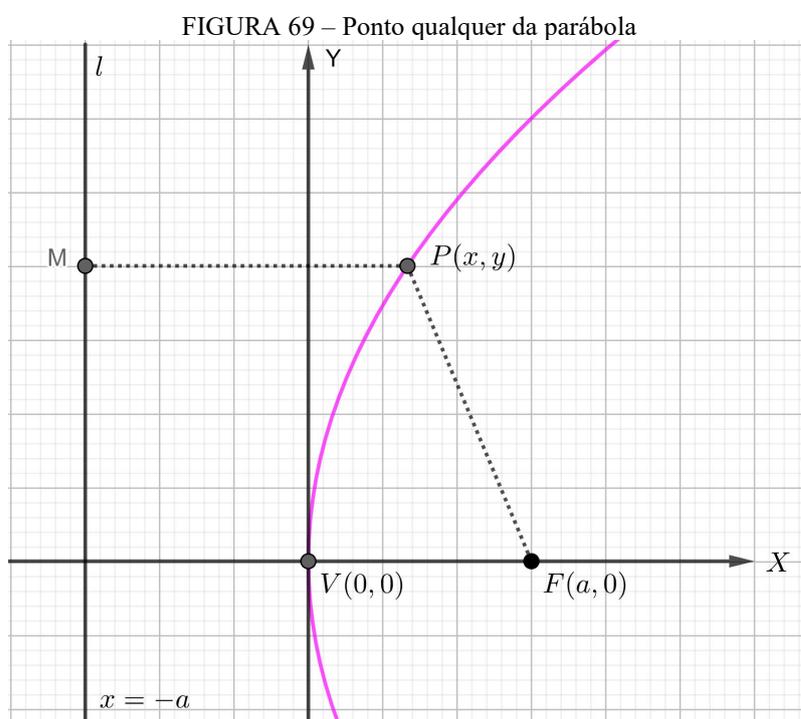
A compreensão dessas ideias sobre a curva permitirá ao estudante dar um significado mais profundo ao estudo da parábola, conforme abordado nas obras de Geometria Analítica. Com isso, o estudante poderá entender melhor as propriedades e aplicações da parábola, situando-a dentro de um contexto matemático mais amplo e conectando-a a conceitos fundamentais dessa disciplina. A assimilação dessas concepções não só facilita a visualização e manipulação das parábolas em diversos problemas, mas também enriquece a compreensão das inter-relações entre diferentes formas geométricas e suas representações algébricas.

Assim, a abordagem proposta pela Geometria Analítica fornece uma base sólida para que o estudante possa explorar de forma crítica e aplicada o comportamento das parábolas em diversas situações práticas e teóricas.

7.3.1 PRIMEIRA EQUAÇÃO PADRÃO DA PARÁBOLA

Seguindo por base os escritos de Lehmann (1982, p. 128), considera-se a parábola com vértice na origem cujo eixo coincide com o eixo das abscissas, ou seja, o foco encontra-se nesse eixo. Tomando as coordenadas do foco $F(a, 0)$ e do vértice $V(0, 0)$ então, pela **DEFINIÇÃO 7.1**, tem a equação da diretriz l como $x = -a$.

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre a parábola, traça um segmento paralelo ao eixo das abscissas de P à diretriz l , encontrando o ponto M , apresentado na FIGURA 69.



FONTE: Adaptado de Lehmann (1982, p. 128).

Pela definição, o ponto P deve satisfazer a condição:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PM}|. \quad (88)$$

Logo, pelo **TEOREMA 3.14**, vem:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} \\ |\overline{FP}| &= \sqrt{(x - a)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (89)$$

E pelo **TEOREMA 3.8**, tem-se:

$$\begin{aligned} |\overline{PM}| &= |x - (-a)| \\ |\overline{PM}| &= |x + a|. \end{aligned} \quad (90)$$

Substituindo (88) e (89) em (90), e fazendo manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= |x+a| \\ (\sqrt{(x-a)^2 + y^2})^2 &= (x+a)^2 \\ (x-a)^2 + y^2 &= (x+a)^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ y^2 &= 4ax.\end{aligned}\tag{91}$$

De maneira inversa, sendo $P_1(x_1, y_1)$ um ponto qualquer cujas coordenadas satisfazem a equação (91), de modo que $y_1^2 = 4ax_1$.

Adicionando $(x_1 - a)^2$ em ambos os membros e fazendo manipulações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned}y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= 4ax_1 + (x_1 - a)^2 \\ y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= 4ax_1 + x_1^2 - 2ax_1 + a^2 \\ y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= x_1^2 + 2ax_1 + a^2 \\ y_1^2 + (x_1 - a)^2 &= (x_1 + a)^2 \\ \sqrt{y_1^2 + (x_1 - a)^2} &= \sqrt{(x_1 + a)^2} \\ \sqrt{y_1^2 + (x_1 - a)^2} &= |x_1 + a|\end{aligned}\tag{92}$$

A equação (92) satisfaz a condição geométrica (88) aplicada ao ponto P_1 . Logo, P_1 é um ponto da parábola cuja equação é (91).

A parábola (91) tem apenas um interseção com o eixo das abscissas, tendo simetria única em relação a esse eixo. Reescrevendo a equação, temos:

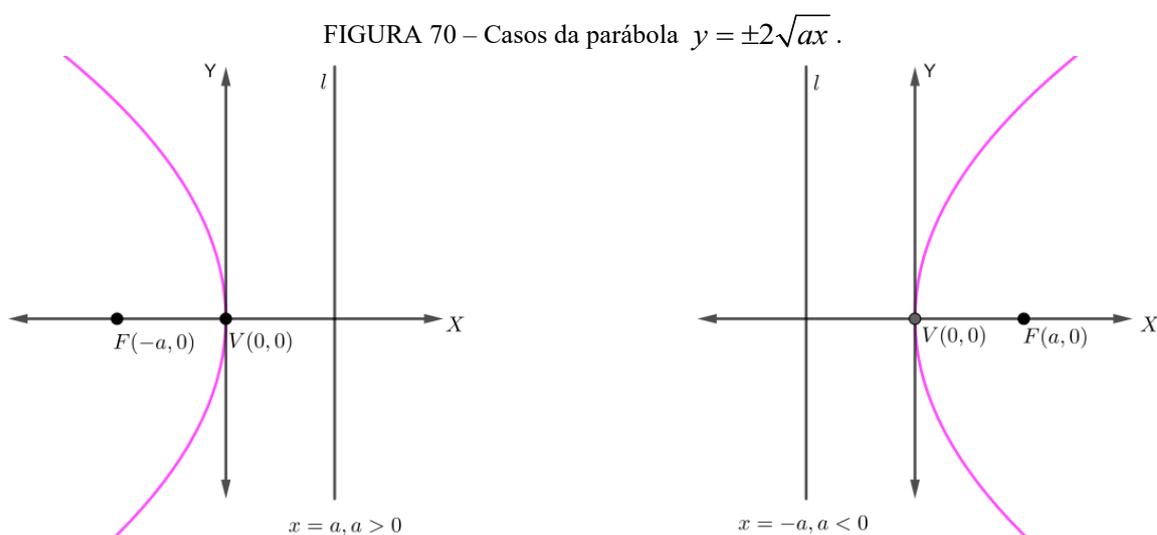
$$\begin{aligned}\sqrt{y^2} &= \sqrt{4ax} \\ y &= \pm 2\sqrt{ax}.\end{aligned}\tag{93}$$

Assim, para valores reais não nulos as variáveis y , x e a possuem o mesmo sinal.

Em consequência há dois casos a observar:

- Caso $a > 0$: não são assumidos os valores negativos de x , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente a direita do eixo das ordenadas, porém simetricamente em relação ao eixo das abscissas.
- Caso $a < 0$: não são assumidos os valores positivos de x , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente a esquerda do eixo das ordenadas, porém simetricamente em relação ao eixo das abscissas.

A FIGURA 70 descreve esses casos.



FONTE: A pesquisadora.

Outro fato a ser observado é quando o eixo da parábola está na origem, mas seu eixo é coincidente com o eixo das ordenadas. A equação que descreve essa parábola pode ser encontrada de maneira análoga ao estudo anterior, sendo dada por:

$$x^2 = 4ay,$$

onde o foco é o ponto $F(0, a)$.

E com manipulações algébricas adequadas, tem-se:

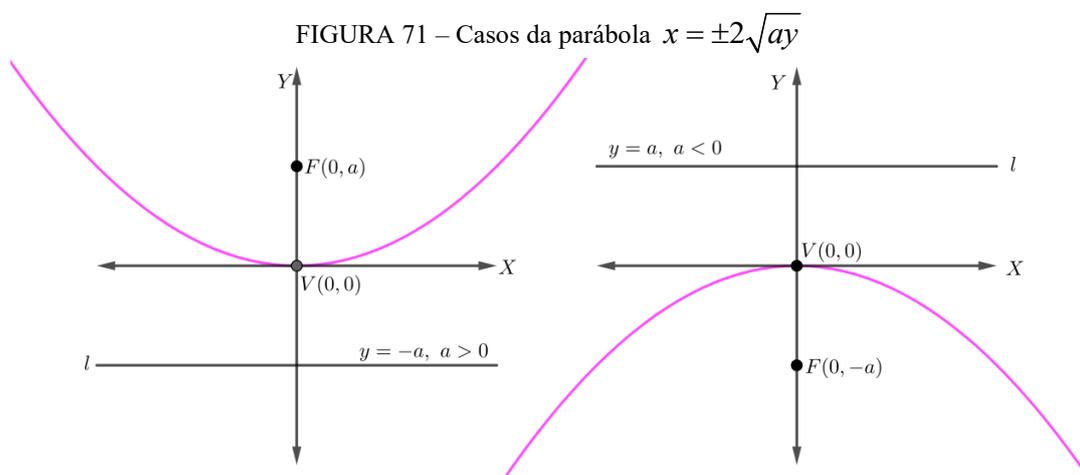
$$x = \pm 2\sqrt{ay}, \tag{94}$$

que para valores reais não nulos as variáveis y , x e a possuem o mesmo sinal

Isso oportuniza o estudo de dois casos:

- Caso $a > 0$: não são assumidos os valores negativos de y , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente acima do eixo das abscissas, porém simetricamente em relação ao eixo das ordenadas.
- Caso $a < 0$: não são assumidos os valores positivos de y , tornando o local geométrico da parábola uma curva aberta que se estende infinitamente somente a abaixo do eixo das abscissas, porém simetricamente em relação ao eixo das ordenadas.

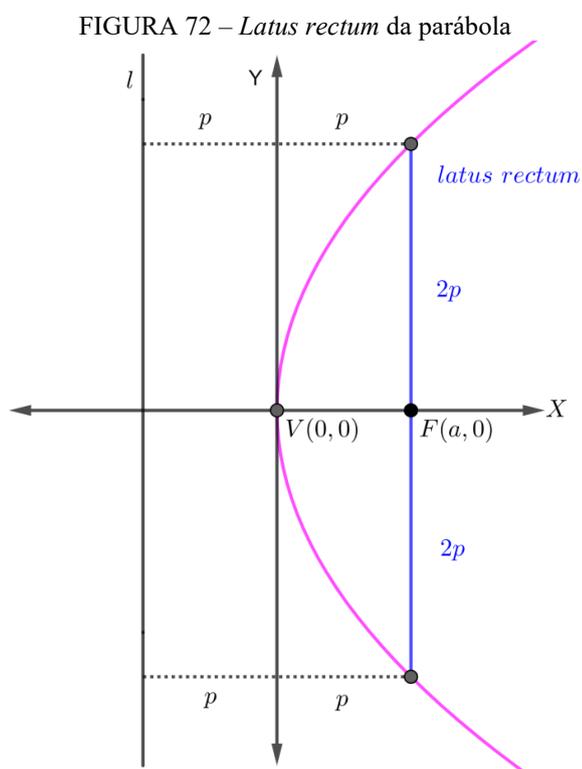
Esses casos são mostrados na FIGURA 71.



FONTE: A pesquisadora.

Das equações (93) e (94) resulta que há dois pontos pertencentes à parábola com cada um deles com coordenada da abscissa igual a a , logo há um ponto de coordenada $(a, 2a)$ e outro com coordenada $(a, -2a)$. Como a abscissa do foco é a , então o comprimento do *latus rectum* ou corda focal mínima é, em valor absoluto, igual à $4a$.

Observe FIGURA 72, que explicita esse caso.



FONTE: A pesquisadora.

Desses fatos, por Lehmann (1982, p. 130), tem-se o seguinte teorema:

TEOREMA 7.2: Se o eixo de uma parábola é coincidente com o eixo das abscissas e o vértice se encontra na origem, então sua equação é dada pela primeira forma padrão:

$$y^2 = 4ax,$$

onde o foco tem coordenadas $(a, 0)$ e a equação diretriz por $x = -a$. Se $a > 0$ a concavidade da parábola está para a direita e se $a < 0$ a concavidade está para a esquerda.

Se o eixo da parábola é coincidente com o eixo das ordenadas e o vértice está na origem, então sua equação é dada pela primeira forma padrão:

$$x^2 = 4ay,$$

onde o foco tem coordenadas $(0, a)$ e a equação diretriz por $y = -a$. Se $a > 0$ a concavidade da parábola está para a cima e se $a < 0$ a concavidade está para baixo.

Em cada um dos casos o comprimento do *latus rectum* é dado pelo valor absoluto de $4a$, coeficiente do termo de primeiro grau.

Segue um exemplo para melhor compreensão do teorema.

EXEMPLO 7.3: Uma parábola cujo vértice está na origem e cujo eixo é coincidente como eixo das abscissas passa pelo ponto $(-2, 4)$. Determinar a equação da parábola, as coordenadas de seu foco, a equação da sua diretriz e o comprimento de seu *latus rectum*.

Solução: Sendo o vértice com coordenadas $(0, 0)$, então o eixo é coincidente com o eixo das abscissas, e pelo **TEOREMA 7.2** a equação da parábola tem a forma $y^2 = 4ax$. Como a parábola passa pelo ponto $(-2, 4)$, então as coordenadas satisfazem sua equação. Logo:

$$4^2 = 4a(-2)$$

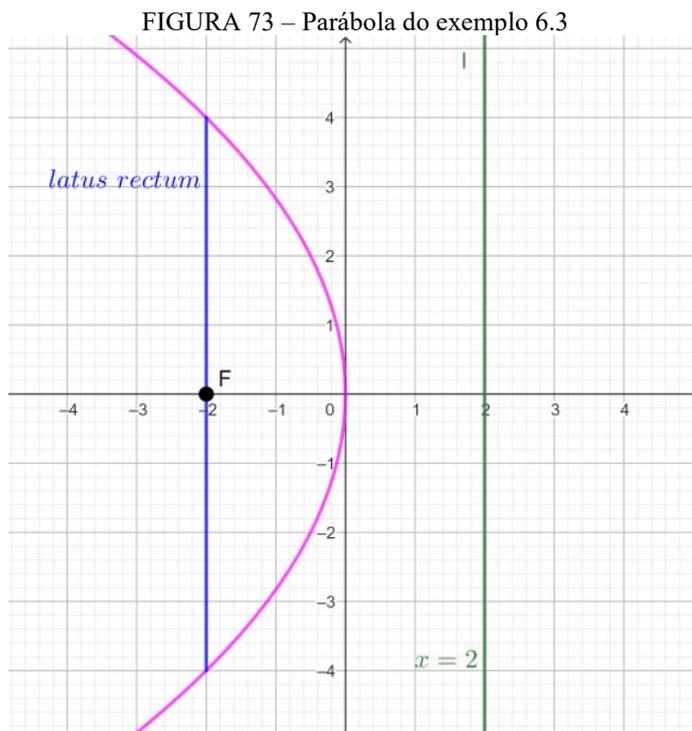
$$16 = -8a.$$

Assim, a equação da parábola é:

$$y^2 = 4(-2)x$$

$$y^2 = -8x$$

Sendo o foco dado pelas coordenadas $(a, 0)$, então $F(-2, 0)$. E a equação da diretriz é dada por $x = -a$, logo $x = 2$. Assim, como o *latus rectum* é dado por $|4a|$, então tem-se que é 8. Portanto, a FIGURA 73 ilustra o exemplo.



FONTE: A pesquisadora.

Compreender a primeira equação padrão da parábola, dada por $y^2 = 4ax$ ou $x^2 = 4ay$, é fundamental para estudantes de Geometria Analítica que desejam aprofundar seus conhecimentos na análise de conicidades. Esta equação descreve uma parábola com um vértice na origem e é importante para entender a estrutura e as propriedades geométricas dessa curva.

Primeiramente, a equação $y^2 = 4ax$ fornece uma descrição clara da relação entre os pontos na parábola e seu foco. O parâmetro a representa a distância focal, que é a distância entre o vértice e o foco. Esta informação é essencial para a análise detalhada das propriedades focais e diretrizes da parábola, que são cruciais em várias aplicações práticas e teóricas da Geometria Analítica.

Além disso, o conhecimento da primeira equação padrão facilita a transição para a segunda equação padrão da parábola, que representa parábolas em posições gerais e orientações diversas. A segunda equação padrão é mais complexa e requer uma compreensão sólida das propriedades fundamentais das parábolas, adquiridas através do estudo da primeira equação padrão.

Ao dominar a primeira equação padrão, o estudante desenvolve habilidades analíticas e geométricas necessárias para manipular e compreender equações mais complexas. Isso inclui a capacidade de completar o quadrado, identificar e interpretar os coeficientes das

equações, bem como entender a rotação e translação das coordenadas para simplificar a análise de conicidades.

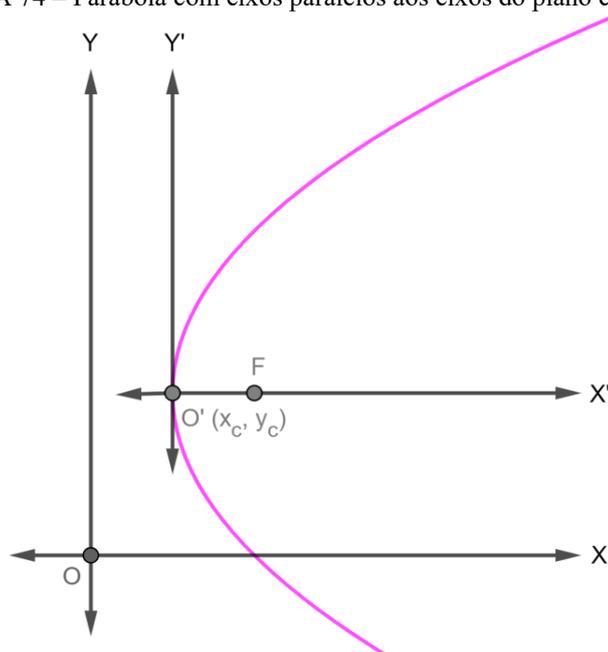
Além disso, o estudo da primeira equação padrão da parábola serve como base para a exploração de outras conicidades, como elipses e hipérbolas, uma vez que muitos dos conceitos e técnicas são compartilhados entre essas curvas. Portanto, a familiaridade com a equação $y^2 = 4ax$ é um passo inicial indispensável para qualquer estudante de Geometria Analítica, preparando-o para um estudo mais aprofundado e abrangente das conicidades e suas aplicações.

Em resumo, a compreensão da primeira equação padrão da parábola não só é essencial para o estudo avançado da própria parábola em suas diversas formas, mas também constitui um fundamento crítico para o entendimento mais amplo da Geometria Analítica como um todo. Com isso, segue para o estudo da segunda equação padrão da parábola.

7.3.2 SEGUNDA EQUAÇÃO PADRÃO DA PARÁBOLA

De modo geral, refletir sobre uma parábola cujo vértice não está sob a origem e seus eixos não coincidentes aos eixos coordenados, mas sim eixos paralelos aos do plano cartesiano, conforme FIGURA 74, abrange um maior número de estudos de aplicações.

FIGURA 74 – Parábola com eixos paralelos aos eixos do plano coordenado



FONTE: Adaptado de Lehmann (1982, p. 132).

Se os eixos coordenados são transladados de modo a origem O' ser coincidente ao vértice de coordenadas (x_C, y_C) , então sua equação em referência aos novos eixos, segundo **TEOREMA 7.2**, é dada por:

$$y'^2 = 4ax' \quad (95)$$

Logo, pelo **TEOREMA 5.2**, as variáveis serão configuradas como:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_C \\ x' &= x - x_C \end{aligned} \quad (96)$$

E,

$$\begin{aligned} y &= y' + y_C \\ y' &= y - y_C \end{aligned} \quad (97)$$

Substituindo (96) e (97) em (95), obtém-se:

$$(y - y_C)^2 = 4a(x - x_C). \quad (98)$$

Analogamente, a parábola cujo eixo é paralelo a Y e tem vértice com coordenadas (x_C, y_C) tem sua equação dada por:

$$(x - x_C)^2 = 4a(y - y_C) \quad (99)$$

Nas equações (98) e (99), $|a|$ é o comprimento da parte do eixo delimitada entre o vértice e o foco. Além disso, essas duas equações são denominadas *segunda equação padrão da parábola*.

Desse estudo, por Lehmann (1982, p. 132), segue o seguinte teorema:

TEOREMA 7.4: O vértice de uma parábola está no ponto (x_C, y_C) e $|a|$ é o comprimento da parte de seu eixo delimitada entre o foco e o vértice.

Se o eixo da parábola é paralelo ao eixo das abscissas então sua equação é dada pela segunda forma padrão

$$(y - y_C)^2 = 4a(x - x_C)$$

Se $p > 0$ a parábola tem concavidade voltada à direita e se $p < 0$ a parábola tem concavidade voltada à esquerda.

Se o eixo da parábola é paralelo ao eixo das ordenadas então sua equação é dada pela segunda forma padrão

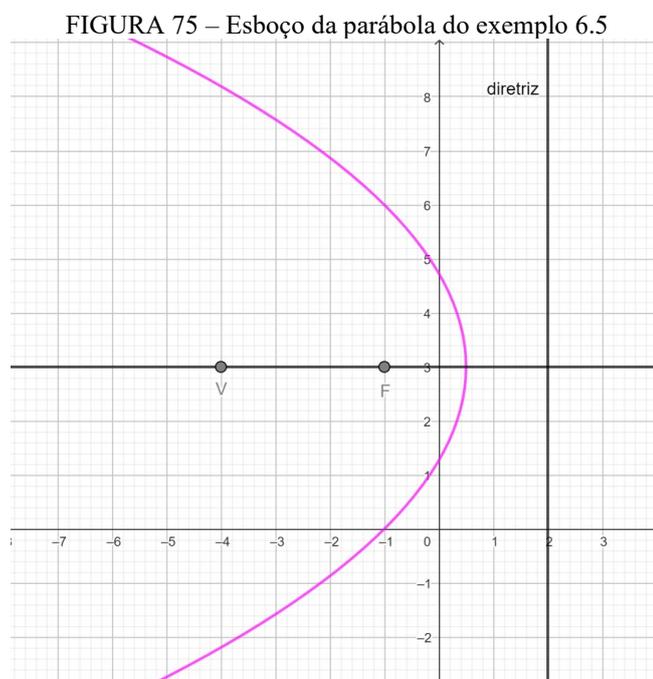
$$(x - x_C)^2 = 4a(y - y_C)$$

Se $p > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e se $p < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Para proporcionar uma compreensão mais clara e detalhada do teorema, apresentamos um exemplo prático a seguir. Este exemplo tem como objetivo demonstrar a aplicação do teorema em uma situação específica, destacando os passos necessários e as implicações dos resultados obtidos. Ao explorar este exemplo, esperamos que os conceitos envolvidos no teorema se tornem mais acessíveis e que sua relevância e utilidade sejam evidenciadas de forma concreta.

EXEMPLO 7.5: Determinar a equação da parábola cujo vértice e o foco são, respectivamente, os pontos $(-4, 3)$ e $(-1, 3)$.

Solução: Sendo o vértice com coordenadas $(-4, 3)$ e o foco com coordenadas $(-1, 3)$, conforme esboço apresentado na FIGURA 75.



FONTE: A pesquisadora.

Observa-se que estão sobre o eixo da parábola, devido a cada um dos pontos terem ordenada 3. Assim, o eixo da parábola é paralelo ao eixo das abscissas do plano e, pelo **TEOREMA 7.4**, a equação da parábola é dada por:

$$(y - y_c)^2 = 4a(x - x_c)$$

Substituindo as coordenadas do vértice na equação, tem-se:

$$(y - 3)^2 = 4a[x - (-4)]$$

$$(y - 3)^2 = 4a(x + 4)$$

Como a porção entre o foco e o vértice é dado por:

$$|a| = |\overline{FV}|$$

$$|a| = |-4 - (-1)|$$

$$|a| = |-4 + 1|$$

$$|a| = |-3|$$

$$|a| = 3$$

Logo, substituindo na equação da parábola tem-se:

$$(y - 3)^2 = 4 \cdot 3(x + 4)$$

$$(y - 3)^2 = 12(x + 4)$$

Portanto, a parábola em estudo tem equação $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$.

A equação (98) pode ser reescrita desenvolvendo as operações e reordenando os termos nos membros do seguinte modo:

$$(y - y_c)^2 = 4a(x - x_c)$$

$$y^2 - 2yy_c + y_c^2 = 4ax - 4ax_c$$

$$y^2 - 4ax - 2yy_c + y_c^2 + 4ax_c = 0 \quad (100)$$

A equação (100), tomando as constantes por $c_1 = -4a$, $c_2 = -2y_c$ e $c_3 = y_c^2 + 4ax_c$, pode ser apresentada como:

$$y^2 + c_1x + c_2y + c_3 = 0 \quad (101)$$

Utilizar o método de completar quadrado na equação (101), será apresentado uma equação que representa uma parábola com eixo paralelo ao eixo das abscissas.

E ao pensar em $c_1 = 0$, equação (101) terá a forma:

$$y^2 + c_2y + c_3 = 0, \quad (102)$$

que é uma equação quadrática com uma variável.

Analisando que uma equação quadrática pode ter raízes reais ou complexas. Logo, tomando por r_1 e r_2 as raízes da equação (102), ser reescrita como:

$$(y - r_1) \cdot (y - r_2) = 0.$$

Dessa forma,

- Se $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2$ então o lugar geométrico consiste em duas retas distintas, $y = r_1$ e $y = r_2$, paralelas ao eixo das abscissas.
- Se $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 = r_2$ então o lugar geométrico consiste em duas retas coincidentes, representada geometricamente por uma única reta paralela ao eixo das abscissas.
- Se $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ então não há lugar geométrico.

E a equação (99) pode ser analisada de forma similar.

Por Lehmann (1982, p. 134), os resultados desse estudo geram o seguinte teorema:

TEOREMA 7.6: A equação do segundo grau nas variáveis x e y , mas desprovida do termo em xy , pode ser escrita na forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$, a equação representa uma parábola cujo eixo é paralelo (ou coincidente) ao eixo das abscissas.

Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D = 0$, a equação representa duas retas distintas paralelas ao eixo das abscissas, duas retas coincidentes paralelas ao eixo das abscissas, ou nenhum lugar geométrico, conforme as raízes de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sejam reais e diferentes, reais e iguais ou complexas.

Se $A \neq 0$, $C = 0$ e $E \neq 0$, a equação representa uma parábola cujo eixo é paralelo (ou coincidente) ao eixo das ordenadas.

Se $A \neq 0$, $C = 0$ e $E = 0$, a equação representa duas retas distintas paralelas ao eixo das ordenadas, duas retas coincidentes paralelas ao eixo das ordenadas, ou nenhum lugar geométrico, conforme as raízes de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sejam reais e diferentes, reais e iguais ou complexas.

Apresenta-se um exemplo para elucidar o teorema.

EXEMPLO 7.7: Mostrar que a equação $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$ representa uma parábola e determinar as coordenadas do vértice e do foco, as equações da diretriz e do eixo e o comprimento de seu *latus rectum*.

Solução: Sendo $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$ a equação estudo representa, pelo **TEOREMA 7.6**, uma parábola cujo eixo é paralelo ao eixo das abscissas.

Aplicando o método de completar quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 48x - 20y - 71 &= 0 \\ 4y^2 - 20y &= 48x + 71 \\ 4(y^2 - 5y) &= 48x + 71 \\ 4\left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) &= 48x + 71 + 25 \end{aligned}$$

$$4\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 48x + 96$$

$$4\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 48(x + 2)$$

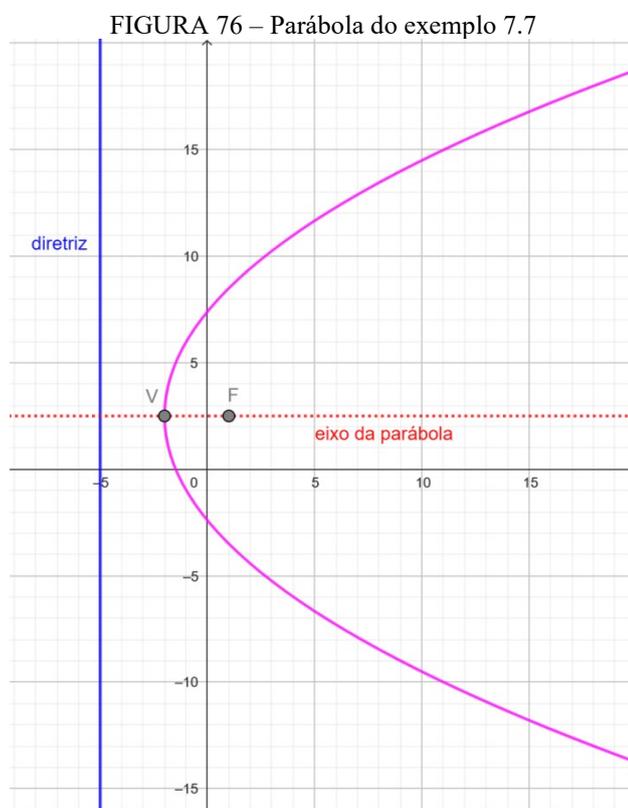
$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2)$$

Pela equação escrita na segunda forma padrão, as coordenadas do vértice são $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$.

Sendo $4a = 12$ então $a = 3$ e a parábola tem concavidade voltada para a direita.

O foco encontra-se sobre o eixo, que é paralelo ao eixo das abscissas, tendo suas coordenadas $\left(-2 + 3, \frac{5}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$.

A equação da diretriz é $x = -2 - 3$ ou $x = -5$. A equação do eixo é $y = \frac{5}{2}$. E o comprimento do *latus rectum* é $|4a| = 12$. A FIGURA 76 é a representação geométrica da parábola representada algebricamente por $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$.



FONTE: A pesquisadora.

Os conhecimentos a respeito da representação algébrica de uma parábola conferem ao estudante de Geometria Analítica uma base sólida para compreender não apenas sua estrutura fundamental, mas também para explorar outras características inerentes a essa curva. A habilidade de expressar a parábola por meio de uma equação algébrica não apenas simplifica sua descrição, mas também proporciona uma compreensão mais profunda dos elementos geométricos envolvidos.

O estudo aprofundado, por sua vez, lança luz sobre os comportamentos das retas tangentes à parábola, um aspecto crucial no estudo da curva. Ao explorar a representação algébrica, o estudante ganha uma perspectiva mais abrangente sobre como as propriedades intrínsecas da parábola influenciam a dinâmica das retas tangentes, ampliando assim sua compreensão da geometria analítica e fornecendo insights valiosos para análises mais avançadas.

7.4 TANGENTES À PARÁBOLA

Na investigação das propriedades geométricas de curvas, a análise das tangentes à parábola emerge como um componente no entendimento mais profundo dessa curva clássica. A abordagem das tangentes à parábola transcende a mera identificação de pontos de contato, proporciona um meio fundamental de explorar o comportamento local da curva e a dinâmica das mudanças em sua inclinação ao longo de diferentes pontos.

A compreensão dessas retas tangentes é intrinsecamente ligada à representação algébrica da parábola, e os conhecimentos resultantes não apenas refinam a descrição da curva, mas também oferecem uma base para análises mais avançadas. Este estudo, portanto, visa apenas elucidar a natureza geométrica das tangentes à parábola e destacar sua relevância na ampliação do escopo da Geometria Analítica e na contribuição para investigações mais sofisticadas e aprofundadas no âmbito matemático.

As tangentes à uma parábola é representada por uma equação linear visto que se tratam de retas. De acordo com Lehmann (1982, p. 137), há três casos a ser considerado no estudo da tangente à uma parábola: em um ponto dado de contato, havendo uma declividade dada e desde um ponto externo.

7.4.1 TANGENTE EM UM PONTO DADO DE CONTATO

Ao estudar a tangente a uma curva em um ponto específico, estamos interessados na reta que melhor se ajusta à curva nesse ponto, ou seja, aquela que compartilha o mesmo ponto de contato e possui a mesma inclinação da curva naquele ponto.

Utilizando para estudo, pelo **TEOREMA 7.2**, a parábola representada pela equação

$$y^2 = 4ax \quad (103)$$

E sendo a tangente uma reta, pelo **TEOREMA 3.33**, a sua equação é da forma:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y &= mx - mx_0 + y_0 \end{aligned} \quad (104)$$

Para a determinação da declividade da reta tangente e seguindo pelo fato da tangente ter um ponto em comum à parábola, dado por (x_0, y_0) , então ao substituir o valor de y indicado em (104) na equação (103), obtém-se:

$$\begin{aligned} (mx - mx_0 + y_0)^2 &= 4ax \\ (mx - mx_0)^2 + 2(mx - mx_0)y_0 + y_0^2 &= 4ax \\ m^2x^2 - 2m^2xx_0 + m^2x_0^2 + 2mxy_0 - 2mx_0y_0 + y_0^2 &= 4ax \\ m^2x^2 - 2m^2xx_0 + m^2x_0^2 + 2mxy_0 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - 4ax &= 0 \\ m^2x^2 + (-2m^2x_0 + 2my_0 - 4a)x + (y_0^2 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (105)$$

Para a tangência em um ponto, o discriminante da equação (105) deve ser nulo.

$$\begin{aligned} (-2m^2x_0 + 2my_0 - 4a)^2 - 4m^2(y_0^2 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0) &= 0 \\ (-2m^2x_0)^2 + 2(-2m^2x_0)(2my_0 - 4a) + (2my_0 - 4a)^2 - 4m^2y_0^2 - 4m^4x_0^2 + 8m^3x_0y_0 &= 0 \\ 4m^4x_0^2 - 8m^3x_0y_0 + 16m^2x_0a + 4m^2y_0^2 - 16my_0a + 16a^2 - 4m^2y_0^2 - 4m^4x_0^2 + 8m^3x_0y_0 &= 0 \\ 16m^2x_0a - 16my_0a + 16a^2 &= 0 \\ 16(m^2x_0 - my_0 + a) &= 0 \\ x_0m^2 - y_0m + a &= 0 \end{aligned} \quad (106)$$

Pela equação (106), tem-se:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-(-y_0) \pm \sqrt{(-y_0)^2 - 4x_0a}}{2x_0} \\ m &= \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4x_0a}}{2x_0} \end{aligned} \quad (107)$$

Como o ponto (x_0, y_0) pertence a parábola, então:

$$y_0^2 = 4ax_0 \quad (108)$$

Substituindo (108) em (107), obtém-se:

$$m = \frac{y_0 \pm \sqrt{4x_0a - 4x_0a}}{2x_0}$$

$$m = \frac{y_0}{2x_0} \quad (109)$$

E substituindo (109) na equação (104), vem:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

$$2x_0y - 2x_0y_0 = xy_0 - x_0y_0$$

$$2x_0y = y_0(x + x_0) \quad (110)$$

Reescrevendo a equação (108), obtém-se:

$$2x_0 = \frac{y_0^2}{2a} \quad (111)$$

Logo, inserindo o valor indicado em (111) na equação (110), tem-se:

$$\frac{y_0^2}{2a}y = y_0(x + x_0)$$

$$y_0^2y = 2ay_0(x + x_0)$$

$$y_0y = 2a(x + x_0)$$

Assim, a equação $y_0y = 2a(x + x_0)$ é a mais comum forma da equação da tangente.

Diversas propriedades da parábola estão associadas à tangente em qualquer ponto da curva. O registro desse resultado, por Lehmann (1982, p. 138), é dado pelo teorema a seguir.

TEOREMA 7.7: A tangente à parábola $y^2 = 4ax$ em qualquer ponto $P_0(x_0, y_0)$ sobre a curva tem por equação

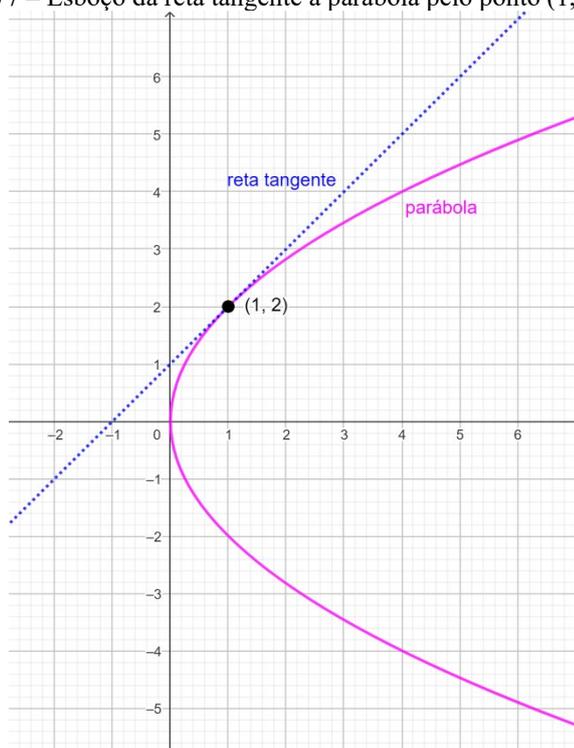
$$y_0y = 2a(x + x_0).$$

Para proporcionar uma compreensão mais clara desse teorema, apresentamos um exemplo prático a seguir. Neste exemplo, exploraremos a equação da tangente a uma parábola, detalhando os passos necessários para derivar essa equação e demonstrando sua aplicação em um caso específico.

EXEMPLO 7.8: Determinar para a parábola $y^2 - 4x = 0$ a equação da tangente ao ponto $(1, 2)$ pertencente à curva.

Solução: Sendo a parábola $y^2 - 4x = 0$, deseja determinar a equação da tangente ao ponto $(1, 2)$ pertencente à curva, conforme FIGURA 77.

FIGURA 77 – Esboço da reta tangente à parábola pelo ponto $(1, 2)$ da curva



FONTE: A pesquisadora.

Reescrevendo a equação da parábola, como mostrada no **TEOREMA 7.2**, pelo método de completar quadrado, vem:

$$y^2 - 4x = 0$$

$$y^2 = 4x$$

Como $4a = 4$ isso implica que $a = 1$.

Assim, pelo **TEOREMA 7.7**, obtém-se:

$$2y = 2 \cdot 1 \cdot (x + 1)$$

$$2y = 2x + 2$$

$$2x - 2y + 2 = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

Portanto, a equação da tangente à parábola é $x - y + 1 = 0$.

A tangente em um ponto de contato fornece uma aproximação linear local da curva, sendo uma ferramenta valiosa na análise de comportamentos locais e na resolução de problemas práticos em diversas áreas de conhecimento.

7.4.2 TANGENTE TENDO UMA DECLIVIDADE DADA

No contexto da Geometria Analítica, a tangente com uma declividade dada é uma abordagem que enriquece a compreensão das características locais de uma curva. Ao considerar uma curva em um ponto específico e procurar uma tangente com uma declividade predefinida, estamos essencialmente buscando uma reta que, além de compartilhar o ponto de contato, também possui uma inclinação específica, ou seja, uma determinada taxa de variação. Este conceito é particularmente relevante ao examinar problemas práticos nos quais a taxa de mudança em um ponto específico é conhecida ou desejada.

Para encontrar a equação da reta tangente à uma parábola quando dada um determinada declividade, toma-se a parábola, pelo **TEOREMA 7.2**, sendo representada pela equação:

$$y^2 = 4ax \quad (112)$$

Se faz necessário ter em mente que a tangente é uma reta. Então, pelo **TEOREMA 3.33**, a tangente é representada pela equação:

$$y = mx + b, \quad (113)$$

onde m é a declividade dada e b é uma constante que deve ser determinada.

Substituindo o valor de y indicado por (112) na equação (113), obtém-se:

$$\begin{aligned} (mx + b)^2 &= 4ax \\ m^2x^2 + 2mbx + b^2 - 4ax &= 0 \\ m^2x^2 + (2mb - 4a)x + b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Visto que a equação recai a uma equação quadrática, então a condição de tangência é dada cumprida para o discriminante nulo, ou seja,

$$\begin{aligned} (2mb - 4a)^2 - 4m^2b^2 &= 0 \\ 4m^2b^2 - 16mba + 16a^2 - 4m^2b^2 &= 0 \\ 16a(-mb + a) &= 0 \\ -mb + a &= 0 \\ b &= \frac{a}{m} \end{aligned} \quad (114)$$

Substituindo o valor da constante b indicada em (114) na equação (113), encontra-se:

$$y = mx + \frac{a}{m},$$

donde $m \neq 0$.

Essas discussões, por Lehmann (1982, p. 139), geram o seguinte teorema:

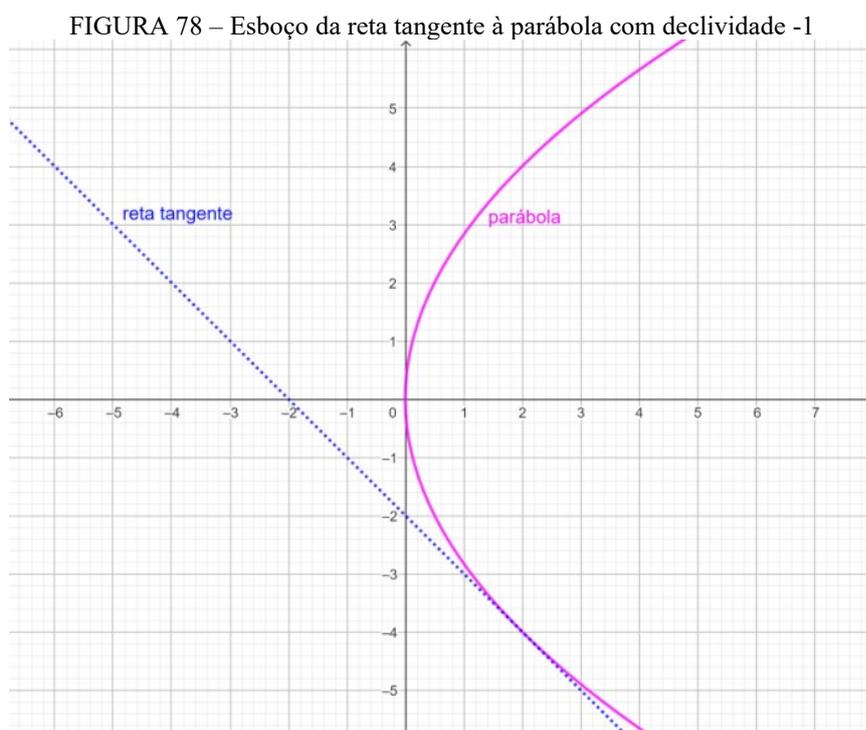
TEOREMA 7.9: A tangente de declividade m à parábola $y^2 = 4ax$ tem por equação

$$y = mx + \frac{a}{m}, \quad m \neq 0.$$

Para melhor compreensão do teorema, segue exemplo.

EXEMPLO 7.10: Determinar a equação da tangente de declividade -1 à parábola $y^2 - 8x = 0$.

Solução: Sendo a parábola $y^2 - 8x = 0$, deseja determinar a equação da tangente de declividade -1 pertencente à curva. Sendo a declividade -1 , então a reta tangente será decrescente, conforme esboço apresentado na FIGURA 78.



FONTE: A pesquisadora.

Reescrevendo a equação da parábola, como mostrada no **TEOREMA 7.2**, pelo método de completar quadrado, vem:

$$y^2 - 8x = 0$$

$$y^2 = 8x$$

Como $4a = 8$ isso implica que $a = 2$.

Assim, pelo **TEOREMA 7.9**, obtém-se:

$$y = -1x + \frac{2}{(-1)}$$

$$y = -x - 2$$

$$x + y + 2 = 0$$

Portanto, a equação da tangente à parábola é $x + y + 2 = 0$.

A tangente com uma declividade dada oferece uma abordagem perspicaz para analisar e resolver questões locais em diversas disciplinas, desde otimização até modelagem matemática de fenômenos naturais.

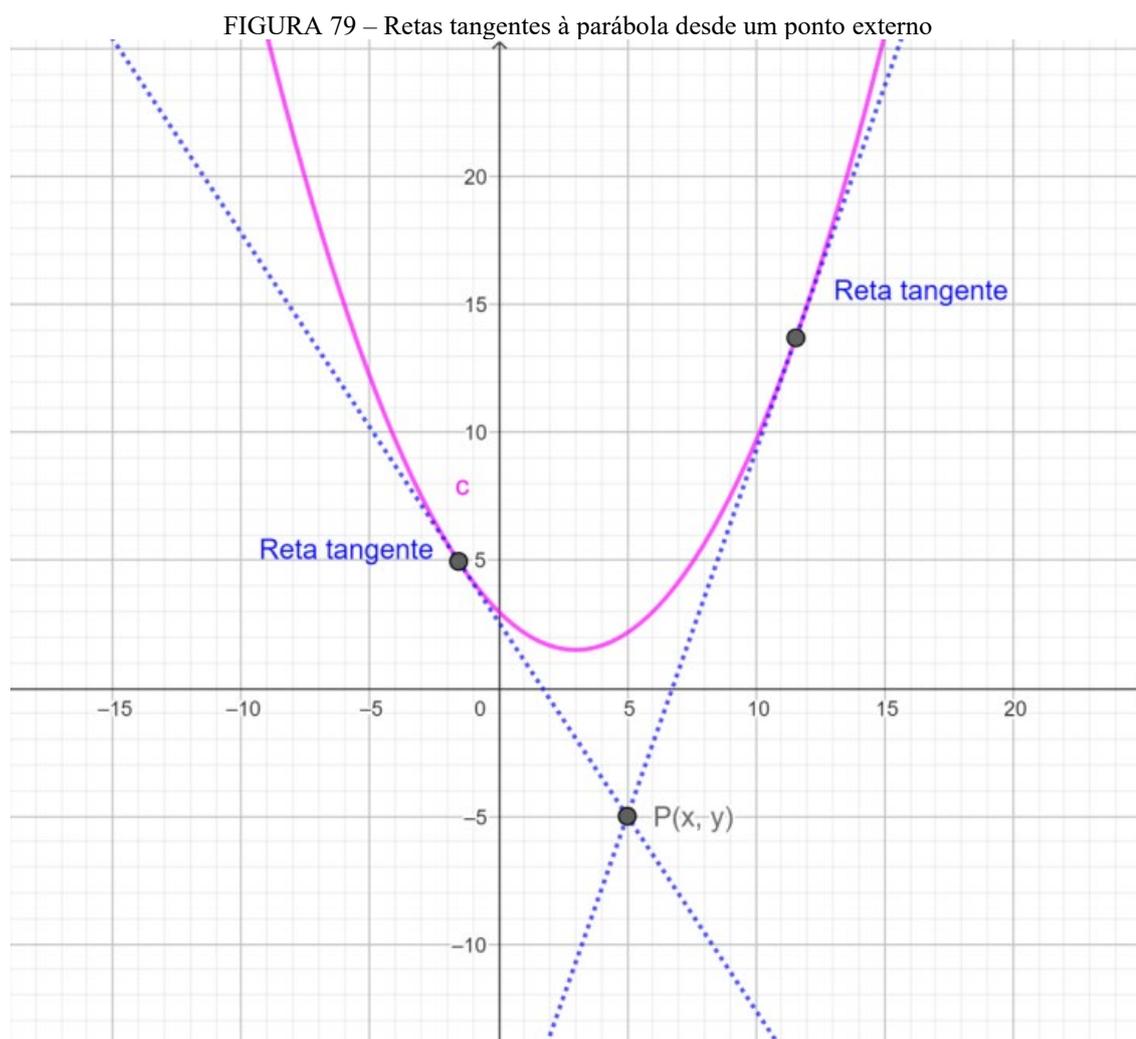
Essa perspectiva avançada da tangente permite uma compreensão mais refinada das relações entre variáveis e é importante para a modelagem precisa de fenômenos complexos em diferentes campos de estudo.

7.4.3 TANGENTE DESDE UM PONTO EXTERNO

Ao investigar a tangente a partir de um ponto externo específico, estamos interessados na reta que toca a curva em um ponto distinto, proporcionando uma visão única das propriedades locais da curva nesse ponto.

Este conceito é particularmente valioso quando se examinam problemas práticos nos quais é necessário entender como uma curva responde a perturbações em pontos externos específicos.

Com isso, deseja-se conhecer a família de retas que intersectam um ponto $P(x, y)$ qualquer externo a parábola, conforme ilustra o exemplo da FIGURA 79.



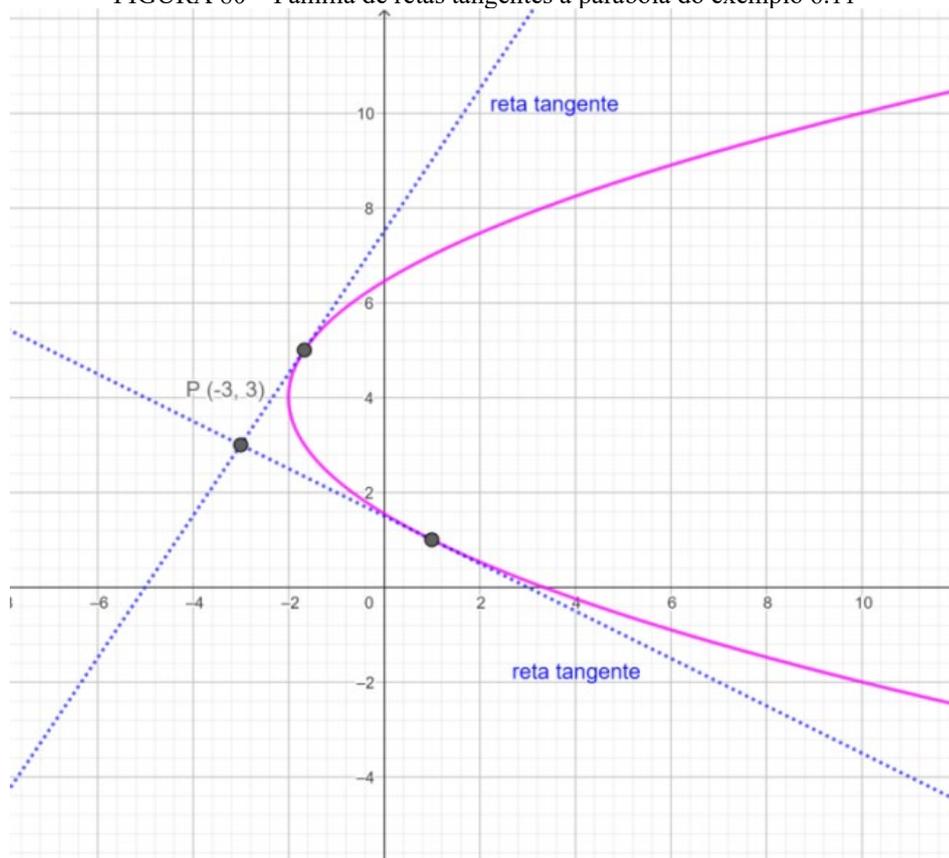
FONTE: A pesquisadora.

Para elucidar o esse conceito, será apresentado um exemplo.

EXEMPLO 6.11: Determinar as equações das retas tangentes traçadas desde o ponto $(-3, 3)$ à parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

Solução: Sendo $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$ uma parábola e o ponto $(-3, 3)$ um ponto externo à curva, deseja-se determinar as equações das retas tangentes a essa parábola e intersectam esse ponto externo.

FIGURA 80 – Família de retas tangentes à parábola do exemplo 6.11



FONTE: A pesquisadora.

A equação da família de retas que intersectam o ponto $(-3, 3)$, segundo **TEOREMA 3.33**, é dada por:

$$y - 3 = m[x - (-3)]$$

$$y - 3 = m(x + 3),$$

onde m é a declividade da reta tangente procurada.

Reorganizando a equação da reta tangente, vem:

$$y - 3 = mx + 3m$$

$$y = mx + 3m + 3$$

Substituindo o valor de y na equação da parábola em estudo, obtém-se:

$$(mx + 3m + 3)^2 - 3x - 8(mx + 3m + 3) + 10 = 0$$

$$m^2x^2 + 2mx(3m + 3) + (3m + 3)^2 - 8(mx + 3m + 3) + 10 = 0$$

$$m^2x^2 + 6m^2x + 6mx + 9m^2 + 18m + 9 - 3x - 8mx - 24m - 24 + 10 = 0$$

$$m^2x^2 + (6m^2 + 6m - 8m - 3)x + (9m^2 + 18m + 9 - 24m - 24 + 10) = 0$$

$$m^2x^2 + (6m^2 - 2m - 3)x + (9m^2 - 6m - 5) = 0$$

Visto que a equação recai a uma equação quadrática, então a condição de tangência é dada cumprida para o discriminante nulo. Logo:

$$\begin{aligned}(6m^2 - 2m - 3)^2 - 4m^2(9m^2 - 6m - 5) &= 0 \\ (6m^2 - 2m)^2 - 6(6m^2 - 2m) + 9 - 36m^4 + 24m^3 + 20m^2 &= 0 \\ 36m^4 - 24m^3 + 4m^2 + 12m + 9 - 36m^4 + 24m^3 + 20m^2 &= 0 \\ -12m^2 + 12m + 9 &= 0\end{aligned}$$

Calculando o valor de m , temos:

$$\begin{aligned}m &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 9}}{2 \cdot (-12)} \\ m &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 432}}{-24} \\ m &= \frac{-12 \pm 24}{-24}\end{aligned}$$

Assim:

$$m = \frac{12}{-24} \quad \text{ou} \quad m = \frac{-38}{-24}$$

Para a equação quadrática $-12m^2 + 12m + 9 = 0$ encontra-se $m = -\frac{1}{2}$ e $m = \frac{3}{2}$.

Para $m = -\frac{1}{2}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}y - 3 &= -\frac{1}{2}(x + 3) \\ 2y - 6 &= -x - 3 \\ 2y + x - 3 &= 0\end{aligned}$$

E para $m = \frac{3}{2}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}y - 3 &= \frac{3}{2}(x + 3) \\ 2y - 6 &= 3x + 9 \\ 2y - 3x - 15 &= 0\end{aligned}$$

Portanto, as equações das retas tangentes à parábola desde o ponto externo são $2y + x - 3 = 0$ e $2y - 3x - 15 = 0$.

A tangente a partir de um ponto externo oferece uma abordagem essencial para analisar a sensibilidade local de uma curva em relação a variações externas, sendo uma ferramenta em áreas como otimização, controle e modelagem matemática de sistemas dinâmicos. O estudo desta perspectiva amplia a compreensão das interações complexas entre uma curva e seu ambiente externo, proporcionando insights valiosos para a resolução de problemas práticos e avançando o conhecimento em diversas disciplinas.

7.5 A FUNÇÃO QUADRÁTICA

No domínio da matemática, a parábola, concebida através de uma equação quadrática, transcende sua estrutura algébrica para desempenhar um papel significativo na compreensão mais ampla das formas e padrões no mundo natural e além.

O **TEOREMA 7.6**, apresenta que a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma parábola, admitindo alguns critérios na sua representação algébrica.

Assim, a equação:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (115)$$

uma função quadrática na variável x , representa uma parábola que, graficamente, tem seu eixo paralelo ou coincidente ao eixo das ordenadas.

Ao reduzir a equação (115) à segunda forma padrão da equação da parábola, pelo método de completar quadrado na variável x , obtém-se:

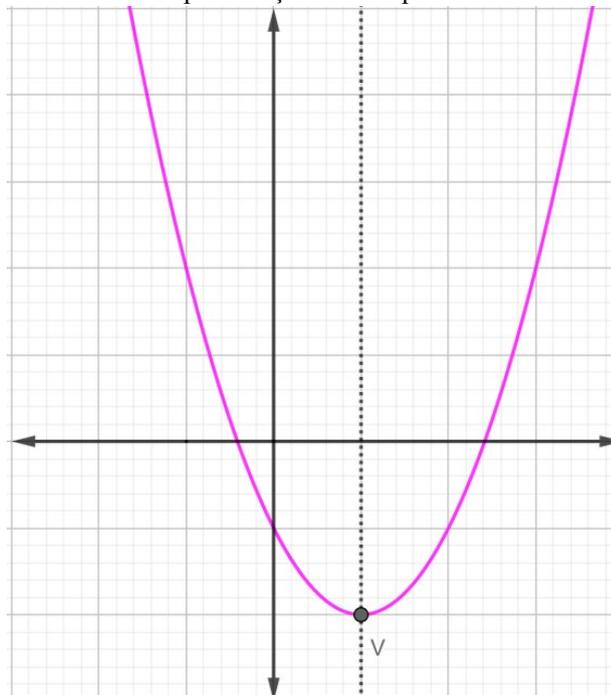
$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= y - c \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= \frac{y}{a} - \frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{1}{a}\left(y - c + \frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned} \quad (116)$$

A equação (116) é a equação de uma parábola com eixo paralelo ou coincidente ao eixo das ordenadas e cujo vértice é o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Assim, a parábola descrita pela equação (115) segue a condição:

- Se $a > 0$ a sua concavidade será voltada para cima;

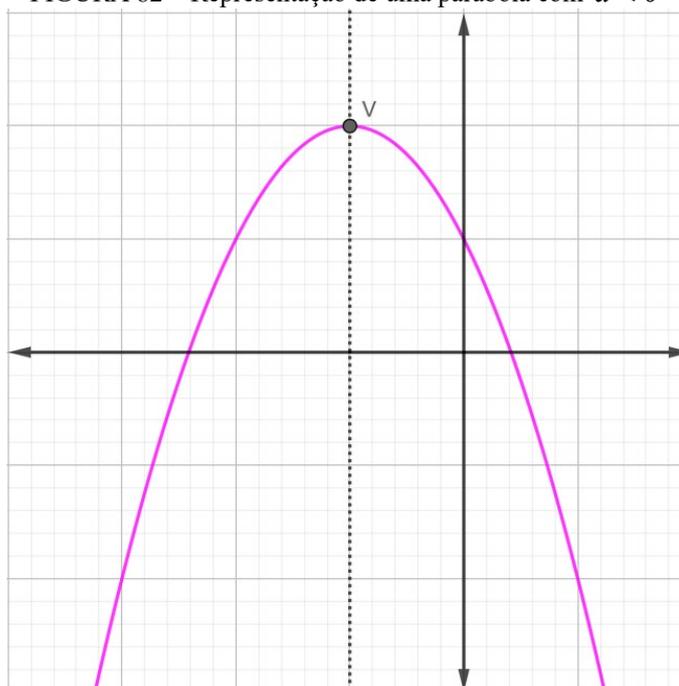
FIGURA 81 – Representação de uma parábola com $a > 0$



FONTE: A pesquisadora.

- Se $a < 0$ a sua concavidade será voltada para baixo.

FIGURA 82 – Representação de uma parábola com $a < 0$



FONTE: A pesquisadora.

Outra característica a ser abordada é o fato de um ponto sobre uma curva contínua cuja ordenada é algebricamente maior do que a de qualquer ponto em sua vizinhança sobre a curva é denominado um **ponto de máximo** da curva. Pela FIGURA 81, quando $a > 0$, a parábola tem um único ponto mínimo, o vértice.

De modo análogo, um ponto cuja ordenada é algebricamente menor do que a de qualquer ponto na vizinhança sobre a curva é denominado **ponto mínimo** da curva. E pela FIGURA 82, quando $a < 0$, a parábola tem um único ponto máximo, o vértice.

Pela interpretação analítica, sendo $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ as coordenadas do vértice da parábola, tem-se:

- Se $a > 0$, a parábola indicada pela equação (115) tem um valor mínimo igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.
- Se $a < 0$, a parábola indicada pela equação (115) tem um valor máximo igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.

Os resultados desse estudo, por Lehmann (1982, p. 142), é dado pelo seguinte teorema:

TEOREMA 7.12: A parábola representada pela função quadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

cujo o eixo é paralelo (ou coincidente) ao eixo das ordenadas e cujo vértice é o ponto

$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, tem características:

- Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e seu vértice é um ponto mínimo, cujo valor é igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.
- Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e seu vértice é um ponto máximo, cujo valor é igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ quando o valor da abscissa é $-\frac{b}{2a}$.

Segue exemplo para melhor elucidar o teorema.

EXEMPLO 7.13: Para a função quadrática $y = 4x^2 + 16x + 19$ que representa uma parábola, determinar sua concavidade, seu vértice e seu valor máximo ou mínimo.

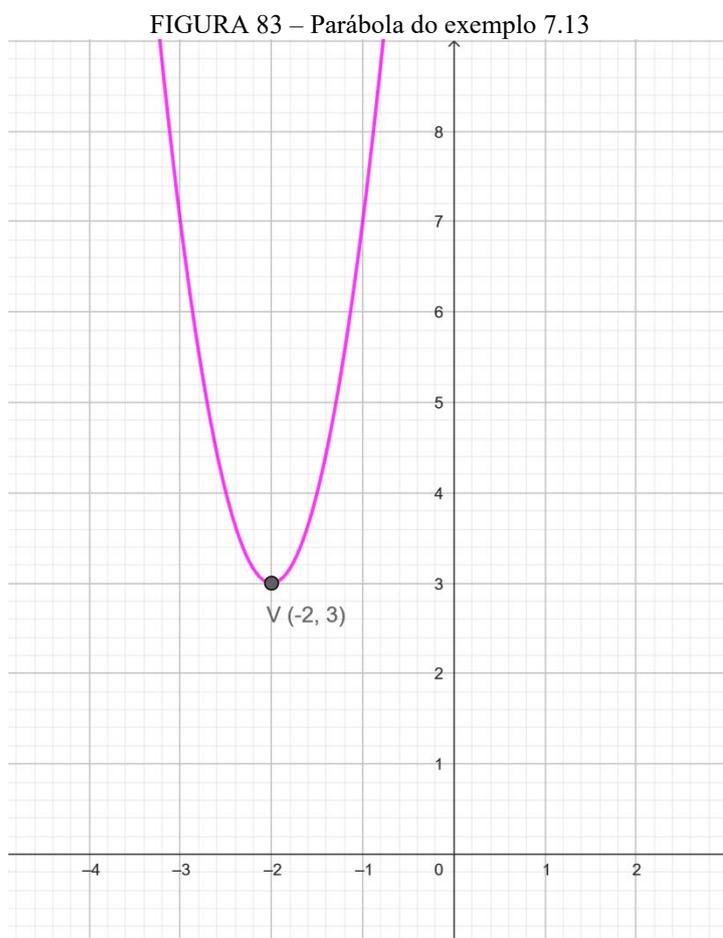
Solução: Sendo $y = 4x^2 + 16x + 19$ uma parábola na qual $a = 4 > 0$, então tem sua concavidade voltada para cima.

Pelo **TEOREMA 7.12**, o vértice dessa parábola é dado no ponto:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{16}{2 \cdot 4}, -\frac{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 19}{4 \cdot 4} \right) &= \left(-\frac{16}{8}, -\frac{(256 - 304)}{16} \right) \\ &= \left(-2, -\frac{(-48)}{16} \right) \\ &= (-2, 3) \end{aligned}$$

Logo, a parábola tem seu valor de mínimo igual a 3 quando a abscissa é igual a -2 .

A FIGURA 83 é a representação gráfica da parábola em estudo.



FONTE: A pesquisadora.

O estudo das propriedades geométricas e algébricas da parábola é essencial para compreender fenômenos naturais, modelar comportamentos físicos e resolver uma variedade de problemas em diferentes campos, desde física e engenharia até economia e ciências computacionais. A versatilidade da parábola enquanto representação gráfica de uma equação quadrática a torna uma ferramenta indispensável na análise matemática aplicada e teórica.

8 CONCLUSÃO

Na vastidão conceitual da Geometria, as noções intuitivas de ponto, reta e plano transcendem suas representações formais, revelando-se como pilares fundamentais na compreensão do espaço. O ponto, em sua singularidade, é o ponto primordial a partir do qual emergem as demais entidades geométricas. Ele encarna a ideia mais elementar de posição e localização. A reta, por sua vez, é uma trilha linear que se estende indefinidamente, conectando pontos em uma trajetória clara e direta. Sua linearidade intrínseca é uma expressão da continuidade e ordem no espaço. O plano, enquanto superfície que se estende sem limites, proporciona uma extensão natural das retas, oferecendo uma noção de expansão bidimensional. Essas entidades geométricas fundamentais não se restringem a meros objetos de estudo, mas representam ideias abstratas que servem como alicerce para a construção de todo o edifício geométrico. A geometria, através dessas intuitivas noções de ponto, reta e plano, transcende a formalidade matemática, conectando-se de maneira intrínseca com nossa percepção do espaço e desempenhando um papel fundamental na nossa apreciação estética e compreensão do mundo à nossa volta.

Explorar as ideias fundamentais de ponto, reta e plano na Geometria, além de ser uma jornada conceptual rica em significado, tem implicações profundas ao transcender para o plano coordenado, base da Geometria Analítica. Enquanto as noções intuitivas fornecem uma compreensão inerente do espaço, a transição para o plano coordenado permite uma abordagem mais formal e quantitativa. O ponto, inicialmente uma abstração de posição, ganha coordenadas específicas, conferindo-lhe uma identidade numérica. A reta, que antes era uma trilha linear no espaço, é agora representada por uma equação matemática, conectando diretamente a geometria intuitiva à álgebra. O plano coordenado, ao proporcionar uma estrutura quantitativa para as ideias geométricas, revela uma simbiose entre a intuição e a precisão matemática. Essa transição não apenas enriquece nossa compreensão do espaço, mas também capacita a modelagem e análise de fenômenos complexos, proporcionando um elo essencial entre a geometria intuitiva e a análise matemática rigorosa. A Geometria Analítica, assim, emerge como uma ponte valiosa que conecta a beleza intuitiva das formas geométricas à precisão formal das coordenadas, ampliando o alcance da geometria e fortalecendo suas aplicações em diversas disciplinas.

Na teoria das retas, encontramos um conceito fundamental que vai além de suas representações algébricas, revelando-se como uma abstração rica em significado. As retas, em sua essência geométrica, são infinitas extensões lineares que conectam pontos sem curvatura. Elas são a manifestação da linearidade e ordem no espaço. Ao explorar a teoria das retas, transcendemos as equações algébricas para apreciar a ideia de uma trajetória ininterrupta que se estende indefinidamente em ambas as direções. As retas, por sua simplicidade e clareza, tornam-se a base para a construção de estruturas geométricas mais complexas. Além de seu papel evidente na geometria, as retas também desempenham um papel central em outras áreas da matemática e além, servindo como ferramenta fundamental para a modelagem de relações lineares em diversos contextos, da física à estatística. A abstração das retas não se limita à sua representação gráfica, mas simboliza a linearidade intrínseca encontrada em muitos fenômenos naturais e sistemas conceituais, revelando uma simplicidade que permeia a complexidade matemática e além.

A circunferência se revela como uma figura teórica que transcende suas raízes em expressões algébricas para se tornar um conceito visualmente enriquecedor. Sem recorrer a fórmulas, consideramos a circunferência como a fronteira perfeita e contínua que envolve um espaço geométrico. O centro da circunferência desempenha um papel crucial ao proporcionar simetria e um ponto de referência para sua expansão ao redor. O raio, por sua vez, é a medida que define o alcance dessa forma única. A teoria por trás da circunferência vai além de sua representação como uma entidade geométrica, estendendo-se a uma narrativa visual de equilíbrio e harmonia. Seu papel vai muito além de ser uma simples curva, encontrando aplicação em contextos tão diversos quanto a modelagem das trajetórias dos planetas e a criação de objetos tão fundamentais como rodas. Em um sentido mais amplo, a circunferência não é apenas uma curva, mas um princípio fundamental que conecta as intrincadas relações entre forma, simetria e movimento no vasto tecido do pensamento matemático.

A elegância da parábola reside na sua representação gráfica, que se assemelha a uma curva suave e simétrica. O vértice da parábola, um ponto crítico, é central para sua estética, determinando o ponto mais alto ou mais baixo da curva e carregando consigo nuances de equilíbrio e proporção. A inclinação e a abertura da parábola, influenciadas pelo coeficiente quadrático "a", contribuem para a expressividade dessa forma matemática. A análise mais profunda da parábola não se limita à árida álgebra, mas se estende à sua interpretação geométrica como uma representação intrínseca de fenômenos naturais, como o movimento dos projéteis, padrões de luz em espelhos côncavos, e a trajetória dos planetas. Assim, a

parábola, além de sua utilidade na resolução de problemas matemáticos, torna-se uma linguagem visual que desvenda os segredos da natureza e possibilita a apreciação da estética matemática em nosso universo.

Conclui-se que a aplicação das teorias de Vygotsky no ensino da geometria analítica, conforme discutido nessa pesquisa, é relevante para proporcionar uma compreensão mais significativa dos conceitos matemáticos. A teoria socioconstrutivista de Vygotsky, com ênfase na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e na mediação, sugere que a aprendizagem é mais eficaz quando os alunos estão engajados em atividades colaborativas que exploram as representações gráficas antes de abordar as análises algébricas. A construção das curvas permite que os estudantes visualizem e compreendam os conceitos abstratos. Isso facilita não apenas a internalização dos conhecimentos, mas também o desenvolvimento de habilidades críticas de resolução de problemas e pensamento analítico.

Esta pesquisa tem por objetivo integrar o conhecimento da Álgebra e da Geometria, destacando a importância de dar sentido ao ensino da Geometria Analítica através da representação gráfica. Ao abordar inicialmente a representação gráfica, os estudantes desenvolvem uma intuição geométrica essencial para a posterior transição para a análise algébrica. Esta abordagem torna a aprendizagem mais interativa e envolvente, mas também alinha-se com a perspectiva de Vygotsky de que a linguagem e a colaboração são fundamentais para a construção do conhecimento.

Portanto, a integração de representações gráficas antes das análises algébricas enriquece o entendimento dos estudantes, como também promove uma aprendizagem mais integrada e conectada dos conceitos de Geometria Analítica. Adicionalmente, esta pesquisa serve como um referencial para estudos futuros e como um recurso para educadores em sua formação e no planejamento de suas práticas pedagógicas, auxiliando-os a criar estratégias de ensino mais eficazes e significativas.

REFERÊNCIAS

- BARSOZZI, L. (1972). *Geometria Analítica com Vetores e Matrizes*. Curitiba: A. M. Cavalcanti.
- BOULOS, P., & CAMARGO, I. (1997). *Introdução à Geometria Analítica no Espaço*. São Paulo: Makron Books.
- CARROLL, M. T., & RYKKEN, E. (2018). *Geometry: The line and the circle* (Vol. 44). Providence: MAAPress.
- CASTRUCCI, B. (1968). *Geometria curso moderno* (3.^a ed., Vol. 1). São Paulo: Livraria Nobel S. A.
- COXETER, H. S. *Introduction to Geometry*. Wiley Classics Library.
- COXETER, H. S. (1980). *Introduction to Geometry* (2.^a ed.). Toronto: Wiley Classic Library.
- EUCLIDES. (2009). *Os Elementos*. (I. Bicudo, Trad.) São Paulo: UNESP.
- Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática* (5.^a ed.). (H. H. Domingues, Trad.) Campinas: Editora da Unicamp.
- FERNANDES, J. P. (2022). Prática pedagógica no ensino de geometria e a teoria socioconstrutivista de Vygotsky. *Connectionline* (29), 149 - 162.
- GERÔNIMO, J. R., & FRANCO, V. S. (2003). *Geometria Plana e Espacial - Um Estudo Axiomático* (1.^a ed.). Maringá: Eduem.
- GROENWALD, C. L., & BECHER, E. L. (2010). Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1.^o ano do Ensino Médio. *Educação Matemática Pesquisa*, 12, 242 - 270.
- HILBERT, D. (2003). *Fundamentos da Geometria* (1.^a ed.). (G. Valente, Ed., & L. Unger, Trad.) Lisboa, Portugal: Gradiva.
- LEHMANN, C. H. (1982). *Geometria Analítica* (4.^a ed.). Porto Alegre: Editora Globo.
- LOCK WOOD, E. H. (1961). *A Book of Curves*. Londres: Universidade de Cambridge.
- MOISE, E. E., & DOWNS, F. L. (1971). *Geometria Moderna - parte I*. (R. G. Watanabe, & D. A. Mello, Trans.) São Paulo: Edgard Blücher.
- MORGADO, A. C., WAGNER, E., & JORGE, M. (2008). *Geometria I*. Fortaleza: VestSeller.
- MORLEY, C. (1920). *Hide and seek*. New York: George H. Doran Co.
- NETO, A. C. (2013). *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana* (1.^a ed.). (H. Alencar, Ed.) Rio de Janeiro, Brasil: SBM.

- PAIVA, A. B. (2018). A História da Matemática no ensino e na aprendizagem da multiplicação. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 5, 98 - 108.
- REGO, T. C. (2001). *Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação* (12 ed.). Rio de Janeiro: Vozes.
- REZENDE, E. Q., & QUEIROZ, M. L. (2008). *Geometria Euclidiana Plana* (2.^a ed.). Campinas: Editora da Unicamp.
- RIGHETTO, A. (1982). *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: IBLC.
- SANTOS, A. O., CARDOSO, M. R., & OLIVEIRA, G. S. (1 de Outubro de 2017). *O ensino e a aprendizagem de matemática na educação infantil numa perspectiva histórico-cultural*. Acesso em 18 de Maio de 2024, disponível em https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/32386/1/2017_art_egsouzahafreeres.pdf
- SIVLVA, A. W., BRAGA, R. M., & GIORDANO, C. C. (2021). Contribuições do pensamento vygotskiano para a modelagem matemática. *Rev. Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 16, 1681 - 1693.
- SOUZA, J. R. (2010). *Matemática: Novo Olhar*. São Paulo: FTD.
- STEWART, J. (2013). *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning.
- VALLADARES, R. J. (1990). *Geometria Analítica do Plano e do Espaço*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos.