UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

JÉSSICA SCHEIDEGGER FERREIRA NOVAES

O ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados: uma contextualização da matemática na pandemia de covid-19

Ilhéus-Ba
2022

JÉSSICA SCHEIDEGGER FERREIRA NOVAES

O ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados: uma contextualização da matemática na pandemia de covid-19

Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz, com objetivo de obter título de mestre.
Orientadora: Profa. Dra. Karina Kfouri Sartori

Coorientadora: Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello

Ilhéus-Bahia
2022

N935 Novaes, Jéssica Scheidegger Ferreira.
O ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados: uma contextualização da matemática na pandemia de COVID-19 / Jéssica Scheidegger Ferreira Novaes. – Ilhéus, BA: UESC, 2022.
55f. : il.

Orientadora: Karina Kfouri Sartori
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. – Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.
Inclui referências e apêndices.

1. Mínimos quadrados. 2. Curvas. 3. Equações diferenciais lineares. 4. COVID-19. 5. Ensino médio. 6. Eunápolis (BA). I. Título.

CDD 511.42

JÉSSICA SCHEIDEGGER FERREIRA NOVAES

O ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados: uma contextualização da matemática na pandemia de covid-19

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho Aprovado. Ilhéus, 03 de março de 2022:

Karina Kfouri Sartori

Profa. Dra. Karina Kfouri Sartori - Orientadora - UESC

Geizane Lima da Silva

Profa. Dra. Geizane Lima da Silva (UESC)

Elaine Ferreira Rocha

Profa. Dra. Elaine Ferreira Rocha (UNIVASF)

Mirela Vanina de Mello

Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello - Coorientadora - UESC

Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu. Há tempo de nascer, e tempo de morrer; tempo de plantar, e tempo de arrancar o que se plantou. Eclesiastes 3:1,2.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela oportunidade de ingressar e concluir este curso. Porque dEle e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente.

À minha família por todo encorajamento. Meus pais Geferson e Fabiane, e meu irmão Jefferson, vocês são meu alicerce.

Ao meu esposo Messias pelo amor, paciência e contribuições às minhas dúvidas. Caminhou lado a lado comigo nos lugares retos e tortuosos também.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT e em especial às minhas orientadoras, professoras Karina e Mirela, por todas as instruções. Obrigada por compartilharem o conhecimento tão valioso comigo.

Ao professor Nestor pela empatia e gentileza ao me instruir em momentos de grande turbulência e inseguranças vivenciadas no ano de 2021.

Aos meus colegas de curso pela parceria, em especial a Tamires Rigoti e ao Marcos Ferreira que tornaram esse caminho mais leve.

Resumo

O tópico matemático de ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados não faz parte do currículo do ensino médio. Embora sendo assim, trazemos para este trabalho uma proposta de atividade, organizada em quatro etapas de execução, que contextualiza o ensino desse tópico com os dados obtidos da pandemia de covid-19 na cidade de Eunápolis, no estado da Bahia. Dessa forma, o trabalho apresenta as justificativas frente a BNCC (Base Nacional Curricular Comum) seguido da teoria matemática acerca do ajuste de curvas através dos mínimos quadrados. Por fim, é apresentado um breve relato sobre a aplicação da atividade na turma do primeiro ano do ensino médio numa escola privada da cidade de Eunápolis.

Palavras-chave: mínimos quadrados, ajuste, pandemia, ensino médio

Abstract

The mathematical topic of curve fitting using the least squares method is not part of the high school curriculum. Although this is the case, we bring to this work an activity proposal, organized in four stages of execution, which contextualizes the teaching of this topic with the data obtained from the covid-19 pandemic in the city of Eunápolis, in the state of Bahia. In this way, the work presents the justifications against the BNCC (Base Nacional Curricular Comum) followed by the mathematical theory of curve fitting through least squares. Finally, a brief report on the application of the activity in the first year of high school class in a private school in the city of Eunápolis is presented.

Keywords: least squares, fit, pandemic, high school

Sumário

Introdução

A produção deste trabalho é fruto da reflexão sobre a proposta de conceber um estudo acerca de um tema específico pertinente ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenha impacto na prática didática em sala de aula, conforme proposto pelo PROFMAT (PROFMAT, 2020).

Nesse sentindo, buscando a relevância deste estudo, é perceptível, desde o início da pandemia, em vários veículos de informação a quantidade exorbitante de explicações e informações acerca do novo coronavírus associadas a alguns conceitos matemáticos, que buscavam, de alguma maneira, explicar os aspectos gerais da pandemia.

Gráficos, números, histogramas, médias, curvas, taxas... Uma invasão de conceitos e ideias matemáticas utilizadas que se tornaram expressões populares no cotidiano das pessoas. E nesta perspectiva, tornou-se indispensável que todo cidadão saiba ler e interpretar criticamente essas representações e conceitos para compreensão da realidade. Além disso, para o estudante da educação básica, especificamente o estudante do ensino médio, é acrescentada a responsabilidade de saber produzir essas representações gráficas.

Aliado aos estudos acerca das funções, há muitas situações em que a representação gráfica possibilita a compreensão do que está acontecendo. O gráfico das funções permite perceber o desenvolvimento de um fenômeno ao longo do tempo, o crescimento ou decrescimento de uma determinada população, por exemplo. Explorar as representações gráficas é uma forma de contextualizar funções e dar significado a este conceito para os estudantes.

Dessa forma, é apresentado neste trabalho uma proposta de atividade sobre a contextualização da matemática na pandemia de Covid-19 ao propor o estudo do ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados a partir dos números obtidos do fenômeno da pandemia de Covid-19. Acreditamos que, o estudo aqui proposto, possa contribuir para as aprendizagens das funções matemáticas, oportunizar o entendimento e dar um contexto para um conjunto de dados sobre o número de casos confirmados na cidade de Eunápolis num determinado período.

Além disso, o objetivo geral deste trabalho é construir algo relevante para o estudante do Ensino Médio, especificamente do primeiro ano, apresentando-lhe uma ferramenta nova: o Método dos Mínimos Quadrados. Este assunto faz parte dos cursos de nível superior, mas entende-se que a utilização deste recurso, no qual o estudante irá encontrar-se com conteúdos e competências já adquiridos por ele, poderá levá-lo à construções de novos saberes, uma visão mais avançada do universo matemático e sua aplicabilidade em diversas outras áreas.

Ainda nessa perspectiva, a proposta abrange também a utilização de recursos computacionais ao explorar as planilhas eletrônicas e a criação de gráficos que automatizam os procedimentos envolvidos nos métodos de ajustes. Por isso, a conclusão da atividade sugere a utilização dessas ferramentas, proporcionando a possibilidade de interação com recursos tecnológicos que agilizam e enriquecem o aprendizado.

Sendo assim, estruturamos este trabalho em três capítulos, a saber:

O Capítulo 1 apresenta a fundamentação teórica e as referências que apontam para a relevância do tema deste trabalho sobre a área de Matemática validada pelo documento normativo da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) apontando para uma importante contextualização com a pandemia de COVID-19.

O Capítulo 2 traz a teoria sobre o ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados explorando a resolução de exemplos e delimitando o ajuste para polinômios de grau 1 e 2, que é o foco da proposta da atividade.

Já o Capítulo 3 apresenta os procedimentos para desenvolver a atividade para ser trabalhada com os alunos do ensino médio, bem como o relato da aplicação da mesma.

Capítulo 1

Matemática, Base Nacional Curricular Comum e pandemia de Covid-19

Este capítulo apresenta os fundamentos e as referências que relacionam o estudo da Matemática frente ao documento normativo da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) levando em consideração a atual conjuntura da pandemia de Covid-19.

1.1 A Base Nacional Curricular Comum

Visando uma formação humana integral e a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado por Brasil (2013), nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN), a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento normativo que define um conjunto de aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica. Este documento aplica-se a educação escolar nos níveis do ensino fundamental e médio, tal como define a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996).

Nesse sentido, na BNCC essas aprendizagens devem assegurar o desenvolvimento de dez competências gerais. Essas competências são entendidas como a associação entre conhecimentos, habilidades, atitudes e valores necessários para resolver demandas da vida cotidiana do cidadão (BRASIL, 2019).

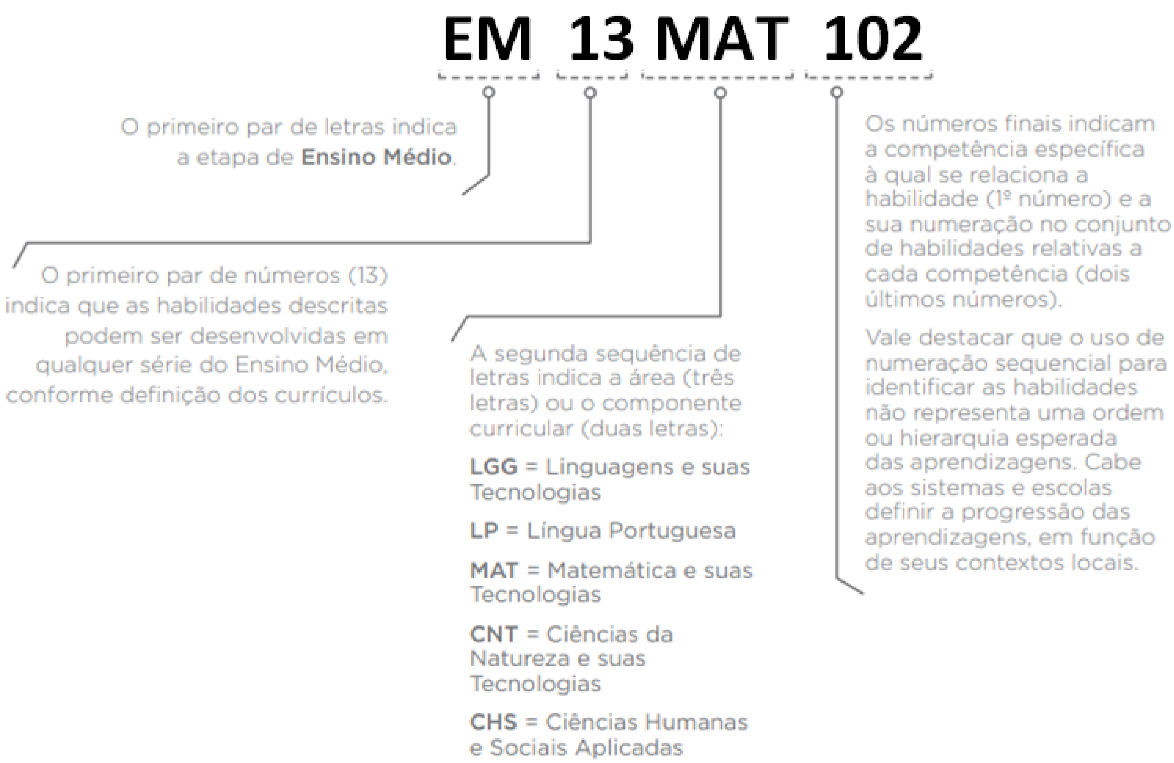
A BNCC estrutura a educação básica em três etapas: educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. Especificamente para o ensino médio, que é nosso foco de estudo, os componentes curriculares são organizados em quatro áreas do conhecimento, conforme determina a LDB, a saber:

1. Linguagens e suas Tecnologias;
2. Matemática e suas Tecnologias;
3. Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
4. Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Além disso, cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo da etapa do ensino médio. Essas competências específicas explicitam como as competências gerais se expressam nas áreas e são articuladas às competências específicas de área para o ensino fundamental, com as adequações necessárias e especificidades da formação do estudante do ensino médio.

Assim, para garantir o desenvolvimento das competências específicas de área, cada uma delas é relacionada com um conjunto de habilidades que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas. Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é como apresenta a Figura 1.1.

Figura 1.1: Código alfanumérico



Fonte: BNCC (Adaptado)

Dessa forma, o código EM13MAT102 por exemplo, refere-se à primeira habilidade proposta na área de Matemática e suas Tecnologias relacionada à competência específica 2, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

1.2 O que a BNCC diz sobre o ensino de Matemática?

Sobre a área de Matemática e suas Tecnologias, assim como no Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Nesse sentido, a BNCC enumera cinco competências específicas para Matemática:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Importante ressaltar que as competências não tem uma ordem determinada, e, juntas, se conectam de forma que uma necessita da mobilização de outras. Além disso, as habilidades são apresentadas sem a indicação de seriação permitindo a flexibilização na definição dos currículos nas propostas pedagógicas individuais de cada escola.

Na BNCC, para a área do conhecimento de Matemática e suas Tecnologias no ensino médio, o objetivo é consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens adquiridas no ensino fundamental para que os estudantes construam uma visão mas integrada da Matemática na perspectiva de sua aplicação à realidade em diferentes contextos. O texto aponta para a realidade como sendo uma referência dizendo que

> [...] é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2019, p.528)

Assim, entendemos que a vivência do estudante deve ser um dos alicerces para promover o desenvolvimento das aprendizagens matemáticas. Nesse sentido, é perceptível a importância de atribuir contextos que estimulem a reflexão e abstração permitindo aos estudantes formular e resolver problemas com mais autonomia utilizando recursos matemáticos.

Para que esses objetivos sejam alcançados, Brasil (2019) diz que "os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas" mobilizando as ações de raciocinar, representar, comunicar e argumentar. Nesse momento é que as competências e habilidades previstas para matemática são desenvolvidas.

Nessa perspectiva, diantes dessas reflexões desenvolvemos para este trabalho uma proposta de atividade que contextualiza o conteúdo de ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados com os dados acerca da pandemia de covid-19 no Brasil, especificamente na cidade de Eunápolis no estado da Bahia, alcançando as seguintes competências e habilidades previstas pela BNCC:

Código	Habilidade
EM13MAT102	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
EM13MAT106	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
EM13MAT406	Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

Quadro 1.1: Competências e Habilidades da unidade Probabilidade e Estatística

Código	Habilidade
EM13MAT101	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT203	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Quadro 1.2: Competências e Habilidades da unidade Números e Álgebra

Código	Habilidade
EM13MAT302	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT510	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
EM13MAT501	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Quadro 1.3: Competências e Habilidades da unidade de Números e Álgebra

A ideia geral é conhecer a teoria básica acerca do ajuste de pontos para uma reta, utilizando o método dos mínimos quadrados, e a partir das informações disponibilizadas pelos dados das infecções do novo coronavírus fazer um estudo caracterizando um determinado período a partir de uma função afim obtida. No transcurso da atividade será explorada a manipulação da situação apresentada através dos recursos oferecidos por uma planilha eletrônica.

1.3 A pandemia de covid-19

A história da humanidade é marcada por muitas epidemias. Várias doenças infecciosas como varíola, sarampo, e gripe, ao se alastrarem, causaram um grande número de mortes. A preocupação com o surgimento de novas epidemias provocou estudos no campo da Epidemiologia. Esses estudos começaram a ser realizados objetivando caracterizar os tipos de epidemias, identificar os fatores causadores e buscar formas de melhorar o controle e a erradicação de doenças.

Dessa forma, além dos profissionais de saúde e organizações públicas, temos também os matemáticos buscando modelos e ferramentas para contribuir na compreensão do comportamento das doenças. Nessa perspectiva, o conhecimento matemático se apresenta como uma ferramenta importantíssima que transforma as situações reais em modelos matemáticos, que analisados fornecem resultados que podem ser aplicados na realidade.

O objetivo de um modelo matemático é permitir entender a situação e descrevê-la mais completamente, de modo que o modelo possa ser tão preciso quanto o mundo real. Uma dessas ferramentas matemáticas é o ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados.

De acordo com Vieira (2020), em uma matéria para o jornal da USP (Universidade de São Paulo), a matemática é uma forte aliada no enfrentamento da covid-19 e tem sido aplicada com sucesso para quantificar as diferentes características e níveis da doença para modelar o processo de disseminação do vírus. Na entrevista, segundo o professor Wallace Casaca da Unesp (Universidade do Estado de São Paulo), é possível, por exemplo,

> modelar a dinâmica de transmissão do novo coronavírus através de equações matemáticas que, quando aliadas a uma fonte de dados confiável, resultam em algoritmos computacionais inteiramente "customizados" aos dados da doença de uma cidade, estado ou país. Equações, indicadores e métricas matemáticas são vistos como ferramentas sólidas de tomadas de decisão por parte do poder público, pois é com base nos números da pandemia que é possível adotar tanto medidas de contenção da doença como estratégias de retomada da economia. Por exemplo, o Plano São Paulo de reabertura econômica é regido por equações matemáticas que, quando combinadas, ditam se uma determinada região irá ou não progredir de fase. Finalmente, é também por intermédio de equações matemáticas que se identifica discrepâncias nos dados para fins de auditoria e questões de transparência nos dados por parte de fontes governamentais. (VIEIRA, 2020)

Dessa forma, como previsto pela BNCC, almejamos com a proposta desse trabalho que os que os estudantes sejam capazes de interpretar criticamente o cenário atual da pandemia de covid-19 envolvendo os números relatados pelos órgãos de saúde e analisar os gráficos das funções representadas.

A quinta competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias afirma que os estudantes devem ser capazes de:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2019, p.523)

Dessa forma, por meio dos estudos propostos, os estudantes poderão obter informações acerca da doença através do comportamento da função afim trabalhada. Logo, caracterizando a função poderemos fazer projeções, levantar hipóteses e até mesmo formular conjecturas.

Além disso, explorando também o caráter tecnológico ao utilizar o recurso das planilhas eletrônicas indicado por uma das dez competências gerais da educação básica prenunciado pela BNCC:

> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2019, p.9)

Assim, o intuito é despertar o interesse e a motivação do estudante a aprender o tema proposto utilizando o recurso computacional tornando a aula mais interessante, criativa e dinâmica, desenvolvendo assim, as capacidades de colaboração, autonomia, protagonismo, raciocínio lógico e espírito de investigação.

Os dados obtidos para a construção dos exemplos e da própria atividade com as informações da cidade de Eunápolis foram obtidos através do projeto de extensão denominado "Divulgação da evolução da Covid-19 em cidades baianas", que é coordenado pelos professores Dra. Mirela Vanina de Mello e Ms. André Malvezzi da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC).

O projeto apresentado acima tem como objetivo principal informar a comunidade sobre a situação das cidades quanto aos casos de coranavírus através de gráficos, vídeos e tabelas. As produções desse projeto são divulgadas no site próprio e no perfil do Instagram[1], no qual são informadas as atualizações periódicas sobre os dados da Covid-19 nas onze cidades baianas: Camacã, Eunápolis, Ilhéus, Ipiaú, Itabuna, Itagimirim, Itajuípe, Itapebi, Jequié, Porto Seguro e Uruçuca (RIGOTI, 2021).

[1]https://projetocidadescovi.wixsite.com/covid19 e @projetocidadescovid

Capítulo 2

Ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados

Este capítulo apresenta a teoria necessária acerca do ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados.

2.1 Motivação

Intrínseco ao estudos acerca das funções, muitos problemas de álgebra linear e não-linear, estatística, cálculo diferencial e integral e diversas outras áreas não possuem soluções analíticas, isto é, soluções exatas. Para encontrar soluções aproximadas recorremos aos métodos numéricos.

De acordo com Ruggiero e Lopes (1997) a resolução de tais problemas envolve várias fases que que podem ser estruturadas conforme o esquema abaixo.

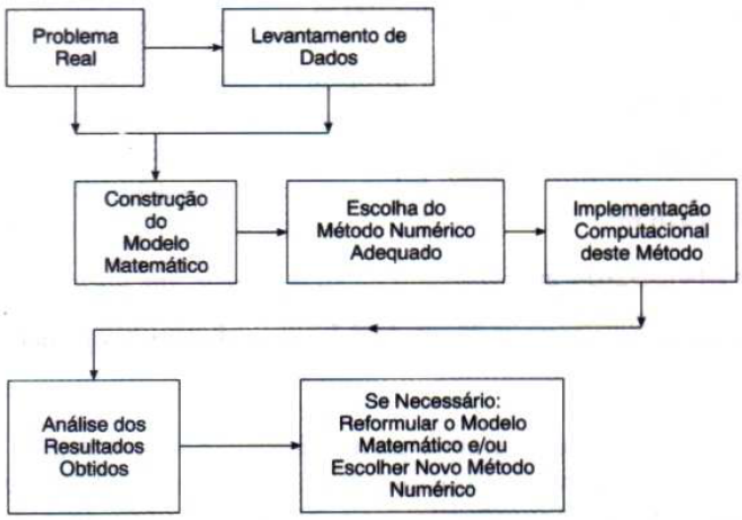


Figura 2.1: Fases da resolução do problema - Fonte: (RUGGIERO; LOPES, 1997)

Dentre esses problemas, muitos estão ligados à resolução de sistemas de equações lineares e não-lineares, integrações numéricas, problemas de valor inicial e aproximações de funções.

Nesse sentido, para este trabalho, propomos como aponta o esquema da Figura 2.1, que a partir do problema real que é a pandemia de covid-19, após o levantamento dos dados fornecidos, possamos fazer a construção de uma função que melhor se ajuste aos dados, sendo assim o modelo matemático obtido. Para tanto, fazendo a escolha do método numérico adequado, nesse caso, utilizando os mínimos quadrados, e em seguida explorar a representação gráfica através do recurso de linha de tendência na planilha eletrônica.

No estudo das aproximações de funções é comumente utilizado o método da interpolação polinomial. De forma geral, interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$ que satisfaça algumas propriedades. Para Ruggiero e Lopes (1997), a necessidade dessa substituição acontece quando são conhecidos somente alguns valores numéricos da função, sendo necessário calcular o valor da função em um ponto não listado; e também quando a expressão análitica para a função $f(x)$ implica na dificuldade de serem realizadas as operações.

Contudo, tendo uma função definida por uma tabela de valores, a interpolação não é recomendável quando deseja-se obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo de tabelamento e, além disso, os valores da tabela são resultados de algum experimento físico ou de alguma pesquisa. Neste último caso, os valores poderão conter erros inerentes não tão previsíveis (FRANCO, 2006).

Sendo assim, surge a necessidade de se ajustar a estas funções tabeladas uma função que seja uma "boa aproximação" para os valores tabelados e que seja possível ultrapassar com uma determinada margem de segurança.

Inicialmente, pensando para o caso discreto, no qual temos uma tabela de pontos

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_m, f(x_m))$$

com $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pertencentes a um intervalo $[a, b]$, o problema do ajuste de curvas consiste em definir n funções $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$, contínuas em $[a, b]$ e obter n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que a função

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x)$$

se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Logo, é comum pensar em como determinar as funções contínuas $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$. Como o objetivo é encontrar uma relação $y = \varphi(x)$ funcional que represente os m pontos da melhor maneira possível, a escolha das funções pode ser feita observando o gráfico dos pontos tabelados ou apoiado nos fundamentos teóricos do experimento que forneceu a tabela.

Assim, conhecendo-se a tabela de pontos

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m)$

deve-se, primeiramente, exibir estes pontos em um gráfico cartesiano chamado de diagrama de dispersão e assim, visualizar a curva que melhor se ajusta aos dados e, assim, fazer a escolha conveniente de cada função $g_i(x)$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo 2.1 *Um automóvel percorre um determinado trecho com velocidade constante. Supondo que medimos a posição em vários instantes obtemos os valores da Tabela 2.1:*

Tempo	30	50	80	100
Posição	50	60	90	110

Tabela 2.1: Tempo X Posição

Assim, o diagrama de dispersão é como mostra a figura abaixo.

Figura 2.2: Diagrama de dispersão - Fonte: autora

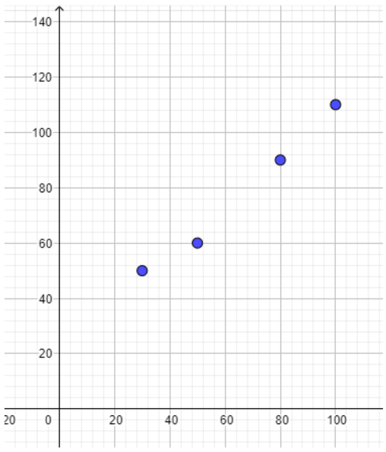


Figura 2.3: Fonte: autora

Portanto, é natural escolhermos uma função afim e procurarmos então uma função do tipo $\varphi(x) = ax + b$, isto é, escolhemos as funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ de modo a obter o polinômio de grau 1.

Exemplo 2.2 *Um objeto foi arremessado para cima e a Tabela 2.2 mostra dados empíricos de sua altura em relação ao solo em determinados instantes de tempo após o lançamento:*

Tempo	0,5	1,0	1,5	2	2,5	3,0
Altura	10,2	17,7	20	23,6	19,2	18,1

Tabela 2.2: Tempo x Altura

Assim, o diagrama de dispersão é como mostra a Figura 2.4.

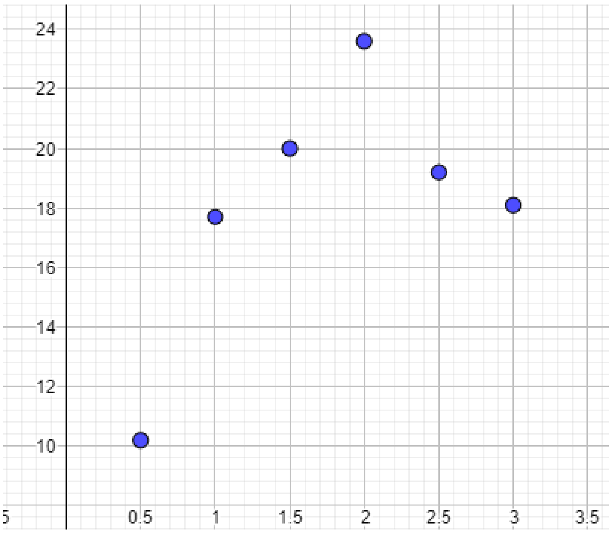


Figura 2.4: Diagrama de dispersão

Portanto, é natural escolhermos $\{g_1, g_2, g_3\}$ *como uma base do espaço dos polinômios de grau 2, a fim de obter* $\varphi(x)$ *como uma função quadrática, isto é, procurarmos então uma função do tipo* $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$*.*

Diante dos exemplos acima perdura o questionamento sobre qual reta de equação $\varphi(x) = ax + b$ e parábola de equação $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ se ajustam melhor aos diagramas apresentados nos Exemplos 2.1 e 2.2, respectivamente.

De forma geral, determinadas as funções $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ precisamos estabelecer o conceito de proximadade entre as funções $\varphi(x)$ e $f(x)$ para obter as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Daí surge a idealização do método dos mínimos quadrados: impor que os desvios

$$f(x_i) - \varphi(x_i)$$

sejam mínimos para $i = 1, 2, \cdots, m$.

2.2 O método

Conhecendo-se os m pontos

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_m, f(x_m))$$

e as n funções

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$$

determinadas, geralmente pelo diagrama de dispersão, com $n < m$. O objetivo é encontrar os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que a função $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Chamando o desvio em x_k de $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$, para $k = 1, 2, \ldots, m$, o método dos mínimos quadrados consiste em determinar os coeficientes α_k de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima. Nesse sentido, se a soma

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(f(x_k) - \varphi(x_k)\right)^2$$

é mínima, implica que cada parcela $[f(x_k) - \varphi(x_k)]^2$ é pequena e assim, cada desvio

$$[f(x_k) - \varphi(x_k)]$$

é mínimo.

Dessa forma, como precisamos determinar o valor mínimo da soma dos quadrados das diferenças entre a função e a aproximação, os coeficientes α_j, com $j = 0, 1, \cdots, n$, que fazem com que $\varphi(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$ são os coeficientes que miniminizam a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} \left(f(x_k) - \varphi(x_k)\right)^2,$$

substituindo a função $\varphi(x)$, temos

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)\right]^2$$

Sabemos que os pontos críticos de uma função indicam o ponto de mínimo da mesma. Sendo assim, para encontrar um ponto de mínimo de $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ precisamos determinar os pontos críticos $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ tais que a derivada se anula, ou seja

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} = 0.$$

Onde $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_j}$, denota a derivada da função F com relação a α_i. Assim,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} = 2 \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)\right]\left[-g_j(x_k)\right] = 0$$

Perceba que a derivada é calculada para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. E assim temos,

$$\sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)\right]\left[g_j(x_k)\right] = 0$$

que descreve o seguinte sistema

$$
\begin{cases}
\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)][g_1(x_k)] = 0 \\
\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)][g_2(x_k)] = 0 \\
\vdots \\
\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)][g_n(x_k)] = 0
\end{cases}.
$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em cada equação, temos

$$
\begin{cases}
\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)g_1(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k)g_1(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)g_1(x_k)] = 0 \\
\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)g_2(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k)g_2(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)g_2(x_k)] = 0 \\
\vdots \\
\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)g_n(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k)g_n(x_k) - \cdots - \alpha_n g_n(x_k)g_n(x_k)] = 0
\end{cases}.
$$

E organizando mais uma vez, temos o seguinte sistema linear com n equações e n incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, chamado de sistema de equações normais ou simplesmente sistema normal,

$$
\begin{cases}
\left[\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_1(x_k) \\
\left[\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_2(x_k) \\
\vdots \\
\left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_n(x_k)\right]\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_n(x_k)
\end{cases}.
$$

Escrevendo esse sistema na forma matricial $A\alpha = b$ temos

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{cases}.$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Assim, $A = (a_{ij})$ é tal que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_j(x_k)g_i(x_k) = a_{ji}$$

e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$ é tal que

$$b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_i(x_k).$$

Da álgebra linear, o produto escalar é a multiplicação entre dois vetores que tem como resultado uma grandeza escalar (HEFEZ; FERNANDEZ, 2016). Dessa forma, usando a notação de produto escalar, temos que os coeficientes podem ser escritos da seguinte forma:

$$a_{ij} = \langle \bar{g}_i, \bar{g}_j \rangle \text{ e } b_i = \langle \bar{f}, \bar{g}_i \rangle$$

onde $\bar{g}_i$ é o vetor $(g_i(x_1), g_i(x_2), \dots, g_i(x_m))^t$ e $\bar{f}$ é o vetor $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m))^t$. E assim, o sistema normal $A\alpha = b$ ficará expresso por

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle & \dots & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_n \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle & \dots & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \bar{g}_n, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_n, \bar{g}_2 \rangle & \dots & \langle \bar{g}_n, \bar{g}_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{f}, \bar{g}_1 \rangle \\ \langle \bar{f}, \bar{g}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{f}, \bar{g}_n \rangle \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

De acordo com Ruggiero e Lopes (1997), demonstra-se que se as funções

$$g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$$

são tais que os vetores $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$ são linearmente independentes, então o sistema admite única solução $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$, e esta solução é o valor mínimo de $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Exemplo 2.3 *(Exercício Adaptado (RUGGIERO; LOPES, 1997)) Vamos ajustar os dados abaixo pelo método dos mínimos quadrados utilizando:*

1. *Uma reta.*

2. *Uma parábola.*

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

Resolução: Fazendo o diagrama de dispersão, temos como mostra a Figura 2.5:

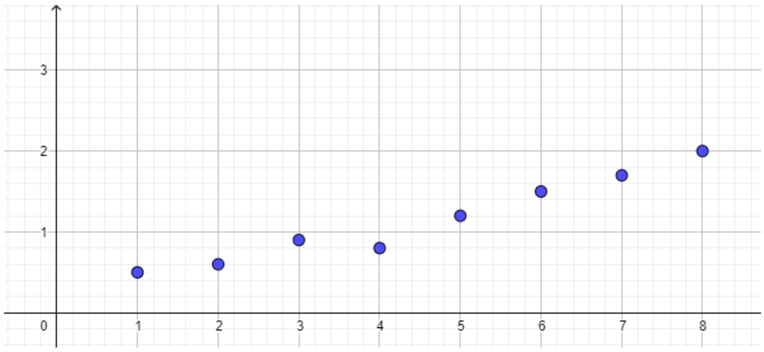


Figura 2.5: Diagrama de dispersão

Assim temos que $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6, x_7 = 7, x_8 = 8$ *e* $f(x_1) = 0,5; f(x_2) = 0,6; f(x_3) = 0,9; f(x_4) = 0,8; f(x_5) = 1,2; f(x_6) = 1,5; f(x_7) = 1,7; f(x_8) = 2,0.$

A função tabelada deve ser ajustada, inicialmente, por uma reta, ou seja, por uma expressão da forma $f(x) = \alpha_2 x + \alpha_1$. *Logo, podemos escolher os polinômios* $g_1(x) = 1$ *e* $g_2(x) = x$. *Temos, pois, de resolver apenas o sistema:*

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{f}, \bar{g}_1 \rangle \\ \langle \bar{f}, \bar{g}_2 \rangle \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Queremos determinar a função $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$. *Logo, temos os seguintes vetores:*

$\bar{g}_1 = (g_1(x_1), \ldots, g_1(x_8))^t = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^t$

$\bar{g}_2 = (g_2(x_1), \ldots, g_2(x_8))^t = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ )^t$

$\bar{f}(x_i) = (0,5\ \ 0,6\ \ 0,9\ \ 0,8\ \ 1,2\ \ 1,5\ \ 1,7\ \ 2,0)^t$

Afim de facilitar os cálculos dos produtos escalares, vamos construir uma tabela com os valores de $g_i(x_k)g_j(x_k)$ *e* $f(x_k)g_i(x_k)$, *com* $i, j = 1, 2, \ldots, 8$, *e assim temos como mostra a Figura 2.6:*

x_k	$g_1(x_k)$	$g_2(x_k)$	$f(x_k)$	$g_1(x_k)\cdot g_1(x_k)$	$g_1(x_k)\cdot g_2(x_k)$	$g_2(x_k)\cdot g_2(x_k)$	$f(x_k)\cdot g_1(x_k)$	$f(x_k)\cdot g_2(x_k)$
1	1	1	0,5	1	1	1	0,5	0,5
2	1	2	0,6	1	2	4	0,6	1,2
3	1	3	0,9	1	3	9	0,9	2,7
4	1	4	0,8	1	4	16	0,8	3,2
5	1	5	1,2	1	5	25	1,2	6
6	1	6	1,5	1	6	36	1,5	9
7	1	7	1,7	1	7	49	1,7	11,9
8	1	8	2	1	8	64	2	16
Somas				**8**	**36**	**204**	**9,2**	**50,5**

Figura 2.6: Tabela contendo os cálculos dos produtos escalares

Portanto, o sistema 2.2 torna-se:

$$\begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,2 \\ 50,5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, encontramos $\alpha_1 = 0,175$ *e* $\alpha_2 = 0,21667$*, e assim,* $\varphi(x) = 0,21667x + 0,175$ *é a melhor reta que se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função tabelada.*

De forma análoga, fazendo para o caso da parábola, queremos determinar a função $\varrho(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$*. E, assim, temos o sistema:*

$$\begin{bmatrix} 8 & 36 & 204 \\ 36 & 204 & 1296 \\ 204 & 1296 & 8772 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,2 \\ 50,5 \\ 319,1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, encontramos $\alpha_1 = 0,40714$*,* $\alpha_2 = 0,07738$ *e* $\alpha_3 = 0,01547$*, e assim,* $\varrho(x) = 0,01547x^2 + 0,07738x + 0,40714$ *é a melhor parábola que se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função tabelada.*

Traçando as duas curvas no gráfico de dispersão dos dados, conforme a Figura 2.7, podemos fazer uma comparação.

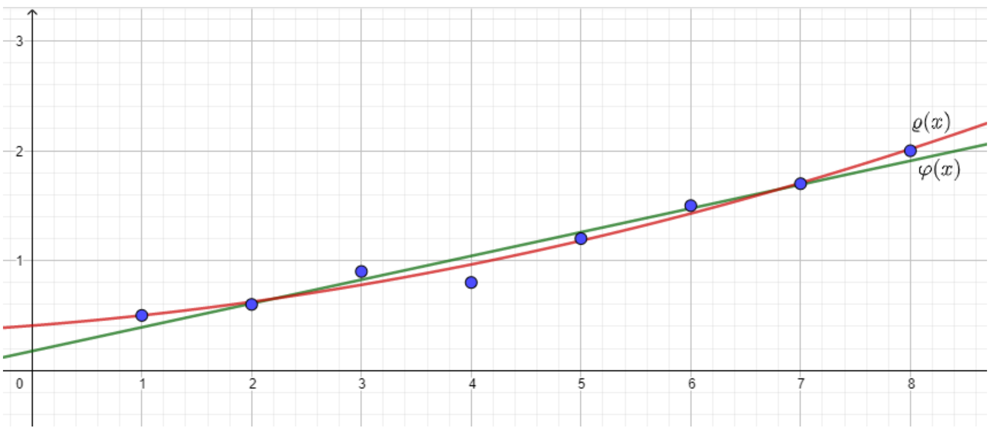


Figura 2.7: Curvas para $\varphi(x)$ e $\varrho(x)$

Através do cálculo de $\sum_{k=1}^{8} d_k^2$*, teremos:*

1. Para a reta: $\sum_{k=1}^{8} d_k^2 = 0,08833$;

2. Para a parábola: $\sum_{k=1}^{8} d_k^2 = 0,04809$.

Como o menor valor para a soma dos quadrados dos desvios foi para a parábola, o melhor ajuste para os dados, entre as duas possibilidades é a parábola.

2.2.1 O ajuste linear para o ensino médio

O foco deste trabalho está em aproximar um conjunto de dados pelo método dos mínimos quadrados utilizando uma reta. Dessa forma, para alcançar o estudante do ensino médio, que ainda não conhece os conceitos de produto escalar, vamos apresentar um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, resultante do sistema 2.1.

Assim, dado o conjunto de dados tabelados

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

queremos aproximá-los através de uma reta.

Como a função tabelada deve ser ajustada por uma reta, ou seja, por uma expressão da forma $f(x) = \alpha_2 x + \alpha_1$. Logo, podemos escolher os polinômios $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$. Temos, pois, de resolver apenas o sistema:

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle \\ \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle & \langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{f}, \bar{g}_1 \rangle \\ \langle \bar{f}, \bar{g}_2 \rangle \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Como $g_1(x) = 1$, o produto escalar de $\bar{g}_1$ com $\bar{g}_1$, isto é, $\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle$, será igual à quantidade n de pontos. Além disso, como $g_2(x) = x$, então o produto escalar de $\bar{g}_1$ com $\bar{g}_2$, isto é, $\langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = \langle \bar{g}_2, \bar{g}_1 \rangle$, será igual à soma de x_i, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ainda nesse sentido, $\langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle$ será a soma de x_i^2, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Por outro lado, como $f(x_i) = y_i$, o produto escalar de $\bar{f}$ com g_1, isto é, $\langle \bar{f}, \bar{g}_1 \rangle$ será a soma dos y_i, com $1 \leq i \leq n$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

E por fim, $\langle \bar{f}, \bar{g}_2 \rangle$ será a soma dos $x_i y_i$, com $1 \leq i \leq n$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Dessa forma, o sistema 2.2.1 será equivalente a

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}.$$

Lembrando que na expressão da forma $f(x) = \alpha_2 x + \alpha_1$, os coeficientes α_1 e α_2 são chamados, respectivamente, de coeficientes linear e angular na função afim, faremos a correspondência com a utilização da nomenclatura comum no ensino médio, denominando $\alpha_1 = b$ e $\alpha_2 = a$. Assim, o sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix},$$

sendo equivalente a

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + n b = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}. \tag{2.4}$$

Este último sistema está no formato geral de um sistema linear que envolve duas equações lineares e duas variáveis a e b, no qual os estudantes estão aptos a resolver.

Capítulo 3

Proposta de aula para o ensino médio

Este capítulo apresenta os procedimentos adotados para desenvolver uma proposta de aula para ser trabalhada com alunos do ensino médio bem como o relato da aplicação da mesma. Para isso, idealizamos uma contextualização da matemática com a pandemia de Covid-19 utilizando o método dos mínimos quadrados para o ajuste de curvas.

3.1 Procedimentos metodológicos

Buscando aproximar e contextualizar a matemática com a pandemia de covid-19, foi planejada uma atividade para ser aplicada no primeiro ano do ensino médio do Colégio Anísio Teixeira, uma escola particular da cidade de Eunápolis. A escolha da referida turma deve-se ao fato de que a turma já havia concluído os estudos de todas as funções previstas para o ano letivo. A turma possuía 50 alunos.

Assim, a proposta de atividade foi preparada para ter duração de quatro aulas de 50 minutos cada. O primeiro momento estava reservado para aplicar uma avaliação de sondagem, que pode ser verificado no Apêndice A. Esta avaliação retomava o conhecimento sobre função afim buscando diagnosticar o nível de domínio quanto aos assuntos que seriam trabalhados, considerados como pré-requisitos. Dessa forma, seria possível mapear os pontos de dificuldade que deveriam ser retomados na etapa seguinte.

A avaliação continha cinco questões objetivas abarcando os principais tópicos da função afim a saber: caracterização da função afim, determinação da equação da reta conhecendo-se dois pontos pertencentes à função e sua representação gráfica.

Na segunda aula o objetivo era discorrer sobre os principais tópicos a respeito da função afim necessários para a compreensão e cumprimento da atividade proposta na etapa seguinte. Assim, a finalidade desta aula é explorar as características e propriedades da função afim; a determinação da função conhecidos dois pontos pertencentes a mesma e por consequência a resolução de sistemas lineares de duas variáveis e duas equações.

Em sequência, na terceira aula, o objetivo era contextualizar a turma sobre os conceitos de pandemia e modelagem matemática e em seguida apresentar os principais tópicos a respeito de aproximação de curvas usando o método dos Mínimos Quadrados (para uma reta).

O grande desafio nesta aula era aproximar os estudantes do ensino médio da educação básica aos conceitos ligados ao tema dos mínimos quadrados que utilizam ideias de disciplinas de cursos de nível superior, como por exemplo, as derivadas, integração e produto interno.

Sendo assim, o objetivo foi introduzir a ideia geral dos mínimos quadrados pelo menos até um nível que torne o aluno apto a perceber a fundamentação do método utilizado.

Nessa perspectiva, entendendo que o conhecimento matemático se apresenta como uma ferramenta importantíssima que transforma as situações reais em modelos matemáticos, e que analisados fornecem resultados que podem ser aplicados na realidade, apresentamos o ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados como uma dessas ferramentas matemáticas.

Esse ajuste se torna interessante quando temos uma tabela de valores resultados de algum experimento físico ou pesquisa ou uma tabela de valores coletados de uma observação. Nesses casos podem conter erros, nem sempre previsíveis, e queremos assim, ajustar uma função que seja uma boa aproximação para esses valores tabelados (RUGGIERO; LOPES, 1997).

Nessa perspectiva, para introduzir os conceitos, vamos considerar o seguinte problema motivador: a Tabela 3.1 mostra o número de casos confirmados de covid-19 nas quatro primeiras semanas de registro na cidade de Eunápolis (começados em 15 de abril de 2020).

Semana	1	2	3	4
Número de casos cofirmados	14	18	25	36

Tabela 3.1: Casos confirmados na cidade de Eunápolis

O primeiro passo será a escolha da função que pode ser feita observando o gráfico dos pontos tabelados ou baseando-se nos fundamentos do experimento que forneceu a tabela. Na Figura 3.1, apresentamos o diagrama de dispersão. Assim, pensando no plano cartesiano, vamos atribuir o número da semana aos valores da abscissa e ao número de casos confirmados os valores da ordenada. Dessa forma, teremos os pares ordenados: $(1, 14), (2, 18), (3, 25), (4, 36)$.

Figura 3.1: Diagrama dos pontos

Surge a primeira pergunta: será que existe uma reta que passe exatamente por todos os pontos? E a resposta esperada é que os estudantes reconheçam que não existe tal reta, mas que existe uma reta que seja uma boa aproximação para esses pontos. Para isso, iremos determinar uma reta que tenha a menor distância possível dos pontos no sentido dos mínimos quadrados. A ideia é definir uma função que se ajusta melhor ao diagrama de pontos de forma que a soma dos desvios ao quadrado seja o menor possível. Graficamente podemos observar isso na figura abaixo.

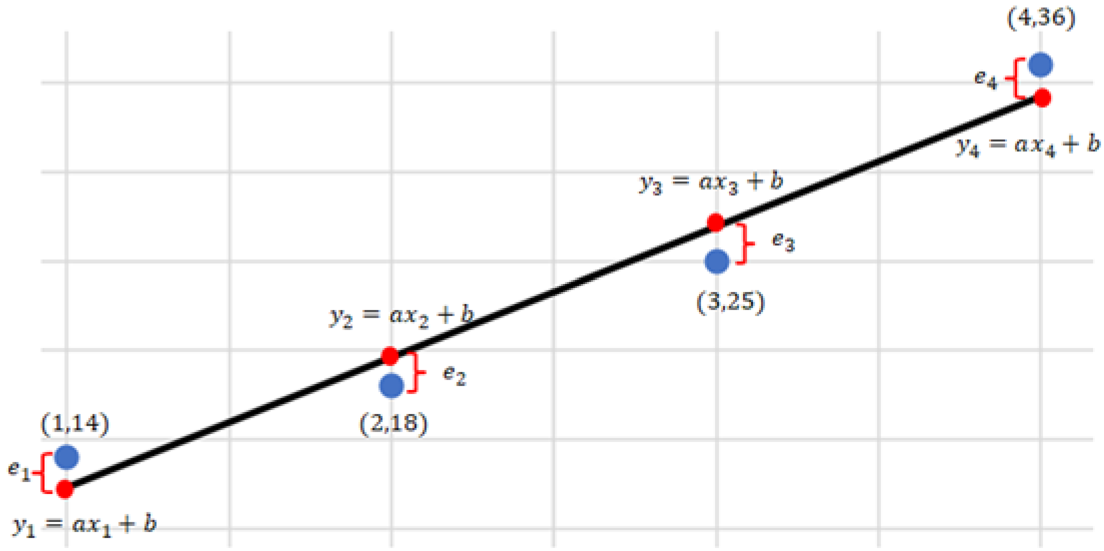


Figura 3.2: Distâncias

Observemos que cada e_i é o desvio, para $i = 1, 2, 3, 4$. Queremos que $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$ seja mínimo. Mais detalhadamente, os pontos em azul são os valores tabelados conforme a situação apresentada e os pontos em vermelho representam os pontos correspondentes que pertencem à reta que melhor se ajustou aos dados.

Os valores e_i, com $i = 1, 2, 3, 4$, são interpretados como a distância vertical entre a reta $y = ax + b$ e os pontos dos dados (pontos azuis). Essa distância é o que chamamos de uma medida do erro que resulta no ponto (x_i, y_i) pertencente à reta do ajuste da função $y = ax + b$. Esses valores são os desvios.

Assim, nosso objetivo é encontrar os coeficientes a e b tais que a função $f(x) = ax + b$ se aproxime ao máximo dos pontos fornecidos. Observemos que o conceito de proximidade é que os valores para e_i seja o mínimo. Portanto, o método dos mínimos quadrados consiste em escolher esses coeficientes a e b de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios (afastamentos) seja mínima.

Nesse sentido, o ajuste é feito de maneira a minimizar a soma dos quadrados dos erros em todos os pontos, ou seja, a diferença entre a ordenada da função original e a ordenada calculada na aproximação. Dessa forma, temos a soma total dos erros que pode ser expresso por:

$$\sum_{i=1}^{4} e_i^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$$

Como o erro é a distância podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{4} e_i^2 = \sum_{i=1}^{4}(y_i - ax_i - b)^2$$

Agora, precisamos determinar os valores de a e b, e para isso basta encontrar a solução do sistema 2.4 formado pelas equações normais a seguir:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) a + 4b = \sum_{i=1}^{4} y_i \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \end{cases}$$

Neste sistema temos:

- x_i representando o número de cada semana: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ e $x_4 = 4$;
- y_i representando o número de casos em cada semana x_i: $y_i = 14, y_2 = 18, y_3 = 25$ e $y_4 = 36$;
- O símbolo:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$
representando a soma de todos os x_i (de forma análoga para todos os outros somatórios);

Assim, calculando separadamente cada somatório temos:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14 + 18 + 25 + 36 = 93$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 1 \cdot 14 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 36 = 269.$$

Assim, substituindo no sistema os valores encontrados, temos

$$\begin{cases} 10a + 4b = 93 \\ 30a + 10b = 269 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontraremos $a = 7,3$ e $b = 5$. Assim a função que melhor se ajusta aos pontos é da forma $f(x) = 7,3x + 5$ como podemos observar no gráfico da figura 3.3.

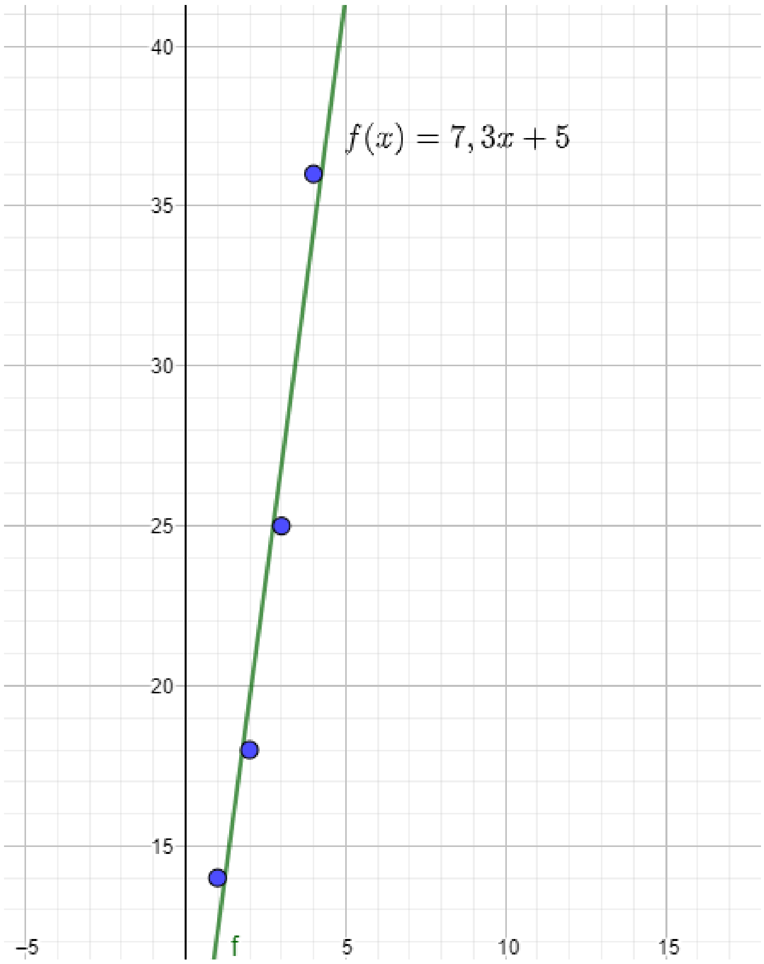


Figura 3.3: Distâncias

Após toda essa explanação, os estudantes estão aptos para darem continuidade, ainda na terceira aula, e responderem a atividade (Apêndice B) com raciocínio semelhante mas com questionamentos guiados induzindo conclusões sobre o método aprendido.

Inicialmente, nesta atividade, a proposta é que, a partir do problema os estudantes calculem manualmente (sem o auxílio de softwares) o ajuste através da expressão fornecida e reflitam sobre esse processo através dos questionamentos.

Em seguida, na quarta etapa, considerando agora um conjunto maior de dados, a continuação da atividade guiada (Apêndice C) consiste em fazer o uso de uma planilha eletrônica como ferramenta. Ou seja, o objetivo agora é encontrar uma reta que mais se aproxime dos dados fornecidos, considerando agora um conjunto mais extenso com o auxílio de uma planilha eletrônica usando a ferramenta "Linha de tendência".

Munidos das instruções necessárias, os alunos farão a conslusão da atividade guiada investigando o ajuste para outros tipos de curvas ampliando o estudo em nível de curiosidade (cientes de que os alunos já estudaram funções quadráticas e exponenciais).

3.2 Resultados

Nesta seção apresentaremos um relato da aplicação da atividade desenvolvida. Conforme explicitado anteriormente, a turma escolhida para a realização da atividade foi o primeiro ano do ensino médio com 50 alunos. Esta turma pertence ao turno matutino, e portanto, as quatro aulas (50 minutos cada) foram marcadas no turno oposto em dois dias. Para o primeiro dia realizou-se as aulas 1 e 2 e no segundo dia as aulas 3 e 4, ocorrendo em duas semanas consecutivas.

Por causa da pandemia de Covid-19, na cidade de Eunápolis as escolas estavam funcionando apenas com salas ocupadas até a metade de sua capacidade. Em consequência disso, no primeiro dia, estavam presentes em aula 17 alunos presencialmente e 22 de forma remota, e no segundo dia estavam presentes 21 alunos presencialmente e 18 de forma remota, através de vídeo-chamada via *Google Meet*. Assim, as aulas ocorreram de forma híbrida. A aula foi transmitida e todos os materiais que foram utilizados em aula foram disponibilizados também na plataforma do *Google Sala de Aula* de forma simultânea.

Após a realização da avaliação diagnóstica foi possível perceber, como mostram os gráficos da Figura 3.4, que a maioria dos estudantes recordavam como modelar uma situação através de uma expressão caracterizada pela função afim, bem como dominavam aplicar um ponto do domínio e determinar sua imagem, como exigido pelas questões 1 e 2. São tarefas relativamente simples mas importantes para compreensão geral dos atributos da função estudada e importantes também para compreensão e desenvolvimento da atividade vindoura.

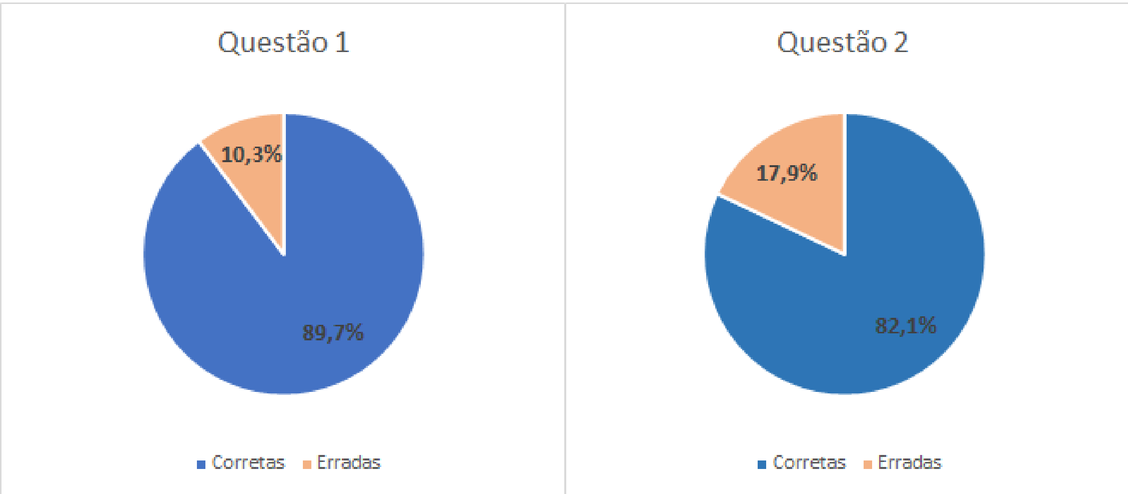


Figura 3.4: Desempenho nas questões 1 e 2

Além disso, mais da metade dos alunos presentes demonstrou saber esboçar o gráfico da função e reconhecer suas características como mostra o gráfico da figura 3.5. A maioria dos estudantes utilizou-se do método de atribuir pontos na tabela e poucos lembraram de utilizar a raiz da função para determinar a intersecção com o eixo Ox e o valor do coeficiente b na intersecção com o eixo o Oy. Por isso, esses pontos foram retomados na aula de revisão, bem como outras características como crescimento ou decrescimento da função.

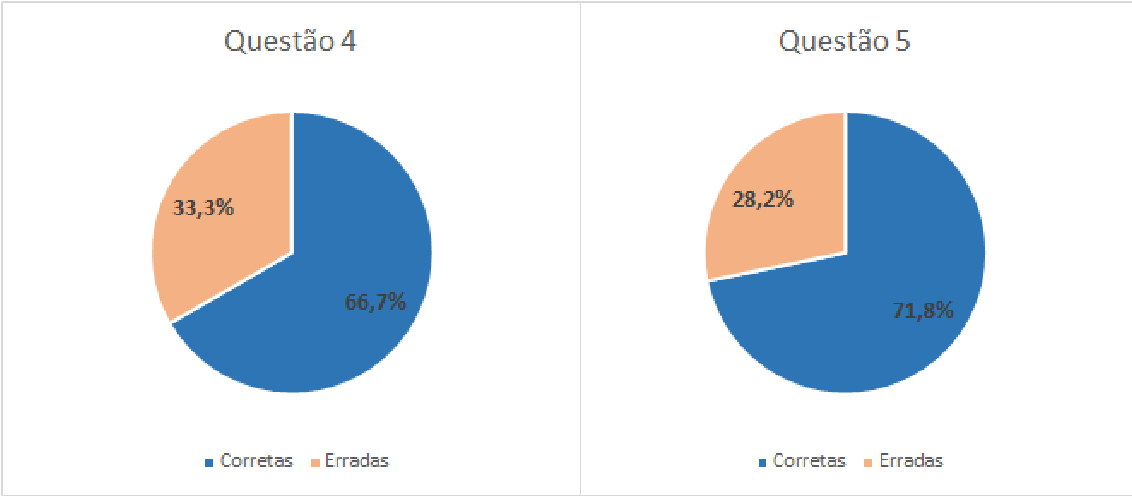


Figura 3.5: Desempenho nas questões 4 e 5

Um ponto em que a maioria dos estudantes não demonstrou recordar foi no processo de determinação de uma expressão para a função afim conhecendo-se dois pontos pertencentes a mesma exigidos pela terceira questão, como apresenta o gráfico da Figura 3.6. Assim, esse tópico também foi retomado no momento da revisão uma vez que é requisito fundamental para compreender o processo do ajuste linear através do método dos mínimos quadrados pois utiliza-se de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

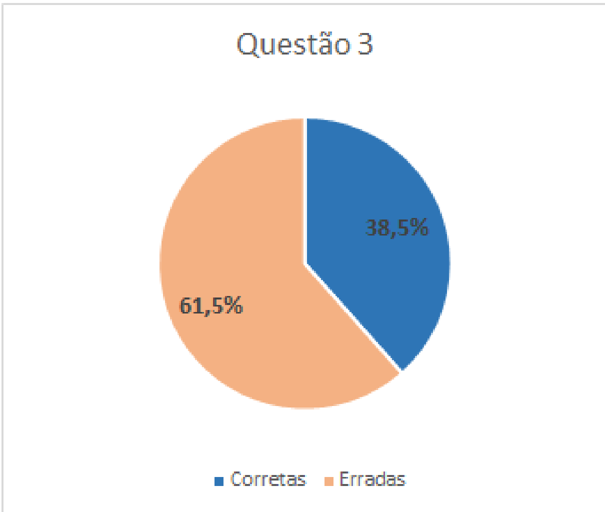


Figura 3.6: Desempenho na questão 5

De forma geral, a Figura 3.7 apresenta o gráfico com o desempenho geral da turma com a distribuição das pontuações entre o mínimo de zero pontos e o máximo de cinco pontos. Assim, concluímos que aproximadamente 82% dos 39 alunos presentes acertaram três ou mais questões.

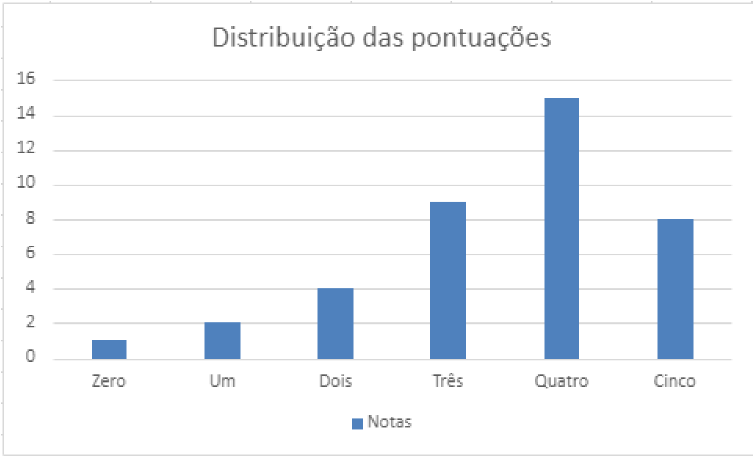


Figura 3.7: Desempenho geral

Na semana seguinte, na aula 3, durante a apresentação sobre o ajuste linear com o método dos mínimos quadrados os estudantes foram participativos na resolução do problema motivador realizando os cálculos de forma simultânea e respondendo aos questionamentos. Assim, munidos de toda fundamentação teórica os estudantes realizaram a atividade do Apêndice B.

Inicialmente, para encontrar a expressão para a função polinomial de grau 1 que se ajustava aos dados, os estudantes se mostraram intrigados com a quantidade de cálculos, ainda que somas simples, mas disputaram entre si quem encontrava o resultado correto primeiro, despertando assim o espírito competitivo. Para acelerar esse processo, eles usaram a calculadora, uma vez que os números obtidos eram relativamente grandes e o objetivo principal era saber utilizar o método e todos os cálculos eram basicamente das quatro operações elementares, e resolver um sistema linear de duas equações e duas variáveis, como mostra a Figura 3.8 com a resolução de um dos estudantes.

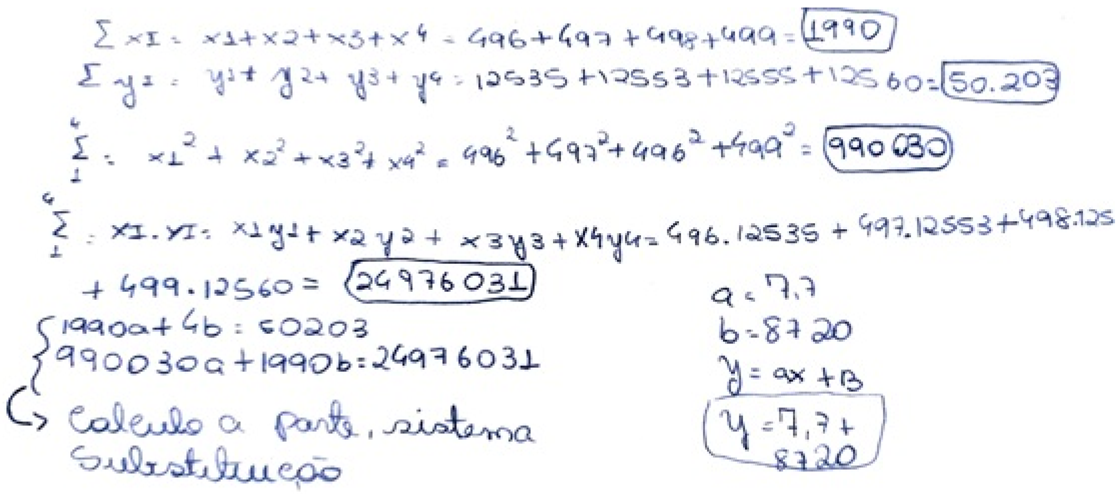
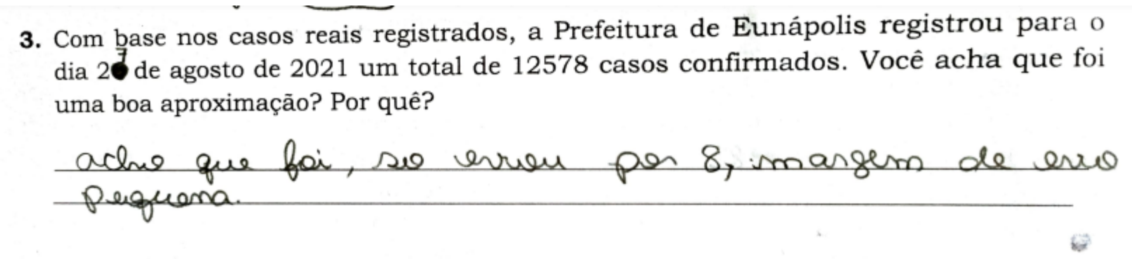


Figura 3.8: Exemplo de resolução

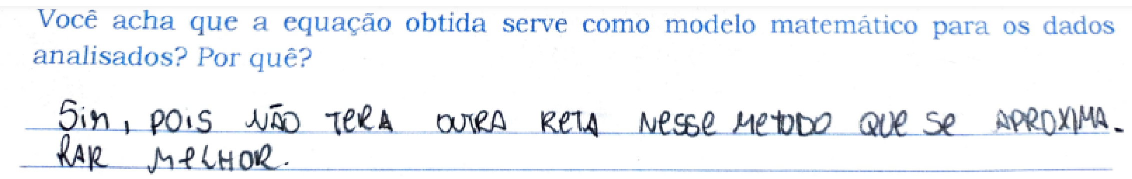
Após encontrarem a expressão para a função afim, a questão dois propunha que que tentassem fazer uma previsão para o número de casos confirmados para uma data determinada que extrapolava os valores tabelados e em seguida, refletissem, na questão 3, se o valor encontrado por eles se aproximava da quantidade real apresentada. A Figura 3.9 apresenta uma das respostas encontradas.


3. Com base nos casos reais registrados, a Prefeitura de Eunápolis registrou para o dia 2[illegible] de agosto de 2021 um total de 12578 casos confirmados. Você acha que foi uma boa aproximação? Por quê?

acho que foi, só errou por 8, margem de erro pequena.

Figura 3.9: Exemplo de resposta

Em seguida, na quarta questão da atividade, foi apresentado aos estudades a representação gráfica da função encontrada por eles juntamente com o diagrama de dispersão dos pontos questionando se a equação obtida serve como modelo matemático para os dados analisados. A figura 3.10 mostra uma das respostas obtidas.

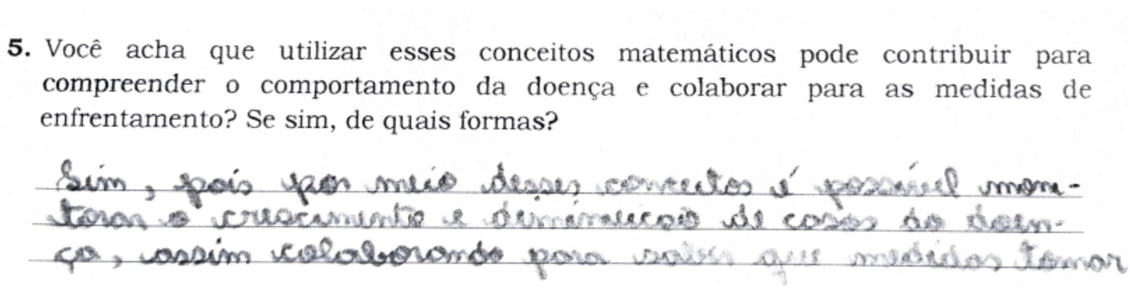

Você acha que a equação obtida serve como modelo matemático para os dados analisados? Por quê?

SIN, POIS NÃO TERA OUTRA RETA NESSE METODO QUE SE APROXIMA-RAR MELHOR.

Figura 3.10: Exemplo de resposta

Interessante observar que nessa resposta, o estudante compreendeu o funcionamento para o método dos mínimos quadrados e reconhece que existem outros métodos.

Já na quinta questão, foi proposto que refletissem sobre utilizar esses conceitos matemáticos para compreender o comportamento da doença e se seria possível que isso colaborasse para as medidas de enfrentamento. A figura 3.11 apresenta uma das respostas encontradas.


5. Você acha que utilizar esses conceitos matemáticos pode contribuir para compreender o comportamento da doença e colaborar para as medidas de enfrentamento? Se sim, de quais formas?

Sim, pois por meio desses conceitos é possível monitorar o crescimento e decrescimento de casos da doen-ça, assim colaborando para saber que medidas tomar

Figura 3.11: Exemplo de resposta

Já na quarta e última aula, onde os estudantes utilizariam a planilha eletrônica conforme a atividade descrita no Apêndice C, foi um momento, apesar de ser a etapa mais simples, mais minuciosa pois, a explanação dessa aula precisou ocorrer em dois modos: para aqueles estudantes que possuíam a planilha instalada em seus computadores com diferentes versões e para aqueles que a estavam utilizando de forma on-line.

Nessa atividade, os estudantes foram convidados a construírem os gráficos através do recurso "Linha de tendência"na planilha do programa Excel para um conjunto maior de dados, percebendo assim a agilidade dessas construções, diferente da aula anterior no processo manual. As Figuras 3.12 e 3.13 apresentam uma das construções feita por um dos estudantes.

Semana	Casos confirmados
38	3875
39	3875
40	4332
41	4544
42	4603
43	4736
44	4967
45	5201
46	5370
47	5917
48	6677
49	7050
50	7459
51	7674

Figura 3.12: Exemplo de resposta - Ajuste para a reta

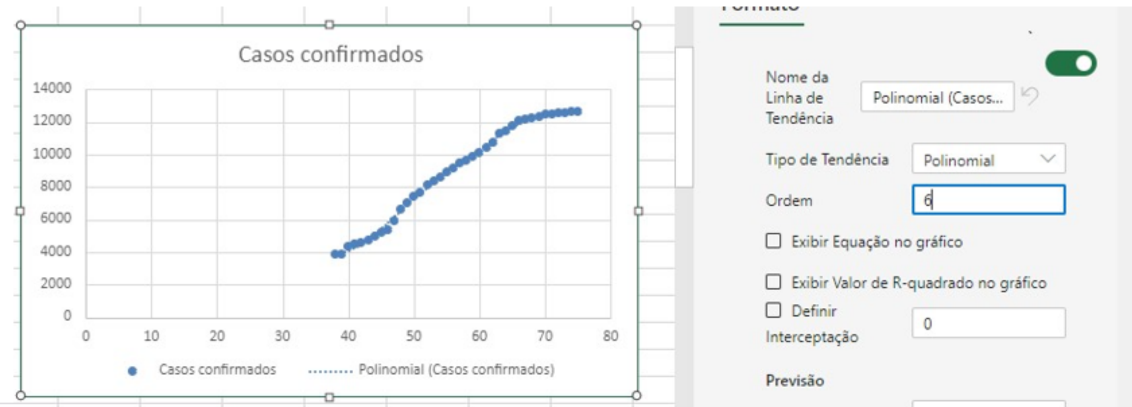
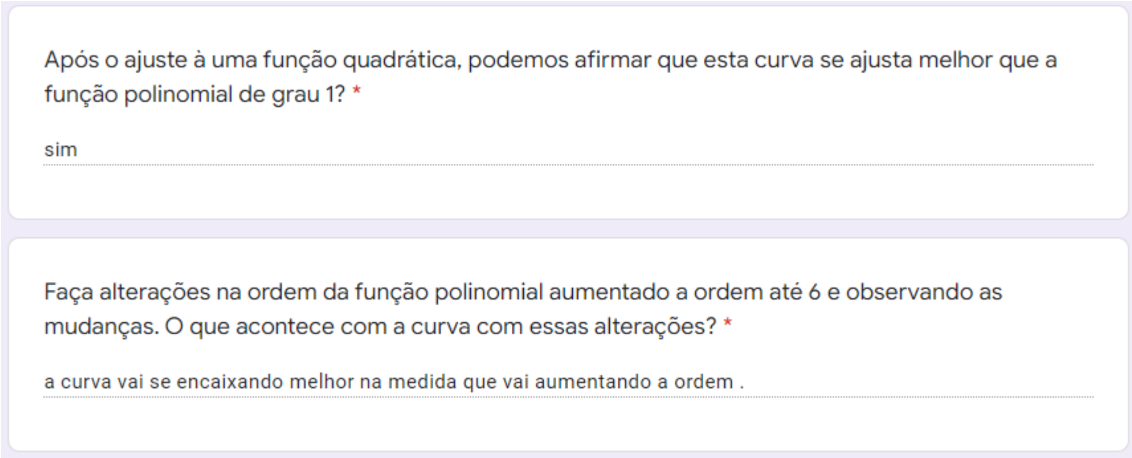


Figura 3.13: Exemplo de resposta - Ajuste para o polinômio de grau 6

Os poucos estudantes que assimilaram de maneira rápida o processo logo concluíram de forma exitosa esta etapa. Já, os demais estudantes precisaram de mais auxílio e o tempo em sala não foi suficiente para o cumprimento total desta atividade. Sendo assim, a conclusão seria feita em casa e para isso foi deixado um tutorial gravado e disponibilizado à turma. De forma geral, os estudantes gostaram da facilidade em construir os gráficos de forma rápida e compreenderam a funcionalidade do método para o melhor ajuste ao conjunto de dados, conforme mostra a Figura 3.14 onde apresenta uma das respostas obtidas ao questionário.


Após o ajuste à uma função quadrática, podemos afirmar que esta curva se ajusta melhor que a função polinomial de grau 1? *

sim

Faça alterações na ordem da função polinomial aumentado a ordem até 6 e observando as mudanças. O que acontece com a curva com essas alterações? *

a curva vai se encaixando melhor na medida que vai aumentando a ordem .

Figura 3.14: Exemplo de resposta

Diante do exposto, entendemos que o desenvolvimento dessa atividade com os estudantes do ensino médio foi desafiador ao trazer para a educação básica um tópico matemático geralmente estudado nos cursos de nível superior, mas instigante ao aplicar no contexto real da pandemia que todos vivenciaram e foram afetados de algum modo.

Foi possível perceber que as atividades aqui propostas permitiram capacitar os estudantes para terem a desenvoltura na utilização do método e aferir sua eficácia. Os alunos puderam confrontar-se, discutir e validar ideias, e utilizar conteúdos já estudados para aplicar numa situação real e concreta.

Considerações Finais

Foram apresentados neste trabalho os argumentos fundamentais que justificam a realização da proposta da atividade de acordo com o que a BNCC prevê para as habilidades e competências a serem desenvolvidas no ensino médio.

Buscou-se trazer a contextualização do tópico matemático sobre o ajuste de curvas através do método dos mínimos quadrados com a pandemia de covid-19, que é uma realidade que impactou a vida de todos e em todas as localidades.

Para isso, foram apresentados os aspectos teóricos acerca do ajuste de curvas através dos mínimos quadrados focando no caso discreto e na aproximação para curvas polinomiais de grau um e dois.

Por fim, trouxemos a proposta de atividade e os procedimentos metodológicos adotados para seu desenvolvimento. A atividade foi estruturada em quatro etapas de acontecimentos a lembrar: primeira etapa com a atividade diagntóstica; seguida da aula de revisão dos conceitos pertinentes à função afim; a terceira etapa consistia na aula sobre mínimos quadrados e ajuste de curvas já com a atividade manuscrita; e por fim, a quarta etapa com a utilização das planilhas eletrônicas para geração das curvas.

A proposta procurou abranger também o caráter tecnológico ao utilizar as planihas eletrônicas e as ferramentas de produção de curvas para concluir a atividade com dinamismo e ampliação dos horizontes para outras curvas, uma vez que os estudantes já haviam estudado todas as funções previstas para o primeiro ano do ensino médio.

De acordo com as expectativas, após a aplicação da atividade atingimos o objetivo de apresentar uma proposta viável de introdução de um novo tópico matemático ao estudante da educação básica, ao qual ele agregará o uso relevante de conteúdos matemáticos já estudados por eles, e além disso, ampliando os horizontes para a aquisição de novos conhecimentos e competências.

Através dessa proposta de atividade, buscamos apresentar aos alunos uma ferramenta poderosa da Matemática Avançada que embora seja de fácil manipulação e entendimento, ela vem sendo usada pelos matemáticos para prever a evolução da Covid-19 e assim ajudar aos governantes nas tomadas de decisão.

Nesse sentido, reconhecemos o papel da matemática na realidade de examinar a dinâmica da pandemia e mostrar aos estudantes que o conhecimento matemático permite avaliar a situação com bom senso e clareza, com discernimento e rigor científico.

Referências Bibliográficas

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Brasília: Diário Oficial da União, 1996. Disponível em: ⟨http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm⟩. Acesso em: 10 out. 2021.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC, 2013. 562 p. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192⟩. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. *Base nacional comum curricular*. Brasília: MEC, 2019. 595 p. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf⟩. Acesso em: 30 out. 2021.

FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*. [S.l.]: Editora Pearson, 2006.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear*. [S.l.]: Coleção PROFMAT, 2016.

NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. [S.l.: s.n.], 2015.

PROFMAT. *Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*. Rio de Janeiro: SBM, 2020. Disponível em: ⟨https://profmat-sbm.org.br/regimento/⟩. Acesso em: 02 out. 2021.

RIGOTI, T. N. *Sequência didática de estatística contextualizada com a pandemia de COVID-19 para o 8º ano do ensino fundamental*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado. UESC, Ilhéus, 2021.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. [S.l.]: Ed. Makron Books. São Paulo, 1997. v. 2ª edição.

VIEIRA, R. *Equação de vida: como a matemática modela a pandemia?* [S.l.]: Jornal da USP. Acessoria de comunicação do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria, 2020.

Apêndice A

Atividade diagnóstica - 1ª aula

1. A água potável utilizada em propriedades rurais, de modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba d'água elétrica. Em certo sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba d'água com capacidade para bombear 15 L por minuto. Essa bomba é ligada automaticamente quando o reservatório está com 250 L de água e desligada ao enchê-lo. Com essas informações, podemos escrever uma expressão que permite calcular a quantidade de água Q contida no reservatório em função do tempo t em que a bomba permanece ligada. Assim, podemos dizer que tal expressão é da forma: (Objetivo: modelar a situação através da função afim).

   (a) $Q(t) = 15t + 250$
   (b) $Q(t) = 250t + 15$
   (c) $Q(t) = 15t - 250$
   (d) $Q(t) = 250t - 15$
   (e) $Q(t) = 265t$

2. A função que determina o valor a ser pago por uma corrida de táxi é $f(x) = 3,40 + 2,50x$, sendo x a distância percorrida em km. Qual o valor a ser pago por uma corrida de 10 km? (Objetivo: aplicar um ponto do domínio e determinar a imagem.)

   (a) $R\$25,00$
   (b) $R\$25,40$
   (c) $R\$26,00$
   (d) $R\$28,40$
   (e) $R\$28,00$

3. Considere a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, definida pela expressão $f(x) = ax+b$. Sabendo que os pontos $A(-1,-2)$ e $B(1,4)$ pertencem a esta função, podemos dizer que a expressão da função é dada por: (Objetivo: encontrar a lei da função conhecido dois pontos, lembrar como resolver um sistema linear 2x2).

   (a) $f(x) = x + 3$

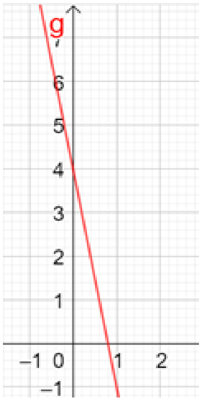
(b) $f(x) = 3x - 1$

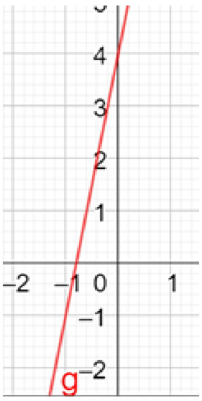
(c) $f(x) = 3x + 1$

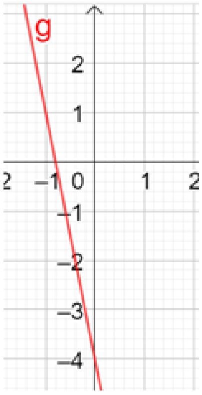
(d) $f(x) = -3x - 1$

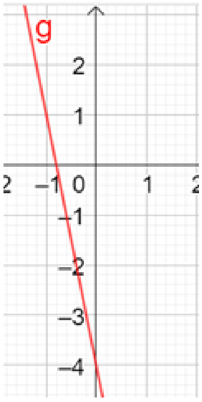
(e) $f(x) = -x - 3$

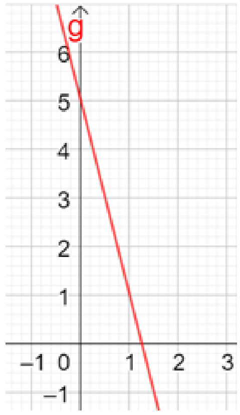
4. O esboço da função $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $g(x) = -5x + 4$ é: (Objetivo: esboçar o gráfico de uma função afim).

a. 

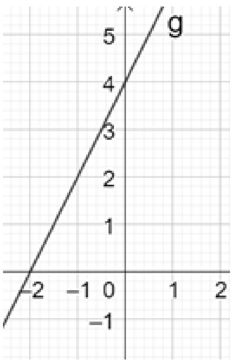
b. 

c. 

d. 

e. 

5. Observe o gráfico abaixo. (Objetivo: reconhecer as características de uma função afim: crescimento/decrescimento, coeficientes, raiz).



Podemos afirmar que:

(a) A função é decrescente.

(b) 4 é o zero desta função.

(c) A lei da função que descreve esse gráfico é $y = -2x + 4$.

(d) -2 é o zero desta função.

(e) A taxa de variação é igual a -2.

Apêndice B

Atividade Proposta - 3ª aula

Problema motivador: O mundo enfrenta uma pandemia de Covid-19 mobilizando bilhões de pessoas e sendo acompanhada em tempo real pelas mídias em geral desde a descoberta do primeiro caso. Com isso, nos acostumamos a ver na televisão e internet uma invasão de números e gráficos. E no entendimento e na elaboração desses números, temos, além dos profissionais de saúde e organizações públicas, os matemáticos buscando modelos e ferramentas para contribuir na compreensão do comportamento da doença. Sendo assim, detentores dos conhecimentos matemáticos necessários, vamos fazer uma análise do comportamento da doença considerando os números oficiais divulgados pela prefeitura do município de Eunápolis referente à Covid. Levando em consideração que os casos começaram a ser registrados em 15 de abril de 2020 e contador a partir daí por dia, vamos considerar a seguinte tabela que apresenta o número de casos confirmados nas semanas 496, 497, 498 e 499 que correspondem aos dias 23 a 26 de agosto de 2021:

Semana	496	497	498	499
Número de casos cofirmados	12535	12553	12555	12560

Tabela B.1: Casos confirmados - Fonte: https://projetocidadescovi.wixsite.com/covid19

Com base nessas informações, responda:

1. Usando o sistema abaixo encontre uma função polinomial de grau um da forma $f(x) = ax + b$ que se ajuste a esses valores.

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Resposta esperada: Calculando cada somatório indicado acima temos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 496 + 497 + 498 + 499 = 1.990$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12.535 + 12.553 + 12.555 + 12.560 = 990.030$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 496^2 + 497^2 + 498^2 + 499^2 = 50.203$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$= 1496 \cdot 12.535 + 497 \cdot 12.553 + 498 \cdot 12.555 + 499 \cdot 12560 = 2.4976.031$$

Assim, substituindo no sistema os valores encontrados:

$$\begin{cases} 1.990a + 4b = 50.203 \\ 990.030a + 1.990b = 24.976.031 \end{cases}$$

Resolvendo por qualquer método, encontraremos $a = 7,7$ e $b = 8720$. Assim a função é da forma $f(x) = 7,7x + 8720$.

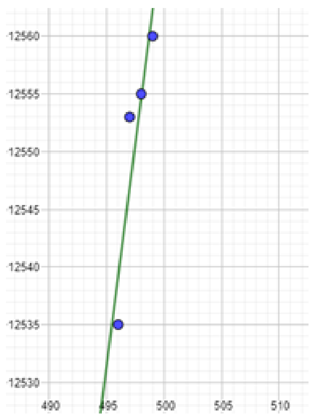
2. Na tentativa de fazer uma previsão, qual seria o número de casos confirmados para o dia 27 de agosto de 2021?

   O dia 27 de agosto corresponde ao dia 500 e aplicando esse valor na função temos f(500)=12570.

3. Com base nos casos reais registrados, a Prefeitura de Eunápolis registrou para o dia 27 de agosto de 2021 um total de 12578 casos confirmados. Você acha que foi uma boa aproximação?

   Resposta esperada: Sim, pois vemos uma diferença de 8 casos a menos.

4. Observando o gráfico abaixo que apresenta o conjunto de dados do dia 23 a 27 de agosto de 2021 e a reta, representação gráfica da função encontrada por você no item a.



Você acha que a equação obtida serve como modelo matemático para os dados analisados?

Resposta esperada: Sim, pois representa uma curva próxima aos dados.

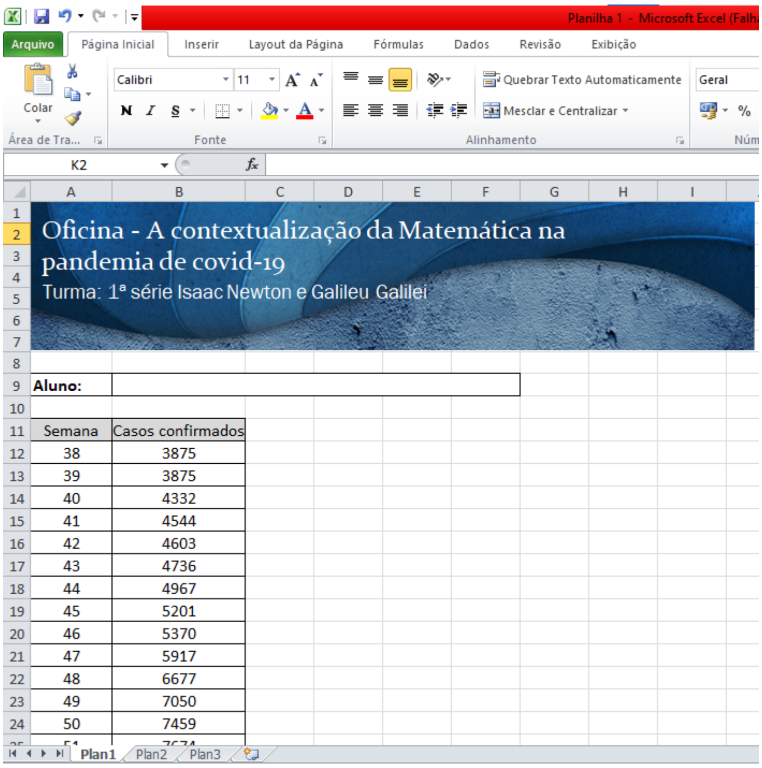
5. Você acha que utilizar esses conceitos matemáticos pode contribuir para compreender o comportamento da doença e colaborar para as medidas de enfrentamento? Se sim, de quais formas?

   Resposta esperada: Sim, pois por meio da função e análise gráfica podemos tentar descrever a evolução da doença, tentando reconhecer um indicador de tendência para o fenômeno da pandemia de Covid-19.

Apêndice C

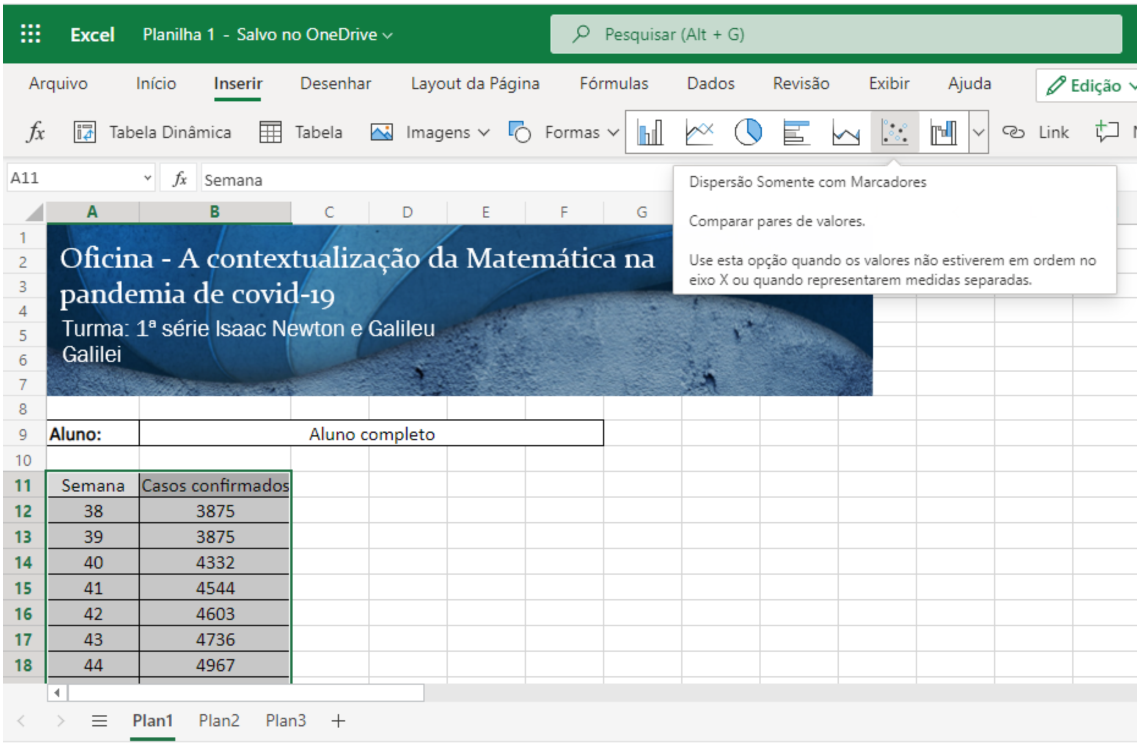
Atividade Proposta - 4ª aula

Baseado nas informações disponibilizadas pelo Projeto Cidades Covid, considere os números de casos confirmados agrupados por semana no período da 38ª a 75ª semana (janeiro a setembro de 2021). Abra o arquivo com a planilha do Excel fornecida.

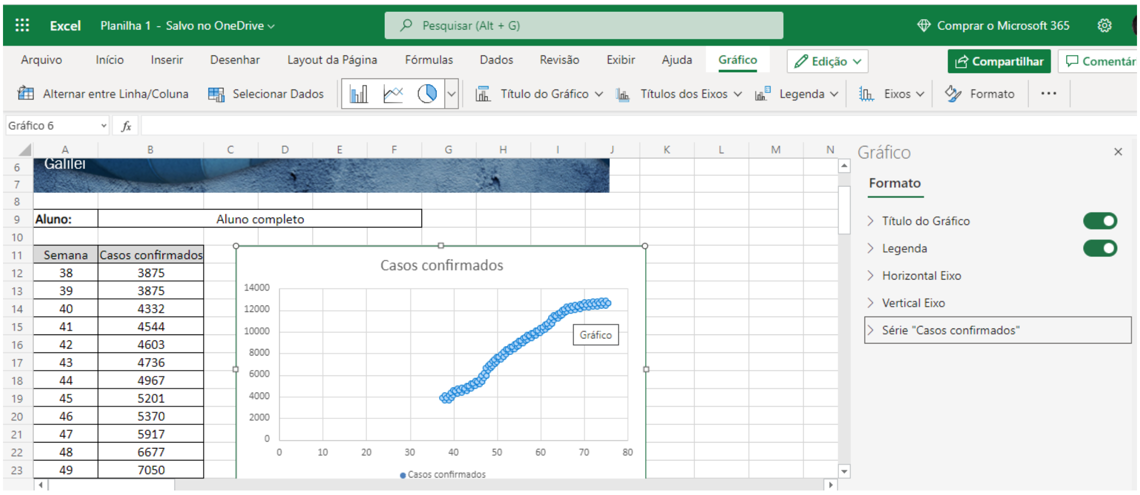


Com os dados organizados na planilha, sigam as seguintes orientações:

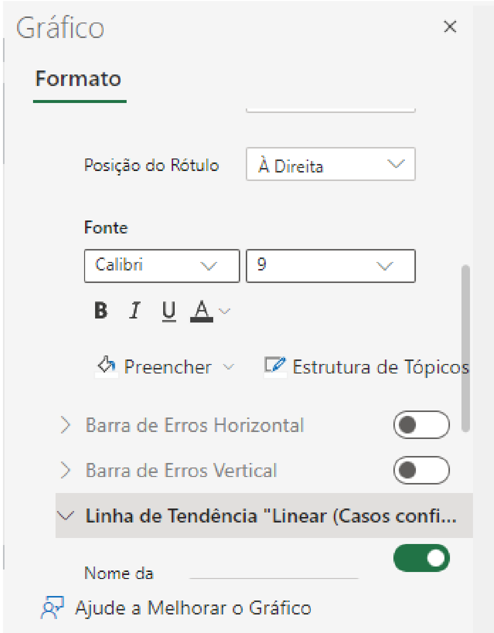
1. Selecionar os dados que compõe as colunas "Semana" e "Número de casos confirmados". Em seguida clicar na barra de tarefas em "Inserir". Logo após clicar em "Gráfico de Dispersão", como mostra a figura a seguir.



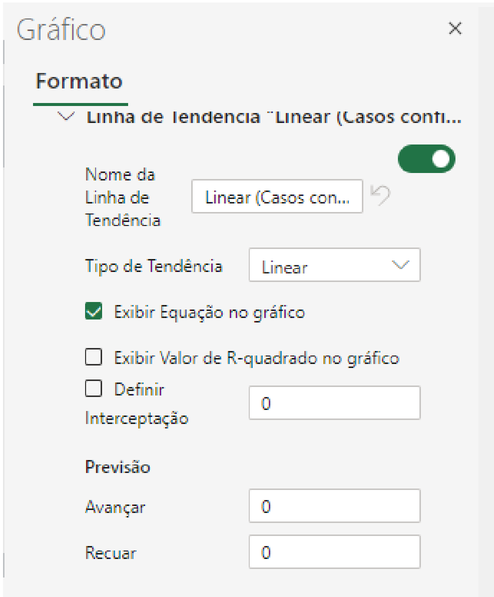
2. Com o gráfico de dispersão inserido, devemos clicar duas vezes sobre os pontos. Ao aparecer uma janela "Gráfico" com algumas opções, clicar em "Série Casos Confirmados", como mostra a figura abaixo. Nessa faixa, faremos a ativação de alguns elementos do gráfico.



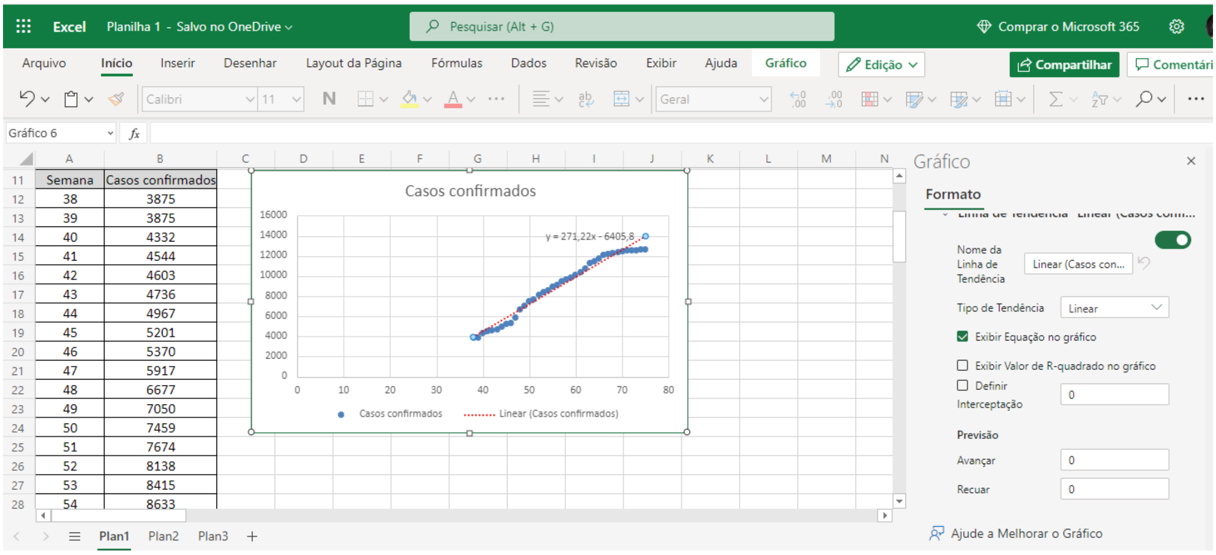
3. Na faixa "Série Casos Confirmados" aberta, clicar em "Linha de tendência" para adicionar uma linha/curva ao gráfico.



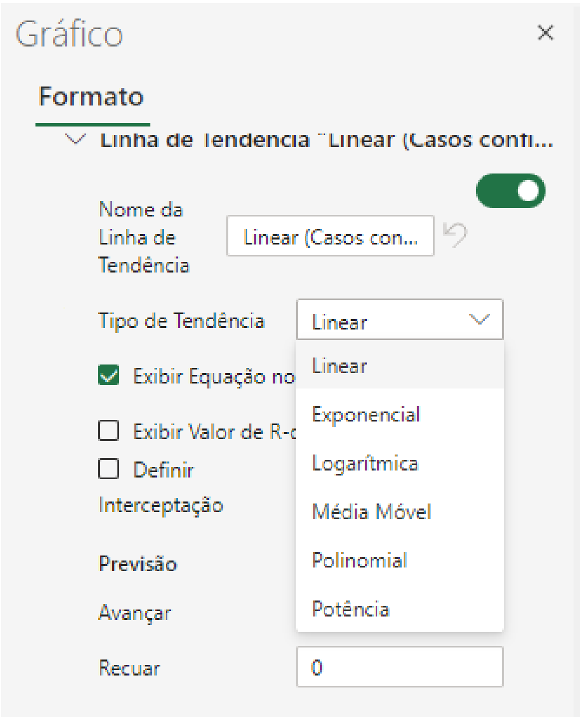
4. Inicialmente construiremos uma reta. Clicar em "Linear" e também em "Exibir equação no gráfico".

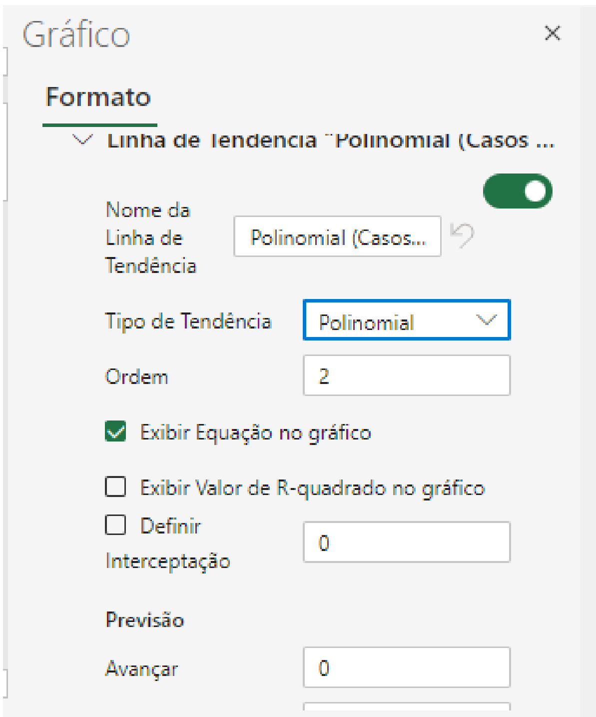


Após estes passos, é possível ver a reta que melhor se ajusta aos dados conforme figura abaixo.

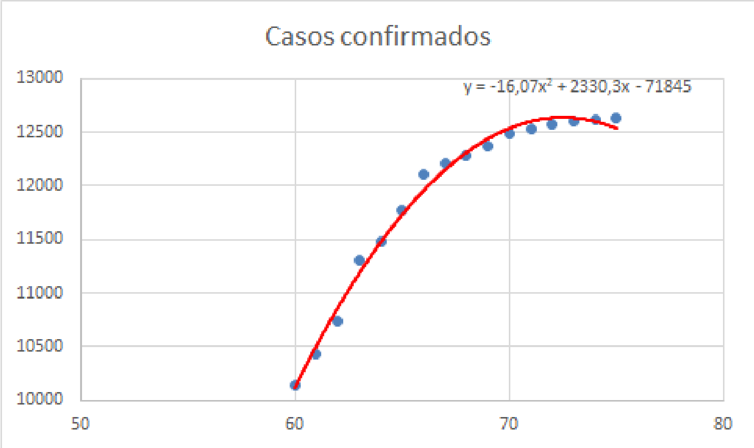


5. É possível perceber entre as semanas 60 e 80 que os pontos apresentam não mais um aparente crescimento linear. Reflexão proposta: Será que outro tipo de curva se ajustaria melhor? Agora considerando o valores referentes entre as semanas 60 e 75 vamos construir uma curva polinomial de grau 2. Seguindo os mesmos passos anteriores, porém selecionando o "Tipo de tendência" como "Polinomial" de "Ordem 2".

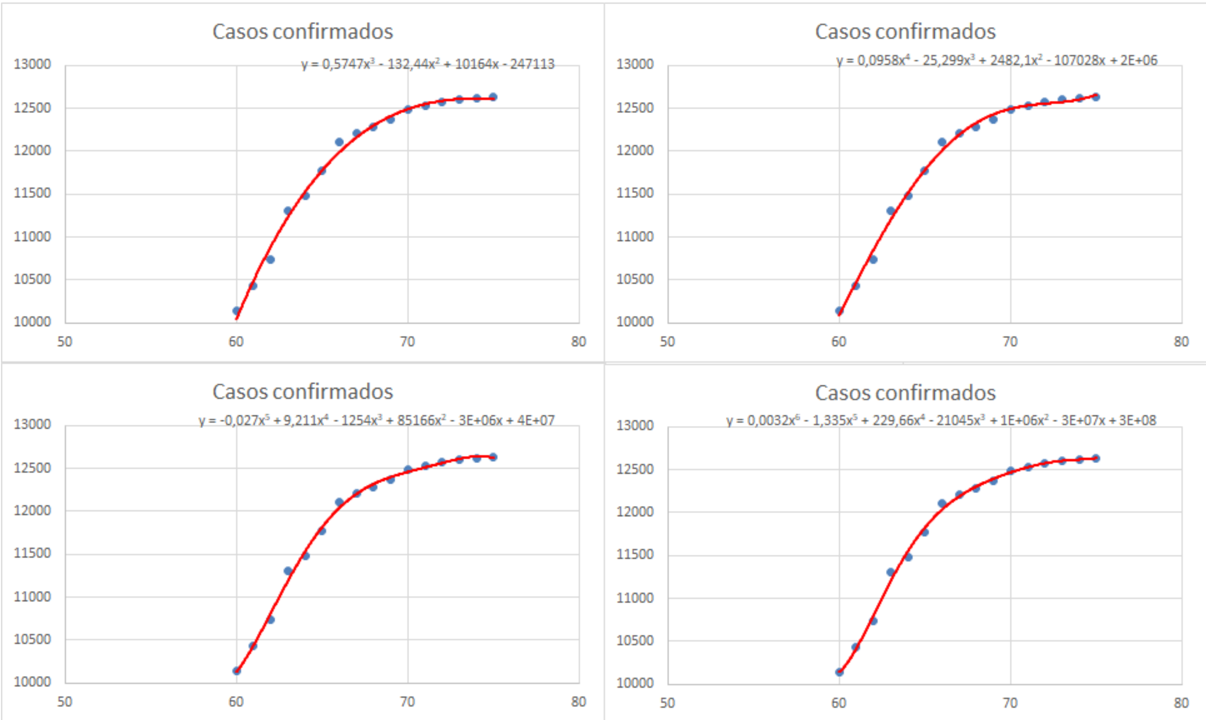




Após essa alteração encontramos o gráfico a seguir:



Repetindo esse processo e alterando para as ordens 3,4,5 e 6 encontraremos os gráficos a seguir:



Agora, responder as questões:

1. Após o ajuste à uma função quadrática, podemos afirmar que esta curva se ajusta melhor que a função polinomial de grau 1?

   Resposta esperada: Sim, pois se aproxima mais dos dados.

2. Faça alterações na ordem da função polinomial aumentado a ordem até 6 e observando as mudanças. O que acontece com a curva com essas alterações?

   Resposta esperada: A curva vai se ajustando cada vez melhor e se aproximando mais dos dados.

Apêndice D

Algumas definições

No presente trabalho apresentamos a teoria necessária acerca do Método dos Mínimos quadrados sob a ótica da Álgebra Linear e utilizando também alguns recursos do Cálculo Diferencial de várias variáveis.

Assim, neste apêndice, é apresentado algumas definições e resultados referentes à teoria estudada e utilizada no Capítulo 2 deste trabalho. Ressaltamos que não apresentaremos as demonstrações dos resultados, no entanto estas podem ser vistas em Hefez e Fernandez (2016) e Neto (2015).

D.1 Álgebra linear

Os espaços utilizados neste trabalho são os $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. Para $n \geq 4$, este espaço generaliza o espaço $\mathbb{R}^2$ dos vetores no plano e o espaço $\mathbb{R}^3$ dos vetores no espaço.

Para HEFEZ, a estrutura de $\mathbb{R}^n$ estudada em Álgebra Linear é a induzida pela estrutura de corpo da reta real $\mathbb{R}$. Essa é a estrutura mínima apropriada para se estudar sistemas de equações lineares com várias incógnitas. Além disso, é sobre essa estrutura que se constroem o Cálculo Diferencial e a Geometria Diferencial, entre outras áreas.

Definição D.1 *Um vetor no espaço bidimensional e tridimensional possui duas e três componentes, respectivamente. Generalizando, no espaço n-dimensional definimos um vetor como sendo um conjunto de n números reais que podem ser escritos na forma matricial:*

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Este vetor é chamado de vetor coluna. Se os n números forem dispostos em um arranjo horizontal escrevemos

$$\bar{v} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^t$$

Este último é um vetor linha designado por v^t.

Definição D.2 *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função que a cada par de vetores u e v em V associa um número real, denotado por $\langle u, v\rangle$, que satisfaz as seguintes condições: Para quaisquer vetores u, v e w de V e qualquer número real k,*

P1. $\langle u, v\rangle \geq 0$;

P2. $\langle u, v\rangle = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$;

P3. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \geq 0$;

P4. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

P5. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$.

Um espaço vetorial com um produto interno é chamado, abreviadamente, de espaço com produto interno.

Exemplo D.1 *Sejam* $u = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ *e* $v = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ *vetores em* $\mathbb{R}^n$. *Definimos*

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \tag{D.1}$$

Note que

$$\langle u, u\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0,$$

e que

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots y_nx_n = \langle v, u\rangle,$$

mostrando que as propriedade 1 e 3 da definição de produto interno são satisfeitas.

Assim, temos que D.1 define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, chamado de produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ ou produto escalar de $\mathbb{R}^n$, generalizando a noção de produto escalar de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

D.2 Cálculo Diferencial

O valor máximo, ou mínimo, de uma função em todo o seu domínio é chamado máximo, e respectivamente mínimo, absoluto.

Definição D.3 *Uma função* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *tem máximo absoluto em* c *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* x *no domínio* D *de* f. *Neste caso, o valor* $f(c)$ *é chamado valor máximo de* f *em* D.

Definição D.4 *Uma função* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *tem mínimo absoluto em* c *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* x *no domínio* D *de* f. *Neste caso, o valor* $f(c)$ *é chamado valor máximo de* f *em* D.

Os valores de máximo e mínimo absoluto de uma função são chamados valores extremos da função.

Definição D.5 *Uma função tem máximo local em um ponto* c *de seu domínio, se existe intervalo aberto* I, *tal que* $c \in I$ *e* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in I$. *Neste caso, dizemos que* $f(c)$ *é valor máximo local de* f.

Definição D.6 *Uma função tem mínimo local em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f.*

Pontos de máximo local e pontos de mínimo local são chamados extremos locais (ou extremos relativos).

Teorema D.1 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.*

Definição D.7 *Um ponto c no domínio de uma função f é chamado de ponto crítico se ocorre um dos seguintes casos:*

a. f não é derivável em $x = c$.

b. f é derivável em c e $f'(c)$.

O Teorema D.1 diz que qualquer máximo ou mínimo local c deve se ponto crítico, pois se f não for derivável em c então é ponto crítico e se f for derivável em c então $f'(c) = 0$ e c é ponto crítico de f. Assim, se $x = c$ é máximo ou mínimo local de f então c é ponto crítico de f.