UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

DANILO RODRIGUES PEREIRA

INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE LIMITE E DERIVADA NO ENSINO MÉDIO VIA FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

Ilhéus-Bahia
2022

P436 Pereira, Danilo Rodrigues.
Introdução aos conceitos de limites e derivadas no ensino médio via funções afim e quadrática / Danilo Rodrigues Pereira. – Ilhéus, BA: UESC, 2022.
74f. : il.

Orientador: Vinícius Augusto Takahashi Arakawa
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.
Inclui referências.

1. Funções (Matemática). 2. Polinômios. 3. Cálculo. 4. Geogebra (Software). I. Título.

CDD 515.5

DANILO RODRIGUES PEREIRA

INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE LIMITE E DERIVADA NO ENSINO MÉDIO VIA FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz.
Orientador: Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa

Ilhéus-Bahia
2022

DANILO RODRIGUES PEREIRA

INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE LIMITE E DERIVADA NO ENSINO MÉDIO VIA FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Aprovado em 20 de janeiro de 2022.

Banca Examinadora

Geizane Lima da Silva

____

Profa. Dra. Geizane Lima da Silva, UESC

Tatiana Miguel Rodrigues

____

Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues, UNESP - Bauru

____

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa, UESC
Orientador

Pois o Senhor é quem dá sabedoria; de sua boca procedem o conhecimento e o discernimento.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, princípio de tudo, pela presença constante e pela proteção divina na minha vida.

A meu pai (*in memoriam*) e minha mãe, exemplos e alicerces em minha vida, pela formação familiar dada, pelo incentivo aos estudos e por sempre regozijarem-se com minhas conquistas.

Aos meus queridos e amados filhos Hanã Lopes Pereira e Pedro Lopes Pereira razão da minha existência.

A minha esposa, amada, namorada, companheira e amiga, Alessandra lopes Ramos Pereira, que sempre esteve ao meu lado, incentivando e motivando em cada instante da minha vida.

A minha querida e amada irmã, Soraya Rodrigues Pereira, meus sobrinhos Henrique Rodrigues e Gabriela Rodrigues, e ao seu esposo Rodrigo, por sempre acreditar em minha capacidade.

Aos meus familiares e amigos, em especial aos meus tios Elbino Alves e Mara Castro pela força que me deram no início da minha vida profissional, e especialmente na conclusão da minha graduação.

A todo o corpo docente do PROFMAT da UESC, pela qualidade e compromisso que conduziram o curso.

Aos meus colegas do PROFMAT das turmas de 2014 e 2019, pelo sentimento mútuo de companheirismo que permeou durante todo o curso e pelo convívio fraterno, em especial a Altamiro Bispo que juntos, desde 2014, em busca dessa conquista, e por ser motivo de inspiração e sempre acreditar na sua própria capacidade.

Aos meus colegas de trabalho, que durante esses anos na frente de uma Direção Escolar, pelas palavras de encorajamento e motivação, em especial meu amigo e irmão Fabrizio Ferreira que sempre tive o apoio.

Ao Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa, pela gentileza com que aceitou o convite para orientar este trabalho, pelo prazer em tê-lo como orientador, pela orientação com propriedade, pelas críticas construtivas, pelo exemplo de comprometimento, dedicação e profissionalismo.

Agradeço à CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro, e à Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização deste trabalho: MUITO OBRIGADO!

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar a importância de implementar os conceitos intuitivos de limites e derivadas no 1º ano do Ensino Médio, afim de justificar a validação de propriedades de conteúdos, muitas vezes colocados como afirmativas abstratas aos alunos. Tais conceitos serão apresentados sob uma perspectiva do estudo das funções afins e quadrática. Inicialmente, apresentamos conceitos preliminares de função, especialmente, as caracterizações e representações gráficas das funções afim e quadrática. Em seguida, a noção intuitiva de limite será exposta, utilizando gráficos e tabelas. Na sequência, será abordado o conceito de derivada, a partir da problematização da reta tangente a uma curva, passando pela definição de limite. Por fim, será abordado uma série de resolução de problemas com aplicação dos conceitos de limites e derivadas, como determinação de pontos de mínimo ou máximo bem como intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática; trazemos a interdisciplinaridade com a Física, nos conceitos de deslocamento, velocidade e aceleração. A aplicação do *Software GeoGebra* também foi utilizada para a construção das figuras contidas nesse trabalho, produzidas pelo próprio autor, e na proposta de uma oficina com o intuito de mostrar aos alunos o comportamento das retas secantes e tangente a uma curva em um determinado ponto.

Palavras-chave: Função Afim; Função Quadrática; Limite; Derivada, *GeoGebra*.

Abstract

This work aims to present the importance of implementing the intuitive concepts of limits and derivatives in the 1st year of high school, in order to justify the validation of content properties, often placed as abstract statements to students. Such concepts will be presented from the perspective of the study of affine and quadratic functions. Initially, we present preliminary concepts of function, especially the characterizations and graphical representations of the affine and quadratic functions. Then, the intuitive notion of limit will be exposed, using graphs and tables. Next, the concept of derivative will be discussed, starting from the problematization of the tangent line to a curve, passing through the definition of limit. Finally, a series of problem solving will be addressed with application of the concepts of limits and derivatives, such as determination of minimum and maximum points as well as growth and decay intervals of the quadratic function, we bring the interdisciplinarity with Physics, in the concepts of displacement , velocity and acceleration. The application of *GeoGebra Software* was also used to construct the figures contained in this work, produced by the author himself, and in the proposal of a workshop in order to show students the behavior of secant lines and tangent to a curve in a certain point.

Keywords: Affine Function; Quadratic Function; Limit; Derivative, *GeoGebra*

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das subáreas mais importante que compõe o Currículo de cursos da área de exatas e foi de extrema importância para todo o desenvolvimento dessa ciência. Essa importância se deve ao fato que suas ferramentas e técnicas permitem inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como na Física, Biologia, Astronomia, Química, Medicina, Engenharias, dentre outras; assim como apresenta proficuidade nas justificativas de alguns conceitos matemáticos, que muitas vezes são impostos aos alunos do Ensino Médio como uma sentença verdadeira ou é dada como uma definição de conteúdo. Observamos ainda que dentro do contexto de áreas aplicadas, podemos considerar situações do nosso cotidiano, tais como a dinâmica de uma população, juros, impostos, movimentações bancárias, análise da velocidade ou aceleração de um corpo em movimento, estudo do comportamento gráfico das funções matemáticas, decorrente de uma problematização real do cotidiano do indivíduo.

Apesar dos importantes relatos apresentados, o Cálculo Diferencial e Integral, é abordado, aqui no Brasil, apenas no ensino superior, e prioritariamente, nos cursos das áreas de exatas. Neste contexto, juntamente com uma aplicação metodológica formal e conceitual, muitos alunos são desmotivados e não são preparados para resolverem situações-problema envolvendo esse conteúdo. Essa realidade pode ser comprovada pelos altos índices de reprovação na disciplina.

Historicamente, o ensino da Matemática no Brasil vem passando por várias mudanças significativas, até mesmo de ordem curricular, por exemplo a nova BNCC - Base Nacional Cumum Curricular. Muitas dessas mudanças têm por objetivo melhorar os índices nas avaliações internacionais, tais como, no Programa Internacional de Avaliação dos Alunos (PISA). Conforme publicação do INEP, os resultado do PISA de 2018, revela que $68,1\%$ dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Quando comparado com os países da América do Sul analisados pelo PISA, o Brasil é o pior país em matemática, empatado estatisticamente com a Argentina, com 384 e 379 pontos, respectivamente. Uruguai teve 418 pontos, Chile, 417 pontos, Peru, 400 pontos e Colômbia, 391, estão à frente.

Acreditamos que diversos motivos contribuem para esse resultado insatisfatório. Dentre eles, podemos citar o desinteresse dos alunos, professores mal preparados pedagogicamente, falta de apoio familiar aos educandos, falta de investimento satisfatório na educação no país, dentre outros. Diante desses desafios, hoje o professor tem que planejar, buscando novos caminhos e metodologias inovadoras que levam a uma melhor compreensão das habilidades trabalhadas em sala de aula.

Em um dos artigos publicados na Revista do Professor de Matemática - RPM, o Professor Geraldo Ávila questiona a inclusão de tópicos do Cálculo no Ensino Médio: "Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por quê? Como fazer isso? [1, 1991, p.1]

Em [3],o professor Robert, relata experiências pessoais e profissionais sobre o assunto, apoiando a ideia de Geraldo Ávila. Para ambos os citados, o Cálculo é muito gratificante pelas ideias novas que trazem e pelo poder de alcance de seus métodos e aplicações.

No Currículo de Matemática na Educação Básica, o ensino de funções inicia-se no Ensino Fundamental e alonga-se até o 3° Ano do Ensino Médio, dando maior ênfase no 1° Ano desse nível de escolaridade. Percebe-se que, mesmo após vários anos estudando os diversos tipos, o conceito e propriedades de funções, a maioria dos alunos, ao final do Ensino Médio, não é capaz de aplicar os conceitos de função no seu dia-a-dia. O conceito matemático de função é um dos mais importantes no Ensino da Matemática na Educação Básica, e na maioria das vezes está relacionado com contextos básicos, como, por exemplo, a noção de Contagem, a Relação entre Grandezas, etc.

O presente trabalho tem o objetivo central de introduzir as noções intuitivas de Limite e Derivada que serão importantes na compreensão e justificativa de conceitos e resultados de Matemática e Física. O público-alvo para esse estudo são os estudantes do 1° Ano do Ensino Médio. Para auxiliar e motivar os alunos, será utilizado o *Software GeoGebra*, com o objetivo de proporcionar tanto ao professor como ao aluno uma aula descontraída e interessante do ponto de vista didático, levando em consideração a importância do conteúdo de matemática trabalhado, tornando mais significativo o uso de funções conectada à realidade dos alunos, com vistas a dar condições para que os mesmos adquiram habilidades no trabalho com gráficos de funções usando esse *software*. Para alcançar o referido objetivo, a metodologia será aplicada de forma construtiva, com base em uma variação de exemplos, afim do próprio aluno tirar suas conclusões sobre os conceitos de limite e derivadas.

Por fim, é esperado que as ideias expostas no presente trabalho, possam contribuir com a melhoria na qualidade do ensino-aprendizagem e, eventualmente, possam ser refletidas no Ensino Superior, em um intervalo de médio a longo prazo.

Esta dissertação está dividida em três capítulos, considerações finais.

No Capítulo 1, abordaremos os conceitos preliminares de função matemática, com enfase, no estudo das funções afim e quadrática, especialmente, as respectivas representações gráficas.

No Capítulo 2, será introduzido, inicialmente intuitivo, os conceitos de limites e derivadas, via estudos das funções afim e quadrática.

No Capítulo 3, serão expostas situações-problemas que estimulam a aprendizagem dos alunos, aplicando os conceitos de limites e derivadas no estudo das funções afim e quadrática. São atividades didáticas que envolvem os intervalos de crescimento / decrescimento de uma função, pontos de máximo ou mínimo, e, aplicação de uma interdisciplinaridade com Física, nos conceitos de deslocamento, velocidade e aceleração de um corpo, no movimento uniformemente variado. Também trazemos uma oficina com o uso do *Software GeoGebra* para ilustrar o conceito de reta tangente. Por fim, foi proposta uma sequência didática para ser aplicada para os alunos do 1º Ano do Ensino Médio.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos básicos de funções, especialmente, as funções afim e quadrática, necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Todas as informações serão dadas como suporte para o professor introduzir os conceitos de Limites e Derivadas, que serão estudados no Capítulo 2. Algumas definições e exemplos foram retirados e adaptados de [7], [9] e [6].

Entender o desenvolvimento da matemática através da sua história, poderá oferecer ao aluno uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno terá condições de desenvolver atitudes mais críticas e menos passivas. A matemática traz grandes contribuições para o desenvolvimento do aluno, pois ela tem relações diretas com diversas áreas do conhecimento. Por esse motivo, trazemos extratos sobre breves históricos do surgimento dos conceitos de Função.

1.1 Desenvolvimento Histórico - Função Matemática

Os breves relatos citados a seguir, foram extraídos integralmente de [4].

A história do termo função proporciona outro exemplo interessante da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar os conceitos. A palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Esta última ideia corresponde ao conceito de função que a maioria dos alunos dos cursos elementares de matemática tem. O conceito de Euler se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768 – 1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas sobre propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente. Numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) chegou a seguinte formulação: Uma variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função.

A teoria dos conjuntos propiciou ampliar o conceito de função de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa. Assim, na teoria dos conjuntos, uma função f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se domínio da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz imagem da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano A x B.

O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que tanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática.

No nosso dia-a-dia, estamos acostumados a expressões cotidianas que retratam uma relação entre grandezas, como por exemplo, o quanto João ganha é função do tempo que ele trabalha, ou ainda a distância que percorremos está em função da velocidade e do tempo que viajamos. Essas e outras expressões ilustram a noção de função como uma relação entre grandezas de dois conjuntos dados. Matematicamente, a noção de função foi melhor entendida muito recentemente, com os avanços teóricos ocorridos no final do século XIX e início do século XX.

Definição 1.1 *Intuitivamente, uma função é definida como um objeto matemático composto de três ingredientes: um conjunto não vazio A, chamado de Domínio da Função ou Conjunto de Saída; um conjunto não vazio B, chamado de Contradomínio da Função ou Conjunto de Chegada; e uma correspondência, que associa a cada elemento do conjunto A a um único elemento do conjunto B. Essa correspondência é definida como Lei de Formação da Função. O trio Domínio, Contradomínio e Lei de Formação damos o nome de Função.*

Para simplificar, foi criada uma notação que resume todos os três elementos de uma função. Denotamos uma função por:

$$f: \begin{array}{l} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

Observa-se que na notação acima, A é o domínio, B é o contradomínio e que $x \to f(x)$ é a lei de formação, ou seja, se x é um elemento do conjunto A, então ele esta associado ao elemento $y = f(x)$ de B. É importante não confundir uma função com uma expressão analítica, pois para caracterizar uma função, é preciso dar os seus três elementos (domínio, contradomínio e lei de formação), e não apenas a expressão. Nesse trabalho, quando não houver problema em identificar os conjuntos domínio e contradomínio, a função será expressa apenas pela lei de formação, sem problema de generalização.

Exemplo 1.1 *Considere o domínio como sendo o conjunto P formado pelas pessoas do Brasil e um segundo conjunto como sendo o conjunto L das letras do alfabeto. A lei de formação será a seguinte: a cada pessoa do Brasil, associaremos a primeira letra do seu nome. Assim, uma pessoa chamada Danilo, pertencente ao domínio, será associada à letra D. Em notação de função, temos:*

$$f: \begin{array}{l} P \to L \\ x \mapsto f(x) \end{array},$$

sendo $f(x)$ a primeira letra do nome da pessoa x.

Definição 1.2 *Dada uma função f definida por*

$$f: \begin{array}{l} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array},$$

o conjunto imagem de f é o subconjunto $f(A)$ do contradomínio B formado pelos elementos y do contradomínio, tais que existe pelo menos um elemento x do domínio A, sendo $y = f(x)$, ou seja, $Img(f) = \{y \in B;$ existe $x \in A / y = f(x)\}$.

A imagem de um elemento $x \in A$ é o elemento $y = f(x) \in B$.

Exemplo 1.2 *Seja a função f definida de modo que o seu domínio é o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e o contradomínio é o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), e a lei de formação é tal que a cada número natural n pertencente ao domínio, associamos o sucessor do dobro desse número.*

Observa-se que podemos denotar essa função por:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2 \cdot n + 1 \end{array}.$$

Note que a imagem do número 3 é o sucessor do dobro de 3, ou seja, é igual a 7. Matematicamente, a lei de formação dessa função poderá ser escrita através da expressão analítica $f(x) = 2 \cdot n + 1$ ou $y = 2 \cdot n + 1$, com $n, y \in \mathbb{N}$. Assim, a imagem de 3 poderá ser escrita da forma $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Analisando a lei de formação da função $f(x) = 2 \cdot n + 1$, podemos observar que a expressão $2 \cdot n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$, representa o conjunto dos números naturais ímpares, logo, o conjunto imagem da função f será o subconjunto do contradomínio $\mathbb{N}$ formado por todos os números naturais impares.

Definição 1.3 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, x_1 e $x_2 \in X$, chama-se:*

- *crescente, quando $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$;*
- *decrescente, quando $x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$;*

- *monótona não-decrescente, quando* $x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *monótona não-crescente, quando* $x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$;

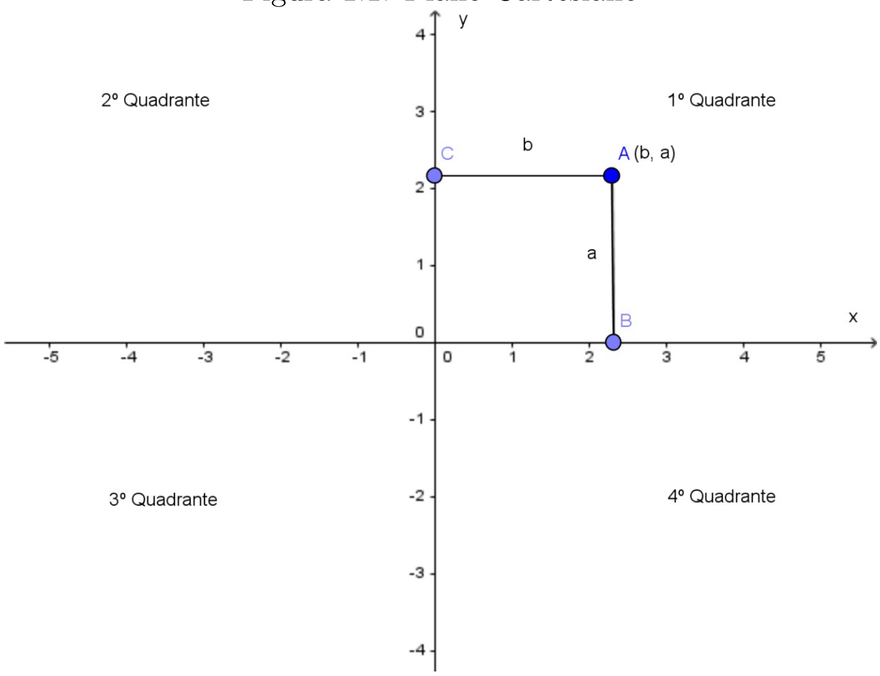
Em qualquer um dos quatro casos, f diz-se monótona. Nos dois primeiros, diz-se que f é estritamente monótona.

1.2 Representação Gráfica de uma Função

Dada a função $f : X \to Y$, o conjunto $G = \{(x, f(x)), \forall x \in X\}$ subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, é denominado Gráfico da Função f.

Para construir o gráfico de uma função $f : X \to Y$, será utilizado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais (Figura 1.1). O sistema de coordenadas ortogonais é composto por duas retas perpendiculares entre si, onde a reta horizontal, eixo x, é denominado eixo das abscissas e a reta vertical, eixo y, é denominado eixo das ordenadas. O ponto de inserção das duas retas é a origem do sistema. As retas dividem o plano em quatro partes iguais chamadas de quadrantes.

Figura 1.1: Plano Cartesiano



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Daí, o gráfico G da função é conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano, com $x \in X$ e $y \in f(X)$. Para isso, consideremos os valores do domínio da função, no eixo x, e as respectivas imagens, no eixo y.

Analisando o gráfico G de uma função, podemos obter informações importantes sobre o comportamento dessa função, como:

- O domínio e a imagem da função.
- Os pontos onde o gráfico intercepta os eixos coordenados.
- Os intervalos para os quais a função é crescente, decrescente ou constante.
- Os intervalos para os quais o valor da função é positivo e negativo.
- O valor máximo ou mínimo que a função atinge.
- O (s) valor (es) da(s) raiz(es) da função.

Exemplo 1.3 *Analisando a tabela a seguir, que representa a vazão diária de água do reservatório de uma empresa, em m^3/seg, é possível relacionar as grandezas D, representado o dia, e a grandeza V, indicando a vazão de água.*

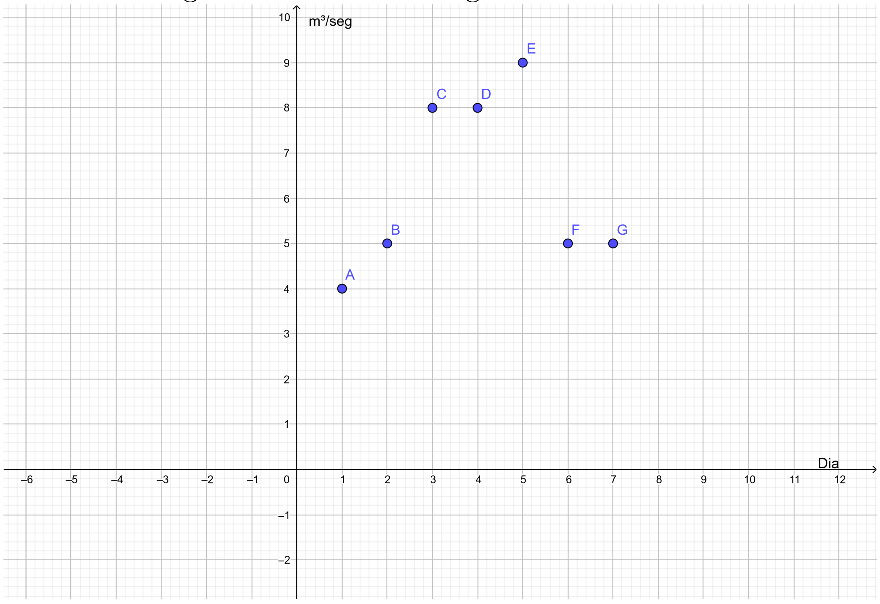
Dia	m^3/seg
1	4
2	5
3	8
4	8
5	9
6	5
7	5

Tabela 1.1: Vazão de água do reservatório

O gráfico da função $f : D \to V$ é o lugar geométrico descrito pelos pontos $(d, f(d))$, com $d \in D$ e $v \in V$, sendo $v = f(d)$.

Observa-se que o gráfico desta função não representa uma curva contínua, pois o seu domínio é formado por um subconjunto dos números naturais. O conceito de função contínua será visto no próximo capítulo.A primeira coluna da Tabela 1.1 representa a abscissa e a segunda coluna as respectivas ordenadas. Logo, o gráfico de f é representado pela Figura 1.2

Figura 1.2: Vazão de água do reservatório



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Exemplo 1.4 *Dada a função f, definida por*

$$f: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ d \mapsto 2 \cdot d + 1 \end{array}.$$

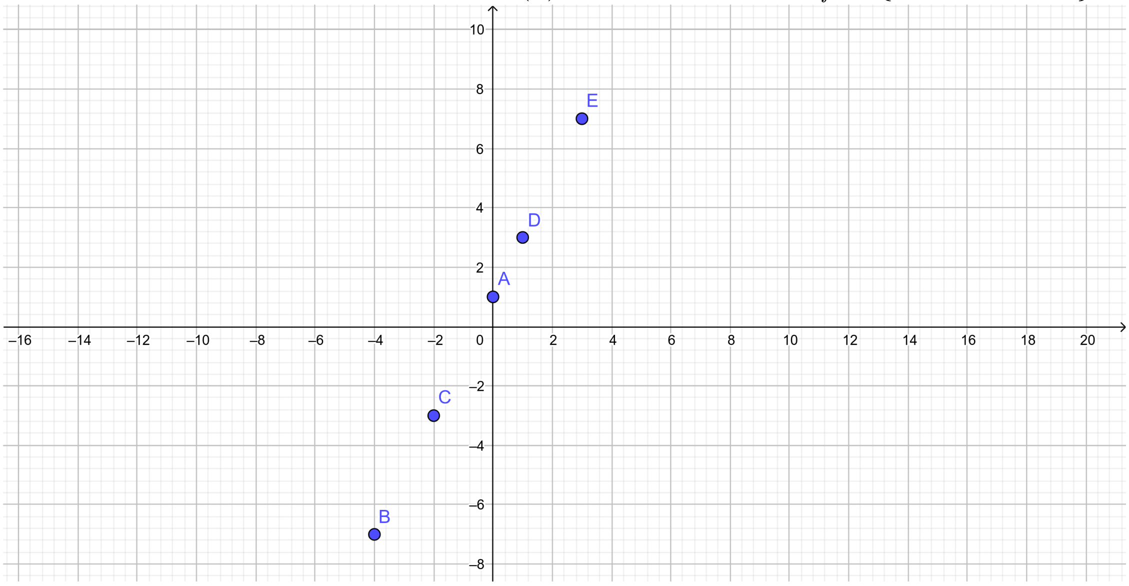
Construa os Gráficos G_1*,* G_2 *e* G_3*, sendo* G_1 *o Gráfico da função f, com* $D = \{-4, -2, 0, 1, 3\}$*,* G_2 *o Gráfico da função f, com* $D = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$*. Por fim, utilize o Software GeoGebra para construir o Gráfico* G_3*, com* $D = \mathbb{R}$*.*

A partir da Tabela 1.2 a seguir, o Gráfico G_1 está representado na Figura 1.3.

d	$y = 2 \cdot d + 1$	(d, y)
-4	$y = 2 \cdot (-4) + 1$	(-4, -7)
-2	$y = 2 \cdot (-2) + 1$	(-2, -3)
0	$y = 2 \cdot 0 + 1$	(0, 1)
1	$y = 2 \cdot 1 + 1$	(1, 3)
3	$y = 2 \cdot 3 + 1$	(3, 7)

Tabela 1.2: Gráfico G_1 da função $f(d) = 2 \cdot d + 1$, com $D_f = \{-4, -2, 0, 1, 3\}$

Figura 1.3: Gráfico G_1 da função $f(d) = 2 \cdot d + 1$, com $D_f = \{-4, -2, 0, 1, 3\}$



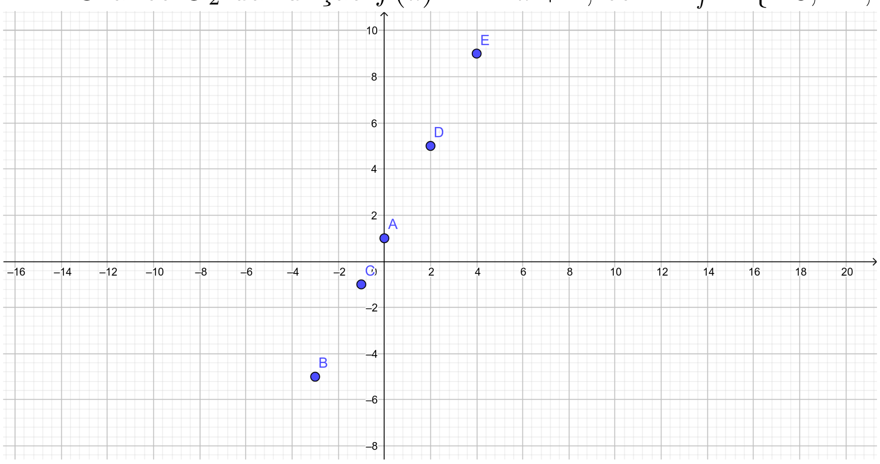
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Construindo a Tabela 1.3, o Gráfico G_1 está representado na Figura 1.4.

d	$y = 2 \cdot d + 1$	(d, y)
-3	$y = 2 \cdot (-3) + 1$	(-3, -5)
-1	$y = 2 \cdot (-1) + 1$	(-1, -1)
0	$y = 2 \cdot 0 + 1$	(0, 1)
2	$y = 2 \cdot 2 + 1$	(2, 5)
4	$y = 2 \cdot 4 + 1$	(4, 9)

Tabela 1.3: Gráfico G_2 da função $f(d) = 2 \cdot d + 1$, com $D_f = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$

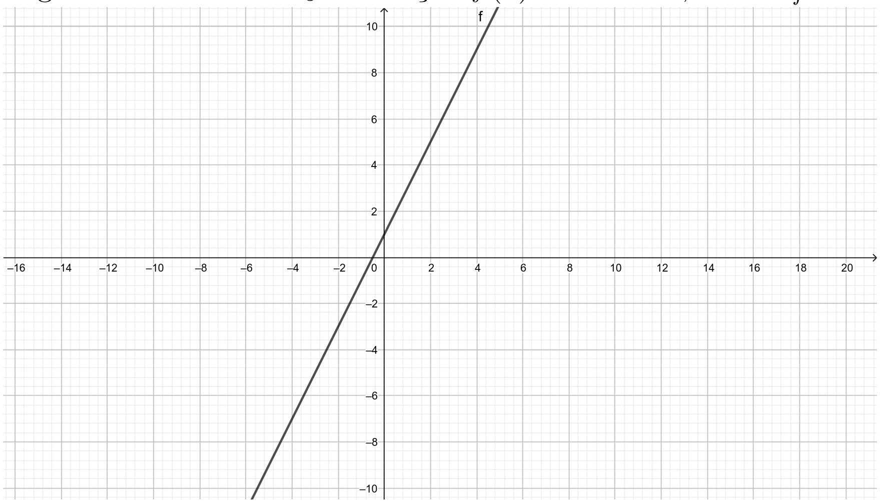
Figura 1.4: Gráfico G_2 da função $f(d) = 2 \cdot d + 1$, com $D_f = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Utilizando o *Software GeoGebra*, em www.geogebra.org, e digitando na caixa de entrada a expressão $y = 2x+1$, em seguida tecla enter, o *Software* irá construir o Gráfico G_3, conforme Figura 1.5.

Figura 1.5: Gráfico G_3 da função $f(d) = 2 \cdot d + 1$, com $D_f = \mathbb{R}$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Comparando os Gráficos G_1, G_2 e G_3, é possível concluir que os pontos dos Gráficos G_1 e G_2 são colineares e que $G_1, G_2 \subset G_3$. Logo, o Gráfico da função f, com Domínio $D = \mathbb{R}$, é o lugar Geométrico representado por uma reta.

1.3 Função Afim

Historicamente, tem-se observado que as discussões em torno do processo de ensino-aprendizagem da matemática ganhou muita força com o surgimento de novas tendências e aperfeiçoamento de outras já conhecidas. Mas, ainda nos deparamos com uma prática de ensino tradicional onde técnicas e regras são os objetivos principais nesse método de ensino, proporcionando ao aluno a não capacidade de raciocínio lógico e também a não possibilidade de estabelecer relações com o seu dia a dia. Apesar das críticas este ensino prevalece na maioria das salas de aula de muitas instituições de ensino.

Nesta Seção, será abordado os conceitos, propriedades e representação gráfica de uma Função Afim, dando modelos de exemplos contextualizados. A Caracterização de uma Função Afim será abordada com o objetivo de habilitar o aluno na utilização dos conceitos em uma modelagem matemática aplicada em situações-problemas do dia-a-dia.

1.3.1 Introdução

Marco Aurélio pegou um táxi comum, que cobra $R\$3,20$ pela bandeirada e $R\$1,20$ por quilometro rodado, para ir à casa de sua namorada, que fica a 18 km de distância. Quanto Marco pagou ao taxista? Ele pagou $18 \cdot R\$1,20 = R\$21,60$ pela distância percorrida e mais $R\$3,20$ pela bandeirada, ou seja, $R\$21,60 + R\$3,20 = R\$24,80$. Se a casa da sua namorada ficasse a 30 km de distância, o preço da corrida seria $30 \cdot R\$1,20 + R\$3,20 = R\$36,80$. Podemos notar que, para cada distância x percorrida pelo táxi, há um certo preço $c(x)$ para a corrida. O valor $c(x)$ é uma função da distância percorrida x. Observando os dados do problema, a lei de formação que expressa $c(x)$ em função de x é $c(x) = 1,20 \cdot x + 3,20$. Este problema exemplifica um modelo de função polinomial do 1º grau ou função afim.

Definição 1.4 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Afim quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, o valor f(x) é dado pela lei de formação $f(x) = a \cdot x + b$, onde a e b são constantes. O valor de uma função $f(x) = a \cdot x + b$, para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.*

Exemplo 1.5 *Generalizando o problema do taxista, citado na introdução, se uma corrida de táxi custa a reais por km rodado mais uma taxa fixa de b reais, chamada de "bandeirada", então o preço de uma corrida de x km é $f(x) = a \cdot x + b$.*

Numa função afim $f(x) = a \cdot x + b$, a constante $b = f(0)$ é chamada de valor inicial ou coeficiente linear. A constante a é chamada de taxa de crescimento ou decrescimento, ou taxa de variação de f . O motivo para esta denominação é que, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, tem-se:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a \Rightarrow$$

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Considerando $h = 1$, tem-se que $a = f(x+1) - f(x)$. Logo, isso significa que a é a variação de $f(x)$ por unidade de variação de x.

Analisando o sinal da taxa de crescimento a da função $f(x) = ax + b$, para $a > 0$ e $a < 0$, conclui-se que:

- Para $a > 0$, e considerando $x_1 > x_2$, tem-se que $ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Logo, a função f é dita crescente.

- Para $a < 0$, e considerando $x_1 > x_2$, tem-se que $ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Logo, a função f é dita decrescente.

1.3.2 Caracterização da Função Afim

No dia-a-dia é comum depararmos com situações problemas em que existe uma relação entre mais de uma grandeza, e para melhor interpretação e análise, tem que determinar um modelo matemático para cada situação dada. Umas das perguntas mais comuns nas salas de aula do 1º Ano do Ensino Médio, é como saber se, em uma determinada situação problema, o modelo matemática a ser aplicado é ou não de um estudo de uma Função Afim? Para isso, segue Teorema de Caracterização da Função Afim, cuja demonstração se encontra em [7].

Teorema 1.1 *(Caracterização da Função Afim) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Se a diferença $f(x+h) - f(x)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim, do tipo $f(x) = a \cdot x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.6 *Há muitos anos, uma professora do Ensino Médio, adota o seguinte critério para avaliar a participação dos alunos durante um bimestre: todo aluno começa com 10 pontos; quando ele deixava de realizar uma atividade ou apresentava um comportamento inadequado em sala de aula, recebia um "negativo", perdendo 0,4 pontos na nota. Como expressar a nota n de participação de uma aluno que recebesse x negativos? Qual a nota de participação de um aluno que recebe sete "negativos"?*

Analisando a situação do exemplo, primeiramente, deve ser identificado qual o modelo matemático adequado para resolução. Observa-se que para cada "negativo"recebido, o aluno perde 0,4 pontos na sua nota. Isso significa que para acréscimos iguais no numero de "negativos", haverá descontos iguais na nota obtida, conforme observado na Tabela 1.4.

x	n	(x, n)
1	$n = 10 - 1 \cdot 0,4 = 9,6$	(1, 9,6)
2	$n = 10 - 2 \cdot 0,4 = 9,2$	(2, 9,2)
3	$n = 10 - 3 \cdot 0,4 = 8,8$	(3, 8,8)
4	$n = 10 - 4 \cdot 0,4 = 8,4$	(4, 8,4)

Tabela 1.4: Notas dos alunos

Ou seja, a diferença $f(x+h) - f(x)$ depende apenas dos h acréscimos "negativos". Por exemplo, para $h = 1$, tem -se $f(2) - f(1) = f(3) - f(2) = f(4) - f(3) = f(x+1) - f(x) = -0,4$. Portanto, conforme Teorema 1.1, o modelo matemático aplicado será o estudo de uma Função Afim $n(x) = a \cdot x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Daí, tem-se que a taxa de variação da função será $a = f(x+1) - f(x) = -0,4$, e para $x = 1$, por exemplo, o coeficiente linear é:

$$n(x) = a \cdot x + b \Rightarrow n(1) = -0,4 \cdot 1 + b \Rightarrow 9,6 = -0,4 + b \Rightarrow b = 10.$$

Por tanto, a lei de formação da função será dada pela expressão $n(x) = 10 - 0,4 \cdot x$. A nota de participação do aluno que recebeu sete "negativos"será o valor numérico da expressão $n(7)$, ou seja, $n(7) = 10 - 0,4 \cdot 7 = 10 - 2,8 = 7,2$

Exemplo 1.7 *Em [7], Eduardo Wagner observou, numa sapataria, que o vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo o seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estava marcados os números ...$36, 37, 38, 39, \ldots$ .O fato mais importante que ele percebeu foi que esses números estavam igualmente espaçados, isto é, a distância de cada um deles para o seguinte era constante. Isto queria dizer que os acréscimos iguais no tamanho do pé corresponderiam acréscimos iguais no número do sapato. Dito de outro modo: se um certo pé precisar crescer h centímetros para passar de tamanho 33 para 34, precisará de crescer os mesmos h centímetros para passar de 38 para 39. Isto lhe deu a certeza de que a função que faz corresponder a cada comprimento x de um pé o número $f(x)$ do sapato adequado é uma função afim $f(x) = a \cdot x + h$.*

1.3.3 Representação Gráfica da Função Afim

Dada a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot x + b$.

A seguir, realizamos um estudo entre pontos do gráfico da função f para demonstrarmos que o gráfico é uma reta.

Considerando $P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, a \cdot x_1 + b)$, $P_2 = (x_2, f(x_2)) = (x_2, a \cdot x_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (x_3, a \cdot x_3 + b)$ três pontos quaisquer do gráfico da função f, com $x_1 < x_2 < x_3$.

Para tal demonstração, faremos uma análise das distâncias entre eles, tomadas dois a dois. Assim, obtemos:

- $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b)]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a \cdot x_2 - a \cdot x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2 \cdot (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \cdot (a^2 + 1)} = (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{a^2 + 1}$

- $d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(a \cdot x_3 + b) - (a \cdot x_1 + b)]^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (a \cdot x_3 - a \cdot x_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2 \cdot (x_3 - x_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 \cdot (a^2 + 1)} = (x_3 - x_1) \cdot \sqrt{a^2 + 1}$

- $d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [(a \cdot x_3 + b) - (a \cdot x_2 + b)]^2} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (a \cdot x_3 - a \cdot x_2)^2} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2 \cdot (x_3 - x_2)^2} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 \cdot (a^2 + 1)} = (x_3 - x_2) \cdot \sqrt{a^2 + 1}$

Observe que

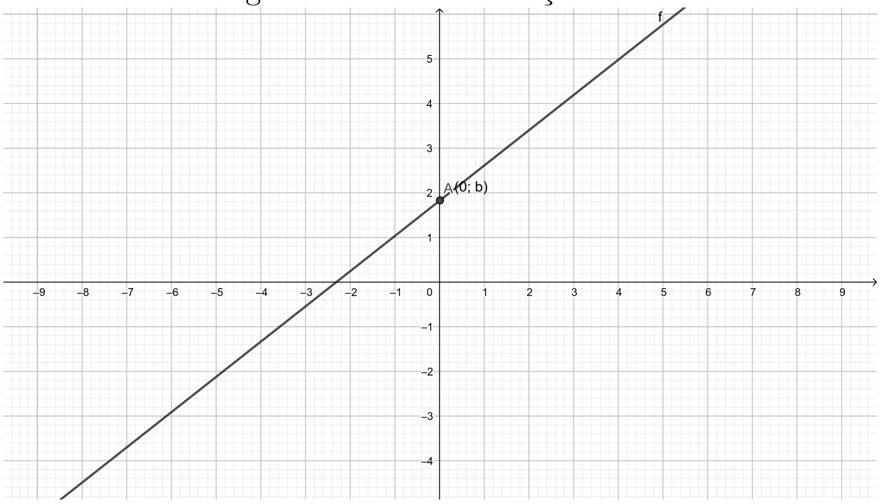
$$(x_3 - x_2)\sqrt{a^2 + 1} + (x_2 - x_1)\sqrt{a^2 + 1} = (x_3 - x_2 + x_2 - x_1)\sqrt{a^2 + 1} = (x_3 - x_1)\sqrt{a^2 + 1} \Longrightarrow$$

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3).$$

Daí, conclui-se que os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares, ou seja, pertence a uma mesma reta.

Portanto, o Gráfico da Função Afim definida pela Lei de Formação $f(x) = a \cdot x + b$, conforme Definição 1.4 é uma reta esboçada na Figura 1.6. Sendo a constante b a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo das ordenadas Oy, pois, para $x = 0$, tem se que $f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = f(0)$. A constante a é denominada, do ponto de vista geométrico, de coeficiente angular, ou inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas Ox.

Figura 1.6: Gráfico Função Afim



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Conforme a Definição 1.4, um dos elementos para definir uma função é a Lei de Formação da Função, ou seja, a correspondência que associa cada elemento do Domínio da Função a um único elemento do Contradomínio. No caso particular de uma Função Afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como a representação gráfica é uma reta, e sabendo-se que uma reta fica precisamente definida quando se conhece dois de seus pontos distintos, então para encontrar a Lei de Formação da Função Afim, basta determinar os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$, que a função assume nos elementos distintos x_1 e x_2, do domínio da função.

Na prática, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma Função Afim, com Lei de Formação $f(x) = a \cdot x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, com $x_1 \neq x_2$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, os coeficientes a e b é solução do sistema

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b = y_1 \\ a \cdot x_2 + b = y_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Utilizando um método de resolução de Sistemas Lineares é possível determinar os valores de a e b. Multiplicando uma das equações do Sistema 1.1 por (-1), por exemplo, a segunda equação, tem-se o sistema linear correspondente,

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b = y_1 \\ a \cdot x_2 + b = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot x_1 + b = y_1 \\ -a \cdot x_2 - b = -y_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

Somando as equações do Sistema 1.2 é possível concluir que,

$$(a \cdot x_1 + b) + (-a \cdot x_2 - b) = y_1 - y_2 \Rightarrow -a \cdot (x_2 - x_1) = -(y_2 - y_1) \Rightarrow a \cdot (x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.3}$$

Substituindo o valor $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ em qualquer uma das equações do Sistema 1.1 e realizando algumas operações aritméticas, é possível determinar o valor de b, com,

$$b = \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2 - x_1} \tag{1.4}$$

Exemplo 1.8 *Em um laboratório, um estudante dispõe de dois termômetros de modelos e tamanhos diferentes, sendo que um mede a temperatura na escala Celsius, e o segundo, pelo tempo de uso, não apresentava as marcas da escala. Esse estudante resolveu criar uma nova escala M de temperatura, para que pudesse aproveitar o termômetro e proceder da seguinte forma: estipulou uma medida linear que corresponderia a uma unidade da nova escala e marcou-se ao longo de todo o termômetro e ainda atribuiu 0°M (zero graus na escala M) à marcação central do termômetro. Observando a variação de temperatura nos dois termômetros ao colocá-los em um refrigerador, foi anotando as correspondências entre as duas escalas, conforme a Tabela 1.5*

Temperatura Escala Celsius (°C)	Temperatura Escala M (°M)
6	6
4	2
2	-2
0	-6

Tabela 1.5: Comparação Temperatura

Analisando os dados apresentados, o estudante concluiu que para os valores,igualmente espaçados, na escala Celsius, a diferença entre os valores correspondentes na escola M era constante e dependia apenas do espaçamento da escala Celsius, ou seja, a diferença $M(c + h) - M(c)$ depende apenas do espaçamento h. Com base no Teorema 1.1, é possível afirmar que o modelo matemático que se enquadro o problema refere-se a uma Função Afim do tipo, $m(c) = a \cdot c + b$, sendo m a temperatura na escala M referente a temperatura c na escala Celsius. Considerando, por exemplo, os pontos $(c_1, m_1) = (6, 6)$ e $(c_2, m_2) = (4, 2)$, na Tabela 1.5, os valores dos coeficientes a e b, são dados por:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{c_2 - c_1} = \frac{2 - 6}{4 - 6} = \frac{-4}{-2} = 2$$

e

$$b = \frac{c_2 \cdot m_1 - c_1 \cdot m_2}{c_2 - c_1} = \frac{4 \cdot 6 - 6 \cdot 2}{4 - 6} = \frac{12}{-2} = -6.$$

Daí, conclui-se que a relação entre as escalas Celsius e M é dada pela Lei de Formação $m(c) = 2 \cdot c - 6$, com m a temperatura na escala M, e c a temperatura correspondente na escala Celsius.

Exemplo 1.9 *Estudar o sinal de uma função real f, definida pela lei de formação $f(x) = y$, significa, determinar os intervalos que contem x para que se tenha $y > 0$, e intervalos que contem x para que se tenha $y < 0$.*

Considerando o significado do estudo de sinais de uma função real, faça uma análise dos valores de x da função afim $f(x) = a \cdot x + b$, com $a, \in \mathbb{R}$, para que se tenha $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$.

Para $f(x) = 0$, tem-se:

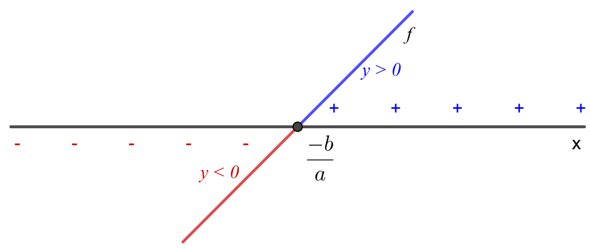
$$f(x) = a \cdot x + b \Rightarrow 0 = a \cdot x + b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Esse valor de x, para $f(x) = 0$ é denominado de raiz da função ou zero da função. Geometricamente, o zero da função é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo Ox.

Afim de resolver o problema proposto para $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$, deverá considerar, separadamente, $a > 0$ e $a < 0$

- Para $a > 0$
  Conforme definido no final da Seção 1.3.1, a função $f(x) = a \cdot x + b$ é crescente e o esboço do seu gráfico está representado na Figura 1.7

Figura 1.7: Estudo do sinal da Função Afim $f(x)$, para $a > 0$

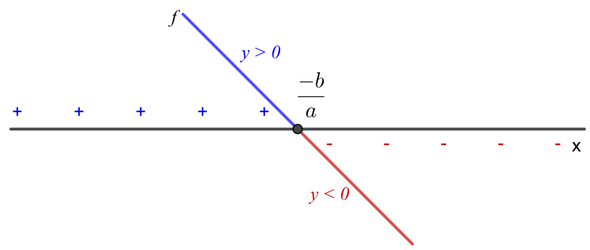


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

  Analisando a Figura 1.7 é possível observar que $f(x) > 0$, para $x > -\frac{b}{a}$, e que $f(x) < 0$, para $x < -\frac{b}{a}$.

- Para $a < 0$
  De modo análogo, a função $f(x) = a \cdot x + b$ é decrescente e o esboço do seu gráfico está representado na Figura 1.8

Figura 1.8: Estudo do sinal da Função Afim $f(x)$, para $a < 0$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Analisando a Figura 1.8 é possível observar que $f(x) > 0$, para $x < -\dfrac{b}{a}$, e que $f(x) < 0$, para $x > -\dfrac{b}{a}$.

1.4 Função Quadrática

Historicamente, há registros de problemas envolvendo equações quadráticas com três termos, deixados pelos babilônios há aproximadamente 4000 anos. Esses estudos demonstram uma grande flexibilidade existente na Álgebra desenvolvida entre eles. Outros povos também contribuíram com esta parte da Álgebra até que se chegasse à representação atual de uma equação quadrática $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, na qual o valor de x é obtido pela famosa e conhecida atualmente como Fórmula de Bháskara.

A noção de Função Polinomial do 2º Grau ou Função Quadrática, associa-se originalmente à ideia de Equação do Segundo Grau. Já na Antiguidade, por volta de 300 a.c., o matemático grego Euclides desenvolveu uma técnica denominada Álgebra Geométrica para lidar com o que veio a se chamar futuramente de Álgebra. Naquela época, não existia a noção formal de equação ou mesmo de função. Se os gregos tivessem desenvolvidos uma Álgebra com uma linguagem matemática mais adequada, a noção de função teria quase que inevitavelmente aparecido como resultado da conjunção das ideias da Álgebra com a Geometria. Porém essa ideia somente ocorreria no Renascimento motivada por vários fatores. Dentre eles, destacam-se as tentativas de explicar o movimento em queda livre de um corpo ou a trajetória de uma bala de canhão, que posteriormente foi definida como parábola.

1.4.1 Introdução

Exemplo 1.10 *Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 12,00 o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, para cada R$ 1,00 de aumento no quilo de comida, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 gramas por pessoa. Qual deve ser o preço do quilo de comida, para que o restaurante tenha a maior receita possível?*

Com base nas informações, temos que:

- Se aumentar R$ 1,00 no quilo da comida, o restaurante perderá 10 clientes e venderá $10 \cdot 0,5 = 5kg$ de comida a menos. Ou seja, o restaurante venderá $100 - 5 = 95kg$ de comida diariamente, no valor de R$ 13,00 o quilo, tendo uma receita de $R = 95 \cdot 13 = R\$1.235,00$

- Se aumentar R$ 2,00 no quilo da comida, o restaurante perderá 20 clientes e venderá $20 \cdot 0,5 = 10kg$ de comida a menos. Ou seja, o restaurante venderá $100 - 10 = 90kg$ de comida diariamente, no valor de R$ 14,00 o quilo, tendo uma receita de $R = 90 \cdot 14 = R\$1.260,00$

- Se aumentar R$ 8,00 no quilo da comida, o restaurante perderá 80 clientes e venderá $80 \cdot 0,5 = 40kg$ de comida a menos. Ou seja, o restaurante venderá $100 - 40 = 60kg$ de comida diariamente, no valor de R$ 20,00 o quilo, tendo uma receita de $R = 60 \cdot 20 = R\$1.200,00$

Representando por $R(x)$ a receita adquirida pelo restaurante, com x reais sendo o aumento no preço do quilo da comida, conclui-se que o restaurante perderá $10 \cdot x$ clientes, vendendo diariamente $10 \cdot x \cdot 0,5kg$ de comida a menos, ou seja, o restaurante venderá $100 - 10 \cdot x \cdot 0,5kg$ de comida, no valor de $(12 + x)$ reais o quilo. Portanto, a receita é dada por $R(x) = (100 - 10 \cdot x \cdot 0,5) \cdot (12 + x) = (100 - 5 \cdot x) \cdot (12 + x) = -5 \cdot x^2 + 40 \cdot x + 1200$

A solução do problema é o valor de $(12+x)$, tal que a receita $R(x) = -5 \cdot x^2 + 40 \cdot x + 1200$ seja máxima. Este problema recai no estudo do ponto máximo de uma Função Quadrática, que será resolvido posteriormente após discussão do referido assunto.

Definição 1.5 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Quadrática quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, o valor f(x) é dado pela lei de formação $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, onde a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$. O valor de uma função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c$.*

Exemplo 1.11 *Conforme Definição 1.5, no Exemplo 1.10, $R(x) = -5 \cdot x^2 + 40 \cdot x + 1200$ representa um modelo de Função Quadrática, com $a = -5, b = 40$ e $c = 1200$.*

Exemplo 1.12 *As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com leis de formações definidas a seguir são exemplos de Funções Quadráticas:*

- $f(x) = 2 \cdot x^2 + x - 7$, com $a = 2, b = 1, c = -7$;

- $f(x) = -7 \cdot x^2 + 3 \cdot x$, com $a = -7, b = 3, c = 0$;

- $f(x) = x^2$, com $a = 1, b = 0, c = 0$.

1.4.2 Caracterização da Função Quadrática

Consideremos, inicialmente, a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = x^2$. Dada a sequência $X = (1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots)$, façamos uma análise das diferenças sucessivas de $(f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), f(n+1), \cdots)$, ou seja, analisemos a sequência $D = (d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n, d_{n+1}, \cdots)$, com $d_n = f(n+1) - f(n)$.

Realizando os primeiros cálculos, temos que a função $f(x) = x^2$ transforma a sequência $X = (1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots)$ na sequência $(f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), f(n+1), \cdots) = (1, 4, 9, \cdots n^2, (n+1)^2, \cdots)$.

Examinando as diferenças d_n, tem-se:

$$\begin{gathered}
d_1 = f(2) - f(1) = 4 - 1 = 3\\
d_2 = f(3) - f(2) = 9 - 4 = 5\\
d_3 = f(4) - f(3) = 16 - 9 = 7\\
\vdots\\
d_n = f(n+1) - f(n) = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1\\
d_{n+1} = f(n+2) - f(n+1) = (n+2)^2 - (n+1)^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 = 2n + 3.
\end{gathered}$$

Analisando os termos da sequência D, é possível observar que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre igual a uma mesma constante, ou seja, $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = \cdots = d_{n+1} - d_n = 2$. Veremos, a seguir, que essa característica é exclusiva de funções quadráticas. O Teorema 1.2 irá apresentar tal caracterização.

Teorema 1.2 *(Caracterização da Função Quadrática) Dada a função real $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e considerando os elementos da sequência $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ pertencentes ao domínio de f, com $x_{n+1} - x_n = r$, sendo $r \in \mathbb{R}$, e a sequência $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots)$, com $y_n = f(x_n)$, então a sequência $D = (d_1, d_2, \cdots, d_n, \cdots)$, com $d_n = y_{n+1} - y_n$, goza da propriedade de $d_{n+1} - d_n = 2 \cdot a \cdot r^2$.*

Demonstração: Considerando as informações dadas, tem-se

$$d_{n+1} - d_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)$$

$$d_{n+1} - d_n = y_{n+2} - 2 \cdot y_{n+1} + y_n$$

$$d_{n+1} - d_n = (a \cdot x_{n+2}^2 + b \cdot x_{n+2} + c) - 2 \cdot (a \cdot x_{n+1}^2 + b \cdot x_{n+1} + c) + (a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c))$$

$$d_{n+1} - d_n = a \cdot x_{n+2}^2 + b \cdot x_{n+2} + c - 2 \cdot a \cdot x_{n+1}^2 - 2 \cdot b \cdot x_{n+1} - 2 \cdot c + a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c$$

$$d_{n+1} - d_n = a \cdot x_{n+2}^2 + b \cdot x_{n+2} - 2 \cdot a \cdot x_{n+1}^2 - 2 \cdot b \cdot x_{n+1} + a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n$$

$$d_{n+1} - d_n = (a \cdot x_{n+2}^2 - 2 \cdot a \cdot x_{n+1}^2 + a \cdot x_n^2) + (b \cdot x_{n+2} - 2 \cdot b \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n)$$

$$d_{n+1} - d_n = a \cdot (x_{n+2}^2 - 2 \cdot x_{n+1}^2 + x_n^2) + b \cdot (x_{n+2} - 2 \cdot x_{n+1} + x_n)$$

$$d_{n+1} - d_n = a \cdot [(x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2) - (x_{n+1}^2 - x_n^2)] + b \cdot [(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)]$$

$d_{n+1} - d_n = a \cdot [(x_{n+2} - x_{n+1}) \cdot (x_{n+2} + x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) \cdot (x_{n+1} + x_n)] + b \cdot [(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)]$

Conforme as informações do Teorema 1.2, é dado que a diferença entre dois termos consecutivos da sequência X é igual a r, ou seja, $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = r$, portanto,

$$d_{n+1} - d_n = a \cdot [r \cdot (x_{n+2} + x_{n+1}) - r \cdot (x_{n+1} + x_n)] + b \cdot [r - r]$$

$$d_{n+1} - d_n = a \cdot r \cdot [(x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)]$$

$$d_{n+1} - d_n = a \cdot r \cdot (r + r)$$

$$d_{n+1} - d_n = 2 \cdot a \cdot r^2.$$

Cabe salientar que $2ar^2$ é uma constante real, ou seja, a sequência das diferenças das imagens de $f(x_n)$ é constante, como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.13 *(Questão adaptada de [7]) Um estudante anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e obteve os dados abaixo:*

Instante (seg)	Posição (metros)
0	17
10	45
20	81
30	125

Tabela 1.6: Instante X Posição

Com base nas informações, qual a posição do móvel, após 15 segundos de observação?

Analisando os dados da Tabela 1.6 e considerando x o tempo, em segundos, que o estudante ficou observando o móvel, e $P(x)$ a posição, em metros, em que o móvel se encontra após x segundos de observação, tem-se que $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 20$, $x_4 = 30$ e $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = r = 10$. Também é possível observar que $P(x_1) = 17$, $P(x_2) = 45$, $P(x_3) = 81$, $P(x_4) = 125$ e, considerando a sequência $D = (d_1, d_2, d_3)$, com $d_n = P(x_{n+1}) - P(x_n)$, tem-se:
$d_1 = P(x_2) - P(x_1) = 45 - 17 = 28$
$d_2 = P(x_3) - P(x_2) = 81 - 45 = 36$
$d_3 = P(x_4) - P(x_3) = 125 - 81 = 44$

Sendo a sequência $D = (28, 36, 44)$, observa-se que a diferença entre dois termos consecutivos é igual a 8, ou seja, $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = 8$

Com base no Teorema 1.2, pode-se afirmar que essa situação poderá ser resolvida aplicando os conceitos de Função Quadrática, ou seja, a relação entre x e *P(x)* é dada pela lei de formação da função $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sendo $r = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = 10$ e $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = 8$, tem-se

$$d_{n+1} - d_n = 2 \cdot a \cdot r^2 \Rightarrow 8 = 2 \cdot a \cdot 10^2 \Rightarrow a = \frac{8}{200} = \frac{1}{25}$$

Como $P(0) = 17$, logo,

$$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Rightarrow P(0) = \frac{1}{25} \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 17$$

Analisando $P(10) = 45$ e considerando $a = \frac{1}{25}$ e $c = 17$, tem-se

$$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Rightarrow P(10) = \frac{1}{25} \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 17 \Rightarrow 45 = 4 + b \cdot 10 + 17 \Rightarrow b = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

Portanto, a função P é dada pela lei de formação $P(x) = \frac{1}{25} \cdot x^2 + \frac{12}{5} \cdot x + 17$.
Daí, tem-se que a posição do móvel após 15 segundos é

$$P(x) = \frac{1}{25} \cdot x^2 + \frac{12}{5} \cdot x + 17,$$

e daí,

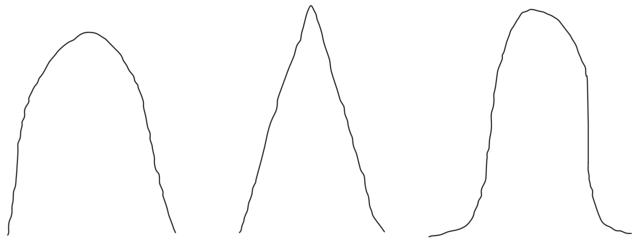
$$P(15) = \frac{1}{25} \cdot 15^2 + \frac{12}{5} \cdot 15 + 17 \Rightarrow P(15) = \frac{1}{25} \cdot 225 + 36 + 17$$
$$P(15) = 62$$

1.4.3 Representação Gráfica da Função Quadrática

A parábola surge naturalmente numa variedade de situações e pode ser obtida na prática, por exemplo, a partir do corte de um cone ou do lançamento de um projétil ideal na superfície terrestre, por exemplo, a trajetória que uma bola de futebol faz, ao ser chutada verticalmente por um jogador. Essas situações e outras, parecem não ter ligação com o estudo de uma Função Quadrática, porém quando se estuda os conceitos matemáticos envolvidos, percebe-se claramente a essência da matemática nesse mundo geométrico.

Muitas vezes, ao estudar Funções Quadráticas, surge naturalmente a dúvida sobre o esboço do gráfico, o por quê da parábola ter o desenho apresentado em todas as bibliografias do assunto, especialmente nos livros didáticos do Ensino Médio, representando sempre uma curva mais acentuada próximo ao vértice e menos acentuada ao se distanciar dele, e qual o motivo da parábola não apresentar segmentos de retas, contido nela, ou sinuosidades. A parábola poderia muito bem ter outros esboços como mostrados na Figura 1.9.

Figura 1.9: Possíveis desenhos de uma parábola



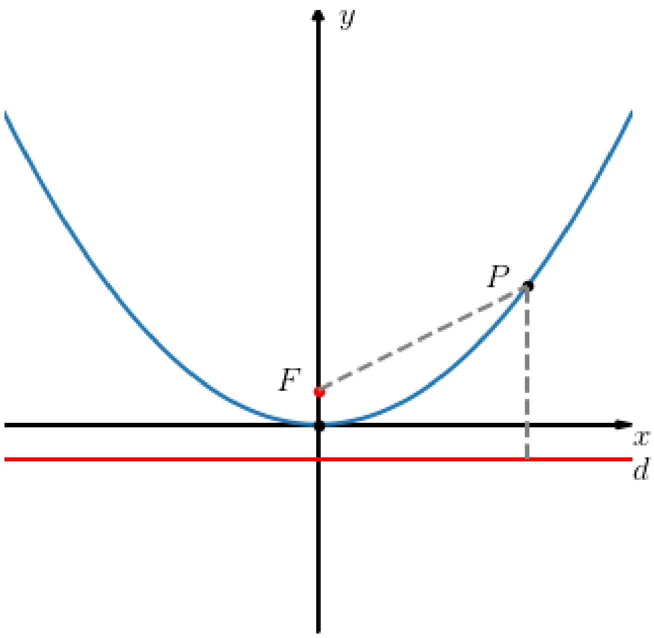
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Utilizando um recurso computacional, por exemplo, o *Software GeoGebra*, para manipulação de gráficos, em detrimento do uso de lápis e papel, é possível permitir ao aluno uma análise maior entre a representação gráfica de uma função com os seus coeficientes.

Com base no trabalho e conclusão de [7] é possível afirmar que toda Função Quadrática é representada graficamente por uma parábola.

Definição 1.6 *Seja d uma reta e F um ponto não pertencente a esta reta. A Parábola P, de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos equidistantes de F e d, ou seja, $D(F,\ P) = D(d,\ P)$.*

Figura 1.10: Parábola de foco F e diretriz d

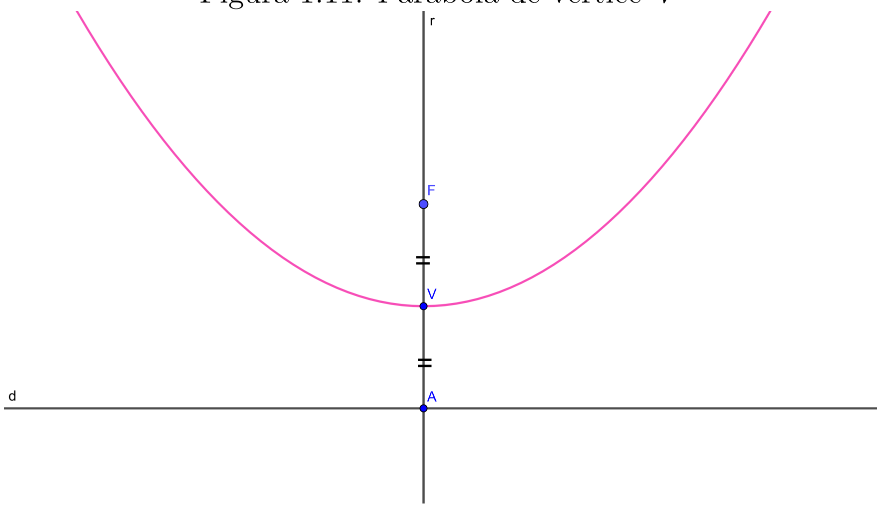


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Definição 1.7 *A reta r que passa pelo foco F e é perpendicular a diretriz d de uma parábola é chamada reta focal ou eixo focal da parábola.*

Com base na Definição 1.6 e considerando o ponto $A = r \bigcap d$, outro ponto qualquer Q pertence à parábola se, e somente se,equidista da diretriz d e do foco F. Daí conclui-se que o ponto médio V, do segmento $\overline{AF}$ pertence à parábola, pois $\overline{VF} = \overline{VA}$, conforme é possível observar na Figura 1.11. Esse ponto V é o único do eixo focal que pertence à parábola e é denominado de vértice da parábola.

Figura 1.11: Parábola de vértice V



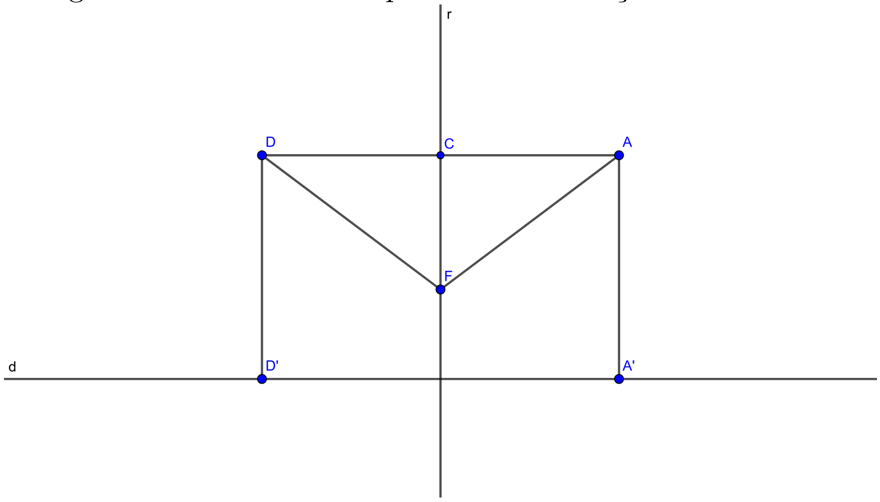
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

No Teorema a seguir, será apresentado uma importante propriedade de uma parábola, que será útil na construção da mesma.

Teorema 1.3 *Toda parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal.*

Demonstração: Analisando a Figura 1.12 e considerando uma Parábola P, com foco no ponto F, sendo as retas d e r, respectivamente, a diretriz e o eixo focal da parábola P. Seja A um ponto qualquer da parábola P, e D o ponto simétrico de A, em relação ao eixo focal r, logo os seguimentos $\overline{AC}$ e $\overline{DC}$, são congruentes, sendo $C = \overline{AD} \bigcap r$. Além disso, os ângulos $A\widehat{C}F$ e $D\widehat{C}F$ são retos e o segmento $\overline{CF}$ é o lado comum aos triângulos ΔACF e ΔDCF, como pode ser observado na figura a seguir. A partir daí, é possível concluir que os triângulos ΔACF e ΔDCF são congruentes, utilizando o caso *LAL (Lado - Ângulo - Lado)* de Congruência de Triângulos.

Figura 1.12: Simetria da parábola em relação ao eixo focal



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Sendo assim, os lados $\overline{AF}$ e $\overline{DF}$ são congruentes, pois ambos são as hipotenusas dos triângulos ΔACF e ΔDCF, respectivamente.

Considerando os pontos A'e D', como sendo os respectivos pés das perpendiculares baixadas dos pontos A e D na diretriz d, tem-se que $AA'D'D$ é um retângulo. E com isso, os lados AA'e DD' são congruentes.

Uma vez que A é um ponto da parábola, tem-se $\overline{AF} = \overline{AA'}$. Como $\overline{AF} = \overline{DF}$ e $\overline{AA'} = \overline{DD'}$, conclui-se que $\overline{DF} = \overline{DD'}$. Portanto, pela Definição 1.6, o ponto D, simétrico ao ponto A em relação ao eixo focal, pertence a parábola P.

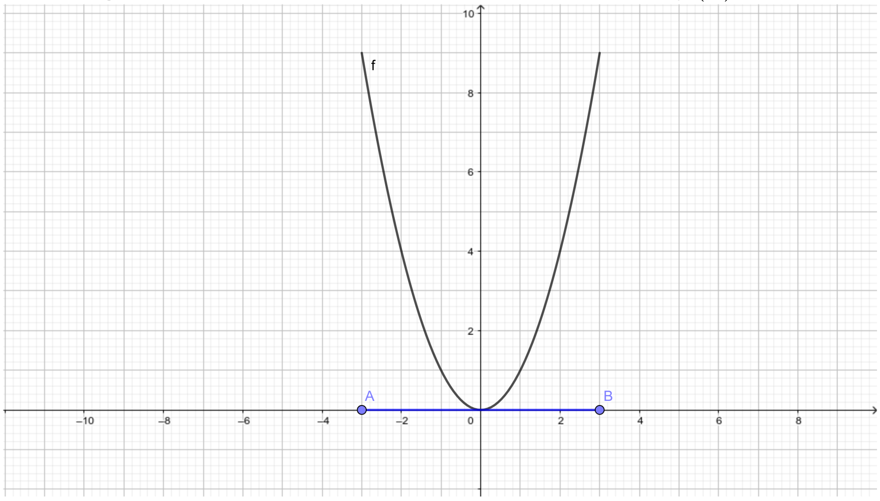
Devido a essa importante propriedade de uma parábola, muitas bibliografias denomina o eixo focal como o eixo de simetria da parábola

Exemplo 1.14 *Considere a função $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = x^2$. A partir da Tabela 1.7, construa o gráfico da função f.*

x	$f(x) = x^2$	(x , f(x))
-3	9	(-3 , 9)
-2	4	(-2 , 4)
-1	1	(-1 , 1)
0	0	(0 , 0)
1	1	(1 , 1)
2	4	(2 , 4)
3	9	(3 , 9)

Tabela 1.7: Tabela da Função $f(x) = x^2$

Figura 1.13: Gráfico da Função Quadrática $f(x) = x^2$

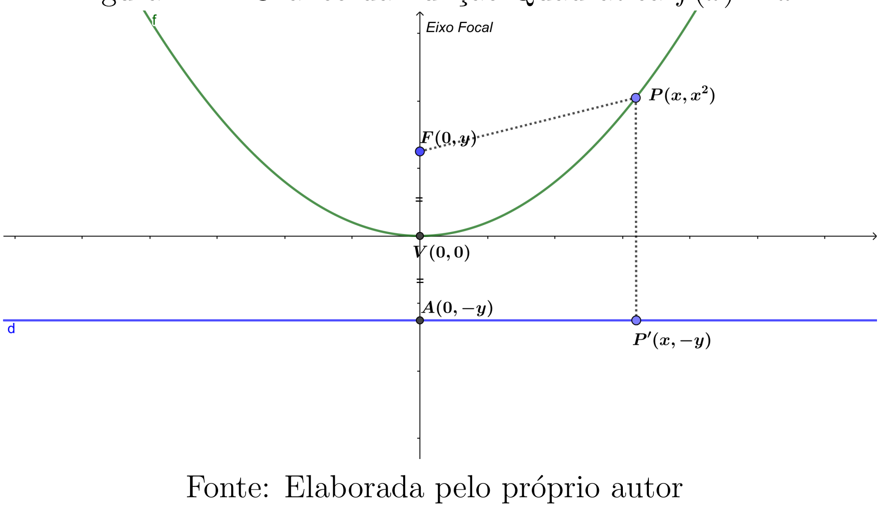


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Exemplo 1.15 *(Adaptado de [7]) Observando o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$, conforme Exemplo 1.14, vê-se que ele é uma parábola. Determine qual é o foco e a sua diretriz.*

Analisando a Figura 1.14, é possível concluir, por simetria, que o eixo focal de f coincide com o eixo Oy, pois, $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$. Logo, a função terá foco no ponto $F(0, y)$. Como o vértice da função é $V(0, 0)$, e V é o ponto médio do segmento $\overline{AF}$, sendo A o ponto de intersecção das retas focal e diretriz, tem-se que a reta diretriz da função dada será definida pela equação $d = -y$.

Figura 1.14: Gráfico da Função Quadrática $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Com base na Definição 1.6 e considerando um ponto $P(x, x^2)$ qualquer do gráfico de f, tem-se:

$$d(F, P) = d(P', P)$$

$$
\begin{aligned}
d^2(F,P) &= d^2(P',P) \\
(x-0)^2 + (x^2-y)^2 &= (x-x)^2 + (x^2+y)^2 \\
x^2 + (x^2-y)^2 &= (x^2+y)^2 \\
x^2 + x^4 - 2x^2y + y^2 &= x^4 + 2x^2y + y^2 \\
x^2 - 2x^2y &= 2x^2y \\
x^2 - 2x^2y - 2x^2y &= 0 \\
x^2 - 4x^2y &= 0 \\
x^2(1-4y) &= 0 \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Na Equação 1.5, temos que $x^2 = 0$ ou $1 - 4 \cdot y = 0$. Analisando a segunda igualdade, tem-se

$$1 - 4 \cdot y = 0 \Longleftrightarrow 4 \cdot y = 1 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{4}.$$

Portanto, a parábola, representação gráfica da função $f(x) = x^2$, terá foco no ponto $F(0, \frac{1}{4})$ e a diretriz será definida pela equação $d = -\frac{1}{4}$.

Capítulo 2

CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Neste Capítulo, serão apresentadas propostas para introduzir os conceitos de Limite e Derivada de uma função real para alunos matriculados no 1º Ano do Ensino Médio. Inicialmente, será abordado breves relatos históricos do desenvolvimento do Cálculo em vários períodos. Em seguida apresentaremos uma noção intuitiva dos conceitos de limite e derivada de uma função, a fim de que o aluno possa se familiarizar com o conteúdo e em seguida, serão expostas as definições, muitas vezes abstratas para o aluno, de acordo os estudos nos Cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

2.1 Desenvolvimento Histórico do Cálculo

O resumo histórico do cálculo abordado a seguir, foram extraídos em citações, a partir de pesquisas em [4].

O cálculo diferencial e integral, também conhecido como cálculo infinitesimal ou simplesmente cálculo, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Foi criado como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas. Desenvolvido simultaneamente por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e por Isaac Newton (1643-1727), em trabalhos independentes.

O cálculo tem inicialmente três "operações - base", ou seja, possui áreas iniciais como o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais. Com o advento do Teorema Fundamental do Cálculo, estabeleceu-se uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área.

O professor de Isaac Newton em Cambridge, Isaac Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Foram Leibniz e Newton que exploraram essa relação e a utilizaram para transformar o cálculo em um método matemático sistemático. Particularmente ambos viram que o Teorema Fundamental os capacitou a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de soma (método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss). A integral indefinida também pode ser chamada de antiderivada, uma vez que é um processo que inverte a derivada de funções. Já a integral definida, inicialmente definida como Soma de Riemann, estabelece limites de integração, ou seja, é um processo estabelecido entre dois intervalos bem definidos, daí o nome integral definida.

A história do cálculo encaixa-se em vários períodos distintos, de forma notável nas eras antiga, medieval, moderna e contemporânea.

- **O Cálculo na Antiguidade**

Na Antiguidade, foram introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas ideias de forma rigorosa e sistemática. A função básica do cálculo integral, a de calcular volumes e áreas, pode ser remontada ao Papiro Egípcio de Moscou (1850 a.C.), no qual um egípcio trabalhou o volume de um tronco piramidal. O cálculo integral também pode ser utilizado para rastreamento e gravação o movimento do sol, da lua e dos planetas. Os antigos astrônomos babilônios (1800-1600 a.C.) empregaram métodos geométricos sofisticados que prenunciam o desenvolvimento do cálculo para prever as posições dos corpos celestes. Eudoxo de Cnido, ou Eudoxus, (408-355 a.C.) usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes (287-212 a.C.) levou essa ideia além, inventando a heurística, que se aproxima do cálculo integral. O método da exaustão foi redescoberto na China por Liu Hui no século III, que o usou para encontrar a área do círculo. O método também foi usado por Zu Chongzhi, século V, para achar o volume de uma esfera.

- **O Cálculo na Idade Média**

Na Idade Média, o matemático indiano Aryabhata usou a noção infinitesimal em 499 d.C. expressando-a em um problema de astronomia na forma de uma equação diferencial básica. Essa equação levou Bhāskara II no século XII a desenvolver uma derivada prematura representando uma mudança infinitesimal, e ele desenvolveu também o que seria uma forma primitiva do "Teorema de Rolle".

No século XII, o matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descobriu a derivada de polinômios cúbicos, um resultado importante no cálculo diferencial. No século XIV, Madhava de Sangamagrama, juntamente com outros matemáticos-astrônomos da Escola Kerala de Astronomia e Matemática, descreveu casos especiais da Série de Taylor, que no texto são tratadas como Yuktibhasa.

- **O Cálculo na Idade Moderna**

Na Idade Moderna, descobertas independentes no cálculo foram feitas no início do século XVII no Japão por matemáticos como Seki Kowa, que expandiu o método de exaustão. Na Europa, a segunda metade do século XVII foi uma época de grandes inovações. O Cálculo abriu novas oportunidades na física-matemática de resolver problemas muito antigos que até então não haviam sido solucionados. Muitos matemáticos contribuíram para essas descobertas, notavelmente John Wallis e Isaac Barrow. James Gregory proveu um caso especial do segundo teorema fundamental do cálculo em 1668.

Coube a Gottfried Wilhelm Leibniz e a Isaac Newton recolher essas ideias e juntá-las em um corpo teórico que viria a constituir o cálculo. A ambos é atribuída a simultânea e independente invenção do cálculo. Leibniz foi originalmente acusado de plagiar os trabalhos não publicados de Isaac Newton; hoje, porém, é considerado o inventor do cálculo, juntamente com Newton. Historicamente Newton foi o primeiro a aplicar o cálculo à física ao passo que Leibniz desenvolveu a notação utilizada até os dias de hoje, a notação de Leibniz. O argumento histórico para conferir aos dois a invenção do cálculo é que ambos chegaram de maneiras distintas ao teorema fundamental do cálculo.

Quando Newton e Leibniz publicaram seus resultados, houve uma grande controvérsia de qual matemático (e portanto que país: Inglaterra ou Alemanha) merecia o crédito. Newton derivou seus resultados primeiro, mas Leibniz publicou primeiro. Newton argumentou que Leibniz roubou ideias de seus escritos não publicados, que Newton à época compartilhara com alguns poucos membros da Sociedade Real. Esta controvérsia dividiu os matemáticos ingleses dos matemáticos alemães por muitos anos. Um exame cuidadoso dos escritos de Leibniz e Newton mostra que ambos chegaram a seus resultados independentemente, com Leibniz iniciando com integração e Newton com diferenciação. Nos dias de hoje tem-se que Newton e Leibniz descobriram o cálculo independentemente. Leibniz, porém, foi quem deu o nome cálculo à nova disciplina, Newton a chamara de "A ciência dos fluxos".

Desde o tempo de Leibniz e Newton, muitos matemáticos contribuíram para o contínuo desenvolvimento do cálculo.

- **O Cálculo na Idade Contemporânea**

Por fim, na Idade Contemporânea, já no século XIX, o cálculo foi abordado de uma forma muito mais rigorosa. Foi também durante este período que ideias do cálculo foram generalizadas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Lebesgue mais tarde generalizou a noção de integral. Sobressaíram matemáticos como Cauchy, Riemann, Weierstrass e Maria Gaetana Agnesi. Esta última, foi autora da primeira obra a unir as ideias de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre cálculo diferencial e integral. É dela também a autoria da chamada "curva de Agnesi".

2.2 Limite

O conceito de limite constitui um dos principais conceitos do Cálculo, uma vez que para definir derivada, continuidade, integral, convergência, divergência, utiliza-se esse conceito. A sistematização lógica do Cálculo pressupõe então o conceito de limite. Entretanto, o registro histórico é justamente o oposto. Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes relativas ao infinito - números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos - e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é originário da Europa, e a definição moderna tem menos de 150 anos.

No estudo de cálculo e suas aplicações, muitas vezes é de suma importância, analisar o comportamento de determinada função em torno de um determinado elemento do seu domínio. Inicialmente, a noção intuitiva de limites está relacionado a várias ideias, dentre elas a de vizinhança. Matematicamente, quando se diz que x tende a um determinado valor x_0, intuitivamente, significa que os valores de x se aproximam cada vez mais de x_0. O limite de uma função estuda basicamente a relação entre o domínio e a imagem da função, e é de extrema importância para várias área de estudos, como matemática, física, química e até mesmo a engenharia.

Exemplo 2.1 *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = 2 \cdot x + 1$. Observe o comportamento dessa função para valores próximos de $x = 1$.*

Construindo as tabelas a seguir para valores próximos de $x = 1$ para a direita e para a esquerda, respectivamente, em seguida, construir o gráfico da função f.

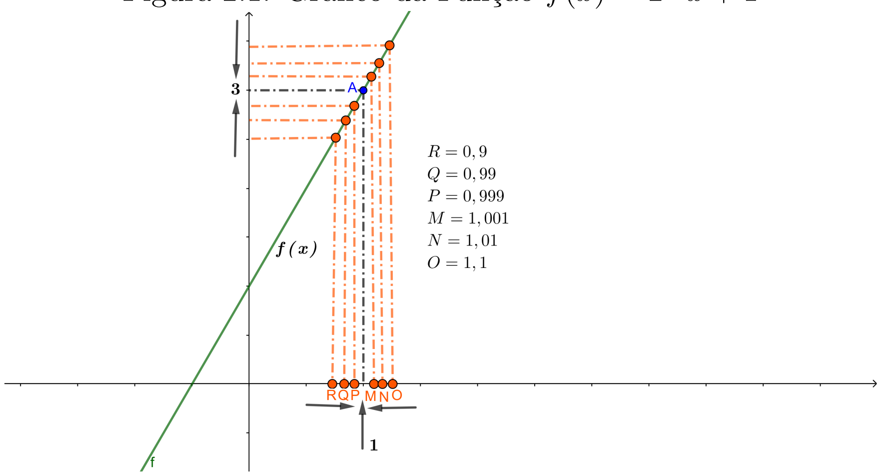
x	$f(x) = 2 \cdot x + 1$
0,9	$f(0,9) = 2 \cdot 0,9 + 1 = 2,8$
0,99	$f(0,99) = 2 \cdot 0,99 + 1 = 2,98$
0,999	$f(0,999) = 2 \cdot 0,999 + 1 = 2,998$
0,9999	$f(0,9999) = 2 \cdot 0,9999 + 1 = 2,9998$

Tabela 2.1: Tabela para valores próximos de $x = 1$, pela esquerda, da função $f(x) = 2x + 1$

x	$f(x) = 2 \cdot x + 1$
1,1	$f(1,1) = 2 \cdot 1,1 + 1 = 3,2$
1,01	$f(1,01) = 2 \cdot 1,01 + 1 = 3,02$
1,001	$f(1,001) = 2 \cdot 1,001 + 1 = 3,002$
1,0001	$f(1,0001) = 2 \cdot 1,0001 + 1 = 3,0002$

Tabela 2.2: Tabela para valores próximos de $x = 1$, pela direita, da função $f(x) = 2x + 1$

Figura 2.1: Gráfico da Função $f(x) = 2 \cdot x + 1$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Analisando as Tabelas 2.1 e 2.2 e a Figura 2.1, é possível observar que o valor de $f(x)$ aproxima, tanto pela direita quanto pela esquerda, de 3, assim que o valor de x se aproxima de 1.É possível observar, intuitivamente, que para x tentendo a 1, o valor da função $f(x) = 2 \cdot x + 1$ se aproxima cada vez mais de 3.

Matematicamente, essa situação poderá ser representada da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(2 \cdot x + 1) = 3$$

e leia-se como o limite de $f(x)$, quando x tende a 1, é igual a 3 ou limite de $2 \cdot x + 1$, quando x tende a 1, é igual a 3

Exemplo 2.2 *Usando a noção intuitiva de limites, determine o valor do limite, quando x tende a 1, da função definida pela lei de formação* $f(x) = x^2 - 1$. *De outro modo, essa situação significa em calcular o valor de* $\lim_{x \to 1}(x^2 - 1)$.

Inicialmente, analisar as Tabelas 2.3 e 2.4, para valores próximos de 1, pela esquerda e pela direita, respectivamente, e o gráfico de $f(x)$, conforme Figura 2.2.

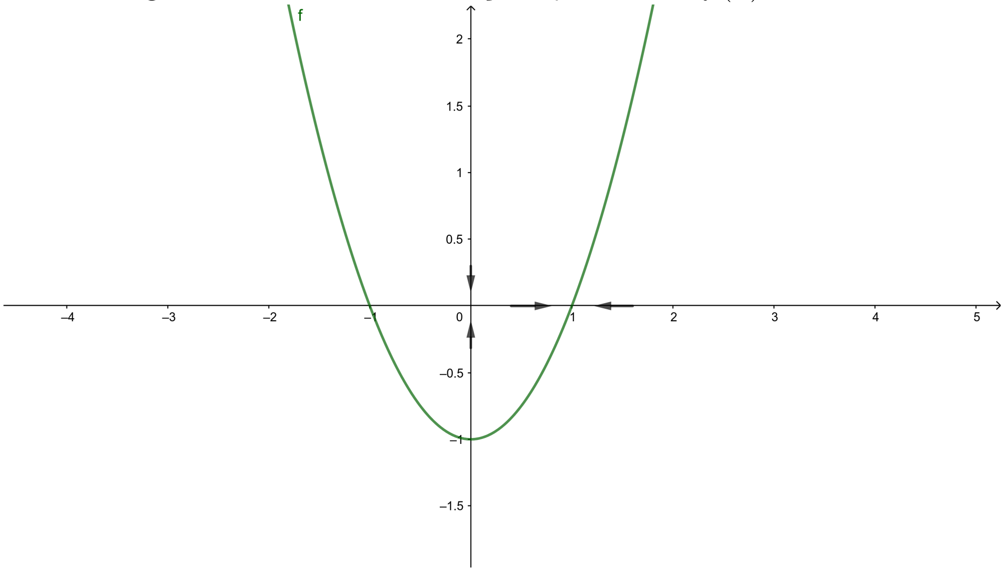
x	$f(x) = x^2 - 1$
0,9	$f(0,9) = 0,9^2 - 1 = -0,19$
0,99	$f(0,99) = 0,99^2 - 1 = -0,0199$
0,999	$f(0,999) = 0,999^2 - 1 = -0,001999$
0,9999	$f(0,9999) = 0,9999^2 - 1 = -0,00019999$

Tabela 2.3: Tabela para valores próximos de $x = 1$, pela esquerda, da função $f(x) = x^2 - 1$

x	$f(x) = x^2 - 1$
1,1	$f(1,1) = 1,1^2 - 1 = 0,21$
1,01	$f(1,01) = 1,01^2 - 1 = 0,0201$
1,001	$f(1,001) = 1,001^2 - 1 = 0,002001$
1,0001	$f(1,0001) = 1,0001^2 - 1 = 0,00020001$

Tabela 2.4: Tabela para valores próximos de $x = 1$, pela direita, da função $f(x) = x^2 - 1$

Figura 2.2: Gráfico da Função Quadrática $f(x) = x^2 - 1$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Observar que, quando x tende a 1, tanto por valores menores (Tabela 2.3) quanto por valores maiores que 1 (Tabela 2.4), $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 0 (zero), e analisando a Figura 2.2, é possível concluir que

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$$

Exemplo 2.3 *Calcule o limite da função f, definida pela lei de formação* $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, *quando x tende a 1.*

Construindo as tabelas de valores da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, para valores próximos de $x = 1$, e o gráfico de $f(x)$, conforme Figura 2.3.

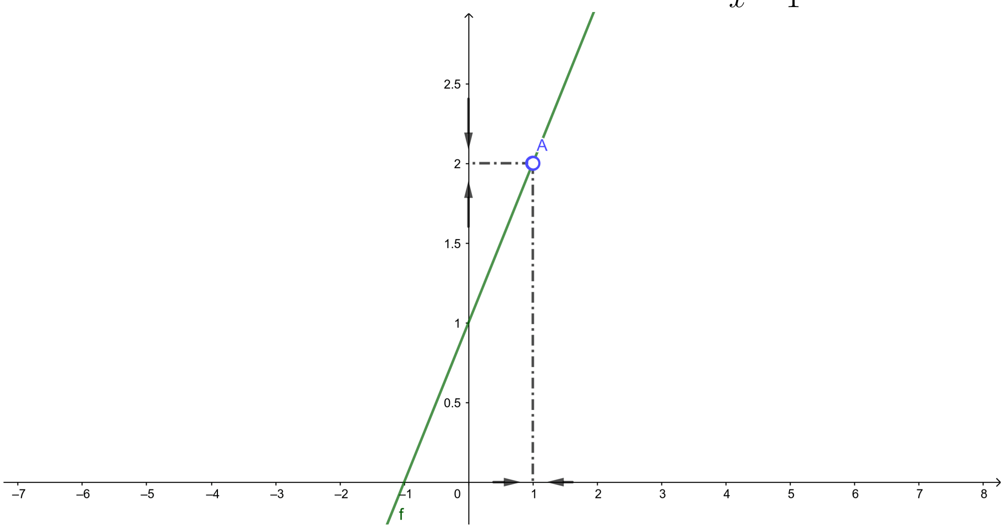
x	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
0,9	$f(0,9) = \dfrac{0,9^2 - 1}{0,9 - 1} = 1,9$
0,99	$f(0,99) = \dfrac{0,99^2 - 1}{0,99 - 1} = 1,99$
0,999	$f(0,999) = \dfrac{0,999^2 - 1}{0,999 - 1} = 1,999$
0,9999	$f(0,9999) = \dfrac{0,9999^2 - 1}{0,9999 - 1} = 1,9999$

Tabela 2.5: Tabela para valores próximos de $x = 1$, pela esquerda, da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

x	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
1,1	$f(1,1)=\dfrac{1,1^2-1}{1,1-1}=2,1$
1,01	$f(1,01)=\dfrac{1,01^2-1}{1,01-1}=2,01$
1,001	$f(1,001)=\dfrac{1,001^2-1}{1,001-1}=2,001$
1,0001	$f(1,0001)=\dfrac{1,0001^2-1}{1,0001-1}=2,0001$

Tabela 2.6: Tabela para valores próximos de $x = 1$, pela direita, da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

Figura 2.3: Gráfico da Função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Observa-se facilmente que para $x = 1$ a função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ não está definida, pois $f(1) = \dfrac{0}{0}$ é indeterminado. Logo, o elemento 1 não faz parte do domínio dessa função.

Como $f(1) = \dfrac{0}{0}$, isso significa que $(x-1)$ é fator do numerador (x^2-1) e do denominador $(x-1)$ da função $f(x)$, e $x-1 \neq 0$, pois para $x = 1$ a função não está definida. Sendo assim, é possível escrever a função $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} = x+1$$

Conforme já citado anteriormente, calcular o limite de uma função, quando x tende a um determinado valor x_0, não depende do comportamento dessa função no ponto para $x = x_0$, e sim próximo de x_0. Logo, analisando os resultados das Tabelas 2.5 e 2.6 e o comportamento do gráfico da função, representado na Figura 2.3 é possível afirmar que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Analisando os gráficos dos Exemplos 2.1 e 2.2 é possível observar que são curvas que não apresentam "saltos"ou "buracos". Por isso, essas funções são chamadas de Funções Contínuas. Podemos afirmar ainda, que o gráfico de uma função contínua é aquele em que traçamos completamente em uma folha de papel, sem afastar a ponta do grafite do mesmo. Uma função que não é contínua, por sua vez, é aquela em que, ao traçar o seu gráfico em uma folha de papel, em algum momento, teremos que afastar a ponta do grafite do papel em um determinado ponto, conforme pode ser observado no gráfico do Exemplo 2.3

Definição 2.1 *(Limite de Funções) Conforme [8], sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto de números reais,* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função real cujo domínio é* X *e* $a \in X'$ *um ponto de acumulação do conjunto X. Diz-se que o número real L é o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a*, e escreve-se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$*, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $x \in X$ *e* $0 < |x - a| < \delta$*.*

Simbologicamente, a Definição 2.1 pode ser escrita da forma

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \exists\delta > 0; x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Informalmente, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, que dizer que se pode tomar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo de a, com $x \neq a$.

Exemplo 2.4 *Dada a função real* $f(x) = 2 \cdot x + 1$*, no Exemplo 2.1, concluiu-se que* $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2\cdot x + 1 = 3$*. Utilizando a Definição 2.1 mostre que essa igualdade é verdadeira.*

Conforme a definição de limite de uma função, devemos mostrar que para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$, tal que $|f(x) - 3| < \varepsilon$, quando $0 < |x - 1| < \delta$, portanto,

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Rightarrow |(2\cdot x + 1) - 3| < \varepsilon \Rightarrow |2\cdot x - 2| < \varepsilon \Rightarrow 2\cdot|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

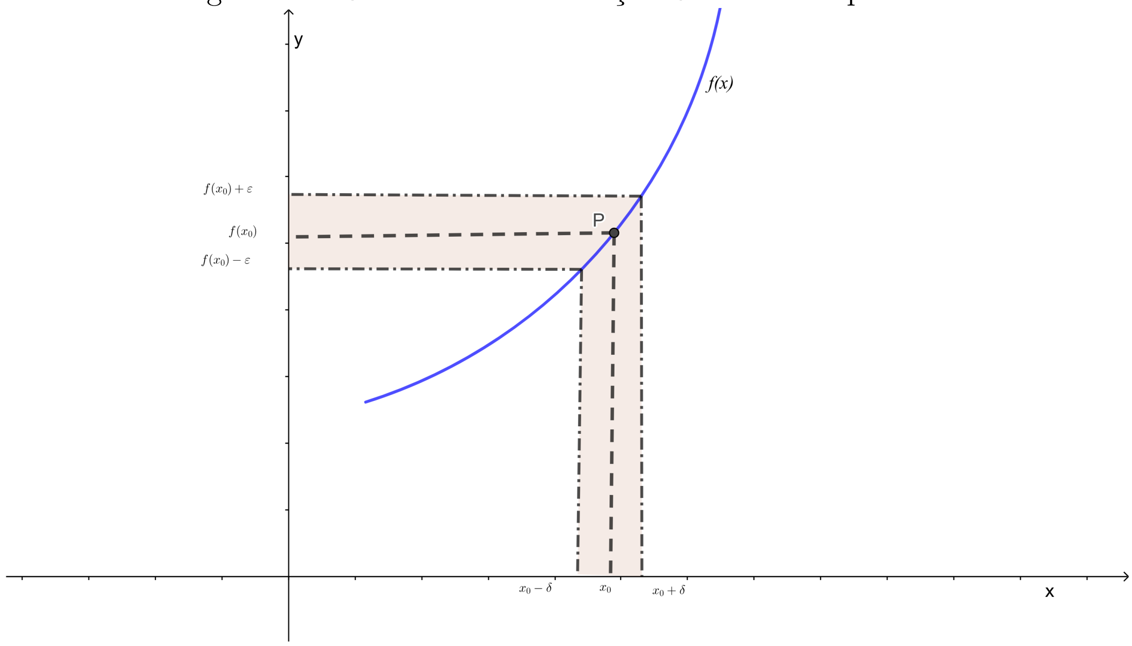
Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, tem-se que $|f(x) - 3| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Definição 2.2 *(Função Contínua) Em [10], um função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é contínua em um ponto* $x_0 \in X$ *se a seguinte condição for satisfeita: dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$*, qual que*

$$x \in X, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Geometricamente, uma Função Contínua em um ponto P, poderá ser representada, conforme Figura 2.4.

Figura 2.4: Gráfico de uma Função Contínua no ponto P



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Dada uma função real f. Em [6], essa função f será contínua em p se, somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Sendo o objetivo desse trabalho uma abordagem do Cálculo Diferencial e Integral nas funções Afim e Quadrática, e com com base na Definição 2.2, os Exemplos 2.5 e 2.6, irão mostrar a continuidade dessas funções.

Exemplo 2.5 *Mostre que a Função Afim, definida pela lei de formação* $f(x) = a \cdot x + b$, *com* $a, b \in \mathbb{R}$, *é uma Função Contínua.*

Para mostrar que a função $f(x) = a \cdot x + b$, conforme enunciado, é uma Função Contínua, iremos considerar as situações em que $a = 0$ e $a \neq 0$.

- Para $a = 0$

Para $a = 0$, a função f será constante, com $f(x) = b$, logo, f é uma Função Contínua.

$$|f(x) - f(0)| = |a \cdot x + b - (a \cdot 0 + b)| = |a \cdot x| = |a| \cdot |x|$$

Conforme a Definição 2.2, para todo $\varepsilon > 0$,

$$f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - f(0) < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

Como $|f(x) - f(0)| = |a| \cdot |x|$,

$$|a| \cdot |x| < \varepsilon$$

$$|x| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Fazendo $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, temos

$$|x - 0| < \delta$$

. Por tanto, $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Daí, conclui-se que f é uma função contínua no ponto *P(0, f(0))*

- Para $a \neq 0$

Dado um ponto $P(p, f(p))$, pertencente ao gráfico de *f*, tem-se

$$|f(x) - f(p)| = |a \cdot x + b - (a \cdot p + b)| = |a \cdot x - a \cdot p| = |a \cdot (x - p)| = |a| \cdot |x - p|$$

Conforme a Definição 2.2, para todo $\varepsilon > 0$,

$$f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - f(p) < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Como $|f(x) - f(p)| = |a| \cdot |x - p|$,

$$|a| \cdot |x - p| < \varepsilon$$

$$|x - p| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Fazendo $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, temos

$$|x - p| < \delta.$$

Por tanto, $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Daí, conclui-se que f é uma função contínua no ponto P. Como o ponto P foi tomando de forma aleatória, resulta-se que f é contínua em todo p real, isto é, f é uma Função Contínua.

Exemplo 2.6 *Mostre que a Função Quadrática, definida pela lei de formação* $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *e* $a \neq 0$, *é uma Função Contínua.*

Considerando a *Proposição 4.27*, em [10], dizendo que se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $x_0 \in I$, então as funções $f + g, f - g$ e $f \cdot g$ também são contínuas em x_0. A demonstração dessa proposição se encontra na bibliografia indicada.

No Exemplo 2.6, a função f pode ser escrita da forma $f(x) = a \cdot g(x) \cdot g(x) + h(x)$, em que as funções g e h são definidas por $g(x) = x$ e $h(x) = b \cdot x + c$. Observa-se que as funções g e h são casos particulares de Função Afim, e conforme o Exemplo 2.5, ambas são contínuas. Logo, com base na *Proposição 4.27* de [10], a Função Quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $a \neq 0$, é contínua em x_0. Como x_0 foi atribuído de forma aleatória, pode-se afirmar que f é uma Função Contínua para todo elemento do seu domínio.

2.3 Derivada

O conceito de Derivada de uma Função será apresentada de forma simples, intuitiva e objetiva. Todas as informações aqui citadas, darão suporte ao professor para desenvolver as atividades de aplicação propostas na próximo capítulo, com o intuito de facilitar o entendimento, as formalidades e demonstrações expostas aos alunos do Ensino Médio.

A noção de derivadas surgiu com Pierre Fermat no século XVII. Com seus estudos sobre funções matemática, ele chegou a um empasse sobre a definição do que era uma reta tangente. Ele percebeu que algumas das funções estudadas não batiam com a definição de reta tangente da época. Isso ficou conhecido como o problema da tangente.

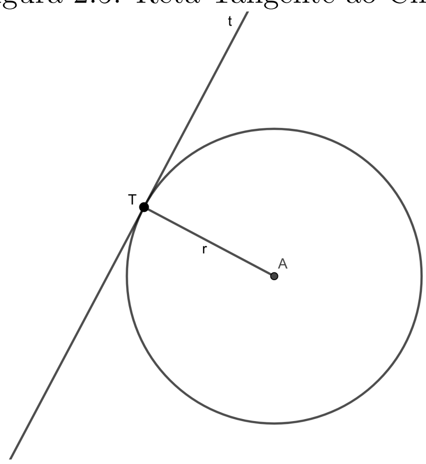
Dando continuidade aos estudos, ele resolveu o problema da seguinte maneira: para determinar uma reta tangente a uma curva no ponto P, ele definiu um outro ponto Q, distinto de P, na curva e considerou a reta PQ. Desta forma, aproximou o ponto Q ao ponto P, obtendo assim retas PQ que se aproximavam de uma reta t que Fermat chamou de reta tangente ao ponto P. Estas ideias foram consideradas como primarias para o conceito de derivadas. Entretanto, Fermat não possuía as ferramentas necessárias, por exemplo, o conceito de limite por ainda não ser conhecido na época. Foi apenas com Leibniz e Newton que o cálculo diferencial tornou-se possível e importante para as ciências exatas.

Os campos de aplicação do conceito de derivada são variados, onde sempre está relacionado a uma taxa de variação. Entre as inúmeras aplicações, podemos citar alguns problemas relacionados aos custos, tempo, velocidade, volume, temperatura e consumo de gasolina, assim como em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na física, engenharia e economia.

Com o objetivo de melhor entendimento, será apresentado um breve estudo sobre o que é uma reta tangente.

A literatura grega definiu a reta tangente a um ponto de um círculo como sendo a reta que passa por este ponto e é perpendicular ao raio do mesmo. Além disso, o único ponto em comum entre a reta e o círculo é o ponto de tangência.

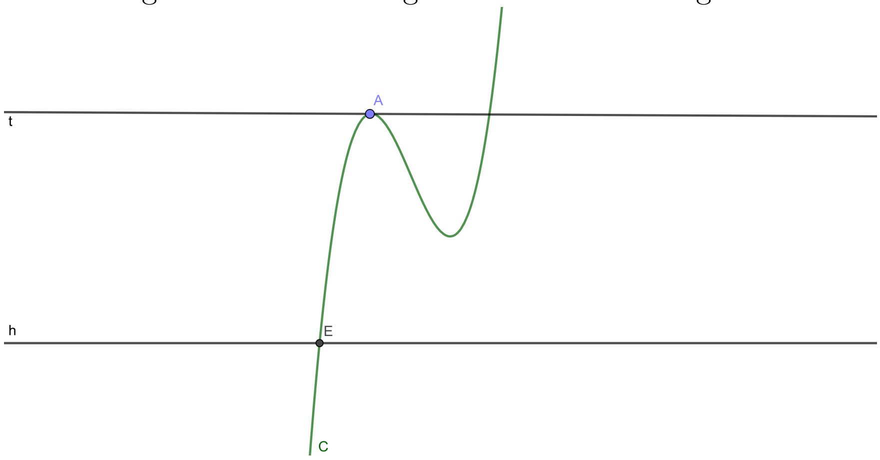
Figura 2.5: Reta Tangente ao Círculo



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Essa definição reflete a ideia intuitiva de tangente a uma curva como sendo a reta que intercepta a curva em apenas um ponto. Mas, para curvas mais complexas, essa definição é inadequada, como é possível observar na Figura 2.6

Figura 2.6: Reta Tangente e Reta não Tangente

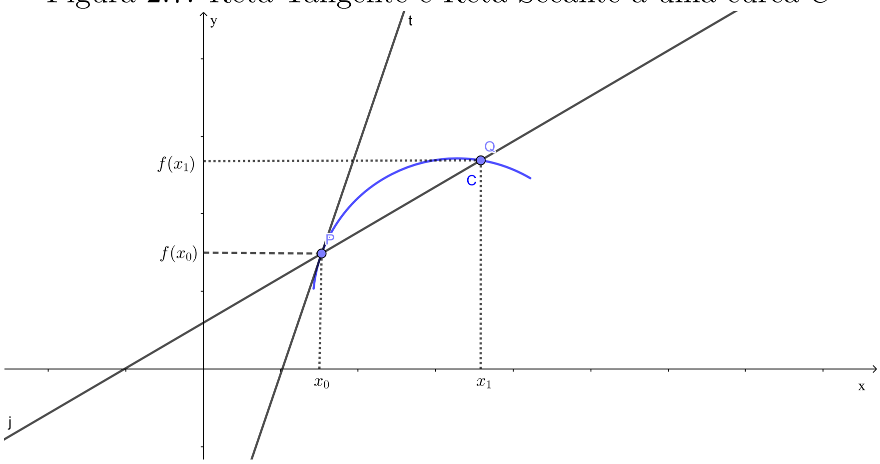


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Analisando a Figura 2.6, é possível observar que a reta t é tangente à curva C no ponto A, e a reta h não é tangente à curva C em nenhum ponto. Dessa forma, pode se dizer que a definição de reta tangente a uma curva em um ponto P, é dada pela reta que intercepta a curva no ponto P, e que todos os pontos de C, próximos de P, pertencem ao mesmo semiplano definido pela reta.

Considere uma curva C, dada pela representação gráfica de uma função real definida pela lei de formação $y = f(x)$ e $P(x_0, f(x_0))$ um ponto qualquer dessa função. Considere um outro ponto $Q(x_1, f(x_1))$ sobre essa curva, tal que a reta $\overline{PQ}$ seja secante à C, ou seja, a reta definida pelos pontos P e Q intercepta a curva C em dois pontos distintos. Considere a reta t tangente à curva C, no ponto $P(x_0, f(x_0))$, conforme Figura 2.7

Figura 2.7: Reta Tangente e Reta Secante a uma curca C

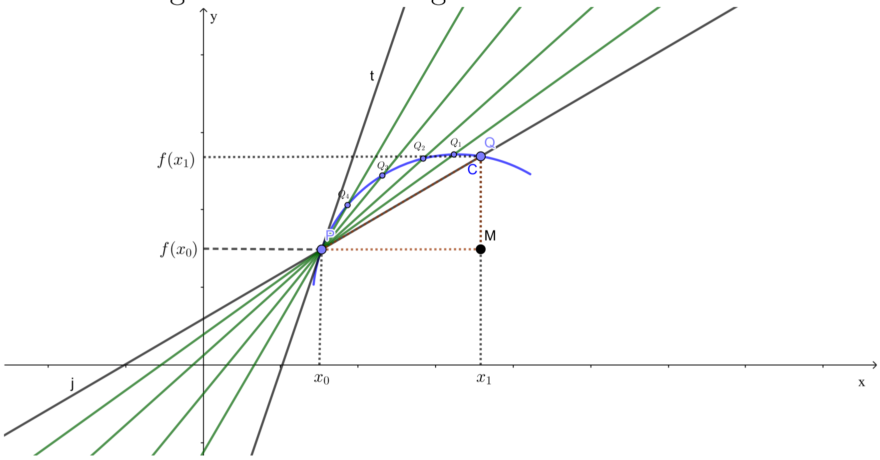


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Supondo que o ponto Q se desloca, sobre a curva C, em direção ao ponto P, conforme

Figura 2.8, passando pelos pontos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, é esperado, intuitivamente, que a reta tangente t passa a ser definida como a posição limite da reta secante j, quando Q desliza ao longo da curva em direção a P.

Figura 2.8: Reta Tangente e Retas Secantes



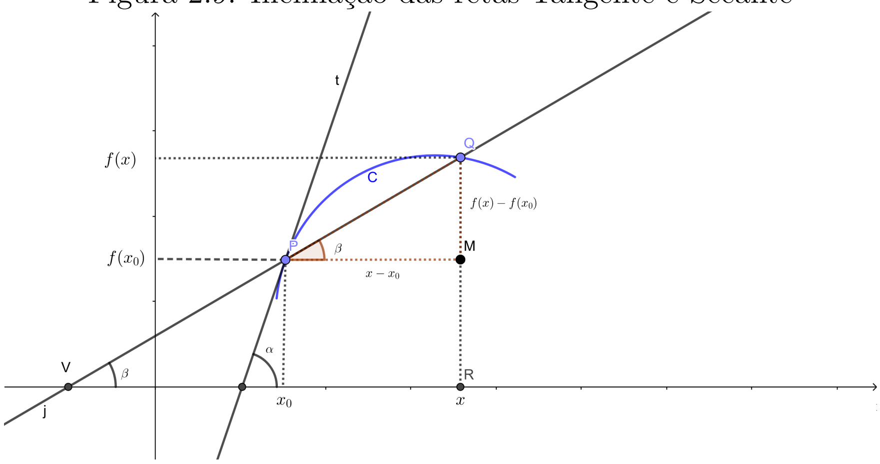
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Considerando dois pontos distintos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$, ambos pertencentes a curva C. Conforme definido na Seção 1.3, uma reta, não vertical, fica determinada quando se conhece dois de seus pontos ou é definido um ponto qualquer e o coeficiente angular (inclinação da reta em relação ao eixo Ox).

Conforme a Figura 2.9, e considerando os triângulos ΔQPM e ΔQVR semelhantes, pelo critério de Semelhanças de Triângulos AAA (Ângulo - Ângulo - Ângulo), uma vez que seus ângulos internos correspondentes são congruentes, a inclinação da reta secante j é dada por:

$$tg\beta = m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Figura 2.9: Inclinação das retas Tangente e Secante



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Observa-se que, à medida que o ponto Q se aproxima do ponto P, à medida que x se aproxima de x_0 , a inclinação m_s da reta secante j se aproxima da inclinação m_t da reta t, tangente à curva C no ponto P, conforme ilustrado na Figura 2.9

Logo, se existir a reta tangente à curva C no ponto $P(x_0, f(x_0))$, então sua inclinação $m_t = tg\alpha$ será igual ao valor limite das inclinações $m_s = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, para $Q(x, f(x))$ se aproximando de P, ou seja, para x tendendo a x_0.

Essa situação é denotada por:

$$m_t = tg\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.7 *Qual a equação da reta tangente a curva definida pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1$, no ponto $P(1, 3)$?*

Conforme já citado, a reta pode ser definida por um ponto e a sua inclinação, com relação ao eixo das abscissas. Como a reta é tangente à curva no ponto $P(1, 3)$, logo, a reta passa por P.

O coeficiente angular da reta tangente é dada pela Equação 2.1. Daí tem-se que:

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{(2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1) - (2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1)}{x - 1}$$

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{(2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1) - (-2)}{x - 1}$$

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{x - 1}$$

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{(x - \frac{1}{2}) \cdot (x - 1)}{x - 1} \tag{2.2}$$

Sabendo-se que x tende a 1 significa que serão atribuídos valores próximos de 1, e não $x = 1$, logo $x - 1 \neq 0$. Daí, é possível simplificar a Equação 2.2 por $x - 1$.

$$m_t = \lim_{x \to 1} x - \frac{1}{2}$$

$$m_t = 1 - \frac{1}{2}$$

$$m_t = \frac{1}{2}$$

Como a reta tangente tem coeficiente angular $m_t = \dfrac{1}{2}$ e passa pelo ponto $P(1, 3)$, logo, a mesma terá equação:

$$m_y = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y-3}{x-1}$$
$$1 \cdot (x-1) = 2 \cdot (y-3)$$
$$x - 1 = 2 \cdot y - 6$$
$$y = \frac{x+5}{2}$$

Definição 2.3 *Em [8], seja f uma função real de uma variável real e x_0 um ponto do seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando existe, é denominado de derivada da função f no ponto x_0, e indicada por $f'(x_0)$.

Se f admite derivada no ponto P, então dizemos que f é derivável em P. De forma geral, dizemos que f é uma função derivável, se for derivável em cada ponto do seu domínio.

Com base nas Equações 1.3 e 2.1 e na Definição 2.3 é possível concluir que a equação da reta tangente a uma função *f*, no ponto $P(x_0, y_0)$ é definida por

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$
$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{2.3}$$

Em muitas literaturas, na Definição 2.3 escrevendo $h = x - x_0 \to x = x_0 + h$, para x tendencia a x_0, em $h = x - x_0$, tem-se $h \to 0$, ou seja, a definição da derivada (f') da função real f, poderá ser escrita da forma

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.4}$$

2.3.1 O uso de Derivadas no estudo da Função Quadrática

Dentre diversos problemas que podem ser abordados com o uso de derivadas, será abordado uma análise de algumas propriedades importantes do gráfico de uma função. Para isso, iremos apresentar alguns tópicos importantes na construção do gráfico de uma Função Quadrática, tais como: intervalos em que a parábola é crescente ou decrescente, pontos de máximo ou de mínimo e a concavidade do seu gráfico.

Intervalos de Crescimento e Decrescimento da Função Quadrática

Inicialmente, utilizando a Equação 2.4, é possível afirmar que a derivada da Função Quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $a \neq 0$, é dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

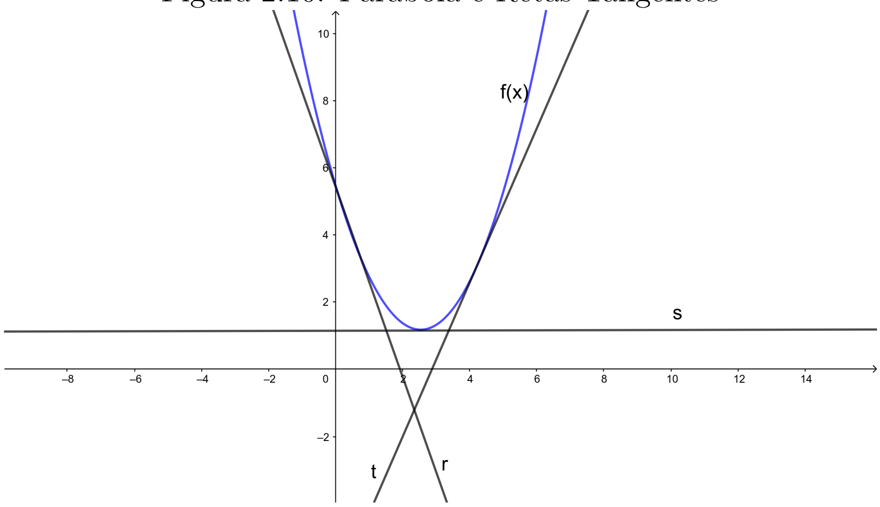
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[a \cdot (x+h)^2 + b \cdot (x+h) + c] - (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot h \cdot x + a \cdot h^2 + b \cdot x + b \cdot h + c - a \cdot x^2 - b \cdot x - c}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot a \cdot h \cdot x + a \cdot h^2 + b \cdot h}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2 \cdot a \cdot x + a \cdot h + b)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2 \cdot a \cdot x + a \cdot h + b)$$

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b \tag{2.5}$$

Logo, a derivada da Função Quadrática é uma Função Afim, e conforme já citado anteriormente, sua representação gráfica é uma reta, que poderá ser crescente, se o coeficiente angular for maior que zero, ou decrescente, se o coeficiente angular for menor que zero. Portanto, tem-se na Equação 2.5, que a derivada *f'*, será crescente quando $a > 0$, ou decrescente, quando $a < 0$

Analisando o esboço de uma parábola e das retas tangentes à mesma, conforme Figura 2.10, observa-se que uma reta tangente poderá ser crescente, decrescente ou constante (paralela ao Eixo Ox).

Figura 2.10: Parábola e Retas Tangentes



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Conforme a Definição 1.3, e analisando a Figura 2.10, observa-se que no intervalo em que a função f é crescente, a reta tangente, em um ponto desse intervalo, também é crescente (reta t na Figura). No intervalo em que a função f é decrescente, a reta tangente, em um ponto desse intervalo, também é decrescente (reta r na Figura). A reta tangente s é paralela ao Eixo Ox, logo o coeficiente angular é igual a zero, ou seja, $f'(x) = 0$. O ponto em que a reta s tangencia o gráfico de f é chamado de ponto crítico da parábola, ou vértice da parábola. Dizemos que o vértice $V(x_v, f(x_v))$ é ponto de máximo da função, quando para todo $x \in D_f$, tem-se $f(x) < f(x_v)$, e $V(x_v, f(x_v))$ será ponto de mínimo da função, quando para todo $x \in D_f$, tem-se $f(x) > f(x_v)$.

Exemplo 2.8 *Determine o vértice e os intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5$. O vértice de f é ponto de máximo ou de mínimo? Esboce a gráfico dessa função.*

Inicialmente, determine a derivada *f'* da função, conforme Equação 2.5.

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$
$$f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot x - 12$$
$$f'(x) = 4 \cdot x - 12$$

Em seguida, obter o valor de x, tal que $f'(x) = 0$, afim de encontrar o ponto de tangência em que a derivada é paralela ao Eixo Ox, ou seja, o vértice da parábola.

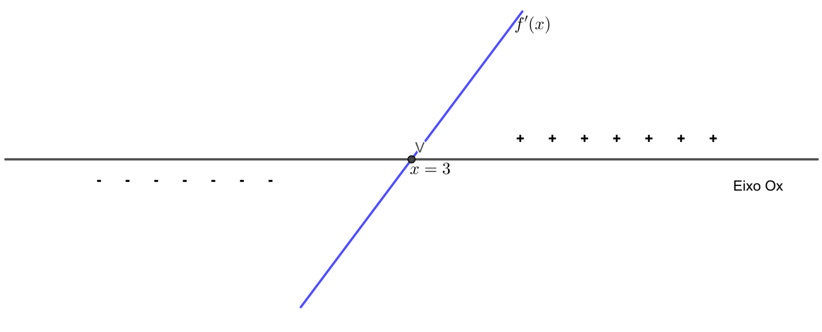
$$f'(x) = 0$$

$$4 \cdot x - 12 = 0$$
$$4 \cdot x = 12$$
$$x = 3$$

Daí, tem-se que o vértice da parábola é o ponto $V(3, f(3))$, sendo $f(3) = 2{\cdot}3^2{-}12{\cdot}3{+}5 = -13$, ou seja, $V(3, -13)$.

Analisando o estudo dos sinais da função *f'*, como feito no Exemplo 1.9, é possível concluir que essa função é crescente e que, conforme o esboço gráfico da Figura 2.11, tem-se $f'(x) < 0$, para $x < 3$, $f'(x) = 0$, para $x = 3$, e $f'(x) > 0$, para $x > 3$.

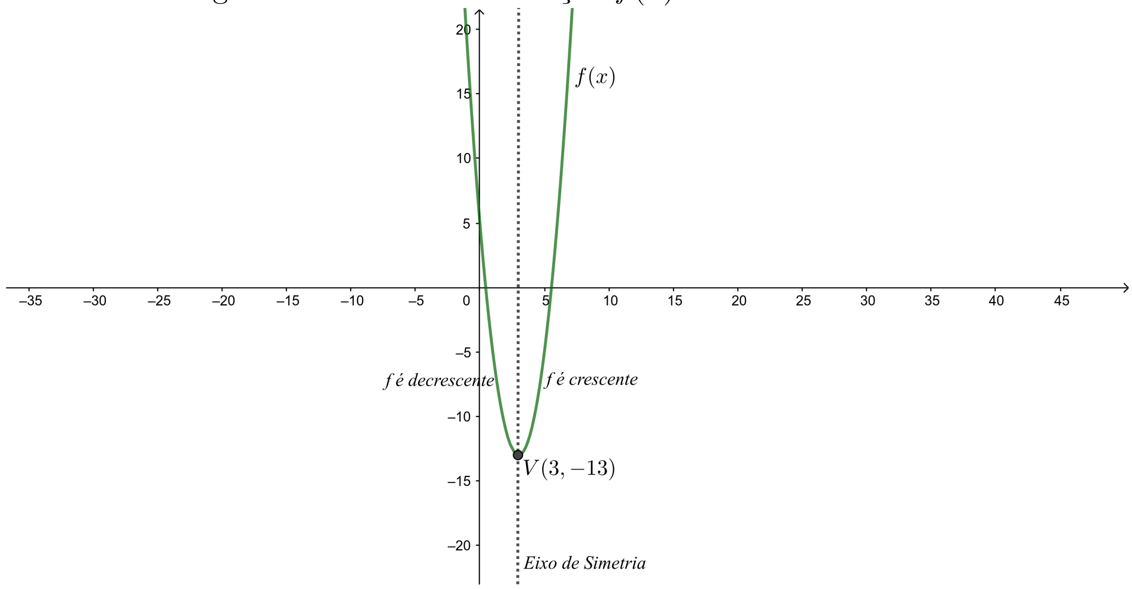
Figura 2.11: Estudos de sinais da função *f'*



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Conclui-se, então, que a função f é decrescente para $x < 3$, pois a derivada f' é negativa nesse intervalo (a derivada negativa significa que o coeficiente angular da reta tangente é negativo, logo, a reta tangente será decrescente), e é crescente para $x > 3$, pois a derivada é positiva nesse intervalo (a derivada positiva significa que o coeficiente angular da reta tangente é positivo, logo, a reta tangente será crescente). Analisando a Figura 2.12, observa-se que o vértice da parábola $V(3, -13)$ é um ponto de mínimo.

Figura 2.12: Gráfico da função $f(x) = 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Pontos Extremos

Exemplo 2.9 *De modo geral, analisar o crescimento e decrescimento da Função Quadrática* $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *e* $a \neq 0$, *determinando as coordenadas do vértice. Em seguida, verifica se o vértice é ponto de mínimo ou de máximo.*

Considerando a derivada $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ (conforme Equação 2.5), o vértice da parábola da função f será o ponto $V(x, f(x))$, tal que, $f'(x) = 0$, ou seja,

$$f'(x) = 0$$

$$2 \cdot a \cdot x + b = 0$$

$$2 \cdot a \cdot x = -b$$

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Logo, o vértice da parábola será o ponto $V\Big(\frac{-b}{2 \cdot a}, f\big(\frac{-b}{2 \cdot a}\big)\Big)$, com

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) = a\cdot\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) + c$$
$$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) = a\cdot\frac{b^2}{4\cdot a^2} - \frac{b^2}{2\cdot a} + c$$
$$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) = \frac{b^2}{4\cdot a} - \frac{b^2}{2\cdot a} + c$$
$$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) = \frac{b^2 - 2\cdot b^2 + 4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$$
$$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) = \frac{-b^2 + 4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$$
$$f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) = \frac{-(b^2 - 4\cdot a\cdot c)}{4\cdot a}$$

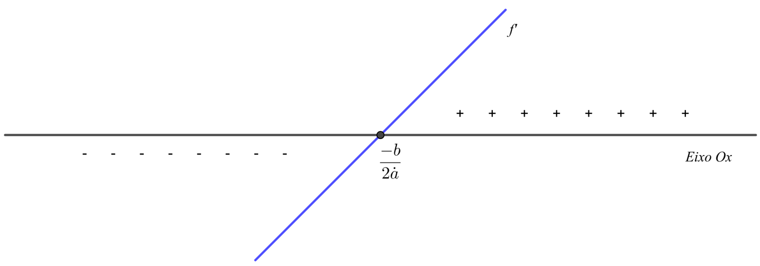
Fazendo $\Delta = (b^2 - 4\cdot a\cdot c)$, temos que $f\left(\frac{-b}{2\cdot a}\right) = \frac{-\Delta}{4\cdot a}$, ou seja, as coordenadas do vértice da parábola será $V\left(\frac{-b}{2\cdot a}, \frac{-\Delta}{4\cdot a}\right)$.

Para analisar o estudo dos sinais da função derivada $f'(x) = 2\cdot a\cdot x + b$, deve-se considerar as situações em que $a > 0$ e que $a < 0$.

- Para $a > 0$

Considerando $a > 0$, tem-se que o gráfico da função $f'(x) = 2\cdot a\cdot x + b$ será uma reta crescente, pois o coeficiente angular $2\cdot a > 0$, e analisando o esboço gráfico da função *f'*, na Figura 2.13, conclui-se que $f'(x) < 0$, para $x < \frac{-b}{2\cdot a}$, $f'(x) = 0$, para $x = \frac{-b}{2\cdot a}$, e $f'(x) > 0$, para $x > \frac{-b}{2\cdot a}$

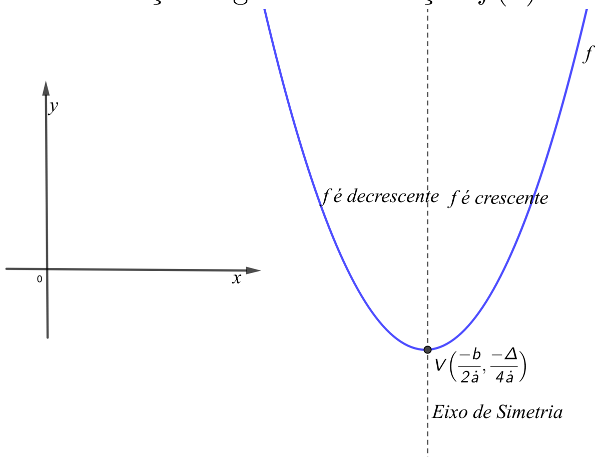
Figura 2.13: Estudo de sinais da função $f'(x) = 2\cdot a\cdot x + b$, para $a > 0$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Logo, é possível concluir que a função f é decrescente para $x < \frac{-b}{2\cdot a}$, pois a derivada *f'* é negativa nesse intervalo, e é crescente para $x > \frac{-b}{2\cdot a}$, pois a derivada é positiva nesse intervalo. Analisando a Figura 2.14, observa-se que o vértice V da parábola é um ponto de mínimo.

Figura 2.14: Esboço do gráfico da função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, para $a > 0$

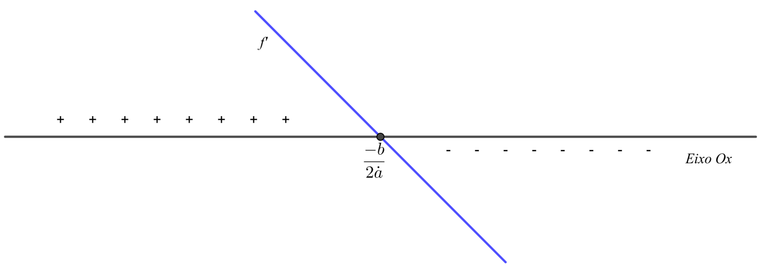


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

- Para $a < 0$

De modo análogo, para $a < 0$, tem-se que o gráfico da função $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ será uma reta decrescente, pois o coeficiente angular $2 \cdot a < 0$. Analisando o esboço gráfico de f', na Figura 2.15, conclui-se que $f'(x) > 0$, para $x < \dfrac{-b}{2 \cdot a}$, $f'(x) = 0$, para $x = \dfrac{-b}{2 \cdot a}$, e $f'(x) < 0$, para $x > \dfrac{-b}{2 \cdot a}$

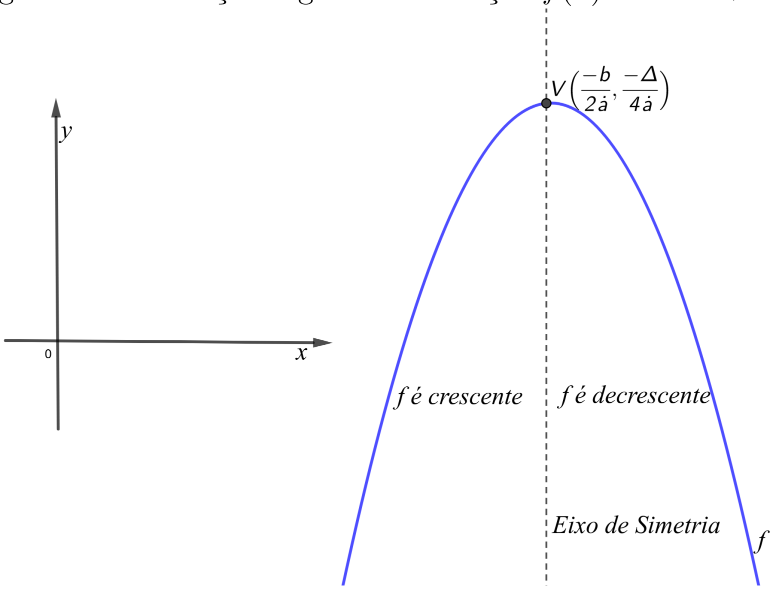
Figura 2.15: Estudo de sinais da função $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$, para $a < 0$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Conclui-se que a função f é crescente para $x < \dfrac{-b}{2 \cdot a}$, pois a derivada f' é positiva nesse intervalo, e é decrescente para $x > \dfrac{-b}{2 \cdot a}$, pois a derivada é negativa nesse intervalo. Analisando a Figura 2.16, observa-se que o vértice V da parábola é um ponto de máximo.

Figura 2.16: Esboço do gráfico da função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, para $a < 0$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Concavidade do Gráfico da Função Quadrática

Com base nas informações contidas no Exemplo 2.9 e considerando a função real $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, sua derivada $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ e o vértice da parábola no ponto $V\left(\dfrac{-b}{2 \cdot a}, \dfrac{-\Delta}{4 \cdot a}\right)$, com $\Delta = (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)$, tem-se:

a	Intervalo de Crescimento	Intervalo de Decrescimento	Concavidade da Parábola	Vértice
$a > 0$	$x > \dfrac{-b}{2\dot{a}}$	$x < \dfrac{-b}{2\dot{a}}$	para cima	ponto de mínimo
$a < 0$	$x < \dfrac{-b}{2\dot{a}}$	$x > \dfrac{-b}{2\dot{a}}$	para baixo	ponto de máximo

Tabela 2.7: Aplicação da Derivada na Função Quadrática

Capítulo 3

APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

A forma como são introduzidos os conceitos matemáticos nos ensinos fundamental e médio, muitas vezes é um reflexo do fracasso no ensino - aprendizagem dos alunos. Por isso, neste capítulo, abordaremos algumas situações de aplicabilidade do estudo de limites e derivadas de uma função, com o objetivo de facilitar o entendimento das resoluções.

O assunto de pontos de máximo ou mínimo de uma Função Quadrática, tem uma apresentação recorrente na vida dos nossos alunos. Ele se apresenta não só em anos diferentes desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, mas também em disciplinas diferentes como na Física, Química, Economia, Engenharia, entre outras. As aplicações aqui trazidas tornaram atrativo esse estudo, atingindo um dos principais objetivos deste trabalho, por ser um conteúdo recorrente e de currículo obrigatório.

Na Seção 3.4 será criado um tutorial para mostrar aos alunos a definição intuitiva de derivada de uma função com o uso do *Software GeoGebra*.

3.1 Aplicação 1 - Ponto de Máximo ou de Mínimo

Analisando o Exemplo 1.10 e com base na Seção 2.3.1, conclui-se que a receita $R(x) = -5 \cdot x^2 + 40 \cdot x + 1200$, sendo x o valor do quilo de comida, terá valor máximo quando $R'(x) = 0$, ou seja,

$$R'(x) = -5 \cdot 2 \cdot x + 40 \Rightarrow -5 \cdot 2 \cdot x + 40 = 0 \Rightarrow -10 \cdot x + 40 = 0 \Rightarrow x = \frac{-40}{-10} \Rightarrow x = 4.$$

Como $(12 + x)$ é a solução do problema, logo, o restaurante terá uma maior receita possível, para o valor do quilo de comida igual a $R\$16,00$.

3.2 Aplicação 2 - Crescimento / Decrescimento

O problema a seguir foi extraído e adaptado de [2] e será analisado e interpretado com base nos intervalos de crescimento e decrescimento da função.

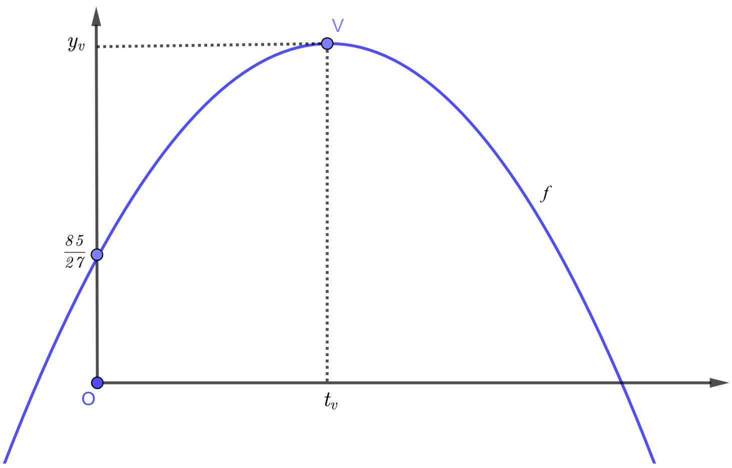
Exemplo 3.1 *O* ***sequestro de carbono*** *é a absorção de grandes quantidades de gás carbônico (CO_2) presentes na atmosfera. A forma mais comum de sequestro de carbono é naturalmente realizada pelas florestas. Na fase de crescimento, as árvores demandam uma quantidade muito grande de carbono para se desenvolverem e acabam tirando esse elemento do ar. Esse processo natural ajuda a diminuir consideravelmente a quantidade de (CO_2) na atmosfera: cada hectare de floresta em desenvolvimento é capaz de absorver nada menos que 150 a 200 toneladas de carbono. É por essas e outras razões que o plantio de árvores é uma das prioridades para a diminuição de poluentes na atmosfera terrestre.*

Considerando que, em uma determinada região, a função f que fornece o acréscimo de sequestro anual de CO_2 da atmosfera (em milhões de toneladas) em função do tempo (em anos) seja dada por $f(t) = -\dfrac{t^2}{135} + \dfrac{16 \cdot t}{27} + \dfrac{85}{27}$.

Considerando $t = 0$ para o ano de 2000, $t = 1$ para 2001, e assim por diante. Por exemplo, no ano de 2020 o acréscimo previsto do sequestro de carbono será de $f(20)$ milhões de toneladas. Com base nessas informações, até quando uma floresta em estudo estará tendo um acréscimo no sequestro de carbono superior ao ano anterior?

Observando o esboço do gráfico da função quadrática $f(t) = -\dfrac{t^2}{135} + \dfrac{16 \cdot t}{27} + \dfrac{85}{27}$ representado na Figura 3.1 é possível concluir, visualmente, que a função é crescente para para $0 < t < t_v$, e decrescente para $t > t_v$, onde t_v é a abscissa do vértice da parábola.

Figura 3.1: Esboço gráfico de $f(t) = -\dfrac{t^2}{135} + \dfrac{16 \cdot t}{27} + \dfrac{85}{27}$.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Inicialmente, a derivada f' da função é dada por:

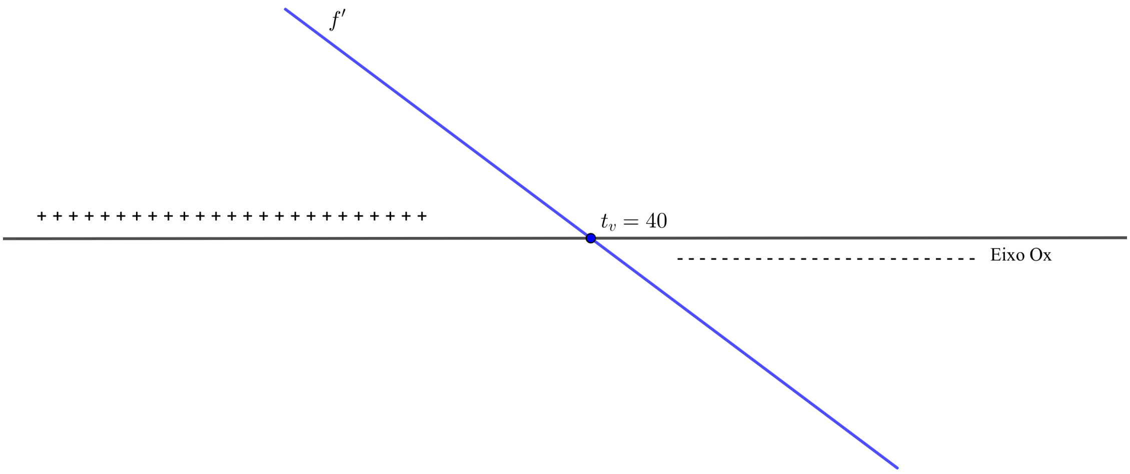
$$f'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b \Rightarrow f'(t) = 2 \cdot \frac{-1}{135} \cdot t + \frac{16}{27} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2}{135} \cdot t + \frac{16}{27}.$$

O ponto em que a função assume o valor máximo em t_v, tal que $f'(t_v) = 0$, ou seja,

$$f'(t) = \frac{-2}{135} \cdot t + \frac{16}{27}$$
$$f'(t_v) = \frac{-2}{135} \cdot t_v + \frac{16}{27}$$
$$0 = \frac{-2}{135} \cdot t_v + \frac{16}{27}$$
$$\frac{2}{135} \cdot t_v = \frac{16}{27}$$
$$t_v = \frac{16}{27} \cdot \frac{135}{2}$$
$$t_v = 40$$

Fazendo o estudo dos sinais de $f'(t) = \frac{-2}{135} \cdot t + \frac{16}{27}$, conforme Figura 3.2, conclui-se que a função $f(t) = -\frac{t^2}{135} + \frac{16 \cdot t}{27} + \frac{85}{27}$ é crescente para $t < 40$ e decrescente para $t > 40$

Figura 3.2: Estudo de Sinais de $f'(t) = -\frac{2}{135} \cdot t + \frac{16}{27}$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Por tanto, no período de 2000 à 2040, o acréscimo no sequestro de carbono será sempre superior ao acréscimo do ano anterior. Em 2040, será o ano com o maior acréscimo de sequestro de carbono e $f(40) = -\frac{40^2}{135} + \frac{16 \cdot 40}{27} + \frac{85}{27} = 15$ milhões de toneladas. Após 2040, anualmente, o acréscimo no sequestro de carbono será inferior ao ano anterior.

3.3 Aplicação 3 - Movimento Uniformemente Variado

O Movimento Uniformemente Variado (MUV) é aquele em que um corpo sofre uma aceleração constante, de modo que sua velocidade varia de forma igual a cada segundo. Conforme [5], o movimento uniformemente variado é aquele em que a velocidade escalar varia uniformemente no decorrer do tempo, ou seja, a velocidade escalar sofre variações sempre iguais em intervalos de tempo iguais.

O estudo do MUV requer que saibamos utilizar as funções horárias da velocidade e da posição de um objeto em função do tempo. Elas possibilitam parâmetros para determinar posição, velocidade ou aceleração em um determinado instante de tempo, sendo, portanto, de fundamental importância para o estudo do movimento no âmbito da cinemática.

A aceleração é um dos conceitos centrais do MUV. Essa grandeza pode ser calculada pela variação da velocidade dividida por um intervalo de tempo. No Sistema Internacional de Unidades, a unidade de medida da aceleração é o $\mathrm{m/s^2}$, que significa a mudança na velocidade, em m/s, a cada segundo.

Considerando o movimento de um corpo que se move numa trajetória qualquer e, $s = s(t)$ denotará o espaço percorrido pelo móvel a partir de um certo ponto O, durante um tempo t. Logo, $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ representa o espaço percorrido pelo móvel durante o intervalo de tempo que vai do instante **t** ao instante $(t + \Delta t)$. A velocidade média (v_m) é a variação da posição (deslocamento) de um móvel em relação a um referencial durante certo intervalo de tempo, ou seja, v_m é definida como sendo o quociente $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

Para determinar a velocidade instantânea (v_i) de um corpo no instante t, basta calcular a sua velocidade média em intervalos de tempo, que contem t, cada vez menores, ou seja, calcular v_m para Δt cada vez mais próximo de zero. Em outras palavras, a velocidade instantânea é o limite da velocidade média, para $\Delta t \to 0$,

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m$$

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Logo, conforme Definição 2.3, dada a função $s = s(t)$ que representa a posição do corpo, no instante t, a velocidade instantânea de corpo no instante t é dada por

$$v_i = s'(t) \tag{3.1}$$

A velocidade marcada no velocímetro do carro, mostra a velocidade em cada instante. Essa velocidade é a instantânea e identifica a velocidade de um corpo em um momento específico, enquanto a velocidade média é o resultado da razão entre o espaço percorrido, Δs, e o período de tempo gasto, Δt.

De modo semelhante, a aceleração média, a_m, de um corpo no intervalo de tempo de t à $t + \Delta t$ é dada pelo quociente $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$. E ela mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo de tempo Δt. Para determinar a aceleração instantânea (a_i) de um corpo no instante t, calcula-se a sua velocidade média em intervalos de tempo, que contém t, cada vez menor, ou seja, calcula-se a_m para Δt cada vez mais próximo de zero. Isso significa que a velocidade instantânea é o limite da aceleração média, para $\Delta t \to 0$,

$$a_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m$$

$$a_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Daí, tem-se

$$a_i(t) = v'(t) \tag{3.2}$$

Exemplo 3.2 *O movimento de um corpo é definido por sua função horária que é dada por* $s(t) = 20 + 18 \cdot t - 7 \cdot t^2$*, onde* s *é dado em metros e* t *em segundos. Determine:*

1. *A posição deste corpo 10 segundos após o inicio do movimento.*
2. *Qual a velocidade deste corpo no instante 10 segundos?*
3. *Em que momento este corpo inverte o seu sentido de movimento.*
4. *Qual a aceleração deste corpo quando* t *é igual a 10 segundos?.*

Conforme as Equações 2.5, 3.1 e 3.2 conclui-se que as funções $v(t)$ e $a(t)$, velocidade instantânea e aceleração instantânea, respectivamente, em função do tempo t são dadas por:

$$v(t) = s'(t)$$

$$v(t) = -2 \cdot 7 \cdot t + 18$$

$$v(t) = -14 \cdot t + 18$$

e

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[-14 \cdot (t + \Delta t) + 18] - (-14 \cdot t + 18)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-14 \cdot t - 14 \cdot \Delta t + 18 + 14 \cdot t - 18}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-14 \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

$$a(t) = -14.$$

Logo, tem-se:

1. Sendo $s(t) = 20 + 18 \cdot t - 7 \cdot t^2$, temos que

$$s(10) = 20 + 18 \cdot 10 - 7 \cdot 10^2$$

$$s(10) = -500.$$

2. Como $v(t) = -14 \cdot t + 18$, tem-se

$$v(10) = -14 \cdot 10 + 18$$

$$v(10) = -128.$$

3. Observa-se que o momento em que o corpo inverte o seu sentido de movimento será quando o mesmo tem velocidade igual a zero, ou seja, $v(t) = 0$,

$$v(t) = -14 \cdot t + 18$$

$$0 = -14 \cdot t + 18$$

$$14 \cdot t = 18$$

$$t = \frac{18}{14}$$

$$t = \frac{9}{7}.$$

4. Como $a(t) = -14$ é uma constante, logo, a aceleração do corpo no instante igual a 10 segundos será igual a -14, ou seja, $a(10) = -14$.

Observando os resultados nos itens anteriores, a velocidade e aceleração estão no mesmo sentido, o módulo da velocidade aumenta com o passar do tempo. Por causa disso, esse movimento é chamado de acelerado, e essas duas grandezas apresentam os mesmos sinais.

3.4 Aplicação 4 - *GeoGebra*

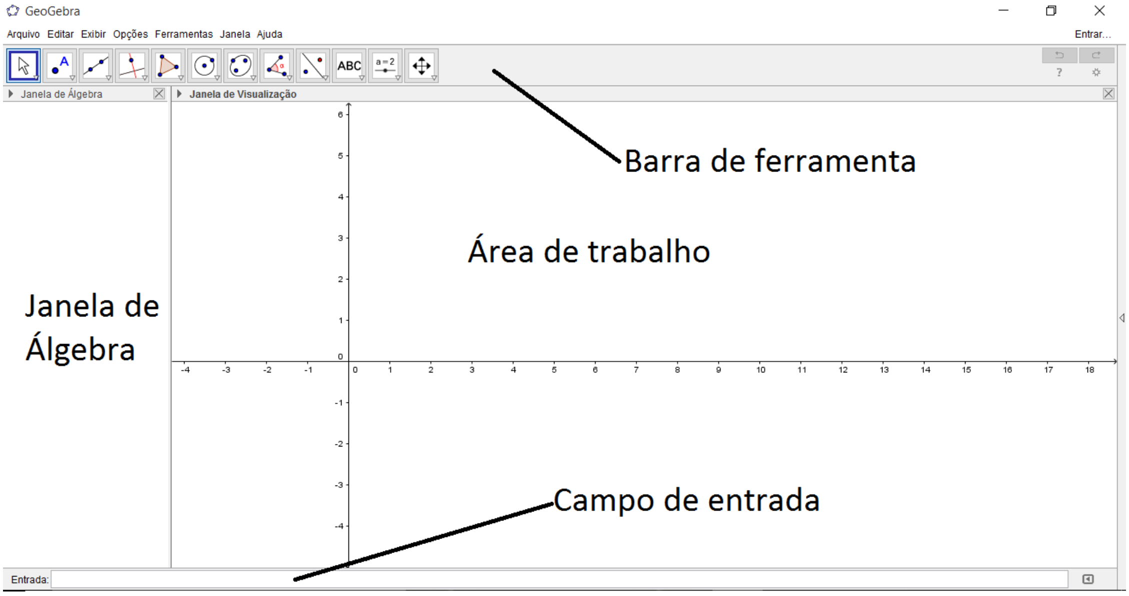
Um software é um conjunto de componentes lógicos de um computador ou sistema de processamento de dados; programa, rotina ou conjunto de instruções que controlam o funcionamento de um computador; suporte lógico. Em outras palavras, um software é todo programa rodado em um computador, celular ou dispositivo que permita ao mesmo executar suas funções.

GeoGebra é um software de matemática que reúne geometria, álgebra e cálculo. O seu autor é o professor Markus Hohenwalter da Universidade de Salzburgo na Áustria. O *GeoGebra* é um sistema de geometria dinâmica e permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, como com funções que podem ser modificadas dinamicamente.Nessa aplicação, será utilizada a versão online clássica.

Por outro lado, podemos inserir equações e coordenadas diretamente através de um campo específico para isso. Assim, o *GeoGebra* oferece a possibilidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos, permitindo determinar derivadas e integrais de funções, oferecendo um conjunto de comandos próprios da análise matemática.

Na Figura 3.3, temos a tela inicial do *GeoGebra* com a definição das suas principais partes.

Figura 3.3: Tela principal do *GeoGebra*

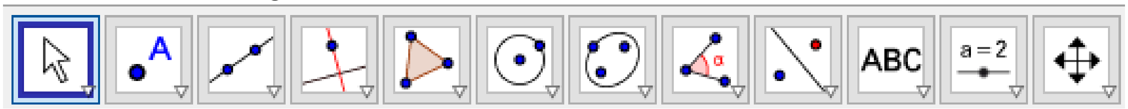


Fonte: Elaborada pelo próprio auto

Observa-se que na janela inicial está dividida em duas partes: à esquerda a parte algébrica, que pode ser fechada se necessário, e à direita, onde denominamos área de trabalho, a parte geométrica.

Para reativar a parte algébrica basta ir ao item "Exibir"do menu e clicar em "janela de álgebra". Neste mesmo item podemos ativar ou desativar os eixos do plano, a malha e o protocolo de construção. Na tela inicial, ainda temos a "Barra de Ferramentas", conforme a Figura 3.4. Cada ícone desta barra tem várias opções, relacionadas com as funcões descritas na janela. Estas opções são acessadas clicando na seta do canto inferior direito de cada ícone.

Figura 3.4: Barra de Ferramentas do *GeoGebra*



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A seguir serão citados alguns exemplos de aplicação usando o *GeoGebra*.

Exemplo 3.3 *Estudo de funções polinomiais.*

Um importante recurso do *GeoGebra* permite a investigação de raízes, extremos locais e pontos de inflexão de uma função polinomial. Por exemplo, vamos digitar na caixa de texto a função $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 1$, em seguida clicar em ENTER.

- **Determinação das Raízes de uma Função.**

Digitar, na caixa de texto, R=Raiz[f], e em seguida clicar em ENTER. Surgirão no gráfico todas as raízes da função. Para aparecer no gráfico os valores reais dessas raízes, devemos clicar com o botão direito em cada uma delas, clicar em propriedades e na janela "básico" escolher a opção rótulo nome e valor.

- **Determinação dos Extremos de uma Função.**

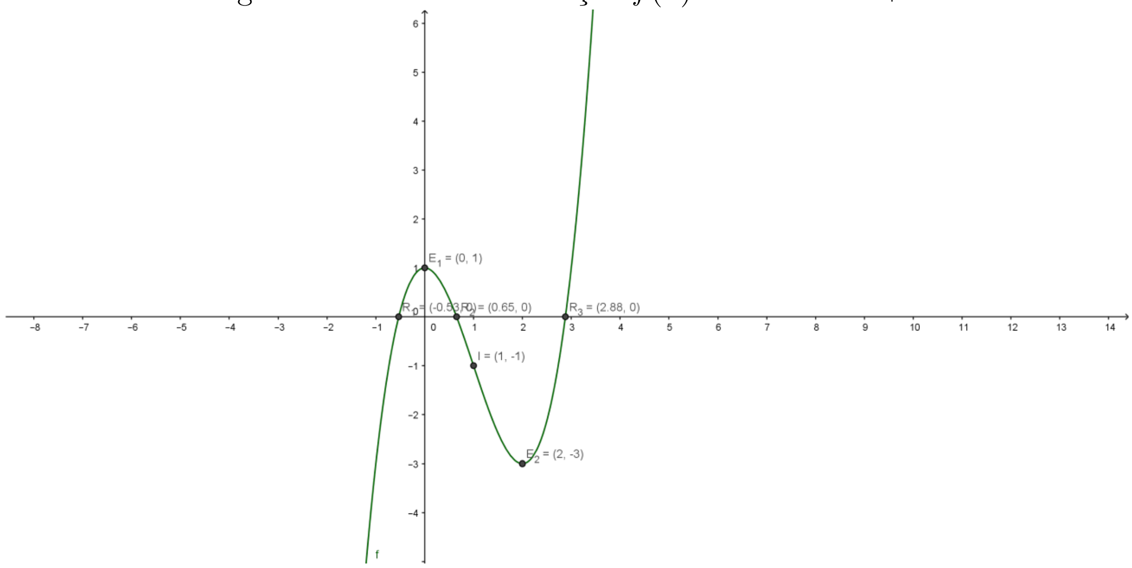
Em seguida, digitamos E=Extremo[f], e em seguida clicamos em ENTER. Aparecerão os pontos de máximo ou mínimo locais. Vale o mesmo procedimento anterior das propriedades para que as coordenadas desses pontos apareçam no gráfico.

- **Determinação dos Pontos de Inflexão de uma Função.**

Finalmente, digitamos I=PontodeInflexão[f], em seguida clicamos em ENTER, e, se for o caso, aparecerão os pontos de inflexão da curva. Os Pontos de Inflexões são os pontos onde a representação gráfica da função altera a concavidade.

O gráfico desse exemplo, ficará conforme a Figura 3.5:

Figura 3.5: Gráfico da Função $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 1$



Fonte: Elaborada pelo próprio auto

Exemplo 3.4 *Interpretação gráfica da função derivada*

Este é um importante recurso do *GeoGebra* e que, com certeza, irá facilitar muito aos iniciantes de Cálculo no entendimento e interpretação do significado da derivada de uma função.

Considere a função $f(x) = x^2 - 7 \cdot x + 6$. O *GeoGebra* tem um recurso interessante de geometria dinâmica que é o de "habilitar rastro". Com esse recurso podemos visualizar o lugar geométrico definido por um ponto móvel qualquer.

Escreva o comando $f(x) = x^2 - 7 \cdot x + 6$ no campo de entrada de texto e, em seguida, clicar em ENTER. Escolha a opção novo ponto (no ícone ponto) e clique num ponto qualquer da curva.

- **Determinação da Reta Tangente de uma Função, a partir de um ponto.**

Escolha a opção tangente (no ícone reta) e em seguida clique no ponto A e na função f. Imediatamente será traçada a reta tangente à curva da função, no ponto A. Na janela algébrica surge também a equação da reta tangente. Caso queira, clique com o botão direito do mouse sobre a reta tangente e escolha a opção renomear e digite t.

- **Inclinação da Reta Tangente.**

Digite agora o comando S=inclinação[t]. Imediatamente irá surgir um triângulo com a inclinação da reta tangente.

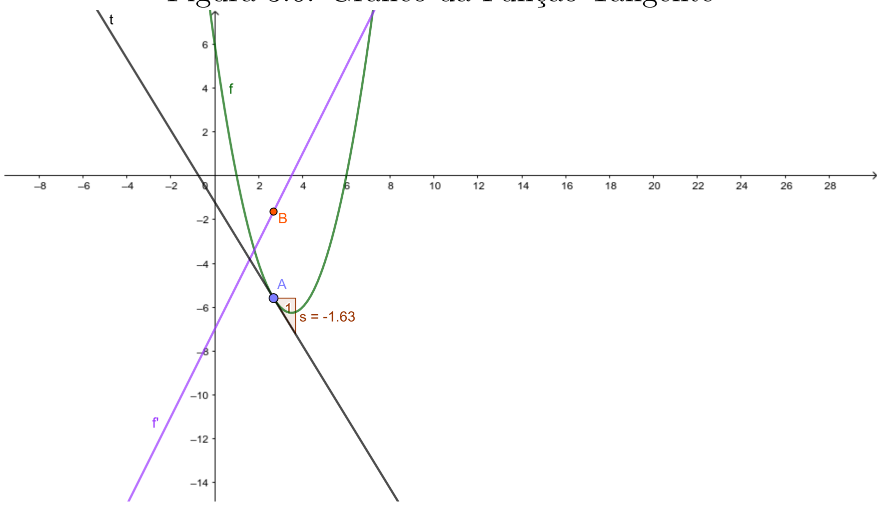
Digite o comando B=(x(A),s), que gera o vetor direção da reta tangente e, em seguida, clicando em B com o botão direito do mouse, marque a opção “habilitar traço”.

Escolha agora o modo “mover” e arraste o ponto A ao longo do gráfico da função f. O rastro gerado pelo ponto B vai gerar uma curva.

- **Derivada de uma Função.**

Finalize a investigação digitando Derivada[f]. Agora, comparar com o traço gerado pelo ponto B e a curva da derivada, podemos concluir que são iguais.

Figura 3.6: Gráfico da Função Tangente



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Como conclusão da proposta e para um melhor dinamismo em sala de aula, dando a ideia intuitiva do conceito de Derivada de uma função, segue link da animação feita no *Geo Gebra*, onde é possível movimentar o ponto A, variando assim, a inclinação da reta tangente: https://www.geogebra.org/classic/mc48xsua.

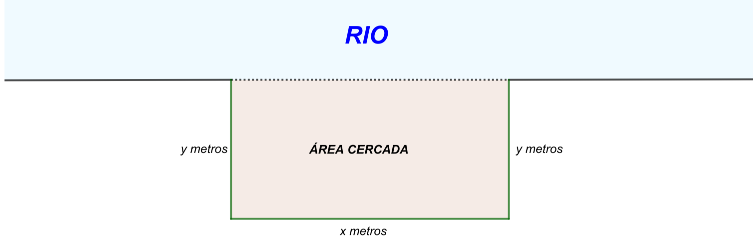
3.5 Aplicação 5 - Proposta de Sequência Didática

Nessa Seção será apresentada uma sequência didática que aborda uma maneira de analisar o comportamento da concavidade da parábola e as coordenadas do vértice de função quadrática aos alunos do 1° ano do Ensino Médio. Serão descritos os procedimentos metodológicos e características da análise qualitativa, a concepção da sequência didática e a descrição juntamente com análise da aplicação da sequência.

- **Público Alvo:** Alunos matriculados no 1º Ano do Ensino Médio.
- **Título:** Resolução de problemas, com aplicação dos pontos de máximo ou mínimo de uma Função Quadrática.
- **Objetivo:** Aplicar o Teorema 1.2, referente a caracterização de uma função quadrática, definindo o melhor modelo matemático que se aplica em uma determinada situação problema; Encontrar a Lei de Formação de uma função quadrática; Determinar as coordenadas do vértice de uma parábola;
- **Conhecimento necessário:** Conhecer os conceitos, definição e representação gráfica da função quadrática; resolver equações polinomiais do primeiro grau; conhecer as definições intuitivas de limites e derivadas, conforme os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 e Definição 2.3
- **Material:** Atividade impressa e utilização da lousa.
- **Procedimentos Preparatórios:** Fazer um breve resumo dos assuntos citados no Conhecimentos de Base, especialmente, nas definições intuitivas de limites e derivadas, de modo que todos os alunos da turma estejam mais próximos de um nivelamento de aprendizagem, para que assim, todos eles consigam ter participação na construção da resolução da situação problema proposta. Distribuir as atividades impressas para cada aluno.

SITUAÇÃO-PROBLEMA: (Situação adaptada de [7]) Com 80 metros de cerca, um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais, conforme esboço representado na Figura 3.7.

Figura 3.7: Esboço da área cercada



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível? Para o fazendeiro, não deverá cercar a margem do rio, pois os animais precisam ter acesso ao mesmo.

- **Estratégia de Resolução:** Possível resolução

1. Tabular o problema, Tabela 3.1, questionando os alunos possíveis dimensões da área cercada e as respectivas áreas, sabendo-se que a soma dos três lados do retângulo, conforme Figura 3.7, é igual a 80, ou seja, $x + y + y = x + 2 \cdot y = 80$

i	x_i	$2 \cdot y_i$	y_i	$A_i = x_i \cdot y_i$
1	10	70	35	$A_1 = 10 \cdot 35 = 350$
2	20	60	30	$A_2 = 20 \cdot 30 = 600$
3	30	50	25	$A_3 = 30 \cdot 25 = 750$
4	40	40	20	$A_4 = 40 \cdot 20 = 800$
5	50	30	15	$A_5 = 50 \cdot 15 = 750$
6	60	20	10	$A_6 = 60 \cdot 10 = 600$

Tabela 3.1: Tabulação do problema

Indagar para a turma se é possível afirmar que a área máxima da região cercada é igual a $800m^2$ e o retângulo terá dimensões de $40m$ de comprimento e $20m$ de largura.

Para responder essa indagação, teremos que encontrar um modelo matemático que melhor se adapta a essa situação.

2. **Modelagem Matemática**: Analisando a Tabela 3.1, é possível observar que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = x_6 - x_5 = r = 10$, e fazendo as diferenças de A_i, temos:
$A_2 - A_1 = d_1 = 600 - 350 = 250$
$A_3 - A_2 = d_2 = 750 - 600 = 150$
$A_4 - A_3 = d_3 = 800 - 750 = 50$
$A_5 - A_4 = d_4 = 750 - 800 = -50$
$A_6 - A_5 = d_5 = 600 - 750 = -150$
Com, $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = d_4 - d_3 = d_5 - d_4 = -100$

Com base na caracterização da função quadrática, conforme Teorema 1.2, a citada situação - problema poderá ser modelada por uma função quadrática do tipo $A(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e $d_i - d_{i-1} = 2 \cdot a \cdot r^2$, em que $A(x)$ é a área do retângulo, em m^2, com comprimento medindo x metros.

Daí, tem-se:

$$2 \cdot a \cdot r^2 = d_i - d_{i-1}$$

$$2 \cdot a \cdot r^2 = -100$$

$$2 \cdot a \cdot 10^2 = -100$$

$$2 \cdot a \cdot 100 = -100$$

$$2 \cdot a = \frac{-100}{100}$$
$$2 \cdot a = -1$$
$$a = \frac{-1}{2} < 0$$

Verificando esse resultado na Tabela 2.7, podemos afirmar que a função quadrática $A(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ terá concavidade para baixo e a mesma terá um ponto de máximo.

Considerando dois pontos quaisquer da Tabela 3.1, por exemplo, x_1 e x_2, iguais a 10 e 20, respectivamente, temos que $A(10) = 350$ e $A(20) = 600$, ou seja,

$$\begin{cases} A(10) = 350 \\ A(20) = 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-1}{2} \cdot 10^2 + 10 \cdot b + c = 350 \\ \frac{-1}{2} \cdot 20^2 + 20 \cdot b + c = 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 \cdot b + c = 400(I) \\ 20 \cdot b + c = 800(II) \end{cases} \tag{3.3}$$

Subtraindo as Equações (II) e (I), no Sistema 3.3, temos que:

$$20 \cdot b - 10 \cdot b + c - c = 800 - 400$$
$$10 \cdot b = 400$$
$$b = \frac{400}{10}$$
$$b = 40.$$

Substituindo o valor de $b = 40$ na equação (I), no Sistema 3.3, tem-se:

$$10 \cdot b + c = 400$$
$$10 \cdot 40 + c = 400$$
$$c = 400 - 400$$
$$c = 0$$

Logo, a lei de formação da função quadrática $A(x)$, será dada por $A(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^2 + 40 \cdot x$.

3. **Análise da função** $A(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^2 + 40 \cdot x$

- Derivada de $A(x)$.
  Com base na Seção 2.3.1, na Equação 2.5, a derivada da função $A(x)$, é dada por:

$$A'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$
$$A'(x) = 2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot x + 40$$
$$A'(x) = -x + 40.$$

- Coordenadas do vértice da parábola
  O ponto $V(x_v, y_v)$ será o vértice da parábola quando a reta tangente em V for paralela ao eixo Ox, ou seja, o coeficiente angular da reta, $A'(x)$, será igual a zero.

$$A'(x) = 0$$
$$-x + 40 = 0$$
$$x = 40.$$

  Portanto, as coordenadas do vértice da parábola será dada por $V(40, A(40))$, com

$$A(40) = \frac{-1}{2} \cdot 40^2 + 40 \cdot 40$$
$$A(40) = \frac{-1}{2} \cdot 1600 + 1600$$
$$A(40) = -800 + 1600$$
$$A(40) = 800.$$

- Ponto de máximo de $A(x)$.
  Como $a < 0$, pode-se afirmar que o ponto $V(40, 800)$ é o ponto de máximo da função $A(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^2 + 40 \cdot x$.

Daí, pode-se afirmar que o retângulo cercado pelo fazendeiro terá uma área máxima de $800m^2$, e comprimento igual a 40 metros. Como $x + 2 \cdot y = 80$, temos que o terreno retangular terá largura y metros, com

$$x + 2 \cdot y = 80$$
$$40 + 2 \cdot y = 80$$
$$2 \cdot y = 80 - 40$$
$$2 \cdot y = 40$$
$$y = 20.$$

- **Estrutura da Aula:** Duração de 85 minutos

\- Procedimentos preparatórios: 5 min;

- Explicação dos objetivos e leitura da problematização: 5 min;
- Revisão dos conceitos de conhecimento base: 30 min;
- Tabulação do problema: 10 min;
- Equacionalização do problema: 20 min;
- Resolução do problema: 15 min

- **Formalização:** Os alunos deverão estar familiarizados com a análise de tabelas, a fim de identificar e aplicar a caracterização de uma função. Para isso, o professor deverá trabalhar com uma vasta variação de situação problemas.

  O professor deverá apresentar aos alunos a definição intuitiva de derivada de uma função a partir da reta tangente, conforme construída abordado na Seção 2.3

- **Extensão:** É possível estender os estudos na análise dos intervalos de crescimento e/ou decrescimento da função, afim de entender o comportamento da área $A(x)$, em função da medida do comprimento x do retângulo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foi apresentado uma introdução intuitiva e formal dos conceitos de Limite e Derivada das funções Afim e Quadrática. A noção de Limite foi introduzida a partir de observações algébricas dos valores que uma função assume nas aproximações de um ponto P, cujo valor da abscissa é x_0, e, geometricamente, a derivada foi definida diretamente, a partir da inclinação de uma reta tangente à curva, num ponto P.

As especificações e características do *Software GeoGebra* potencializaram a construção do conceito de derivada, nos quais o aluno será capaz de experimentar, intuitivamente, situações em um processo dinâmico no ensino – aprendizagem. Entende-se que a atividade proposta neste trabalho utilizando o *GeoGebra* para definir, geometricamente, a reta tangente a uma curva em um determinado ponto, irá possibilitar e estimular a investigação e o questionamento, convidando o aluno a descobrir e construir os próprios conceitos matemáticos.

Esse trabalho foi construído visando a elaboração e a aplicação de uma sequência didática com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, mas, devido à pandemia do COVID-19 que ocorreu no ano de desenvolvimento da pesquisa, as aulas presenciais foram proibidas e o projeto não pode ser aplicado na escola.

As atividades disponibilizadas neste trabalho e todo o material de apoio criado pelo autor poderá ser aplicados tanto em uma oficina no contra-turno, quanto na própria sala de aula. Também é possível que o projeto seja desenvolvido como um projeto interdisciplinar com Física, visto que o trabalho envolve vários pontos que poderiam ser aprofundados. Como esta pesquisa não pôde ser aplicada, fica como sugestão para um próximo estudo a aplicação do conteúdo e metodologia aplicada. O desenvolvimento em outro momento deve fornecer dados sobre a importância do contexto dos conteúdos matemáticos para a aprendizagem e comprovar a necessidade de utilizar novos métodos de ensino na sala de aula.

É importante citar, que o ensino do Cálculo poderá possibilitar aos alunos do Ensino Médio um aprendizado de forma interessante para inserir conceitos importantes. Sendo assim, o objetivo da pesquisa foi alcançado, tendo em vista que foi mostrado que os conceitos intuitivos de limite e derivada podem ser abordados no Ensino Médio, desde que o professor utilize alternativas adequadas e interessantes para a clientela. Pois esses tópicos são importantes, principalmente para os alunos enfrentarem as dificuldades apresentados ao cursarem as disciplinas afins ao conteúdo de Cálculo no Ensino Superior na área de exatas. Portanto, independentemente de ter ou não um laboratório de experimentos e infraestrutura atualizadas, se o professor tiver uma formação matemática adequada, metodologia renovadora e dedicação, com um mínimo de estrutura, é possível criar condições de apresentar ao aluno as noções necessárias ao bom entendimento do Cálculo.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA,Graldo, *O Ensino do Cálculo no 2º Grau*, Revista do Professor de Matemática, n. 18, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, página 1 - 9, 1991.

[2] DANTE, Luiz Roberto, *Matemática: contexto & aplicações, Volume 1*, Editora Ática. 2ª Edição - São Paulo, 2013.

[3] DUCLOS, Robert Costallat, *Cálculo no 2º Grau*, Revista do Professor de Matemática, n.20, sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio de Janeiro, página 26 - 30, 1992.

[4] EVES, Howard, *Introdução à história da matemática*, Editora da UNICAMP. 1ª Edição. - Campinas / São Paulo, 2004.

[5] FERRARO, Nicolau Gilberto, *Física Básica, Volume Único*, Atual Editora. 2ª Edição - São Paulo, 2004.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton luiz, *Um Curso de Cálculo, Volume 1*, Livros Técnicos e Científicos Editora. 4ª Edição. - Rio de Janeiro, 2000.

[7] LIMA, Elon Lages, *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*, Coleção do Professor de Matemática - SBM. 5ª Edição. - Rio de Janeiro, 2000.

[8] LIMA, Elon Lages, *Análise Real, Volume 1*, Coleção Matemática Universitária - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 6ª Edição. - Rio de Janeiro, 2002.

[9] LIMA, Elon Lages, *Temas e Problemas*, Coleção do Professor de Matemática - SBM. - Rio de Janeiro, 2001.

[10] NETO, Antonio Caminha Muniz, *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3: Introdução à Análise*, Coleção do Professor de Matemática - SBM. 2ª Edição. - Rio de Janeiro, 2013.

[11] RIBENBOIM, Paulo, *Funções, Limites e Continuidade*, Texto Universitário - SBM. 1ª Edição. - Rio de Janeiro, 2012.