COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TÚLLIO PLUM GUIMARÃES MONERAT

CONEXÕES ENTRE MATEMÁTICA FINANCEIRA E ECONOMIA COMPORTAMENTAL EM AMBIENTES DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR

Rio de Janeiro

2022

Túllio Plum Guimarães Monerat

CONEXÕES ENTRE MATEMÁTICA FINANCEIRA E ECONOMIA COMPORTAMENTAL EM AMBIENTES DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Ivail Muniz Junior

Rio de Janeiro

2022

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

M742 Monerat, Túllio Plum Guimarães
Conexões entre matemática financeira e economia comportamental em ambientes de educação financeira escolar. / Túllio Plum Guimarães Monerat - Rio de Janeiro, 2021.

101 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Ivail Muniz Junior.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática financeira. 3. Educação financeira. 4. Ambiente escolar. I. Muniz Junior, Ivanil. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 332.04

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Túllio Plum Guimarães Monerat

CONEXÕES ENTRE MATEMÁTICA FINANCEIRA E ECONOMIA COMPORTAMENTAL EM AMBIENTES DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Ivail Muniz Junior (Orientador)

Colégio Pedro II - PROFMAT CPII

____

Profa. Dra. Cristiane Azevêdo Santos Pessoa

UFPE – PPGEdumatec.

____

Prof. Dr. Carlos Heitor d´Ávila Pereira Campani

COPPEAD-UFRJ

____

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Colégio Pedro II - PROFMAT CPII

Rio de Janeiro

2022

Dedico esse trabalho a minha mãe, ao meu tio, a minha avó, a minha esposa, a minha filha, aos professores que sempre me incentivaram e ao meu orientador e amigo Prof Ivail Muniz por toda orientação, troca de ideias, atenção e paciência por todo esse tempo no qual nos dedicamos ao trabalho. Gratidão eterna.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus que sempre colocou em meu caminho pessoas incríveis, que com certeza, foram e são os responsáveis por eu ter conseguido chegar até aqui.

Agradeço à minha mãe Rosane Plum Guimarães, à minha avó Dulce Plum Guimarães, ao meu tio e padrinho Celso Plum Guimarães e à minha melhor amiga e esposa Bruna Quintan Fortunato que sempre torceram por mim e me deram apoio para tudo na vida. Vocês são aqueles que, independentemente do momento ou da circunstância, sempre estiveram presentes e foram capazes de entender meus momentos de ausência, os quais dediquei ao estudo. Muito obrigado por todo o carinho, puxões de orelha, cobranças, incentivos, companheirismo e amor incondicional que vocês me deram ao longo da vida. Sem vocês eu não seria nada, vocês são a minha base, o meu porto seguro, a minha morada.

Agradeço também à minha filha Victória Quintan Monerat. Filha, você é o meu mundo, o ar que eu respiro, meu sorriso ao levantar da cama, obrigado por existir. No seu olhar eu encontro forças para vencer qualquer adversidade, por você, pelo seu futuro, sei que qualquer coisa valerá a pena. Como diz a versão que fiz para você:

"É que eu te amo minha jóia rara, com você por perto não me falta nada, no teu sorriso me derreto inteiro, ai que vontade de te encher de beijos. No dia em que você chegou aqui, despertou a melhor parte de mim, vivo por ti, sempre vou te amar, prometo nunca te abandonar. Meu coração fora de mim, paixão que jamais vai ter fim, Victória."

Agradeço aos meus melhores amigos, meus irmãos de vida, Daivison Rocha Freitas Lemos, Francisco Carlos de Souza Torres e Iury Thawann Praxedes Fajardo. Vocês são pessoas incríveis, amigos na essência da palavra, vocês me fizeram e me fazem melhor todos os dias, obrigado, do fundo do meu coração, por terem me escolhido como um irmão. É muito doído ter meus três melhores amigos vivendo fisicamente distante de mim, um em São Paulo, outro em Corumbá e outro em Connecticut, mas ao mesmo tempo é extremamente gratificante saber que, independentemente de qualquer distância física, levo vocês no coração há mais de 10 anos e certamente os levarei para o resto da vida.

Professora Selma Pereira de Sá, minha eterna "Tia Selma", muito obrigado por toda paciência e todo o carinho que a senhora teve comigo ainda na antiga terceira série do EF I, quando cheguei para a senhora "crú", perdido e sem saber quase nada. Sou eternamente grato pela senhora ter me ajudado a dar os primeiros passos na Matemática, e grato a Deus, que mais uma vez, colocou um anjo no meu caminho.

Agradeço agora ao meu amigo e grande mestre Júnior. Saiba que você é responsável direto pela conquista deste título. Aqueles que hoje me chamam de mestre, sabem que foi você que me inspirou. Desde as aulas no projeto aprofundamento no CPII, das conversas que me fizeram acreditar que eu deveria sim ser professor, fazer matemática, até as nossas trocas de ideia hoje no nosso grupo do *whatsapp*, você sempre esteve presente na minha caminhada. Obrigado por tudo, hoje e sempre, gratidão e respeito máximo por você, meu querido.

Agradeço também aos meus colegas de curso, tenho certeza de que tudo foi melhor aproveitado e vivido por conta de vocês.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT do Colégio Pedro II, desde aqueles que efetivamente me deram aula, até aqueles com os quais, infelizmente, não pude ter contato. Professores, saibam que vocês ensinam muito mais do que práticas pedagógicas em Matemática, vocês nos edificam na alma.

Em especial gostaria de agradecer aos Professores Doutores Ivail Muniz Júnior e Daniel Felipe Neves Marins.

Iva, meu nobre amigo e querido orientador, obrigado pela oportunidade, por termos nos escolhido tão precocemente. Todo apoio, atenção e dedicação empregados por ti, não apenas na elaboração deste trabalho, mas também para comigo num dos momentos mais turbulentos que já passei, foram indispensáveis e essenciais para mim. Gratidão eterna pela amizade e companheirismo que construímos ao longo destes quase três anos, é muito prazeroso trabalhar contigo, amigo.

Dani, nossa relação é um presente de Deus, difícil até de expressar em poucas palavras aqui nos agradecimentos. Você me chama de gigante branco, mas para mim você é que é um dos maiores gigantes que eu tive o prazer de conhecer. Muito obrigado por tudo, paizão!

Agradeço aos membros da banca por terem aceitado o convite para contribuir com meu trabalho.

À CAPES, pelo financiamento da bolsa de estudos.

E por fim, gostaria de agradecer ao Colégio Pedro II, instituição que foi minha casa nos três anos do Ensino Médio e que me acolheu da melhor maneira possível agora no mestrado. CPII eu sei que você me aguarda voltar como docente, obrigado por todas as oportunidades e saiba que logo, logo, eu volto.

RESUMO

MONERAT, Túllio Plum Guimarães. **Matemática Financeira e Economia Comportamental em Ambientes de Educação Financeira Escolar.** 2022. 92f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2022.

A abordagem de situações financeiras no currículo de Matemática da Educação Básica, que leve em consideração aspectos matemáticos e não matemáticos, incluindo os aspectos comportamentais, tem sido preconizada pelos documentos norteadores nacionais, especialmente com a recente inclusão da Educação Financeira como tema transversal e integrador na Base Nacional Comum Curricular. O presente estudo traz algumas reflexões sobre a tomada de decisão em situações financeiras considerando noções da matemática financeira, ensinada na Educação Básica, e alguns resultados de estudos da Economia Comportamental. Da Matemática financeira levamos em consideração o estudo do valor do dinheiro no tempo, e os conteúdos associados tais como taxas e fatores de crescimento, progressões, funções e logaritmos. Da Economia Comportamental, com os estudos de Kahneman, Tversky e Thaller, trouxemos algumas heurísticas e vieses, dentre eles a teoria do prospecto, efeitos de enquadramento, e a heurística da assimetria de fontes. A partir do referencial teórico, desenhamos e apresentamos um material didático, formado por um conjunto atividades didáticas compostas por: (i) tarefas didáticas, com conexões com a BNCC e (ii) orientações didáticas, conceituais e metodológicas para o professor. Ambas são referenciadas teoricamente, de modo a convidar os estudantes à reflexão sobre situações financeiras envolvendo trocas intertemporais e tomada de decisão, relacionadas a crédito, financiamento, juros, inflação e planejamento financeiro. A metodologia utilizada foi a Pesquisa em Desenvolvimento. A perspectiva teórico-metodológica se baseia essencialmente nas concepções de Silva e Powell sobre Educação Financeira Escolar; e na arquitetura dos Ambientes de Educação Financeira Escolar, de Muniz, com seus quatro princípios: convite à reflexão, dualidade, conexão didática e multidisciplinaridade. O resultado é um material que busca estimular a produção de significados do estudante diante das situações econômicas de tomada de decisão envolvendo algumas trocas intertemporais, levando em consideração a dinâmica de uma educação matemática que considere aspectos matemáticos e não matemáticos na leitura, interpretação, análise e tomada de decisão em situações econômico-financeiras. Compõe ainda o material, um conjunto de orientações para o professor no sentido de convidá-lo a pensar a tomada de decisão para a aula de matemática, aproveitando temas e habilidades de matemática que já trabalha/desenvolve em determinada série, com modelos, cálculos e simulações, para convidar seus alunos a analisarem criticamente a distribuição de renda em seu bairro, cidade, estado, país e até em nível global, bem como pensar algumas atitudes e decisões, e suas potenciais consequências para os envolvidos, buscando contribuir para a formação do pensamento crítico do cidadão do século XXI.

Palavras-chave: Ambientes de Educação Financeira Escolar, Matemática Financeira, Economia comportamental, heurísticas e vieses, tomada de decisão.

ABSTRACT

MONERAT, Túllio Plum Guimarães. **Financial Mathematics and Behavioral Economics in School Financial Education Enviroments.** 2022. 92f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2022.

The approach of financial situations in the Mathematics curriculum of Basic Education, which takes into account mathematical and non-mathematical aspects, including behavioral aspects, has been recommended by national guiding documents, especially with the recent inclusion of Financial Education as a transversal and integrating theme in the Common National Curriculum Base. The present study brings some reflections on decision-making in financial situations considering notions of financial mathematics, taught in Basic Education, and some results of studies of Behavioral Economics. Based on the theoretical framework, we designed and presented a didactic material, formed by a set of didactic activities composed of: (i) didactic tasks and (ii) guidelines for the teacher. Both are theoretically referenced, in order to invite students to reflect on financial situations involving intertemporal exchanges and decision making, related to credit, financing, interest, inflation and financial planning. The methodology used was Research in Development. The theoretical-methodological perspective is essentially based on Silva and Powell's conceptions about School Financial Education; and in the architecture of Muniz's School Financial Education Environments, with its four principles: invitation to reflection, duality, didactic connection and multidisciplinarity. From Financial Mathematics we take into account the study of the time value of money, and associated contents such as growth rates and factors, progressions, functions and logarithms. From Behavioral Economics, with Kahneman, Tversky and Thaller, we brought some heuristics and biases, among them prospect theory, framing effects, and the heuristic of source asymmetry. The result is a material that seeks to stimulate the student's production of meanings in the face of economic decision-making situations involving some intertemporal exchanges, taking into account the dynamics of a mathematics education that considers mathematical and non-mathematical aspects in reading, interpretation, analysis and decision-making in economic-financial situations. The material also comprises a set of guidelines for the teacher in order to invite him to think about the decision making for the math class, taking advantage of topics and math skills that he already works/develops in a certain series, with models, calculations and simulations, to invite your students to critically analyze the income distribution in their neighborhood, city, state, country and even at a global level, as well as to think about some attitudes and decisions, and their potential consequences for those involved, seeking to contribute to the formation of the critical thinking of the 21st century citizen.

keywords: School Financial Education Environments, Economics, Decision making, didactic material design.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS E QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AEFE – Ambientes de Educação Financeira Escolar
BCB – Banco Central do Brasil
BNCC – Base Nacional Comum Curricular
CAPM – Capital Asset Pricing model
CPII – Colégio Pedro II
EF – Educação Financeira
EFCE - Educação Financeira em Contextos Escolares
EFE – Educação Financeira Escolar
ENEF – Estratégia Nacional de Educação Financeira
HME – Hipótese de Eficiência de Mercado
MCS – Modelo dos Campos Semânticos
OCDE – Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
PEIC – Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor
SEF – Situações econômico-financeiras
TMF – Teoria Moderna das Finanças

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A abordagem de temas financeiros na escola brasileira não é recente. Os currículos do Colégio Pedro II de 1850 a 1930, por exemplo, conforme analisados por Beltrame (2001), indicam a presença de problemas matemáticos envolvendo questões comerciais tais como juros e troca de moedas. Um outro exemplo ainda mais específico pode ser encontrado no livro Arithmetica Progressiva de Antonio Trajano, que em sua 68ª edição, datada de 1935, já trazia situações econômico-financeiras envolvendo câmbio, juros, sociedade comercial, descontos dentre outras. (TRAJANO, 1935).

Entretanto dois eventos mudaram a história dessa abordagem no século XXI. O primeiro foi a iniciativa internacional da OCDE realizada pela Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico (OCDE) por meio do seu F*inancial Education Project* iniciado em 2003. Esse documento foi o ponto de partida para iniciar um movimento de educação financeira em nível mundial (XU & ZIA, 2012; MUNDY, 2008; et al), que influenciou projetos e iniciativas em diversos países, incluindo o Brasil.

Com esse evento, diversas iniciativas de Educação Financeira foram (e vem sendo) implementadas em nível mundial no século XXI, desenhadas, apoiadas e orquestradas por diversos agentes econômicos, tanto públicos quanto privados, bem como agentes educacionais (professores escolas, secretarias de educação), com as mais variadas intenções e objetivos, sendo endereçadas a diferentes públicos. Dentre essas iniciativas destacamos as voltadas para os espaços escolares de Educação Básica. É aí que vem o segundo evento.

O segundo evento, fortemente influenciado pelo primeiro e pelos seus desdobramentos, foi a inserção da Educação Financeira como tema transversal e integrador na Base Nacional Comum Curricular, em 2017, principal documento que passou a nortear as competências e habilidades a serem desenvolvidas e os conteúdos a serem aprendidos pelos alunos da Educação Básica no Brasil.

Esses dois eventos geraram uma demanda muito maior que as dos séculos XIX e XX, em termos de se trabalhar contextos, conteúdos, temas e problemas financeiros na Escola. De fato, pois na medida que ações educacionais se voltam para a Educação Financeira de crianças e jovens, em especial por meio do ensino na Educação básica, quer por meio de iniciativas pessoais de professores(as) (geralmente de matemática) que se interessam e estudam o tema, quer por ações locais de escolas por meio de projetos pedagógicos, ou por meio de órgãos governamentais tais como o Banco Central (BC), ou ainda via documentos curriculares tais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), questões como: "Por que abordar Educação Financeira na Escola?" "o que ensinar?", "como ensinar?", "quando ensinar?", "como preparar o professor para ensinar?", emergem e precisam ser respondidas.

Para contribuir nesse processo de ajudar o professor na tarefa de educar financeiramente os estudantes da Educação Básica, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos de forma ética, humanista e responsável, que leve em consideração as condições econômico-financeiras locais sem perder de vista as transformações globais, conforme apontado por vários autores, dentre eles Pessoa, Muniz e Kistemann (2018) e também parcialmente preconizada pela Diretrizes Nacionais de Educação e mais recentemente pela BNCC, esse texto apresenta algumas reflexões sobre matemática financeira e economia comportamental.

Essa junção é inspirada nos trabalhos nos estudos de Kahneman, Tversky (2012), Thaler (1981); Silva, Powell (2013) e em especial, de Muniz (2016). A Economia Comportamental entra aqui para nos ajudar a entender de forma mais ampla a tomada de decisão humana.

Mas o que essa área tem a ver com situações financeiras que, aparentemente, parecem ser apenas problemas de matemática financeira?

Conforme aponta Muniz (2018, p.8)

> Reforçamos, portanto, que o estudo do comportamento humano por pesquisadores dessa área denominada Economia Comportamental, aqui recortado e utilizado de forma bem simples, é de fundamental importância para uma EFE que, de fato, trate as decisões humanas como de fato elas costumam ser, ou seja, caracterizadas por processos complexos, repletos de atalhos mentais, ora baseadas na consciência, ora não, que se misturam com processos analíticos e deliberados, em que os aspectos matemáticos são levados em consideração.

Na direção dessa concepção de Educação Financeira, escolhemos matemática financeira pois dela podemos entender aspectos matemáticos importantes para analisar situações financeiras e para refletir sobre decisões e suas possíveis consequências. E trouxemos algumas noções da economia comportamental, para ampliar a visão sobre a tomada de decisão humano, e as consequências disto no design de materiais de educação financeira, em especial os problemas ou investigações sobre situações financeiras que convidem os estudantes a analisarem opções e a tomarem decisões. Buscamos mostrar como alguns resultados dos estudos sobre comportamento humano na área de Economia Comportamental podem ajudar o professor a entender as situações financeiras que aparecem em alguns problemas, aparentemente apenas de "matemática financeira", e de como isso pode também ajudar em aspectos didáticos e curriculares: na didática da abordagem, na concepção de materiais e na análise dos discursos, respostas e escolhas dos estudantes, em ambientes de educação financeira escolar.

Buscamos, assim, dar uma contribuição para uma Educação Financeira, nas aulas de Matemática inclusive, que leve em consideração como as pessoas costumam ser e não necessariamente como elas deveriam ser, em relação a pressupostos econômicos ou premissas prescritivas.

Assim, definimos como objetivo geral deste trabalho é apresentar:

uma proposta de material didático que aborde noções de Matemática Financeira e Economia Comportamental, na forma de um conjunto de atividades didáticas, referenciadas teoricamente, compostas por: (i) tarefas didáticas e (ii) orientações para o professor, de modo a convidar os estudantes à reflexão sobre situações financeiras envolvendo trocas intertemporais e tomada de decisão, relacionadas a crédito, financiamento, juros, inflação e planejamento financeiro, considerando os princípios do convite à reflexão, dualidade, conexão didática e lente multidisciplinar.

Para atingir ao objetivo central, traçamos os seguintes **objetivos específicos:**

1. Identificar e selecionar situações financeiras que estejam presentes na realidade brasileira, e conectadas a heurísticas e vieses.
2. Desenhar um conjunto de 8 atividades didáticas, referenciadas teoricamente, que convidem estudantes a usar matemática financeira na tomada de decisão e permitam reflexões sobre aspectos comportamentais envolvidos no processo.

Para isso, apresentaremos no capítulo 2, dividido em duas sessões, os embasamentos teóricos, observando principalmente as pesquisas de Muniz (2016d), que fundamentam nossa definição sobre Educação Financeira Escolar e Ambiente de Educação Financeira Escolar bem como uma revisão da literatura para reforçar a importância do tema escolhido.

No capítulo 3, dividido também em duas sessões, apresentamos todos os conceitos, premissas e fundamentos básicos da Matemática Financeira, além de uma explanação das principais heurísticas e vieses cognitivos estudados, apresentados e propostos pelos pesquisadores do ramo das Finanças Comportamentais. Neste capítulo encontra-se todo o arcabouço teórico que foi utilizado como suporte para a fundamentação das tarefas e orientações para o professor propostos no capítulo 5.

No Capítulo 4 apresentamos os pressupostos metodológicos da nossa pesquisa, que é caracterizada com uma pesquisa de desenvolvimento, dada à sua natureza de design de materiais. Justificamos também a escolha do tema e apresentamos os pressupostos metodológicos usados para o design das tarefas propostas.

No Capítulo 5 apresentamos o material didático composto pelas 8 atividades didáticas, que permitissem a articulação de temas da matemática financeira com o estudo das heurísticas inerentes ao processo humano de tomada de decisão. Optamos por apresentar as orientações para o professor de forma contígua à resolução comentada, para que ficasse evidenciado que os 8 convites didáticos são endereçados a estudantes e professores, além de apontar para a possível confecção de um produto final.

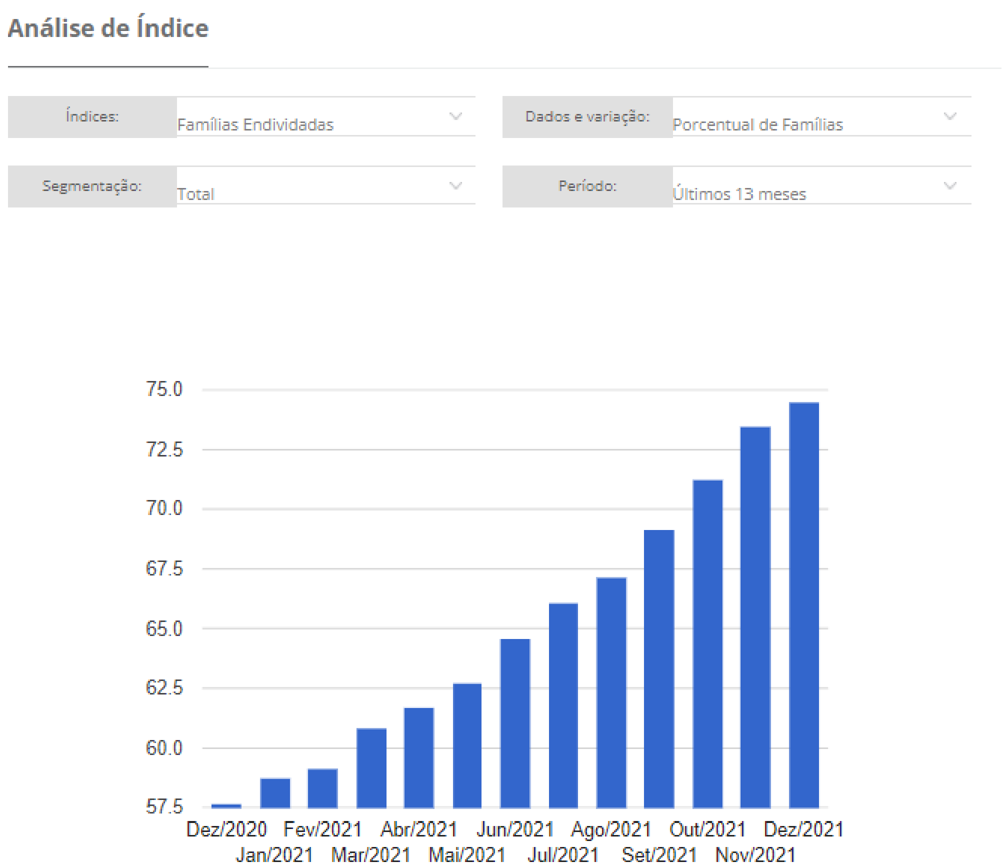
2 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

No presente capítulo iremos elencar e discutir variadas concepções sobre o que vem a ser a Educação Financeira (EF), como ela é entendida e debatida em ambientes escolares e também qual é a nossa visão sobre a temática. Ainda neste capítulo apresentaremos uma revisão literária sobre a EF com ênfase nos trabalhos desenvolvidos por pesquisadores que estudam a conexão entre as práticas econômicas, a educação básica e o nosso "carro-chefe": a tomada de decisão.

2.1 Educação financeira em ambientes escolares: principais concepções

Gostaríamos de iniciar nossa discussão trazendo um dado apontado recentemente pela Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (PEIC): o número de famílias brasileiras endividadas atingiu a inacreditável marca de 74,5%. Não obstante o percentual de famílias endividadas sobe, mês a mês, desde de novembro de 2020, conforme mostra o gráfico abaixo.

Figura 1 – Gráfico: progressão do endividamento das famílias no Brasil



Disponível em: https://www.fecomercio.com.br/pesquisas/indice/peic

Há hoje diversos bancos, financeiras, casas de análises, programas governamentais e até mesmo os famosos “influenciadores digitais” (gabaritados para tal tarefa ou não) oferecendo cursos (gratuitos ou pagos) de educação financeira para as pessoas através dos mais diversos meios de comunicação: plataformas online de hospedagem de arquivos, redes sociais, chamadas de vídeo ao vivo, etc.

Em nossa visão, dados como os apontados pelo gráfico mostram, ainda que superficialmente, que apesar de ter ganhado notoriedade nos últimos anos a EF está longe de ser um alimento que todo brasileiro tem à mesa. Existe em nossa sociedade uma necessidade real de conteúdos que ensinem ou pelo menos que dialoguem com o público no sentido de auxiliar o cidadão a lidar com suas finanças pessoais especialmente diante dos rumos econômicos tomados em todo o mundo por conta do advento da pandemia do Covid-19.

Como nós enquanto educadores podemos auxiliar a mudar esse panorama? Temos espaço para isso durante nossas aulas? Quais diretrizes nos foram dadas? Há algum documento oficial que nos oriente nesse sentido?

A OCDE, desde 2003, desenvolve estudos no sentido de dar suporte aos seus países-membros para que os mesmos possam propor e implementar programas de EF para seus habitantes. De acordo com Silva e Powell (2013), uma das principais consequências desse movimento foi a produção do primeiro grande estudo sobre Educação Financeira em nível Internacional: *Melhoria da literacia financeira: análise das questões e políticas.*

Baseada em seus estudos a OCDE produziu o documento “Recomendações sobre os princípios e boas práticas para a Educação Financeira e consciência” (OCDE, 2005), onde podemos achar a seguinte definição de Educação Financeira:

> Educação Financeira é o processo pelo qual os consumidores financeiros/investidores melhoram a sua compreensão sobre os conceitos e produtos financeiros e, através da informação, instrução e/ou aconselhamento objetivos, desenvolve as habilidades e a confiança para tomar consciência de riscos e oportunidades financeiras, para fazer escolhas informadas, saber onde buscar ajuda e tomar outras medidas eficazes para melhorar a sua proteção e o seu bem-estar financeiro. (OCDE, 2005b, apud SILVA; POWELL, 2013, p.3).

Tal definição se tornou uma referência mundial e passou a ser adotada em diversos países na hora de elaborar seus programas de Educação Financeira. Inclusive o Brasil, que apesar de não ser um país-membro da OCDE, foi convidado a acompanhar alguns dos estudos e, desde então, tem se norteado pelos resultados desses estudos para implementar iniciativas de Educação Financeira no país.

Segundo a OCDE, ainda no mesmo documento supracitado, na seção "Boas práticas", é sugerido que "A Educação Financeira deve começar na escola. As pessoas devem ser educadas sobre questões financeiras o mais cedo possível em suas vidas" (OCDE, 2005) e afim de realizar esse objetivo:

> Para os programas que favoreçam o uso de sala de aula, uma educação adequada e a competência dos educadores devem ser promovidas. A este respeito, o desenvolvimento de programa de "formar formadores" e o fornecimento de material de informação e ferramentas específicas para estes formadores devem ser incentivados. (OCDE, 2005b, apud SILVA; POWELL, 2013, p.3)

A definição de Educação Financeira sugerida pela OCDE notoriamente abriu as portas para as mais variadas iniciativas de implementação de estudos sobre o tema mundo a fora, entretanto para nós há alguns pontos dessa definição com os quais não concordamos e a seguir iremos trazer alguns argumentos que justificam essa não-concordância.

Primeiramente podemos notar o quão tendencioso e restritivo é o modelo sugerido pela OCDE, dado que o mesmo foca em aperfeiçoar os consumidores e investidores no que tange aos conceitos financeiros, entretanto esse tipo de ação acaba se apoiando nos produtos financeiros que são ofertados pelas próprias instituições financeiras, criando-se assim uma relação de dependência.

Segundo Muniz (2016a):

> "Esse movimento de melhorar a Educação Financeira das pessoas começa a ganhar contornos globais no início do Século XXI, e tem sido influenciado por diversos fatores econômicos, políticos e sociais, os quais decorrem essencialmente das transformações no cenário econômico-financeiro global nos últimos 20 anos, juntamente com as singularidades políticas, econômicas e demográficas regionais. Tais fatores têm ampliado o número de questões econômico-financeiras com as quais os cidadãos têm lidado, produzindo grandes desafios para a comunidade global, demandando assim discussões, orientações e análises, muitas delas inseridas no que se tem chamado de Educação Financeira". (OCDE, 2005; PIKETY, 2014; BAUMAN; 2013; PATEL, 2010, et al)

A definição apresentada pela OCDE versa sobre o consumidor/investidor "racional", aquele que age cuidadosamente, minuciosamente, acertadamente visando os lucros. Entretanto pensamos que não é só o acesso à informação ou a apresentação de regras e leis matemáticas que deve ser ensinado ao cidadão para que o mesmo equacione sua vida financeira. É preciso entender a linguagem do seu meio social, analisar seu "habitat natural" e promover ações para que esse sujeito pratique uma reflexão crítica, que cremos ser um dos maiores alicerces para que se possa construir um posicionamento ou estratégia com relação ao consumo e à tomada de decisões financeiras.

Apresentaremos algumas outras definições a seguir, como por exemplo a adotada pelo Banco Mundial:

> "... pode abranger conceitos que vão desde a conscientização e conhecimentos financeiros, inclusive de produtos financeiros, instituições e conceitos; Habilidades financeiras, como a capacidade de calcular pagamentos de juros compostos; e capacidade financeira em termos mais gerais, em termos de gestão de dinheiro e planejamento financeiro. Na prática, no entanto, essas noções frequentemente se sobrepõem". (XU & ZIA, 2012, p.2)

Já para o Banco Central do Brasil temos dois recortes a serem analisados, inicialmente, em 2010, e com uma forte influência da definição sugerida pela OCDE foi dito que:

> "A Educação Financeira é o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão dos conceitos e produtos financeiros. Com informação, formação e orientação claras, as pessoas adquirem os valores e as competências necessários para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos a elas associados e, então, façam escolhas bem embasadas, saibam onde procurar ajuda e adotem outras ações que melhorem o seu bem-estar". (BCB, 2010)

Já em 2014 tal definição foi modificada pelo Banco Central no Caderno de Educação Financeira – Gestão de Finanças Pessoais, disponibilizado pelo Banco Central do Brasil, definindo que:

> "... a educação financeira é o meio de prover conhecimentos e informações sobre comportamentos básicos que contribuem para melhorar a qualidade de vida das pessoas e de suas comunidades. É, portanto, um instrumento para promover o desenvolvimento econômico. Afinal, a qualidade das decisões financeiras dos indivíduos influencia, no agregado, de toda a economia por estar intimamente ligada a problemas de endividamento e inadimplência das pessoas e a capacidade de investimento dos países". (BCB, 2014).

Com relação a essas duas definições supracitadas podemos notar uma clara mudança entre a definição adotada em 2010, que é muito impregnada pela definição dada pela OCDE, e a definição adotada a partir de 2014. Ainda que não concordemos em totalidade com a definição de 2014 é notório que o BCB diminui um pouco o foco dado ao consumidor e ao consumo como mola que impulsiona o mundo e tenta abrir um pequeno espaço para outros aspectos e elementos que compõe a temática da EF.

Até agora falamos de definições do que é, ou deveria ser, diante de algumas óticas, a Educação Financeira. Mas ainda não falamos onde que se insere o professor de Matemática "nessa brincadeira" e você deve estar se perguntando: "- Mas e aí? E eu com isso?", pois bem, vamos entender qual é o nosso papel nesse processo.

Em dezembro de 2010, foi criada a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)[1], onde foram definidas várias medidas e ações focadas exclusivamente na educação financeira nas escolas. Silva (2014) aponta que a grande medida proposta pela ENEF foi o programa "*Educação Financeira nas Escolas"* cuja base é:

> "A Educação Financeira nas escolas se apresenta como uma estratégia fundamental para ajudar as pessoas a realizar seus sonhos individuais e coletivos. Discentes e docentes financeiramente educados podem constituir-se em indivíduos crescentemente autônomos em relação a suas finanças e menos suscetíveis a dívidas descontroladas, fraudes e situações comprometedoras que prejudiquem não só sua própria qualidade de vida como a de outras pessoas". (ENEF, 2010)

Em junho de 2020, a partir de um decreto presidencial, o texto inicial da ENEF, datado de 2010, foi revogado e substituído por outro que institui além da "nova Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF" também o Fórum Brasileiro de Educação Financeira – FBEF, que nada mais é que um colegiado responsável por implementar e estabelecer os princípios da ENEF, divulgar ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal.

Ademais, a própria Base Nacional Curricular Comum (BNCC), coloca a Educação Financeira como componente de uma das unidades temáticas que devem ser contempladas na disciplina de Matemática:

> "Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como

[1]A ENEF é uma mobilização multissetorial em torno da promoção de ações de Educação Financeira no Brasil. A estratégia foi instituída como política de estado de caráter permanente, e suas características principais são a garantia de gratuidade das iniciativas que desenvolve ou apoia e sua imparcialidade comercial. O objetivo da ENEF, criada através do Decreto Federal 7.397/2010, é contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes. A estratégia foi criada através da articulação de nove órgãos e entidades governamentais e quatro organizações da sociedade civil que, juntos, integram o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF). Disponível em http://www.vidaedinheiro.gov.br/quemsomos/

> taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro". (BRASIL, 2018, p.269)

Gostaríamos de deixar claro que apesar do texto da BNCC contemplar de maneira clara explícita a EF como um tema associado à disciplina de Matemática, nós defendemos a ideia de que a EF é um tema transversal e que pode e deve ser trabalhado em outras disciplinas tais como: Geografia, quando falamos de organizações internacionais (como a OCDE) ou das questões de consumo; História, quando falamos das questões históricas que contemplam economia, meios de produção, revoluções; Filosofia e Sociologia, quando tratamos das questões éticas atreladas à EF.

Sendo assim, ainda que não exclusivamente, se torna também papel do professor Matemática educar financeiramente os jovens do país. Entretanto alguns questionamentos ficam "no ar":

- Como inserir mais um assunto em uma disciplina que já conta talvez com excesso de conteúdo?
- A carga horária letiva permanecerá inalterada?
- Caso tenhamos o mesmo tempo para trabalhar ainda mais conteúdos, não iremos tornar o processo de ensino-aprendizagem mais vago?

Sem contar, é claro, questionamentos, tão importantes quanto, no que diz respeito à preparação, capacitação e até mesmo interesse dos professores de Matemática em educar financeiramente os alunos. Para que tenhamos uma breve noção, nos ativemos ao Rio de Janeiro, local de onde produzimos este trabalho e fizemos uma pesquisa nos currículos dos cursos de licenciatura em Matemática em quatro universidades públicas do estado procurando por disciplinas obrigatórias que conectam o jovem universitário, futuro professor de Matemática que terá a responsabilidade de educar financeiramente os jovens, com a temática da Educação Financeira.

Nas matrizes curriculares da Universidade Federal Fluminense (UFF)[2], da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)[3], da Universidade do Estado do Rio de

---

[2] Disponível em: https://app.uff.br/iduff/consultaMatrizCurricular.uff

[3] Disponível em: https://siga.ufrj.br/sira/temas/zire/frameConsultas.jsp?mainPage=/repositorio-curriculo/A26B74C8-92A4-F799-2D72-BC240BA015D5.html

Janeiro (UERJ)[4] e da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO)[5] não há disciplinas obrigatórias cujas ementas conectem o universitário com a Educação Financeira.

Ou seja, caso o professor, egresso de uma dessas quatro (renomadas) instituições de ensino tiver que trabalhar a EF com os seus alunos, terá que estudar por conta própria o tema. Gostaríamos de deixar claro que aqui estamos falando especificamente dessas quatro instituições que tivemos o trabalho de analisar o currículo, mas temos a forte impressão de que se estendêssemos nossa pesquisa para outros estados/universidades acabaríamos encontrando o mesmo resultado.

Aliando isso ao fato de que dentre todas as definições de EF apresentadas até aqui nenhuma delas levou em consideração as dinâmicas envolvidas no processo de ensino-aprendizagem no contexto escolar, iremos apresentar a seguir uma concepção de Educação Financeira inspirada em Muniz (2016), que leva em consideração aspectos matemáticos e não matemáticos, conectando-os à realidade da sala de aula dando importância à aspectos cognitivos, didáticos e multidisciplinares.

Desse modo, vamos considerar **Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE)** como:

> “... um processo de educar a partir de um conjunto de estratégias e ações desenvolvidas para o contexto escolar, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, didáticos e multidisciplinares, que convide os estudantes a refletirem sobre situações econômicas e financeiras relacionadas com a aquisição, planejamento, utilização e redistribuição do dinheiro, de forma crítica e fundamentada, e também sobre possíveis consequências de suas decisões e atitudes frente às suas demandas, necessidades, projetos e realizações em sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem. Um convite que leve em consideração ASPECTOS MATEMÁTICOS E NÃO MATEMÁTICOS na análise e na tomada de decisão, e que também leve em consideração o contexto social e econômico dos estudantes, as características culturais e singularidades sociais da região em que vivem, bem com os desafios da realidade econômica e social brasileira”. (Muniz, 2016)

Conforme ilustra a figura a seguir, a EFCE é baseada em quatro princípios.

Figura 2 – Princípios da EFCE

---

[4] Disponível em: https://www.dep.uerj.br/fluxos/matematica_licenciatura_diurno.pdf

[5] Disponível em: http://www2.unirio.br/unirio/ccet/matematica/licenciatura-em-matematica-presencial/fluxograma-licenciatura-em-matematica-presencial/view

Fonte: Muniz (2016a, p.48)

O primeiro princípio intitulado: **convite à reflexão**, expressa que ao educar financeiramente não queremos determinar ou impor aquilo que os estudantes devem pensar, mas sim convidá-los, através da leitura de situações financeiras, a terem uma oportunidade de reflexão que contemple variados aspectos, incluindo os matemáticos, para que pensem, e sejam capazes de elaborar sua própria tomada de decisão. Acerca deste primeiro princípio Muniz (2016a) comenta:

> "Defendemos um convite à reflexão por que entendemos que a decisão pessoal de cada um sobre como agir e o que fazer a partir das reflexões depende de uma gama de valores e princípios que certamente influenciarão a forma de ver e agir a partir da educação financeira abordada nessa fase escolar. O que pode ser ótimo do ponto de vista econômico, e produzir um excelente bem-estar, pode ser a pior opção do ponto de vista social ou ambiental, por exemplo". (Muniz, 2016a, p.47)

O segundo princípio intitulado: **conexão didática**, versa sobre a importância de entender o protagonismo do aluno no processo de ensino-aprendizagem, é através do entendimento de como os alunos elaboram suas análises sobre as situações financeiras que teremos um norte para criar formas melhores de lecionar. É imprescindível tentarmos entender se eles usam ferramentas matemáticas ou não, como os argumentos não matemáticos aparecem em suas análises, que fatores econômicos, sociais, técnicos contribuíram para a tomada de decisão daquele aluno diante da situação exposta.

O terceiro princípio intitulado: **dualidade**, marca uma clara posição: a Educação Financeira Escolar ocorre em uma "via de mão dupla".

> "... a Educação Financeira Escolar se beneficie da matemática, enquanto área científica, para entender, analisar e tomar decisões em situações financeiras, e que também permita explorar situações financeiras para aprender noções e ideias matemáticas". (Muniz, 2016a, p.47)

O quarto, e último princípio, intitulado: **lente multidisciplinar**, defende que é de suma importância que nós, enquanto educadores, ofereçamos aos alunos múltiplas leituras sobre situações financeiras:

> "Aspectos financeiros, matemáticos, comportamentais, culturais, biológicos e políticos podem ser utilizados de forma articulada para ajudar os estudantes na leitura de situações de consumo, renda, endividamento, investimento, planejamento financeiro, sustentabilidade, dentre outras. Estudos da Geografia, História, Sociologia e Filosofia, incluindo os abordados na Educação Básica, em especial no Ensino Médio, bem como as centenas de estudos que vem sendo realizados há décadas pelas áreas da Economia, Psicologia Econômica e Economia Comportamental, do Marketing, Antropologia e Sociologia do Consumo, e mais recentemente pela Neurociência, podem oferecer diferentes lentes analíticas para se ver e entender processos na EFE. E como lentes, focam alguns aspectos e desfocam outros.". (Muniz, 2016a, p.48)

Nossa pesquisa se insere fortemente nesse último princípio, a lente multidisciplinar. A perspectiva de Educação Financeira adotada nesse trabalho envolve o estudo, a análise e a reflexão em cima de questões que abordam como pode se dar a tomada de decisão dos nossos alunos em situações que envolvem o dinheiro.

Além de definir EFCE também gostaríamos de definir o que são Ambientes de Educação Financeira Escolar (AEFE):

> "AEFE não se refere a lugares, espaços escolares, ambientes físicos pré-determinados, mas sim a um conjunto de momentos de interação entre pessoas, embasadas por quaisquer abordagens metodológicas e didáticas, bem como produzidas a partir de qualquer conteúdo ou tema, incluindo os referentes à Matemática Escolar. Nesses ambientes, os alunos analisam e investigam SEF, bem como tomam suas decisões. Assim, são para tais ambientes que analisamos suas decisões que podem (ou não) influenciar suas escolhas ao longo da vida. Assim, os ambientes podem ser formados por momentos de sala de aula, projetos escolares, pesquisas acadêmicas, investigações, palestras, rodas de conversa, formação de professores da Educação Básica, dentre outros, em que as situações financeiras são tratadas por meio do convite à reflexão". (Muniz, 2016)

De forma resumida, elaborar/propor tarefas através desses quatro princípios da EFCE significa:

1- Deixar claro que é um convite e não uma imposição.
2- Substituir perguntar rasas do tipo: “O que é melhor do ponto de vista financeiro”? Por perguntas mais elaboradas como: “Qual decisão financeira você tomaria, considerando apenas o custo de oportunidade exposto? Esse custo cabe no seu orçamento? Quais outras perspectivas você levaria em consideração”?
3- Adaptar uma mesma situação financeira para diferentes contextos sala de aula, tais como: série de escolaridade, tempo disponível, disponibilidade ou não de recursos tecnológicos, etc.
4- Conduzir os alunos de modo que eles possam desenvolver habilidade e raciocínio não só de cunho matemático, mas também de cunho interdisciplinar, de modo que sejam capazes de analisar criticamente os cenários nos quais estão envolvidos e tomem decisões de acordo com suas formas de agir.

Analisaremos na próxima seção alguns trabalhos cujo objeto de estudo são temas da educação financeira abordados em sala de aula ou para a sala de aula da educação básica e que envolvam a tomada de decisão como temática principal.

2.2 Educação financeira escolar e tomada de decisão: uma revisão literária

Na presente seção iremos fazer uma revisão da literatura através de um levantamento de alguns trabalhos desenvolvidos na área da Educação Financeira Escolar onde a tomada de decisão surja como tema principal das discussões. Nosso objetivo com essa revisão é sustentar nossa pesquisa com orientações e teorias já aplicadas em sala e também situar nosso trabalho em relação às demais produções acadêmicas do referido tema.

Enfrentamos um problema de cunho técnico ao tentarmos utilizar a base de dados do PROFMAT[6], pois a mesma encontrava-se fora do ar.

Figura 3 – Base de dados do PROFMAT

[6] https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

Fonte: https://profmat-sbm.org.br/dissertações/

Por conta desse empecilho optamos por utilizar a base do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)[7], a base do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)[8] e a base de periódicos da CAPES[9].

Na base do EDUMATEC da UFPE buscamos, em todo o repositório, por trabalhos que continham em seus assuntos as seguintes palavras: “tomada de decisão” e “educação financeira”. Com esses filtros encontramos 10 dissertações, das quais destacamos o estudo de VIEIRA (2021) que em sua pesquisa analisou como estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental se posicionam diante de situações de Educação Financeira que envolvem a utilização e a noção do valor do dinheiro. A investigação mostrou que os estudantes produziram significados para o uso do dinheiro para a compra de produtos

[7] https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/179
[8] https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/publicacoes/dissertacoes-defendidas/
[9] https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/index.php

necessários e supérfluos, para situações de emergência, como forma de investimento, também sobre a distribuição do dinheiro bem como a noção do valor do dinheiro no tempo. A pesquisa também se preocupou em analisar se a maneira como esses alunos tomavam suas decisões diante das situações propostas sofria influência do contexto social no qual aqueles alunos estavam inseridos.

Na base do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) buscamos por "educação financeira" encontrando 36 dissertações. Dessas, destacamos 4 que estudaram de maneira mais aprofundada o processo de tomada de decisão: XISTO (2020); DIAS (2015); CAMPOS (2015) e RESENDE (2013).

Em sua pesquisa DIAS (2015) fez uma análise sobre as tomadas de decisão de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede municipal do município de Juíz de Fora (MG) baseada nos pressupostos teóricos da Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose e o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Romulo Campos Lins. Os trabalhos de XISTO (2020) e RESENDE (2013) foram focados em estudar os processos que culminam na tomada de decisão de estudantes da Educação de Jovens Adultos (EJA) no momento de consumir, planejar, investir ou lidar com alguma situação financeiro-econômica cotidiana. Ambos os trabalhos tinham como objetivo maior da investigação a elaboração de um produto educacional que abordasse situações financeiro-econômicas de modo a fornecer direcionamentos para futuros educadores da EJA. Gostaríamos de destacar um diferencial na pesquisa de XISTO (2020) que foram as situações com a temática "Empreendedorismo" e que nos motivaram a escrever a tarefa "Abrindo o seu próprio negócio".

Apesar de XISTO (2020) e RESENDE (2013) terem desenvolvido seus trabalhos na EJA, os resultados obtidos foram, inegavelmente, satisfatórios. De modo que esperamos que o presente trabalho possa produzir frutos tão expressivos quando utilizado como ferramenta educacional.

A pesquisa de CAMPOS (2015) investigou a produção de significados financeiro-econômicos, através de situações-problema que envolvem a tomada de decisão com relação ao consumo de bens e serviços de 9 indivíduos-consumidores, todos donos e donas de casa que participavam de maneira ativa da elaboração e execução de seus orçamentos doméstico-familiares. Apesar de não focar o produto final de seu trabalho, especificamente, nos alunos, sejam do ensino regular ou da EJA, mas sim nos "...

interessados como entender e compreender melhor tais questões relacionadas a planejamento financeiro de curto, médio e longo prazo...” (Campos, 2015), consideramos sua pesquisa fundamental para ampliar nossa visão sobre os conceitos que envolvem as diferentes posturas que podem ser adotadas em uma sociedade de consumo.

Já na base de periódicos da CAPES utilizamos a ferramenta de busca avançada para filtrarmos trabalhos cujos “assuntos continham” os termos de busca: “tomada de decisão” e “educação financeira escolar” e a pesquisa não nos retornou nenhum resultado. Sendo assim, decidimos alterar os parâmetros de busca e, ao invés de procurarmos por “assuntos que continham”, procuramos por “qualquer campo que possuía exatamente” e novamente digitamos nos termos de busca “tomada de decisão” e “educação financeira escolar”. Com essa mudança conseguimos encontrar 12 trabalhos, todos artigos.

Dentre os artigos encontrados destacamos: SANTOS, PESSOA (2020) que analisou as atividades propostas em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2016; FERNANDES, SCORTEGAGNA, BARRÉRE (2019) que trouxe uma tarefa sobre a tomada de decisão quanto a uma compra à vista ou à prazo com o intuito de debater sobre a utilização positiva de dispositivos móveis em sala; ROCHA, MARIANI (2020) que apresentou e analisou uma tarefa referente à tomada de decisão diante de uma situação que envolvia uma série uniforme de pagamentos.

Apesar de SANTOS, PESSOA (2020) focar seu estudo em atividades que são propostas em materiais voltados aos anos inicias e do nosso trabalho ter como objetivo propor atividades para os anos finais do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio, as temáticas “atitudes ao comprar, influência das propagandas/mídia, guardar para adquirir bens ou produtos, desejos versus necessidades, economia doméstica, uso do dinheiro, valor do dinheiro, tomada de decisão, produtos financeiros, sustentabilidade e consumismo”, definidas no artigo, nos serviram de inspiração para a produção das tarefas que serão apresentadas no quinto capítulo do presente trabalho.

SANTOS, PESSOA (2020) também afirma nas considerações finais que:

> “Nos livros do 1º ao 3º anos, percebe-se uma diversidade de temáticas, o que enriquece as discussões. Contudo, ressalta-se que poderia haver, de modo geral, um maior aprofundamento nas orientações ao professor. Isso porque a presença de boas temáticas nas atividades não garante que as discussões em sala de aula acontecerão de forma crítica e reflexiva, favorecendo os conhecimentos necessários para as tomadas de decisão ao longo da vida pelos alunos. Nesse sentido, o manual do professor é uma das ferramentas que dá subsídios ao docente e precisa ser explorado ao máximo. Nos livros de Matemática (4º e 5º anos) por sua

> vez, percebe-se, além do baixo quantitativo de atividades, como já discutido, a menor diversidade de temáticas propostas, o que empobrece as discussões acerca da EF. Tais resultados indicam a necessidade de uma maior diversidade de temáticas a serem inseridas nas atividades propostas". (Santos, Pessoa, 2020, p.20)

Tais considerações são importantes contribuições para o nosso trabalho, uma vez que elaboramos as tarefas voltadas para o Ensino Médio e para os anos finais do Ensino Fundamental tendo o conhecimento que os nossos alunos podem ter tido uma discussão pouco profunda, com poucos tons de reflexão dado o próprio material didático adotado nos anteriores e que também é importante fazer um bom "manual do professor". Sem dúvidas o trabalho de SANTOS, PESSOA (2020) nos forneceu elementos para elaborar discussões mais profundas nas tarefas, tanto na parte do enunciado/solução comentada, quanto na parte voltada para às sugestões ao professor.

Já em FERNANDES, SCORTEGAGNA, BARRÉRE (2019) temos a proposta de uma tarefa, sugerida para ser aplicada em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, que é formada por um conjunto de quatro situações: discussão quanto a formas de pagamento; apresentação e discussão de um caso de tomada de decisão quanto a uma compra à vista ou a prazo; discussão sobre investimentos, inflação, transformação do dinheiro no tempo e por fim uma releitura do caso sobre tomada de decisão da compra à vista ou a prazo só que dessa vez utilizando um aplicativo disponível em dispositivos móveis.

Apesar do produto final do presente trabalho não se restringir à primeira série do Ensino Médio, ou à utilização dos dispositivos móveis em sala de aula, o trabalho de FERNANDES, SCORTEGAGNA, BARRÉRE (2019) se articula com o nosso, ao passo que entendemos que é necessário convidar os estudantes a pensarem sobre tarefas que envolvam a tomada de decisão, uma vez que rotineiramente as pessoas "são obrigadas" a tomarem decisões diante de situações que envolvem o dinheiro. Além disso também estamos em concordância quando o assunto é a necessidade da utilização de recursos tecnológicos como facilitadores do processo de ensino-aprendizagem, nos gabaritos comentados de nossas tarefas, por exemplo, utilizamos por diversas vezes softwares computacionais, tais como planilhas eletrônicas para mostrarmos aos nossos alunos qual opção era mais vantajosa do ponto de vista exclusivamente numérico.

Por fim, temos o trabalho de ROCHA, MARIANI (2020) que se distancia do nosso no que tange ao público alvo da tarefa proposta, ao passo que ROCHA, MARIANI

(2020) propõe uma tarefa sobre tomada de decisão para 11 alunos do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Santa Maria (RS), matriculados no componente curricular Matemática Financeira 2017/1, nós estamos focados em confeccionar tarefas voltados para os alunos do Ensino Médio e dos anos finais do Ensino Fundamental.

Entretanto ROCHA, MARIANI (2020) se relaciona com o aqui apresentado no aspecto de levar em consideração que:

> “A Matemática desempenha um papel fundamental no âmbito da sociedade, desde a simples aquisição de um produto, até as mais complexas situações cotidianas. Tanto no campo social como no escolar, ela é representada através de uma vasta diversidade de representação de seus objetos, que podem ser expressos por meio de palavras, símbolos, diagramas, gráficos, fluxos de caixa, entre outros”. (Rocha, Mariani, 2020, p.231-232)

A situação econômico-financeira proposta por ROCHA,MARIANI (2020) envolve análise de valor presente (PV) considerando uma dada remuneração, convida os participantes do estudo a pensarem sobre as representações temporais que envolvem o dinheiro, bem como também envolve o estudo sobre argumentações não-matemáticas referentes ao orçamento familiar ou aos hábitos de compra que podem emergir na discussão da tarefa. O que, com certeza, está em total consonância com o que acreditamos ser uma tarefa que convida o aluno a colocar sua reflexão crítica em prática, fazendo com que a Matemática e a Educação Financeira Escolar trabalhem juntas, contribuindo para um melhor julgamento acerca das decisões a serem tomadas pelos indivíduos e, em larga escala, por toda nossa sociedade. Dito isso, ressaltamos que não apenas a situação econômico-financeira proposta por ROCHA, MARIANI (2020), mas sim todo o seu artigo nos inspirou em nosso trabalho.

Acreditamos que os trabalhos supracitados além de darem suporte e sustentação, também servem de inspiração para a nosso e para futuros trabalhos, dado que cobrem uma vasta gama de análises e resultados na área da Educação Financeira dentro dos mais variados cenários. No próximo capítulo apresentaremos noções teóricas sobre a Matemática Financeira e as Finanças Comportamentais que fundamentarão nosso trabalho e o design das atividades didáticas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo iremos fornecer todos os pressupostos teóricos necessários e suficientes, tanto do ponto de vista matemático, quanto do ponto de vista das finanças comportamentais, para que o leitor possa tirar o melhor proveito possível das tarefas que serão propostas no decorrer do capítulo 5, bem como de suas soluções comentadas e sugestões.

3.1 Matemática financeira

Para Iezzi, Hazzan & Degenszajn (2004):

> "Fundamentalmente, a Matemática Financeira estuda os procedimentos utilizados em pagamentos de empréstimos, bem como os métodos de análise de investimentos em geral". (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2004, p. 40)

Em Morgado & Carvalho (2015) temos que:

> "Uma das importantes aplicações de progressões geométricas é a Matemática Financeira. A operação básica da Matemática Financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C e volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma C + J é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = \frac{J}{C}$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros". (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 86)

De maneira resumida, a Matemática Financeira pode ser entendida como a parte da Matemática que se concentra em estudar o comportamento do dinheiro ao longo do tempo. A seguir apresentaremos, de maneira sistemática, os conceitos fundamentais e teóricos necessários para o desenvolvimento do nosso trabalho. Utilizamos Neto (2012); Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004); Morgado, Zani e Wágner (2001); Lima, Morgado, Carvalho e Wagner (2006) e Morgado e Carvalho (2015) como referenciais teóricos

Definição: Toda razão $\frac{p}{100}$, com $p \in \mathbb{R}_+$, chama-se **taxa percentual**.

A taxa percentual costuma ser indicada pelo numerador seguido pelo símbolo %, ela também pode ser chamada de razão centesimal ou porcentagem e podem ser expressas sob diversas formas:

$$\frac{12}{100} = 12\% = 0{,}12; \quad \frac{1{,}5}{100} = 1{,}5\% = 0{,}015; \quad \frac{45{,}18}{100} = 45{,}18\% = 0{,}4518$$

Exemplo: Vamos calcular 20% de 300.

Podemos primeiramente escrever a taxa, dada na forma percentual, em sua forma decimal ou fracionária e em seguida realizamos a operação de multiplicação.

$$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20 \ \therefore \ 0{,}20 * 300 = 60_{\blacksquare}$$

Obviamente que essa situação foi bem básica e que podemos ter situações um pouco mais elaboradas que envolvem o cálculo utilizando taxas percentuais.

Exemplo: Se eu compro um produto por R$ 2000,00 e algum tempo depois consigo revende-lo por R$ 2500,00 qual foi a porcentagem, em relação ao preço que eu paguei, de dinheiro adquirido nessa operação?

A operação nos fez ficar com $2500 - 2000 = 500$ reais a mais. Desse modo precisamos calcular quantos por cento de 2000 é igual a 500.

$$x * 2000 = 500 \rightarrow x = \frac{500}{2000} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%_{\blacksquare}$$

Proposição: Se P_0 é o valor inicial, i é a taxa de **acréscimo** (na forma decimal) e P é o valor com o **acréscimo**, então:

$$P = P_0(1 + i).$$

Demonstração:

O valor a ser acrescido é calculado por: $P_0 * i$

O valor final P corresponde a soma do valor inicial com o valor a ser acrescido:

$$P = P_0 + P_0 * i \rightarrow P = P_0(1 + i)_{\blacksquare}$$

Proposição: Se P_0 é o valor inicial, i é a taxa de **desconto** (na forma decimal) e P é o valor com o **desconto**, então:

$$P = P_0(1 - i).$$

Demonstração:

O valor a ser descontado é calculado por: $P_0 * i$

O valor final P corresponde a diferença entre o valor inicial e o valor a ser descontado:

$$P = P_0 - P_0 * i \rightarrow P = P_0(1 - i)_{\blacksquare}$$

Exemplo: Um produto custa R$ 4200,00 e está sendo ofertado com 15% de desconto caso o cliente opte por fazer o pagamento à vista. Quanto esse cliente pagará se optar pela compra à vista?

$$P = P_0(1 - i) = 4200(1 - 0,15) = 4200 * 0,85 = 3570_{\blacksquare}$$

Definição: Capital é o valor que será aplicado por determinado período de tempo.

Definição: Juro é a remuneração obtida pelo uso do capital em um certo intervalo de tempo. Pode ser entendido também como o aluguel pelo uso do dinheiro.

Definição: Prazo é o período ao fim do qual os juros serão calculados. Também pode ser chamado de período de capitalização.

Definição: Taxa de juros é o coeficiente resultante da razão entre o juro e o capital, devendo a mesa vir anexado do período ao qual ela se refere, ao dia, ao mês, ao ano, etc.

Definição: Montante é a soma do capital aplicado e do juro produzido em determinado prazo. É, portanto, a quantia total de dinheiro que se tem ao final de uma aplicação.

A seguir iremos apresentar os dois principais sistemas de capitalização, o de juros simples e o de juros compostos.

Definição: Juro simples é aquele pago tendo em vista somente o capital inicial. Ele é diretamente proporcional ao capital inicial e ao prazo de aplicação, com o fator de proporcionalidade sendo a própria taxa de juros.

Devido ao fato da baixa ou até mesmo não aplicabilidade de períodos de tempo que sejam expressos por números não naturais em situações financeiras reais, restringiremos nossas demonstrações referentes às fórmulas que serão exibidas a seguir para o sistema de juros compostos apenas para períodos que sejam expressos por números que estejam contidos no conjunto dos números naturais.

Teorema: Os juros simples gerados, após um período $n \in \mathbb{N}$, a uma taxa de juros i (na forma decimal), expressa na mesma unidade de tempo de n, sobre um capital C é dado por:

$$J = C * i * n.$$

Demonstração:

Utilizaremos indução em n para demonstrarmos o resultado pedido.

$\boldsymbol{Base}$: $P(0)$: $J_{(0)} = C * i * 0 = 0.$

O que é verdade, o juro gerado no momento inicial é igual a zero.

Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum $k \in \mathbb{N}$, dessa forma tem-se que:

$\boldsymbol{Hipótese\ de\ indução}$: $P(k)$: $J_{(k)} = C * i * k.$

Vamos provar que $\boldsymbol{P(k) \Rightarrow P(k+1)}$.

Temos que o $J_{(k+1)}$ serão os juros gerados um período após n períodos. Utilizando a definição de juros simples chegamos em: $J_{(k+1)} = J_{(k)} + C * i.$

Utilizando a hipótese de indução temos:

$$J_{(k+1)} = C * i * k + C * i$$

$$J_{(k+1)} = C * i * (k + 1)$$

Donde tem-se $P(k+1)$ válida e portanto, pelo princípio da indução, tem-se que:

$$J = C * i * n \blacksquare$$

Exemplo: Suponha que um capital de R$ 24.000,00 será aplicado, sob o regime de juros simples, a uma taxa de 2% ao mês, durante 10 meses. Quanto de juros renderá essa aplicação?

$$J = 24000 * (0{,}02) * 10 = 4800 \blacksquare$$

É importante notar que a expressão $J = C * i * n$ pode ser interpretada como uma função polinomial do primeiro grau, caso consideremos o processo de capitalização contínuo, onde os juros J estão em função de n com C e i fixos. Isso por si só já nos traz a possibilidade de trabalhar problemas que envolvam os juros simples como problemas motivadores para uma aula de funções polinomiais do primeiro grau, ou quem sabe, dependendo do ano de escolaridade no qual estamos trabalhando a temática, podemos utilizar a matemática financeira afim de retomar resultados já estudados das funções polinomiais do primeiro grau e que possam ser úteis na resolução de situações problema da matemática financeira.

Proposição: O montante gerado, a partir de um capital C, após um período $n \in \mathbb{N}$, em uma aplicação sob o regime de juros simples, à uma taxa i (na forma decimal), que está expressa na mesma unidade de tempo do período n é:

$$M = C(1 + i * n).$$

Demonstração:

Por definição sabemos que o montante é dado por $M = C + J$.

Se substituirmos o valor de J na equação anterior, temos:

$$M = C + C * i * n$$

$$M = C(1 + i * n) \blacksquare$$

Conforme foi dito no enunciado do teorema, para que possamos utilizar a fórmula de juros simples, é necessário que a taxa de juros seja expressa em uma unidade de tempo que coincida com a unidade de tempo do período da aplicação financeira que estamos estudando. Entretanto nem sempre isso ocorre, e quando isso não ocorrer será necessário fazermos uma conversão na taxa dada para que o período e a nova taxa, já convertida, tenham unidades de tempo coincidentes. Para realizarmos tal conversão é necessário que conheçamos os conceitos de taxas proporcionais e equivalentes.

Definição: Sejam n_1 e n_2, respectivamente, o tempo referido de duas taxas i_1 e i_2. Diremos que as essas taxas são **taxas proporcionais** se, escolhida arbitrariamente, uma mesma unidade de tempo para expressar n_1 e n_2, seja satisfeita a igualdade:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Proposição: Dadas duas taxas proporcionais i_1 e i_n tais que a unidade de tempo da primeira é maior que a da segunda e, além disso, a cada período da taxa i_1 temos n períodos da taxa i_n, então é válida a igualdade:

$$i_n = \frac{i_1}{n}.$$

Demonstração:

Vamos supor, sem perda de generalidade, que n_1 e n_n, com $n_1 > n_n$, sejam, respectivamente, as unidades de tempo das taxas i_1 e i_n. Como essas taxas são proporcionais temos que:

$$\frac{i_1}{i_n} = \frac{n_1}{n_n}$$

Como para cada período da taxa i_1 temos n períodos da taxa i_n podemos escrever:

$$n_1 = n.n_n$$

Substituindo o valor de n_1 na proporção anterior, temos:

$$\frac{i_1}{i_n} = \frac{n.n_n}{n_n} \;\rightarrow\; i_n = \frac{i_1}{n} \blacksquare$$

Exemplo: Vamos encontrar a taxa mensal proporcional à taxa de 18% a.a.?

Temos que $i_1 = 18$, i_n é a taxa mensal e $n = 12$, pois o ano é composto por 12 meses.

$$i_n = \frac{i_1}{n} \;\rightarrow\; i_n = \frac{18}{12} \;\rightarrow\; i_n = 1{,}5\%\ a.m. \;\blacksquare$$

Definição: Dizemos que duas taxas são **taxas equivalentes** se, quando aplicadas ao mesmo capital, durante o mesmo período de tempo, capitalizadas em momentos distintos, produzem o mesmo montante final.

Proposição: Sob o regime de juros simples taxas equivalentes são também proporcionais.

Demonstração:

Vamos chamar de M_1 o montante gerado a partir da aplicação de um capital C, por n períodos a uma taxa i, logo:

$$M_1 = C(1 + i * n)$$

Vamos considerar i_q cujo prazo de aplicação, expresso em número de períodos seja q, equivalente a i. Como em cada período da taxa i_q, temos n períodos da taxa i, tem-se que o prazo q, considerado para a taxa i_q, expresso em períodos das taxa i será igual a: $n * q$. Logo o montante gerado por essa taxa i_q para o capital C é dado por:

$$M_2 = C\left(1 + i_q * n * q\right)$$

Como por hipótese as taxas são equivalentes, temos que:

$$M_1 = M_2$$

$$C(1 + i * n) = C\left(1 + i_q * n * q\right)$$

$$i_1 * n = i_q * n * q$$

$$i_n = \frac{i_1}{n} \;\blacksquare$$

Corolário: Em aplicações de juros simples é possível determinar também o capital, a taxa e o tempo através das seguintes expressões:

$$C = \frac{J}{i * n} \quad ; \quad i = \frac{J}{C * n} \quad ; \quad n = \frac{J}{C * i}.$$

A demonstração desse corolário pode ser obtida com a partir de simples manipulações algébricas da fórmula de juros simples. Não iremos demonstrar este corolário por conta disso.

Definição: Juro composto é aquele pago tendo em vista somente que os juros gerados a cada período são acrescidos ao capital inicial, formando assim um novo montante por período. Cada novo montante passa a render juros no período seguinte, formando assim um novo montante que é constituído do capital inicial, dos juros acumulados e dos juros sobre os juros formados em períodos anteriores.

Devido ao fato da baixa ou até mesmo não aplicabilidade de períodos de tempo que sejam expressos por números não naturais em situações financeiras reais, restringiremos nossas demonstrações referentes às fórmulas que serão exibidas a seguir para o sistema de juros compostos apenas para períodos que sejam expressos por números que estejam contidos no conjunto dos números naturais.

Teorema: O montante M, gerado a juros compostos, após um período $n \in \mathbb{N}$, a uma taxa de juros i (na forma decimal), expressa na mesma unidade de tempo de n, sobre um capital C é dado por:

$$M = C(1 + i)^n.$$

Demonstração:

Utilizaremos indução em n para demonstrarmos o resultado pedido.

$\boldsymbol{Base}$: $P(0)$: $M_{(0)} = C(1 + i)^0 = C.$

O que é nitidamente verdade, o montante obtido no instante inicial é o próprio capital.

Vamos supor que $P(n)$ seja válida para algum $k \in \mathbb{N}$, dessa forma tem-se que:

Hipótese de indução: $P(k)$: $M_{(k)} = C(1+i)^k$.

Vamos provar que $\boldsymbol{P(k) \Rightarrow P(k+1)}$.

Temos que o $M_{(k+1)}$ será o montante gerado um período após n períodos. Utilizando a definição de juros compostos chegamos em: $M_{(k+1)} = M_{(k)} + M_{(k)} * i$.

Utilizando a hipótese de indução temos:

$$M_{(k+1)} = C(1+i)^n + C(1+i)^n * i$$

$$M_{(k+1)} = C(1+i)^n * (1+i) \quad \rightarrow \quad M_{(k+1)} = C(1+i)^{n+1}$$

Donde tem-se $P(k+1)$ válida e portanto, pelo princípio da indução, tem-se que:

$$M = C(1+i)^n \blacksquare$$

Novamente ressaltamos que não foi de nosso interesse demonstrar a fórmula para um caso de n mais geral, entretanto a mesma é válida para $n \in \mathbb{R}$.

É importante notar que a expressão $M = C(1+i)^n$ pode ser interpretada como uma função exponencial, caso consideremos o processo de capitalização contínuo, onde o montante M está em função de n com C e i fixos. Isso por si só já nos traz a possibilidade de trabalhar problemas que envolvam os juros compostos como problemas motivadores para uma aula de funções exponenciais, ou quem sabe, dependendo do ano de escolaridade no qual estamos trabalhando a temática, podemos utilizar a matemática financeira afim de retomar resultados já estudados das funções exponenciais e que possam ser úteis na resolução de situações problema da matemática financeira.

Exemplo: Um jovem decidiu aplicar um capital de R$ 6300,00 durante 4 meses em uma aplicação regida sob o sistema de juros compostos a uma taxa de 1% a.m. Qual é o montante a ser resgatado por esse jovem ao final da aplicação?

$$M = C(1+i)^n = 6300(1+0{,}01)^4 \approx 6300 * 1{,}0406 = 6555{,}78 \blacksquare$$

Proposição: Se duas taxas i e i_n são equivalentes em juros compostos, e a unidade de tempo da primeira é maior que a da segunda e, além disso, em cada período da taxa i, temos n períodos da taxa i_n, então essas taxas satisfazem a expressão:

$$i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1.$$

Demonstração:

Vamos supor que o prazo de aplicação da taxa i, expresso em número de períodos seja q. Desse modo, para um capital C, o montante gerado, a juros compostos, por esse capital é: $M = C(1+i)^q$.

Como em cada período da taxa i, temos n períodos da taxa i_n, tem-se que o prazo q, considerado para a taxa i, expresso em períodos das taxa i_n será igual a: $n * q$.

Logo o montante M' gerado, a juros compostos, pelo mesmo capital C para a taxa i_n é dado por: $M' = C(1+i_n)^{n*q}$.

Como as duas taxas são equivalentes segue, por definição, que $M = M'$ e assim:

$$C(1+i)^q = C(1+i_n)^{n*q}$$

$$(1+i)^q = (1+i_n)^{n*q}$$

$$(1+i) = (1+i_n)^n$$

$$\sqrt[n]{1+i} = 1 + i_n$$

$$i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1 \blacksquare$$

Exemplo: Se determinada aplicação, no regime de juros compostos, possui taxa de 12% a.a., determine sua taxa de juros compostos mensal.

Como em 1 ano há 12 meses temos que i_n é a taxa ao mês e $n = 12$, logo:

$$i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1$$

$$i_n = \sqrt[12]{1+0{,}12} - 1$$

$$i_n = \sqrt[12]{1{,}12} - 1$$

$$i_n \approx 1{,}0095 - 1$$

$$i_n \approx 0{,}0095$$

A taxa de juros é de, aproximadamente, 0,95% a.m.■

Corolário: Em aplicações de juros compostos é possível determinar também os juros, a taxa, o tempo e o capital através das seguintes expressões:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \ ; \ i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \ ; \ J = C[(1+i)^n - 1] \ ; \ n = \frac{\log C(1+i)}{\log M}.$$

A demonstração desse corolário pode ser obtida com a partir de simples manipulações algébricas da fórmula de juros compostos. Não iremos demonstrar este corolário por conta disso, mas no exemplo a seguir mostraremos como se faz a manipulação algébrica para se chegar em uma das fórmulas presentes no corolário.

Exemplo: Uma aplicação, a juros compostos, produziu juros de R$ 2092,60 ao final de 6 meses. Se o capital inicial dessa aplicação foi de R$ 5000,00, determine qual foi a taxa composta de juros mensal da aplicação.

Se a aplicação produziu juros de R$ 2092,60 temos que o montante dessa aplicação ao final dos 6 meses é:

$$M = C + J \ \rightarrow \ M = 5000 + 2092{,}60 \ \rightarrow \ M = 7092{,}60$$

Sabemos que $M = C(1+i)^n$, logo:

$$5000(1+i)^6 = 7092{,}60$$

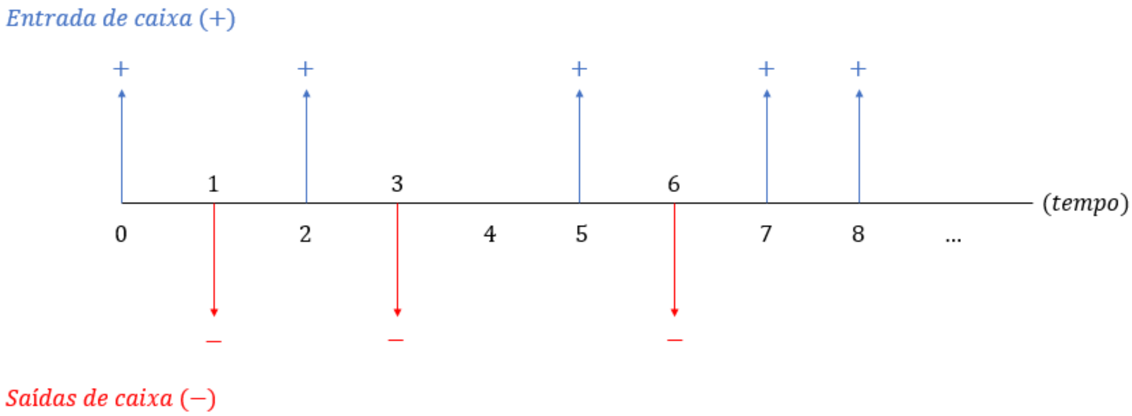
$$(1+i)^6 = \frac{7092{,}60}{5000} \ \rightarrow \ (1+i)^6 = 1{,}41852 \ \rightarrow \ (1+i) = \sqrt[6]{1{,}41852}$$

$$(1+i) \approx 1{,}060 \;\rightarrow\; i \approx 1{,}06 - 1 \;\rightarrow\; i \approx 0{,}06 \;\rightarrow\; i \approx\; 6\%\; a.m. \blacksquare$$

Inicialmente falamos que: "...a Matemática Financeira pode ser entendida como a parte da Matemática que se concentra em **estudar o comportamento do dinheiro ao longo do tempo**". Mas até agora não expusemos nenhuma ferramenta que auxiliasse ou que simplesmente registrasse os dados referentes a uma movimentação financeira.

Definição: Um **fluxo de caixa** representa uma série de pagamentos ou de recebimentos que foram feitos sequencialmente em determinado intervalo de tempo. Ele é formado por um eixo horizontal, onde marcamos, em alguma unidade (dia, mês, ano, semestre, ...) o tempo. As entradas de caixa são representadas por setas verticais orientadas para cima e as saídas de caixa são representadas por setas verticais orientadas para baixo.

Figura 4 – Representação do fluxo de caixa

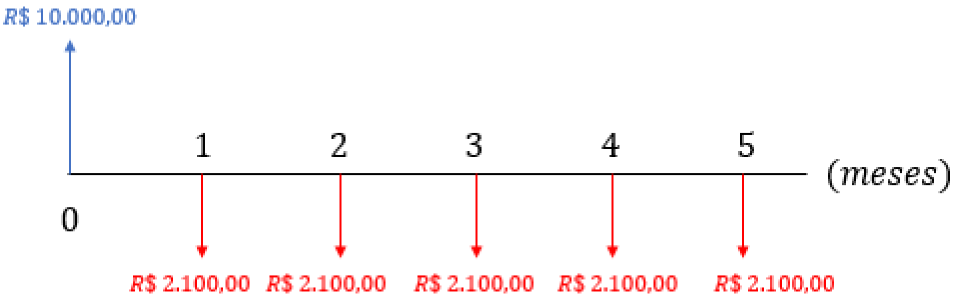


Fonte: elaborada pelos autores

Exemplo: Uma pessoa tomou R$ 10.000,00 emprestado de uma instituição financeira e ficou acordado que este empréstimo seria quitado em 5 prestações de R$ 2100,00, com o primeiro pagamento 30 dias após a data do empréstimo. Represente o fluxo de caixa dessa operação financeira, tanto do ponto de vista do cliente quanto do ponto de vista do banco.

Do ponto de vista do cliente há uma entrada de R$ 10.000,00 e a saída de 5 parcelas de R$ 2100,00 cada uma nos meses subsequentes ao empréstimo.

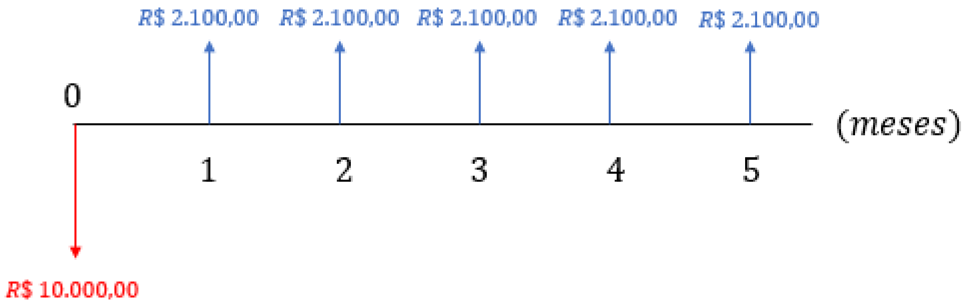
Figura 5 – Fluxo de caixa da operação: ponto de vista do cliente.



Fonte: elaborada pelos autores.

Do ponto de vista do banco o fluxo é análogo, somente a orientação das setas é que é feita no sentido inverso.

Figura 6 – Fluxo de caixa da operação: ponto de vista do banco.



Fonte: elaborada pelos autores.

Todo valor que é utilizado sucessivamente, assim como exposto no exemplo acima, para compor um capital ou para quitar um empréstimo é denominado **renda**. Caso tenhamos o objetivo de compor capital em uma data futura estaremos diante do processo de capitalização e caso tenhamos o intuito de quitar um empréstimo, quitar uma dívida, estaremos diante de um processo de amortização. Um caso à parte, onde realizamos o pagamento pelo uso, mas sem que tenhamos amortização é o caso dos aluguéis.

Definição: Chamamos de renda certa, série de prestações ou anuidades, **série de pagamentos ou recebimentos**, toda sucessão de pagamentos ou recebimentos, exigíveis em datas pré-determinadas, destinada a constituir um capital ou extinguir uma dívida. Onde cada um destes pagam/entos ou recebimentos, referidos a uma mesma taxa de juros compostos, é chamado de **termo da série** ou termo da anuidade; o intervalo de tempo entre dois termos é chamado de **período** e a soma dos períodos indica a duração da série.

As séries podem ser classificadas de acordo com a tabela a seguir:

Tabela 1 – Classificação das Séries de Pagamentos ou Recebimentos

<table>
<tr><th colspan="5">Classificação das Séries</th></tr>
<tr><td>Quanto à periodicidade:</td><td colspan="2">Periódica se todos os períodos são iguais.</td><td colspan="2">Não periódica se os períodos não são iguais entre si.</td></tr>
<tr><td>Quanto ao prazo:</td><td colspan="2">Temporárias quando a duração é limitada.</td><td colspan="2">Perpétuas quando a duração é ilimitada.</td></tr>
<tr><td>Quanto ao valor dos termos:</td><td colspan="2">Uniformes ou constantes se todos os termos são iguais.</td><td colspan="2">Variável se os termos não são iguais entre si.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Quanto à forma de pagamento ou recebimento:</td><td colspan="2">Imediatas se os termos são exigíveis a partir do primeiro período.</td><td colspan="2">Diferidas se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período (prazo de carência).</td></tr>
<tr><td>Postecipadas se os termos ocor-rem no final de cada período.</td><td>Antecipadas se os termos ocor-rem no início de cada período.</td><td>Postecipadas se os termos ocor-rem no final de cada período.</td><td>Antecipadas se os termos ocor-rem no início de cada período.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores

Em nosso trabalho não abordaremos séries com todas as características apresentadas na tabela, iremos concentrar nossa atenção ao modelo mais utilizado em nosso cotidiano, que é: periódico, temporário, uniforme e postecipado.

Definição: O **valor presente**, denotado por $\boldsymbol{PV}$ referente a uma série uniforme é definido como o somatório dos pagamentos ou recebimentos descapitalizados, ou seja, trazemos todos para o tempo inicial, por intermédio de uma divisão, através da utilização da taxa periódica de juros.

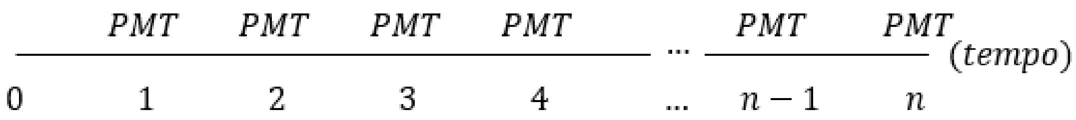
Proposição: Se denotarmos por PMT o valor das parcelas, n a quantidade de parcelas, $i \neq 0$ a taxa de juros (na forma decimal), com unidade de tempo igual à do período das parcelas e PV o valor presente da série uniforme, então:

$$PV = PMT\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right].$$

Demonstração:

Vamos, incialmente, observar como se comporta o fluxo de caixa de uma série uniforme:

Figura 7 – Fluxo de caixa de uma série uniforme postecipada.



Fonte: elaborada pelos autores.

Pela própria definição de PV podemos escrever que:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Ao observar os termos dessa soma, é fácil ver que estamos diante da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$ e cujo primeiro termo é $\frac{PMT}{(1+i)}$. Desse modo basta aplicarmos a fórmula da soma dos n primeiros termos de um progressão geométrica, cuja breve demonstração pode ser vista em Morgado e Carvalho (2015) na página 54.

$$PV = \left(\frac{PMT}{1+i}\right) * \left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}\right)$$

$$PV = PMT\left(\frac{1}{1+i}\right) * \left(\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{1+i}}\right)$$

$$PV = PMT\left(\frac{1}{1+i}\right) * \left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right)\left(\frac{1+i}{i}\right)$$

$$PV = PMT * \left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n * i}\right)$$

$$PV = PMT * \left(\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n * i} - \frac{1}{(1+i)^n * i}\right)$$

$$PV = PMT * \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^n * i}\right)$$

$$PV = PMT * \left(\frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$PV = PMT * \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right) \blacksquare$$

Definição: O **valor futuro**, denotado por ***FV*** referente a uma série uniforme é definido como o somatório dos pagamentos ou recebimentos capitalizados, ou seja, trazemos todos para o tempo final, por intermédio de uma multiplicação, através da utilização da taxa periódica de juros.

Proposição: Se denotarmos por PMT o valor das parcelas, n a quantidade de parcelas, $i \neq 0$ a taxa de juros (na forma decimal), com unidade de tempo igual à do período das parcelas e FV o valor presente da série uniforme, então:

$$FV = PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right].$$

Demonstração:

Pela própria definição de FV podemos escrever que:

$$FV = PMT + PMT(1+i) + PMT(1+i)^2 + \cdots + PMT(1+i)^{n-2} + PMT(1+i)^{n-1}$$

Ao observar os termos dessa soma, é fácil ver que estamos diante da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $(1+i)$ e cujo primeiro termo é PMT. Desse modo basta aplicarmos a fórmula da soma dos n primeiros termos de um progressão geométrica, cuja breve demonstração pode ser vista em Morgado e Carvalho (2015) na página 54.

$$FV = PMT * \left(\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}\right)$$

$$FV = PMT * \left(\frac{1-(1+i)^n}{-i}\right)$$

$$FV = PMT\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \blacksquare$$

Exemplo: Quanto uma pessoa deve aplicar mensalmente, durante 2 anos, em uma aplicação que lhe garanta um rendimento mensal, sob regime de juros compostos, de 1% a.m. para que possa resgatar, ao final deste prazo, R$ 15.000?

Queremos descobrir o PMT de uma série cujos valores de FV, n e i foram dados. Temos que $FV = 15000$, $i = 0{,}01$ e $n = 24$ pois é a quantidade de meses presentes em dois anos. Dessa forma temos:

$$FV = PMT\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \rightarrow 15000 = PMT\left(\frac{(1+0{,}01)^{24} - 1}{0{,}01}\right)$$

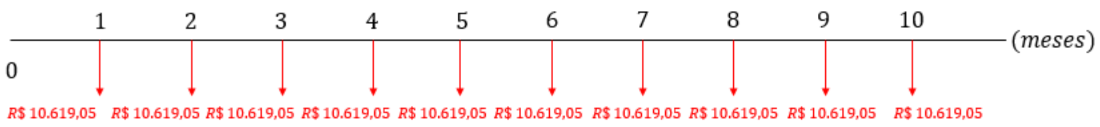
$$15000 = PMT\left(\frac{(1{,}01)^{24} - 1}{0{,}01}\right) \rightarrow 15000 \approx PMT\left(\frac{1{,}269 - 1}{0{,}01}\right)$$

$$15000 = PMT * 26{,}9 \rightarrow \frac{15000}{26{,}9} \approx PMT \rightarrow PMT \approx R\$\,557{,}62 \blacksquare$$

Definição: Dizemos que dois ou mais **fluxos de caixa** são **equivalentes** se ambos produzem os mesmos valores presentes, num mesmo dado momento, para uma convencionada taxa de juros.

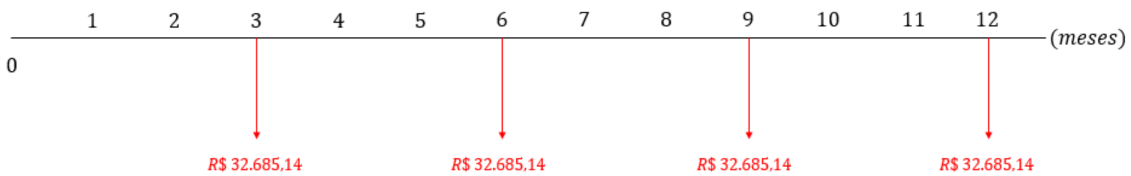
Exemplo: Vamos verificar que os fluxos abaixo são equivalentes à taxa de 12% a.m., no regime de juros compostos.

Figura 8 – Fluxo de caixa exemplo: A.



Fonte: elaborada pelos autores.

Figura 9 – Fluxo de caixa exemplo: B.



Fonte: elaborada pelos autores.

Vamos escolher, arbitrariamente e sem perda de generalidade, a data 0 para podermos comparar os capitais. Sendo assim, temos no fluxo A:

$$PV = PMT\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \;\rightarrow\; PV = 10619{,}05\left(\frac{1-(1+0{,}12)^{-10}}{0{,}12}\right)$$

$$PV \approx 10619{,}05\left(\frac{1-0{,}32197324}{0{,}12}\right) \;\rightarrow\; PV \approx 10619{,}05\left(\frac{0{,}6780268}{0{,}12}\right)$$

$$PV \approx 10619{,}05 * 5{,}650223 \;\rightarrow\; PV \approx R\$\,60.000{,}00$$

Já o fluxo B na mesma data equivale a:

$$P_B = \frac{32685{,}14}{(1+0{,}12)^3} + \frac{32685{,}14}{(1+0{,}12)^6} + \frac{32685{,}14}{(1+0{,}12)^9} + \frac{32685{,}14}{(1+0{,}12)^{12}}$$

$$P_B \approx 23264{,}64 + 16559{,}31 + 11786{,}59 + 8389{,}46 \;\rightarrow\; P_B \approx R\$\,60.000{,}00 \blacksquare$$

A equivalência de fluxos ou equivalência de capitais é uma ferramenta importante, que pode nos auxiliar, do ponto de vista exclusivamente numérico, na hora de tomar decisões com relação à maneira que iremos realizar um determinado pagamento, seja ele de um empréstimo ou de uma compra financiada, como iremos receber pagamentos, como podemos negociar dívidas, por exemplo substituindo saldos devedores por outros saldos de maior conveniência, etc.

3.2 FINANÇAS COMPORTAMENTAIS

A Teoria Moderna das Finanças (TMF)[10] assume, de maneira geral, que os agentes econômicos se comportam sempre de maneira racional, buscando, a cada nova tomada de decisão, maximizar seus lucros e benefícios e minimizar seus custos e riscos afim de maximizar sua satisfação, seu bem-estar econômico. Além disso, a Hipótese de Eficiência de Mercado (HME), elaborada por Fama (1970) e um dos pilares da Teoria Moderna das Finanças, define um mercado eficiente como: "um mercado no qual os preços dos ativos sempre reflitam completamente todas as informações disponíveis".

Entretanto vários estudos têm desafiado os fundamentos da hipótese do mercado eficiente, identificando anomalias de mercado não explicadas pela TMF, por exemplo o termo "Novas Finanças" (em tradução livre) foi cunhado por Haugen (2000) em resposta a questões levantadas sobre o funcionamento dos mercados. Os mercados não são mais considerados eficientes sob essa nova ótica, pois pesquisas mostram que os agentes decisores nem sempre são racionais ao tomar suas decisões.

De acordo com Haugen (2000, p. 14):

> "[...] embora o pessoal dos mercados eficientes ainda saia por aí dizendo que uma montanha de evidência sustenta a sua hipótese, a verdade sobre o assunto é que se trata de uma montanha muito antiga, que está sendo rapidamente erodida e levada para o fundo do mar. As mais recentes (e convincentes) evidências contradizem totalmente a noção de mercados eficientes [...]" (Haugen, 2000, p.14).

Os estudos Kahneman & Riepe (1998) sobre psicologia aplicada às finanças mostram que as decisões humanas são influenciadas por tendências de julgamento e ilusões cognitivas, e que esses são os fatores que têm maior impacto nas decisões dos investidores. Como resultado, são formadas expectativas irreais sobre os investimentos e os resultados das decisões dos investidores não são tão racionais quanto o esperado. Essas evidências são incompatíveis com a hipótese da racionalidade.

---

[10] A Moderna Teoria das Finanças se consolida através de três estudos: a Teoria dos Portfólios de Markowitz (1952), o Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM) de Sharpe (1964) e a Hipótese de Eficiência de Mercado de Fama (1970).

Os psicólogos israelenses Amos Tversky e Daniel Kahneman são considerados precursores das Finanças Comportamentais. Kahneman foi agraciado com o Prêmio Nobel de Economia em 2002 por suas contribuições neste campo.

Não apenas Tversky e Kahneman, mas também outros autores que estudaram a influência da psicologia deram uma contribuição significativa na identificação das heurísticas[11] e ilusões cognitivas[12] que afetam as decisões de investimento. Porque se reconhecia anteriormente que a psicologia poderia ajudar nas finanças, mas ninguém sabia como. Tversky e Kahneman desenvolvem a Teoria da Perspectiva por meio de uma série de experimentos com diversos grupos ao longo de vários anos, demonstrando as inconsistências entre as decisões humanas e as hipóteses de racionalidade.

Em um dos experimentos feitos em 1979 pelos pesquisadores, eles pediram para que os estudantes escolhessem entre uma primeira situação que era ganhar, certamente, $ 3.000 ou uma segunda situação que era ter 80% de probabilidade de ganhar $ 4.000 com 20% de probabilidade de não ganhar nada. Neste experimento foi constatado que 80% dos estudantes preferiram ganhar $ 3.000 certos, ao invés de uma chance favorável de ganhar $ 4.000, o que demonstrou que as pessoas, de modo geral, são avessas ao risco.

Num segundo experimento os estudantes se depararam com as mesmas alternativas, entretanto a questão agora envolvia perdas. Eles deveriam escolher entre perder $ 3.000 com certeza ou ter 80% de probabilidade de perder $4.000 e 20% de probabilidade de não perder nada. Dessa vez os estudantes optaram pela opção que envolvia o risco e 92% preferiram a opção que acarretava numa probabilidade de 80% de perder $ 4.000 à certeza de perder $ 3.000.

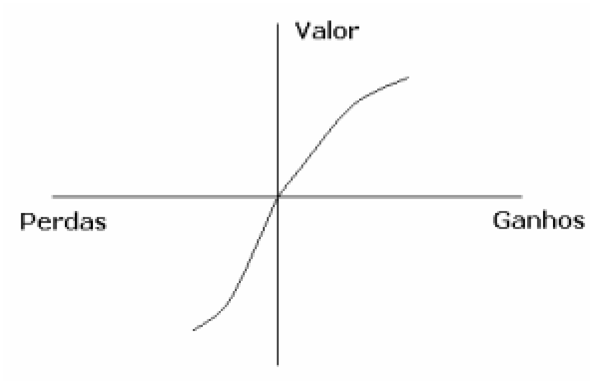
Dentre as várias constatações observadas a partir do estudo de Tversky e Kahneman (1979), destaca-se a de que a grande maioria dos seres humanos tem aversão ao risco ao lidar com ganhos e propensão ao risco ao lidar com perdas. Abaixo podemos ver o gráfico de uma função valor que é proposta por Tversky e Kahneman.

---

[11] Para Tversky & Kahneman (1979) heurísticas são atalhos mentais que reduzem o tempo necessário para tomar uma decisão. Este processo é importante, porém pode provocar erros, distanciando a decisão dos pressupostos da racionalidade.

[12] Segundo Kahneman e Riepe (1998) a ilusão cognitiva é a tendência de erro sistemático no processo decisório.

Figura 10 – Função Valor.



Fonte: elaborada pelos autores.

Essa função foi elaborada através dos desvios em relação a um ponto de referência, que nesse caso é o valor zero, onde não há ganhos ou perdas. Em geral a função é côncava para ganhos e convexa para perdas.

Em outro experimento Tversky e Kahneman pediram para que os estudantes imaginassem que uma rara doença atingiu uma pequena comunidade de 600 pessoas. Para tentar salvar os habitantes foram dadas duas alternativas, a primeira, na qual 200 pessoas seriam salvas, e a segunda, onde haveria 33% de probabilidade de salvar todos os habitantes. A primeira alternativa foi escolhida por 72% dos entrevistados.

A mesma pesquisa foi realizada, mas desta vez com uma abordagem diferente no momento de propor as alternativas. A primeira alternativa foi apresentada afirmando que eles poderiam deixar 400 pessoas morrerem e 200 sobreviverem, ao passo que a segunda alternativa foi apresentada exatamente da mesma maneira, 33% de probabilidade de ninguém morrer. Desta vez 78% dos estudantes escolheram a segunda alternativa, algo que não deveria ter acontecido caso as decisões fossem tomadas de maneira 100% racional, já que as alternativas continuaram exatamente as mesmas. No experimento citado acima, é destacada a importância da abordagem (perspectiva) que é dada aos cenários apresentados ao longo do processo decisório, o que resulta em diferenças significativas nas decisões humanas para um mesmo problema.

A Teoria da Perspectiva foi um componente-chave no estudo do comportamento humano diante de uma situação que envolva a tomada de decisão, através dos experimentos propostos foi possível identificar padrões comportamentais que resultam em heurísticas que podem afetar o processo de tomada de decisão.

Inicialmente foram identificadas três heurísticas que podem levar as pessoas ao erro: a representatividade, a disponibilidade e o ancoramento e ajustamento. Com o surgimento de novas pesquisas no ramo das Finanças Comportamentais outras heurísticas e ilusões cognitivas relacionadas às finanças foram percebidas, tais como: o excesso de confiança, o efeito disposição, o efeito doação, a tendência ao status quo, o medo do arrependimento, a abordagem, a lei dos pequenos números, a contabilidade mental, os custos já incorridos, a heurística do afeto, a aversão à perda e a assimetria de fontes.

Na tabela a seguir trazemos, de forma resumida, o significado de cada heurística.

Tabela 2 – Tabela de Heurísticas

Heurística	Característica
Representatividade	Faz com que as pessoas acreditem em falsas evidências, provocando muitas vezes erros de avaliação.
Disponibilidade	Faz com que as pessoas estimem a frequência ou probabilidade de um acontecimento pelos casos que lhes vêm à memória, ou lhes chamam a atenção, ou que conseguem visualizar mentalmente com mais facilidade.
Ancoragem e ajuste	Faz com que as pessoas baseiem suas as estimativas a partir de um valor inicial ajustado para produzir o resultado final. Diferentes pontos de partida levam a diferentes estimativas.
Excesso de confiança	Todos acreditam estar acima da média em habilidades, inteligência, experiência e liderança.
Efeito disposição	É a tendência de vender os ativos vencedores e manter em carteira os ativos perdedores, o medo de arrependimento e a contabilidade mental são apontados como razões para o surgimento do efeito disposição.
Efeito doação	O efeito doação torna as pessoas apegadas aos seus objetos e não as permitem perdê-los, mesmo quando elas não tenham um particular desejo pelo objeto. O efeito doação também é enxergado como o fator da característica observada nas pessoas de exigirem um valor muito maior para desistirem de um objeto do que o valor que pagariam para adquirir o mesmo objeto.

Tendência ao status quo	É a exagerada preferência das pessoas em se manterem na situação atual e demonstraram a tendência em uma série de experimentos e observações.
Medo do arrependimento	É a frustração por ter feito um investimento com retorno inferior ao esperado ou por ter deixado de investir em um negócio com resultado positivo.
Abordagem	As decisões podem sofrer variações significativas dependendo da abordagem dada ao problema.
Lei dos pequenos números	Um erro comum à maioria das pessoas, que é acreditar que é possível obter resultados significativos em pequenas amostras.
Contabilidade mental	É uma tendência humana em separar investimentos em compartimentos mentais baseados em atributos superficiais. O tratamento dado a estes investimentos varia de acordo com o compartimento em que ele se encontra. Ao invés de olhar para o todo, como determina a racionalidade, as pessoas olham para pequenas decisões separadamente.
Custos já incorridos	É a tendência de utilizar os resultados apresentados por conta de decisões passadas para tomarem suas novas decisões, ainda que as decisões passadas não tenham nenhuma relação com as novas decisões.
Afeto	É um atalho mental, de acordo com o qual os seres humanos tomam decisões baseados em seu julgamento emocional de uma coisa, pessoa ou evento.
Aversão à perda	É a tendência de atribuir maior importância às perdas do que aos ganhos, desta forma, a satisfação de se obter determinado ganho é menor do que sofrimento da perda equivalente.
Assimetria de fontes	É um viés no qual as pessoas consideram diferentes valores de partida ao analisar situações financeiras optativas.

Fonte: os autores

Nas atividades que serão propostas no capítulo 5, nós nos ativemos somente às heurísticas da aversão à perda, do afeto, da contabilidade mental e da assimetria de fontes. Sendo assim, para que as características dessas 4 heurísticas fiquem mais claras, iremos expor alguns exemplos práticos de aplicação dessas heurísticas.

A heurística da **aversão à perda** pode ser observada por exemplo em uma situação da vida cotidiana na qual você tenha a oportunidade de jogar um jogo no qual haja cinquenta por cento de chance de vencer e levar um prêmio que equivale a cinco vezes o seu investimento inicial e cinquenta por cento de chance de perder o jogo e, consequentemente, todo o seu dinheiro investido. Este é um risco razoável para assumir, pois o ganho potencial é consideravelmente maior do que a perda potencial. No entanto, os estudos de Daniel Kahneman, Amos Tversky, Richard Thaler mostraram que, para muitos humanos, a dor potencial de uma perda sobrecarrega os processos racionais do cérebro e pode impedir que você faça uma escolha racional de investimento.

A heurística do **afeto** tem relação direta com a tomada de decisões com base no que gostamos ou não. Por exemplo, imagine que você se sente mais bonito(a) ou mais atraente vestindo uma determinada cor de roupa, por exemplo: preto. Haverá uma predisposição, ou até mesmo um convencimento de que você deve comprar apenas blusas pretas todas as vezes em que for comprar uma blusa. Ou imagine que você prefira uma determinada marca de celular e sempre opte pelos seus produtos se convencendo de que as outras marcas não servem, ainda que os componentes dos celulares de outras marcas sejam os mesmos, você nem tenta fazer qualquer tipo de comparação, escolhe a marca que tem preferência independentemente de quaisquer outros fatores.

A heurística da **contabilidade mental** pode ser observada por exemplo quando você entra em determinada loja para comprar um produto e nota que ele custa R$ 30,00. Mas antes que você leve o objeto um amigo te avisa que em outra loja a uns 200 metros dali ele viu esse mesmo produto por R$ 20,00. Provavelmente você iria até a outra loja para comprar este produto. Agora suponha uma outra situação na qual você encontre o produto desejado, mas ele custa R$ 400,00 e teu amigo te avisa que em outro estabelecimento a alguns minutos de lá o mesmo produto está custando R$ 390,00. Você iria até a outra loja para comprar o tênis? É muito provável que você responda que não, pois essa economia de apenas R$ 10,00 não seria tão interessante. Tal comportamento, conforme apontam experimentos realizados por Economistas Comportamentais, é esperado e é um tanto quanto irracional do ponto de vista econômico. Em ambos os casos o valor absoluto do desconto nos dois casos é o mesmo, R$ 10,00, entretanto o que foi percebido é que o impacto dos descontos quando os preços são menores é maior do que em valores mais altos.

Com relação a heurística da **assimetria de fontes** podemos pensar no seguinte problema: imagine que você tenha que pagar R$ 5.000,00 para realizar determinado serviço, que você tenha esses R$ 5.000,00 e que as opções de pagamento dadas a você são as seguintes: pagar à vista com 5% de desconto; pagar a prazo, em seis parcelas mensais sem juros, com a primeira para 1 mês após a compra. Se você é capaz de colocar seu dinheiro em uma aplicação segura e que te rende 1% ao mês, qual das opções é melhor? Ao analisar tal situação é comum, conforme apontam os estudos de Muniz (2016), que as pessoas cometam um equívoco na hora de olhar como seu dinheiro renderá ao longo do tempo nas duas situações, por exemplo utilizaria o capital de R$ 250,00 (que é quanto resta ao pagar à vista) para ser aplicado por 6 meses na primeira opção, mas utiliza o valor de R$ 4.750,00 para ser capitalizado na segunda opção, quando na verdade deveria os R$ 5.000,00, cometendo assim uma assimetria de fontes do dinheiro. Ou ainda é possível que as pessoas criem novas situações, que não aquelas estabelecidas pelo problema que venham a utilizar novas fontes de dinheiro, tempo, opção, etc.

4 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

No presente capítulo mostraremos como se deu o processo de confecção das tarefas, que serão apresentadas no capítulo 5, detalharemos como elas foram escolhidas, desenhadas e estruturadas.

Nosso trabalho se caracteriza como uma pesquisa de desenvolvimento em Educação Matemática. Essa expressão: "pesquisa de desenvolvimento", é conhecida como *design-based research*, ou também como *development/developmental research* (VAN DEN AKKER et al., 2006; MATTA, SILVA; BOAVENTURA, 2014).

O Design é o domínio no qual se estrutura a interação entre o usuário e o produto, para facilitar ações efetivas, conforme aponta Bonsiepe (1997). Em nosso caso, as ações se voltam para o comportamento humano frente à tomada de decisões em problemas que envolvam situações financeira/econômicas, bem como suas causas e efeitos no âmbito geral dos processos decisórios.

De maneira geral, podemos dizer que uma pesquisa de desenvolvimento[13] refere-se àquelas investigações que envolvem delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões.

Por delineamento, entendemos a elaboração do artefato em sua primeira versão; o desenvolvimento, por sua vez, refere-se ao processo contínuo de seu refinamento por meio da avaliação sistemática (Barbosa & Oliveira, 2015). Tal metodologia, tem seu marco em Collins (1992), e uma definição possível é a apresentada por Plomp (2009), na qual nos baseamos:

> Pesquisa de desenvolvimento educacional é percebida como o estudo sistemático do delineamento, desenvolvimento e avaliação de intervenções educacionais − tais como programas, estratégias e materiais de ensino e aprendizagem, produtos e sistemas − como soluções a problemas identificados, as quais objetivam avançar nosso conhecimento sobre as características destas intervenções e processos para o delineamento e desenvolvimento de soluções (Plomp, 2009, p.9, apud Barbosa & Oliveira, 2015, p.531).

---

[13] Assim, a natureza desse trabalho, caso fosse efetivamente implementado em sala de aula, seria de natureza qualitativa, do tipo etnográfica, pois olharíamos para as interações dos indivíduos com os artefatos e entre si, bem como os significados produzidos decorrentes dessas interações. Tal implementação não foi possível ao caráter disparador deste trabalho, conforme pontuamos na introdução, bem como às restrições de abordagens nas escolas brasileiras, em função da Pandemia do Covid-19.

Assim, uma vez identificado o problema, o propósito é gerar uma intervenção que deve ser materializada por meio de algum tipo de produto educacional. Ou seja, na pesquisa de desenvolvimento voltada para a educação matemática, o design de materiais educacionais tem uma intenção educacional na produção dos artefatos, os quais em nosso trabalho consistem em um conjunto de atividades didáticas

Em seguida, vamos apresentar a concepção de tarefa usada para o design do material. Entendemos tarefa como uma ferramenta de mediação, que busca proporcionar questionamentos e reflexões aos alunos, a partir da apresentação de um ou mais cenários, possibilitando a produção de significados através da promoção de debates e das justificativas apresentadas pelos estudantes (MUNIZ, 2016a).

A finalidade do desenvolvimento destas tarefas é contribuir para sala de aula de matemática, com questionamentos que pretendem promover reflexões acerca de temas econômicos presentes em situações financeiras que estão baseadas ou relacionadas com tais temas, estimulando o pleno exercício da cidadania dos estudantes, no presente e no futuro, à luz da transversalidade preconizada nos PCNs, na BNCC e nos princípios da dualidade, da lente multidisciplinar e do convite à reflexão apresentados por Muniz (2016a).

As tarefas foram desenvolvidas à luz do design de tarefas apresentado por Muniz (2016a), e de uma maneira geral, foram desenhadas buscando:

(i) Convidar os estudantes a pensarem sobre os processos decisórios em situações financeiro-econômicas, bem como as heurísticas e os vieses cognitivos podem afetar suas decisões.

(ii) Motivar os estudantes a participarem e se envolverem com o tema, buscando uma perspectiva lúdica de abordagem, estimulando a autonomia.

(iii) Desenvolver habilidades de análise e comparação, a partir das simulações em planilhas eletrônicas, bem como tomada de decisão.

(iv) Construir oportunidades de aprendizagem por meio de tecnologias ativas e numa perspectiva híbrida.

Baseado nessa metodologia, a Atividade didática foi desenhada em 4 partes: tarefa com SEF relacionada a temas econômicos, resolução comentada; comentários e reflexões para o professor e informações para saber mais sobre o assunto. O quadro a seguir ilustra.

TAREFA 1
Público-alvo: Ensino Fundamental (9º ano), Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 30 minutos
Objetos de conhecimento: Aumentos/Descontos sucessivos, Juros Compostos.
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF09MA05)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

TAREFA 1 – No meio do caminho havia um ... terreno

Imagine que você possua um capital de R$ 100.000,00 para realizar a compra de um terreno.

Após pesquisar um pouco você encontra um anúncio de um terreno, no valor de R$ 100.000,00, que está localizado em um bairro que está entre as suas preferências e que oferece as seguintes opções de pagamento:

- Com 5% de desconto para pagamento à vista;

- Em duas parcelas semestrais de R$ 52.000,00, com a primeira parcela a ser paga ao final dos primeiros seis meses.

Diante desse anúncio e sabendo que você consegue aplicar o seu capital a uma taxa de 6% ao semestre, qual opção é mais vantajosa para você do ponto de vista exclusivamente financeiro?

Suponha que um mês depois, você encontrou um outro anúncio, de um terreno com as mesmas dimensões, ou seja, mesmo tamanho que aquele que foi sugerido inicialmente no problema, que está sendo anunciado por R$ 80.000,00 à vista, entretanto ele se encontra em uma localidade que, apesar de não representar nenhum risco, não é perto da antiga casa de seus avós.

Você mudaria de localidade pela economia no preço do terreno?

RESOLUÇÃO COMENTADA

Na primeira opção, à vista, pagamos:

$$(1-0{,}05).(100000) = R\$\,95.000{,}00$$

Desse modo nos restam $R\$\,5.000{,}00$ que podem ser aplicados a uma taxa de 6% ao semestre ao longo de 2 períodos, o que totaliza:

$$(5000).\underbrace{(1+0{,}06)^2}_{1{,}1236} = R\$\,5.618{,}00$$

Já na segunda opção, como o primeiro pagamento ocorre somente ao final do primeiro semestre, poderemos aplicar o capital de R$ 100.000,00 durante o primeiro semestre a uma taxa de 6%, ficando com:

$$(1+0{,}06).100000 = R\$\,106.000{,}00$$

Realizaríamos o primeiro pagamento de $R\$\,52.000{,}00$ ficando assim com:

$$106000 - 52000 = R\$\,54.000{,}00$$

Esse valor poderá ser aplicado novamente no próximo semestre a uma taxa de 6%, totalizando:

$$(1+0{,}06).54000 = R\$57.240{,}00$$

Após pagarmos a segunda parcela de $R\$\,52{,}000$ ficaremos com:

$$57240 - 52000 = R\$\,5.240{,}00$$

Donde podemos concluir que a primeira opção, pagamento à vista, é mais vantajosa do ponto de vista financeiro.

Sobre a segunda situação:

- ✓ Você encontrou um outro anúncio, de um terreno com as mesmas dimensões, ou seja, mesmo tamanho que aquele que foi sugerido inicialmente no problema, que está sendo anunciado por R$ 80.000,00 à vista, entretanto ele se encontra em uma localidade que, apesar de não representar nenhum risco, não está entre as suas preferências. Você mudaria de localidade pela economia no preço do terreno? (heurística do Afeto)

Ao debater este tipo de questionamento esperamos entender como os sentimentos e as emoções, como por exemplo, gostar ou não gostar de determinada localidade pode afetar nossas decisões, como por exemplo escolhermos pagar mais caro por “uma localidade melhor”.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Essa tarefa pode ser trabalhada tanto no ensino médio quanto no ensino fundamental nos conteúdos matemáticos de Juros Compostos e Aumentos/Descontos Sucessivos no 9º ano do ensino fundamental e na 1ª série do ensino médio.

É comum que nesse tipo de problema os alunos acabem cometendo alguma assimetria de fontes de dinheiro no momento de comparar as duas opções, como por exemplo utilizar que o capital inicial na segunda opção de pagamento é R$ 95.000,00.

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Depois de saber que na primeira opção, ao final de um ano, teríamos R$ 5.618,00 e que na segunda opção ao final de um ano teríamos R$ 5.240,00, podemos perceber que a diferença absoluta entre os valores não é tão discrepante assim. Sem a obrigatoriedade de levar em conta somente fatores financeiros, ou seja, tendo uma maior liberdade de escolha, você ainda optaria pela primeira opção?

Ao debater este tipo de questionamento esperamos ouvir algumas destas argumentações:

- Escolheria a segunda opção porque é melhor não se descapitalizar pois algum tipo de imprevisto pode surgir “no meio caminho” (heurística da Aversão à perda);

- Escolheria a segunda opção pois não vou ter organização/paciência para deixar os R$ 5.000,00 da primeira opção investidos por um ano, por ser um “dinheiro livre”, mas seria capaz de deixar os R$ 100.000,00 iniciais por 6 meses e, posteriormente os R$ 54.000,00 finais por mais 6 meses porque é um dinheiro atrelado a uma dívida. No final do processo ainda levariam R$ 5.240,00;

- Escolheria a manutenção da primeira opção, mas pelo fato de que prefere se livrar das dívidas logo de uma vez.

- ✓ Você encontrou um outro anúncio, de um terreno com as mesmas dimensões, ou seja, mesmo tamanho que aquele que foi sugerido inicialmente no problema, que está sendo anunciado por R$ 80.000,00 à vista, entretanto ele se encontra em uma localidade que, apesar de não representar nenhum risco, não está entre as suas preferências. Você mudaria de localidade pela economia no preço do terreno? (heurística do Afeto)

Ao debater este tipo de questionamento esperamos entender como os sentimentos e as emoções, como por exemplo, gostar ou não gostar de determinada localidade pode afetar nossas decisões, como por exemplo escolhermos pagar mais caro por “uma localidade melhor”.

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Prof. Daniel Kahneman: Art & Science of Decision Making:
https://www.youtube.com/watch?v=WKSts1INZhc

Entendida como se estrutura a atividade didática e o papel da tarefa nela, vamos finalizar apresentando como se deu a escolha do tema.

Entre os muitos contextos e áreas em que uma decisão pode ser investigada, destacamos os que envolvem o uso e a aplicação do dinheiro bem como as suas consequências. Se por um lado a teoria econômica tradicional assume que as pessoas atuam de forma racional diante dos processos decisórios que envolvam as situações financeiras o que é visto na prática é uma tendência de tomada de decisões que é feita com base nas informações disponíveis de modo que as pessoas acabam escolhendo a opção que melhor lhes atende independentemente da razão.

Conforme Kahneman e Tversky (1983) a tensão entre as considerações normativas e descritivas caracteriza grande parte do estudo de julgamento e escolha. Esperamos que nossa pesquisa possa contribuir para esse estudo sobre como se dão as tomadas de decisão e que ao trabalhar esse conteúdo em sala de aula, o professor faça com que o aluno reflita sobre o processo decisório e que os estudantes possam entender como se relacionam a racionalidade, apoiada na matemática, e a inconsistência inerente a natureza humana.

5 MATERIAL DIDÁTICO

Neste capítulo apresentamos o material didático, composto de 8 atividades denominadas convites a reflexão, distribuídos da seguinte forma.

Ressaltamos que optamos por não apresentar uma seção com os objetivos de cada atividade, bem como nossas intenções com cada uma delas, por entendermos que tal discussão, que já acontece nas orientações para o professor, é suficiente para expressarmos as intenções, objetivos e habilidades que queremos abordar/desenvolver com os estudantes, e a direção de algumas reflexões que buscamos convidar os estudantes. Segue abaixo um quadro de todos os títulos das 8 atividades, bem como as heurísticas, e habilidades de BNCC potencialmente associáveis, bem como objetos de conhecimento.

Tabela 3 – Lista de Atividades do Material Didático

N.	TÍTULO DA TAREFA	HEURÍSTICAS	HABILIDADES BNCC	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1	No meio do caminho havia um ... terreno	Assimetria de fontes, heurística da afetividade	EF09MA05, EM13MAT304	Aumentos/Descontos sucessivos, Juros Compostos
2	A mesada	Ancoragem e contabilidade mental	EM13MAT304	Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries uniformes
3	Renovando o guarda-roupas	Aversão à perda; heurística da ancoragem	EF06MA13, EF07MA02, EF09MA05	Porcentagem
4	E vai rolar a festa, vai rolar!	Heurística da afetividade; Aversão à perda	EF06MA13	Razão e proporção
5	Minha internet, minha vida	Aversão à perda e contabilidade mental	EF06MA13	Razão e proporção
6	A Saga do notebook	Afetividade; Contabilidade mental	EM13MAT304	Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries uniformes
7	Dartagnan ataca novamente!	Aversão à perda	EM13MAT304	Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries uniformes
8	Criaturas estranhas: o misterioso Cashback	Aversão à perda	EM13 MAT304	Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries uniformes

TAREFA 1
Público-alvo: Ensino Fundamental (9º ano), Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 30 minutos
Objetos de conhecimento: Aumentos/Descontos sucessivos, Juros Compostos.
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF09MA05)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

TAREFA 1 – No meio do caminho havia um ... terreno

Imagine que você possua um capital de R$ 100.000,00 para realizar a compra de um terreno.

Após pesquisar um pouco você encontra um anúncio de um terreno, no valor de R$ 100.000,00, que está localizado em um bairro que está entre as suas preferências, muito perto da antiga casa de seus avós e que oferece as seguintes opções de pagamento:

- Com 5% de desconto para pagamento à vista;
- Em duas parcelas semestrais de R$ 52.000,00, com a primeira parcela a ser paga ao final dos primeiros seis meses.

Diante desse anúncio e sabendo que você consegue aplicar o seu capital a uma taxa de 6% ao semestre, qual opção é mais vantajosa para você do ponto de vista exclusivamente financeiro?

Suponha que um mês depois, você encontrou um outro anúncio, de um terreno com as mesmas dimensões, ou seja, mesmo tamanho que aquele que foi sugerido inicialmente no problema, que está sendo anunciado por R$ 80.000,00 à vista, entretanto ele se encontra em uma localidade que, apesar de não representar nenhum risco, não é perto da antiga casa de seus avós.

Você mudaria de localidade pela economia no preço do terreno?

RESOLUÇÃO COMENTADA

Na primeira opção, à vista, pagamos:

$$(1-0{,}05).(100000) = R\$\ 95.000{,}00$$

Desse modo nos restam $R\$\ 5.000{,}00$ que podem ser aplicados a uma taxa de 6% ao semestre ao longo de 2 períodos, o que totaliza:

$$(5000).\underbrace{(1+0{,}06)^2}_{1{,}1236} = R\$\ 5.618{,}00$$

Já na segunda opção, como o primeiro pagamento ocorre somente ao final do primeiro semestre, poderemos aplicar o capital de R$ 100.000,00 durante o primeiro semestre a uma taxa de 6%, ficando com:

$$(1+0{,}06).100000 = R\$\ 106.000{,}00$$

Realizaríamos o primeiro pagamento de $R\$\ 52.000{,}00$ ficando assim com:

$$106000 - 52000 = R\$\ 54.000{,}00$$

Esse valor poderá ser aplicado novamente no próximo semestre a uma taxa de 6%, totalizando:

$$(1+0{,}06).54000 = R\$57.240{,}00$$

Após pagarmos a segunda parcela de $R\$\ 52{,}000$ ficaremos com:

$$57240 - 52000 = R\$\ 5.240{,}00$$

Donde podemos concluir que a primeira opção, pagamento à vista, é mais vantajosa do ponto de vista financeiro.

Sobre a segunda situação:

- ✓ Você encontrou um outro anúncio, de um terreno com as mesmas dimensões, ou seja, mesmo tamanho que aquele que foi sugerido inicialmente no problema, que está sendo anunciado por R$ 80.000,00 à vista, entretanto ele se encontra em uma localidade que, apesar de não representar nenhum risco, não está entre as suas preferências. Você mudaria de localidade pela economia no preço do terreno? (heurística do Afeto)

Ao debater este tipo de questionamento esperamos entender como os sentimentos e as emoções, como por exemplo, gostar ou não gostar de determinada localidade pode afetar nossas decisões, como por exemplo escolhermos pagar mais caro por “uma localidade melhor”.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Essa tarefa pode ser trabalhada tanto no ensino médio quanto no ensino fundamental nos conteúdos matemáticos de Juros Compostos e Aumentos/Descontos Sucessivos no 9º ano do ensino fundamental e na 1ª série do ensino médio.

É comum que nesse tipo de problema os alunos acabem cometendo alguma assimetria de fontes de dinheiro no momento de comparar as duas opções, como por exemplo utilizar que o capital inicial na segunda opção de pagamento é R$ 95.000,00.

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Depois de saber que na primeira opção, ao final de um ano, teríamos R$ 5.618,00 e que na segunda opção ao final de um ano teríamos R$ 5.240,00, podemos perceber que a diferença absoluta entre os valores não é tão discrepante assim. Sem a obrigatoriedade de levar em conta somente fatores financeiros, ou seja, tendo uma maior liberdade de escolha, você ainda optaria pela primeira opção?

Ao debater este tipo de questionamento esperamos ouvir algumas destas argumentações:

- Escolheria a segunda opção porque é melhor não se descapitalizar pois algum tipo de imprevisto pode surgir “no meio caminho” (heurística da Aversão à perda);

- Escolheria a segunda opção pois não vou ter organização/paciência para deixar os R$ 5.000,00 da primeira opção investidos por um ano, por ser um “dinheiro livre”, mas seria capaz de deixar os R$ 100.000,00 iniciais por 6 meses e, posteriormente os R$ 54.000,00 finais por mais 6 meses porque é um dinheiro atrelado a uma dívida. No final do processo ainda levariam R$ 5.240,00;

- Escolheria a manutenção da primeira opção, mas pelo fato de que prefere se livrar das dívidas logo de uma vez.

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Prof. Daniel Kahneman: Art & Science of Decision Making:
https://www.youtube.com/watch?v=WKSts1lNZhc

TAREFA 2
Público-alvo: Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 40 minutos
Objetos de conhecimento: Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries de pagamentos.
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

TAREFA 2 – Mesada

Suponha que você irá receber uma mesada do(a) seu(sua) responsável e que, inicialmente, o valor que ele está disposto a te dar é de R$ 100,00 mensais todo primeiro dia do mês. Entretanto ele(a) resolve te oferecer outras duas opções de recebimento dessa mesada, são elas:

- Receber toda a mesada, referente a um ano, de uma só vez no primeiro dia do ano, entretanto no valor de R$ 1.100,00;

- Receber toda a mesada, referente a um ano, de uma só vez no primeiro dia de dezembro, entretanto no valor de R$ 1.300,00.

Sabendo que você consegue aplicar o seu capital a uma taxa de 1% ao mês, qual opção é mais vantajosa para você do ponto de vista exclusivamente financeiro?

RESOLUÇÃO COMENTADA

Para compararmos os valores, temos que escolher uma data para observar os capitais, em nossa solução comentada escolhemos o primeiro dia de dezembro como data focal.

Como, inicialmente recebemos os R$ 100,00 mensalmente e no primeiro dia do mês, ao aplicar isso teremos uma série de uniforme de pagamentos e, portanto, no início de dezembro teremos:

$$FV = 100\,.\left(\frac{\overbrace{(1+0{,}01)^{12}}^{1{,}12682503} - 1}{0{,}01}\right) = 100\,.\,(12{,}682503) \approx R\$1.268{,}25$$

Ou então podemos utilizar o Excel para construir uma tabela que nos mostra mês a mês o valor acumulado:

Figura 11 – Valor acumulado mês a mês.

	A	B	C	D	E
1	Mês:	Início do mês:	Taxa:	Juros:	Mesada:
2	Janeiro	100	0,01	1	100
3	Fevereiro	201	0,01	2,01	100
4	Março	303,01	0,01	3,0301	100
5	Abril	406,0401	0,01	4,0604	100
6	Maio	510,100501	0,01	5,101	100
7	Junho	615,201506	0,01	6,152	100
8	Julho	721,3535211	0,01	7,2135	100
9	Agosto	828,5670563	0,01	8,2857	100
10	Setembro	936,8527268	0,01	9,3685	100
11	Outubro	1046,221254	0,01	10,462	100
12	Novembro	1156,683467	0,01	11,567	100
13	Dezembro	1268,250301	0,01	12,683	100

Fonte: elaborada pelos autores.

Recebendo R$ 1100,00 de uma única vez no primeiro dia do ano, teremos no primeiro dia de dezembro:

$$(1100).\underbrace{(1+0{,}01)^{11}}_{1{,}11566835} \approx R\$\ 1.227{,}23$$

Como a última opção seria receber R$ 1.300,00 podemos concluir que esta é mais vantajosa do ponto de vista financeiro.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Essa tarefa deve ser trabalhada no ensino médio nos conteúdos matemáticos de Juros Compostos, Séries Uniformes e Progressões Geométricas.

Um erro que pode ocorrer nesse problema é o dos alunos capitalizarem por 12 períodos a opção na qual o responsável paga os R$ 1.100,00 no primeiro dia de janeiro.

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Se você deseja adquirir um bem material que custa R$ 1.100,00 você optaria por receber tudo no início do ano para comprar o bem material ainda que esta opção seja a que traz o menor retorno financeiro? (heurística do Afeto)

- ✓ Ainda que, do ponto de vista exclusivamente financeiro, a última proposta seja a mais vantajosa, se você pudesse escolher livremente optaria por qual proposta?

Este questionamento pode abrir margem para uma discussão mais profunda sobre o quão significante são as diferenças em números absolutos entre as propostas apresentadas no problema, sobre o fato de que pode ser mais vantajoso ter sempre um valor mensal a ser recebido e assim poder "lidar com imprevistos". É bom também experimentarmos aumentar os valores, como por exemplo, algo na casa das dezenas ou centenas de milhar para ver se a diferença absoluta dos valores passa a ter um significado diferente. (heurísticas da Ancoragem e da Contabilidade Mental)

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Breve resenha do livro Rápido e Devagar: Duas Formas de Pensar | Daniel Kahneman:
https://www.youtube.com/watch?v=3dw8WZwSRKk

TAREFA 3
Público-alvo: Ensino Fundamental (9º ano), Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 30 minutos
Objetos de conhecimento: Porcentagem
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF06MA13)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
(EM07MA02)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
(EF09MA05)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

TAREFA 3 – Renovando o guarda-roupas

Você está precisando comprar roupas novas e que, por conta disso, você decida ir até um centro de lojas multimarcas, que são lojas que vendem produtos específicos, entretanto ofertam em seu catálogo uma vasta quantidade de marcas.

Ao chegar nesse centro de lojas você se deparou com duas lojas em promoção, observe o que estava anunciado em cada vitrine:

- Loja A:

Na compra de duas peças a terceira você leva **GRÁTIS***.
*(aquela de menor preço dentre as três peças escolhidas)

- Loja B:

DESCONTOS PROGRESSIVOS*

2 peças: 20% de desconto.
3 peças: 30% de desconto.
4 peças: 40% de desconto.

*(desconto sobre o valor da compra)

Supondo que os produtos que você queira adquirir estão no disponíveis nas duas lojas e por preços iguais em ambas, elabore, com suas palavras, em qual situação cada loja é mais vantajosa, do ponto de vista financeiro, para você?

RESOLUÇÃO COMENTADA

Apesar do aluno ter uma maior liberdade para responder a essa questão, esperamos encontrar algumas das seguintes argumentações em sua reposta:

Ao observarmos a oferta da loja A fica claro que teremos o maior desconto possível no valor total da compra quando escolhermos 3 peças cujo preço seja o mesmo.

$$\begin{array}{cc} Valor\ (R\$) & \% \\ 3X & 100 \\ X & P \end{array} \rightarrow \quad 3P = 100 \quad \rightarrow \quad P \approx 33{,}33$$

Desse modo a primeira loja oferece um desconto de, no máximo, 33,33% aproximadamente no valor total da compra. Caso as três peças escolhidas tenham preços distintos, o desconto será menor que esse.

Caso optemos por pagar apenas por duas peças ou apenas por três peças de roupa da loja B, o desconto concedido pela loja A pode vir a ser melhor, apesar de não termos nenhuma garantia de que será.

Entretanto se optarmos por pagar por quatro peças de roupa, temos na loja B uma garantia de desconto de 40%, que certamente, é maior que o desconto ofertado pela loja A.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Essa tarefa pode ser trabalhada tanto no ensino médio quanto no ensino fundamental nos conteúdos matemáticos de Porcentagem no 9º ano do ensino fundamental e na 1ª série do ensino médio.

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Se a peça grátis ofertada pela loja A fosse escolhida pela própria loja, você cogitaria comprar na loja A? (heurística da Aversão à perda)

- ✓ Se você visse uma outra loja cuja promoção da vitrine fosse: “Descontos de até 70%” isso afetaria sua decisão? (heurística da Ancoragem)

Ao debater este tipo de questionamento queremos saber se o valor de 70% por aparentar ser um maior desconto faria com que os alunos quisessem ir para aquela loja ainda que nada garanta que o desconto será especificamente de 70% ou ainda que não tenhamos falado que os produtos que eles querem estão em estoque na loja.

- ✓ Se você ficasse sabendo que a “10 minutos de distância” dali, de carro, você encontrará uma loja que vende as mesmas peças das lojas A e B mas no final da compra você pagará um valor R$ 10,00 mais barato. Você iria até essa loja? (heurística da Contabilidade Mental)

Ao debater este tipo de questionamento queremos saber se o aluno levará em consideração aspectos como os estacionamentos que ele terá que pagar para sair do local que está e o do outro local, se levará em consideração o fato de que se ele não tem carro esses “10 minutos de distância” podem representar uma distância considerável, será que valeria a pena andar toda essa distância por apenas R$ 10,00?

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Applying behavioral economics to real-world challenges: Kelly Peters at TEDxUtrecht:
https://www.youtube.com/watch?v=0rLb0pGZzOw

TAREFA 4
Público-alvo: Ensino Fundamental, Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 40 minutos
Objetos de conhecimento: Razão e proporção.
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF06MA13)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

TAREFA 4 – E vai rolar a Festa, vai rolar ...

Você está prestes a fazer aniversário e seu (sua) responsável está organizando uma festa para você. Ao finalizar a lista de produtos essenciais que devem ser comprados, seu (sua) responsável vai ao mercado e se depara com algumas ofertas nas vendas de refrigerantes.

- Garrafa PET de 1,5 L de refrigerante por R$ 6,00;

- Garrafa PET de 2 L de refrigerante por R$ 7,00;

- Garrafa PET de 2,5 L de refrigerante por R$ 8,75

- Garrafa PET de 3,5 L de refrigerante por R$ 10,50;

Supondo que as ofertas apresentadas acima se refiram a refrigerantes de mesma marca, qual delas é mais vantajosa do ponto de vista financeiro?

RESOLUÇÃO COMENTADA

Para podermos comparar as ofertas vamos descobrir quanto é pago por litro de refrigerante em cada uma delas.

1ª oferta:

$$\frac{6}{1{,}5} = R\$\ 4{,}00\ por\ litro$$

2ª oferta:

$$\frac{7}{2} = R\$\ 3{,}50\ por\ litro$$

3ª oferta:

$$\frac{8{,}75}{2{,}5} = R\$\ 3{,}50\ por\ litro$$

4ª oferta:

$$\frac{10{,}5}{3{,}5} = R\$\ 3{,}00\ por\ litro$$

Logo a oferta mais vantajosa, do ponto de vista econômico, é a quarta oferta.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Apesar dessa tarefa poder ser trabalhada tanto no ensino médio, quanto no ensino fundamental, ela foi concebida de modo a trazer uma possibilidade de discutirmos os vieses decisórios com alunos de turmas dos anos iniciais do ensino fundamental II (sexto e sétimo anos), destacamos que a depender do ano em que o professor decidir aplicar a tarefa, pode ser necessária a utilização de calculadoras simples para auxiliar os alunos a efetuarem os cálculos.

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Se as ofertas fossem referentes às marcas diferentes de refrigerantes isso afetaria a sua escolha? (heurística do Afeto)
- ✓ Suponha que ao se aproximar da oferta dos refrigerantes de 3,5 L você lê “nas letras miúdas” que o produto está com data de validade próxima do vencimento, ainda assim você optaria por essa oferta? (heurística da Aversão à perda)

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Misbehaving: The Making of Behavioral Economics | Richard Thaler | Talks at Google: **https://www.youtube.com/watch?v=42qbHeFxdzE**

TAREFA 5

Público-alvo: Ensino Fundamental, Ensino Médio e EJA.

Duração da tarefa: 30 minutos

Objetos de conhecimento: Razão e proporção.

Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF06MA13)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

TAREFA 5 – Minha internet, minha vida

Suponha que você deseje trocar o seu plano de telefonia móvel visando ter uma melhor conectividade à internet em seu smartphone. Para tanto você vai ao shopping onde encontra três propostas em três diferentes operadoras. As propostas estão indicadas abaixo:

Tabela 4 – Planos de dados móveis

Operadora:	Detalhes do Plano:	Valor:

A	São disponibilizados 20 GB mensais de internet, caso o cliente utilize todos os dados do mês, deverá aguardar a renovação do pacote de dados no mês subsequente. Não há possibilidade de contratação de franquia de dados adicionais e há fidelidade de 1 ano.	R$ 64,90 por mês
B	Pacote de 200GB que serão disponibilizados para o cliente utilizar dentro do período de 1 ano a contar da data da contratação. Não há limite de utilização de dados mensal.	R$ 59,90 por mês.
C	São disponibilizados 15GB mensais de internet, caso o cliente utilize todos os dados no mês, deverá aguardar a renovação do pacote de dados no mês subsequente. Não há possibilidade de contratação de franquia de dados adicionais e há fidelidade de 1 ano. Há também um bônus de 5GB mensais de internet para o cliente que optar em colocar o pagamento em débito automático.	R$ 54,90 por mês.

Fonte: os autores

Analisando as três propostas, qual delas é a melhor:

a) Considerando exclusivamente o aspecto financeiro?
b) Considerando seus gostos, preferências e outros aspectos que você considera importantes. Quais aspectos fizeram você optar?

RESOLUÇÃO COMENTADA

Para podermos comparar as ofertas precisamos observar alguns diferentes cenários.

Como na operadora A teremos disponibilidade de 20GB mensais, poderemos utilizar até 240GB dentro de 1 ano, ao passo que na operadora B poderemos utilizar até 200GB em um ano e na operadora C, se não optarmos por colocar a conta em débito automático, teremos disponibilidade de 15GB mensais e poderemos utilizar até 180GB num ano ou se optarmos por colocar a conta em débito automático, teremos disponibilidade de 20GB mensais e, portanto, poderemos utilizar até 240GB dentro de 1 ano.

Diante disso, vamos comparar primeiramente os valores pagos por GB quando utilizamos até 200GB.

<u>Operadora A</u>

No caso da operadora A, se utilizarmos apenas 200GB dentro do período de um ano, estaremos pagando por GB o valor de:

$$\frac{12.(64,90)}{200} = 3,894$$

<u>Operadora B</u>

No caso da operadora B, se utilizarmos todos os 200GB dentro do período de um ano, estaremos pagando por GB o valor de:

$$\frac{12.(59,90)}{200} = 3,594$$

<u>Operadora C</u>

No caso da operadora C, sem colocar a conta em débito automático não é possível atingir a utilização de 200GB anuais, pois teremos 15GB por mês e isso totaliza a possiblidade de utilização de apenas 12 x 15 = 180 GB anuais, sendo assim para podermos utilizar 200GB dentro do período de um ano precisaremos optar pelo débito automático e assim estaríamos pagando por GB o valor de:

$$\frac{12.(54,90)}{200} = 3,294$$

Desse modo, podemos inferir que para os clientes que utilizarão até 200GB anuais, a melhor oferta é a da operadora C, quando escolhido o pagamento em débito automático.

Vamos analisar agora o cenário no qual toda a franquia disponibilizada em um ano pelos planos será utilizada.

<u>Operadora A</u>

No caso da operadora A, se utilizarmos todos os 240GB dentro do período de um ano, estaremos pagando por GB o valor de:

$$\frac{12.(64,90)}{240} = 3,245$$

<u>Operadora B</u>

No caso da operadora B, como o pacote de 200GB é fechado, nada irá mudar no preço do GB:

$$\frac{12.(59{,}90)}{200} = 3{,}594$$

Operadora C

No caso da operadora C, sem colocar a conta em débito automático e, consequentemente, sem o bônus de 5GB mensais, teremos disponibilidade de 12 x 15 = 180GB anuais e pagaremos por GB:

$$\frac{12.(54{,}90)}{180} = 3{,}66$$

Optando pela conta em débito automático e, consequentemente, ganhando o bônus de 5GB mensais, teremos disponibilidade de 12 x 20 = 240GB anuais e assim estaríamos pagando por GB o valor de:

$$\frac{12.(54{,}90)}{240} = 2{,}745$$

Desse modo, podemos inferir que para os clientes que utilizarão todos os GB anuais disponíveis, a melhor oferta é a da operadora C, quando escolhido o pagamento em débito automático.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Apesar dessa tarefa poder ser trabalhada tanto no ensino médio, quanto no ensino fundamental, ela foi concebida de modo a trazer uma possibilidade de discutirmos os vieses decisórios com alunos de turmas dos anos iniciais do ensino fundamental II (sexto e sétimo anos), destacamos que a depender do ano em que o professor decidir aplicar a tarefa, pode ser necessária a utilização de calculadoras simples para auxiliar os alunos a efetuarem os cálculos.

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Vimos que escolher a operadora C com a opção de débito automático é o mais vantajoso financeiramente. Todos vocês fariam isso?

Ao debater este tipo de questionamento esperamos ouvir algumas destas argumentações:

- Não faria porque eu não sei se terei o valor da prestação sempre na minha conta, se eu não tiver poderei ficar negativado e pagar juros para o banco, talvez ao pagar a conta no boleto mensal a multa e juros por atraso seja menor que os juros cobrados no banco (heurística da Aversão à perda e heurística da Contabilidade Mental);

- Faria a opção pelo débito mensal para não ter que se preocupar de lembrar de pagar a conta todo mês.

✓ Suponha que você descobriu um novo plano que disponibilize 10GB de internet mensais numa determinada velocidade e que após a utilização desses 10GB não interrompe a sua conexão com internet, mas sim reduz a velocidade da mesma, você trocaria sua decisão?

Ao debater este tipo de questionamento esperamos ouvir algumas destas argumentações:

- Depende do preço do novo plano, que não foi citado;

- Depende do quanto de internet utilizarei anualmente;

- Depende do para que utilizarei a internet, pois há páginas que precisão de uma maior velocidade de conexão para serem carregadas.

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Are we in control of our decisions? | Dan Ariely:

https://www.youtube.com/watch?v=9X68dm92HVI

TAREFA 6
Público-alvo: Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 40 minutos
Objetos de conhecimento: Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries de pagamentos.
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

TAREFA 6 – A Saga do notebook

Durante a pandemia, por conta da necessidade de assistir aulas online, João precisou comprar um notebook. Ao chegar na loja para comprar o notebook cujo valor de etiqueta era de R$ 2800,00, João foi surpreendido pelo gerente da loja que lhe ofereceu duas opções de pagamento:

I- Compra à vista, com desconto de 5% sobre o valor de etiqueta.

II- Compra a prazo em 4 x R$ 700,00 s/ juros com a primeira prestação a ser paga um mês após a compra.

Supondo que o preço do notebook será o mesmo no decorrer dos próximos 4 meses e que João possui R$ 2660,00 analise qual das possibilidades de compra a seguir é a melhor, do ponto de vista financeiro.

- ✓ Opção 1: Comprar à vista, com desconto.
- ✓ Opção 2: Colocar o seu dinheiro em uma aplicação que rende juros de 1% ao mês e comprar, ao final de 4 meses, o computador por R$ 2800,00.
- ✓ Opção 3: Colocar o seu dinheiro em uma aplicação que rende juros de 1,5% ao mês e comprar, ao final de 3 meses, o computador por R$ 2800,00.
- ✓ Opção 4: Colocar o seu dinheiro em uma aplicação que rende juros de 1% ao mês e comprar a prazo, retirando, todo mês, o valor da prestação.

RESOLUÇÃO COMENTADA

Escolhendo a **opção 1**, João paga:

$$(0{,}95).2800 = 2660$$

e se descapitaliza totalmente.

Escolhendo a **opção 2**, João terá ao final de 4 meses:

$$2660.(1{,}01)^4 \approx 2768{,}01$$

valor que não é suficiente para comprar o notebook.

Escolhendo a **opção 3**, João terá ao final de 3 meses:

$$2660.(1{,}02)^3 \approx 2822{,}81$$

valor que é suficiente para comprar o notebook e ainda sobram R$ 22,81.

Para analisarmos a escolha da **opção 4** podemos utilizar o Excel para observar o que vai ocorrer mês a mês ao invés de aplicarmos a série uniforme.

Figura 12 – Pagamentos do notebook.

1	Data (Mês):	Início do mês:	Taxa:	Juros:	Final do mês:	Prestação:
2	0	2660	0,01	26,6	2686,6	700
3	1	1986,6	0,01	19,866	2006,466	700
4	2	1306,466	0,01	13,06466	1319,53066	700
5	3	619,53066	0,01	6,1953066	625,7259666	700
6	4	-74,2740334				

Fonte: elaborada pelos autores.

Donde podemos concluir que o valor restante não será suficiente para pagar a última prestação e, consequentemente, quitar o notebook.

Logo a opção mais vantajosa, do ponto de vista financeiro, é a terceira.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Essa tarefa pode ser trabalhada tanto no ensino médio, nos conteúdos de progressões geométricas e matemática financeira.

É comum que nesse tipo de problema os alunos acabem cometendo alguma assimetria de fontes de dinheiro no momento de comparar as opções, como por exemplo utilizar que o capital inicial na segunda, terceira e quarta opções de pagamento é o valor de etiqueta do notebook.

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Depois de saber que na opção mais vantajosa, do ponto de vista financeiro, ao final de quatro meses, teríamos uma economia de apenas R$ 22,81 e analisando o problema sem a obrigatoriedade de levar em conta somente fatores financeiros, ou seja, tendo uma maior liberdade de escolha, você ainda escolheria a opção 3?

Ao debater este tipo de questionamento esperamos ouvir algumas destas argumentações:

- Manteria a opção porque é melhor não se descapitalizar logo de cara, pois algum tipo de imprevisto pode surgir "no meio caminho" (heurística da Aversão à perda);

- Escolheria pagar à vista por não ter organização/paciência para deixar o dinheiro aplicado, algo que é primordial para comprar utilizando a opção 3;

- Escolheria a opção 1, mas pelo fato de que prefere se livrar das dívidas logo de uma vez.

- ✓ Suponha que você encontrou uma outra loja que está anunciando um notebook de uma marca que você considera melhor, entretanto por um preço superior a R$ 2800,00. Você iria até essa outra loja somente pelo fato de gostar mais da marca ainda que o preço do novo notebook seja mais caro? (heurística do Afeto)

Ao debater este tipo de questionamento esperamos entender como os sentimentos e as emoções, como por exemplo, gostar ou não gostar de determinada coisa pode afetar nossas decisões, como por exemplo escolhermos pagar mais caro por "uma marca melhor".

- ✓ Se você ficasse sabendo que a "10 minutos de distância" dali, de carro, você encontrará uma loja que vende o mesmo notebook e que, ao final da compra, você conseguirá pagar um valor R$ 50,00 mais barato do que na loja atual. Você iria até essa nova loja? (heurística da Contabilidade Mental)

Ao debater este tipo de questionamento queremos saber se o aluno levará em consideração aspectos como os estacionamentos que ele terá que pagar para sair do local que está e o do outro local, se levará em consideração o fato de que se ele não tem carro esses "10 minutos de distância" podem representar uma distância considerável, será que valeria a pena andar toda essa distância "por apenas R$ 50,00?"

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

The riddle of experience vs. memory | Daniel Kahneman:

https://www.youtube.com/watch?v=XgRlrBl-7Yg

TAREFA 7
Público-alvo: Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 30 minutos
Objetos de conhecimento: Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries de pagamentos.
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

TAREFA 7 – Dartagnan ataca novamente!

Dartagnan deseja vender seu carro para Joca, e para tal oferecesse as seguintes condições de pagamento:

- À vista por R$ 60.000,00.

- Pagamento a prazo com uma entrada de R$ 34.000,00 e mais uma prestação de R$ 29.000,00, para dali a 6 meses.

- Pagamento a prazo com uma entrada de R$ 23.000,00, mais uma prestação de R$ 21.000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 19.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.

- Pagamento a prazo com uma entrada de R$ 29.000,00 e mais uma prestação de R$ 38.000,00, para dali a 12 meses.

Sabendo que Joca possui o dinheiro para efetuar o pagamento à vista e que ele tem a possibilidade de aplicar o seu dinheiro em uma aplicação que rende juros semestrais de 10%, podendo resgatar os valores à medida que às prestações da opção escolhida fossem vencendo, determine qual opção é, financeiramente, mais vantajosa para Joca efetuar a compra do carro.

RESOLUÇÃO COMENTADA

Considerando como data focal a data da compra, temos que o valor presente dos pagamentos será:

2ª oferta

$$34000 + \frac{29000}{1,1} \approx 60.363,63$$

3ª oferta

$$23000 + \frac{22000}{1,1} + \frac{21000}{1,1^2} \approx 60.355,37$$

4ª oferta:

$$29000 + \frac{38000}{1,1^2} \approx 60.404,96$$

Logo a oferta mais vantajosa, do ponto de vista financeiro, é a primeira: compra à vista.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

É comum que nesse tipo de problema os alunos acabem cometendo alguma assimetria de fontes de dinheiro no momento de comparar as opções oferecidas, como por exemplo apenas somar os valores das parcelas e pensar erroneamente que a primeira e a segunda opção são equivalentes pois ambas "somam R$ 63.000,00".

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

✓ Depois de saber que, optando pela primeira opção, ao final de um ano, teríamos uma economia de R$ 363,57 ou R$ 355,37 ou R$ 404,96, quando comparado às outras opções.

É fácil perceber que a diferença absoluta entre os valores não é tão discrepante assim. Sem a obrigatoriedade de levar em conta somente fatores financeiros, ou seja, tendo uma maior liberdade de escolha, você ainda optaria pela primeira opção?

Ao debater este tipo de questionamento esperamos ouvir algumas destas argumentações:

- Escolheria não pagar à vista porque é melhor não se descapitalizar pois algum tipo de imprevisto pode surgir "no meio caminho" (heurística da Aversão à perda);

- Escolheria a segunda opção pois não vão ter organização/paciência para deixar o dinheiro restante após dar o valor de entrada investidos por um ano, por ser um "dinheiro livre";

- Escolheria a manutenção da primeira opção, pois além de ser mais vantajosa financeiramente ainda traria a possibilidade se livrar das dívidas logo de uma vez.

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Daniel Kahneman – Entrevista Exclusiva:
https://www.youtube.com/watch?v=h3xr3VTpEx0

TAREFA 8
Público-alvo: Ensino Fundamental, Ensino Médio e EJA.
Duração da tarefa: 50 minutos
Objetos de conhecimento: Juros Compostos, Progressão Geométrica, Séries de pagamentos.
Habilidades da BNCC relacionadas:

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

TAREFA 8 – Criaturas estranhas: o misterioso CASHBACK

Em tradução livre, *Cashback*, significa, em inglês, dinheiro de volta. Muito presente nos sistemas de vendas online, o mecanismo do *Cashback* permite que o consumidor faça uma compra e que parte do dinheiro despendido naquela compre retorne para o "seu bolso".

A quantidade de retorno varia, mas é comumente calculada como uma porcentagem do **valor total da compra**: 0,5%, 3%, 5%, ...

Com base no conceito acima imagine agora que um casal deseja trocar o colchão de sua cama e encontre um colchão que tem preço de etiqueta de R$ 2.400,00 com duas opções interessantes de compra:

I- Compra à vista, com desconto de 12,5%.

II- Compra a prazo em 12 x R$ 200,00 s/ juros com a primeira prestação a ser paga um mês após a compra e com cashback de 5%, sobre o **valor total da compra**, que é pago no ato da compra, e disponibilizado imediatamente para saque pelo cliente.

Supondo que esse casal tenha R$ 2100,00 e que além disso possa aplicar seu dinheiro em um investimento que lhe renda juros a uma taxa 1% ao mês.

Qual opção de compra é, do ponto de vista financeiro, mais interessante para esse casal?

RESOLUÇÃO COMENTADA

Escolhendo a **opção 1**, este casal paga:

$$(0{,}875).2400 = 2100$$

e se descapitaliza totalmente.

Para analisarmos a escolha da **opção 2** podemos utilizar o Excel para observar o que vai ocorrer mês a mês ao invés de aplicarmos a série uniforme.

Com o cashback de 5%, disponível para resgate imediato, este casal poderá investir:

$$2100 + (0{,}05).2400 = 2220$$

Figura 13 – Pagamentos do colchão.

Data	Início	Taxa:	Juros:	Final do mês:	Parcela:
0	2220	0,01	22,2	2242,2	200
1	2042,2	0,01	20,422	2062,622	200
2	1862,622	0,01	18,62622	1881,24822	200
3	1681,248	0,01	16,812482	1698,060702	200
4	1498,061	0,01	14,980607	1513,041309	200
5	1313,041	0,01	13,130413	1326,171722	200
6	1126,172	0,01	11,261717	1137,43344	200
7	937,4334	0,01	9,3743344	946,8077739	200
8	746,8078	0,01	7,4680777	754,2758517	200
9	554,2759	0,01	5,5427585	559,8186102	200
10	359,8186	0,01	3,5981861	363,4167963	200
11	163,4168	0,01	1,634168	165,0509643	200
12	-34,949				

Fonte: elaborada pelos autores.

Donde podemos concluir que o valor restante não será suficiente para pagar a última prestação e, consequentemente, quitar o colchão.

Logo a opção mais vantajosa, neste caso, a única viável, do ponto de vista financeiro, é a primeira.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR (A)

Após a tarefa o professor pode sugerir ao grupo de alunos alguns questionamentos como por exemplo:

- ✓ Depois de perceber que, a segunda opção é inviável, do ponto de vista financeiro, mas que isso ocorre pela falta de aproximadamente apenas R$ 35,00. Sem a obrigatoriedade de levar em conta somente fatores financeiros, ou seja, tendo uma maior liberdade de escolha, você tentaria alguma estratégia diferente para poder escolher a segunda opção? Quais motivos te levariam a utilizar a segunda opção?

Ao debater este tipo de questionamento esperamos ouvir algumas destas argumentações:

- Escolheria a segunda opção pensando em “arrumar os R$ 35,00” ao longo dos 12 meses e não pagaria à vista porque prefere não se descapitalizar pois algum tipo de imprevisto pode surgir “no meio caminho”, ainda que algum imprevisto financeiro prejudique ainda mais a operação de quitação do colchão (heurística da Aversão à perda);

- Escolheria a manutenção da primeira opção, pois além de ser mais vantajosa financeiramente ainda traria a possibilidade se livrar das dívidas logo de uma vez.

✓ Ofereça aos alunos uma situação nova onde o casal possa aplicar o dinheiro a uma taxa de 1,43% ao mês, e peça para eles analisarem se mudariam suas escolhas ou não.

Ao debater essa nova proposta de problema, novamente com o auxílio do Excel, teremos ao final dos 12 meses a seguinte situação:

Figura 14 – Pagamentos do colchão: nova proposta.

Data	Início	Taxa:	Juros:	inal do mê	Parcela:
0	2220	0,0143	31,746	2251,746	200
1	2051,746	0,0143	29,33997	2081,086	200
2	1881,086	0,0143	26,89953	1907,985	200
3	1707,985	0,0143	24,42419	1732,41	200
4	1532,41	0,0143	21,91346	1554,323	200
5	1354,323	0,0143	19,36682	1373,69	200
6	1173,69	0,0143	16,78377	1190,474	200
7	990,4737	0,0143	14,16377	1004,638	200
8	804,6375	0,0143	11,50632	816,1438	200
9	616,1438	0,0143	8,810857	624,9547	200
10	424,9547	0,0143	6,076852	431,0315	200
11	231,0315	0,0143	3,303751	234,3353	200
12	34,33529				

Fonte: elaborada pelos autores.

Aqui queremos entender como é o pensamento do aluno com uma situação oposta a encontrada anteriormente, para alguns os quase R$ 35,00 poderiam não representar um impeditivo para comprar o colchão a prazo, pois em um ano esse valor seria “arrumado”. Mas será que quando temos que ter o trabalho de elaborar uma estratégia para investir e poupar durante um ano, para ser recompensado em quase R$ 35,00 o pensamento dos alunos ainda é o mesmo?

PARA SABER MAIS SOBRE O ASSUNTO

Dan Ariely: Irrational Economics:

https://www.youtube.com/watch?v=UbflWn_Rt1k

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, caracterizado como uma pesquisa de desenvolvimento com foco no design de materiais, buscou contribuir para a prática de questões relacionadas ao desenvolvimento humano em ambientes educacionais, conectando Matemática e Economia Comportamental, por meio de um material didático que é composto por um conjunto de tarefas, resoluções comentadas e orientações para o professor.

As atividades desenvolvidas buscaram promover o diálogo entre a Matemática e a Economia Comportamental, permitindo uma visão mais abrangente dos objetos de estudo. O material didático apresentado, composto de oito atividades didáticas, incluía:

- ✓ Tarefas a partir de situações cotidianas, que, em sua maioria, são bastante semelhantes a situações da vida real;
- ✓ Resolução comentada considerando a matemática dos anos finais da EF e do Médio;
- ✓ Comentários para o professor, com o objetivo de maximizar os objetivos a serem alcançados.

O principal resultado deste trabalho é um material didático que inclui atividades desenvolvidas em consonância com a BNCC, mas não limitadas por ela. Um documento que apresenta tarefas prontas para uso nas aulas de Matemática, ainda que caiba ao professor a autoridade e a responsabilidade de fazer as seleções e adaptações necessárias para a utilização do material. Entregamos um produto final que, embora tenha tarefas prontas para uso em aulas de matemática ou outros ambientes, também tem a intenção de ser inspirador e não prescritivo.

Temos neste material algumas características inovadoras pois, embora existam pesquisas que demonstram a presença de uma variedade de problemas comportamentais que vem despertando o interesse de outros pesquisadores como observado por Pessoa (2016), do ponto de vista das pesquisas que versam sobre a tomada de decisão associada à educação financeira escolar temos um ambiente ainda muito embrionário. Desse modo entendemos que esta é uma área de pesquisa que demanda investigações, produções de materiais com um olhar mais cauteloso para que possamos entregar aos professores e até mesmo às instituições de ensino produtos que possam ser utilizados na escola.

Um outro aspecto de caráter inovador de nosso trabalho foi o de trazer para a discussão de sala de aula a heurística da Assimetria de Fontes, termo cunhado por Muniz (2016), para “o processo apresentado pela questão da utilização de diferentes fontes de recursos em uma mesma situação para analisar diferentes opções”.

Destacamos que o simples conhecimento matemático é insuficiente para discutir uma educação financeira crítica que leve em conta diversos fatores tais como: considerações éticas, a sustentabilidade, o papel das emoções no processo decisório, dentre outros, ainda que tal conhecimento seja uma importante ferramenta para ajudar os alunos a tomarem decisões. E é nesse sentido que acreditamos que a escola deve proporcionar aos alunos conhecimentos que vão além dos conceitos matemáticos a fim de proporcionar um espaço de reflexão.

Defendemos também a discussão da Educação Financeira sob a ótica de uma lente multidisciplinar, como proposta por Muniz (2016), oferecendo aos alunos diversas leituras sobre situações financeiras, incluindo aquelas que levam em consideração fatores comportamentais, culturais e psicológicos. Com base nisso e de posse dos resultados já exibidos por estudos anteriores da área da Economia Comportamental, que comprovam que fatores cognitivos e emocionais trabalham juntos e que às vezes é impossível distingui-los, trazemos em nossas atividades orientações para que os professores guiem os alunos através das SEF propostas para que os mesmos possam ter a percepção de que em alguns casos, tomar uma decisão com base no instinto, na intuição ou mesmo na emoção pode ser mais eficiente do que tomar uma decisão com base em uma análise cuidadosa das possíveis consequências, pois nem sempre a vantagem financeira é o fator mais importante de satisfação. Entende-se, portanto, que as aulas de Educação Financeira, devem não apenas instrumentalizar os alunos com conceitos matemáticos, mas também ampliar seus horizontes cognitivos, levando-os a refletir sobre o que os leva a tomar determinadas decisões e como heurísticas e vieses cognitivos podem influenciá-los.

Destacamos também que não existe um modelo universal de tomada de decisão ou educação financeira, pois ela deve ser adaptada às necessidades e preferências de cada indivíduo. Por isso, ao se pensar em Educação Financeira, é fundamental avaliar o contexto em que o aluno está imerso, bem como suas características únicas. Com base nisso as SEF apresentadas no material didático, apesar de fictícias, envolvem contextos e se aproximam bastante de situações que são constantemente vivenciadas no dia a dia de quase todos os estudantes que estão nos anos finais do Ensino Fundamental ou que estão no Ensino Médio.

Com isso damos aos alunos a possibilidade de entender que existem inúmeros vieses e heurísticas que podem interferir nas suas decisões e como consequência poderemos ter jovens que tenham a capacidade de evitar, futuramente, as “armadilhas financeiras”. Ou se não, pelo menos, teremos dado aos alunos momentos de discussões que evidenciem que as suas decisões nem sempre serão totalmente racionais e que, portanto, tais decisões devem ser avaliadas de modo a possibilitar a escolha mais satisfatória dentre as possibilidades disponíveis.

Espera-se que este trabalho contribua para novas pesquisas e que seja acessível aos professores que atualmente lecionam em sala de aula, para que compreendam a importância de discutir a tomada de decisão em um contexto financeiro levando em consideração a mobilização de uma variedade de heurísticas bem como as várias maneiras que essas heurísticas podem se manifestar. Esperamos utilizar o produto final deste trabalho em um futuro próximo para analisar e continuar nossa pesquisa, com resultados obtidos através da experimentação com os objetos de pesquisa. A aplicação dessas tarefas em sala de aula e a análise dos significados gerados pelos alunos podem e devem, em nossa opinião, ser objeto de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS.

APREA, C; WUTTKE, E; BREUER, K; KOH, NOI KENG; DAVIES, P.; LOPUS, J.S. International Handbook of Financial Literacy. Springer. 2016

ARTHUR, C. Financial Literacy Education. Neoliberalism, the consumer and the Citizen. Education Futures: Rethinking Theory ant Pratice. Rotherdan: Sense Publishers, 2012.

BARBOSA, J.C.; OLIVEIRA, A.M.P. Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? Perspectivas da Educação Matemática – UFMS – v. 8, número temática. ISSN 2359-2842. 2015.

BAUMANN, Z. A cultura no mundo líquido moderno. Tradução de: Culture in a Liquid Modern World. Tradução de Carlos Alberto Medeiros. Renato Aguiar. – 1.ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

BAUMANN, Z. A riqueza de poucos beneficia todos nós? Traduçao de: Does the richnees of the few benefit us all?. Tradução de Renato Aguiar. – 1.ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2015.406

BONSIEPE, G. (1997a). Design: do material ao digital. Florianópolis: FIESC/IEL.

BONSIEPE, G. (1997b). Design - the blind spot of theory or Visuality | Discursivity or Theory - the blind spot of design.

BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular: educação é a base. Brasília: MEC/SEF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 18 jun. 2020.

BRASIL/COREMEC. Educação financeira nas escolas – Ensino médio. Bloco 1. COREMEC, GAP, UNIBANCO. 2010

BRASIL/COREMEC. ENEF. Proposta de estratégia nacional de educação financeira nas escolas. Brasil, 2009.

BRASIL/COREMEC. Estratégia Nacional de Educação Financeira – Plano Diretor da Enef. 2011. Disponível em: http://www.vidaedinheiro.gov.br/docs/PlanoDiretorENEF1.pdf. Acesso em: novembro 2013.

BRASIL/COREMEC. Programa de Educação Financeira nas Escolas. Disponível em: http://www.edufinanceiranaescola.gov.br. Acesso em 01 jul. 2014

CAMPOS, Adilson Rodrigues. A Educação Financeira em um Curso de Orçamento e Economia Doméstica para Professores: Uma Leitura da Produção de Significados Financeiro-Econômicos de Indivíduos-Consumidores. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

DIAS, Luciana Cordeiro. “Saindo da Zona de Conforto”: Investigando as ações e as tomadas de decisão de alunos-consumidores do 8º ano do ensino fundamental em situações-problema financeiro-econômicas. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

DIAS, N.C . EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR E EDUCAÇÃO FISCAL: UMA PROPOSTA PARA A SALA DE AULA DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. 2019.

ENEF. Orientação para Educação Financeira nas Escolas. 2010. Disponível em http://www.edufinanceiranaescola.gov.br/o-programa/. Acesso em 03/10/2015.

FAMA, E.F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. Journal of Finance. [S.l.], v. 25, n. 2, p. 383-417, 1970.

FERNANDES, Fausto Daniel Alves; SCORTEGAGNA, Liamara; BARRÉRE, Eduardo. "À VISTA OU À PRAZO - DOIS LADOS DE UMA MESMA MOEDA: ENSINO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR UTILIZANDO DISPOSITIVOS MÓVEIS." Revista De Ensino De Ciências E Matemática 10.4 (2019): 70-88. Web.

HAUGEN, Robert A. Os segredos da bolsa. São Paulo: Pearson Educação, 2000.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. Fundamentos de Matemática Elementar 11. 1. ed. São Paulo: Atual, 2004.

KAHNEMAN, D. Rápido e Devagar: duas formas de pensar. Rio de Janeiro: RJ: Objetiva, 2012.

KAHNEMAN, D.; RIEPE, M. W. Aspects of investor psychology: beliefs, preferences, and biases investment advisors should know about. Journal of Portfolio Management, New York, v. 24, n. 4, p. 52-65, Summer 1998.

LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo. A Matemática do Ensino Médio. v. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. de P. S. da; BOAVENTURA, E. M. Design-Based Research ou Pesquisa de Desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. In: Revista da Faeeba: educação e contemporaneidade. Salvador: Uneb, v. 23, n. 42 – jul./dez. 2014, p. 23-36.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, Augusto César; ZANI, Sheila C.; WAGNER, Eduardo. Progressões e Matemática Financeira. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001

MUNIZ, I. Jr. Econs ou Humanos? Um estudo sobre a tomada de decisão em Ambientes de Educação Financeira Escolar. Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil. 2016a.

MUNIZ, I. Jr. Educação Financeira e a sala de aula de matemática: conexões entre a pesquisa acadêmica e a prática docente. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016c, São Paulo. Anais... São Paulo, Brasil: XII ENEM, 2016c. p. 1-12.

MUNIZ, I. Jr. Livro Aberto de Educação Financeira. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS). Rio de Janeiro. 120p. 2020.

MUNIZ, I.Jr; JURKIEWICZ, S. "Representações Temporais E O Valor Do Dinheiro No Tempo: Conexões Entre a Educação Financeira E O Ensino De Matemática." BoEM 4.7 (2016): BoEM, 2016-12-01, Vol.4 (7). Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/8649/6235. Acesso em: 10 out. 2021.

MUNIZ, I.Jr; JURKIEWICZ, S. Tomada de decisão e Trocas Intertemporais: uma contribuição para a construção de ambientes de educação financeira escolar nas aulas de matemática. Revista de Educação, Ciências e Matemática, v.6, n.3, set/dez. 2016b.

NETO, Alexandre Assaf. A Matemática Financeira e suas Aplicações. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

OCDE. Recommendation on principles and good practices for financial education and awareness. 2005a. Disponível em: http://www.oecd.org/finance/financialeducation/35108560.pdf. Acesso em: 02 jan. 2020.

PATEL, R. O valor de nada. Porque tudo custo mais caro do que pensamos. Rio de Janeiro: Zahar. 2010.

PESSOA, C.A.S; MUNIZ, I. Jr; KISTEMANN, M.A.Jr. Cenários sobre Educação Financeira Escolar: Entrelaçamentos entre a Pesquisa, o Currículo e a Sala de aula de Matemática. EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.9, n.1, p.1-28, 2018.

PIKETTY, T. O capital no século XXI. Rio de Janeiro: Intrínseca. RJ. 2014.

PLOMP, T. Educational design research: An introduction. In: PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (Ed.). An Introduction to Educational Design Research. Enschede: SLO-Netherlands

POWELL, A. QUINTANEIRO, W.S. O Vídeo na Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: Investigando pensamentos matemáticos dos alunos, 2015.

POWELL. A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. Bolema, Rio Claro: Unesp, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, n.21, ano 17, 2004.

QUINTANILHA, ROSILANE MOTTA ; LOZANO, ABEL GARCIA ; RODRIGUES, Chang Kuo ; KISTEMANN JR., MARCO AURÉLIO . A Educação Financeira no Ensino Médio em uma escola em São João de Meriti (RJ). Revemop, v. 1, p. 266-284, 2020.

RESENDE, Amanda Fabri de. A Educação Financeira de Jovens e Adultos: uma leitura da produção de significados financeiro-econômicos de dois indivíduos-consumidores. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

ROCHA, A.; MARIANI, R. Tomada de decisão diante de situações econômico-financeiras: educação financeira escolar e representações semióticas mobilizadas por licenciandos em Matemática. Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática, v. 2, n. 2, 7 fev. 2020.

ROLIM, M. R. L. B.; MOTTA, M. S. O estado da arte das pesquisas em matemática financeira nos programas de mestrado e doutorado da área de ensino da Capes. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 537-556, Mai. 2014.

SAITO, A. T. Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças no Brasil. Dissertação de Mestrado. FEA/USP - São Paulo, 2008.

SANTOS, Laís Thalita Bezerra Dos; PESSOA, Cristiane Azevêdo Dos Santos. "Temáticas De Educação Financeira Escolar Nos Anos Iniciais Do Ensino Fundamental: Como São Apresentadas Em Livros Didáticos De Matemática?" Alexandria (Florianópolis) 13.2 (2020): 191-213. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/65879/44738. Acesso em: 30 nov. 2020

SILVA, A. M. S; POWELL, A. B. Um programa de Educação Financeira para a Matemática Escolar da Educação Básica. Anais [...] Paraná, 2016. p. 1-17. Disponível em: https://docplayer.com.br/5940248-Um-programa-de-educacao-financeira-para-a-matematica-escolar-da-educacao-basica.html. Acesso em: 14 out. 2020.

SILVA, A., KISTEMATNN, M. & VITAL, M. Um estudo sobre a inserção da educação financeira como tema curricular nas escolas públicas brasileiras. In XXV SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 25., 2014, Braga. Actas ... Braga, Portugal, 2014. p. 35-46.

SILVA, A.; POWELL, A. Educação Financeira na Escola: a perspectiva da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, v.24, nº 66, p. 3-19, 2015.

SILVA, A.M.S; POWELL, A.B. Um programa de Educação Financeira para a Matemática Escolar da Educação Básica. In XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Paraná. Anais do XI ENEM ... Paraná, Brasil: 2013, p. 1-17.

THALER, R. Accounting and Consumer Choice. Marketing Science, v. 4, n. 3. Summer, p. 199-214, 1985.

THALER, R.H; SUNSTEIN, C.R. Nudge. Improving decisions about health, wealth and happiness. Springer. 2008.

TRAJANO, A. Arithmetica Progressiva. 68ª ed. Francisco Alves: Rio de Janeiro. 1935

TVERSKY, A; KAHNEMAN, D. Judgment under uncertainty: heuristics and biases. Science, New Series, v.85, n. 4157, p. 1124-1131, 1974.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Belief in the law of small numbers. Psychological Bulletin, v. 76, n. 2, p. 105-110, 1971.

Van Den Akker, J., Gravemeijer, K, McKenney, S. e Nieveen, N. (Eds). (2006). Educational design research. London: Routledge. ISBN10: 0-415-39635-2

VIEIRA, Andréa Aparecida - A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA EXPERIÊNCIA COM O ENSINO MÉDIO DA EJA. IX ENEM 2013

VIEIRA, Glauciane da Silva. Educação financeira e tomada de decisão: significados produzidos por estudantes do 5º ano do ensino fundamental. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

VIEIRA, G.S.; PESSOA, C. A.S. Educação Financeira pelo mundo: Como se organizam as Estratégias Nacionais? Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.22, nº. 2, p. 658-688, 2020. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/47580.

XISTO, Luiz Paulo. Educação Financeira na Educação de Jovens e Adultos (EJA): buscando uma visão empreendedora para estudantes adultos no município de Irupi. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2020.

XU, L.; ZIA, B. Financial Literacy around the Word. An overview of the evidence with practical suggestions for the way forward. The World Bank, Development Research Group, Finance and Private Sector Development Team. 2012.