

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

IDALBERTO BATISTA VIEIRA JÚNIOR

TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM BRASILEIRA PARA A OBRA DE  
VLADMIR USPENSKII

CURITIBA

2025

IDALBERTO BATISTA VIEIRA JÚNIOR

TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM BRASILEIRA PARA A OBRA DE  
VLADMIR USPENSKII

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana.

CURITIBA

2025

---

IDALBERTO BATISTA VIEIRA JÚNIOR  
TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM BRASILEIRA PARA A OBRA  
DE VLADMIR USPENSKI/ IDALBERTO BATISTA VIEIRA JÚNIOR. – Curitiba,  
2025-

56 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana.

Trabalho Acadêmico – Universidade Federal do Paraná, 2025.

1. Triângulo de Pascal, Análise Combinatória, Combinações Sim-  
ples, Relação de Stifel.

I. Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana..

II. Universidade Federal do Paraná

III. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

IV. TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM BRASILEIRA  
PARA A OBRA DE VLADMIR USPENSKI

CDU 02:141:005.7

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - 31075010001P2

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de IDALBERTO BATISTA VIEIRA JUNIOR, intitulada: TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM BRASILEIRA PARA A OBRA DE VLADIMIR USPENSKII, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 21 de Julho de 2025.

  
LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA  
Presidente da Banca Examinadora

  
ADRIANA LUIZA DO PRADO  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

  
IZABELA PATRÍCIO BASTOS  
Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

*Este trabalho é dedicado a todas as pessoas que acreditam que o conhecimento muda o mundo, em particular, o conhecimento matemático.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A Deus por caminhar comigo e não me desamparar nesta trajetória. À minha mãe Elair, minhas irmãs Talita e Natália, cunhados Willian e Guilherme, meus sobrinhos Gabriel e Miguel, e meu amado tio e padrinho, Pe. Claudio da Conceição, pois sempre estiveram a meu lado torcendo por esta conquista. Ao meu orientador Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana por ter me incentivado, apoiado e ensinado tantas coisas, bem como tornar este trabalho possível, por meio de seu acolhimento, sugestões e conversas amigas. Aos meus amigos de Profmat, Sônia, Ricardo, Ruben, Ane, Gustavo, Rodrigo, e de modo particularmente especial, à minha grande amiga Alaíde Essenfelder, que me incentivou e sempre me acompanhou nessa caminhada. Aos meus professores do mestrado: Dra. Lucelina, Dra. Adriana, Dr. Carlos Henrique, Dr. Aldemir, Dr. Eduardo, que tanto ensinaram e sempre me acolheram respeitosamente. Às minhas grandes amigas de graduação que foram exemplo, referência inspiração e companhia: Juliana, Izabele, Priscila, Fernanda, Suellen, Luana, Márcia. Aos meus amigos de trabalho que estiveram comigo ao longo dos anos me apoiando e incentivando: Ana Regina, Zenith, Marcia, Érika, Mônica e Dani, Maria Cristina, Marcelo e Fabiane, e de modo muito especial minha querida amiga Dra. Renata Balbino, que sempre me incentivou a continuar estudando, a alimentar o desejo de ser mestre, e quem sabe um dia, igualmente doutor. Não posso esquecer das minhas grandes amigas Angélica e Bárbara, que festejaram minha aprovação e me deram o primeiro caderno dos muitos que usei nessa lida. Agradeço ainda minhas amigas Vanda e Gianne, Marcelle e Nísia por estarem sempre perto inspirando e incentivando o término deste trabalho. Também agradeço ao Jackson e Sindi pelas orações, pelo carinho e pela proximidade. Cito ainda minha psicóloga Aline Penteado por me perguntar do mestrado em todas as sessões, me ajudando a entender e viabilizar a finalização deste processo.. São muitos amigos a quem agradecer, mas não posso encerrar sem citar o Instituto Bom Aluno do Brasil que abriu portas para que um dia eu sonhasse este mestrado e agora fosse possível. Destaco entre tantas profissionais maravilhosas que cuidaram de mim, a minha amiga psicóloga Mabel, e minha amiga pedagoga Lígia, que acreditaram tanto nesse menino atrapalhado, e representando todos os amigos dessa época, o principal, meu grande irmão Andre Luiz de Matos.

## RESUMO

O presente trabalho se propõe a apresentar conceitos de Análise Combinatória, a partir da leitura de diversos textos, sendo o principal "Pascal's Triangle", do matemático russo Vladimir Uspenskii. Neste texto são explorados os conceitos mais elementares de Análise Combinatória, tendo por problema motivador uma questão da VIII Olimpíada de Matemática de Moscou, ocorrida em 1945. O texto datado de 1974, constrói a noção de coeficientes binomiais, Triângulo de Pascal e combinações simples, por meio da situação-problema do Capítulo I. Destaca-se a comparação do número de subconjuntos de um conjunto dado com o conceito de combinações simples, paralelo pouco ou nenhuma vez observado em textos Universitários ou de Ensino Médio brasileiros. A releitura desta obra, como incentivo à curiosidade e ao estudo de Análise Combinatória é o grande objetivo deste trabalho.

**Palavras-chaves:** Triângulo de Pascal, Análise Combinatória, Combinações Simples, Relação de Stifel.

## ABSTRACT

This paper aims to introduce concepts of Combinatorics through the reading of various texts, with the main one being "Pascal's Triangle" by the Russian mathematician Vladimir Uspenskii. This text explores the most elementary concepts of Combinatorics, motivated by a problem from the 8th Moscow Mathematical Olympiad, held in 1945. The text, dated 1974, builds the notion of binomial coefficients, Pascal's Triangle, and simple combinations through the problem-solving approach in Chapter 1. A noteworthy point is the comparison between the number of subsets of a given set and the concept of simple combinations, a parallel rarely, if ever, observed in Brazilian university or high school textbooks. The reinterpretation of this work, as a means to stimulate curiosity and the study of Combinatorics, is the primary goal of this paper.

**Key-words:** Pascal's triangle, Combinatorics, simple combinations, Stifel Relation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Rede de caminhos. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra . . . . .	11
FIGURA 2 – Rede de caminhos para o problema da VIII Olimpíada. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra . . . . .	32
FIGURA 3 – Rede de caminhos para 2 homens e uma linha. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra . . . . .	32
FIGURA 4 – Rede de caminhos para 8 homens e 3 linhas. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra . . . . .	33
FIGURA 5 – Rede de caminhos para 16 homens e quatro linhas. Figura construída pelo autor via Geogebra . . . . .	33
FIGURA 6 – Triângulo Aritmético, representado até a 10a. linha. Origem: autor.	40
FIGURA 7 – Relação de Stifel-Pascal. Origem: autor. . . . .	41
FIGURA 8 – Teorema das Colunas. Origem: Autor. . . . .	41
FIGURA 9 – Teorema das diagonais. Origem: Autor. . . . .	41
FIGURA 10 – Regra das Linhas. Origem: Autor. . . . .	42
FIGURA 11 – Regra da coluna. Origem: Autor. . . . .	43
FIGURA 12 – Regra do retângulo. Origem: Autor. . . . .	43
FIGURA 13 – Exemplo do Teorema da Estrela de Davi: Recebe esse nome pois os números relacionados ao termo central se posicionam como as pontas de uma estrela de 6 pontas, popularmente conhecida como Estrela de Davi. No exemplo dado, os produtos dos números indicados com a mesma cor são 120 e os mdc são 1. Origem: autor.	44
FIGURA 14 – Fonte: [USPENSKII]. . . . .	49
FIGURA 15 – Fonte: [USPENSKII]. . . . .	49
FIGURA 16 – Fonte: [USPENSKII]. . . . .	50

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>RESULTADOS PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	Fatorial (!) . . . . .	13
2.1.1	Propriedades . . . . .	13
2.1.2	Algumas Aplicações diretas . . . . .	14
2.2	Princípio Fundamental da Contagem . . . . .	17
2.3	Permutações de elementos distintos . . . . .	18
2.4	Arranjos Simples . . . . .	21
2.5	Combinação Simples . . . . .	22
2.6	Propriedades das Combinações . . . . .	23
2.6.1	Resultados Imediatos . . . . .	23
2.6.2	Propriedade 1: Combinações Complementares . . . . .	24
2.6.3	Propriedade 2: Relação de Stifel- Pascal . . . . .	25
2.6.4	Propriedade 3 . . . . .	25
2.6.5	Propriedade 4 . . . . .	26
2.6.6	Propriedade 5 . . . . .	26
2.6.7	Propriedade 6: Fórmula de Euler . . . . .	28
2.6.8	Propriedade 7: Fórmula de Lagrange . . . . .	28
<b>3</b>	<b>A OBRA DE VLADMIR USPENSKII</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>TRIÂNGULO DE PASCAL</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1	Prefácio e Significado de se resolver um problema . . . . .	31
4.2	Um problema da VIII Olimpíada . . . . .	31
<b>5</b>	<b>EXISTE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DA VIII OLIMPÍADA?</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>OPERAÇÃO DE PASCAL E TRIÂNGULO ARITMÉTICO</b> . . . . .	<b>37</b>
6.1	Quem foi Pascal? . . . . .	37
6.2	Triângulo de Pascal . . . . .	37
6.3	Relações de Pascal . . . . .	38
6.3.1	PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES DE PASCAL . . . . .	38
6.3.2	Caso particular: Triângulo Aritmético . . . . .	39
6.4	Propriedades do Triângulo de Pascal . . . . .	40
6.5	OPERAÇÃO DE PASCAL . . . . .	44
<b>7</b>	<b>BINOMIAIS</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>8</b>	<b>O NÚMERO DE SUBCONJUNTOS DE UM CONJUNTO DADO</b> . . . . .	<b>49</b>
8.1	Revisitando algumas propriedades de Combinações a partir dos subconjuntos . . . . .	51
8.1.1	Resultados Imediatos . . . . .	51
8.1.2	Combinações Complementares . . . . .	51
8.1.3	Relação de Stifel . . . . .	52

		10
9	CONEXÃO COM OS FATORIAIS . . . . .	53
10	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	55
	REFERÊNCIAS . . . . .	56

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar conceitos de Análise Combinatória explorando a obra do matemático russo Vladimir Uspenskii, intitulada em inglês "Pascal's Triangle". O texto datado de 1974 é uma referência em diversas obras de outros autores, e até a data deste trabalho não possui versão em português.

A intenção deste texto é abordar alguns aspectos da obra de Uspenskii, não se tratando de uma mera revisão, mas de uma releitura, agregando informações que sirvam de suporte para a leitura e estudo em nível acadêmico, bem como de instrumento acessível aos colegas professores que lecionam matemática para o ensino médio.

O artigo se inicia por um capítulo sobre resultados preliminares, os quais são úteis para uma leitura mais progressiva do presente texto. São abordados conceitos como fatoriais, princípio multiplicativo, arranjos, permutações e combinações simples. No Capítulo 3 apresenta-se um breve histórico sobre a referida Obra de Uspenskii, texto que é explorado nos capítulos seguintes, cujo fio condutor é justamente o problema que dá início ao texto, o qual foi extraído da VIII Olimpíada de Moscou, ocorrida em 1945. Suponha-se que um grupo de 16 homens ande por uma rede de caminhos conforme a figura e direção indicados a seguir: Em cada direção parte metade da quantidade

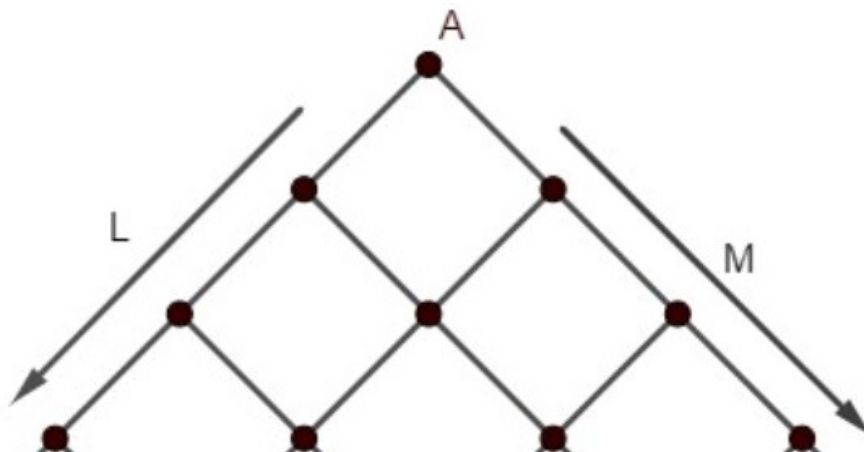


FIGURA 1 – Rede de caminhos. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra

de homens e, em cada intercessão da rede de caminhos, partem para cada direção a metade da quantidade de homens que ali chegaram. Repetindo-se essa caminhada sucessivamente, quantos homens chegam em cada ponto da 4a. linha dessa rede de caminhos? A resposta para 16 homens parece bem simples ou elementar. Mas e se ao invés disso fossem  $2^{1000}$  homens em relação à milésima linha? Essa é a pergunta que dispara o desenvolvimento da obra de Uspenskii, a qual se apresenta neste trabalho.

A resposta do problema é construída e confirmada, tanto ao final do texto original, como neste artigo. No quarto capítulo apresenta-se o texto de Vladimir Uspenskii que serviu de base para este trabalho e ideias preliminares para resolução do problema proposto. O capítulo 5 retoma a discussão da obra sobre a existência de solução para o problema da VIII Olimpíada. O capítulo 6 apresenta a Operação da Pascal, a qual dá origem ao triângulo de Pascal, cuja forma e propriedades são descritas nesta parte. No capítulo 7 aborda-se a relação entre os coeficientes do triângulo de Pascal e coeficientes binomiais. O capítulo 8 traz uma abordagem diferente, a qual consiste na observação do número de subconjuntos de um conjunto dado. A partir dessa ideia, algumas propriedades de combinações são revisitadas. O capítulo 9 aborda a conexão entre todos os pontos tratados e fatoriais. Com isso se finaliza a releitura da obra de Uspenskii e uma análise final é fornecida no capítulo 10. Por fim, este trabalho possui um produto educacional, o qual consiste da abordagem prática e do contato com a dissertação, em nível de ensino médio ou graduação, propondo a abordagem dos pontos mais essenciais, por meio de atividades e sequências didáticas.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES

A fim de tornar o presente trabalho mais claro e estruturado, neste capítulo serão explorados alguns conceitos matemáticos convenientes para a continuidade do assunto a ser tratado.

### 2.1 FATORIAL (!)

De acordo com Bachx, Lima e Oliveira, seja  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Chama-se  $n$  fatorial ou fatorial de  $n$ , indicado por  $n!$  o produto de  $n$  por seus antecessores até 1:

Para  $n = 0$ ,  $0! = 1$ . Caso contrário,

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (2.1)$$

#### 2.1.1 Propriedades

a. Define-se de maneira recursiva o fatorial de  $n$  por:

$$n! = n \cdot (n - 1)!. \quad (2.2)$$

Desta propriedade, define-se o item  $b$  a seguir:

b. Para  $1!$  (fatorial de 1), tem-se:

$$1! = 1.$$

#### **Demonstração:**

a. Por definição em 2.1 tem-se:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Aplicando-se a definição ao antecessor de  $n$ , tem-se:

$$(n - 1)! = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (2.3)$$

Reescrevendo  $n!$  a partir de (2.3), tem-se:

$$n! = n \cdot (n - 1)!.$$

**Observação 1:** O uso desta maneira de reescrever fatoriais é bastante conveniente quando se tratam de expressões que necessitem de simplificação, como será possível observar em exemplos de aplicação na continuidade do texto.

b. Seja  $2! = 2 \cdot 1 = 2$ . Aplicando (2.3) temos:  $2! = 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow 2! = 2 \cdot 1!$ . Como  $2! = 2$ , temos que:  $2! = 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow 2 = 2 \cdot 1!$ . Dividindo ambos os membros da igualdade por 2, segue que:  $1! = 1$ .

**Observação 2:** Uma maneira prática de se entender a definição  $0! = 1$  e a propriedade  $1! = 1$  será abordada durante o estudo das permutações simples.

### 2.1.2 Algumas Aplicações diretas

A compreensão da obra de Uspenskii requer não apenas os resultados preliminares, mas a sua correta aplicação. O fatorial guarda discreta semelhança em sua utilidade com a operação de potenciação. O uso de potenciação previne a escrita repetida de multiplicações de um mesmo fator. O uso do fatorial simplifica a escrita de multiplicações recorrentes em que os fatores são números inteiros, tais que o maior seja o fatorial dado e os demais sejam seus antecessores até 1. Esta simplificação de escrita é essencial quando se trata de aspectos da análise combinatória, em que tais multiplicações são frequentes. Para iniciar as aplicações, apresenta-se o exemplo a seguir:

**Exemplo 1:** Determinar o valor de  $6!$ . Neste caso basta aplicar 2.1:  $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ . No próximo exemplo, tem-se uma fração em que o numerador e o denominador são fatoriais. Para simplificar essa expressão, será usado a escrita recursiva de fatorial, ou seja, 2.2.

**Exemplo 2:** Resolver:

$$\frac{7!}{4!}.$$

Ao desenvolver os dois fatoriais, tem-se:

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Note que a expressão em **negrito** coincide com o denominador. Isso significa que não era necessário desenvolver os dois fatoriais por completo; bastava escrever o produto do  $7!$  até o  $4!$ .

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5.$$

Assim, cancela-se o fator  $4!$  no numerador e no denominador, simplificando a expressão.

**Observação 3:** Esta forma de escrever fatoriais em frações permite estabelecer como princípio de simplificação o desenvolvimento do maior fatorial até o menor, com o qual se pretende simplificar. Em outras palavras, desejando-se cancelar dois fatoriais iguais, desenvolve-se o fatorial do maior número até obter-se o fatorial do menor para simplificação.

Ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{7!}{4!} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} \\ &= 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.\end{aligned}$$

**Exemplo 3:** A partir do exemplo anterior, simplificar a fração abaixo:

$$\frac{(n+3)!}{(n-1)!} \quad (2.4)$$

Usando-se (2.3) no numerador sucessivamente, obtém-se a expressão do denominador.

$$\frac{(n+3)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!}$$

Cancelando-se  $(n-1)!$  vem:

$$\frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n.$$

Na próxima situação, a simplificação dos termos na fração não é tão evidente pois o denominador apresenta uma potência de base 2 e um fatorial, enquanto o numerador é o fatorial de um termo par, o qual exigirá uma manipulação algébrica conveniente para tornar o cancelamento possível.

**Exemplo 4:** Simplificar a expressão: [Bachx]

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \quad (2.5)$$

Desenvolvendo os fatoriais de 2.5 tem-se:

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n \cdot n!}$$

Reescrevendo a multiplicação no numerador, de modo a separar termos pares e termos ímpares, segue:

$$\frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!}$$

Reescrevendo-se os termos pares do numerador como produtos em que um dos fatores seja 2, vem:

$$\frac{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!}$$

Note que existem, na porção dos termos pares do numerador,  $n$  termos multiplicados, cada um, por 2. Este fato permite escrever a expressão da seguinte forma:

$$\frac{(2^n) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!}.$$

Onde:

$$(2^n) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 2^n \cdot n!. \quad (2.6)$$

Aplicando-se (2.6) no numerador, vem:

$$\begin{aligned} \frac{(2^n) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!} &= \\ \frac{(2^n \cdot n!) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Cancelando-se  $2^n \cdot n!$ , segue:

$$\frac{(\cancel{2^n \cdot n!}) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(\cancel{2^n \cdot n!})}.$$

E finalmente, a forma simplificada será:  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ .

A próxima aplicação direta consiste da recíproca do segundo exemplo apresentado, ou seja, pretende-se transformar a multiplicação dada em um quociente de fatoriais.

**Exemplo 5:** Escrever as expressões como quocientes de fatoriais:

a.

$$9 \cdot 8 \cdot 7. \quad (2.7)$$

Para escrever um fatorial, vamos continuar o produto até o 1, escrevendo os mesmos termos no denominador, para não alterar o produto inicial:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Agora, basta reescrever o numerador e o denominador como o quociente de fatoriais solicitado:

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{6!}.$$

b.

$$(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5).$$

Para resolver esta expressão sabemos que o próximo termo do produto é  $(n-6)$ . Após esse termo, existe uma quantidade indefinida de termos, sendo que os últimos constituem o produto  $\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Usando o mesmo artifício do exemplo anterior, segue:

$$\begin{aligned} (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) &= \frac{(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-6) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n-3)!}{(n-6)!}. \end{aligned}$$

Nestas últimas aplicações podemos observar que a resolução consiste em multiplicar a expressão dada pelo fatorial do antecessor do último termo dado. Esse mesmo fatorial será o denominador. O ajuste final se trata de reescrever o numerador transformando o produto no fatorial do maior termo.

## 2.2 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo (PM) é um conceito amplamente aplicado em Análise Combinatória, pois determina a quantidade de "combinações"<sup>1</sup> de elementos de um conjunto finito.

**Definição:** [Bachx] Sejam  $A_1, A_2, \dots$  acontecimentos tais que  $A_1$  ocorre de  $m_1$  formas e  $A_2$  ocorre de  $m_2$  formas, e assim por diante. O número total de possibilidades de  $A_1$  e  $A_2$  ocorrerem seguidamente é  $m_1 \cdot m_2$ .

**Exemplo 6:** Para decidir sobre a roupa que usará em determinado evento, uma pessoa deve escolher uma entre 5 camisas e um entre 7 calças. De quantos modos será possível tomar essa decisão?

Neste problema elementar, chamaremos  $p_1$ : escolha da camisa e  $p_2$ : escolha da calça. Tanto  $p_1$  quanto  $p_2$  são escolhas independentes. Para cada camisa escolhida há 7 opções de calça. Aplicando-se o PFC tem-se que o total de possibilidades será:

$$p_1 \cdot p_2 = 5 \cdot 7 = 35.$$

Ou seja, será possível escolher entre 35 possibilidades de calça com camisa.

**Exemplo 7:** Em um grupo de 8 pessoas, pretende-se escolher uma dupla, sendo que cada um dos membros terá um papel distinto. Desse modo, de quantas formas será possível fazer essa escolha?

Note-se que a segunda escolha a ser feita depende da primeira, já que a primeira pessoa escolhida não poderá ocupar duas funções simultaneamente, não podendo, portanto, participar da segunda escolha. Assim,  $p_1 = 8$  pessoas para a primeira escolha, enquanto  $p_2 = 7$  pessoas na segunda escolha, já que a oitava pessoa do grupo foi anteriormente escolhida.

Aplicando-se o PFC tem-se:

$$p_1 \cdot p_2 = 8 \cdot 7 = 56.$$

Ou seja, é possível escolher uma dupla entre 56 possibilidades.

---

<sup>1</sup> termo grafado entre aspas significando a associação de diversas escolhas, e não a definição de Combinação Simples, conceituada em Análise Combinatória

**Exemplo 8:** Quantos números de 3 algarismos existem ...

- a. ... ao todo?
- b. ... sem que haja repetição de algarismos?

**Solução:**

- a. Deve-se fazer três escolhas, uma para centena, outra para dezena e outra para unidade. Como não há nenhuma restrição explícita (não poder usar um algarismo específico, ou, não poder repetir algarismos, por exemplo), basta atentar-se ao seguinte: escolhendo-se a centena, o zero não é uma opção disponível. Logo, por PFC tem-se que a quantidade total de números com 3 algarismos é  $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ . Ou seja, existem 900 números com 3 algarismos. Aqui destaca-se que entre os 900 números há os que não tem repetição de algarismos, como 123 e os que tem repetição, como 144 e 555, por exemplo.
- b. Neste caso há, além da restrição do zero, a não repetição dos algarismos, o que torna as escolhas dependentes. Ao escolher a centena, tem-se 9 opções, já que o zero não pode ser usado. Ao escolher a dezena, como o algarismo das centenas não pode ser repetido, restariam 8 opções. Entretanto, o zero agora pode ser usado. Assim, há 9 opções para a dezena. Tendo-se escolhido a dezena e não podendo repetir os algarismos usados, restam agora 8 opções para a unidade. Assim, por PFC tem-se que a quantidade total de números com 3 algarismos sem repetição é  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ . Ou seja, existem 648 números com 3 algarismos sem repetição.

### 2.3 PERMUTAÇÕES DE ELEMENTOS DISTINTOS

Segundo o dicionário online Michaelis, permutar significa, entre várias acepções, "trocar uma coisa por outra, substituição". Em Análise Combinatória, segundo (Bachx; Poppe; Tavares, 1975), chama-se permutação de  $n$  elementos a qualquer agrupamento ordenado desses elementos.

**Exemplo 9:** Ao organizar uma fila com 3 crianças  $c_1, c_2, c_3$ , são permutações

as seguintes filas:

$$c_1, c_2, c_3$$

$$c_1, c_3, c_2$$

$$c_2, c_1, c_3$$

$$c_2, c_3, c_1$$

$$c_3, c_2, c_1$$

$$c_3, c_1, c_2.$$

Note que a permutação das 3 crianças resultou 6 grupos ordenados distintos. Para determinar o número de permutações de  $n$ -elementos distintos sem a necessidade de escrevê-los, será aplicado o Princípio Multiplicativo:

A fila contém 3 lugares a serem ocupados por 3 crianças.

- Para ocupar o primeiro lugar, há 3 possibilidades.
- Escolhida a primeira criança, restam duas opções para o segundo lugar.
- Escolhida a segunda criança, resta uma opção para o terceiro lugar.

Desse modo, por Princípio Multiplicativo (PM), segue que o número  $P_3$ , correspondente ao número de permutações de 3 crianças em uma fila, será:

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6. \quad (2.8)$$

Ou ainda:

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!. \quad (2.9)$$

Pensando neste exemplo determina-se o número de permutações de  $n$  elementos da seguinte forma:

TABELA 1 – Número de possibilidades para preencher os lugares

Acontecimento	possibilidades
1. Preencher o primeiro lugar.	$n$ .
2. Preencher o segundo lugar tendo escolhido o primeiro.	$n - 1$ .
3. Preencher o terceiro lugar tendo escolhido o segundo.	$n - 2$ .
$\vdots$	$\vdots$
$n$ . Preencher o $n$ -ésimo lugar, tendo escolhido o penúltimo lugar.	1.

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \quad (2.10)$$

**Exemplo 10:**

- a. De quantas maneiras 7 pessoas podem se organizar em uma fila?

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

**Exemplo 11:**

- b. De quantas maneiras pode se organizar uma fila de 7 pessoas de modo que Carla e Marina estejam sempre juntas e nessa ordem?

Se Carla e Marina devem aparecer sempre juntas e nessa ordem, considera-se a dupla como um único elemento da fila, de modo que, ao invés de se preencher 7 lugares, serão preenchidos 6. Portanto, tem-se  $P_6 = 6! = 720$ .

**Observação 4:** Se Carla e Marina estiverem juntas em qualquer ordem, tem-se duas situações disjuntas: na primeira, ocorre a permutação de 6 elementos, sendo um deles a dupla Carla-Marina. Na segunda, ocorre a permutação de 6 elementos, sendo um deles a dupla Marina-Carla. O total de permutações neste caso será  $720 + 720 = 1440$ . Os dois resultados obtidos foram somados pois são mutuamente excludentes, ou seja, não ocorre uma fila em que Carla e Marina se apresentam nesta ordem e em ordem contrária simultaneamente. Então o que foi contado no primeiro caso não se repetiu no segundo. Por isso, a necessidade de somar os resultados encontrados. Em alguns materiais é possível encontrar este tipo de procedimento com o título de Princípio aditivo, ou "princípio do 'ou'", destacando a ideia de disjunção, mas não uma regra formal.

**Observação 5:** No caso em que se pergunte quantas filas existem de modo que Carla e Marina nunca estejam juntas, sabendo-se que o total de filas é 5040 e que o total de filas em que elas se apresentam juntas e em qualquer ordem é 1440, então o total de filas desejado será:

$$5040 - 1440 = 3600.$$

Aplicando-se a ideia de filas, é possível analisar  $1!$  e  $0!$  da seguinte forma:  $1!$  corresponde ao número de permutações de um elemento, ou seja, uma fila com um único indivíduo, por exemplo. Neste caso, só existe uma possibilidade de organizar a fila, que é a fila com este indivíduo. Logo, intuitivamente  $P_1 = 1! = 1$ . Para  $0!$  tem-se o número de filas com nenhum elemento. No caso de uma fila com zero indivíduos, a única opção disponível é não ter fila. Logo  $P_0 = 0! = 1$ . Esta discussão permite dar um significado prático aos fatoriais de 1 e 0. Chamamos a atenção para o fato de

que essa noção intuitiva atribui um significado para as expressões mencionadas, e não a totalidade do significado, já que, em outros contextos em que ocorrem  $0!$  e  $1!$ , o significado prático destas expressões é outro. Para aprofundamento, convém estudar essa ocorrência em Polinômio de Taylor.

## 2.4 ARRANJOS SIMPLES

Para Oliveira, arranjos correspondem a grupos de  $p$  elementos distintos, escolhidos de um conjunto de  $n$  elementos dados, diferenciados pela ordem e natureza dos elementos que compõe esses grupos. A quantidade de arranjos de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , com  $n$  e  $p$  números naturais é indicada por  $A_n^p$ , com  $p \leq n$  e  $n \geq 1$ .

**Exemplo 12:** Quantos números de 3 algarismos podem ser formados usando-se os algarismos 1, 2, 4, 5, 6 sem repetição?

**Solução:** Tomando-se dois números que satisfaçam o enunciado: 124 e 241, note que, apesar de se utilizar os mesmos algarismos, os exemplos dados são distintos devido à ordem dos elementos. Desse modo, as escolhas serão feitas da seguinte forma:

- Na ordem das centenas há 5 opções disponíveis.
- Uma vez definida a escolha anterior, restam 4 opções para a ordem das dezenas.
- Por fim, restam 3 opções para a ordem das unidades.

Por PM temos que o total de números é  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .

Deduzindo uma fórmula para o cálculo geral de  $A_n^p$ , com aplicação de permutações, pode-se considerar o seguinte, de acordo com Plínio:

- Precisa-se preencher  $p$  posições, sendo que a primeira deve ser preenchida com 1 entre  $n$  elementos.
- A segunda deve ser preenchida com 1 entre  $(n - 1)$  elementos.
- A terceira posição deve ser preenchida com 1 entre  $(n - 2)$ .
- Na  $p$ -ésima posição tem-se  $(n - (p - 1)) = (n - p + 1)$ , já que o termo subtraído de  $n$  é o antecessor de  $p$ :  $p - 1$

Para determinar  $A_n^p$  basta aplicar PM, tal que:

$$A_n^p = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}. \quad (2.11)$$

Note-se que, na multiplicação inicial da expressão 2.11, usou-se a ideia de escrever a multiplicação na forma de um quociente de fatoriais, item apresentado anteriormente em 2.7. Convém salientar ainda que o uso de 2.11 na resolução de problemas pode facilmente ser substituído pela aplicação direta do PM. Retornando ao exemplo, dados os 5 algarismos, o número formado com 3 algarismos corresponde a um arranjo de 5 elementos tomado 3 a 3, já que a ordem dos elementos define números diferentes. Aplicando-se 2.11 vem:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Ou seja, são 60 números nas condições solicitadas.

Comparando as duas soluções fornecidas, a que envolve a aplicação direta do PM se expressa de forma mais simples e direta.

**Exemplo 13:** [OLIVEIRA] Num concurso com 12 participantes, se nenhum pode ganhar mais de um prêmio, de quantos modos podem ser distribuídos um primeiro e um segundo prêmios?

**Solução 1:** Por PM temos duas escolhas a fazer. Para o primeiro prêmio temos 12 candidatos, e escolhido o ganhador, restam 11 opções para o segundo prêmio. Portanto, segue:

$$12 \cdot 11 = 132.$$

Ou seja, 132 possibilidades.

**Solução 2:** Considere os participantes  $p_1$  e  $p_2$ . Se  $p_1$  ganha o primeiro prêmio e  $p_2$  o segundo, teremos uma dupla. Se ocorre o contrário, teremos outra dupla, mesmo que sejam os mesmos participantes, pois o que os diferencia são as premiações recebidas. Como a ordem dos participantes interessa ao problema, aplica-se o conceito de arranjo de 12 participantes tomados 2 a 2. Assim:

$$A_{12}^2 = \frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12!}{10!} = 12 \cdot 11 = 132.$$

Novamente, a aplicação do Princípio Multiplicativo gerou uma solução mais simples do que a aplicação do conceito de Arranjo Simples.

## 2.5 COMBINAÇÃO SIMPLES

Ao contrário dos arranjos, as combinações não se distinguem pela ordem dos elementos. Se, por exemplo, for necessário escolher uma dupla de crianças entre Artur, Cláudio e Rafael, as duplas compostas por Artur e Rafael ou por Rafael e Artur são a mesma. Considerando-se o conceito de arranjo, como a ordem agora não diferencia os resultados, para se determinar a quantidade de combinações dada

por  $C_n^p$  será necessário excluir as repetições. Essas repetições são, de acordo com Morgado permutações dos elementos do subconjunto formado ou escolhido. Como os elementos são tomados  $p$  a  $p$ , a quantidade de combinações de  $n$  elementos se dá pela quantidade de arranjos de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , dividido pelo número de repetições, dado pela permutação de  $p$  elementos, ou seja,  $p!$

$$\begin{aligned} C_n^p &= \frac{A_n^p}{p!} \\ C_n^p &= \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} \\ &= \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

**Exemplo 14** [Oliveira] Quantas saladas podemos formar contendo exatamente 4 frutas, de um total de 10?

**Solução:** O resultado será a combinação de 10 frutas tomadas em subconjuntos de 4. Aplicando 2.12 vem:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Ou seja, são 210 possibilidades de saladas com 4 frutas entre as 10 disponíveis.

A expressão 2.12 pode ser definida também como **número binomial**, cuja notação é:  $\binom{n}{p}$ , dados  $n$  e  $p$  dois números naturais com  $n \geq p$ . Mais adiante o conceito de números binomiais será aprofundado. A seguir, a notação de binomial.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Na seção seguinte serão apresentadas as propriedades de Combinações, às quais se dá um destaque maior devido ao seu uso no desenvolvimento da obra de Uspenskii

## 2.6 PROPRIEDADES DAS COMBINAÇÕES

### 2.6.1 Resultados Imediatos

Do cálculo das combinações, pode-se rapidamente inferir os seguintes resultados:

a)

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1.$$

b)

$$\binom{p}{p} = \frac{p!}{p! \cdot (p-p)!} = \frac{p!}{p! \cdot 0!} = 1.$$

c)

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-(n-1))!} \\ &= \frac{n!}{(n-1)! \cdot (n-n+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} \\ &= \frac{n}{1} \\ &= n. \end{aligned}$$

d)

$$\binom{n}{n+1} = 0.$$

O fato acima resume a seguinte ideia: não é possível escolher um subconjunto com quantidade de elementos maior do que o total de elementos do conjunto.

### 2.6.2 Propriedade 1: Combinações Complementares

**Definição:** [BACHX] Considere um conjunto com  $n$  elementos. Cada vez que se escolhem  $p$  elementos deste conjunto, com  $n \geq p$ , os  $n - p$  elementos restantes do conjunto formam obrigatoriamente um subconjunto.

Considerando o total de subconjuntos dados por  $\binom{n}{p}$ , a quantidade de subconjuntos dados por  $\binom{n}{n-p}$  será exatamente a mesma, já que existe uma correspondência biunívoca entre o subconjunto dos escolhidos e o subconjunto dos não-escolhidos. Em outras palavras,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Demonstração: Por comutatividade da multiplicação tem-se:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}.$$

Reescrevendo a fórmula pela definição de binomial vem:

$$\frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \binom{n}{n-p}.$$

### 2.6.3 Propriedade 2: Relação de Stifel- Pascal

**Definição:** Segundo [BACHX], a quantidade de combinações de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  pode ser dividida em duas partes:

Na primeira parte, estão todos os subconjuntos que possuem um certo elemento. Essa quantidade é dada por  $C_{n-1}^{p-1}$ . Subtrai-se 1, pois um dos elementos já está previamente estabelecido, diminuindo um elemento do total disponível e um do total a ser escolhido.

Na segunda parte, consideramos todos os subconjuntos em que o elemento anteriormente escolhido não está presente. Neste caso, há um elemento a menos no total disponível ( $n - 1$ ), mas a quantidade a ser escolhida se mantém ( $p$ ). Assim, a quantidade em questão é dada por  $C_{n-1}^p$ . A Relação de Stifel-Pascal consiste na soma das duas combinações escritas, ou seja:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p. \quad (2.13)$$

### 2.6.4 Propriedade 3

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}.$$

**Demonstração:** Considere a relação de Stifel-Pascal:

$$C_{m-1}^{p-1} + C_{m-1}^p = C_m^p. \quad (2.14)$$

Vamos considerar sucessivamente os seguintes valores para  $m$ :  $p, p + 1, p + 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} C_p^p + C_p^{p+1} &= C_{p+1}^{p+1} \\ C_{p+1}^p + C_{p+1}^{p+1} &= C_{p+2}^{p+1} \\ C_{p+2}^p + C_{p+2}^{p+1} &= C_{p+3}^{p+1} \\ C_{p+3}^p + C_{p+3}^{p+1} &= C_{p+4}^{p+1} \\ &\vdots \\ C_n^p + C_n^{p+1} &= C_{n+1}^{p+1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Somando todas as equações e cancelando membro a membro os termos iguais temos:

$$\begin{aligned}
 C_p^p + C_p^{p+1} &= \cancel{C_{p+1}^{p+1}} \\
 C_{p+1}^p + \cancel{C_{p+1}^{p+1}} &= \cancel{C_{p+2}^{p+1}} \\
 C_{p+2}^p + \cancel{C_{p+2}^{p+1}} &= \cancel{C_{p+3}^{p+1}} \\
 C_{p+3}^p + \cancel{C_{p+3}^{p+1}} &= \cancel{C_{p+4}^{p+1}} \\
 &\vdots \\
 C_n^p + \cancel{C_n^{p+1}} &= C_{n+1}^{p+1} \\
 C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p &= C_{n+1}^{p+1}.
 \end{aligned}$$

#### 2.6.5 Propriedade 4

$$C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+k}^k = C_{p+k+1}^k.$$

**Demonstração:** Considere escrever todos as combinações complementares dos termos do primeiro membro.

$$\begin{aligned}
 C_p^0 &= C_p^p \\
 C_{p+1}^1 &= C_{p+1}^p \\
 C_{p+2}^2 &= C_{p+2}^p \\
 &\vdots \\
 C_{p+k}^k &= C_{p+k}^p.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Somando ambos os lados:

$$C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+k}^k = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+k}^p. \tag{2.17}$$

Aplicando a Propriedade 3 no segundo membro, temos:

$$C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+k}^k = C_{p+k+1}^{p+1}. \tag{2.18}$$

Como  $C_{p+k+1}^{p+1} = C_{p+k+1}^k$  vem:

$$C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+k}^k = C_{p+k+1}^{p+1}. \tag{2.19}$$

#### 2.6.6 Propriedade 5

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Antecipando uma informação apresentada na Obra de Uspenskii, considere um conjunto de  $n$  elementos. Um certo elemento do conjunto, em relação a um subconjunto dado

possui duas possibilidades: pertencer ao subconjunto ou não pertencer. Por PM cada um dos  $n$  elementos possui duas opções, e o total de subconjuntos (combinações de  $n$  elementos tomados 0 a 0 (conjunto vazio), tomados um a um, tomados dois a dois e assim por diante) é dado por um produto de  $n$  fatores iguais a 2, ou seja,  $2^n$ .

Segundo BACHX, segue a demonstração:

**Demonstração:** Considere a expressão abaixo:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = S_n.$$

Agora, vamos definir  $S_k$

$$S_k = C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k$$

$$S_k = 0 + C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k.$$

Somando as equações, e aplicando nos parênteses a relação de Stifel-Pascal, temos:

$$2 \cdot S_k = C_k^0 + (C_k^0 + C_k^1) + (C_k^1 + C_k^2) + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) + C_k^k$$

$$2 \cdot S_k = C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 + \dots + C_{k+1}^k + C_k^k.$$

Como  $C_k^0 = C_{k+1}^0$  e  $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$  vem:

$$2 \cdot S_k = C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 + \dots + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = S_{k+1}.$$

Usando  $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$  em 2.6.6 temos:

$$S_2 = 2 \cdot S_1$$

$$S_3 = 2 \cdot S_2$$

$$S_4 = 2 \cdot S_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = 2 \cdot S_{n-1}.$$

Multiplicando-se todas as equações membro a membro temos:

$$S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_n = 2 \cdot S_1 \cdot 2 \cdot S_2 \cdot 2 \cdot S_3 \cdot 2 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot 2 \cdot S_{n-1}.$$

Reorganizando os termos dos produtos de forma conveniente temos:

$$S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_{n-1} \cdot S_n = 2^{n-1} \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_{n-1}.$$

Dividindo ambos os membros por  $S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_{n-1}$ . Tem-se:

$$S_n = 2^{n-1} \cdot S_1$$

Mas  $S_1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$ , então:

$$S_n = 2^{n-1} \cdot S_1 = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n.$$

### 2.6.7 Propriedade 6: Fórmula de Euler

$$C_m^0 \cdot C_h^p + C_m^1 \cdot C_h^{p-1} + C_m^2 \cdot C_h^{p-2} + \dots + C_m^p \cdot C_h^0 = C_{m+h}^p.$$

BACHX apresenta a dedução desta fórmula considerando uma comissão de  $p$  pessoas formada por  $m$  mulheres e  $h$  homens.

- a. Primeiramente, sabe-se que a ordem dos elementos não importa, já que não há distinção entre o grupo de homens entre si e o grupo de mulheres entre si. Em outras palavras, não existe nenhuma "*hierarquia*" que diferencie o grupo {a,b,c} do grupo {b,c,a}. Assim, a quantidade de comissões formadas é  $C_{m+h}^p$ .
- b. Por outro lado, o total de comissões formadas pode ser dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 \text{ mulheres e } p \text{ homens} &= C_m^0 \cdot C_h^p \\ 1 \text{ mulher e } p - 1 \text{ homens} &= C_m^1 \cdot C_h^{p-1} \\ 2 \text{ mulheres e } p - 2 \text{ homens} &= C_m^2 \cdot C_h^{p-2} \\ &\vdots \\ p \text{ mulheres e } 0 \text{ homens} &= C_m^p \cdot C_h^0. \end{aligned}$$

- c. De  $a$  e  $b$  tem-se:

$$C_m^0 \cdot C_h^p + C_m^1 \cdot C_h^{p-1} + C_m^2 \cdot C_h^{p-2} + \dots + C_m^p \cdot C_h^0 = C_{m+h}^p.$$

### 2.6.8 Propriedade 7: Fórmula de Lagrange

Segundo [BACHX], a fórmula de Lagrange é uma consequência da Fórmula de Euler, quando  $h = m = p$ , donde:

$$\begin{aligned} C_m^0 \cdot C_h^p + C_m^1 \cdot C_h^{p-1} + C_m^2 \cdot C_h^{p-2} + \dots + C_m^p \cdot C_h^0 &= C_{m+h}^p \\ C_p^0 \cdot C_p^p + C_p^1 \cdot C_p^{p-1} + C_p^2 \cdot C_p^{p-2} + \dots + C_p^p \cdot C_p^0 &= C_{p+p}^p \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aplicando-se o conceito de combinações complementares:

$$(C_p^0)^2 + (C_p^1)^2 + (C_p^2)^2 + \dots + (C_p^p)^2 = C_{2p}^p. \quad (2.21)$$

Apresentadas as propriedades de combinações simples, será abordada a seguir a obra de Vladmir Uspenskii, cujo nome em inglês é "*Pascal's Triangle*", ponto central deste trabalho.

### 3 A OBRA DE VLADIMIR USPENSKII

Segundo informações constantes em seu próprio site, o matemático russo Vladimir Uspenskii, doutor em física e matemática desde a década de 60, possui uma prolífica produção de materiais em diversas áreas, sendo as contribuições mais destacadas em Teoria dos Números, Análise Combinatória e Computação.

Diversas obras sobre Análise Combinatória o citam, sempre referenciando seu texto, cuja versão em inglês se chama "Pascal's Triangle". Não sendo a referência suficiente, os autores destacam a presença, neste material, do problema motivador da obra: o problema dos  $2^{1000}$  homens, o qual se apresentou na VIII Olimpíada de Matemática de Moscou em 1945. Ensejando dar uma resposta matematicamente adequada ao problema, Uspenskii desenvolve toda a teoria mais essencial de Análise Combinatória, apresentando, ao final de cada capítulo, ideias novas que permitem elaborar a resposta à questão proposta.

Infelizmente, até a conclusão deste trabalho (2025) não existe uma versão em língua portuguesa das obras de Uspenskii. A versão russa do texto referencial para este trabalho conta com uma tradução em inglês e outra em espanhol, as quais serviram de base para a elaboração deste texto, que se propõe a expandir as ideias apresentadas por Uspenskii, tornando a leitura de "Pascal's Triangle" acessível tanto para acadêmicos brasileiros como para professores de ensino médio, uma vez que, sua abordagem traz contribuições sólidas ao trabalho com Análise Combinatória, para além do que os livros didáticos e os textos acadêmicos costumam expor.

A obra "*Triângulo de Pascal*" (tradução livre) de Vladimir Uspenskii se apresenta em sete seções ou capítulos

- a. Um problema da VIII Olimpíada
- b. O que significa resolver um problema?
- c. Triângulo de Pascal
- d. Operação de Pascal
- e. Coeficientes binomiais
- f. Número de subconjuntos de um conjunto dado
- g. Conexão com fatoriais

A obra de Uspenskii traz uma maneira de enxergar a análise combinatória muito distinta do que se habitua a ver em livros didáticos de matemática dirigidos ao Ensino Médio Brasileiro. Destaca-se ainda frente aos textos universitários mais conhecidos (particularmente os que foram utilizados na construção deste texto) por apresentar uma nova visão de análise combinatória a partir de sua abordagem diferenciada, a qual tentaremos ampliar neste trabalho.

## 4 TRIÂNGULO DE PASCAL

Este trabalho se baseia na versão inglesa do texto russo, adaptada por David J. Sookne e Timothy McLarman, em 1974, mesmo ano de publicação do texto original, por *The University of Chicago Press*. A versão em espanhol conserva essencialmente o exposto no texto supracitado. Se trata de "Triângulo de Pascal", de 1978, traduzido na Rússia, então União Soviética.

### 4.1 PREFÁCIO E SIGNIFICADO DE SE RESOLVER UM PROBLEMA

Uspenskii de forma bem humorada e direta introduz seu texto avisando aos que não conhecem, ou não tem experiência com o triângulo de Pascal, que o mesmo não se trata de um triângulo da geometria, senão uma tábua de números envolvidos na resolução de diversos problemas. Interessa ao autor explorar esses tipos de problemas bem como explicitar o que significa resolver um problema.

De forma simples, o autor deseja apresentar a ideia de que resolver um problema, muito mais do que encontrar um número como resultado, em matemática, significa indicar um caminho universal e conhecido, ao qual, quem desejar, pode segui-lo para alcançar o número. Entretanto, a simples declaração do caminho já é suficiente para admitir-se como resposta ao problema.

Por exemplo, segundo BACHX, a quantidade de senhas de 6 algarismos que pode ser formada usando-se os algarismos do sistema de numeração decimal, com ou sem repetição, excluindo-se o 0, é, por PM,  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ .

Para Uspenskii, embora a resposta natural seja, ainda que nem sempre simples de se obter, 531441, a potência  $9^6$  é suficiente resposta, uma vez que, resolve o problema de forma adequada e deixa explícito um caminho para se chegar ao número de senhas, rapidamente expressa pela potência exibida.

### 4.2 UM PROBLEMA DA VIII OLIMPÍADA

Uspenskii escolheu para o desenvolvimento de sua obra um problema pertencente à VIII Olimpíada de Moscou, a qual ocorreu em 1945. O problema, dirigido a estudantes de 9a e 10a série de Moscou, em livre tradução diz o seguinte:

"Uma rede de caminhos (ou estradas) é dada a seguir. Do ponto A,  $2^{1000}$  homens partem (nas duas direções indicadas) sendo que metade segue na direção  $l$  e metade, na direção  $m$ . Na primeira interseção, a quantidade de homens que ali chegaram se divide novamente, metade para um caminho e metade para outro. Se

essa divisão ocorrer sucessivamente em cada ponto de interseção, quantos homens chegarão em cada ponto de interseção na milésima linha?

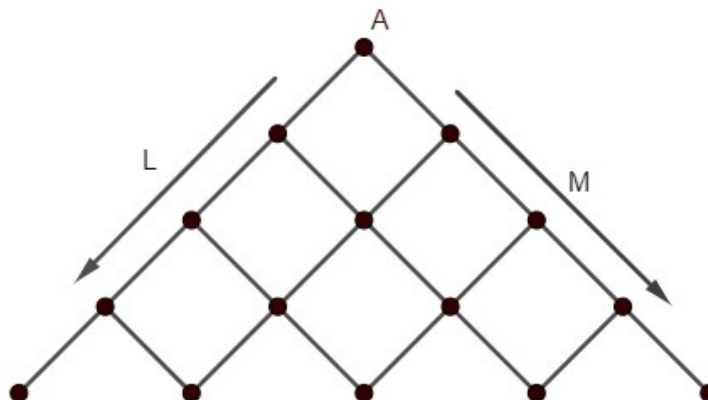


FIGURA 2 – Rede de caminhos para o problema da VIII Olimpíada. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra

Claramente não está ao alcance do candidato daquela ocasião (e eventualmente a nós também) escrever todas as quantidades em todas as linhas, por se tratar de 1000 linhas, e considerando-se um tempo limitado para cada questão da Olimpíada.

De forma bastante intuitiva, o leitor pode imaginar uma quantidade mais simples, como por exemplo, potências de base 2 cujos expoentes coincidam com a quantidade de linhas disponíveis após o ponto A.

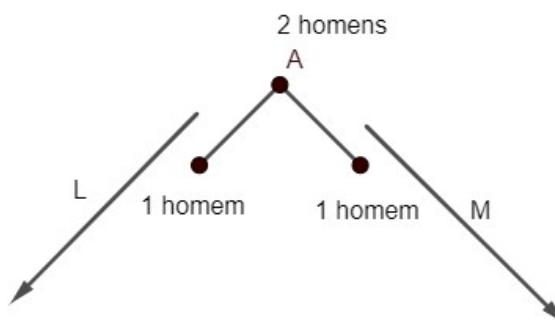


FIGURA 3 – Rede de caminhos para 2 homens e uma linha. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra

- Considerar  $2 = 2^1$  homens em uma rede com uma linha. Essa linha possui apenas duas interseções, sendo um homem em cada interseção, como mostra a figura 3.

- Considerar agora  $4 = 2^2$  e  $8 = 2^3$ . Para 4 homens, na 1a. linha chegam 2 em cada interseção. Na segunda linha existem três interseções. Assim, chega 1 homem na primeira, 2 na segunda (1 de cada interseção acima) e 1 na terceira.

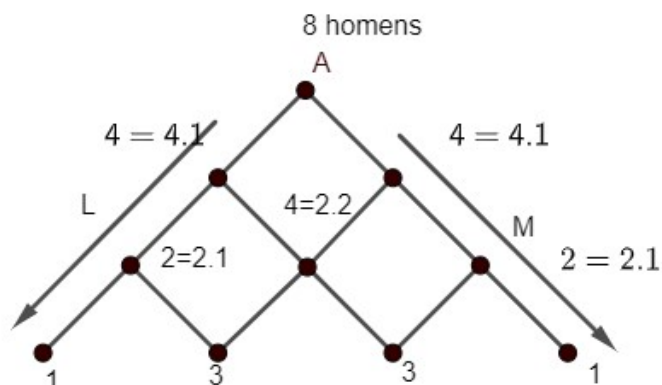


FIGURA 4 – Rede de caminhos para 8 homens e 3 linhas. Figura construída pelo autor a partir da original da obra de Uspenskii via Geogebra

- Para 8 homens, na 1a. linha chegam 4 em cada interseção. Na 2a. linha, chegam 2, 4 e 2, respectivamente. Na 3a. linha, chegam 1, 3, 3 e 1, conforme ilustrado na Figura 4.
- O que acontece com 16 homens e 4 linhas?
  - 1a. linha: 8 e 8 ( $8 \cdot 1$  e  $8 \cdot 1$ ).
  - 2a. linha: 4, 8 e 4 ( $4 \cdot 1$ ,  $4 \cdot 2$ ,  $4 \cdot 1$ ).
  - 3a. linha: 2, 6, 6, 2 (obtida multiplicando a linha 1, 3, 3, 1 por 2).
  - 4a. linha: 1, 4, 6, 4, 1.

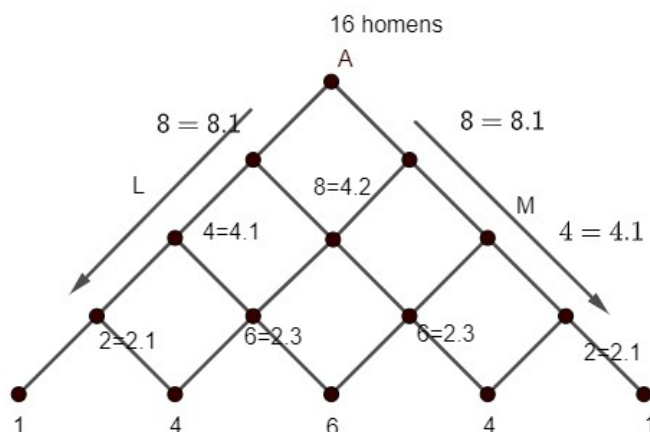


FIGURA 5 – Rede de caminhos para 16 homens e quatro linhas. Figura construída pelo autor via Geogebra

Examinando as regularidades, é possível reconhecer que, em cada diagrama, as linhas do Triângulo de Pascal - que será apresentado mais adiante - são multiplicadas por potências decrescentes de 2, começando por  $2^n$  na linha 0 (ponto A) até  $2^0$  na última linha. Nesta última linha, exibe-se a linha  $n$ -ésima do Triângulo de Pascal. Desse modo, considerando-se o que foi dito anteriormente sobre resolver um problema, e a regularidade observada, pode-se concluir que o número de homens que chega em cada ponto na última linha é dado pelo número binomial

$$\binom{1000}{k} = \frac{1000!}{k! \cdot (1000 - k)!}, \quad (4.1)$$

onde  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 1000\}$ , representa a posição de cada ponto da 1000a. linha. Diante de uma questão de olimpíada, e considerando que a solução apresentada foi meramente intuitiva, o que poderia garantir que a intuição neste caso não falhou? Deste ponto é que a obra de Uspenskii se desenrola em um percurso detalhado pela análise combinatória.

## 5 EXISTE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DA VIII OLIMPÍADA?

Neste Capítulo, a exemplo do que fez Uspenskii, deseja-se entender se existe solução para o problema da VIII Olimpíada. Considerando-se os  $2^{1000}$  homens que partem do ponto inicial, tem-se uma quantidade par de pessoas que se divide em dois caminhos. Na 1a. linha,  $2^{999}$  homens se encontra em cada ponto, e deverão se dividir entre dois caminhos possíveis. Na segunda linha tem-se que as extremidades correspondem à metade da linha anterior, enquanto as interseções mais centrais acumulam somas de parcelas pares. No caso da 2a. linha ainda temos:  $2^{998}$ ,  $2 \cdot 2^{998}$ ,  $2^{998}$ . Para entender se existe solução para o problema da VIII Olimpíada, considere-se o termo  $H_0^0$ , o qual indica a quantidade de homens na linha 0, ou seja no ponto de partida da rede de caminhos proposta. Logo,  $H_0^0 = 2^{1000}$ . Tome-se  $H_n^k$  o termo que indica a quantidade de homens na  $k$ -ésima interseção da rede na  $n$ -ésima linha. É necessário compreender até que linha é possível determinar o termo  $H_n^k$ , afinal, se esse valor ficar ímpar, não será possível avançar na rede de caminhos. Desse modo, vamos analisar como se relacionam os termos  $H_n^k$  e  $H_{n+1}^k$ . Primeiramente, o termo  $H_n^k$  pertence a  $n$ -ésima linha cujo valor de  $k$  varia entre 0 e  $n$ , com  $k$  sendo a posição da interseção em relação à linha  $n$ . Já na linha seguinte, indicada por  $n + 1$ , temos  $k$  variando de 0 a  $n + 1$  já que, a cada linha, uma nova interseção é acrescentada.

Ao analisar  $H_n^0$  e  $H_n^n$ , nota-se que as extremidades correspondem à metade da quantidade na extremidade anterior, donde

$$H_n^0 = \frac{H_{n-1}^0}{2} \text{ e } H_n^n = \frac{H_{n-1}^{n-1}}{2}.$$

E os termos internos em cada linha? Se a linha anterior existe e todos os termos são pares, já é sabido que as extremidades existirão, sendo metade da extremidade na linha anterior. A outra metade, juntamente com metade da interseção seguinte da linha anterior forma a segunda interseção da linha atual. Assim, podemos determinar que as interseções de 1 a  $k - 1$  na linha  $n$  são expressas por:

$$H_n^k = \frac{H_{n-1}^{k-1} + H_{n-1}^k}{2}. \quad (5.1)$$

Portanto, sendo os termos da linha  $n - 1$  todos pares, então

$$H_{n-1}^k = 2 \cdot a \cdot M_{n-1}^k. \quad (5.2)$$

Em 5.2,  $M_{n-1}^k$  diz respeito aos termos da linha anterior que foram somados na operação que gerou a linha seguinte. Desse modo, a linha  $n$  terá todos os termos definidos, os quais serão expressos por:

$$H_n^k = a \cdot M_{n-1}^k.$$

Por outro lado, considerando-se a potência  $2^{1000}$ , a cada linha, como os termos são divididos por 2, os resultados obtidos possuem expoente 1 unidade menor que os expoentes da linha anterior. Assim, na linha 0 o termo é divisível por  $2^{1000}$ . Na linha 1, tem-se os valores divisíveis por  $2^{999}$ . Na linha 2, tem-se os valores divisíveis por  $2^{998}$ , e assim por diante. Deste modo, na linha 999 todos os termos são divisíveis por  $2^1$ , sendo a linha 1000 possível. Para a linha seguinte já temos termos ímpares, desse modo, seguir pelas interseções usando a regra fixada pelo enunciado não será mais possível. Assim, pode-se estabelecer a relação entre os resultados do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 H_0^0 &= 2^{1000}; \\
 H_1^0 &= \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999}; \\
 H_1^1 &= \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999}; \\
 H_2^0 &= \frac{2^{999}}{2} = 2^{998}; \\
 H_2^1 &= \frac{2^{999} + 2^{999}}{2} = 2 \cdot 2^{998}; \\
 H_2^2 &= \frac{2^{999}}{2} = 2^{998}; \\
 H_3^0 &= \frac{2^{998}}{2} = 2^{997}; \\
 H_3^1 &= \frac{2^{998} + 2^{999}}{2} = \frac{2^{998} + 2 \cdot 2^{998}}{2} = 3 \cdot 2^{997}; \\
 H_3^2 &= \frac{2^{998} + 2^{999}}{2} = \frac{2^{998} + 2 \cdot 2^{998}}{2} = 3 \cdot 2^{997}; \\
 H_3^3 &= \frac{2^{998}}{2} = 2^{997};
 \end{aligned}$$

Esta abordagem nos permite concluir que existe solução para o problema da VIII Olimpíada e fornece indícios de que a intuição aplicada à sua resolução pode estar correta.

## 6 OPERAÇÃO DE PASCAL E TRIÂNGULO ARITMÉTICO

Neste capítulo apresentamos Blaise Pascal e seu trabalho referente ao triângulo aritmético, partindo da operação de Pascal, que consiste em uma generalização da propriedade de obtenção das linhas do triângulo aritmético, adotada por Uspenskii, como parte fundamental da compreensão de seu trabalho, e como forma de simplificar o procedimento a partir de um nome.

### 6.1 QUEM FOI PASCAL?

De acordo com as informações do site Instituto Blaise Pascal, Blaise Pascal viveu entre 1623 e 1662, tendo contribuído ativamente para a Matemática, Física, Filosofia, destacando-se trabalhos em Cálculo e Hidráulica. Entre diversas contribuições destacam-se o Princípio de Recorrência Matemática, o Triângulo Aritmético, conhecido popularmente por Triângulo de Pascal, o Princípio de Pascal que versa o seguinte: em um líquido em repouso ou equilíbrio as variações de pressão transmitem-se igualmente e sem perdas para todos os pontos da massa líquida. Suas importantes intervenções em Física foram reconhecidas com o uso de seu nome como unidade de pressão, de modo que  $1 \text{ Pa}$  ( $1 \text{ pascal}$ ) =  $1 \text{ N/m}^2$ .

Neste trabalho, nos deteremos no Triângulo Aritmético, também chamado de Triângulo de Pascal ou Triângulo de Tartaglia, ou ainda Triângulo de Tartaglia-Pascal, o qual consiste não apenas nas ideias de Pascal, mas teria sido concebido cerca de 100 anos antes por Niccolò Tartaglia, e já era conhecido na China e na Índia, anteriormente, segundo USPENSKII

### 6.2 TRIÂNGULO DE PASCAL

De acordo com a obra de Uspenskii, considere-se uma sequência de números inteiros  $\{d_0, d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , e para  $n = 0$ , a sequência possui exatamente um elemento. A sequência  $\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n+1}\}$  se diz definida pelas "Relações de Pascal" ou "Operação de Pascal" se:

$$s_0 = d_0. \quad (6.1)$$

$$s_k = d_{k-1} + d_k. \quad (1 \leq k \leq n). \quad (6.2)$$

$$s_{n+1} = d_n. \quad (6.3)$$

**Exemplo 15:** Considere a sequência formada pelos números  $-1, 2, 0, 4$ . Aplicando as relações 6.1, 6.2 e 6.3 temos:

- a.  $-1, 2, 0, 4$ .
- b.  $-1, 1, 2, 4, 4$ .
- c.  $-1, 0, 3, 6, 8, 4$ .

Onde  $b$  deriva de  $a$ , e  $c$  deriva de  $b$  por 6.1, 6.2 e 6.3.

### 6.3 RELAÇÕES DE PASCAL

Vladimir Uspenskii definiu as relações de Pascal de modo a simplificar a abordagem das propriedades relacionadas ao triângulo aritmético. Do modo que são descritas, essas relações definem o triângulo como um caso específico de sua aplicação.

**Definição:** Dada uma sequência com  $n$  números, uma sequência de  $n + 1$  números deriva desta pelas relações de Pascal se:

- a. O primeiro e o último termo da sequência derivada coincidem com o primeiro e o último termo da sequência de origem.
- b. Qualquer termo não extremo é dado pela soma do termo da sequência de origem com seu antecedente.

Estes dois itens resumem as expressões 6.1, 6.2 e 6.3.

#### 6.3.1 PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES DE PASCAL

- a. Se a sequência  $\beta$  deriva de uma sequência  $\alpha$  por Relações de Pascal, a soma dos elementos de  $\beta$  é o dobro da soma dos elementos de  $\alpha$ .

**Demonstração:** Seja  $\alpha = d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$  e  $\beta = s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$ . Por 6.1, 6.2 e 6.3, temos:

$$\begin{aligned}
 s_0 &= d_0. \\
 s_1 &= d_0 + d_1. \\
 s_2 &= d_1 + d_2. \\
 &\vdots \\
 s_n &= d_{n-1} + d_n. \\
 s_{n+1} &= d_n.
 \end{aligned}$$

Logo, a soma dos termos de  $\beta$  é:

$$s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n + s_{n+1} = d_0 + (d_0 + d_1) + (d_1 + d_2) + \dots + (d_{n-1} + d_n) + d_n.$$

De onde:

$$s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n + s_{n+1} = (d_0 + d_0) + (d_1 + d_1) + (d_2 + d_2) + \cdots + (d_n + d_n).$$

Portanto:

$$s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n + s_{n+1} = 2(d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n).$$

**Definição:** Uma sequência de números é simétrica se, para todo  $0 \leq k \leq n$ ,

$$d_k = d_{n-k}.$$

b. **Proposição:** Toda sequência derivada de uma sequência simétrica por Relações de Pascal é igualmente simétrica.

**Demonstração:** Seja  $s_k = d_{k-1} + d_k$  conforme indicado em 6.2. Pela definição de sequência simétrica, temos:  $d_k = d_{n-k}$ . Deseja-se provar que  $s_k = s_{(n+1)-k}$ , onde  $s$  deriva de  $d$  por relação de Pascal. Partindo de:

$$s_k = d_{k-1} + d_k = d_{n-(k-1)} + d_{n-k},$$

Sabe-se que

$$d_{k-1} = d_{n-(k-1)}$$

e

$$d_k = d_{n-k},$$

pois  $d$  é uma sequência simétrica, donde:

$$s_k = d_{k-1} + d_k = d_{n-(k-1)} + d_{n-k},$$

$$s_k = d_{(n+1)-k} + d_{n-k},$$

$$s_k = s_{k+1}.$$

**Exemplo 16:** Considerar a sequência simétrica 1, 0, 0, 1. Aplicando-se as relações de Pascal, obtém-se a linha: 1, 1, 0, 1, 1, igualmente simétrica.

### 6.3.2 Caso particular: Triângulo Aritmético

A obra de Uspenskii neste ponto apresenta um caso particular bastante conhecido. Define-se por linha zero de Pascal, ou sequência zero, a linha que contém uma sequência simétrica com apenas um número: 1. A partir dela, aplicando-se as relações de Pascal repetidamente temos a figura 6: Dessa estrutura é possível concluir que:

a. A soma dos termos na  $n$ -ésima linha é  $2^n$ . Isso ocorre pois, tomando a primeira linha, como  $2^0 = 1$ , e as demais obtidas por relações de Pascal, a propriedade 1 nos diz que a soma dos termos da linha obtida dobra em relação à original. Por isso, a começar da linha 0, a soma dos termos da linha  $n$  é  $2^n$ .

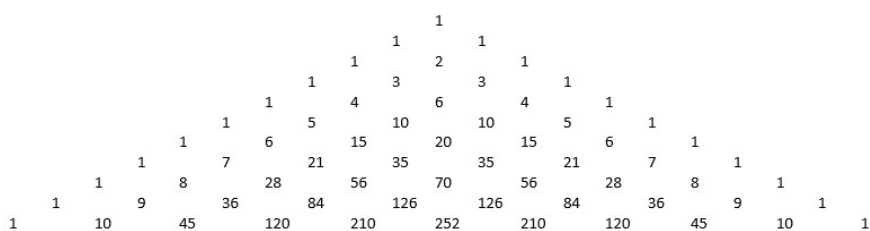


FIGURA 6 – Triângulo Aritmético, representado até a 10a. linha. Origem: autor.

- b. Como a linha 0 é simétrica, pela propriedade 2, todas as demais linhas geradas por relações de Pascal serão igualmente simétricas.
- c. Note-se que nas entradas diagonais da figura 6 temos: a 1a. é uma fila de 1. A 2a. é o conjunto dos números naturais. A 3a. é o conjunto dos números chamados triangulares. A 4a. é o conjunto dos números tetraédricos.

#### 6.4 PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL

O Triângulo Aritmético possui diversas propriedades, as quais tornam seu estudo fascinante e suas aplicações possíveis em variados contextos. A seguir serão apresentadas propriedades constantes da Obra de Uspenskii, complementadas por propriedades descritas e recorrentes em outras obras. Quando necessário, notaremos os termos do triângulo aritmético como  $T_n^p$  onde  $p$  é a coluna e  $n$  é a linha do triângulo.

- a. **RELAÇÃO DE STIFEL-PASCAL:** Somando-se dois termos consecutivos de uma linha, o resultado será o termo da linha seguinte, ocupando a mesma posição do 2o. termo em sua respectiva linha [Oliveira].

**Exemplo 17:** Ao somar o 2o. e o 3o. termo da 4a. linha, obtém-se o 3o. termo da 5a. linha. Na prática:  $3 + 3 = 6$  (Ver FIGURA 7). Ou seja,

$$T_n^p + T_n^{p+1} = T_{n+1}^{p+1}$$

- b. **TEOREMA DAS COLUNAS:** A soma de todos os termos de uma coluna  $p$  até a linha  $n$  do triângulo de Pascal corresponde ao termo da coluna  $p + 1$  e da linha  $n + 1$  (ver FIGURA 8). Ou seja,

$$T_0^p + T_1^p + T_2^p + \dots + T_n^p = T_{n+1}^{p+1}$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

FIGURA 7 – Relação de Stifel-Pascal. Origem: autor.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

FIGURA 8 – Teorema das Colunas. Origem: Autor.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

FIGURA 9 – Teorema das diagonais. Origem: Autor.

- c. **TEOREMA DAS DIAGONAIS:** A soma dos termos de uma entrada diagonal do Triângulo Aritmético até o termo da coluna  $p$  e linha  $n$  é dada pelo termo da coluna  $p$  e linha  $n + 1$  (ver FIGURA 9).

A prova destas três propriedades depende da associação dos termos do Triângulo Aritmético com Combinações. Feito isso, o teorema das colunas, das diagonais e a relação de Stifel-Pascal se tornam consequência das propriedades de combinações tratadas anteriormente. Deste modo, serão apresentadas oportunamente na sequência deste texto.

- d. **TEOREMA DAS LINHAS:** A soma dos termos da  $n$ -ésima linha do Triângulo aritmético é  $2^n$ .

**Demonstração:** O Triângulo Aritmético é dado a partir da linha 0 em que  $T_0^0 = 1$ ,

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				
1	6	21					
1	7						
1							

FIGURA 10 – Regra das Linhas. Origem: Autor.

aplicando-se sucessivamente as relações de Pascal. Pela propriedade **a** das Relações de Pascal segue que, a partir da linha 1, tem-se a soma dos termos da linha anterior dobrada. Como a cada linha a soma dobra mais uma vez, tem-se que na  $n$ -ésima linha a soma foi dobrada  $n$  vezes. Como esse processo inicia na linha 0 em que a soma é 1, na linha  $n$  tem-se  $1 \cdot 2^n = 2^n$ .

- e. A soma dos quadrados de todos os elementos de uma linha consiste em algum termo na bissetriz do triângulo. [USPENSKII]

**Demonstração:** Aplicação direta da fórmula de Lagrange, uma vez relacionados os termos do Triângulo Aritmético com combinações simples.

- f. Para qualquer número primo  $m$ , todos os elementos da  $m$ -ésima linha, exceto o primeiro e o último, são divisíveis por  $m$ .

**Observação:** As três propriedades a seguir, constantes da obra de Uspenskii, são válidas a partir de outra perspectiva de visualização do Triângulo Aritmético.

- g. Cada número do triângulo é a soma dos termos da linha acima até a posição do número dado. (Ver FIGURA 10).

**Exemplo 18:** Na figura 9 destacam-se dois exemplos:

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

$$1 + 5 + 15 = 21.$$

- h. A soma dos elementos de uma coluna  $p$  até a linha  $n$  correspondem ao termo da linha  $n$  e posição  $p + 1$ . (Ver FIGURA 11).

**Exemplo 19:** A figura 11 apresenta 2 exemplos da ocorrência dessa propriedade:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

$$1 + 4 + 10 = 15.$$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				
1	6	21					
1	7						
1							

FIGURA 11 – Regra da coluna. Origem: Autor.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				
1	6	21					
1	7						
1							

FIGURA 12 – Regra do retângulo. Origem: Autor.

- i. Considere um retângulo formado pelos elementos de  $n$  linhas e  $p$  colunas, sempre partindo da 1a. linha e da 1a. coluna. A soma desses elementos corresponde ao termo na linha  $n + 1$  e na coluna  $p + 1$ , diminuído de uma unidade. (Ver FIGURA 12).

**Exemplo 20:** A figura 12 apresenta dois exemplos: o primeiro, cujos termos sombreados resultam em soma  $9(10 - 1)$  e o segundo, em vermelho, cuja soma é  $34(35 - 1)$ .

- j. Na forma de ver o triângulo aritmético nas figuras 9, 10 e 11, note-se que: [USPENSKII]
- A primeira linha é composta de 1.
  - A segunda linha corresponde aos números naturais não-nulos.
  - A terceira linha corresponde aos números triangulares.
  - A quarta linha corresponde aos números tetraédricos.

- k. Estrela de Davi [MOÇATO]: Dado um termo  $T_n^p$ , vale a igualdade:

$$T_{n-1}^{p-1} \cdot T_n^{p+1} \cdot T_{n+1}^{p-1} = T_{n-1}^p \cdot T_n^{p-1} \cdot T_{n+1}^{p+1}. \quad (6.4)$$

Há também a igualdade entre o mdc dos termos indicados em cada parte da igualdade (ver Figura 13).

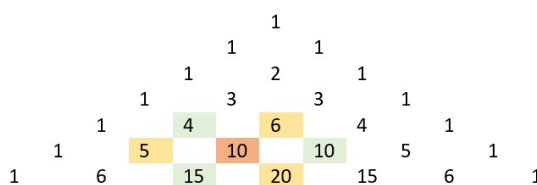


FIGURA 13 – Exemplo do Teorema da Estrela de Davi: Recebe esse nome pois os números relacionados ao termo central se posicionam como as pontas de uma estrela de 6 pontas, popularmente conhecida como Estrela de Davi. No exemplo dado, os produtos dos números indicados com a mesma cor são 120 e os mdc são 1. Origem: autor.

## 6.5 OPERAÇÃO DE PASCAL

Para abordar as ideias deste capítulo da obra de Uspenskii, retomamos a pergunta inicial, a qual motiva o desenvolvimento de seu texto: será que a solução intuitiva da questão da VIII Olimpíada é adequada? Considerando-se a maneira como o triângulo aritmético foi construído, pode-se fixar as seguintes regras:

$$T_0^0 = 1, \quad (6.5)$$

$$T_{n+1}^0 = T_{n+1}^{n+1} = 1 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.6)$$

$$T_{n+1}^p = T_n^{p-1} + T_n^p. \quad (6.7)$$

Essas regras foram apresentadas anteriormente como as relações ou Operações de Pascal. Retomando-se a ideia do capítulo 5 em 5.2 temos:

$$H_n^k = 2 \cdot a \cdot M_n^k = N \cdot M_n^k. \quad (6.8)$$

Sabe-se que em cada linha a quantidade de homens será dividida por 2. Logo,  $N = 2^{1000-n}$ . Quando  $n = 1000$ ,  $N = 2^0 = 1$ .

Reescrevendo-se 5.1 usando 6.8 temos:

$$\begin{aligned}
H_n^k &= \frac{H_{n-1}^{k-1} + H_{n-1}^k}{2} = \\
2^{1000-n} \cdot M_n^k &= \frac{2^{1000-(n-1)} \cdot M_{n-1}^{k-1} + 2^{1000-(n-1)} \cdot M_{n-1}^k}{2} = \\
2^{1000-n} \cdot M_n^k &= \frac{2^{1000-(n-1)} \cdot (M_{n-1}^{k-1} + M_{n-1}^k)}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^k &= \frac{2^{1000-n+1} \cdot (M_{n-1}^{k-1} + M_{n-1}^k)}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^k &= \frac{2^{1000-n} \cdot 2 \cdot (M_{n-1}^{k-1} + M_{n-1}^k)}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^k &= \frac{2^{1000-n} \cdot 2 \cdot (M_{n-1}^{k-1} + M_{n-1}^k)}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^k &= \frac{2^{1000-n} \cdot 2 \cdot (M_{n-1}^{k-1} + M_{n-1}^k)}{2} \\
M_n^k &= \frac{2^{1000-n} \cdot (M_{n-1}^{k-1} + M_{n-1}^k)}{2^{1000-n}} \\
M_n^k &= M_{n-1}^{k-1} + M_{n-1}^k.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Além disso:

$$\begin{aligned}
H_0^n &= \frac{H_0^{n-1}}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^0 &= \frac{2^{1000-(n-1)} \cdot M_{n-1}^0}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^0 &= \frac{2^{1000-n+1} \cdot M_{n-1}^0}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^0 &= \frac{2^{1000-n+1} \cdot M_{n-1}^0}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^0 &= \frac{2^{1000-n} \cdot 2 \cdot M_{n-1}^0}{2} \\
2^{1000-n} \cdot M_n^0 &= \frac{2^{1000-n} \cdot 2 \cdot M_{n-1}^0}{2} \\
M_n^0 &= \frac{2^{1000-n} \cdot M_{n-1}^0}{2^{1000-n}}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Analogamente,  $M_n^n = M_{n-1}^{n-1}$ . Concluímos então que  $M_p^p$  é um número que obedece às operações de Pascal. Como  $H_0^0 = 2^{1000} = 2^{1000-0} \cdot 1$ , então  $M_0^0 = 1$ . Desse modo,  $M_0^0 = T_0^0$ . Portanto, a quantidade de homens  $H_{1000}^p$  em cada intercessão  $p$  com  $0 < p \leq 1000$ , corresponde aos coeficientes  $T_{1000}^p$  da milésima linha do triângulo de Pascal, e finalmente, a solução intuitiva apresentada está correta.

Neste ponto do texto, parece que a obra termina. Entretanto, nos capítulos restantes, Uspenskii se ocupa de um ponto silencioso desta abordagem, o qual consiste justamente em saber o que são esses números do Triângulo de Pascal, de modo a torná-lo tão útil e importante em Análise Combinatória.

## 7 BINOMIAIS

O objetivo deste capítulo consiste em determinar os coeficientes binomiais a partir da operação de Pascal definida anteriormente. Os coeficientes binomiais são os coeficientes dos termos do desenvolvimento de uma potência de binômio. Começemos por determinar as primeiras potências de expoente natural para o binômio  $1 + x$ :

$$(1 + x)^0 = 1. \quad (7.1)$$

$$(1 + x)^1 = 1 + x. \quad (7.2)$$

$$(1 + x)^2 = (1 + x) \cdot (1 + x) = 1 + 2x + x^2. \quad (7.3)$$

$$(1 + x)^3 = (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3. \quad (7.4)$$

$$(1 + x)^4 = (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4. \quad (7.5)$$

De forma geral podemos definir a  $n$ -ésima potência de  $1 + x$  como:

$$(1 + x)^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_p \cdot x^p. \quad (7.6)$$

Neste caso,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são constantes. A expressão 7.6 é chamada de **expansão binomial**, ou mais popularmente no Brasil, **Binômio de Newton**<sup>1</sup>, quando ao invés de 1 apresentamos a constante  $a$ , e definimos os coeficientes de maneira mais conveniente, o qual faremos mais a diante. Por enquanto, definiremos o coeficiente de  $x^k$  na expansão binomial como sendo um número na forma  $\binom{n}{k}$ , o qual chamamos de **coeficiente binomial** ou, simplesmente, **binomial**. Note-se que, nas expansões realizadas foram exibidas todas as potências de  $x$  de 0 a  $n$ . Por essa razão, o coeficiente binomial relaciona o expoente da expansão ( $n$ ) e o expoente do referido termo ( $k$ ). Sabemos que  $p = n$ , mas não vamos considerar esse fato ainda. Dessa forma, vamos reescrever a expressão 7.6 da seguinte maneira:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \binom{n}{3} \cdot x^3 + \dots + \binom{n}{p} \cdot x^p. \quad (7.7)$$

Das relações 7.1 a 7.5, podemos definir:

<sup>1</sup> Segundo Uspenskii, embora a expansão binomial seja associada a Newton, a mesma já era conhecida antes de seus trabalhos, tendo sido mencionada na obra de Tartáglia. Apesar disso, a associação decorre do trabalho de Newton para generalizar qualquer termo da expansão, mesmo para expoentes negativos, em 1676. A essa generalização chamamos, no Brasil, como se vê nos textos de FREIRE e MORGADO, entre outros, Fórmula de Newton, ou Fórmula do Binômio de Newton, ou Fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton.



$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}. \quad (7.11)$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad \text{se } 0 < k < p+1 \quad (7.12)$$

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p}. \quad (7.13)$$

Em razão de 7.11, 7.12 e 7.13, garante-se que a sequência de coeficientes da expansão  $(1+x)^{n+1}$  deriva da expansão de  $(1+x)^n$ , obedecendo as operações de Pascal. Desse modo, podemos garantir que todas as expansões binomiais de  $1+x$  apresentam coeficientes que coincidem ordenadamente com os coeficientes  $T_k^n$  das linhas do triângulo de Pascal, sendo que o expoente  $n$  da expansão corresponde à linha do triângulo de Pascal cujos termos  $T_k^n$  são os coeficientes de interesse.

Assim:

$$\binom{n}{k} = T_k^n.$$

E, portanto,

$$(1+x)^n = T_0^n + T_1^n \cdot x + T_2^n \cdot x^2 + T_3^n \cdot x^3 + \dots + T_n^n \cdot x^n. \quad (7.14)$$

## 8 O NÚMERO DE SUBCONJUNTOS DE UM CONJUNTO DADO

Nesta etapa da obra, Vladimir Uspenskii discute o conceito de Combinação por meio dos subconjuntos de um conjunto dado. Estabelece que um conjunto é uma "coleção" de elementos, de modo que um elemento pode fazer parte do conjunto (pertencer) ou não fazer parte (não pertencer). Se os elementos de um conjunto  $A$  são todos pertencentes a um conjunto  $B$ , diz-se que  $A$  está contido em  $B$ , ou  $B$  contém  $A$ . Se em  $B$  não há elementos que não pertencem a  $A$ , então  $A = B$ .

Os conjuntos podem ser finitos ou infinitos. Entre os conjuntos finitos existe um número finito de subconjuntos, de modo que o conjunto sem elementos (conjunto vazio) é igualmente um subconjunto do conjunto dado.

Seja o exemplo semelhante ao que Uspenskii propõe: o penal de um estudante que pode ou não conter uma caneta, um lápis e uma borracha (Ver figura 14).

- Note que é possível que o penal esteja vazio.
- Além disso, existem 3 possibilidades para 1 item no penal: Caneta, lápis ou borracha.
- Por outro lado, há 3 possibilidades de pares de elementos: caneta e lápis, caneta e borracha ou lápis e borracha (Ver figura 15.)
- Por fim, existe uma possibilidade com os 3 elementos. (Ver Figura 16.)

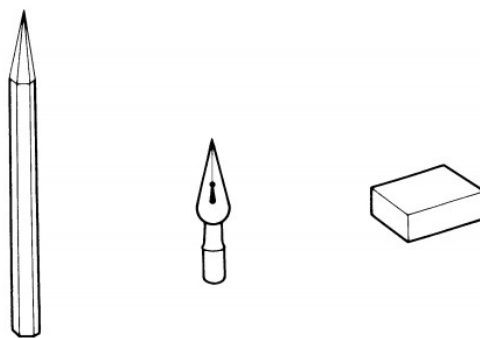


FIGURA 14 – Fonte: [USPENSKII].

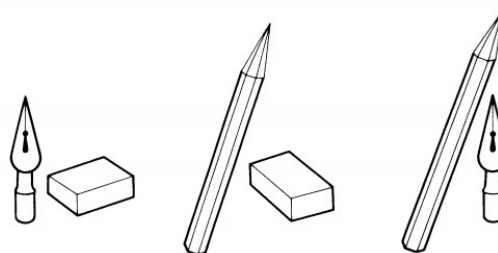


FIGURA 15 – Fonte: [USPENSKII].

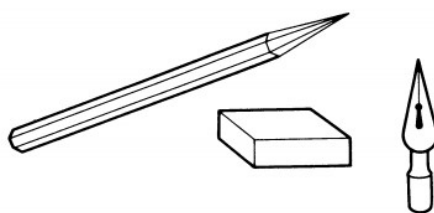


FIGURA 16 – Fonte: [USPENSKI].

Ou seja, um conjunto com os 3 elementos citados acima, ou quaisquer outros elementos, possui 8 subconjuntos. Olhando para o princípio fundamental da contagem, esse resultado passa a fazer sentido, uma vez que cada objeto pode ou não estar no subconjunto desejado. Como são 3 elementos, com duas opções para cada, o número de subconjuntos do conjunto será:  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ . O Princípio Fundamental da Contagem nos permite expandir a ideia para um conjunto com  $n$  elementos. Como cada elemento pode ou não pertencer ao subconjunto, o número de subconjuntos do conjunto dado será  $2^n$ . Podemos olhar os subconjuntos por outro viés:

- O subconjunto com nenhum elemento (vazio) corresponde à combinação de 3 elementos tomados 0 a 0, ou seja,  $C_3^0$ ;
- O total de subconjuntos contendo um elemento corresponde à combinação de 3 elementos, tomados 1 a 1. ou seja,  $C_3^1$ ;
- O total de subconjuntos contendo dois elementos corresponde à combinação de 3 elementos, tomados 2 a 2. ou seja,  $C_3^2$ ;
- O total de subconjuntos contendo três elementos corresponde à combinação de 3 elementos, tomados 3 a 3. ou seja,  $C_3^3$ ;
- Consequentemente, o total de subconjuntos do conjunto de três elementos é  $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$ , pela 5a. propriedade de combinações (Ver Capítulo 2).

Note ainda que as quantidades apresentadas coincidem justamente com a 3a. linha do triângulo de Pascal. Ou seja, identificar as combinações com os subconjuntos de um conjunto dado nos permite fazer a seguinte conclusão:

$$C_n^k = T_k^n.$$

## 8.1 REVISITANDO ALGUMAS PROPRIEDADES DE COMBINAÇÕES A PARTIR DOS SUBCONJUNTOS

Anteriormente rerepresentamos a soma de todas as combinações de  $n$  elementos. Ao concluir que  $C_n^k = T_k^n$ , entendemos que:  $C_n^k = \binom{n}{k}$ . Agora, vamos entender os resultados imediatos de combinação, combinações complementares e a relação de Stifel por meio dos conjuntos.

### 8.1.1 Resultados Imediatos

- $C_n^0 = 1$ . Este resultado nos diz que a combinação de  $n$  elementos tomados 0 a 0 é um conjunto vazio, já que nenhum elemento é escolhido. Neste caso, existe 1 possibilidade apenas.
- $C_n^n = 1$ . Este resultado nos diz que a combinação de  $n$  elementos tomados  $n$  a  $n$  corresponde ao subconjunto que contém todos os elementos. Neste caso, só existe 1 possibilidade.
- $C_n^{n-1} = n$ . Este resultado nos fala de todos os subconjuntos que contém todos os  $n$  elementos exceto 1 deles. Como são  $n$  elementos, existem  $n$  subconjuntos em que 1 dos elementos apenas não está.
- $C_n^{n+1} = 0$ . Este resultado nos fala que não existe subconjunto com mais elementos que o conjunto. Isso se deve ao fato de que, para que  $A$  seja subconjunto de  $B$ , todos os elementos do conjunto  $A$  devem pertencer ao conjunto  $B$ . Neste ponto, é possível que o conjunto vazio, enquanto subconjunto de  $B$ , deixe dúvida, porém, ao se desejar um subconjunto com  $n + 1$  elementos, note que o conjunto vazio obrigatoriamente não contém mais elementos que o conjunto.

### 8.1.2 Combinações Complementares

O resultado das combinações complementares nos diz o seguinte:

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

Para efeito de subconjuntos de um conjunto dado, temos o seguinte:

Seja um conjunto  $A$  com  $n$  elementos. O resultado  $C_n^p$  expressa o número de subconjuntos de  $A$  com  $p$  elementos. Para cada  $p$  elementos que são escolhidos, existem os outros  $n - p$  que não são escolhidos, donde há uma correspondência biunívoca entre esses subconjuntos. Assim, a quantidade de subconjuntos de  $p$  elementos e a quantidade de subconjuntos de  $n - p$  elementos será igual, o que verifica a noção de combinações complementares.

### 8.1.3 Relação de Stifel

A relação de Stifel nos diz que:

$$C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p.$$

Considere um conjunto  $A$  com  $n + 1$  elementos. Considere ainda todos os subconjuntos de  $p$  elementos, nos quais um certo elemento  $\alpha$  está presente. Nesses subconjuntos,  $\alpha$  já está escolhido, restando escolher os  $p - 1$  elementos restantes. Além disso, existem subconjuntos com  $p$  elementos em que  $\alpha$  não foi escolhido, desse modo, o número total de elementos de  $A$  que restam para combinar  $p$  a  $p$  é igual a  $n$ , já que  $\alpha$  está excluído da escolha. Em razão disso, a combinação de  $n + 1$  elementos  $p$  a  $p$  pode ser dividida em uma soma de combinações: a que  $\alpha$  já está escolhido previamente e a que  $\alpha$  não está entre os elementos a serem escolhidos, o que verifica a Relação de Stifel.

## 9 CONEXÃO COM OS FATORIAIS

Uspenskii finaliza a obra "*Triângulo de Pascal*" apresentando a noção de fatoriais, a qual já foi abordada anteriormente no capítulo 1 deste trabalho. Então, o autor se propõe a expressar a sequência de Pascal e, por conseguinte, os termos do triângulo aritmético como expressões que se valem das definições de fatoriais. Para isso, se ocupa da expressão abaixo:

$$F_q^m = \frac{m!}{q! \cdot (m - q)!}. \quad (9.1)$$

Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} F_0^0 &= \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1, \\ F_0^m &= \frac{m!}{0! \cdot m!} = 1, \\ F_m^m &= \frac{m!}{m! \cdot 0!} = 1. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} F_{k-1}^n + F_k^n &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n - (k-1))!} + \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n - k + 1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k)!} + \frac{n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n - k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n - k)!} \cdot \left( \frac{1}{n - k + 1} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n - k)!} \cdot \frac{n + 1}{k \cdot (n - k + 1)} \\ &= \frac{(n + 1) \cdot n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k)!} \\ &= \frac{(n + 1)!}{k! \cdot (n - k + 1)!} = F_k^{n+1}, \text{ sendo } 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Conclusão:

- $F_0^0$  é a linha 0 de Pascal.
- A  $(n + 1)$ -ésima linha, formada por  $F_0^{n+1}, F_1^{n+1}, \dots, F_{n+1}^{n+1}$  é derivada da sequência  $F_0^n, F_1^n, \dots, F_n^n$  por relações de Pascal.
- Do item anterior se conclui que a expressão (9.1) possibilita descrever os termos de uma sequência derivada de outra por operações de Pascal.

- A sequência acima, quando  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  coincide com a  $n$ -ésima linha do Triângulo de Pascal.
- Desse modo, dadas as duas últimas considerações, conclui-se que  $F_k^n = T_k^n$ .

Note-se que se (9.1) define os termos do triângulo de Pascal, define também a quantidade de combinações de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , uma vez que esses termos do triângulo aritmético podem ser expressos por binomiais que são justamente as quantidades de combinações já citadas.

Do capítulo sobre quantidade de subconjuntos de um conjunto dado estreita-se a relação entre as quantidades de combinações simples e os termos do triângulo de Pascal, os quais se revelaram também coeficientes da expansão binomial de Newton. Das tentativas apresentadas no Capítulo 2 pode-se inferir que a última linha em cada configuração correspondia a  $n$ -ésima linha do triângulo de Pascal, onde  $n$  era o expoente da potência de base 2 considerada em cada caso.

Assim concluímos que as constantes  $C_n^p$  (que nos diz a quantidade de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ ),  $T_n^p$  (que indica o termo do triângulo de Pascal de posição  $(n, p)$ ) e  $H_n^p$  (que indica a quantidade de homens na interseção de posição  $(n, p)$ ) são correspondentes para o mesmo  $n$  e  $p$ . Desse modo, segue que (4.1) expressa corretamente a resposta da questão da VIII Olimpíada, ou seja:

$$H_k^{1000} = T_k^{1000} = \frac{1000!}{k! \cdot (1000 - k)!} = \binom{1000}{k}.$$

A obra ainda traz três corolários neste capítulo, os quais não influenciam a esperada conclusão da saga do problema da VIII Olimpíada, razão pela qual optamos por omitir.

## 10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se fala sobre os conceitos mais essenciais de Análise Combinatória, observando os livros de matemática do Ensino Médio mais tradicionais, e mesmo as conversas entre colegas que lecionam para as séries correspondentes, observa-se o quanto as fórmulas e as "receitas" para se resolver problemas padrão tomam espaço, em detrimento de uma discussão mais significativa, estabelecendo-se conexões semelhantes ao que se observa na obra de Uspenskii. Existem mais livros dele traduzidos para o Inglês, os quais trazem outras luzes para o Triângulo de Pascal, entre outros pontos de Análise Combinatória, como a obra "*Mathematical Conversations*", escrita com DYNKIN. A intenção desses livros é correr na contramão do que normalmente se faz na escola. Entretanto, este novo olhar para o presente objeto de conhecimento desafia a prática docente a fazer, ao menos, novas provocações em cima de conhecidas e, eventualmente, obscuras ideias.

O estudo de Análise Combinatória se revela desafiador, já que as "receitas" já mencionadas omitem ideias importantes que podem contribuir para uma melhor compreensão desta área da matemática. Ao trazer a obra de Uspenskii nesta dissertação, deseja-se resgatar de forma estruturada e engajada, conceitos e definições, comparações e provocações que acabam perdidos pela ação do tempo e pela influência dos "métodos práticos", que propõem passo-a-passo, mas não discutem a origem das ideias e, tampouco, os resultados obtidos.

Apesar da centralidade na obra de Vladimir Uspenskii, não é possível concluir este trabalho sem citar as obras de Oliveira e Bachx, que amplamente enriqueceram o presente texto com robusta e organizada teoria sobre Análise Combinatória.

Deste texto resta o convite a novas abordagens sobre Análise Combinatória, bem como à curiosidade em construir novas discussões, valorizando textos mais antigos. Estes ainda surpreendem com alguma novidade esquecida pela repetição de costumeiras "receitas" e formulários na resolução dos conhecidos problemas-padrão de Análise Combinatória. O produto educacional desta dissertação encontra-se no Educapes no link (<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1132052>).

## REFERÊNCIAS

BACHX, C.; POPPE, Luiz M. B.; TAVARES, Raymundo N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. 1. ed. [S. l.]: Companhia Editora Nacional, 1975. Citado 1 vez na página 18.

DYNKIN, Evgeni Borisovich; USPENSKII, Vladimir Andreevich. **Mathematical Conversations: Multicolor Problems, Problems in the Theory of Numbers, and Random Walks**. [S. l.]: Courier Corporation, 2013.

FREIRE, Benedito Tadeu V. Análise Combinatória. **Universidade Federal do Rio Grande do Norte**, 2001.

INSTITUTO PASCAL. **Blaise Pascal**. [S. l.: s. n.], 2024. Acesso em: 20 abr. 2024. Disponível em: <https://www.institutopascal.org.br/visao/institucional/blaise-pascal.php>.

LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. [S. l.]: SBM, 2016. v. 2.

MATEMÁTICA PT. **Triângulo de Pascal**. [S. l.: s. n.], 2024. Consultado em: 22 abr. 2024, às 15h. Disponível em: [https://www.matematica.pt/faq/triangulo-pascal.php#google\\_vignette](https://www.matematica.pt/faq/triangulo-pascal.php#google_vignette).

MOÇATO, Douglas Gonçalves. **Estrela de David no triângulo de Pascal**. 2021. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Acesso em: 24 abr. 2024. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/handle/1884/71556>.

MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta**. 2. ed. [S. l.]: SBM, 2015.

OLIVEIRA SANTOS, José Plínio de; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 1. ed. [S. l.]: Ciência Moderna, 2008.

USPENSKII, Vladimir Andreevich. Pascal's Triangle. Popular Lectures in Mathematics. **ERIC**, 1974.