



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS  
Instituto de Ciências Exatas e Naturais

**Fabício Onório da Silva**

**Modelos matemáticos de equações diferenciais aplicados  
ao estudo da pandemia de SARS-CoV-2**

Rondonópolis  
2021

**Fabício Onório da Silva**

**Modelos matemáticos de equações diferenciais aplicados ao estudo da  
pandemia de SARS-CoV-2**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal de Rondonópolis como parte dos requisitos do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador**

Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva

**Banca Examinadora**

Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva (Presidente) – ICEN/UFR

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eunice Cândida Pereira Rodrigues – ICEN/UFR

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia – IBILCE/UNESP

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida por Fabício Onório da Silva e orientada pelo Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva.

Rondonópolis  
2021

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

O58m Onório da Silva, Fabrício.  
Modelos matemáticos de equações diferenciais aplicados ao estudo da pandemia de SARS-CoV-2 / Fabrício Onório da Silva. -- 2021  
73 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Clayton Eduardo Lente da Silva.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Rondonópolis, 2021.  
Inclui bibliografia.

1. equações diferenciais ordinárias. 2. modelagem matemática. 3. teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. 4. Epidemiologia. 5. COVID-19. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Assinam abaixo, eletronicamente, os membros da banca examinadora da sessão pública de defesa de dissertação para o Título de Mestre em Matemática na área de concentração Matemática, a que se submeteu o aluno Fabrício Onório da Silva, em 09 de dezembro de 2021, no Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN) da Universidade Federal de Rondonópolis (UFR), em Rondonópolis, Mato Grosso. Referência: Processo SEI nº 23108.109147/2021-02, Documento SEI nº 4254738.

**Título da Dissertação:** Modelos matemáticos de equações diferenciais aplicados ao estudo da pandemia de SARS-CoV-2.

**Autor:** Fabrício Onório da Silva

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida e aprovada em 09 de dezembro de 2021.

**Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva (ICEN/UFR)**

Presidente da Banca Examinadora

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eunice Cândida Pereira Rodrigues (ICEN/UFR)**

Examinador Interno

**Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia (IBILCE/UNESP)**

Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **CLAYTON EDUARDO LENTE DA SILVA**, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 23/12/2021, às 11:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Márcio Ricardo Alves Gouveia**, Usuário Externo, em 23/12/2021, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **EUNICE CANDIDA PEREIRA RODRIGUES**, Coordenador(a) do PPG Mestrado Profis. em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - ICEN/CUR - UFMT, em 23/12/2021, às 23:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4254738** e o código CRC **19AD6C59**.

# Dedicatória

*Dedico esse trabalho a todos aqueles cujas vidas foram interrompidas pela pandemia do novo coronavírus.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por permitir que eu experiencie a dádiva sublime da vida. Agradeço aos meus pais Iara e Francisco pelo amor, carinho, paciência, compreensão e atenção partilhados comigo durante todas as etapas, boas ou ruins, da minha trajetória. À minha irmã Fernanda, que sempre me apoiou e incentivou a superar os obstáculos que surgiam em meu caminho, usando sempre do carisma e do bom humor naturais dela. À minha esposa Jaqueline, que sempre esteve presente, desde os tempos de graduação, em todas as fases da minha vida acadêmica, não medindo esforços para me ajudar, para me ouvir, para me amar. Ao meu professor orientador Clayton Eduardo que dispôs de sua paciência e compromisso para me orientar neste trabalho. Aos meus colegas de turma que também passaram pelas dificuldades do curso, sempre com bom humor e empatia. O meu obrigado a todos que torceram por mim e me ajudaram nesta incrível jornada.

# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias à Epidemiologia. Analisamos o comportamento de alguns modelos epidemiológicos utilizando os conceitos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Em particular, analisamos a epidemia ocasionada pelo vírus SARS-CoV-2, causador da doença COVID-19, na cidade de Rondonópolis. Para tanto, estudamos os principais conceitos envolvidos no processo de modelagem, além de demonstrar resultados matemáticos que corroboram as afirmações geradas pelos modelos propostos. Por fim, baseados nos estudos realizados, discutimos a importância do ensino da função exponencial para estudantes do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Ordinárias. Modelagem Matemática. Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Epidemiologia. COVID-19.

# Abstract

This work presents a study on applications of Ordinary Differential Equations to Epidemiology. We analyze the behavior of some epidemiological models using the concepts of the Qualitative Theory of Differential Equations. In particular, we analyzed the epidemic caused by the SARS-CoV-2 virus, which causes the COVID-19 disease, in the city of Rondonópolis. Therefore, we study the main concepts involved in the modeling process, in addition to demonstrating mathematical results that corroborate the statements generated by the proposed models. Finally, based on the studies carried out, we discuss the importance of teaching the exponential function for high school students.

**Keywords:** Ordinary Differential Equations. Mathematical Modeling. Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. Epidemiology. COVID-19.

# Lista de Figuras

2.1	Teorema de Existência e Unicidade de Soluções. . . . .	22
2.2	Trajectoria do campo de vetores. . . . .	27
2.3	Singularidade do tipo nó atrator. . . . .	31
2.4	Singularidade do tipo nó repulsor. . . . .	31
2.5	Singularidade do tipo sela. . . . .	32
2.6	Singularidade do tipo centro. . . . .	33
2.7	Singularidade do tipo foco atrator. . . . .	33
2.8	Singularidade do tipo foco repulsor. . . . .	34
2.9	Singularidade do tipo nó impróprio atrator radial. . . . .	34
2.10	Singularidade do tipo nó impróprio repulsor radial. . . . .	35
2.11	Singularidade do tipo nó impróprio atrator. . . . .	36
2.12	Singularidade do tipo nó impróprio repulsor. . . . .	36
4.1	Evolução do número de infectados por dia em Rondonópolis. . . . .	58
4.2	Comparativo entre dados oficiais de Rondonópolis e o modelo proposto. . . . .	59
4.3	Simulação com modelo SIR em um intervalo de 365 dias. . . . .	59
5.1	Imagem de um taxímetro. . . . .	62
5.2	Imagem de uma placa com bactérias. . . . .	62
5.3	Gráfico de uma função afim. . . . .	64
5.4	Gráfico de uma função do tipo exponencial. . . . .	65

# Lista de Tabelas

- 4.1 Quantidade de infectados e tempo de duplicação em Rondonópolis. Fonte: Próprio autor. . . . 57
- 4.2 Evolução dos estágios da epidemia em Rondonópolis - Modelo SIR. Fonte: Próprio autor. . . . 58

# Lista de Símbolos

COVID-19	Coronavírus Disease 2019
SARS-CoV-2	Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2
OMS	Organização Mundial da Saúde
EDO	Equação Diferencial Ordinária
PVI	Problema de Valor Inicial
$\text{tr}A$	Traço de uma matriz $A$
$\det A$	Determinante de uma matriz $A$
$N$	População considerada no modelo
$S$	Quantidade de indivíduos suscetíveis à infecção
$I$	Quantidade de indivíduos infectados
$R$	Quantidade de indivíduos removidos da classe infectados
$\alpha$	Taxa de transmissão da doença
$\beta$	Taxa de recuperação da doença
$R_0$	Razão de reprodutibilidade basal
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>16</b>
2.1	O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	18
2.2	Soluções Máximas . . . . .	25
2.3	Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Epidemiologia e Modelagem</b>	<b>37</b>
3.1	Contexto Histórico da Epidemiologia . . . . .	37
3.2	Epidemiologia Matemática . . . . .	39
3.3	Conceitos Básicos de Epidemiologia Matemática . . . . .	40
3.4	Modelagem Matemática . . . . .	42
3.5	Modelos Matemáticos Aplicados à Epidemiologia . . . . .	44
3.5.1	Modelo SI (Suscetível - Infectado) . . . . .	45
3.5.2	Modelo SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível) . . . . .	46
3.5.3	Modelo SIR (Suscetível - Infectado - Removido) . . . . .	47
3.5.4	Modelo SIRS (Suscetível - Infectado - Removido - Suscetível) . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Modelo Epidemiológico Aplicado à COVID-19</b>	<b>53</b>
4.1	Modelo e Metodologia . . . . .	54
4.1.1	Estimativa de Parâmetros . . . . .	55
4.1.2	Epidemia de COVID-19 em Rondonópolis, Mato Grosso, Brasil . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Abordagem da Função do Tipo Exponencial no Ensino Médio</b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>67</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Primeiro Apêndice</b>	<b>71</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A evolução científica e tecnológica pela qual a humanidade passa desde seus primeiros registros é notória, porém a história reserva em si momentos terríveis face aos impactos desastrosos que uma *pandemia* pode causar sobre toda uma população. Uma das grandes pandemias registradas na história mundial iniciou-se em 1346 no continente europeu, pela Itália, com a chegada dos comerciantes genoveses refugiados da cidade sitiada de Caffa. Essa pandemia, conhecida por *Peste Negra* – doença transmitida por uma bactéria – assolou a Europa por todo o século XIV causando a morte de pelo menos um terço da população daquele local. A denominada *Gripe Espanhola* – doença transmitida por um vírus – surgida em 1918, é categorizada mundialmente como a pandemia mais mortal já enfrentada, matando de 40 a 50 milhões de pessoas em seus 18 meses de duração.

Segundo (FORATTINI, 2005), *epidemia* é o nome dado ao estado de incidência ou agravo à saúde além do normalmente esperado dentro da faixa de endemicidade, que é a faixa de variação da prevalência da doença definida por níveis considerados normais, em determinada área ou determinado grupo populacional. No caso de *pandemia*, exclui-se os limites geográficos e passa a tratar-se de grandes regiões, envolvendo múltiplos continentes ou até mesmo todo o planeta. De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o surgimento de uma nova doença que infecta gravemente os humanos, condicionada à facilidade e à sustentabilidade com a qual se espalha, são características essenciais para o início de uma pandemia.

No final do ano de 2019, a humanidade deparou-se novamente com uma ameaça viral de proporções globais, denominada *pandemia do novo coronavírus*. Identificada pela primeira vez na China, a doença do novo coronavírus (*coronavirus disease 2019*), mundialmente conhecida pela sigla COVID-19, é uma doença respiratória aguda, ocasionada por um vírus da família

dos coronavírus, denominado SARS-CoV-2, sigla para *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2*, que provoca sintomas de uma gripe comum, embora quando associada a outras patologias pré-existentes, o quadro de saúde do paciente pode sofrer rápida evolução podendo levá-lo a óbito em poucos dias. Em 30 de janeiro de 2020, a OMS declarou que o surto do novo coronavírus constitui uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII) – o mais alto nível de alerta da Organização, conforme previsto no Regulamento Sanitário Internacional (RSI). Essa decisão buscou aprimorar a coordenação, cooperação e a solidariedade global para interromper a propagação do vírus. A ESPII é considerada, nos termos do RSI, “um evento extraordinário que pode constituir um risco de saúde pública para outros países devido a disseminação internacional de doenças; e potencialmente requer uma resposta internacional coordenada e imediata”. Em 11 de março de 2020, a COVID-19 foi caracterizada pela OMS como uma pandemia.

Os impactos causados pela nova pandemia afetaram todos os países do mundo não apenas na ordem biomédica ou epidemiológica, mas também repercutiu nas áreas sociais, econômicas e culturais, colocando em xeque políticas públicas de saúde, expondo assim a fragilidade de algumas nações no tratamento de situações caóticas oriundas de ameaças biológicas.

A característica determinante da COVID-19, que gerou as situações problemáticas vividas pela sociedade mundial, é sua alta taxa de contágio ou também chamado de número de reprodução, que é um índice utilizado para medir o perfil de uma doença quanto a sua disseminação na população, ou seja, trata-se de um patógeno de rápida transmissão que aliado a evolução do quadro clínico dos pacientes em um curto período de tempo faz com que a demanda por unidades hospitalares cresça vertiginosamente, causando conseqüentemente filas de espera por atendimento, gerando assim caos nos sistemas de saúde por todo o planeta.

Embora o panorama mundial em relação à saúde seja grave, a Epidemiologia (ramo da Saúde Coletiva que estuda os diferentes fatores que intervêm na difusão e propagação de doenças, sua frequência, seu modo de distribuição, sua evolução e a colocação dos meios necessários à sua prevenção), aliada à Matemática, estuda a rede de inter-relações entre os seres humanos e o meio ambiente, apontando efeitos indiretos e características-chave desse sistema, o que facilita seu monitoramento e permite que se façam prognósticos sobre o comportamento futuro ou sua reação a diferentes tipos de perturbações, trazendo conseqüentemente utilidade na elaboração de políticas de saúde e controle pertinentes.

O objetivo principal dessa dissertação é a análise qualitativa de alguns modelos matemáticos epidemiológicos aplicados ao estudo da pandemia do novo coronavírus através de equações diferenciais e a compreensão dos parâmetros envolvidos em cada processo da modelagem. Para tal, no Capítulo 2 é introduzido os conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias e de sua Teoria Qualitativa, com demonstrações de alguns importantes resultados necessários para a confecção e para o estudo dos modelos epidemiológicos. Em seguida, no Capítulo 3, há uma contextualização histórica da Epidemiologia e uma análise de como a Matemática pôde agregar a esse recente e vital ramo da ciência, além de apresentar quatro importantes modelos matemáticos aplicados no estudo de epidemias. No Capítulo 4, mostramos uma aplicação do modelo SIR (Suscetível-Infetado-Removido) no estudo da epidemia de COVID-19 no município de Rondonópolis, discutindo a necessidade de ações para prevenção e controle da doença. E, para finalizar, no Capítulo 5 ressaltamos a importância do estudo da função do tipo exponencial no Ensino Médio, de modo que os estudantes compreendam a conceituação, sua definição e algumas aplicabilidades.

## Capítulo 2

# Equações Diferenciais Ordinárias

Os primórdios da teoria das *equações diferenciais* remontam ao século XVII com os trabalhos do inglês Isaac Newton (1643-1727) e do alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que, estimulados por problemas físicos e geométricos, desenvolveram de forma independente os métodos do Cálculo Diferencial e Integral. A consolidação como um novo ramo da Matemática ocorreu no século XVIII, época em que procurava-se *soluções* das equações diferenciais dadas em termos de funções elementares. É dessa época os conhecidos métodos de resolução de vários tipos especiais de equações diferenciais. Com dificuldades pelo caminho, passou-se a considerar como soluções de uma equação diferencial, expressões dadas na forma de uma integral (quadratura) com o integrando dado por funções elementares, ainda que a integral não admitisse uma expressão em termos de tais funções elementares. Em seguida, adotou-se como soluções, expressões por meio de somas infinitas (séries), inicialmente sem a preocupação com a análise de convergência das mesmas. As contribuições do suíço Leonhard Euler (1707-1783), do italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e do francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827) expandiram o conhecimento dentro do Cálculo das Variações, da Teoria das Oscilações e da Mecânica Celeste. Na Mecânica Celeste, os matemáticos e os cientistas ocupavam-se em verificar se a teoria gravitacional de Newton era capaz de descrever o movimento dos corpos celestes, uma vez conhecidas as condições iniciais do problema. Vale destacar que desde o século XVII já eram conhecidas as leis que governam o movimento dos corpos celestes no espaço. Com o tratamento dos problemas da dinâmica celeste através de métodos analíticos (séries), distintos dos métodos geométricos usados por Newton, os estudos sobre o problema do movimento de três ou mais corpos celestes levaram a duas direções: procurar teoremas gerais sobre o movimento dos corpos e procurar uma boa aproximação para um movimento

particular em um determinado período de tempo. O francês Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) foi o primeiro a apresentar uma solução aproximada para o problema do movimento da Lua, em um trabalho de 1747, utilizando aproximações para as soluções em forma de séries. Em 1748, Euler começou a desenvolver um método para calcular as perturbações nos movimentos planetários. Em 1772, Lagrange mostrou que o problema do movimento de três corpos celestes poderia ser reduzido de um sistema de equações diferenciais de ordem dezoito para um sistema de ordem sete. No século XIX, os fundamentos da Análise Matemática passaram a exigir maior rigor e exatidão, sendo que os conceitos de limite, derivada, convergência de séries numéricas e de funções, e outros processos infinitos, foram definidos em termos aritméticos. O objetivo era melhorar as aproximações de soluções de equações diferenciais dadas por séries. Além disso, procurava-se também eliminar destas soluções os termos que crescem ou decrescem infinitamente com o tempo e que levam a uma configuração totalmente nova do sistema. Um marco fundamental na evolução das equações diferenciais deu-se com a publicação do trabalho do francês Henri Poincaré (1854-1912) intitulado “*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*”, de 1881, no qual foram lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, que visa a análise do comportamento da configuração global das soluções e o efeito de pequenas perturbações das condições iniciais (estabilidade), de grande interesse para a Mecânica Celeste: uma pequena perturbação na posição e na velocidade de um corpo celeste o coloca em uma órbita que se afasta ou converge para a órbita original? Outro nome importante é o do americano George Hill (1838-1914) que, em trabalhos de 1877 e 1878, encontrou soluções periódicas para o problema dos três corpos. Seus trabalhos sobre estas soluções influenciaram muitas pesquisas posteriores, inclusive as de Poincaré. Anos depois, os trabalhos de Poincaré foram retomados por outros matemáticos, dentre os quais destacamos o russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), o francês Jacques Hadamard (1865-1963) e o americano George David Birkhoff (1884-1944), estes dois últimos importantes no desenvolvimento do que hoje chamamos Teoria dos Sistemas Dinâmicos, influenciados pelo trabalho de Poincaré. Outros conceitos foram introduzidos ao longo do século XX, dentre os quais destacamos o de estabilidade estrutural, desenvolvidos pelos russos Lev Pontryagin (1908-1988) e Aleksandr Andronov (1901-1952), que trata de condições necessárias e suficientes para que o comportamento das *soluções* de uma equação diferencial não tenha mudanças bruscas para pequenas perturbações das funções que as definem. Destaca-se também os trabalhos do brasileiro Maurício Peixoto (1921-2019) sobre caracterização, abertura e densidade das

equações diferenciais estruturalmente estáveis em superfícies, procurando expressar a Teoria dos Sistemas Dinâmicos tendo como base a Teoria dos Conjuntos.

## 2.1 O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções

Uma questão central da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais é saber se podemos prever comportamentos futuros ou descobrir comportamentos passados de um sistema modelado por equações diferenciais, conhecendo suas *condições iniciais*, ou seja, conhecendo o *estado inicial* do sistema em um *tempo inicial*. Desejamos que seja única a curva solução que satisfaça alguma condição inicial. Isto é sintetizado no Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, que será formulado e demonstrado nesta seção. De certo modo, este teorema possui uma interpretação filosófica dada pelo *princípio do determinismo*, que afirma que todos os acontecimentos ocorrem devido ao decurso natural por uma causa específica e devem de fato ocorrer, ou seja, todos os fenômenos estão interligados e tudo está predeterminado. O teorema também está relacionado à *previsibilidade* dos fenômenos físicos. Resumidamente, nos sistemas físicos que são descritos matematicamente por equações diferenciais, a questão é analisada com a determinação da evolução no tempo das quantidades envolvidas, a partir do seu conhecimento em um determinado instante de tempo.

**Definição 2.1.** *Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação da forma*

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}) \quad (2.1)$$

onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função contínua definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+dk}$ . Os inteiros positivos  $d$  e  $k$  são chamados, respectivamente, *dimensão e ordem da equação*.

**Definição 2.2.** *Uma solução da equação (2.1) é uma curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $k$  vezes diferenciável, definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , tal que, para cada  $t \in I$ , são satisfeitas as condições  $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$  e  $\varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ .*

O fato de  $I$  ser um intervalo garante que qualquer solução de uma equação diferencial é uma curva conexa não reduzida a um ponto. A variável  $t$  é chamada de *tempo* e o conjunto das variáveis  $x, x', \dots, x^{(k-1)}$  é chamado de *estado*.

**Definição 2.3.** *Um problema de Cauchy (ou problema de valor inicial) é uma equação diferencial ordinária que satisfaz um estado (uma condição) inicial*

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, \quad x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)} \quad (2.2)$$

onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função contínua definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+dk}$  e tal que  $(t_0, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k-1)}) \in U$ .

**Definição 2.4.** *Uma solução do problema de Cauchy (2.2) é uma curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $k$  vezes diferenciável, definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , tal que, para cada  $t \in I$ , são satisfeitas as condições  $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$ ,  $\varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$  e  $\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, \varphi^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)}$ , para  $t_0 \in I$ .*

**Exemplo 2.1.** *A taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente circundante (Lei do Resfriamento).*

Denotando por  $x$  a temperatura do corpo em um tempo  $t$  e por  $a$  a temperatura do ambiente circundante, obtemos a equação diferencial de ordem  $k = 1$  e dimensão  $d = 1$  dada por  $x' = \alpha(x - a)$ , onde  $\alpha$  é a constante de proporcionalidade (que depende do corpo). Estamos assumindo que a temperatura  $a$  do ambiente circundante seja constante em todos os seus pontos e que a temperatura  $x$  do corpo varie apenas com o tempo  $t$ . Temos  $f(t, x) = \alpha(x - a)$  com  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  para algum aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Considerando a curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = a + be^{\alpha t}$ , em que  $b$  é uma constante real e  $I$  é um intervalo tal que  $(t, \varphi(t)) \in U$  para todo  $t \in I$ , é fácil verificar que tal curva é solução da equação diferencial. Se em determinado tempo  $t_0$  soubermos a temperatura  $x_0$  do corpo, obtemos o problema de Cauchy (ou problema de valor inicial) dado por  $x' = \alpha(x - a)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , com  $(t_0, x_0) \in U$ . A constante  $b$  pode ser determinada pela condição inicial e a solução do problema de Cauchy é a curva dada por  $\varphi(t) = a + (x_0 - a)e^{\alpha(t-t_0)}$ . A constante de proporcionalidade  $\alpha$  pode ser determinada aferindo a temperatura  $x$  do corpo em um tempo  $t_1 > t_0$ , ou seja, considerando  $x(t_1) = x_1$ , com  $(t_1, x_1) \in U$ . Este modelo pode ser utilizado em perícia criminal para estimar o instante da morte de uma pessoa. É claro que, com o passar do tempo, as temperaturas do corpo e do meio circundante tendem a entrar em equilíbrio, de modo que, neste caso, não seria possível determinar o instante da morte com uma precisão aceitável.

**Exemplo 2.2.** *Quando uma mola é deformada por alguma força externa, uma força elástica restauradora passa a ser exercida na mesma direção e no sentido oposto à força externa. Essa*

força elástica, por sua vez, é variável e depende do tamanho da deformação que é sofrida pela mola (Lei de Hooke).

Considere um objeto com massa preso a extremidade de uma mola fixada em uma parede pela sua outra extremidade. Denotando por  $x$  o deslocamento unidimensional do objeto de massa  $m$  a partir de sua posição de repouso e por  $c$  a constante positiva de elasticidade da mola, temos  $F = -cx$  (Lei de Hooke). Se considerarmos que  $F = mx''$  (Segunda Lei de Newton), obtemos a equação diferencial de ordem  $k = 2$  e dimensão  $d = 1$  dada por  $x'' = -(c/m)x$ , onde estamos desprezando a gravidade e a resistência do ar. Temos  $f(t, x) = -(c/m)x$  com  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  para algum aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Considerando a curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = a \sin(t\sqrt{c/m}) + b \cos(t\sqrt{c/m})$ , em que  $I$  é um intervalo tal que  $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U$  para todo  $t \in I$ , é fácil verificar que tal curva é solução da equação diferencial onde  $a$  e  $b$  são constantes reais. Para o problema de Cauchy (ou problema de valor inicial) não basta conhecermos a posição inicial  $x_0$  do objeto de massa  $m$  no tempo inicial  $t_0$ . É preciso também conhecer sua velocidade inicial  $x_0^{(1)}$  no tempo inicial  $t_0$ . Temos então  $x'' = -(k/m)x$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = x_0^{(1)}$ , com  $(t_0, x_0, x_0^{(1)}) \in U$ . As constantes  $a$  e  $b$  da curva  $\varphi$  podem ser determinadas pela condição inicial e, dessa forma, obtemos a solução do problema de Cauchy. Como desprezamos a gravidade e a resistência do ar, as soluções são periódicas.

Uma equação diferencial de ordem  $k$  e dimensão  $d$  sempre pode ser transformada, de modo equivalente, em uma equação diferencial de ordem 1 e dimensão  $kd$ , como veremos na proposição abaixo. A compensação com a redução da ordem ocorre com o aumento da dimensão.

**Proposição 2.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , contínua em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+kd}$ . Considere  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{kd}$  dada por  $g(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, f(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}))$ . Uma curva  $k$  vezes diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  é solução de  $x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$  se, e somente se, a curva diferenciável  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^{kd}$  dada por  $\beta(t) = (\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ , é solução de  $y' = g(t, y)$  onde  $y \in \mathbb{R}^{kd}$ .*

*Demonstração.* A função  $g$  é contínua no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+kd}$ . É fácil notar que a curva  $\varphi$  é  $k$  vezes diferenciável se, e somente se, a curva  $\beta$  é diferenciável. Vamos assumir que  $\varphi$  é solução de  $x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$ . Então  $I$  é um intervalo e, para todo  $t \in I$ , valem as seguintes condições:  $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$  e  $\varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ . Logo  $g(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) = (\varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t), \varphi^{(k)}(t))$  e, portanto, para todo  $t \in I$ , tem-se  $(t, \beta(t)) \in U$  e  $g(t, \beta(t)) = \beta'(t)$ . Fica assim provado que  $\beta$  é solução de  $y' = g(t, y)$ . Reciprocamente, vamos assumir que  $\beta$  é solução de  $y' = g(t, y)$ . Então  $I$  é um intervalo e para todo

$t \in I$  valem as condições  $(t, \beta(t)) \in U$  e  $\beta'(t) = g(t, \beta(t))$ , ou seja,  $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$  e  $(\varphi'(t), \dots, \varphi^{(k)}(t)) = g(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ . Dessa forma, para cada  $t \in I$ , obtemos a igualdade  $(\varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t), \varphi^{(k)}(t)) = (\varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t), f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)))$  e isto implica que  $\varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ . Portanto,  $\varphi$  é solução de  $x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$ .  $\square$

A Proposição 2.1 permite considerarmos, de agora em diante, apenas as equações diferenciais de ordem  $k = 1$  e dimensão  $d = n$  dadas por

$$x' = f(t, x) \quad (2.3)$$

onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ . Cada ponto  $(t_0, x_0) \in U$  define uma reta  $r_{(t_0, x_0)}$  em  $\mathbb{R}^{1+n}$  dada por  $x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0)$  em que  $(1, f(t_0, x_0))$  é o vetor diretor dessa reta. Assim, a função  $f$  define um *campo de direções* em  $U$ . Geometricamente, uma solução da equação (2.3) é uma curva  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo e cujo vetor tangente em  $(t_0, \varphi(t_0)) \in U$ , para cada  $t_0 \in I$ , é paralelo ao vetor diretor  $(1, f(t_0, x_0))$  da reta  $r_{(t_0, x_0)}$  com  $x_0 = \varphi(t_0)$ . O problema de Cauchy da equação (2.3), para  $(t_0, x_0) \in U$ , é dado por

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.4)$$

O Teorema da Existência e Unicidade de Soluções, abaixo enunciado, utiliza alguns resultados de Topologia dos Espaços Métricos e de Análise Funcional os quais serão demonstrados no Apêndice A.

**Teorema 2.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ , localmente lipschitziana relativamente à segunda variável. Para cada  $(t_0, x_0) \in U$  existe uma solução  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  do problema de Cauchy  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Se a curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  também é uma solução do problema de Cauchy então  $\beta(t) = \varphi(t)$  para todo  $t \in I \cap J$ .*

*Demonstração.* Primeiramente trataremos da existência de soluções. Seja  $(t_0, x_0) \in U$  e escolha  $\delta > 0$  tal que  $\bar{B} = \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$  onde

$$\bar{B}_\delta(t_0) = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \delta\}, \quad \bar{B}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}.$$

Seja  $M = M_\delta = \sup_{\bar{B}} \|f\|$ . Por hipótese,  $f$  é localmente lipschitziana relativamente à segunda variável. Se supormos  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, podemos admitir que  $f$  é localmente

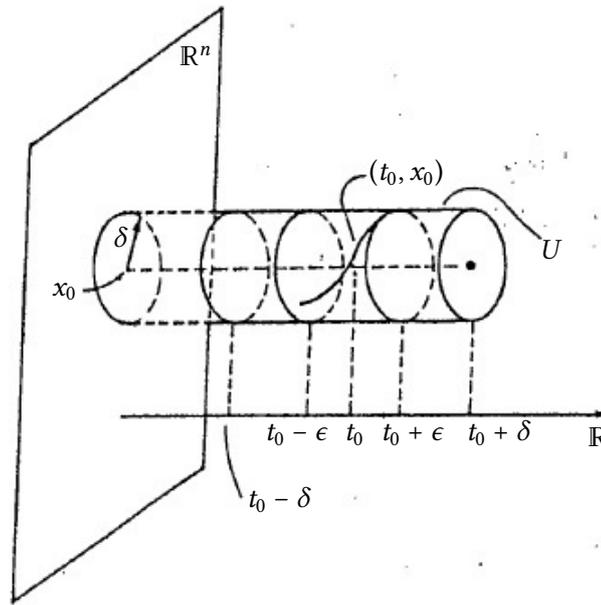


Figura 2.1: Teorema de Existência e Unicidade de Soluções.

lipschitziana relativamente à segunda variável em  $\bar{B} = \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)$ , isto é, existe  $K = K_\delta > 0$  tal que, para todo  $(t, x)$  e  $(t, y)$  em  $\bar{B}$ , temos

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon \leq \delta$  e considere  $\mathfrak{X} = C(I_\epsilon, B_\delta(x_0))$  o conjunto das curvas contínuas  $\varphi : I_\epsilon \rightarrow B_\delta(x_0)$  onde  $I_\epsilon = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| < \epsilon\}$  e  $\varphi(t_0) = x_0$ . Com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\epsilon} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|,$$

o espaço métrico  $(\mathfrak{X}, d)$  é completo (Lema A.1 do Apêndice A). Para cada  $t \in I_\epsilon$ , definimos o operador  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  tal que

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Como, por hipótese,  $f$  é contínua, então a integral existe. A curva  $F(\varphi)$  está bem definida, é contínua e  $F(\varphi)(t_0) = x_0$ . Para ver que  $F$  está bem definido, basta observar que

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \leq M|t - t_0| < M\epsilon \leq \delta$$

para  $\epsilon \leq \delta/M$ , ou seja,  $F(\varphi)(t) \in \bar{B}_\delta(x_0)$  para todo  $t \in I_\epsilon$ . Portanto  $F(\varphi) \in \mathfrak{X}$ . O iterado  $F^m : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  é uma contração para algum  $m \geq 1$ , isto é, existe  $0 \leq \lambda < 1$  tal que

$$d(F^m(\varphi_1), F^m(\varphi_2)) \leq \lambda d(\varphi_1, \varphi_2)$$

para todo  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  em  $\mathfrak{X}$ . Para isto, provemos por indução sobre  $n$  que

$$\|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)\| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

onde  $K$  é a constante de Lipschitz de  $f$  e  $t \in I_\epsilon$ . Para  $n = 0$  temos  $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq d(\varphi_1, \varphi_2)$ , que é óbvio pela definição da métrica. Suponhamos que a desigualdade seja válida para  $n = k$  e provemos que é válida para  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} \|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)\| &= \|F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)\| \leq \\ & \left| \int_{t_0}^t \|f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t K \|F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)\| ds \right| \leq \\ & K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^k |s - t_0|^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução, a desigualdade é válida para todo inteiro  $n$  não negativo. Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n \epsilon^n / n! = 0$  pois a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} K^n \epsilon^n / n!$  converge para  $e^{K\epsilon}$ . Logo, existe  $n_0$  inteiro positivo tal que  $K^{n_0} \epsilon^{n_0} / n_0! < 1$ , o que implica

$$d(F^m(\varphi_1)(t), F^m(\varphi_2)(t)) \leq \frac{K^m \epsilon^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2),$$

para algum  $m \geq n_0$ , ou seja,  $F^m$  é uma contração. Isto implica que existe um único ponto fixo de  $F$  (Lemas A.2 e A.3 do Apêndice A), isto é, existe uma única curva  $\varphi : I_\epsilon \rightarrow \bar{B}_\delta(x_0)$  com  $\varphi(t_0) = x_0$  tal que  $F(\varphi) = \varphi$ , ou seja,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

para todo  $t \in I_\epsilon$ . Essa curva  $\varphi : I_\epsilon \rightarrow B_\delta(x_0)$ , com  $\epsilon = \min\{\delta, \delta/M\}$ , é solução do problema de Cauchy  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  (Lema A.4 do Apêndice A). A segunda parte da demonstração consiste da unicidade de soluções. Sejam  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluções de (2.4). Seja  $\mathcal{I} = \{t \in I \cap J : \varphi(t) = \beta(t)\}$ . O conjunto  $\mathcal{I}$  é não vazio pois  $t_0 \in \mathcal{I}$  já que  $\varphi(t_0) = x_0 = \beta(t_0)$ .

O conjunto  $\mathcal{I}$  é fechado. De fato, seu complementar é aberto. Com efeito,  $\varphi - \beta$  é contínua em  $I \cap J$ . Dado  $t^*$  arbitrário no complementar de  $\mathcal{I}$  e supondo, sem perda de generalidade, que  $\varphi(t^*) - \beta(t^*) > 0$ , existe  $\eta > 0$  tal que  $\varphi(t) - \beta(t) > 0$  para todo  $t \in (t^* - \eta, t^* + \eta)$ , ou seja, o aberto  $(t^* - \eta, t^* + \eta)$  está contido no complementar de  $\mathcal{I}$ . Logo, o complementar de  $\mathcal{I}$  é aberto e, portanto,  $\mathcal{I}$  é fechado. Também temos que  $\mathcal{I}$  é aberto. De fato, seja  $t^* \in \mathcal{I}$  qualquer e  $x^* = \varphi(t^*) = \beta(t^*)$ . Para  $(t^*, x^*) \in U$  temos  $\epsilon > 0$  com as restrições dadas anteriormente tal que  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  tem um único ponto fixo. As curvas  $\varphi$  e  $\beta$  restritas ao intervalo  $(t^* - \epsilon, t^* + \epsilon)$  são pontos fixos de  $F$ , ou seja,  $\varphi(t) = \beta(t)$  para todo  $t \in (t^* - \epsilon, t^* + \epsilon)$  com

$$\varphi(t) = x^* + \int_{t^*}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \beta(t) = x^* + \int_{t^*}^t f(s, \beta(s)) ds.$$

Logo,  $(t^* - \epsilon, t^* + \epsilon)$  está contido em  $\mathcal{I}$  e, portanto,  $\mathcal{I}$  é aberto. Sendo  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{I}$  aberto e fechado, concluímos que  $\mathcal{I} = I \cap J$ , ou seja,  $\beta(t) = \varphi(t)$  para todo  $t \in I \cap J$ .  $\square$

A hipótese sobre a função  $f$  é crucial. Se  $f$  não for localmente lipschitziana relativamente à segunda variável não podemos garantir a unicidade da solução. No exemplo abaixo apresentamos uma função  $f$  que não é localmente lipschitziana relativamente à segunda variável e para a qual um determinado problema de Cauchy possui mais do que uma solução.

**Exemplo 2.3.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t, x) = x^{2/3}$  e o problema de Cauchy  $x' = x^{2/3}$ ,  $x(0) = 0$ .

A função  $f$  não é localmente lipschitziana relativamente à segunda variável. De fato, tome  $x = 0$  e  $y = 1/n$  para  $n$  inteiro positivo. Assim  $\|f(t, x) - f(t, y)\| = n^{-2/3}$  e  $\|x - y\| = n^{-1}$ . Dada qualquer constante  $K > 0$ , é possível escolher um inteiro positivo  $n_0$  tal que  $n_0^{-2/3} > K n_0^{-1}$ . Para isto, basta tomar  $n_0^{1/3} > K$ , ou seja,  $n_0 > K^3$ . Logo, dado  $K > 0$  qualquer, existe  $n_0$  inteiro positivo tal que  $\|f(t, x) - f(t, y)\| > K \|x - y\|$  para  $(t, x) = (t, 0)$  e  $(t, y) = (t, 1/n)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Portanto, concluímos que a função  $f$  não é localmente lipschitziana relativamente à segunda variável. A curva diferenciável  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = (t/3)^3$  é solução de  $x' = x^{2/3}$ ,  $x(0) = 0$ . Porém, a curva identicamente nula  $\varphi \equiv 0$  também é solução de  $x' = x^{2/3}$ ,  $x(0) = 0$ . Dessa forma, não há unicidade de curva  $\varphi$  solução com  $\varphi(0) = 0$ .

## 2.2 Soluções Máximas

**Proposição 2.2.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ . Suponha que para cada  $(t_0, x_0) \in U$ , exista uma única solução de (2.4), em um intervalo aberto  $I = I(t_0, x_0)$ . Então, existe uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$  do problema de Cauchy, definida em um intervalo maximal  $M(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ , ou seja, toda solução  $\beta$  do problema de Cauchy em um intervalo  $I$  satisfaz  $I \subset M(t_0, x_0)$  e  $\beta = \varphi|_I$ .*

*Demonstração.* Basta tomar  $M(t_0, x_0) = \cup I_\psi$  onde  $I_\psi$  é o intervalo de definição de alguma solução  $\psi$  do problema de Cauchy  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Defina  $\varphi : M(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(t) = \psi(t)$  se  $t \in I_\psi$ . Veja que  $\varphi$  está bem definida, ou seja, não depende da solução  $\psi$  escolhida. De fato, seja  $\tilde{\psi}$  outra solução do problema de Cauchy local. Provaremos que o conjunto  $C = \{t \in I_\psi \cap I_{\tilde{\psi}} \mid \psi(t) = \tilde{\psi}(t)\}$  é aberto e fechado. Como  $C \neq \emptyset$  pois  $t_0 \in C$ , então  $C = I_\psi \cap I_{\tilde{\psi}}$ , ou seja, a solução  $\tilde{\psi}$  coincide com a solução  $\psi$  nesta intersecção, garantindo que  $\varphi$  está bem definida. O conjunto  $C$  é fechado pois o seu complementar  $C^c = \{t \in I_\psi \cap I_{\tilde{\psi}} \mid \psi(t) \neq \tilde{\psi}(t)\}$  é aberto. Com efeito,  $\psi - \tilde{\psi}$  é contínua em  $I_\psi \cap I_{\tilde{\psi}}$  pois  $\psi$  e  $\tilde{\psi}$  são contínuas em seus respectivos intervalos de definição. Dado  $t^* \in C^c$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\psi(t^*) - \tilde{\psi}(t^*) > 0$ . Assim, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\psi(t) - \tilde{\psi}(t) > 0$  para todo  $t \in (t^* - \epsilon, t^* + \epsilon)$ . Dessa forma,  $(t^* - \epsilon, t^* + \epsilon) \subset C^c$  onde  $t^*$  é escolhido arbitrariamente em  $C^c$ . Portanto  $C^c$  é aberto e, assim,  $C$  é fechado. Para verificarmos que  $C$  é aberto, basta ver que todo  $t'$  em  $C$  pertence a um intervalo aberto  $I(t', \psi(t')) \cap (I_\psi \cap I_{\tilde{\psi}})$  contido em  $C$ .  $\square$

**Definição 2.5.** *Chama-se solução máxima de  $x' = f(t, x)$  a toda solução  $\varphi$  definida em um intervalo  $I$ , denominado intervalo máximo de  $\varphi$ , tal que se  $\beta$  é uma outra solução em um intervalo  $J$  com  $J \supset I$  e  $\varphi = \beta|_I$  então  $I = J$ . Em outras palavras,  $\varphi$  é solução máxima se não admite extensão que também é solução da equação.*

A Proposição 2.2 mostra que se para cada ponto  $(t_0, x_0)$  a equação (2.3) tem uma única solução local então também tem uma única solução máxima por  $(t_0, x_0)$ .

**Teorema 2.2.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ , localmente lipschitziana relativamente à segunda variável. Se  $\varphi$  é uma solução máxima única de (2.3) definida em  $(\omega_-, \omega_+)$ , então a aplicação dada por  $g(t) = (t, \varphi(t))$  é tal que  $\lim_{t \rightarrow \omega_\pm} g(t) \in \partial U$ , ou seja, para todo compacto  $K \subset U$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $\omega_\pm$  tal que  $g(t) \notin K$  para  $t \in V$ .*

*Demonstração.* Seja  $K \subset U$  um compacto e  $t_n$  uma sequência que converge para  $\omega_+$ . Suponha que  $g(t_n) \in K$ . Seja  $t'_n$  uma subsequência de  $t_n$  tal que  $g(t'_n)$  é convergente, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} g(t'_n) =$

$(\omega_+, x_0) \in K$ . Para  $(t_0, x_0) = (\omega_+, x_0)$  considere  $B = B_\epsilon(t_0) \times B_\epsilon(x_0)$  dado na demonstração do Teorema 2.1 onde  $\epsilon = \min\{\delta, \delta/M\}$  para  $M > \sup_B \|f\|$ . Seja  $V = B_{\epsilon/3}(t_0) \times B_{\epsilon/3}(x_0)$ . Para todo  $(t_1, x_1) \in V$ , existe uma solução definida em  $I_{\epsilon_1}(t_1)$  com  $\epsilon_1 = \epsilon/2$  (pelo Teorema 2.1). Tomando  $t_1 = t'_n$  para  $n$  suficientemente grande de modo que  $g(t'_n) \in V$  temos que  $\varphi$  pode ser prolongada até  $t'_n + \epsilon/2 > t_0 = \omega_+$ , o que é uma contradição. De modo análogo, procede-se para  $\omega_-$ .  $\square$

O Teorema 2.2 diz que quando  $t$  se aproxima do bordo do intervalo maximal então o gráfico da curva solução  $\varphi$  se aproxima do bordo de  $U$ , porém, não é garantido que exista o limite da solução máxima  $\varphi$  quando  $t \rightarrow \omega_\pm$ , mesmo que  $\omega_\pm$  seja finito. Agora, se  $f$  é limitada em  $U$  e se  $\omega_\pm$  é finito, então o limite existe.

## 2.3 Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais

Nesta seção consideramos equações diferenciais que independem de  $t$  dadas por

$$x' = X(x) \quad (2.5)$$

onde  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^r$  em um aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  com  $1 \leq r \leq \infty$ . A aplicação  $X$  é chamada de *campo vetorial* de classe  $C^r$ . As soluções da equação (2.5), isto é, as aplicações diferenciáveis  $\varphi : I \rightarrow \Delta$ , definidas em um intervalo da reta, tais que

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)) \quad (2.6)$$

para todo  $t \in I$ , são chamadas *trajetórias* da equação (2.5) ou *curvas integrais* de  $X$ .

**Definição 2.6.** Um ponto  $x \in \Delta$  é chamado *ponto singular* de  $X$  se  $X(x) = 0$  e *ponto regular* de  $X$  se  $X(x) \neq 0$ .

**Proposição 2.3.** Um ponto  $x$  é *singular* de  $X$  se, e somente se, a curva constante dada por  $\varphi(t) = x$  é solução da equação (2.5) para  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $x$  seja ponto singular de  $X$ . Como  $\varphi(t) = x$  é tal que  $\varphi'(t) = 0$  e  $X(\varphi(t)) = X(x) = 0$ , para todo  $t \in (-\infty, +\infty)$ , então a curva  $\varphi$  é solução da equação (2.5). Reciprocamente, se a curva  $\varphi$  dada por  $\varphi(t) = x$ , para todo  $t \in (-\infty, +\infty)$ , é solução da equação (2.5), então  $X(x) = X(\varphi(t)) = \varphi'(t) = 0$  e isto implica que  $x$  é ponto singular de  $X$ .  $\square$

Uma trajetória  $\varphi : I \rightarrow \Delta$  da equação (2.5) chama-se *máxima* se para toda trajetória  $\psi : J \rightarrow \Delta$  tal que  $I \subset J$  e  $\varphi = \psi|_I$  então  $I = J$  e conseqüentemente  $\varphi = \psi$ . O intervalo  $I$  é chamado de *intervalo máximo*. Geometricamente, é fácil ver que  $\varphi$  é uma trajetória da equação (2.5) se, e somente se, o seu vetor velocidade  $\varphi'$  em  $t$  coincide com o valor do campo  $X$  em  $\varphi(t)$ .

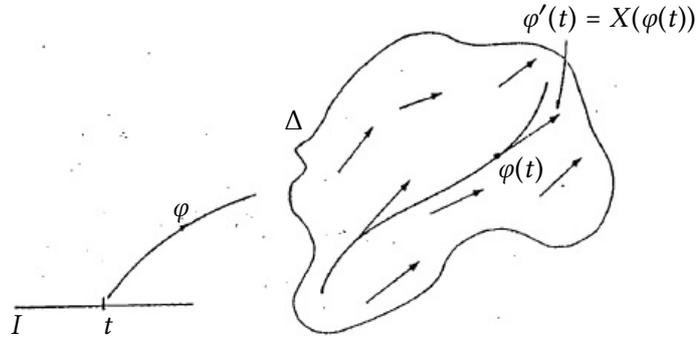


Figura 2.2: Trajetória do campo de vetores.

Uma equação diferencial do tipo (2.5) é chamada *autônoma*. Para colocá-la no contexto da equação (2.3), definimos  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $f(t, x) = X(x)$  onde  $U = \mathbb{R} \times \Delta$ . Por outro lado, toda equação não autônoma  $x' = f(t, x)$  em  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ , pode ser considerada como uma equação autônoma  $z' = F(z)$  em  $U$  onde  $z = (s, x)$  e  $F(z) = (1, f(z))$ . Existe uma correspondência biunívoca entre as soluções da equação não autônoma  $x' = f(t, x)$  e as soluções da equação autônoma associada  $z' = F(z)$ .

**Teorema 2.3.** *Para cada  $x \in \Delta$  existe um intervalo aberto  $I_x$  onde está definida a única solução máxima  $\varphi_x$  de (2.5) tal que  $\varphi_x(0) = x$ . Se  $y = \varphi_x(t)$  e  $t \in I_x$  então  $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$  e  $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$  para todo  $s \in I_y$ . O conjunto  $D = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\phi(t, x) = \varphi_x(t)$  é de classe  $C^r$ .*

A aplicação  $\phi : D \rightarrow \Delta$  chama-se *fluxo gerado pelo campo  $X$* . Note que  $\phi(0, x) = x$  e  $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ . Se  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x$ , o fluxo gerado por  $X$  é um fluxo de classe  $C^r$  em  $\Delta$ . Entretanto, muitas vezes  $I_x \neq \mathbb{R}$ . Por este motivo o fluxo gerado por  $X$  é chamado frequentemente de *fluxo local*.

**Corolário 2.1.** *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^r$  em  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  com  $r \geq 1$ . Se  $x \in \Delta$  e  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$  é tal que  $\omega_+(x) < +\infty$  (respectivamente  $\omega_-(x) > -\infty$ ) então  $\varphi_x(t)$  tende a  $\partial\Delta$  quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$  (respectivamente  $t \rightarrow \omega_-(x)$ ), isto é, para todo compacto  $K \subset \Delta$  existe  $\epsilon = \epsilon(K) > 0$  tal que se  $t \in [\omega_+(x) - \epsilon, \omega_+(x)]$  (respectivamente  $t \in [\omega_-(x), \omega_-(x) + \epsilon]$ ) então  $\varphi_x(t) \notin K$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista um compacto  $K \subset \Delta$  e uma sequência  $t_n \rightarrow \omega_+(x) < +\infty$  tal que  $\varphi_x(t_n) \in K$  para todo  $n$ . Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que  $\varphi_x(t_n)$  converge a um ponto  $x_0 \in K$ . Sejam  $b > 0$  e  $\alpha > 0$  tais que  $B_b \times I_\alpha \subset D$ , onde  $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| \leq b\} \subset \Delta$  e  $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \alpha\}$ . Pelo Teorema (2.3),  $D$  é aberto. Ainda,  $\varphi_x(t_n + s)$  está definido para  $s < \alpha$  e coincide com  $\varphi_x(s)$  para  $n$  suficientemente grande, onde  $y = \varphi_x(t_n)$ . Mas então  $t_n + s > \omega_+(x)$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Corolário 2.2.** *Se  $\Delta = \mathbb{R}^n$  e  $|X(x)| < c$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  então  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\omega_+(x) < +\infty$  para algum  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como  $|x - \varphi_x(t)| \leq ct < c\omega_+(x)$ , resulta que para todo  $x \in [0, \omega_+(x))$ ,  $\varphi_x(t)$  está na bola fechada de centro  $x$  e raio  $c\omega_+(x)$ , o que contradiz o Corolário (2.1). Logo  $\omega_+(x) = +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Do mesmo modo prova-se que  $\omega_-(x) = -\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Corolário 2.3.** *Se  $\varphi$  é uma solução de (2.5) definida no intervalo máximo  $I$  e  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  para  $t_1 \neq t_2$  então  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t + c) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $c = t_2 - t_1$ . Isto é,  $\varphi$  é periódica.*

*Demonstração.* Definindo  $\psi : [t_2, t_2 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\psi(t) = \varphi(t - c)$ , tem-se  $\psi'(t) = \varphi'(t - c) = X(\varphi(t - c)) = X(\psi(t))$  e  $\psi(t_2) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ . Pela unicidade de soluções, tem-se  $[t_2, t_2 + c] \subset I$  e  $\varphi(t) = \varphi(t + c)$  se  $t \in [t_1, t_2]$ . Prosseguindo assim, obtemos  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t + c) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

O conjunto  $\gamma_p = \{\phi(t, p) : t \in I_p\}$ , isto é, a imagem da trajetória de  $X$  pelo ponto  $p$ , chama-se órbita de  $X$  pelo ponto  $p$ . Observe que  $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_p = \gamma_q$ . De fato, se  $q \in \gamma_p$  então  $q = \phi(t_1, p)$ ,  $\phi(t, q) = \phi(t + t_1, p)$  e  $I_p - t_1 = I_q$ . Agora, se  $\gamma_p = \gamma_q$ , como  $q \in \gamma_q$ , então  $q \in \gamma_p$ . Em outros termos, duas órbitas de  $X$  ou coincidem ou são disjuntas. Isto é,  $\Delta$  fica decomposto em uma união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada curva ser: (i) imagem biunívoca de um intervalo de  $\mathbb{R}$ ; (ii) um ponto; (iii) difeomorfa a um círculo. No caso em que  $p \in \gamma_p$ , a órbita chama-se *ponto singular*. No caso em que é difeomorfa a um círculo, a órbita chama-se *fechada* ou *periódica*.

**Teorema 2.4.** *Se  $\varphi$  é uma solução máxima de (2.5) em  $I$  então ocorre uma única das seguintes alternativas: (i)  $\varphi$  é injetiva; (ii)  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é constante; (iii)  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é periódica, isto é, existe  $\tau > 0$  tal que  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  se  $|t_1 - t_2| < \tau$ .*

*Demonstração.* Se  $\varphi$  não é injetiva,  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  para  $t_1 \neq t_2$ . Pelo Corolário (2.3),  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t + c) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $c = t_2 - t_1 \neq 0$ . O conjunto  $C = \{c \in \mathbb{R} : \varphi(t + c) = \varphi(t), \forall t \in I\}$

é um subgrupo aditivo fechado de  $\mathbb{R}$ . De fato, se  $c, d \in C$  então  $c + d, -c \in C$  pois  $\varphi(t + c + d) = \varphi(t + c) = \varphi(t)$  e  $\varphi(t - c) = \varphi(t - c + c) = \varphi(t)$  e, portanto,  $C$  é um subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ . Por outro lado, se  $c_n \in C$  e  $c_n \rightarrow c$  temos que  $c \in C$  pois  $\varphi(t + c) = \varphi(t + \lim c_n) = \varphi(\lim(t + c_n)) = \lim \varphi(t + c_n) = \lim \varphi(t) = \varphi(t)$ . Pelo Lema, todo subgrupo aditivo  $C$  de  $\mathbb{R}$  ou é descrito na forma  $\tau\mathbb{Z}$ ,  $\tau \geq 0$ , ou  $C$  é denso em  $\mathbb{R}$ . Como  $C \neq \emptyset$  e é fechado, segue que  $C = \mathbb{R}$  ou  $C = \tau\mathbb{Z}$ ,  $\tau > 0$ . Cada uma dessas alternativas correspondem, respectivamente, a (ii) e (iii).  $\square$

O conjunto aberto  $\Delta$  munido da decomposição em órbitas de  $X$ , chama-se retrato de fase de  $X$ . As órbitas são orientadas nos sentidos das trajetórias do campo  $X$  e os pontos singulares são munidos da orientação trivial. O sentido positivo de percurso será indicado por meio de setas nas figuras.

**Exemplo 2.4.** *Sistemas bidimensionais simples.*

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

com  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  para  $i, j = 1, 2$  e  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ . Escrevendo na forma matricial para simplificar notações temos

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0, \quad (2.7)$$

onde  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

A condição  $\det A \neq 0$  garante que a origem  $(0, 0)$  é o único ponto singular do campo  $X(x) = Ax$ . Neste caso, o sistema é chamado de *simples*. A função  $\varphi \equiv 0$  identicamente nula é solução do sistema. O polinômio característico da matriz  $A$  é  $\lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A$  sendo  $\text{tr}A = a_{11} + a_{22}$  o traço da matriz  $A$ . Os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que são as raízes do polinômio característico, são dados por

$$\lambda_i = \frac{\text{tr}A \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

e assim temos três casos a considerar: os autovalores (não nulos) são reais e distintos  $[(\text{tr}A)^2 > 4 \det A]$ , os autovalores são complexos conjugados  $[(\text{tr}A)^2 < 4 \det A]$  e os autovalores são reais e iguais  $[(\text{tr}A)^2 = 4 \det A]$ . Vamos à análise de cada caso.

- **Caso 1.** Os autovalores são reais e distintos:  $(\text{tr}A)^2 - 4 \det A > 0$ .

Sabemos, conforme (BOLDRINI et al., 1986), que existe uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , formada por autovetores de  $A$ , de tal forma que

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

em que  $[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$  para alguma matriz  $P$  invertível. Usando a mudança de coordenadas  $x = Py$ , a equação  $x' = Ax$  torna-se  $y' = [A]_{\mathcal{B}}y$ , onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$ . Este novo sistema tem a vantagem de estar *desacoplado*. Assim, suas órbitas serão dadas por  $\gamma_{(y_1, y_2)} = \{\phi(t, y_1, y_2) : t \in \mathbb{R}\}$  onde  $\phi(t, y_1, y_2) = (y_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 e^{\lambda_2 t})$ . Para retornar à variável original basta considerar  $y = P^{-1}x$ , ou seja,  $(y_1, y_2)^T = P^{-1}(x_1, x_2)^T$ . Sejam  $E_1$  e  $E_2$  os eixos gerados pelos autovetores  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Os autovalores podem ter o mesmo sinal ou sinais contrários.

- (i) Nó atrator:  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

É fácil notar que  $\phi(t, y_1, y_2) \rightarrow (0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$  para quaisquer  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , exceto para a origem  $(0, 0)$ , que permanece fixa. Quando  $t \rightarrow -\infty$  as trajetórias ficam ilimitadas. Se  $y_1 \neq 0$ , a reta tangente à órbita tende à linha  $E_1$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . De fato, basta ver que

$$\frac{y_2 e^{\lambda_2 t}}{y_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{y_2}{y_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty,$$

já que  $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ . Se  $y_1 = 0$  as órbitas são semirretas de  $E_2$  e se  $y_2 = 0$  as órbitas são semirretas de  $E_1$ . O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ), é mostrado na Figura 2.3. As setas nas órbitas indicam o sentido do percurso com  $t$  crescente. Lembre que o termo órbita é usado para a imagem de uma trajetória e não para o gráfico desta trajetória.

- (ii) Nó repulsor:  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

A análise é similar à anterior, porém  $\phi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e as trajetórias são ilimitadas quando  $t \rightarrow +\infty$ . No retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ), mostrado na Figura 2.4, as setas nas órbitas têm orientação trocadas.

- (iii) Sela:  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

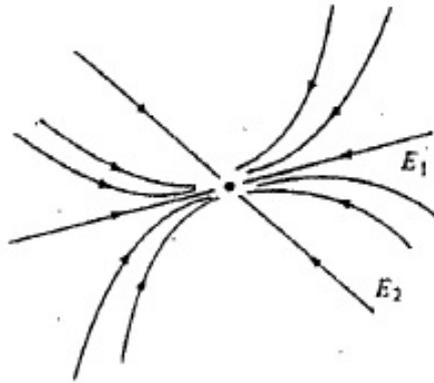


Figura 2.3: Singularidade do tipo nó atrator.

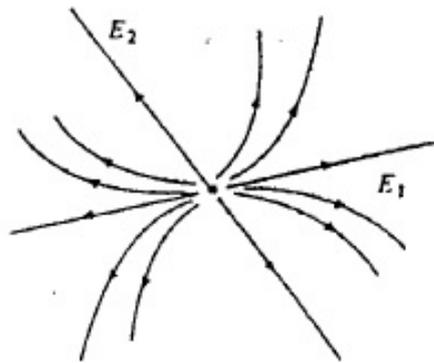


Figura 2.4: Singularidade do tipo nó repulsor.

As órbitas que passam por pontos de  $E_1$  quando  $y_2 = 0$  (respectivamente  $E_2$  quando  $y_1 = 0$ ) permanecem nesta linha e tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$  (respectivamente  $t \rightarrow -\infty$ ). Se  $y_1, y_2 \neq 0$  as trajetórias ficam ilimitadas quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . A componente segundo  $E_1$  (respectivamente  $E_2$ ) tende a  $(0, 0)$  (respectivamente ilimitada) quando  $t \rightarrow +\infty$ . A componente segundo  $E_2$  (respectivamente  $E_1$ ) tende a  $(0, 0)$  (respectivamente ilimitada) quando  $t \rightarrow -\infty$ . O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ), é mostrado na Figura 2.5.

- **Caso 2.** Os autovalores são complexos conjugados:  $(\text{tr}A)^2 - 4 \det A < 0$ .

Sejam  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ . Nesse caso, sabemos, conforme (BOLDRINI et al., 1986), que existe um vetor  $u + iv$  de  $\mathbb{C}^2$  tal que  $A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$  e, além disso,  $\mathcal{B} = \{u, v\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

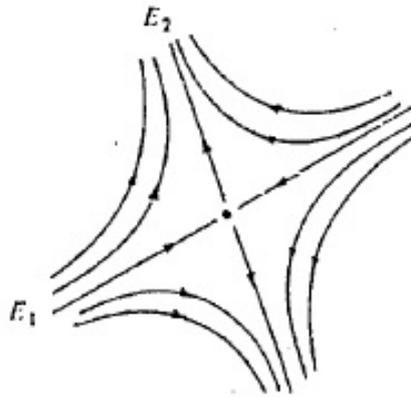


Figura 2.5: Singularidade do tipo sela.

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as partes real e imaginária, respectivamente, dos autovalores de  $A$ . Da mesma forma como feito no caso 1, consideramos  $x = Py$  para alguma matriz  $P$  invertível, e o sistema (2.7) pode ser escrito como  $y' = [A]_{\mathcal{B}}y$  onde  $y = (y_1, y_2)$ . Usando coordenadas polares da mudança  $y_1 = r \cos \theta$ ,  $y_2 = r \sin \theta$ , reescrevemos o sistema  $y' = [A]_{\mathcal{B}}y$  como

$$\begin{cases} r' &= \alpha r \\ \theta' &= \beta \end{cases}$$

cuja solução é dada por  $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$ ,  $\theta(t) = \theta_0 + \beta t$ . Assim, suas órbitas serão dadas por  $\gamma_{(y_1, y_2)} = \{\phi(t, y_1, y_2) : t \in \mathbb{R}\}$  onde  $\phi(t, y_1, y_2) = e^{\alpha t}(y_1 \cos \beta t - y_2 \sin \beta t, y_2 \cos \beta t + y_1 \sin \beta t)$ . Para retornar à variável original basta considerar  $y = P^{-1}x$ , ou seja,  $(y_1, y_2)^T = P^{-1}(x_1, x_2)^T$ .

(i) Centro:  $\alpha = 0$ .

Todas as órbitas são elipses, exceto a órbita dada pela trajetória nula. Basta ver que  $\phi(t, y_1, y_2) = (y_1 \cos \beta t - y_2 \sin \beta t, y_2 \cos \beta t + y_1 \sin \beta t)$ . O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ) com  $\beta > 0$ , é mostrado na Figura 2.6.

(ii) Foco atrator:  $\alpha < 0$ .

Todas as órbitas, exceto a dada pela trajetória nula, tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , espiralando em torno de  $(0, 0)$ . Basta observar que, nas coordenadas polares,  $r(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e  $\beta(t) \rightarrow +\infty$  para  $\beta > 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ) com  $\beta > 0$ , é mostrado na Figura 2.7.

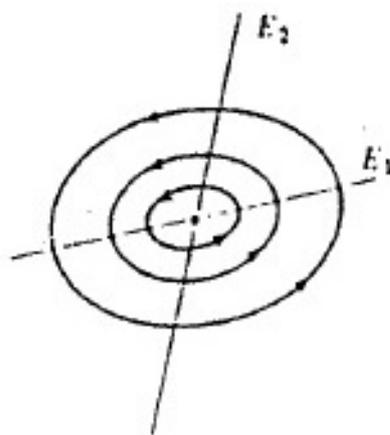


Figura 2.6: Singularidade do tipo centro.

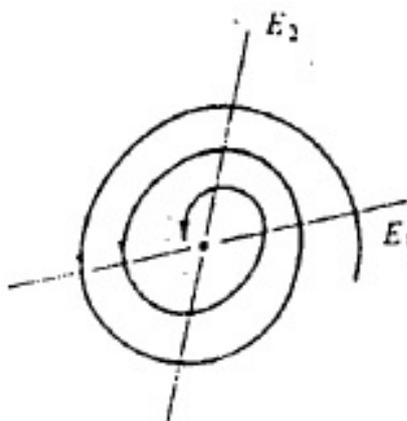


Figura 2.7: Singularidade do tipo foco atrator.

(iii) Foco repulsor:  $\alpha > 0$ .

Todas as órbitas, exceto a dada pela trajetória nula, tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , espiralando em torno de  $(0, 0)$ . Basta observar que, nas coordenadas polares,  $r(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e  $\beta(t) \rightarrow -\infty$  para  $\beta > 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ) com  $\beta > 0$ , é mostrado na Figura 2.8.

- **Caso 3.** Os autovalores são reais e iguais:  $(\text{tr}A)^2 - 4 \det A = 0$ .

Seja  $\lambda$  o autovalor de  $A$ . Distinguímos dois casos: o primeiro quando a multiplicidade geométrica de  $\lambda$  for dois, ou seja, o núcleo de  $A - \lambda I$  é bidimensional, e o segundo quando a multiplicidade geométrica de  $\lambda$  for um, ou seja, o núcleo de  $A - \lambda I$  é unidimensional.

(i) Nó impróprio atrator com  $\text{Nu}(A - \lambda I)$  bidimensional:  $\lambda < 0$ .

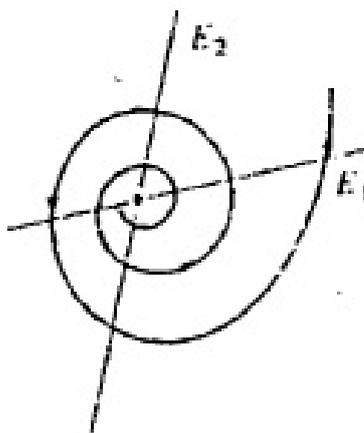


Figura 2.8: Singularidade do tipo foco repulsor.

Nesse caso, podemos encontrar uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  formada por autovetores de tal forma que

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

em que  $[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$  para alguma matriz  $P$  invertível. Usando a mudança de coordenadas  $x = Py$ , a equação  $x' = Ax$  torna-se  $y' = [A]_{\mathcal{B}}y$ , onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$ . Assim, suas órbitas serão dadas por  $\gamma_{(y_1, y_2)} = \{\phi(t, y_1, y_2) : t \in \mathbb{R}\}$  onde  $\phi(t, y_1, y_2) = (y_1 e^{\lambda t}, y_2 e^{\lambda t})$  com  $\lambda < 0$ . Para retornar à variável original basta considerar  $y = P^{-1}x$ , ou seja,  $(y_1, y_2)^T = P^{-1}(x_1, x_2)^T$ . Todas as órbitas, exceto a dada pela trajetória nula, são semirretas cujas trajetórias tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Quando  $t \rightarrow -\infty$  as trajetórias ficam ilimitadas. O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ), é mostrado na Figura 2.9.

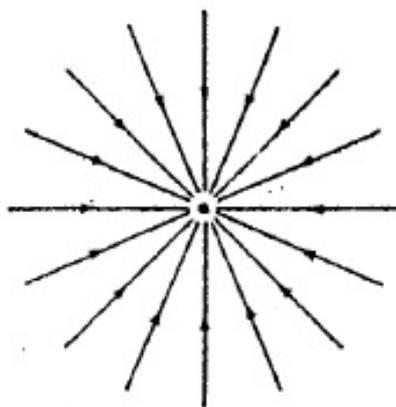


Figura 2.9: Singularidade do tipo nó impróprio atrator radial.

(ii) Nó impróprio repulsor com  $\text{Nu}(A - \lambda I)$  bidimensional:  $\lambda > 0$ .

De modo análogo ao caso anterior, as órbitas serão dadas por  $\gamma_{(y_1, y_2)} = \{\phi(t, y_1, y_2) : t \in \mathbb{R}\}$  onde  $\phi(t, y_1, y_2) = (y_1 e^{\lambda t}, y_2 e^{\lambda t})$  com  $\lambda > 0$ . Para retornar à variável original basta considerar  $y = P^{-1}x$ , ou seja,  $(y_1, y_2)^T = P^{-1}(x_1, x_2)^T$ . Todas as órbitas, exceto a dada pela trajetória nula, são semirretas cujas trajetórias tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Quando  $t \rightarrow +\infty$  as trajetórias ficam ilimitadas. O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ), é mostrado na Figura 2.10.

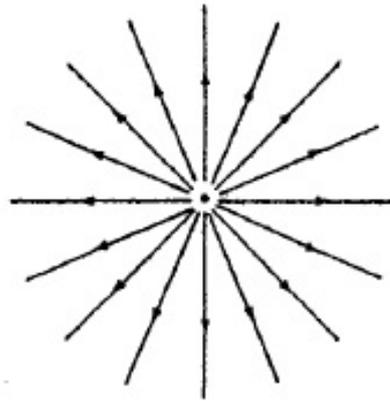


Figura 2.10: Singularidade do tipo nó impróprio repulsor radial.

(iii) Nó impróprio atrator com  $\text{Nu}(A - \lambda I)$  unidimensional:  $\lambda > 0$ .

Nesse caso, podemos encontrar uma base  $\mathcal{B} = \{u, v\}$  de  $\mathbb{R}^2$  formada por vetores obtidos a partir de  $Au = \lambda u$  e  $Av = u + \lambda v$ , de tal forma que

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

em que  $[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$  para alguma matriz  $P$  invertível. Usando a mudança de coordenadas  $x = Py$ , a equação  $x' = Ax$  torna-se  $y' = [A]_{\mathcal{B}}y$ , onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$ . Assim, suas órbitas serão dadas por  $\gamma_{(y_1, y_2)} = \{\phi(t, y_1, y_2) : t \in \mathbb{R}\}$  onde  $\phi(t, y_1, y_2) = ((y_1 + y_2 t)e^{\lambda t}, y_2 e^{\lambda t})$  com  $\lambda < 0$ . Para retornar à variável original basta considerar  $y = P^{-1}x$ , ou seja,  $(y_1, y_2)^T = P^{-1}(x_1, x_2)^T$ . Todas as órbitas, exceto a dada pela trajetória nula, possuem trajetórias que tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Quando  $t \rightarrow -\infty$  as trajetórias ficam ilimitadas. O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ), é mostrado na Figura 2.11.

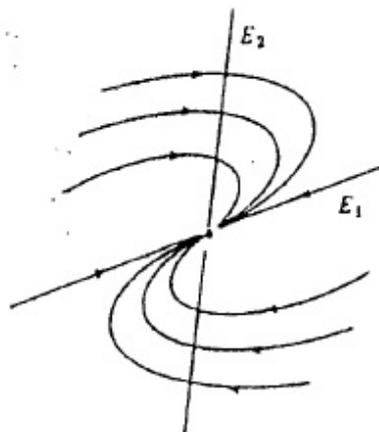


Figura 2.11: Singularidade do tipo nó impróprio atrator.

(iv) Nó impróprio repulsor com  $\text{Nu}(A - \lambda I)$  unidimensional:  $\lambda < 0$ .

De modo análogo ao caso anterior, as órbitas serão dadas por  $\gamma_{(y_1, y_2)} = \{\phi(t, y_1, y_2) : t \in \mathbb{R}\}$  onde  $\phi(t, y_1, y_2) = ((y_1 + y_2 t)e^{\lambda t}, y_2 e^{\lambda t})$  com  $\lambda > 0$ . Para retornar à variável original basta considerar  $y = P^{-1}x$ , ou seja,  $(y_1, y_2)^T = P^{-1}(x_1, x_2)^T$ . Todas as órbitas, exceto a dada pela trajetória nula, possuem trajetórias que tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Quando  $t \rightarrow +\infty$  as trajetórias ficam ilimitadas. O retrato de fase, considerado na variável original  $x$  ( $y = P^{-1}x$ ), é mostrado na Figura 2.12.

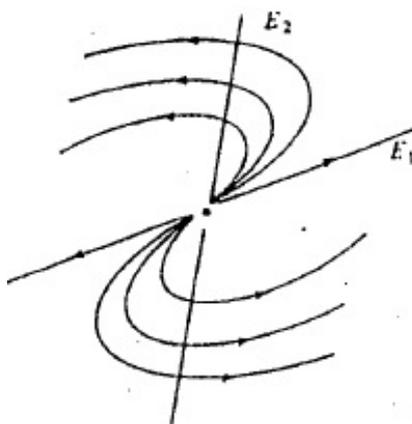


Figura 2.12: Singularidade do tipo nó impróprio repulsor.

## Capítulo 3

# Epidemiologia e Modelagem

Epidemiologia, cujo significado etimológico deriva do grego *e*pi - sobre, *demo* - população e *logos* - estudo, é definida, segundo a Organização Mundial da Saúde, (OMS), como sendo o estudo da distribuição e determinantes de estados ou eventos relacionados à saúde (particularmente doenças) e a aplicação desses estudos ao controle de doenças e outros problemas de saúde. Tendo como princípio básico o entendimento de que a disseminação de doenças entre as pessoas não se dá ao acaso, a epidemiologia, aliada a outras áreas do conhecimento, tais como: Matemática, Ciências Biológicas e Ciências Sociais, tem como ramos de atuação (PEREIRA, 2001):

- Ensino e pesquisa em saúde;
- Descrição das condições de saúde da população;
- Investigação dos fatores determinantes da situação de saúde;
- Avaliação do impacto das ações implementadas;

Para que percebamos a importância da epidemiologia na atualidade, estudaremos neste capítulo um pouco do contexto histórico dessa ciência, sua relação com a matemática e alguns dos principais pontos sobre modelagem.

### 3.1 Contexto Histórico da Epidemiologia

Para que a humanidade alcançasse o status de evolução percebido nos dias de hoje, foram necessários diversos catalizadores ao longo da história. Embora citamos guerras, impérios e

crenças como pilares dessa mudança evolutiva, não podemos esquecer da importante contribuição das grandes epidemias ou pandemias nessa marcha, pois as tensões geradas sobre a população motivaram estudos e ações para preservação da vida.

Os primeiros registros de um surto epidêmico datam do verão de 430 a.C. na cidade de Atenas, berço da civilização grega, relatados pelo historiador Tucídides (460a.C. - 395a.C.) em sua obra *História da Guerra do Peloponeso*. A Peste de Atenas, como ficou conhecida, ocasionou, segundo os próprios relatos de Tucídides, um quadro de desespero nos atenienses, gerando grandes confusões de cunho religioso, pois o modo de pensar da época sugeria que o acometimento das enfermidades pela população era na verdade uma punição dos deuses em retaliação à Guerra do Peloponeso. Contrariando essa crença vigente, o médico grego Hipócrates (460a.C. - 370a.C.), através de suas observações sobre o processo de adoecimento dos indivíduos, relatadas nas obras *Tratado dos ares, das águas e dos lugares* e *Tratado do prognóstico e aforismos*, afastou-se das teorias envolvendo o sobrenatural e introduziu o conceito de que fatores ambientais influenciavam na causa de doenças. Esse método de estudo marcou o início formal da epidemiologia e de todas as contribuições que dela surgiram (SOUZA GOMES, 2015).

No decorrer dos séculos seguintes várias epidemias e também pandemias assolaram a humanidade, dentre as quais podemos destacar: a Peste Negra que nos anos 1347 a 1351 vitimou cerca de um quarto da população europeia; a Epidemia de Varíola que reduziu o povo Asteca em três quartos de seu total no ano de 1520; a Grande Praga de Londres que matou cerca de 68 mil pessoas apenas no ano de 1665, (RAMON, 2011). Na segunda metade do século XIX, a epidemiologia sofreu uma revolução através dos estudos pioneiros do médico e sanitarista britânico John Snow (1813 - 1858) sobre a epidemia de cólera em Londres nos anos 1849 a 1854. John Snow, que futuramente será conhecido como "Pai da Epidemiologia", realizou um trabalho extensivo e meticuloso de investigação científica no qual pode concluir que o risco de infecção por cólera estava relacionado ao consumo de água proveniente de uma determinada companhia, (BONITA; BEAGLEHOLE; KJELLSTRÖM, 2010).

A abordagem epidemiológica que compara os coeficientes (ou taxas) de doenças em subgrupos populacionais tornou-se uma prática comum no final do século XIX e início do século XX. A sua aplicação foi inicialmente feita visando o controle de doenças transmissíveis e, posteriormente, no estudo das relações entre condições ou agentes ambientais e doenças específicas. Na segunda metade do século XX, esses métodos foram aplicados para doenças crônicas não transmissíveis tais como doença cardíaca e câncer, sobretudo nos países industrializados. A

partir da metade do século XX, o avanço da computação trouxe um benefício imenso a epidemiologia, uma vez que tornou-se mais simples e ágil a tabulação dos dados coletados, além da maior disponibilidade de testes mais precisos em seus resultados. (BONITA; BEAGLEHOLE; KJELLSTRÖM, 2010).

## 3.2 Epidemiologia Matemática

Com o avanço nos estudos gerados em torno da propagação de doenças sobre uma população, muitos modelos de previsão ou estimativa foram criados na tentativa de elucidar a dinâmica de uma epidemia ou mesmo basear cientificamente ações de prevenção. Neste contexto nasce uma área da ciência denominada Epidemiologia Matemática, que propõe modelos que possam ajudar a traçar políticas de controle dessas doenças.

No ano de 1760, o matemático suíço Daniel Bernoulli (1700-1782) publicou sua obra *“Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite verole, et des avantages de l’inoculation pour la prévenir”* com o objetivo de influenciar políticas públicas de saúde em sua época. Esse trabalho foi o primeiro a utilizar ferramentas matemáticas para tentar entender as dinâmicas de doenças infecciosas. Já no ano de 1798, o economista britânico Thomas Robert Malthus (1766-1834) publicou o livro *“Um ensaio sobre o princípio da população na medida em que afeta o melhoramento futuro da sociedade, com notas sobre as especulações de Mr. Godwin, M. Condorcet e outros escritores”* que utilizava modelos matemáticos como princípio fundamental para a hipótese de que as populações humanas crescem em progressão geométrica, além de estudar a possibilidade de restringir esse crescimento de modo a salvaguardar os meios necessários para a sobrevivência humana.

No estudo sobre a dinâmica de transmissão da malária, o médico britânico Ronald Ross (1857-1932) sugeriu que devia existir um valor limiar de densidade de mosquitos, abaixo do qual ocorreria a extinção da malária. Este pode ter sido o prenúncio do Teorema do Limiar, proposto em 1927 pelo bioquímico escocês William Ogilvy Kermack (1898-1970) e pelo médico escocês Anderson Gray McKendrick (1876-1943), em que há uma densidade crítica de indivíduos suscetíveis e abaixo dela a introdução de indivíduos infectados não provoca uma epidemia. A densidade limiar depende de fatores como infectividade, recuperação da doença e taxa de mortalidade relativa à epidemia.

Sendo assim, os modelos matemáticos foram sendo desenvolvidos de modo a fornecer informações a respeito de dois tipos de parâmetros epidemiológicos que são de grande relevância: a *força de infecção* e a *razão de reprodutibilidade basal*. Sendo a *força de infecção* representada pela taxa de propagação da doença, e a *razão de reprodutibilidade basal*, comumente designada por  $R_0$ , é definida, no caso de doenças infecciosas, como sendo o número de casos secundários que um caso primário é capaz de reproduzir em uma população totalmente suscetível. Nos estudos realizados sobre esses parâmetros, puderam ser desenvolvidas importantes ferramentas utilizadas e aprimoradas nos dias atuais de modo a facilitar a compreensão sobre o comportamento de eventos epidêmicos e proporcionar melhores soluções para controle e prevenção.

### 3.3 Conceitos Básicos de Epidemiologia Matemática

Dentre as inúmeras doenças que podem acometer um ser humano, aquelas do tipo infecciosa são umas das que mais demandam atenção da epidemiologia. Sendo SARS-CoV-2, foco deste trabalho, uma doença altamente infecciosa, veremos alguns importantes conceitos relacionados a esse tópico para um melhor aproveitamento do estudo a seguir.

Denominamos como doença infecciosa um distúrbio de funções orgânicas causado por um agente infeccioso ou as suas toxinas através da transmissão do mesmo ou seus produtos, do reservatório de uma pessoa ou animal infectado indiretamente, por meio de hospedeiro intermediário vegetal ou animal, por meio de um vetor, ou através do meio ambiente inanimado. Sendo o processo de transmissão uma característica relevante a condição de doença infecciosa, podemos classificá-lo da seguinte maneira:

- **Horizontal:** Quando a transmissão ocorre de um indivíduo para outro. O processo de transmissão horizontal é subdividida em:
  1. **Transmissão direta:** ocorre a transferência do agente etiológico, sem a interferência de veículos;
  2. **Transmissão direta imediata:** é a transmissão direta em que há um contato físico entre a fonte primária de infecção e o novo hospedeiro;
  3. **Transmissão direta mediata:** é a transmissão direta em que não há contato físico entre a fonte primária de infecção e o novo hospedeiro, ou seja, a transmissão se faz por meio das secreções oronasais;

4. **Transmissão indireta:** a transferência do agente etiológico ocorre por meio de veículos animados ou inanimados;

- **Vertical:** Quando a transmissão ocorre através da passagem do patógeno da mãe para o bebê durante a gestação, nascimento ou na amamentação.

Durante a análise matemática dos modelos epidemiológicos, alguns conceitos são extremamente importantes na construção deste estudo. Definimos então como:

- **Indivíduos infectados - (I):** aqueles que contraíram o agente patogênico, tornando-se automaticamente um transmissor de forma direta ou indireta;
- **Indivíduos suscetíveis - (S):** aqueles que podem ou não contrair a doença quando em contato com indivíduos infectados;
- **Indivíduos removidos - (R):** aqueles que já foram imunizados, foram isolados ou faleceram;
- **Período Latente:** período em que o indivíduo adquire a doença, porém não manifesta sintomas, ou caracterizado pelo estágio inicial da replicação do agente infeccioso no organismo hospedeiro;
- **Período de Incubação:** período entre a exposição ao agente infeccioso e a manifestação dos sintomas.
- **Incidência:** é a fração de um grupo que inicialmente não possuía a doença e que a desenvolve em um determinado período de tempo. A incidência então se refere aos novos casos da doença que aparecem em uma população anteriormente sadia;
- **Coefficiente de Incidência:** razão do número de casos novos em relação ao total de indivíduos expostos na unidade de tempo;
- **Prevalência:** é a fração de um grupo de pessoas que possuem uma determinada condição clínica em um dado período de tempo. A prevalência é obtida através de uma população predefinida contendo pessoas sadias e com a condição em questão, em um único momento;
- **Coefficiente de Prevalência:** razão do número de casos novos somados ao número de casos antigos em relação ao total de indivíduos expostos na unidade de tempo;

- **Taxa de letalidade:** caracterizado pela taxa de pessoas que morrem da doença em relação ao total de indivíduos que a contraíram;
- **Vacinação:** manipulação de drogas nos indivíduos suscetíveis com o objetivo de imunizá-los contra a doença;

### 3.4 Modelagem Matemática

O desenvolvimento das ciências através da história está intimamente ligado a resolução dos problemas diários que a humanidade enfrentava, dessa forma, parte dos estudos se baseavam primeiramente na compreensão da situação-problema e somente depois nos métodos de solução. A partir dessa relação compreensão-solução desenvolveu-se os conceitos iniciais da Modelagem Matemática que hoje é percebida de várias óticas, tais como:

*Considero Modelagem Matemática como um processo que traduz ou que organiza situações problema provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, também dita situação real, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de modelos matemáticos ou de relações matemáticas que procura representar ou organizar a situação/problema proposta, com vistas a compreendê-la ou solucioná-la. (CHAVES, 2014).*

*A Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, neste caso, é o que ‘dá forma’ à solução do problema e a Modelagem Matemática é a ‘atividade’ de busca por esta solução. (ALMEIDA; TORTOLA; MERLI, 2012).*

*A Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa ótica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT; HEIN, 2007).*

Sendo a Modelagem Matemática uma importante ferramenta no processo de pesquisa, análise e solução dos mais variados tipos de problemas encontrados nos estudos científicos, percebemos que de certa forma a humanidade pode explorar e compreender melhor o ambiente

em que vive, além de representar eventos cotidianos através de símbolos e modelos matemáticos. O foco deste trabalho será a modelagem de uma doença infecciosa e seu espalhamento na população mundial, mas a princípio, um modelo matemático pode ser utilizado em qualquer sistema biológico ou físico.

Segundo (FARIAS, 2017), determinação do modelo matemático a ser utilizado parte do agrupamento das informações relevantes ao objetivo específico ou pertinentes a questão biológica estudada. Uma vez definido e formulado o modelo, inicia-se o processo investigativo utilizando métodos matemáticos para se estudar:

- Como se comportam globalmente as soluções do modelo proposto.
- Se os dados disponíveis podem ser ajustados ou podem ser mudados para novos dados.
- Estimativas de parâmetros do modelo.
- As interpretações numéricas ou gráficas, para se conhecer a importância de cada parâmetro.
- Convergência e pontos de estabilidade do modelo.

Após a análise do modelo adotado, extrai-se dos resultados as interpretações necessárias para o entendimento do sentido biológico buscado, e a partir daí levanta-se questionamentos sobre a viabilidade do modelo empregado a uma situação real. Logo, as variáveis e parâmetros do modelo, por estarem relacionadas e representarem as propriedades do sistema, podem ser mensuradas ou quantificadas. Segundo (BASSANEZI, 2002), podemos classificar modelos matemáticos em quatro grupos:

- Linear/Não-linear: refere-se a independência linear entre as variáveis que compõe o modelo.
- Estático/Dinâmico: refere-se a alterações no estado do sistema ao longo do tempo. Geralmente, modelos dinâmicos empregam equações diferenciais.
- Contínuo/Discreto: refere-se ao dinamismo da variável tempo ou do estado do sistema no modelo.
- Estocástico/Determinístico: refere-se a presença ou não de fatores aleatórios nas variáveis do modelo.

Como a variabilidade dos componentes do sistema é um fator relevante no estudo dos modelos matemáticos, a teoria de equações diferenciais apresenta uma importante ferramenta no desenvolvimento das análises e soluções das situações-problema apresentadas.

*A ferramenta utilizada como principal modelo matemático são as equações diferenciais. Estes modelos suprem um papel muito importante em diversas áreas, como por exemplo em ciências naturais, incluindo ecologia, genética e epidemiologia. Eles são de altíssima utilidade para um melhor entendimento e organização para os dados biológicos disponíveis, obtém a resposta para o comportamento, buscam otimização e estratégias de intervenção, e fazem previsões sobre o sistema. (SOTOMAYOR, 1979).*

### 3.5 Modelos Matemáticos Aplicados à Epidemiologia

Como visto anteriormente, a criação de modelos matemáticos é embasada na premissa de obter-se respostas para questionamentos relativos ao assunto abordado, de modo que para a Epidemiologia seu foco está na possibilidade de prever a quantidade de indivíduos infectados e sua dissipação ao longo do tempo, permitindo assim melhores ações de prevenção e controle. Embora cada epidemia já registrada na história possua características únicas, existem certos aspectos referentes a sua transmissão que são similares entre elas. Tais semelhanças auxiliam na construção de modelos matemáticos, pois permitem elaborar hipóteses mais objetivas, uma vez que já se conhece o comportamento do contágio. A elaboração da hipótese a ser abordada pelos modelos propostos parte de alguns questionamentos, tais como:

- Em dado instante  $t$ , podemos determinar o número de indivíduos infectados  $I(t)$ , indivíduos suscetíveis  $S(t)$  e indivíduos removidos  $R(t)$ ?
- Qual o tempo médio entre a infecção e a transmissão do agente infeccioso por um indivíduo?
- As variações naturais da população, tais como nascimentos ou óbitos, influenciam diretamente na dinâmica de contágio?
- Os indivíduos recuperados ficam permanentemente imunizados?

Outro importante parâmetro a se considerar é a razão de reprodutibilidade basal  $R_0$ , que é definida, no caso de doenças infecciosas, como sendo o número de casos secundários que

um caso primário é capaz de produzir em uma população totalmente suscetível. Para o caso  $R_0 < 1$  significa que o contágio diminui sobre a população, se  $R_0 > 1$  então a epidemia alastra-se e se  $R_0 = 1$  então a doença permanece no meio, porém de forma controlada. O efeito da introdução de uma vacinação em uma comunidade é justamente a diminuição da razão de reprodutibilidade basal, levando, eventualmente, a erradicação da doença.

Para estudar alguns dos principais modelos matemáticos utilizados na Epidemiologia, consideremos a seguinte hipótese: Em um dado momento  $t$  a população  $N$  pode ser compartimentalizada em classes, tais como Imunes ( $M$ ), Suscetíveis ( $S$ ), Infectados ( $I$ ) e Removidos ( $R$ ), de modo que  $N = M + S + I + R$ .

### 3.5.1 Modelo SI (Suscetível - Infectado)

O modelo SI descreve, de forma simplificada, a dinâmica da população subdivida em dois grupos, os suscetíveis e os infectados. Neste modelo considera-se que após a infecção, o indivíduo não obterá a cura, de modo que permanecerá infectado ao longo da vida. Sendo assim, consideremos as seguintes hipóteses:

1. A população  $N$  permanece constante:  $N = S(t) + I(t)$
2. Todos os membros que contraírem a doença, tornam-se transmissores, ou seja, nenhuma fator leva a retirada de membros, seja por morte, isolamento ou imunidade.

Para analisar a variação do número de indivíduos infectados consideremos que a transmissão da doença acontece por contato entre suscetíveis e doentes, de modo que esse valor é proporcional ao produto  $S$  por  $I$ . Tomando  $I_0$  como a quantidade de membros infectados no instante  $t = 0$ , propomos o seguinte Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} I' = \alpha SI \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\alpha > 0$  é a taxa de propagação da doença. Substituindo  $S = N - I$  em (3.1), temos:

$$\begin{cases} I' = \alpha I(N - I) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Assim, separando as variáveis e aplicando integração em (3.2), temos:

$$\int \frac{dI}{I(N-I)} = \alpha \int dt.$$

Aplicando a teoria de integração e realizando algumas manipulações, podemos verificar que:

$$I(t) = \frac{NI_0}{I_0 + (N - I_0)e^{-N\alpha t}}$$

é a solução da equação que descreve a variação da quantidade de membros infectados em uma população.

Fazendo com que  $t \rightarrow \infty$  teremos  $I(t) \rightarrow N$ , ou seja, com o passar do tempo toda a população estará infectada, independente da quantidade inicial. Portanto o modelo SI não contempla a realidade de uma epidemia, pois mesmo nos piores casos registrados na história uma população nunca foi totalmente infectada, (LIMA, J.; LIMA, J. I. d. et al., 2018).

### 3.5.2 Modelo SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível)

O modelo SIS descreve a dinâmica da população subdividida em três estágios: suscetíveis, infectados e suscetíveis, ou seja, o indivíduo suscetível torna-se infectado e após a recuperação volta ao estágio de suscetível, não tendo portanto adquirido a imunidade. Esse modelo é apropriado para o estudo de doenças cuja recuperação não torna o indivíduo imune, tais como: sífilis, gonorreia ou malária.

Considere:

1. A população  $N$  permanece constante:  $N = S(t) + I(t)$ ;
2. Como a transmissão se dá pelo contato entre suscetíveis e infectados, seja  $\alpha$  a taxa de transmissão da doença de modo que a variação de indivíduos suscetíveis em relação ao tempo pode ser modelada por  $\alpha SI$ ;
3. A variação dos indivíduos infectados com relação ao tempo é proporcional ao próprio número de infectados, e seu retorno a etapa de suscetíveis é modelada por  $\beta I$ , onde  $\beta$  é a taxa de recuperação da doença;

A dinâmica de uma doença com essas características pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais (LUIZ, 2012):

$$\begin{cases} S' = -\alpha SI + \beta I \\ I' = \alpha SI - \beta I \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ , e com condições iniciais  $I(0) = I_0$  e  $S(0) = S_0 = N - I_0$ .

Seja  $R_0 = \alpha S/\beta$  a razão de reprodutibilidade basal,  $1/\beta$  o tempo médio que um indivíduo permanece infectado e  $\alpha S$  a taxa de propagação da doença provocada pela introdução de um indivíduo infectado numa população de suscetíveis.

Observe:

- Se  $R_0 > 1$  e  $I \neq 0$ , então  $I' > 0$  e  $S' < 0$ . Ou seja, a epidemia alastra-se;
- Se  $R_0 < 1$  e  $I \neq 0$ , então  $I' < 0$  e  $S' > 0$ . Ou seja, o contágio diminui;
- Se  $I = 0$ , então  $N = S$ . Ou seja, toda a população é saudável e portanto não existe infecção;

Verificamos também que os pontos de equilíbrio do sistema são  $(S, I) = (\beta/\alpha, N - \beta/\alpha)$  e  $(S, I) = (N, 0)$ . Note que  $-S' = I' = \alpha I(S - \beta/\alpha)$ , de onde concluímos que:

- Se  $I = 0$  ou  $S = \beta/\alpha$ , então  $S' = I' = 0$  e, portanto, não há epidemia;
- Se  $I \neq 0$  e  $S > \beta/\alpha$  ou  $S < \beta/\alpha$ , então o ponto  $(S, I) \rightarrow (\beta/\alpha, N - \beta/\alpha)$  sobre a reta  $S = N - I$ . Neste caso o ponto  $(\beta/\alpha, N - \beta/\alpha)$  é assintoticamente estável, o que significa que a epidemia estabiliza-se neste ponto.

O ponto de equilíbrio  $(S, I) = (N, 0)$  é instável, pois as soluções não constantes se afastam deste ponto. Assim, se  $I \neq 0$ , por menor que seja, então a doença se espalha.

### 3.5.3 Modelo SIR (Suscetível - Infectado - Removido)

O modelo epidemiológico SIR, proposto por Kermack e McKendrick em 1927 posteriormente aprimorado por Isea. Longren em 2013, é um dos modelos mais utilizados para representação de doenças infecciosas, como por exemplo rubéola e sarampo. A suposição básica

deste modelo é que um indivíduo pode passar sucessivamente pelos estágios de suscetível, infectado e removido.

Considerando que a população  $N$  permanece constante, mesmo contando com os óbitos derivados da infecção, temos  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ . Levando-se em conta que a variação da população recuperada é proporcional à população infectada, o sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica desta epidemia é dado por (LUIZ, 2012):

$$\begin{cases} S' = -\alpha SI \\ I' = \alpha SI - \beta I \\ R' = \beta I \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $\alpha > 0$  é o coeficiente de transmissão que determina a taxa relativa as novas infecções que surgem como consequência do contato entre indivíduos suscetíveis e infectados, e  $\beta > 0$  denota a taxa de recuperação. As condições iniciais desse sistema são:  $R(0) = R_0 = 0$ ,  $I(0) = I_0$  e  $S(0) = S_0 = N - I_0$ .

Observe que  $S'$  e  $I'$  dependem apenas de  $S$  e de  $I$ . Neste caso:

$$\begin{cases} F(S, I) = -\alpha SI \\ G(S, I) = \alpha SI - \beta I \end{cases} \quad (3.5)$$

Os pontos de equilíbrio são  $P_1(N, 0)$  e  $P_2(0, 0)$ , porém como  $N$  é constante então basta analisar  $P_1$ . Analisando as características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linearizado, temos:

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

onde  $J$  é a matriz jacobiana relativa ao sistema (3.5).

O sistema linear que aproxima o sistema (3.4) na vizinhança do ponto  $(N, 0)$  é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

cuja matriz dos coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$tr(A) = \alpha N - \beta > 0 \quad (3.9)$$

$$det(A) = 0.$$

Como  $tr(A) > 0$ , então  $2\lambda = tr(A) + \sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)} > 0$ , onde  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ . Sendo  $\lambda > 0$ , então o ponto  $(N, 0)$  é instável, ou seja, ao menos uma solução do sistema que começa próximo ao ponto  $(N, 0)$  se afasta dele.

Note que, de (3.4), no instante  $t = 0$ , tem-se:

$$\frac{dI}{dt}|_{t=0} = \alpha S_0 I_0 - \beta I_0 \begin{cases} > 0, se S > \frac{\beta}{\alpha} \\ < 0, se S < \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}. \quad (3.10)$$

Assim, a taxa de reprodutibilidade basal  $R_0 = \frac{\alpha S}{\beta}$  indica, também neste modelo, se não ocorre epidemia, caso  $R_0 < 1$ , ou a doença se propaga, caso  $R_0 > 1$ .

O sistema (3.4) é um sistema não-linear. Mas, uma vez que as duas primeiras equações só dependem de  $S$  e  $I$ , é possível reduzi-las a uma única equação:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = \frac{\beta}{\alpha I} - 1. \quad (3.11)$$

Resolvendo (3.11), temos:

$$I = -S + \frac{\beta}{\alpha} \ln \left( \frac{S}{S_0} \right) + C. \quad (3.12)$$

Aplicando as condições iniciais, determinamos a variável  $C$  como  $C = N - \frac{\beta}{\alpha} \ln(S_0)$ . Assim, substituindo em (3.12), obtemos:

$$I = N - S + \frac{\beta}{\alpha} \ln \left( \frac{S}{S_0} \right). \quad (3.13)$$

Da equação (3.13), tem-se que  $I \rightarrow -\infty$  quando  $S \rightarrow 0$ , e como  $I_0 > 0$ , existe pelo menos um valor de  $S$  para o qual  $I = 0$ . Em outras palavras, uma epidemia acaba antes que toda a população se infecte.

### 3.5.4 Modelo SIRS (Suscetível - Infectado - Removido - Suscetível)

O modelo epidemiológico SIRS descreve a dinâmica de uma população onde seus indivíduos não adquirem imunidade após a recuperação, passando assim do estágio de removidos para novamente suscetíveis. Proposto em 1933 por Kermack e McKendrick, este modelo busca descrever infecções epidêmicas, como por exemplo a gripe.

Consideraremos a população total  $N$  constante e que não há dinâmica vital, ou seja não há variações na população devido a nascimentos. Seja  $\delta$  a taxa de perda de imunidade. Então, como a perda de imunidade é proporcional ao número de indivíduos removidos, a modelagem é dada por  $\delta R$ . Assim, o sistema de equações diferenciais que representa essa dinâmica é da forma (ROCHA, 2012):

$$\begin{cases} S' = -\alpha SI + \delta R \\ I' = \alpha SI - \beta I \\ R' = \beta I - \delta R \end{cases} \quad (3.14)$$

onde  $\alpha, \beta, \delta > 0$  e  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ . Com as condições iniciais  $R(0) = R_0 = 0$ ,  $I(0) = I_0$  e  $S(0) = S_0 = N - I_0$ .

Note que, como  $R = N - S - I$  e  $N$  é constante, as funções  $S'$  e  $I'$  dependem apenas de  $S$  e  $I$ . Então:

$$\begin{aligned} F(S, I) &= -\alpha SI + \delta N - \delta S - \delta I \\ G(S, I) &= \alpha SI - \beta I \end{aligned} \quad (3.15)$$

Os pontos de equilíbrio obtidos são  $P_1 = (N, 0)$  e  $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\frac{\delta}{\alpha}(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta}\right)$ , da qual segue matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_I \\ G_S & G_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I - \delta & -\alpha S - \delta \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Analisando  $P_1$  temos que o sistema linear que aproxima o sistema (3.14) na vizinhança de  $P_1$  é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & -\alpha N - \delta \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

do qual podemos obter os autovalores fazendo:

$$\begin{vmatrix} -\delta - \lambda & -\alpha N - \delta \\ 0 & \alpha N - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-(-\alpha N + \beta + \delta) \pm (\alpha N - \beta + \delta)}{2}. \quad (3.18)$$

Logo, os autovalores são  $\lambda_1 = -\delta$  e  $\lambda_2 = \alpha N - \beta$ .

Assim,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Portanto,  $P_1 = (N, 0)$  é instável do tipo sela.

Comparando agora a população de suscetíveis com a população de removidos, temos:

$$F(S, R) = -\alpha SI + \delta R \quad (3.19)$$

$$H(S, R) = \beta I - \delta R$$

Como  $I = N - S - R$ , segue que:

$$F(S, R) = -\alpha S(N - S - R) + \delta R \quad (3.20)$$

$$H(S, R) = \beta(N - S - R) - \delta R$$

de onde obtemos os pontos de equilíbrio  $P_1 = (N, 0)$  e  $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\frac{\delta}{\alpha}(\alpha N - \beta)}{\beta + \delta}\right)$ , além da matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} F_S & F_R \\ H_S & H_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + 2\alpha S + \alpha R & \alpha S + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Analisando  $P_1$  temos que o sistema linear que aproxima o sistema (3.14) na vizinhança de  $P_1$  é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha N & \alpha N + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

cuja matriz dos coeficientes é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha N & \alpha N + \delta \\ -\beta & -\beta - \delta \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

O traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} tr(A) &= \alpha N - \beta - \delta > 0 \\ det(A) &= -\delta(\alpha N - \beta) < 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Logo,  $P_1 = (N, 0)$  é instável, pois como  $tr(A) > 0$  e  $det(A) < 0$ , então  $2\lambda = tr(A) + \sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)} > 0$ , onde  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ .

Assim, para todos os casos em que se tem  $(N, 0)$  como equilíbrio ocorre a instabilidade, o que significa que a doença tende a permanecer endêmica na população.

No capítulo a seguir veremos a aplicação de um dos modelos apresentados no estudo da pandemia de coronavírus para buscar entender a dinâmica de propagação da doença sobre a população.

## Capítulo 4

# Modelo Epidemiológico Aplicado à COVID-19

A pandemia de COVID-19 é causada por um coronavírus denominado SARS-CoV-2. Os Coronavírus (CoVs) são uma grande família de vírus, vários dos quais causam doenças respiratórias em humanos, desde o resfriado comum até doenças mais raras e graves, como a Síndrome Respiratória Aguda Grave (SARS) e a Síndrome respiratória do Oriente Médio (MERS), ambas com alta taxa de mortalidade e foram detectados pela primeira vez em 2003 e 2012, respectivamente. Atualmente, a fonte zoonótica do SARS-CoV-2, ou seja, vírus transmitido regularmente de animal para humano, é desconhecida. Os primeiros casos humanos de COVID-19, a doença coronavírus causada por SARS-CoV-2, foram relatados pela primeira vez na cidade de Wuhan, China, em dezembro de 2019.

Assim que os primeiros casos da doença foram relatados, a OMS iniciou investigações no intuito de entender a epidemiologia de COVID-19, além da fonte original do surto. Uma grande proporção dos casos iniciais tinham um link direto com o Mercado Atacadista de Frutos do Mar de Huanan na cidade de Wuhan, pois muitos dos primeiros pacientes eram proprietários de barracas, funcionários ou visitantes regulares desse mercado. Amostras ambientais retiradas deste local em dezembro de 2019 testaram positivo para SARS-CoV-2, sugerindo ainda que o mercado na cidade de Wuhan foi a fonte desse surto ou desempenhou um importante papel na amplificação inicial do surto. O vírus pode ter sido introduzido na população humana a partir de uma fonte animal infectada presente no mercado ou um ser humano infectado pode ter espalhado vírus a outros humanos ali presentes.

Conforme declaração da OMS emitida em 30 de janeiro de 2020, haviam 7.834 casos confirmados de infecção por SARS-CoV-2, dos quais 170 pessoas já haviam sido levadas a óbito. Assim, uma missão conjunta da OMS com o governo chinês foi convocada para informar o planejamento das próximas etapas adotadas na resposta ao surto em curso de COVID-19. Os principais objetivos foram:

- Melhorar a compreensão da evolução do surto da doença na China e a natureza do impacto das medidas de contenção em curso;
- Compartilhar conhecimento sobre as ações de preparação que estavam sendo implementadas em países afetados ou em risco de importação da COVID-19;
- Gerar recomendações para ajustar as medidas internacionais de contenção e resposta à epidemia;
- Estabelecer prioridades para um programa colaborativo de trabalho, pesquisa e desenvolvimento focados em assuntos relativos a COVID-19;

No dia 11 de março de 2020, a COVID-19 foi caracterizada pela Organização Mundial da Saúde como uma pandemia, pois até aquela data, em 114 países espalhavam-se os mais de 118 mil casos registrados, dos quais 4,2 mil pessoas perderam a vida.

## 4.1 Modelo e Metodologia

O modelo mais utilizado para doenças que se espalham rapidamente é o modelo SIR convencional (SCHIMIT; MONTEIRO, s.d.). Tal modelo pode, sem perda de generalidade, ser utilizado para descrever a disseminação de vírus e pragas diversos em redes das mais variadas topologias, por exemplo, já que os processos de propagação, da doença ou informação, são muito parecidos (PACHI, 2006). Modelos que incluem uma variedade maior de parâmetros também são utilizados, porém um excesso de parâmetros pode interferir nos resultados obtidos a longo prazo, deixando as equações diferenciais mais suscetíveis a pequenas mudanças nas condições iniciais (TELES, 2020).

Como nenhum modelo matemático pode incorporar todas as variáveis que podem influenciar o comportamento da curva epidêmica, o objetivo é trazer um retrato simplificado do espalhamento da doença com base em interações simples entre indivíduos suscetíveis. Assim,

o modelo proposto visa realizar previsões sobre o comportamento da epidemia no município de Rondonópolis, Brasil, no decorrer de um intervalo de tempo, podendo, por exemplo, antecipar o ponto crítico da propagação e amparar medidas de prevenção e controle.

#### 4.1.1 Estimativa de Parâmetros

Conhecendo-se os dados sobre a epidemia é possível estimar os parâmetros envolvidos na dinâmica da doença, nos permitindo assim aplicar o modelo proposto e analisar os resultados de forma a amparar melhores decisões a respeito da prevenção, controle e estratégia de imunização. Como visto anteriormente, no modelo SIR podemos utilizar o sistema de equações diferenciais (3.4) para descrever a dinâmica da epidemia estudada, porém, para tal utilização, faz-se necessário estimar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  do sistema. Assim:

- Taxa de recuperação  $\beta$ ;

Para estimar a taxa de recuperação, supomos que não há influxo na classe infectada e que uma certa proporção de indivíduos ( $i_0$ ) está nessa classe no tempo zero. Assim o PVI neste caso é:

$$\begin{cases} I'(t) = -\beta I \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

e portanto  $\frac{I(t)}{I_0} = e^{-\beta t}$ .

A equação acima, para  $t \geq 0$  descreve a proporção de indivíduos que ainda estão infectados no tempo  $t$ . Logo, a proporção dos indivíduos não infectados neste instante  $t$  é  $1 - e^{-\beta t}$ . Assim, considerando  $X$  a variável que representa o tempo de permanência na classe infectada, a função distribuição de  $X$  é:

$$P(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Como a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

então o tempo médio gasto na classe infectada é dado pela média (valor esperado) de  $X$  equivalente a:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \quad (4.4)$$

ou seja,

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t \beta e^{-\beta t} dt \quad (4.5)$$

Portanto, resolvendo a integração temos:

$$\beta = \frac{1}{E(X)} \quad (4.6)$$

- Estimando  $R_0$  e  $\alpha S$ ;

Para encontrarmos uma relação para  $R_0$  considerando o início da epidemia, temos a seguinte expressão:

$$I'(t) = (\alpha - \beta)I \quad (4.7)$$

cuja a solução é expressa da seguinte forma:

$$I(t) = I(0)e^{(\alpha-\beta)t} \quad (4.8)$$

Seja  $t_d$  o tempo para que o número de infectados duplique, ou seja,  $I(t) = 2I(0)$ . Então:

$$t_d = \frac{\ln 2}{\alpha - \beta} \quad (4.9)$$

Assim, após algumas simplificações, considerando  $R_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ , obtemos:

$$R_0 = 1 + \frac{\ln 2}{\beta t_d} \quad (4.10)$$

Portanto, partindo do crescimento inicial do número de infectados, podemos obter uma estimativa para  $R_0$  e conseqüentemente para  $\alpha S$ , pois:

$$R_0 = \frac{\alpha S}{\beta} \Rightarrow \alpha S = \beta R_0 \quad (4.11)$$

#### 4.1.2 Epidemia de COVID-19 em Rondonópolis, Mato Grosso, Brasil

Na busca pelo melhor entendimento da dinâmica da COVID-19 no município de Rondonópolis, foi feito o levantamento do número de casos confirmados de infecção por SARS-CoV-2 através dos boletins epidemiológicos emitidos diariamente pela Secretaria Municipal de Saúde. Embora o primeiro caso confirmado pela instituição tenha sido em 17 de março de 2020, os boletins epidemiológicos começaram a ser emitidos em 14 de maio de 2020, cinquenta e oito dias depois. Sabendo, através do censo realizado pelo IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística em 2019, que a população rondonopolitana tem aproximadamente 235 mil habitantes,  $N$ , realizou-se o cálculo do parâmetro  $R_0$  com variação diária, durante o período de 120 dias. De acordo com a Organização Mundial da Saúde, o tempo de infecção por SARS-CoV-2,  $E(X)$ , dura em média 14 dias, sendo recomendado assim um isolamento social por esse período.

Para o cálculo de  $R_0$ , conforme (4.10), precisamos do parâmetro  $\beta$  e do tempo de duplicação do número de casos, que podemos observar conforme Tabela 1:

Dias após primeiro contágio	Número de Infectados	$t_d$ : dias para duplicação
58	28	Não obtido
62	55	05
73	110	11
84	246	11
91	522	07
113	1065	22

Tabela 4.1: Quantidade de infectados e tempo de duplicação em Rondonópolis. Fonte: Próprio autor.

Verifica-se assim, através de média aritmética, que  $t_d$  é aproximadamente 11 dias e que, por (4.6),  $\beta = \frac{1}{14}$ . Portanto, por (4.10),  $R_0 \approx 1,8821$  e, por (4.11),  $\alpha S \approx 0,1344$ . De posse dos parâmetros necessários, temos as seguintes equações:

$$S' = -0,1344I; I' = 0,1344I - 0,0714I = 0,063I; R' = 0,0714I \quad (4.12)$$

Aplicando a condição inicial,  $I_0 = 1$ , em (4.12), podemos verificar a evolução do modelo, conforme Tabela 2 e Figura 4.1:

Dia	Suscetíveis	Infectados	Removidos	S'	I'	R'
0	23499	01	0	-0,13444	0,06301	0,07142
1	234998,9	1,06301	0,07142	-0,14291	0,06698	0,07593
2	234998,7	1,12999	0,14735	-0,15192	0,07120	0,08071
10	234997,2	1,84241	0,95491	-0,24770	0,11610	0,13160
100	234039,6	450,685	509,7387	-60,591	28,40	32,191
120	231737,1	1529,846	1733,017	-205,675	96,40	109,274

Tabela 4.2: Evolução dos estágios da epidemia em Rondonópolis - Modelo SIR. Fonte: Próprio autor.

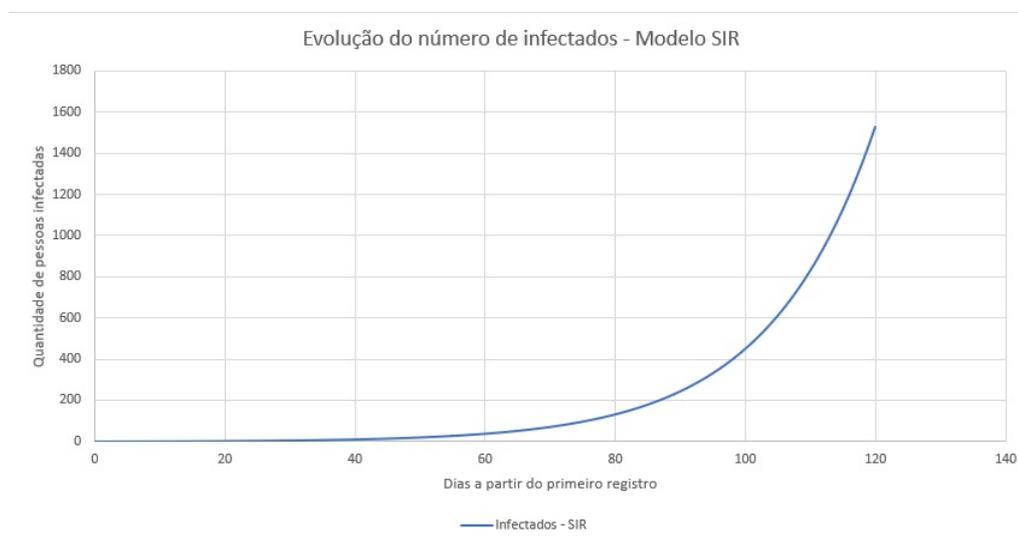


Figura 4.1: Evolução do número de infectados por dia em Rondonópolis.

De acordo com os dados divulgados pela Secretaria de Saúde de Rondonópolis, através dos boletins epidemiológicos, podemos comparar com o modelo proposto, conforme Figura 4.2:

O comportamento da curva gerada pelo modelo se aproxima bem da realidade experienciada pelo município, demonstrando que o modelo pode ser uma importante ferramenta de previsão a respeito do avanço da doença sobre a população, além de auxiliar o processo decisório no âmbito de controle do surto e prevenção de novos casos. Um importante questionamento surge após a análise do modelo: O que acontece com a população em um intervalo maior de tempo? Observe a Figura (4.3)

Como previsto em (3.13) e observado na figura 4.3 a epidemia tende a extinção antes que toda a população se infecte. Porém, em um intervalo maior de tempo, mais variáveis influenciam na evolução do número de casos, tais como: isolamento social, medidas de prevenção,

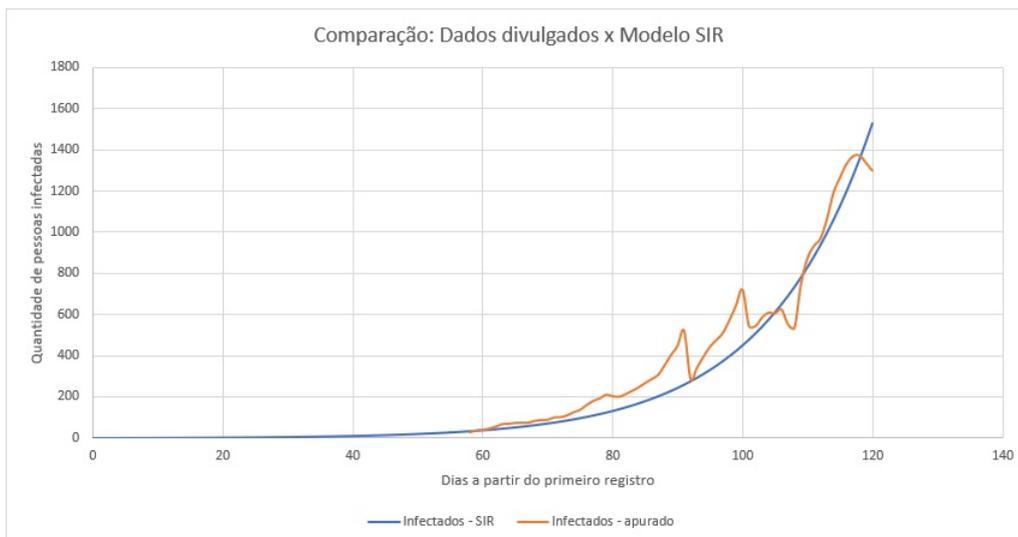


Figura 4.2: Comparativo entre dados oficiais de Rondonópolis e o modelo proposto.

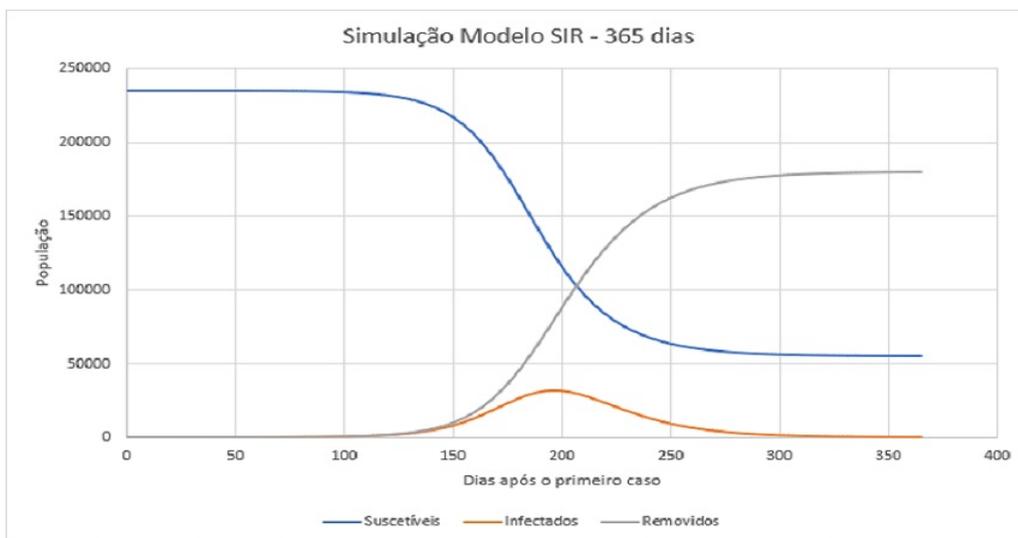


Figura 4.3: Simulação com modelo SIR em um intervalo de 365 dias.

vacinação, possibilidade de reinfecção, etc... Assim, o modelo precisa se adequar conforme cada situação descoberta no decorrer do tempo, agregando mais parâmetros e informações de modo que aproxime-se cada vez mais da dinâmica real da epidemia.

Podemos atestar que as medidas de controle do surto praticadas pela gestão municipal tiveram um impacto positivo na contenção da COVID-19, uma vez que o Fator de Reprodutibilidade Basal manteve-se próximo de 1,  $R_0 \approx 1,8821$ , ou seja, embora a situação ainda fosse de pandemia a evolução do número de casos estava sendo desacelerada. Comparativamente, a OMS estimou que a média mundial do fator  $R_0$  é de 2,79.

No capítulo a seguir, veremos que o entendimento dos alunos do Ensino Médio sobre o comportamento da função exponencial também deve ser aproveitado no processo de modelagem dos problemas reais enfrentados pela sociedade., tornando-os participantes ativos das questões sociais e, acima de tudo, contribuindo para a construção de sua própria Educação.

## Capítulo 5

# Abordagem da Função do Tipo Exponencial no Ensino Médio

O estudo das funções elementares no Ensino Médio pode ser realizado a partir da modelagem de problemas cotidianos. Muitos livros didáticos, ao introduzirem o estudo das funções elementares, apenas apresentam sua definição, indicam onde tais funções são aplicadas e mostram os seus gráficos. É um “produto” acabado, pronto para ser “consumido” pelos estudantes. Não à toa que questionamentos dos estudantes sobre o porquê das coisas e a sua importância persistam em toda sua passagem pelo Ensino Médio, sem as respostas adequadas que colaboram em seu processo formativo. Nestes casos, a Matemática torna-se enfadonha e muitas das vezes inútil do ponto de vista dos estudantes. O processo da descoberta, da modelagem, da reflexão, da formulação de hipóteses e, quando possível, da testagem (aplicação prática), é fundamental para a formação do estudante do Ensino Médio. Essa mudança de paradigma contribui significativamente para a redução das “angústias” trazidas pelos estudantes em relação à Matemática.

**Problema 1.** Considere uma corrida de táxi. Como funciona a cobrança? O princípio básico do taxímetro é simples: só precisa identificar quando o táxi está andando ou está parado. E isto é feito através do odômetro. Em cada situação, uma tarifa diferente é registrada. No final, o preço total da corrida vai depender da distância percorrida e do tempo parado no trânsito. A corrida inicia com um valor fixo e, a partir daí, os custos vão sendo adicionados. Essa descrição é a padrão, porém outros custos também podem ser adicionados, como por exemplo, cobranças adicionais por bagagens ou viagens entre cidades. Se as corridas ocorrem em finais de semana

ou feriados, as tarifas cobradas por distância percorrida e por tempo parado no trânsito são diferentes das cobradas nos demais dias.



Figura 5.1: Imagem de um taxímetro.

**Problema 2.** Considere o crescimento de uma população de bactérias. Como estimar o tamanho da população? As bactérias são seres microscópicos que se reproduzem assexuadamente, em condições ideais de temperatura e nutrientes, por divisão binária, a chamada bipartição. A divisão binária ocorre quando uma bactéria duplica o seu material genético e logo em seguida se divide, originando duas bactérias idênticas a ela.



Figura 5.2: Imagem de uma placa com bactérias.

Supondo que durante a corrida de táxi não haja paradas consideráveis no trânsito, a ponto de acionar a cobrança por tempo parado, e também que as bactérias estejam em condições normais para reprodução, algumas perguntas podem ser formuladas. Em ambos os problemas há uma lei que relaciona, de um modo particular, uma determinada grandeza a outra. No primeiro problema, a cada distância percorrida está associado um único valor de cobrança. No segundo problema, a cada instante de tempo considerado está associado um único tamanho da população de bactérias.

Essa lei, que relaciona determinadas grandezas a outras de um modo particular, ou seja, obedecendo algumas regras, é conhecida como *função*. Uma função é um objeto matemático que relaciona elementos de dois conjuntos não vazios de modo que cada elemento do primeiro conjunto corresponda a um único elemento do segundo conjunto. O primeiro conjunto é conhecido como *domínio da função* e o segundo conjunto é conhecido como *contradomínio da função*. O subconjunto não vazio do contradomínio cujos elementos foram correspondidos por algum elemento do domínio é chamado de *imagem da função*.

No primeiro problema, não havendo paradas consideráveis no trânsito, temos uma função  $f$  que indica o preço a ser pago pela distância  $x$  percorrida. Fica assim definida a correspondência  $x \mapsto f(x)$ . Dado que a corrida já se inicia com um certo valor  $b$ , temos  $f(0) = b$ . Se para uma unidade de distância (é razoável considerar o quilômetro) for cobrada uma tarifa  $a$ , então  $f(1) = b + a$ , ou seja, adicina-se ao valor fixo inicial  $b$  o valor da tarifa cobrada  $a$ . Qual o preço a ser pago para duas unidades de distância, ou seja, qual o valor de  $f(2)$ ? Perceba que o valor a ser pago é  $f(1) + a$ , ou seja,  $f(2) = b + 2a$ . É fácil notar que, para uma certa quantidade  $n \in \mathbb{N}$  de unidades de distância percorridas, o valor a ser pago corresponde a  $f(n) = b + an$ . E se a corrida fosse de apenas  $2/3$  da unidade de distância? Nesse caso, dividindo a unidade de distância em três partes iguais, o valor da tarifa  $k$  a ser cobrada em cada terço seria tal que  $k + k + k = a$ , ou seja,  $3k = a$ , e daí,  $k = (1/3)a$ . Para descobriremos o valor da corrida para  $2/3$  da unidade de distância, basta tomarmos  $2k$ , ou seja,  $f(2/3) = b + (2/3)a$ . Procedendo de modo análogo, podemos estabelecer a função  $f$  para qualquer valor racional não negativo, ou seja,  $f(x) = b + ax$  para qualquer  $x \in \mathbb{Q}_+$ .

Deixando de lado a modelagem do problema, mas concentrando-se no conceito apresentado, se  $f$  for monótona e injetiva, pode-se formular que  $f(x) = b + ax$  para  $x \in \mathbb{R}$ . A demonstração deste fato encontra-se em (LIMA et al., 1997). No problema do táxi é importante notar que o acréscimo  $f(x+h) - f(x)$  não depende de  $x$ , mas apenas de  $h$ , em outras palavras, é constante em relação a  $x$ , ou seja, a variação é absoluta. Acréscimos iguais em valores diferentes do domínio acarretam acréscimos iguais nas respectivas imagens:  $f(x_1+h) - f(x_1) = f(x_2+h) - f(x_2)$  para quaisquer  $x_1 \neq x_2$ .

A função  $f$  que a cada número real  $x$  associa um número real  $f(x) = b + ax$  é chamada de *função afim*. Quando  $a = 0$  a função afim é denominada *função constante* e quando  $b = 0$  a função afim é denominada *função linear*. Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se caracteriza como afim quando  $f$  é monótona injetiva e o acréscimo  $f(x+h) - f(x)$  depende apenas de  $h$  mas nunca

de  $x$ . Este fato está demonstrado em (LIMA et al., 1997). O gráfico de uma função afim é uma linha reta. Para ver isto, basta mostrar que quaisquer três pontos desse gráfico são colineares. Para que isto ocorra, é necessário e suficiente que a maior distância entre quaisquer dois desses três pontos seja igual à soma das outras duas distâncias. Usando o Teorema de Pitágoras para o cálculo das distâncias, verifica-se facilmente a afirmação. O número  $a$  é chamado de *taxa de variação* da função. Não é indicado chamar este número de *coeficiente angular*, como muitos livros didáticos fazem, já que o ângulo do gráfico dessa função com a horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas  $x$  e  $f(x)$ . Esta terminologia é utilizada em Geometria Analítica (ângulo entre retas), mas não é recomendável para o estudo de Funções.

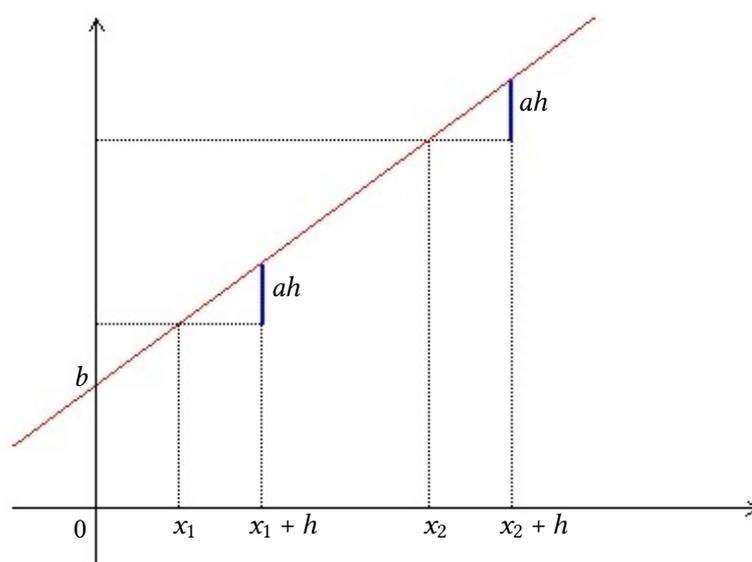


Figura 5.3: Gráfico de uma função afim.

No segundo problema, sob condições ideais de temperatura e nutrientes, temos uma função  $f$  que indica o tamanho da população de bactérias em um determinado instante de tempo  $t$ . Fica então definida a correspondência  $t \mapsto f(t)$ . Considerando que no instante inicial a população de bactérias tem um certo tamanho  $b$ , podemos escrever  $f(0) = b$ . Esse problema é diferente do anterior já que o acréscimo  $f(t+h) - f(t)$ , além de depender de  $h$  também depende do próprio instante de tempo  $t$ . A variação neste caso não é absoluta, mas relativa. Ou seja, o que é constante (em relação a  $t$ ) é o acréscimo relativo  $[f(t+h) - f(t)]/f(t)$ . E isto implica que  $f(t+h)/f(t)$  é constante. Seja  $a$  esta constante. Considerando uma certa unidade de tempo (é razoável considerar a hora), temos  $f(1)/f(0) = a$ , isto é,  $f(1) = f(0)a$ , e daí,  $f(1) = ba$ . Transcorridas duas unidades de tempo, como o acréscimo relativo é constante, então  $f(2)/f(1) = a$ , ou seja,  $f(2) = f(1)a$ , e isto implica  $f(2) = ba^2$ . E se o tempo decorrido

fosse  $3/4$  da unidade de tempo (45 minutos, caso a unidade de tempo seja a hora)? Nesse caso, dividindo a unidade de tempo em quatro partes iguais, a constante  $k$  dada pelo acréscimo relativo em cada quarto de unidade de tempo seria tal que  $k \cdot k \cdot k \cdot k = a$ , ou seja,  $k^4 = a$ , e daí,  $k = \sqrt[4]{a} = a^{1/4}$ . Assim, decorridos  $3/4$  da unidade de tempo, basta tomarmos  $k^3$  e o tamanho da população de bactérias é dado então por  $f(3/4) = bk^3 = ba^{3/4}$ . Procedendo de modo análogo, podemos estabelecer a função  $f$  para qualquer valor racional não negativo, ou seja,  $f(t) = ba^t$  para qualquer  $t \in \mathbb{Q}_+$ .

Deixando de lado mais uma vez a modelagem do problema, mas concentrando-se no conceito apresentado, se  $f$  for monótona e injetiva, pode-se formular que  $f(t) = ba^t$  para  $t \in \mathbb{R}$ . A demonstração deste fato encontra-se em (LIMA et al., 1997). No problema do crescimento de bactérias, é importante notar que a taxa de variação da população de bactérias é proporcional ao próprio tamanho da população. Acréscimos iguais em valores diferentes do domínio acarretam acréscimos relativos iguais nas respectivas imagens:  $[f(t_1 + h) - f(t_1)]/f(t_1) = [f(t_2 + h) - f(t_2)]/f(t_2)$  para quaisquer  $t_1 \neq t_2$ .

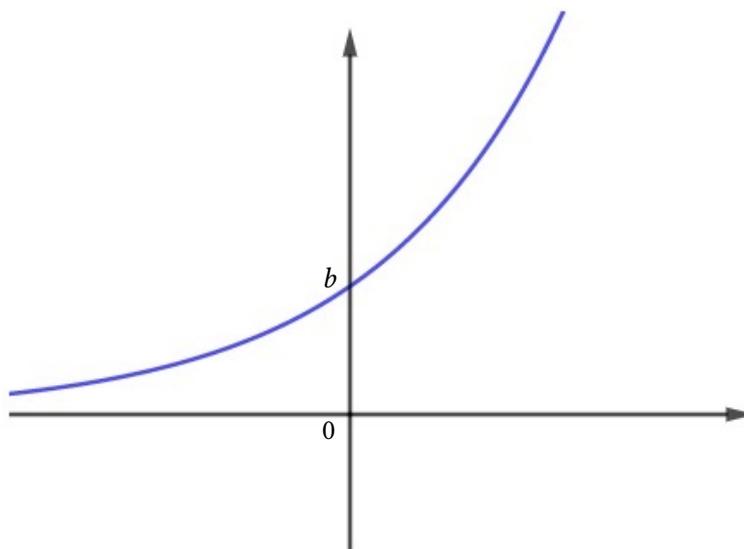


Figura 5.4: Gráfico de uma função do tipo exponencial.

A função que a cada número real  $t$  associa um número real  $f(t) = ba^t$ , com  $a > 0$ , é chamada de *função do tipo exponencial*. Quando  $a = 1$  a função é constante e quando  $b = 1$  a denominação é simplesmente *função exponencial*. Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se caracteriza como função do tipo exponencial quando  $f$  é monótona injetiva e o acréscimo relativo  $[f(t + h) - f(t)]/f(t)$  depende apenas de  $h$  mas nunca de  $t$ . Este fato está demonstrado em (LIMA et al., 1997). O gráfico de uma função do tipo exponencial não é uma linha reta. Quando  $a > 1$ ,

nota-se que, quando  $t$  varia da esquerda para a direita, a curva do tipo exponencial apresenta um crescimento bastante lento quando  $t$  é negativo. À medida que  $t$  cresce, o crescimento da função torna-se cada vez mais acelerado.

# Capítulo 6

## Conclusões

Nesta dissertação, foram apresentados, inicialmente, o desenvolvimento histórico da teoria de equações diferenciais ordinárias, citando importantes estudiosos e suas contribuições para o desenvolvimento desta importante ciência do mundo moderno. Em seguida enunciamos e demonstramos um dos principais teoremas da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções. Uma vez definido a validade do resultado anterior, seguimos com a apresentação da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e seus conceitos iniciais, de fundamental relevância para a sequência dos estudos, pois para a realização de modelagem matemática, a análise comportamental das funções são de maior interesse do que de fato expressá-las algebricamente.

No Capítulo 3, apresentamos uma introdução a Epidemiologia, descrevendo seu contexto histórico, bem como seus objetivos. Estudamos o processo de desenvolvimento da Epidemiologia Matemática, e em como ambas as ciências puderam, em mútua contribuição, tornar-se uma importante ferramenta analítica para cenários que outrora foram catastróficos. De posse dos principais termos e conceitos da Epidemiologia Matemática, realizamos uma introdução ao processo de Modelagem Matemática, e demonstrando a relevância que um modelo pode ter, quando aplicado a Epidemiologia.

Uma vez definidos os termos e significados de um modelo matemático aplicado a Epidemiologia, estudamos quatro dos principais modelos epidemiológicos: o Modelo SI (Suscetível - Infectado), o Modelo SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível), o Modelo SIR (Suscetível - Infectado - Removido) e o Modelo SIRS (Suscetível - Infectado - Removido - Suscetível). Verificamos que, embora de maneira simples, o Modelo SI pode ser utilizado no estudo da dinâmica de contágio das doenças que não possuam cura, mas demonstramos também que, com o passar do

tempo, esse modelo dista cada vez mais da realidade de uma epidemia, pois sugere que com  $t \rightarrow \infty$  o número de infectados tenderá para o total da população. Prosseguimos com o estudo do Modelo SIS, que descreve a dinâmica da propagação de doenças cuja a recuperação do infectado não o torna imune, definimos alguns parâmetros do modelo e em seguida realizamos uma análise detalhada das informações que cada variável pode fornecer ao modelo. Realizamos o mesmo método de estudo para os modelos SIR e SIRS, porém o primeiro descreve a dinâmica de contágio por doenças cuja a recuperação do indivíduo infectado o torna imune, ou não venha a ocorrer, causando assim a morte do portador, enquanto o segundo descreve o processo de epidemia por doenças que possuam apenas uma imunização temporária, ou seja, depois de um certo tempo o indivíduo recuperado passa a ser novamente suscetível.

No Capítulo 5, estudamos o caso de epidemia por COVID-19 na cidade de Rondonópolis, Brasil, aplicando o Modelo SIR. Utilizando os dados oficiais fornecidos pela Secretaria de Saúde do município, aplicamos o modelo para estudar o comportamento da epidemia sobre a população no intervalo de 120 dias a partir da divulgação do primeiro caso de infecção. Confirmamos, através deste estudo, que ações de prevenção e controle são fundamentais para se evitar cenários catastróficos, além de contribuir imensamente para a preservação da vida.

Encerramos o trabalho apresentando alguns conceitos de função exponencial para utilização no processo de aprendizagem dos alunos do Ensino Médio, uma vez que a modelagem matemática auxilia no estudo de problemas cotidianos e está intimamente ligada aos conhecimentos de exponenciação. A prática de modelagem dos problemas experienciados pelos alunos, contribui na construção crítica do indivíduo e incentiva a sua participação ativa na sociedade.

## Referências bibliográficas

- ALMEIDA, L. M. W. de; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – com o que estamos lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Acta Scientiae**, v. 14, n. 2, p. 217, 2012.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Sobre a Modelagem Matemática do saber e seus limites. **Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais.**, Recife, p. 12, 2007.
- BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1986.
- BONITA, R.; BEAGLEHOLE, R.; KJELLSTRÖM, T. **Epidemiologia básica**. 2. ed. Santos: Editora Santos, 2010.
- CHAVES, M. I. d. A. Repercussões de experiências com modelagem matemática em ações docentes. **REMATEC**, Natal, v. 9, p. 25, 2014.
- FARIAS, A. V. **Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária**. [S.l.]: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.
- FORATTINI, O. P. **Conceitos Básicos de Epidemiologia Molecular**. São Paulo: EdUSP, 2005. v. 64.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1997. v. 1.
- LIMA, J.; LIMA, J. I. d. et al. Um estudo sobre equações diferenciais ordinárias aplicado à epidemiologia. Universidade Federal de Campina Grande, 2018.
- LUIZ, M. H. R. Modelos matemáticos em epidemiologia. UNESP, 2012.
- PACHI, C. G. d. F. **Modelo matemático para o estudo da propagação de informações por campanhas educativas e rumores**. 2006. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
- PEREIRA, M. G. **Epidemiologia: teoria e prática**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2001.
- RAMON, R. **Modelagem matemática aplicada a epidemiologia**. Florianópolis: UFSC, 2011.
- ROCHA, D. I. C. Modelos matemáticos aplicados à epidemiologia. Faculdade de Economia da Universidade do Porto, 2012.

SCHIMIT, P.; MONTEIRO, L. Who should wear mask against airborne infections? Altering the contact network for controlling the spread of contagious diseases. **Ecological modelling**, Elsevier.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11.

SOUZA GOMES, E. C. de. **Conceitos e ferramentas da epidemiologia**. Recife: Editora Universitária UFPE, 2015.

TELES, P. Modelos compartimentais e aplicações. **Revista de Ciência Elementar**, Casa das Ciências, 2020.

# Apêndice A

## Primeiro Apêndice

**Lema A.1** (Completude no Espaço das Funções Contínuas). *Seja  $\mathfrak{X} = C([a, b], \mathbb{R}^n)$  o conjunto das funções contínuas  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e a métrica  $d(g_1, g_2) = \sup_{t \in [a, b]} \|g_1(t) - g_2(t)\|$ . O espaço métrico  $(\mathfrak{X}, d)$  é completo.*

*Demonstração.* Seja  $(g_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathfrak{X}$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(g_m, g_n) < \epsilon$  para quaisquer  $m, n > n_0$ . Então  $\sup_{t \in [a, b]} \|g_m(t) - g_n(t)\| < \epsilon$  para quaisquer  $m, n > n_0$ . Em particular,  $\|g_m(t) - g_n(t)\| < \epsilon$  para todo  $t \in [a, b]$  e para quaisquer  $m, n > n_0$ . Para cada  $t \in [a, b]$  fixo, temos uma sequência de Cauchy  $(g_n(t))$  em  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\mathbb{R}^n$  é completo, então para cada  $t \in [a, b]$ , a sequência  $(g_n(t))$  converge em  $\mathbb{R}^n$ . Dessa forma, fica definida uma função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(t) = \lim g_n(t)$ . Para demonstrarmos que  $\mathfrak{X}$  é completo, basta mostrarmos que  $g \in \mathfrak{X}$  e que  $g = \lim g_n$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Para verificarmos a continuidade de  $g$ , observamos que  $\|g(t) - g(t_0)\| \leq \|g(t) - g_n(t)\| + \|g_n(t) - g_n(t_0)\| + \|g_n(t_0) - g(t_0)\|$ . A primeira e última parcelas estão controladas pelo fato de que  $g(t) = \lim g_n(t)$  para cada  $t \in [a, b]$ . A parcela intermediária é controlada pelo fato de que  $g_n$  é contínua. Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|g(t) - g_n(t)\| < \epsilon/3$  sempre que  $n > n_1$  e  $\|g_n(t_0) - g(t_0)\| < \epsilon/3$  sempre que  $n > n_2$ . Pela continuidade de  $g_n$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|g_n(t) - g_n(t_0)\| < \epsilon/3$  sempre que  $|t - t_0| < \delta$ . Logo, tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  e se  $|t - t_0| < \delta$ , então  $\|g(t) - g(t_0)\| < \epsilon$  para todo  $n > n_0$  com  $t_0, t \in [a, b]$ . Portanto  $g$  é contínua, ou seja,  $g \in \mathfrak{X}$ . Agora provaremos que  $g = \lim g_n$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(g_m, g_n) = \sup_{t \in [a, b]} \|g_m(t) - g_n(t)\| < \epsilon/2$  para quaisquer  $m, n > n_0$  e  $t \in [a, b]$ . Em particular  $\|g_n(t) - g_m(t)\| < \epsilon/2$ . Fixando  $t \in [a, b]$  e fazendo  $m \rightarrow +\infty$  temos  $\|g_n(t) - g(t)\| \leq \epsilon/2 < \epsilon$  para todo  $n > n_0$  e para todo  $t \in [a, b]$ . Dessa forma,  $\sup_{t \in [a, b]} \|g_n(t) - g(t)\| < \epsilon$  e, portanto,  $d(g_n, g) < \epsilon$  para todo  $n > n_0$  e para todo  $\epsilon > 0$ . Logo,  $g = \lim g_n$ . Fica assim provado que  $(\mathfrak{X}, d)$  é completo.  $\square$

**Lema A.2** (Contração). *Sejam  $(\mathfrak{X}, d)$  um espaço métrico completo e  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  uma contração, isto é,  $d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$  com  $0 \leq \lambda < 1$ . A função  $F$  possui um único ponto fixo  $p \in \mathfrak{X}$ , ou seja, um único ponto  $p \in \mathfrak{X}$  tal que  $F(p) = p$ . Mais ainda,  $p$  é um ponto fixo atrator, isto é, considerando  $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$ , temos  $\lim F^n(x) = p$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ .*

*Demonstração.* Com relação à existência, sejam  $x \in \mathfrak{X}$  e  $x_n = F^n(x)$ . A sequência  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. Com efeito, provaremos que dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_m, x_n) < \epsilon$  para  $m, n > n_0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $n < m$ . Dessa forma, existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $m = n + r$ . Temos  $d(x_m, x_n) = d(x_{n+r}, x_n) = d(F^{n+r}(x), F^n(x)) = d(F^n(x_r), F^n(x)) \leq \lambda^n d(x_r, x)$ . Usamos aqui a hipótese de que  $F$  é uma contração. Pela desigualdade triangular,  $d(x_r, x) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{r-1}, x_r) = d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \dots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \leq d(x, F(x))[1 + \lambda + \dots + \lambda^{r-1}]$ . Novamente usamos aqui o fato de que  $F$  é contração. Agora, observe que  $1 + \lambda + \dots + \lambda^{r-1}$  é uma progressão geométrica de razão  $\lambda$  e primeiro termo igual a 1 com soma  $(1 - \lambda^r)/(1 - \lambda)$ . Como  $1 - \lambda^r \leq 1$  pois  $0 \leq \lambda < 1$  então podemos concluir que a desigualdade  $d(x_m, x_n) \leq \lambda^n d(x_r, x)$  implica  $d(x_m, x_n) \leq \lambda^n (1 - \lambda)^{-1} d(x, F(x))$ . Se  $d(x, F(x)) = 0$ , então  $d(x_m, x_n) = 0 < \epsilon$  para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ . Assim, fica provado que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy (basta tomar  $n_0 = 1$ ). Considere  $d(x, F(x)) \neq 0$ . Impondo  $\lambda^n (1 - \lambda)^{-1} d(x, F(x)) < \epsilon$  temos dois casos a considerar para a constante de contração  $\lambda$ . Se  $\lambda = 0$  então  $d(x_m, x_n) = 0 < \epsilon$  para todos  $m, n \in \mathbb{N}$  e basta tomar  $n_0 = 1$  para ver que  $(x_n)$  é de Cauchy. Se  $\lambda \neq 0$  obtemos a estimativa  $n > \log_\lambda[(1 - \lambda)\epsilon/d(x, F(x))]$ . Seja  $n_0$  o primeiro natural que satisfaz esta última inequação. Assim, para  $m, n > n_0$ , temos que  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ . Assim, fica provado que a sequência dada por  $x_n = F^n(x)$  para  $x \in \mathfrak{X}$  é uma sequência de Cauchy. Como, por hipótese,  $(\mathfrak{X}, d)$  é completo, a sequência de Cauchy  $(x_n)$  é convergente. Logo, existe  $p \in \mathfrak{X}$  tal que  $\lim x_n = p$ . Afirmamos que  $p$  é o ponto fixo de  $F$ . De fato, como  $F$  é contínua,  $F(p) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim F^{n+1}(x) = \lim x_{n+1} = p$ . Com isto, fica também justificado que  $p$  é atrator. Para finalizar, provaremos a unicidade do ponto fixo. Sejam  $p$  e  $\tilde{p}$  pontos fixos de  $F$ . Então  $d(p, \tilde{p}) = d(F(p), F(\tilde{p})) \leq \lambda d(p, \tilde{p})$ . Isto implica que  $(1 - \lambda)d(p, \tilde{p}) \leq 0$ . Portanto  $d(p, \tilde{p}) = 0$  e assim  $p = \tilde{p}$ .  $\square$

**Lema A.3** (Contração). *Seja  $(\mathfrak{X}, d)$  um espaço métrico completo. Se  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  é contínua e, para algum  $m$ ,  $F^m$  é uma contração, então existe um único ponto fixo  $p$  de  $F$ . Mais ainda,  $p$  é atrator de  $F$ .*

*Demonstração.* Seja  $p$  o único ponto fixo atrator de  $F^m = G$  dado pelo Lema A.2 e considere  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > m$ . Existem  $k, l \in \mathbb{N}$  tal que  $n = mk + l$  com  $0 \leq l < m$ . Para  $x \in \mathfrak{X}$ ,

$F^n(x) = F^{mk}(F^l(x)) = [F^m]^k(F^l(x)) = G^k(y)$  onde  $y = F^l(x) \in \mathfrak{X}$ . Quando  $n \rightarrow +\infty$  temos  $k \rightarrow +\infty$ . Assim,  $\lim F^n(x) = \lim G^k(y) = p$ , isto é,  $p$  é atrator de  $F$ . Vamos provar que  $p$  é ponto fixo de  $F$ . Com efeito,  $p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p)$ . O argumento para provar a unicidade de  $p$  é análogo ao utilizado na demonstração do Lema A.2.  $\square$

**Lema A.4** (Equação Integral). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ . Uma curva diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é solução do problema de Cauchy (2.4) se, e somente se, a curva  $\varphi$  é solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (\text{A.1})$$

*Demonstração.* Seja  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável tal que  $(t, \varphi(t)) \in U$  para  $t \in I$ . Suponha que  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  com  $\varphi(t_0) = x_0$ . Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a condição  $\varphi(t_0) = x_0$ , concluímos que a função  $\varphi$  é dada por  $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ . Reciprocamente se  $\varphi$  é solução da equação integral, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, concluímos que  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  e  $\varphi(t_0) = x_0$ .  $\square$