UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

LUCIANO FRANCO DA SILVA

PROGRAMAÇÃO LINEAR E INTEIRA NO NOVO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINAS ELETIVAS

Ilhéus-Bahia
2022

.

LUCIANO FRANCO DA SILVA

PROGRAMAÇÃO LINEAR E INTEIRA NO NOVO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINAS ELETIVAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Delcides Bernardes

Co–Orientador: Prof. Dr. Luíz Leduíno de Salles Neto

S586 Silva, Luciano Franco da.

Programação linear e inteira no novo ensino médio: uma proposta de disciplinas eletivas / Luciano Franco da Silva. – Ilhéus, BA: UESC, 2021.

68 f. : il. ; anexos.

Orientador: Eduardo Delcides Bernardes.

Dissertação (mestrado) –Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Referências bibliográficas: f. 61-64.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Programação linear. 3. Tecnologia da informação. 4. Otimização matemática. 5. Modelos matemáticos. I. Título.

CDD 510.7

Trabalho aprovado. Ilhéus, 04 de fevereiro de 2022.

Prof. Dr. Eduardo Delcides Bernardes
Orientador

Prof. Dr. Luíz Leduíno de Salles Neto
Co-orientador

Profa. Dr. Alyne Toscano Martins - UFTM

Profa. Dr. Liliane Xavier Neves - UESC

Dedico este trabalho aos meus pais, a vocês todo meu orgulho e gratidão. E aos meus filhos Caio e Gustavo, para quem busco ser o exemplo.

Agradecimentos

Agradeço ao casal, Jana Lúcia e Valdecy, meus pais, que tornaram possível minha existência e são meus exemplos de sabedoria, companheirismo e trabalho.

Agradeço a minha esposa, Natália Lopes, pela paciência e dedicação e ao meu filho, Caio, por entender minhas ausências, principalmente nos fins de semana.

Agradeço ao gestor e colega do Banco do Brasil, André, pela parceria, desde o primeiro dia. Nossa equipe teve muita sorte pela sua chegada e desejo que alcance seus objetivos, plenamente merecidos.

Agradeço a minha amiga, também gestora e colega do Estado, Rose, que me recebeu com o carinho próprio de sua pessoa e também contribuiu para que tivesse tempo para esse trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Delcides Bernardes, pelas dicas valiosas, paciência e parceria.

Agradeço ao Prof. Dr. Luiz Leduíno Salles Neto, co-orientador deste trabalho. Um grande mestre desde os tempos da minha graduação e iniciação científica. Muito obrigado por aceitar o convite!

Agradeço aos professores do PROFMAT, todos são excelentes profissionais, motivadores e dedicados. Em especial agradeço ao Prof Dr Néstor por aplicar provas de alto nível para nossa preparação para o ENQ (é nas dificuldades que encontro motivação!). Agradeço aos colegas do PROFMAT, especialmente a Jairo, Jônatas, Marcos Modesto e João, que contribuíram bastante com incentivo e compartilhando informações importantes.

Agradeço aos meus colegas de trabalho, no banco e na escola, pela compreensão e empatia. Em especial ao Prof. Eduardo Miranda Angelin, que me incentivou a entrar no PROFMAT e é uma referência nos assuntos da carreira funcional escolar.

Agradeço aos meus amigos e parceiros musicais pela compreensão nesse período de ausência.

A todos vocês meus sinceros agradecimentos!

Resumo

A Programação Linear e Inteira (PLI) não estão presentes no currículo do Ensino Médio, porém, são temas que contribuem com o desenvolvimento de competências exigidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Neste sentido, o objetivo deste trabalho é propor uma abordagem do tema aplicada ao Novo Ensino Médio. Inicialmente, apresentamos as principais diretrizes do ensino da matemática e relacionamos os conteúdos propostos com os problemas estudados em Programação Linear e Inteira. Para a construção dessa relação entre conteúdos e problemas de PLI efetuamos uma pesquisa bibliográfica sobre o tema em dissertações no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Posteriormente, tratamos sobre as mudanças previstas para a implantação do Novo Ensino Médio. Em seguida, apresentamos algumas noções sobre Programação Linear e Inteira, modelos de problemas clássicos e alguns métodos de resolução. O último capítulo apresenta os Planos Descritivos das três disciplinas eletivas e algumas orientações didáticas.

Palavras-chave: Programação Linear, Programação Linear Inteira, Novo Ensino Médio.

Abstract

Linear and Integer Programming (LIP) are not present in the high school curriculum, however, they are themes that contribute to the development of skills required by the Common National Curriculum Base. In this sense, the objective of this work is to propose an approach to the theme applied to New High School. Initially, we present the main guidelines for teaching mathematics and relate the proposed contents to the problems studied in Linear and Integer Programming. For the construction of this relationship between contents and LIP problems, we carried out a bibliographic research on the subject in dissertations within the scope of the Professional Master's Degree in Mathematics in a National Network (PROFMAT). Later, we deal with the changes planned for the implementation of the New High School. Then, we present some notions about Linear and Integer Programming, classical problem models and some solving methods. The last chapter presents the Descriptive Plans of the three elective courses and some didactic guidelines.

Keywords: Linear Programming, Integer Linear Programming, New High School.

Sumário

Introdução

Os desafios do professor de matemática da rede pública no âmbito da Educação Básica são inúmeros, desde ambientes inapropriados, salas lotadas, problemas sociais e alunos desmotivados, além de outros desafios que são próprios da matéria, por exemplo, a abstração necessária para a compreensão e a construção do significado para o aluno. Todo professor de matemática já deve ter sido questionado pelo aluno sobre a aplicação do conteúdo que está ensinando. Para o aluno do Ensino Médio a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta uma ampliação e aprofundamento dos conteúdos em que o foco é a construção de uma visão integrada da matemática aplicada à realidade. Nesse momento, o desafio de "materializar"a matemática e torná-la mais "aplicável"torna-se maior. Para alcançar esse objetivo a BNCC (2018, p.529) orienta:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

Nesse sentido destacamos os termos **construção de modelos** e **resolução de problemas**.

A noção de construir modelos está associada à ideia de modelagem matemática. Um modelo é um meio para uma visão estruturada da realidade e quando representamos planos ou retas através de equações matemáticas, por exemplo, estamos transmitindo uma realidade através de um modelo (GOLDBARG; LUNA, 2005). Considerando a modelagem matemática como a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos (BASSANEZI, 2002), o aluno que constrói um modelo está conseguindo interpretar a realidade com uma linguagem matemática e compreende que essa é apenas uma representação. Desse modo dizemos que o aluno está exercitando a modelagem matemática.

A ideia de construir modelos pode estar diretamente associado a um problema a ser resolvido. Podemos construir modelos a partir de um problema e também podemos aplicar um modelo já existente para resolver outros problemas diferentes. Nesse contexto podemos aplicar essa ligação entre modelo e problema como metodologia de ensino. A construção do modelo pode ser feita em sala pelos alunos e o professor torna-se o mediador. Essa abordagem favorece a argumentação e comunicação matemática do aluno e favorece a compreensão de conceitos (ALLEVATO; VIEIRA., 2016). Em contraponto, exige do professor maior preparo e maturidade para essa mediação (NUNES; SANTANA, 2017).

O objetivo desse trabalho é sugerir utilização de problemas de Programação Linear e Inteira, associado aos conteúdos do currículo regular no Ensino Médio, em disciplinas eletivas a serem oferecidas no molde do Novo Ensino Médio, com foco na metodologia de ensino através da resolução de problemas. Problemas de Programação Linear e Inteira possuem modelos simples e fáceis de serem associados a problemas reais do cotidiano do aluno. Um exemplo de problema desse tipo é o Problema da Mochila que pode ser entendido como o desafio de encher uma mochila com produtos respeitando o seu limite de peso e maximizando o valor dos produtos carregados (GOLDBARG; LUNA, 2005). Utilizar tais problemas como motivadores, construir o modelo e resolvê-los em sala são estratégias para contextualizar o conteúdo matemático e atribuir significado ao seu aprendizado. Essa abordagem será sugerida na forma de disciplinas eletivas, visando as mudanças previstas para o Ensino Médio, as quais possibilitarão ao aluno um aprofundamento em áreas de preferência. Tornando-se assim, uma ferramenta importante para reforçar os conteúdos do currículo básico da matemática e auxiliar o professor na aplicação desses conteúdos à realidade do aluno.

No primeiro capítulo apresentaremos os referenciais teóricos para o ensino da matemática e a metodologia de resolução de problemas, seguindo as diretrizes normatizadas pelos órgãos públicos responsáveis pela educação básica em documentos oficiais. Além da BNCC, os Estados precisam elaborar os seus organizadores curriculares. Nesse ponto, ainda carecemos de um documento homologado para o Novo Ensino Médio na Bahia, o Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) esteve em processo de consulta pública no período de 13 de Julho a 12 de Agosto de 2022 e, até a data do fim deste trabalho, foi divulgada apenas em sua primeira versão. O Conselho Estadual de Educação da Bahia (CEE/BA), por meio da Resolução nº 68 de 18 de outubro de 2021, instituiu que o Novo Ensino Médio no estado terá seu início no ano de 2023 e até o final do primeiro quadrimestre do ano de 2022 a versão final do DCRB será homologada e publicada. Assim, neste trabalho, nos baseamos principalmente na BNCC, em documentos homologados de outros estados, no organizador curricular (BAHIA, 2020b) publicado pelo Estado da Bahia para o ano 2021 e na versão inicial do DCRB.

Ainda no primeiro capítulo veremos a relação entre os conteúdos necessários ao estudo da Programação Linear e Inteira e as habilidades e competências que devem ser trabalhadas no ensino médio. As principais referências para essa relação dos conteúdos serão dissertações sobre o tema no âmbito do Profmat. Dentre os 32 trabalhos que identificamos sobre o tema, na área da Programação Linear e Programação Linear Inteira, destacamos 17 dissertações que apresentam diretamente a relação com o Ensino Médio e que propuseram algum tipo de estratégia didática (propostas de atividades ou metodologias voltadas para o ensino).

No segundo capítulo apresentamos algumas noções de Programação Linear e Inteira com uma linguagem mais simplificada, visando apresentar o conteúdo aos professores que poderão ministrar a disciplina eletiva sugerida ou busquem uma noção básica do assunto. Destacamos nesse capítulo o Método Gráfico para solução de PL com duas variáveis. Com o uso de softwares gráficos, esse método de solução torna-se bastante didático para alunos do Ensino Médio. O Método Simplex e o *Branch-and-Bound* estarão descritos logo em seguida. Nossa preocupação nesse trabalho foi apenas a aplicação dos métodos em exemplos, não aprofundamos sobre o funcionamento e eficácia pois envolvem conteúdos que fogem do currículo escolar do nível médio.

Por último, no terceiro capítulo, apresentaremos nossa proposta de ensino através de três disciplinas. Descrevemos a estrutura da disciplina com sugestões de metodologia, atividades e avaliação para o professor. Cada disciplina é direcionada para um ano do ensino médio atingindo assim três níveis de aprofundamento em Programação Linear e Inteira. No final de cada seção do capítulo, cada seção dedicada a uma disciplina, apresentamos o Plano Descritivo da disciplina. Com o Plano Descritivo da disciplina o professor, interessado em ministrá-la, poderá apresentar à escola onde trabalha como uma possibilidade de aprofundamento na área de matemática e suas tecnologias.

Nossa proposta é utilizar as disciplinas eletivas para aprofundar conhecimentos na área de matemática, reforçar conteúdos trabalhados no componente obrigatório do currículo e contextualizar problemas introduzindo noções da Programação Linear e Inteira ao longo de todo Ensino Médio em três níveis de aprofundamento, trabalhando a modelagem matemática e estimulando o uso de ferramentas computacionais.

Capítulo 1

Referencial Teórico

O Ensino Médio é a etapa mais desafiadora da educação básica, com o conteúdo mais extenso e com a maior taxa de evasão escolar. De acordo com a Lei nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases para a educação nacional, o Ensino Médio tem a finalidade de garantir "a preparação básica para o trabalho" e a "compreensão de fundamentos científicos-tecnológicos dos processos produtivos (...)". Diante de tais realidades e com o objetivo do cumprimento de sua atividade, acreditamos que o professor é o maior responsável pelo sucesso do ensino, haja visto que ele é também o responsável pelo plano de aula e, além disso, pela sua execução, que muitas vezes foge um pouco do planejamento por motivos diversos devido à dinamicidade da sala de aula.

Para elaboração de um plano de aula que atenda às diretrizes da educação nacional, consiga abordar os conteúdos obrigatórios do Ensino Médio e ainda motivar o aluno, o professor deve se munir de diversas ferramentas e estratégias embasadas pela BNCC. As estratégias de ensino orientadas por ela e bastante utilizadas, principalmente pelos professores de matemática, são a modelagem e resolução de problemas. Nesse sentido, a Programação Linear e Inteira se enquadra perfeitamente na estratégia, sendo ela um ramo da Pesquisa Operacional, que está inteiramente ligada à modelagem de problemas reais e busca pela sua solução.

Neste capítulo veremos o que as diretrizes da educação básica orientam sobre o ensino da matemática no nível médio e quais competências podem ser trabalhadas com a estratégia de resolução de problemas, como usar essa estratégia didaticamente e alguns trabalhos já publicados no âmbito do Profmat que utilizam a PL e a PLI no Ensino Médio que possam fomentar a elaboração de uma plano de aula e até uma ementa de disciplina eletiva. Assunto que trataremos na última seção sobre o Novo Ensino Médio.

1.1 Diretrizes para o Ensino de Matemática

Visando atender as determinações da Lei nº 9394 de 20 de dezembro de 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), e as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Resolução CEB/CNE nº 2, de 30 de janeiro de 2012), foi homologado, em 14 de dezembro de 2018, o documento da Base Nacional Comum Curricular para a etapa do Ensino Médio. A partir dessa data o Brasil passou a ter uma Base com as aprendizagens previstas para toda a Educação Básica.

Inicialmente, a BNCC define dez competências gerais que os estudantes devem desenvolver ao longo de toda a Educação Básica. São competências alinhadas com a Secretaria de Direitos Humanos da Presidência da República e em consonância com a Agenda 2030 da Organização das Nações Unidas (ONU). Dentre estas competências destacamos a segunda:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.(BNCC, 2018, p.9)

A competência destacada reforça a importância da formulação e resolução de problemas como habilidade a ser desenvolvida pelos estudantes. Logo, no planejamento do currículo escolar, deve estar previsto em todas as disciplinas o contato do aluno com situações-problemas reais e imaginárias.

Em especial, na área de Matemática e suas tecnologias, a BNCC normatiza cinco competências específicas:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Dentre as competências específicas apresentadas acima, a terceira competência trata explicitamente da habilidade de construir modelos e resolver problemas. Nesse sentido, o professor de matemática, para desenvolver tais competências em seus alunos, precisará trabalhar com problemas, conhecendo e construindo modelos matemáticos e utilizando como estratégia de ensino a resolução de problemas. Essa estratégia não se limita ao desenvolvimento de apenas uma competência. Na próxima seção veremos argumentos que embasam a utilização da resolução de problemas como principal metodologia no processo de ensino-aprendizagem.

A partir das orientações normativas da BNCC, os Estados, responsáveis pela oferta gratuita do Ensino Médio segundo LDB, elaboram seus currículos acrescentando à base comum a parte diversificada, considerando o contexto histórico, econômico, social, ambiental e cultural da região. O Estado da Bahia, para a jornada pedagógica 2021[1], publicou os Organizadores Curriculares Essenciais (OCE) (BAHIA, 2020b), uma estrutura de planejamento e de referência para o trabalho pedagógico dos professores de todos os componentes curriculares e de todas as etapas do ensino fundamental e médio. No Apêndice 4 está disposto todo currículo proposto pela OCE para a área de Matemática e suas tecnologias em todo o Ensino Médio. O currículo está separado por séries e organizado em três unidades.

1.2 Resolução de Problemas como estratégia didática

É fácil perceber que o conhecimento científico ganha impulso e se desenvolve através da resolução de problemas. O termo "Eureka!" atribuído a Arquimedes, quando este descobriu a relação entre a massa e o volume dos corpos, significa "descobri" e representa o prazer da descoberta da solução de um problema. A partir de um problema real foram criados teorias e hipóteses em busca da solução e também de entender e interpretar os fenômenos que originam e se desenvolvem a partir dele. Especialmente na Matemática, a lista dos 23 problemas de Hilbert, anunciada em 1900 no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, e os sete problemas do milênio, anunciados no ano 2000 em Paris pelo Clay Mathematics Institute (CMI), são exemplos de quão importante a resolução de problemas está para os matemáticos. Inclusive a CMI oferece um prêmio de um milhão de dólares para cada problema resolvido e, segundo Devlin (2008), os problemas oferecem uma noção instantânea de onde estão as fronteiras da matemática atualmente.

Apesar da sua importância no desenvolvimento científico, a resolução de problemas só começou a ser mais explorada como estratégia didática a partir dos anos 80. Mesmo com a famosa obra de George Pólya, o livro *How to Solve it* de 1944, que apresenta em seu primeiro capítulo orientações para professores ajudarem os alunos a resolver problemas observando quatro passos até hoje utilizados como referência, o Movimento da Matemática Moderna, nos anos 60, sufocou essa estratégia de ensino, que só voltou a ser explorada com a evolução das teorias cognitivas como a Construtivista, Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural (ALLEVATO; VIEIRA., 2016).

Allevato e Vieira. (2016) destacam ainda as diferentes formas de trabalhar a resolução de problemas na sala de aula. Alguns pesquisadores da época perceberam que professores tinham três compreensões distintas: o ensino sobre resolução de problemas, o ensino para resolução de problemas e o ensino através da resolução de problemas. A primeira essencialmente, iniciada pelas ideias de Polya (1945), dá ênfase às heurísticas e busca regras gerais

[1]Período para organização do currículo escolar, acontece anualmente, no início do ano letivo. Nesse ano teve caráter especial pois, devido à pandemia COVID-19, tivemos um ano *continuum* 2020/2021 de forma remota, híbrida e presencial.

para resolução de problemas, independente do conteúdo abordado. A segunda é, talvez, a mais conhecida (e mais utilizada) dentre os professores. Nela primeiro ensina-se o conteúdo formal da matemática, a parte teórica, e depois aplicam-se os conhecimentos para resolução de problemas nos diversos contextos. Já a terceira, uma abordagem mais moderna e recomendada pelas diretrizes atuais da BNCC, traz a resolução de problemas como o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula. Nela o professor assume o papel de mediador e os alunos são os protagonistas na construção do seu próprio conhecimento.

Será na visão metodológica de ensino através da resolução de problemas que pautaremos nosso trabalho, alinhando com as diretrizes atuais. Acreditamos que essa metodologia estará alinhada com os conteúdos da Programação Linear e Inteira por existirem diversas aplicações em situações reais conforme veremos no Capítulo 2. Mas, apesar de trazerem resultados mais consistentes, essa metodologia requer um maior esforço do professor. O seu papel de mediador está longe de ser passivo ou neutro.

> Frequentemente, os alunos, diante de um problema, não compreendem o que fazem e não utilizam os conhecimentos que possuem para resolvê-lo. Analisar e compreender como pensam os alunos, gerar seu entusiasmo e curiosidade são atitudes do professor, essenciais para o sucesso na resolução de problemas (NUNES; SANTANA, 2017).

Diante das dificuldades, buscando motivar os alunos, o professor deverá preparar suas aulas buscando o máximo de conexões do conteúdo com situações-problemas, preferencialmente reais. Algumas áreas de estudo na matemática contemplam conteúdos que estão contidos nos currículos do nível do Ensino Médio. Especificamente a PL e PLI, por exemplo, possui conexão direta com assuntos do Ensino Médio, por exemplo: gráfico de funções lineares, sistemas de equações, matrizes e análise combinatória.

Na próxima seção abordaremos sobre essas conexões entre os problemas de PL e PLI e o Ensino Médio tendo como principais referências algumas dissertações, apresentadas ao Profmat, que trataram sobre o assunto.

1.3 Programação Linear e Inteira no Ensino Médio

Problemas de Programação Linear podem ser trabalhados no Ensino Médio desde o primeiro ano. No final da segunda unidade do primeiro ano, conforme a Tabela 1 do Apêndice 4, o professor de matemática pode explorar a representação gráfica da função afim. Consequentemente, aprimorando as habilidades EM13MAT302, EM13MAT405 e EM13MAT502 exigidas pela BNCC. Nesse mesmo tempo de ensino, o professor poderá sugerir problemas iniciais de PL com duas variáveis e explorar sua solução gráfica. Problema como o Problema da Ração, apresentado no Capítulo 2, pode servir de problema motivador (de acordo com a metodologia de ensino através da resolução de problemas) para iniciar a representação gráfica de funções afins.

Algumas dissertações do Profmat trazem exemplos de problemas trabalhados no Ensino Médio com a solução gráfica. Silva (2016) apresenta o problema da Fábrica de cintos, que resolve utilizando o método gráfico e, em seu capítulo sobre aplicação no Ensino Médio, utiliza-se de aplicativos de celular que resolvem problemas de PL, estratégia que motiva os alunos interessados em recursos tecnológicos. Lopes (2017) apresenta três problemas de PL resolvidos graficamente, com destaque para um deles com três variáveis em que apresentou a solução gráfica no $\mathbb{R}^3$. Palomo (2018) e Zachi (2016), em seus trabalhos voltados exclusivamente para o método gráfico, faz o uso do software GeoGebra e propõem uma sequência didática com problemas como o de transporte e da dieta. Apesar da sequência didática proposta por estes trabalhos terem sido direcionadas para o terceiro ano do Ensino Médio, acreditamos que pequenas adaptações são suficientes para aplicar a mesma sequência no primeiro ano. Por exemplo, o trabalho de Almeida (2015) com alunos da 1ª série apresenta em seu apêndice um curso introdutório à Programação Linear voltado para esse público. Também, Hernandez (2017) utiliza-se apenas de conhecimentos ensinados na 1ª série para aplicar problemas de PL em outras áreas do conhecimento, no caso, na Geografia e na Biologia.

No segundo ano do Ensino Médio, segundo o currículo proposto na Tabela 2 do Apêndice 4, não temos conteúdos diretamente ligados à Programação Linear mas, num contexto de atividades paralelas, existem assuntos em que o estudo de problemas de otimização facilitam o seu entendimento. As habilidades EM13MAT203 e EM13MAT303 tratam do conhecimento sobre planilhas, orçamento familiar, juros simples e compostos e suas interpretações gráficas. Nesse momento, os problemas de otimização como maximização de lucros e redução de custos, o Problema da Dieta como organização orçamentária familiar, podem ser aproveitados. Pierot (2019) utiliza problemas de PL em alunos do 2º ano visando reforçar os conteúdos sistemas de equações e inequações e suas representações gráficas. Os problemas sugeridos pelo autor com maximização de lucros e minimização de custos e também os problemas propostos por Freitas (2019), que utilizam um contexto regional, podem ser aplicados no segundo ano para um desenvolvimento da habilidade EM13MAT203 proposta no currículo.

No terceiro ano, o último ano do Ensino Médio, pressupõe-se que diversas habilidades já foram assimiladas pelos alunos e podemos aprofundar um pouco mais nos problemas de PL. Na primeira unidade, segundo a Tabela 3, no desenvolvimento da habilidade EM13MAT102 podemos iniciar a utilização de *softwares* tipo planilhas eletrônicas e, desenvolvendo também a habilidade EM13MAT406[2], podemos introduzir o algoritmo Simplex e a solução de problemas de PL com mais de duas variáveis utilizando *softwares*. Nesse sentido podemos citar os trabalhos de Ribas (2014), Sousa (2021) e Possinelli (2017) que trazem atividades aplicadas ao 3º ano do Ensino Médio com utilização do método Simplex em planilhas eletrônicas. Pressupondo que os conhecimentos sobre gráficos de funções afins, sistemas de equações e inequações já foram assimilados, na segunda unidade podemos estender a resolução gráfica para a terceira dimensão, como mostra o trabalho de Silva (2019) que utilizou o GeoGebra para essa visualização. Além dele, Frias (2017), Camargo (2014) e outros trabalhos já citados aqui utilizaram o GeoGebra para a representação gráfica dos problemas de PL.

No final do 3º ano, na terceira unidade, é quando apresentamos aos alunos a análise combinatória, conforme currículo proposto em BAHIA (2020b). Como motivador para o estudo do conteúdo podemos utilizar problemas de Programação Linear Inteira, como é apresentado no trabalho de Taveira (2019). Ele apresenta problemas clássicos de otimização combinatória (problemas de PLI) na preparação de alunos para olimpíadas de matemática.

Destacamos ainda alguns trabalhos que utilizam a Programação Linear como suporte

[2]Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática (BNCC, 2018).

para a transversalidade de conteúdos (OLIVEIRA, 2016) e também apresentam conteúdo voltado para a acessibilidade, como o trabalho de Weber (2018) que traz uma sugestão de atividade para deficientes visuais.

Com base nos trabalhos citados nessa seção acreditamos que a Programação Linear e Inteira poderá ser apresentada aos alunos em todas as séries do Ensino Médio. Devido à existência de outros conteúdos e ao cumprimento da carga horária para a disciplina, o professor de matemática não deve pautar todo seu conteúdo na Programação Linear e Inteira. Sendo assim, a Programação Linear e Inteira poderá ser ministrada em minicursos ou projetos pedagógicos dentro da disciplina. Outra sugestão, que é o objetivo deste trabalho, é apresentar os conteúdos da Programação Linear e Inteira em uma *disciplina eletiva*. As disciplinas eletivas serão disciplinas adicionais incluídas no Ensino Médio para estender sua carga horária de acordo com a Lei nº 13.415/2017 que estabeleceu o *Novo Ensino Médio* conforme veremos na seção seguinte.

1.4 Novo Ensino Médio

Em 13 de Julho de 2021, o Ministério da Educação por meio da portaria nº 521 institui o Cronograma Nacional de Implementação do Novo Ensino Médio. Esse cronograma visa efetivar a operacionalização do artigo 24, parágrafo 1º e do artigo 36 da LDB. Dentre seus objetivos temos o estabelecimento do cronograma de ampliação da carga horária para mil horas anuais nas unidades escolares que ofertam o Ensino Médio. Além da ampliação da carga horária, o Novo Ensino Médio contará agora com **itinerários normativos**, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino.

Os itinerários normativos são áreas do conhecimento que o estudante deverá escolher para aprofundar seu conhecimento ao longo do Ensino Médio. São cinco áreas contempladas pelos itinerários normativos:

- Linguagens e suas tecnologias;
- Matemática e suas tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas tecnologias;
- Ciências Humanas e Sociais aplicadas;
- Formação técnica e profissional.

Sobre a área de Matemática e suas tecnologias, o MEC publicou em 29/06/2021 em seu site oficial, disponível em ⟨https://www.gov.br/mec/pt-br/novo-ensino-medio/itinerarios-formativos-do-novo-ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias⟩, algumas orientações sobre esse itinerário. Destacamos abaixo parte desse texto que dá ideia do seu objetivo:

> O estudante terá uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em conta a realidade do aluno do Ensino Médio, que são impactados pelos avanços tecnológicos e pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das

> mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior.

Os referenciais curriculares para os itinerários normativos na Bahia estão previstos para serem homologados até o primeiro quadrimestre de 2022 mas, de acordo texto destacado acima, podemos verificar que os norteadores para a área de matemática serão a sua aplicabilidade e a utilização de recursos tecnológicos.

A carga horária total prevista para o Novo Ensino Médio será de mil horas anuais. No Documento Curricular Referencial da Bahia (BAHIA, 2021) a Secretaria da Educação do Estado da Bahia definiu a carga horária das disciplinas. Nele, a carga horária de matemática como componente obrigatório, nos três anos do Ensino Médio, ficou em 120 horas por ano, e a carga horária destinada às disciplinas eletivas foram de 40 horas no 1º ano e 80 horas dos anos seguintes.

Sobre as disciplinas eletivas, o Documento Orientador de Implementação do Novo Ensino Médio da Bahia (BAHIA, 2020a), quando da orientação às escolas do grupo-piloto que iniciou a implementação do novo Ensino Médio baiano em 2020 recomenda:

> As Unidades Curriculares Eletivas deverão ser criadas pelas escolas, com fundamento na realidade local, de acordo com os anseios e necessidades dos/as estudantes [...] devem "ter intencionalidade pedagógica que dialogue com os objetos de conhecimento das Áreas ou dos Componentes Curriculares, bem como, com as Habilidades previstas nos "Referenciais para a Elaboração dos Itinerários Formativos". (BAHIA, 2020a)

Destacando a aplicabilidade da disciplina eletiva da área de matemática e sua carga horária proposta, diante das possíveis contribuições do ensino de Programação Linear e Inteira para os alunos do Ensino Médio, proporemos uma disciplina eletiva voltada para a Programação Linear e Inteira a ser trabalhada nos três anos do Novo Ensino Médio. No próximo capítulo, será apresentado um resumo sobre Programação Linear e Inteira, em uma abordagem menos teórica e mais prática, com o intuito de embasar ideias para o ensino e composição do conteúdo da disciplina eletiva que será proposta no Capítulo 3.

Capítulo 2

Noções sobre Programação Linear e Inteira

Otimizar significa "melhorar" um resultado considerando as condições em que se encontra o problema. Devido à escassez de recursos somos obrigados a procurar soluções que minimizem sua utilização e alcancem o resultado ótimo e viável. Imagine, por exemplo, o problema de gestão dos alimentos necessários para uma mudança do local de assentamento quando ainda éramos uma civilização nômade ou quais alimentos plantar em um terreno limitado de modo a conseguir uma diversificação dos insumos para a sobrevivência dos moradores de uma vila no advento da agricultura. Encontrar a melhor maneira de resolver esse problema se tornou uma questão de sobrevivência e ainda é o diferencial para o sucesso de qualquer tipo de organização.

Neste capítulo trataremos sobre os problemas de otimização, especialmente os Problemas de Programação Linear e Inteira. Iniciaremos com um breve histórico da otimização e sua importância na sociedade. Em seguida, uma seção sobre modelagem será apresentada para entendermos como foram elaborados os modelos de alguns problemas clássicos de otimização que trataremos nas seções seguintes. Por último, na Seção 2.5, veremos os métodos de resolução de problemas de Programação Linear e Programação Linear Inteira através de exemplos, de modo simples, direcionado para sua utilização como recurso didático no Ensino Médio.

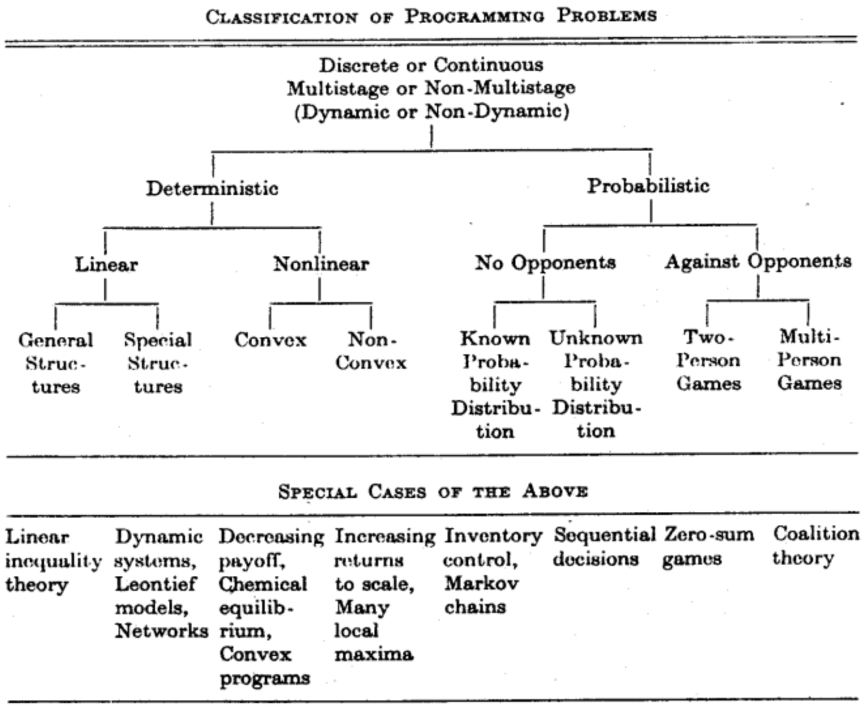
2.1 História

Durante o período da Segunda Guerra Mundial, em 1939, o economista soviético L. V. Kantorovich resolveu problemas ligados à otimização da administração das organizações e posteriormente foi reconhecido com o prêmio Nobel de economia em 1975. Apesar de pioneiro o seu trabalho só foi reconhecido em 1959. Antes disso, contribuiu para que o matemático George Dantzig desenvolvesse um método de resolução de problemas de otimização linear. Dantzig trabalhava para o exército americano, no Pentágono, num projeto denominado SCOOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*) em 1947 quando desenvolveu o Método Simplex que resolvia eficientemente esses tipos de problemas que, sugerido pelo economista T. C. Koopmans, foram denominados de *Problemas de Programação Linear*

(ARENALES et al., 2011).

O livro *Linear Programming and Extensions* (DANTZIG, 1963) se tornou uma das principais referências da época. No livro, Dantzig classifica os problemas de otimização em *Determinísticos* (*Deterministic*) e *Probabilísticos* (*Probabilistic*), e os problemas do tipo Determinísticos em *Lineares* (*Linear*) e *Não-lineares* (*Nonlinear*) como vemos na Figura 2.1 extraída da página 8 de Dantzig (1963).

Figura 2.1: Classificação dos Problemas de Programação.



Fonte: Dantzig (1963).

Problemas Determinísticos são assim chamados por possuírem a característica de serem exatamente previsíveis todos os resultados de qualquer ação que se tome. No mundo real talvez esses problemas sejam menos comuns, mas tomá-lo como modelo é bastante útil pois, geralmente, o desvio da realidade pode ser resolvido com pequenos ajustes. Já os problemas Probabilísticos envolvem algum tipo de incerteza. Situações que envolvam clima, atrasos no trânsito, decisões políticas, variações na demanda de clientes ou taxas de desemprego são exemplos em que não se pode determinar com exatidão, sendo necessário trabalhar com uma probabilidade de que aconteçam. O estudo dos diversos tipos de problemas de otimização deu origem ao termo *Pesquisa Operacional*, um ramo de pesquisa interdisciplinar que utiliza métodos científicos para auxílio na tomada de decisões. Chamamos de interdisciplinar por ser considerada um ramo de abordagem científica para tomada de decisão em diversos setores da sociedade (ARENALES et al., 2011).

Os métodos de resolução dos problemas de otimização geralmente envolvem uma quantidade muito grande de operações matemáticas. Problemas reais de produção em fábricas, por exemplo, podem apresentar milhares de variáveis de decisão. No caso do Algoritmo Simplex[1] a quantidade de operações matemáticas cresce exponencialmente em relação à quantidade de variáveis, resultado demonstrado por Victor Klee e George Minty no artigo *How Good is the Simplex Algorithm?* (1970) e observável utilizando softwares matemáticos como o MatLab (VELINOV; GICEV, 2018). Diante disto, os computadores se tornaram a principal ferramenta da Pesquisa Opercional. Com a evolução tenológica a Pesquisa Operacional ganhou impulso com a utilização de computadores cada vez mais velozes e pacotes de softwares e aplicativos desenvolvidos exclusivamente para resolução de Problemas de Otimização (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Atualmente existem diversas sociedades de Pesquisa Operacional que divulgam o estudo dentro da área de pesquisa através de conferências, congressos, prêmios e publicações. As sociedades de principal destaque são: SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional), INFORMS (*Institute for Operations Research and Management Science*), EURO (*The Association of European Operational Research Societies*), APDIO (*Associação Portuguesa de Investigação Operacional*), IFORS (*International Federation of Operacional Research Societies*) e ALIO (*Associación Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa*) (FAVERO; BELFIORE, 2013).

No Brasil a SOBRAPO, fundada em 1969, mantém duas revistas que visam promover a publicação de artigos de máximo interesse na solução de problemas nacionais e de países vizinhos: a revista Pesquisa Operacional que é indexada no *International Abstracts in Operations Research* da IFORS e ao SciELO e a revista Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento que é aberta para acesso pelo *site* https://www.podesenvolvimento.org.br/. Nesta última destacamos o volume 13, publicado em 12 de Fevereiro de 2021, uma publicação especial sobre a COVID-19 com artigos direcionados para o enfrentamento da Pandemia COVID-19 e suas consequências.

2.2 Importância na Sociedade

Por meio de várias publicações e aplicações encontradas na literatura, podemos perceber a contribuição da Pesquisa Operacional para a sociedade desde sua origem, permitindo tratar diversos problemas reais que exigem o uso de recursos escassos e sistemas mais eficientes. Como consequência, especialmente com o uso das técnicas de otimização, a sociedade tem se beneficiado de diversas maneiras, por exemplo, através da redução do desperdício e dos impactos ambientais com um melhor uso dos recursos ou com o aumento da qualidade dos serviços que interferem diretamente na qualidade de vida das pessoas. Em particular, as empresas privadas têm conseguido aumentar consideravelmente seus lucros ou melhorar os seus sistemas de acordo com diversos objetivos.

O uso de técnicas de Otimização Matemática, incluindo a Programação Linear e Inteira, tem se intensificado ao longo das últimas décadas. A *Gurobi Optimization*, uma das empresas que trabalha com desenvolvimento softwares de otimização, publicou um relatório em que foram entrevistados 251 clientes sobre o uso da otimização. Neste relatório, podemos destacar que a maioria das empresas, desde pequenas *start-ups* até as maiores organizações globais, contrata, no mínimo, dois profissionais especialistas em pesquisa operacional. Além disso, o

[1]sequência de passos que resolve Problemas de Programação Linear utilizando o Método Simplex

relatório conclui que as empresas utilizam a Otimização Matemática em mais de 40 setores diferentes (GUROBI, 2021).

Referente às aplicações utilizando a Programação Linear e Linear Inteira, podemos identificar na literatura relacionada diversos problemas em diferentes setores que vão desde a tomada de decisões em organizações simples ou pequenas empresas até o planejamento de um sistema complexo de uma grande empresa. A seguir, elencamos alguns exemplos de aplicações em diferentes contextos.

Em Hillier e Lieberman (2013), no primeiro capítulo, encontramos uma tabela com a economia anual estimada em cada organização que utilizou a Pesquisa Operacional como ferramenta de gestão. Nesta tabela, destacamos a aplicação da Programação Linear pela empresa *Proctor and Gamble* para redesenhar o sistema de distribuição e de produção nos Estados Unidos visando reduzir custos e aumentar velocidade de chegada ao mercado, gerando uma economia estimada de 200 milhões de dólares. Também destacamos a economia estimada de 1,1 bilhão de dólares pela aplicação da Programação Linear Inteira na Força de defesa da África do Sul para redesenhar, de forma otimizada, o tamanho e o formato das forças de defesa e seus sistemas de armamento.

No meio acadêmico, existem diversos trabalhos científicos destinados à aplicação da Pesquisa Operacional nas mais distintas áreas. Reghim (2018) utiliza a Programação Linear para resolver problemas agrícolas em uma propriedade de reflorestamento. Oliveira (2013) utiliza a Programação Linear Inteira e métodos heurísticos para resolver o problema de roteamento para a coleta de lixo e mostra as vantagens da utilização dos métodos estudados em comparação ao método empírico utilizado pela empresa. Moreira (2013) também utilizou a Programação Linear Inteira para o problema de expansão de redes de distribuição de energia elétrica através de software de simulação.

Na área da saúde, podemos citar Freitas (2013), que utiliza a Pesquisa Operacional para gerenciamento de leitos em um hospital particular. Recentemente, Neto et al. (2020) desenvolveram um aplicativo de livre acesso, o *Forecast UTI*, que permite monitorar indicadores hospitalares com base em dados históricos, fazendo previsões de curto prazo e já considerando as situações de alta demanda em determinados períodos, como ocorreu no período de pico da pandemia do COVID-19.

No contexto de planejamento operacional, Byron et al. (2020) e Barboza et al. (2003) utilizam a Programação Linear Inteira, com o apoio do software LINDO®, respectivamente, para maximizar o processo produtivo em uma fábrica têxtil e para designar jornadas de trabalho em uma central telefônica 24 horas. Na meio escolar, seja no ensino fundamental e médio ou na universidade, temos diversos problemas que podem ser resolvidos com auxílio das técnicas de otimização, por exemplo, Tartaglia, Santos e Roque (2013) utiliza a Programação Linear Inteira para alocação de horários em uma escola estadual.

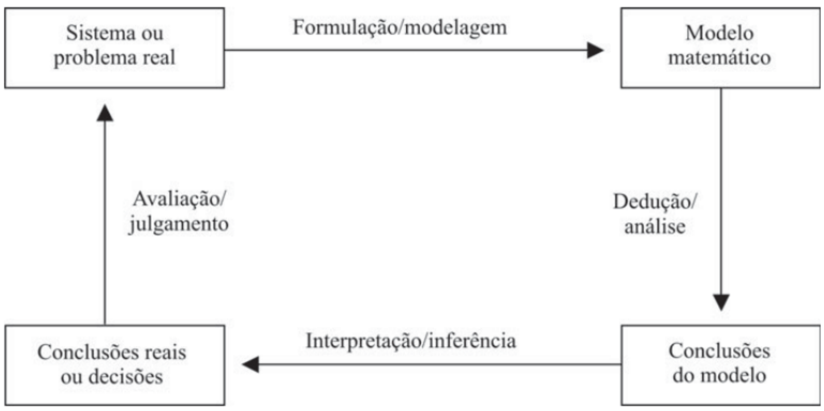
Através dos poucos exemplos de aplicações mencionados nessa seção, verificamos o quão amplo pode ser o uso da otimização, seja contribuindo para o ganho das empresas, organizando um simples horário escolar, melhorando o atendimento na saúde com potencial de "salvar vidas" ou contribuindo para o desenvolvimento sustentável. Diante de tantos benefícios, consideramos que temas relacionados às técnicas de otimização, como a Programação Linear Inteira, são bastantes relevantes não apenas por reunirem estratégias para resolução de problemas, mas especialmente por estarem tão presentes no tratamento dos problemas da sociedade. Assim, apresentar noções sobre esse conhecimento para os alunos do Ensino Médio pode ampliar as possibilidades de atuação como futuros profissionais em uma realidade atual diante das inovações tecnológicas emergentes, em especial, relacionadas à resolução de problemas.

2.3 Modelagem

Com o avanço do conhecimento científico, diversos tipos de problemas de otimização foram estudados. Uma forma de compreender melhor um problema específico ou parte dele e associá-lo a outros problemas reais semelhantes é transformá-los em modelos. Modelos são uma representação artificial da situação estudada considerando alguns parâmetros essenciais e o processo de construção de um modelo é chamado de modelagem. Um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado (BASSANEZI, 2002).

O processo de abstração para a criação de um modelo matemático é complexo e dinâmico, pode até ser considerado uma arte, exigindo do matemático uma criatividade para criar correspondências do mundo real com teorias já existentes na matemática, adaptando ou até criando novas teorias. Segundo Arenales et al. (2011), a criação de um modelo matemático válido passa por algumas fases essenciais baseadas no diagrama apresentado na Figura 2.2:

Figura 2.2: Processo de modelagem.



Fonte: Arenales et al. (2011).

1. Definição do problema: define o sistema ou problema real que será modelado. Essa fase requer a atenção para uma coleta de dados de qualidade para a descrição do problema.

2. Construção do modelo: é a formulação/modelagem em si do problema. Essa é a fase que requer a abstração e criatividade para corresponder os dados colhidos do problema com conceitos matemáticos; selecionando variáveis, formulando problemas na linguagem científica, formulando hipóteses e tornando os problemas mais simples (problemas reais geralmente são muito complexos se forem considerados os mímimos detalhes).

3. Solução do modelo: fase de dedução/análise do modelo matemático proposto utilizando os métodos teóricos matemáticos ou computacionais já conhecidos. Nesse momento podem surgir novas teorias matemáticas caso as existentes não forem eficientes na resolução do modelo. Essa fase pode ser totalmente desconectada do problema real.

4. Validação do modelo: fase em que, baseado nas conclusões do modelo, é feita a interpretação/inferência para verificar se o modelo representa adequadamente o problema real. Momento em que comparamos suas soluções com o problema real de acordo com o grau de aproximação desejado.

5. Implementação da solução: última fase. Essa fase utiliza os resultados validados para a tomada de decisão ligado ao problema real.

Essa sequência nem sempre é realizada uma única vez, conforme passa pelo processo de validação e implementação um modelo pode ser revisto, reformulado ou descartado e será necessário reiniciar todo o processo.

Na sequência, veremos de forma geral o modelo matemático de Programação Linear (PL) em sua forma padrão e o caso específico, em que as variáveis assumem apenas valores inteiros, denominado modelo de Programação Linear Inteira (PLI). Em seguida, descrevemos modelos de alguns problemas clássicos de Programação Linear e Inteira.

2.3.1 Modelo de Programação Linear

O problema de programação linear, na forma padrão[2], consiste em determinar valores ótimos para as n variáveis x_j, de modo a maximizar a função $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e sujeito a m restrições lineares de igualdade. Chamando de c_j e a_{ij} os coeficientes de x_j na função z e nas restrições lineares, respectivamente, e chamando de b_i os termos independentes das restrições, podemos escrever o seguinte modelo matemático para o problema:

Maximizar:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2.1}$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \tag{2.3}$$

A função (2.1), a ser maximizada, é chamada de *função objetivo* e o sistema de equações lineares (2.2), juntamente com as *condições de não negatividade* (2.3), compõem as *restrições do problema*.

Alguns pré-requisitos, listados a seguir, são necessários para que um problema seja representado pelo modelo de programação linear.

[2]Forma padrão é a forma utilizada para resolver o problema aplicando o método Simplex.

- Proporcionalidade; a contribuição de cada variável em relação à função objetivo e às restrições deve ser diretamente proporcional ao seu valor.
- Aditividade; o valor total da função objetivo e de cada função de restrição deve ser expresso pela soma de cada contribuição individual de cada variável.
- Divisibilidade e não negatividade; cada variável poderá assumir qualquer valor não negativo desde que satisfaça as restrições do modelo.

Esse último pré-requisito pode ser ainda mais restrito em alguns problemas. Os problemas em que as variáveis de decisão possam assumir apenas valores inteiros não negativos são chamados de Problemas de Programação Linear Inteira (PLI), neste caso, acrescenta-se à restrição (2.3) a condição de $x_j \in \mathbb{Z}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Há também os casos em que as variáveis podem assumir apenas valores binários, $x_j \in \{0, 1\}$, e casos mistos, onde algumas variáveis são contínuas, outras inteiras e até binárias.

2.4 Problemas Clássicos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de problemas clássicos de PL e PLI e seus respectivos modelos matemáticos. Vale observar que nem sempre os modelos estarão na forma padrão apresentada na Seção 2.3.1, mas a transformação do modelo para a forma padrão é possível com algumas operações elementares, para mais detalhes consulte Favero e Belfiore (2013).

2.4.1 Problema da Mistura

Um dos primeiros problemas de programação linear modelado com sucesso foi o *problema da mistura*. O problema consiste em combinar quantidades de materiais para a fabricação de um novo produto que será um *mix* desses materiais. Essas misturas precisam satisfazer algumas regras de combinação dos materiais e cada material tem um custo associado. O objetivo é minimizar o custo total da mistura.

Considere um problema de mistura de n materiais com m componentes, assumindo x_j como as variáveis que representam a quantidade de material j a ser utilizado na mistura. Tais quantidades devem ser positivas e podem assumir valores fracionados (o que respeita a hipótese de divisibilidade e não negatividade) e estão associadas a uma unidade de medida, por exemplo, quilograma (kg). Além disso a soma dessas quantidades devem resultar em uma unidade de mistura.

Sejam a_{ij} os coeficientes que representam a porção do componente i na matéria j e b_i como a a fração do componente i obrigatórios na mistura. Chamando de c_j o custo de cada matéria j podemos construir o seguinte modelo:

Minimizar:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2.4}$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \tag{2.6}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Nesse problema estamos assumindo a necessidade de se fabricar apenas uma unidade de produto e, por isso, a inclusão da restrição (2.6). Em alguns problemas de mistura essa exigência não aparece, bastando apenas escolher a melhor composição de materiais, como no exemplo do Problema da Ração utilizado na Seção 2.5.

O *problema da dieta* é um exemplo de problema da mistura com algumas diferenças nas restrições. Nele precisamos escolher a melhor combinação de alimentos de modo a minimizar o custo total satisfazendo alguns requisitos nutricionais. Os alimentos comporão um cardápio sem limites de unidade, logo não há necessidade da restrição (2.6) e o sistema (2.5) geralmente são de inequações lineares, ou seja, a soma de um determinado nutriente na mistura tem um valor mínimo aceitável, trocando a igualdade por um sinal de desigualdade ($\leq$).

Em geral podemos aplicar o modelo do problema da mistura em diversas situações como o problema da dieta e o problema do sítio em Goldbarg e Luna (2005); o problema da ração e o problema das ligas metálicas em Arenales et al. (2011). Neles vemos situações em que teremos que maximizar a função objetivo em vez de minimizar, restrições de desigualdade e restrições adicionais como (2.6) ou a obrigação de termos componentes inteiros para a mistura, nesse caso, teríamos um modelo de PLI ou misto.

2.4.2 Problema do Transporte

Esses problemas envolvem quantidades de produtos que precisam ser transportadas, por exemplo, entre centros de produção e os galpões de armazenamento. O custo de transporte dos produtos deve ser proporcional à quantidade transportada e o objetivo é minimizar o custo total de transporte. As restrições são dadas pela demanda necessária de cada produto em cada destino e também pela quantidade de produto disponível na origem.

Para a modelagem, supondo que existam m origens e n destinos, definimos x_{ij} como a quantidade de produto que deverá ser transportada da origem i para o destino j e c_{ij} o seu respectivo custo de transporte. Além disso, sejam a_i a quantidade de produto disponível na origem i e de b_j a demanda pelo produto no destino j. Considerando que possamos escolher qualquer quantidade não negativa de produto para o transporte, temos o seguinte modelo matemático:

Minimizar:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.7}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Assim, o objetivo é a minimização do custo de transporte definido pela função (2.7). As restrições (2.8) impõem que as quantidades transportadas respeitarão a disponibilidade em cada origem. As restrições (2.8) garantem o atendimento da demanda de cada destino. Por último, as restrições (2.10) definem o domínio das variáveis.

2.4.3 Problema da Mochila

O problema da mochila é um dos mais importantes dos problemas de programação devido a ter um alto grau de relacionamento com vários outros modelos de programação (GOLDBARG; LUNA, 2005). O problema consiste em encher uma mochila com itens, cada um deles possui um valor de utilidade (lucro) proporcional a sua quantidade e o objetivo é maximizar a soma dessas utilidades (lucro total). Porém, cada item tem um peso (custo) associado e a mochila tem uma capacidade máxima a ser respeitada.

Considerando n itens a serem escolhidos, definiremos x_i como a quantidade do item i. Associados ao item i, teremos a sua utilidade c_i e o seu peso a_i. Assim, temos a seguir um modelo matemático para o problema da mochila.

Maximizar:

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{2.11}$$

Sujeito à:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b, \tag{2.12}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.13}$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

A função objetivo (2.11) do problema, também chamada de função utilidade, representa a utilidade total da mochila e deverá ser maximizada obedecendo à restrição (2.12) que representa a capacidade da mochila. Neste caso, assumimos as quantidades de itens inteiras e não-negativas definidas, respectivamente, pelas restrições (2.14) e (2.13) o que caracteriza o problema da mochila como um PLI.

Uma variação importante desse problema é o *problema da mochila 0-1*. Nesse problema não temos quantidades de itens para escolher apenas se colocaremos um item i na mochila (x_i assume 1) ou não (x_i assume 0). Neste caso, as restrições (2.14) devem ser substituídas por $x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \cdots, n$.

2.4.4 Problemas de corte e empacotamento

No contexto industrial, para atender à demanda de n peças com tamanhos variados, é necessário cortar um número de peças maiores de comprimento L em peças menores. Esse modo de produção acaba gerando uma perda de material pois, nem sempre os tamanhos demandados cobrirão todo o comprimento L da peça maior. Assim, o problema de corte consiste em decidir como efetuar os cortes de forma a atender as demandas pelas peças menores, minimizando essa perda ou minimizando o número de peças maiores necessárias. A fábrica de papel, por exemplo, geralmente produz uma bobina de papel num tamanho maior e corta o papel conforme a demanda para os tamanhos mais comuns: meia-carta, carta, ofício, ficha, tabloide, etc.

Podemos tratar de modo análogo ao problema de corte o problema de empacotamento. Este consiste em empacotar n itens de comprimentos variados, os quais deverão ser empacotados em contêineres (embalagens) de um tamanho L e devemos minimizar o espaço vazio (o que seriam as perdas num problema de corte) ou o número de contêineres necessários para o empacotamento de todos os itens.

Os problemas de corte e empacotamento podem considerar mais de uma dimensão do material a ser cortado (empacotado). Por exemplo, os problemas de corte de chapas de metal e de placas de madeira exemplificam problemas que consideram duas dimensões e os problemas de corte de blocos de espuma, empacotamento em paletes, em contêineres ou em caminhões são exemplos de problemas que consideram três dimensões. Para simplificar, o modelo apresentado nesta seção será o de corte unidimensional. Porém, os casos que consideram mais de uma dimensão também podem ser modelados (ARENALES et al., 2011).

Num problema de corte unidimensional uma peça de tamanho L deve ser cortada em peças menores de tamanho l_i escolhidas entre os m tamanhos demandados. Para o corte da peça é escolhido um padrão de corte $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij})$, onde a_{ij} representa a quantidade de peças do tipo i a ser cortada no padrão j. Como a peça do tipo i possui um comprimento l_i o tamanho total produzido num padrão de corte será $\sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij}$, para cada padrão j. Assim teremos inicialmente a seguinte restrição para os padrões de corte:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \leq L \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.15}$$

Onde os coeficientes a_{ij} são inteiros não-negativos. Supondo que existam n padrões de corte que satisfaçam a inequação (2.15), devemos escolher quantas peças deverão ser cortadas no padrão j. Definiremos, portanto, x_j como a variável que representa essa quantidade.

Seja b_i a quantidade demandada de peças do tamanho i, então as restrições (2.16) garantem das demandas de cada tipo de peça.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} xj = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.16}$$

O objetivo é a redução da quantidade de peças maiores utilizadas expressa por $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$. A partir dessas informações, podemos escrever um modelo do problema de corte e empacotamento da seguinte forma:

Minimizar

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, &\qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \in \mathbb{Z} \quad e \quad x_j \geq 0, &\qquad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Para exemplificar o modelo de corte veremos o exemplo abaixo do problema da gráfica proposto na página 54 do Capítulo 3.

Uma gráfica utiliza folhas de papel tamanho A4 para fazer dois tipos de cartões de visita, o tipo CV1 de dimensões 10 cm $\times$ 4 cm e o CV2 de dimensões 8 cm $\times$ 4 cm. Para fabricá-los, primeiro a gráfica corta o papel A4 em 7 tiras horizontais, no modo "retrato", de 21 cm$\times$ 4 cm e depois corta as tiras nos tamanhos dos cartões. A gráfica vende os cartões CV1 por R\$ 0,60 e o CV2 por R\$ 0,50. Ajude a gráfica a ter o melhor aproveitamento em uma única folha, sabendo que deve produzir, no mínimo, 5 cartões de cada tipo.

Para modelar o problema primeiro definiremos os padrões de corte. Nesse caso significa resolver o seguinte problema:

Maximizar:

$$w = a_1 + a_2$$

Sujeito a:

$$10a_1 + 8a_2 \leq 21,$$

$$a_1, a_2 \geq 0,$$

$$a_1, a_2 \in \mathbb{Z}.$$

Onde a_1 e a_2 representam as quantidades de cartões CV1 e CV2, respectivamente, e a restrição acima representa a restrição para os padrões de corte. Note que o problema acima trata-se de um Problema da Mochila.

Em nosso exemplo, devido às poucas possibilidades para os valores das variáveis, concluímos que os padrões de corte possíveis são $(a_1, a_2) \in \{(1, 1), (2, 0), (0, 2)\}$.

Conhecido os padrões de corte podemos agora construir o modelo do problema da gráfica:

Maximizar:

$$z = 1,1x_1 + 1,2x_2 + x_3$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 \geq 5,$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 5,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z},$$

No modelo, x_1 representa a quantidade de tiras cortadas no padrão $(1,1)$, x_2 a quantidade de tiras cortadas no padrão $(2,0)$,x_3 a quantidade de tiras cortadas no padrão $(0,2)$, z é a função objetivo que calcula a receita total obtida com os padrões de corte. As duas primeiras restrições tratam da demanda mínima de 5 cartões para cada tipo. A terceira restrição representa a quantidade máxima de padrões para uma única folha A4, no caso 7 tiras. As duas últimas restrições representam a não-negatividade e a integralidade das variáveis.

2.5 Métodos de Resolução

Esta seção irá abordar alguns métodos de resolução de Problemas de Programação Linear e Inteira. Nos preocuparemos aqui em resolver alguns exemplos e mostrar apenas a aplicação do método, sem aprofundar e procurando fazer uma discussão que seja compreensível ao nível do Ensino Médio, atendendo assim o objetivo deste trabalho. Mais detalhes sobre os métodos podem ser encontrados em Arenales et al. (2011) e Hillier e Lieberman (2013).

Primeiro apresentaremos o Método Gráfico, um método de resolução de problemas com duas variáveis. Trata-se de um método bastante didático pois utiliza conceitos geométricos simples para resolver o problema. Em seguida, veremos o Método Simplex, um método algébrico que determina a solução de problemas com mais de duas variáveis. Para os problemas de Programação Linear Inteira apresentaremos a enumeração completa, uma maneira de resolver problemas pequenos, de caráter mais ilustrativo, mas serve como base para a compreensão de um método mais eficiente, o último desta seção, o Método *Branch-and-Bound*.

2.5.1 Método Gráfico

Um problema de Programação Linear pode ser resolvido graficamente quando envolvem duas ou três variáveis. A ideia inicial é representar graficamente a região viável do problema definida pelas restrições. Depois, através das curvas de nível, identificar o crescimento (ou decrescimento) da função objetivo para então localizar o ponto da região viável em que o valor da função é máximo (ou mínimo). Para os problemas com 3 variáveis, a representação gráfica da região viável e da função objetivo no espaço 3D torna-se mais complexa. Optamos por ilustrar nesta seção apenas a resolução de um problema com duas variáveis pela facilidade de representação e de utilização da ferramenta gráfica computacional.

Apresentaremos o Método Gráfico a partir do seguinte exemplo de Problema de Programação Linear extraído da página 6 do artigo *Tópicos de pesquisa Operacional para Ensino Médio*, Neto (2009).

Problema da Ração

João decide investir na criação de galinha e, para obter um bom rendimento, deseja minimizar o custo da ração composta por milho e farelo de soja que custam respectivamente R$ 0,26 e R$ 0,32 o quilo. A recomendação nutricional é que a ração contenha, no mínimo, 0,34 Kg de proteínas e 2,64 Kg de carboidratos. Cada quilo de milho contém 0,07 Kg de proteína e 0,82 Kg de carboidratos, cada quilo e farelo de soja contém 0,21 Kg de proteína e 0,79 Kg de carboidratos. Como deve ser a composição da ração para que João atinga seu objetivo?

Utilizando o modelo do problema da mistura e as variáveis x_1 como a quantidade de milho e x_2 a quantidade de farelo de soja em quilos, temos um modelo a seguir para o problema.

Minimizar:

$$z = 0,26x_1 + 0,32x_2 \tag{2.17}$$

$$\tag{2.18}$$

Sujeito a:

$$0,07x_1 + 0,21x_2 \geq 0,34 \tag{2.19}$$

$$0,82x_1 + 0,79x_2 \geq 2,64 \tag{2.20}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{2.21}$$

No referido artigo a resolução gráfica do problema ficou como exercício. A seguir resolveremos o problema graficamente, passo a passo, utilizando a didática voltada para o aluno do Ensino Médio.

Solução Gráfica do Problema da Ração

O gráfico para a solução do problema terá dois eixos um para a variável x_1 e outro para a variável x_2. Em cada inequação das restrições (2.19) e (2.20) isolaremos x_2 e representaremos graficamente a reta e a área do gráfico cujos pontos (x_1, x_2) satisfazem as inequações, ou seja, são soluções das inequações.

$$x_2 \geq \frac{0,34 - 0,07x_1}{0,21} \tag{2.22}$$

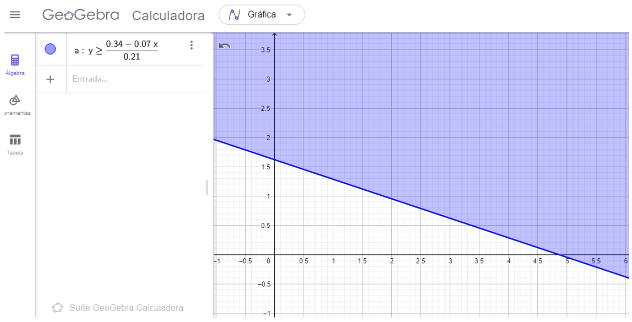
$$x_2 \geq \frac{2,64 - 0,82x_1}{0,79} \tag{2.23}$$

Para plotar os gráficos utilizamos a calculadora gráfica **GeoGebra** disponível em ⟨https://www.geogebra.org/calculator⟩(GEOGEBRA, 2014). Nele substituímos x_2 por y e x_1 por x e representamos a região do gráfico definida por (2.22) de azul, como mostra a Figura 2.3. Os pontos pertencentes a esta região são os pontos que satisfazem a restrição (2.19) do problema. Do mesmo modo, representamos pela cor vermelha a região do gráfico que satisfaz a restrição (2.20) do problema, conforme a Figura 2.4. A intersecção das duas regiões restrita ao primeiro quadrante do plano cartesiano, pois as restrições (2.21) definem a não negatividade das variáveis, representa a região viável[3] do problema, conforme mostra a Figura 2.5.

Uma vez definida a região viável, o próximo passo será encontrar a solução ótima, o ponto da região viável para o qual a função (2.17) é mínima. Para isso devemos identificar a direção que a função objetivo aumenta ou diminui (em nosso exemplo queremos que diminua pois,

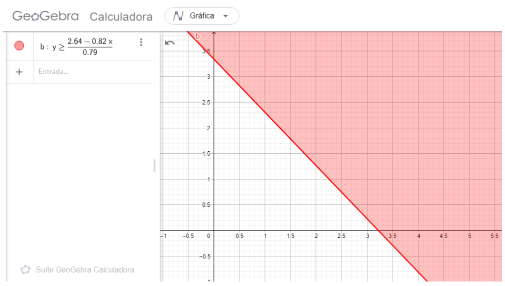
[3]Região do gráfico que contém todos os pontos na qual a as coordenadas (x, y) representam uma solução (x_1, x_2) que satisfaz as restrições do problema, onde $x = x_1$ e $y = x_2$.

Figura 2.3: Região de soluções da inequação (2.22).



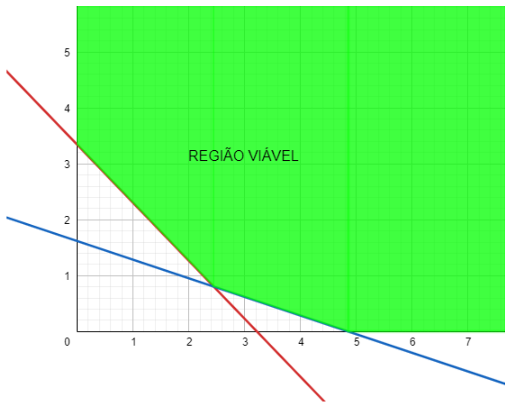
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.4: Região viável da inequação (2.23).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.5: Região viável para as restrições (2.19), (2.20) e (2.21).



Fonte: Elaborada pelo autor.

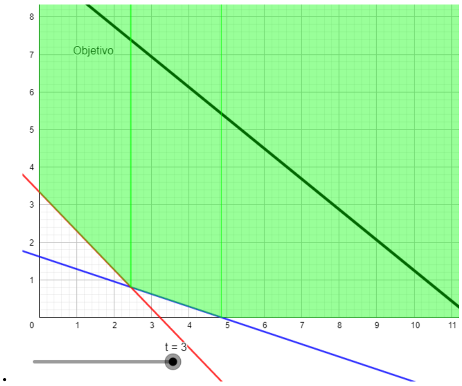
estamos resolvendo um problema de minimização). Assim, traçamos as *curvas de nível*[4] para alguns valores de z em (2.17).

Utilizamos a ferramenta *controles deslizantes* no Geogebra para identificar o decrescimento das curvas de nível, afim de atingir o valor mínimo de z em que a curva esteja tocando a região viável. Para isso, atribuímos um parâmetro t no lugar de z na função objetivo e fizemos t variar do valor 3 até 1. Assim plotamos as curvas de nível da função objetivo para $z = 3$, $z = 2$ e $z = 1$, respectivamente representadas pelas figuras 2.6, 2.7 e 2.8.

Pode-se perceber pelas curvas de nível que, conforme o valor da função objetivo diminui, a curva vai se aproximando do ponto de intersecção das retas base das restrições do problema. Esse ponto é um dos vértices da região viável. Um importante teorema da Programação Linear afirma que a solução ótima é sempre um ponto que está na fronteira da região viável, em especial, se o problema tiver solução única, as solução ótima será um vértice da região viável, conforme enunciado a seguir.

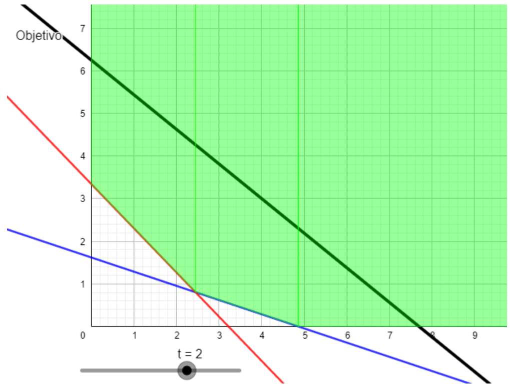
[4]Conjunto de pontos que estão associados ao mesmo valor da função objetivo.

Figura 2.6: Curva de nível, $z = 3$



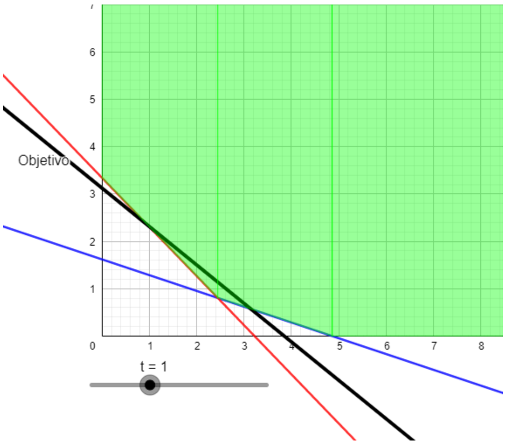
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.7: Curva de nível, $z = 2$



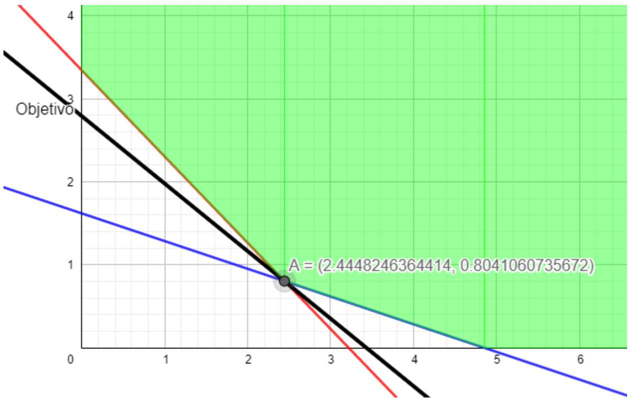
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.8: Curva de nível, $z = 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.9: Solução ótima



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 2.1 *Para problemas de programação linear com uma única solução ótima, a função objetivo atinge seu ponto de máximo ou mínimo em um ponto extremo da região viável.*

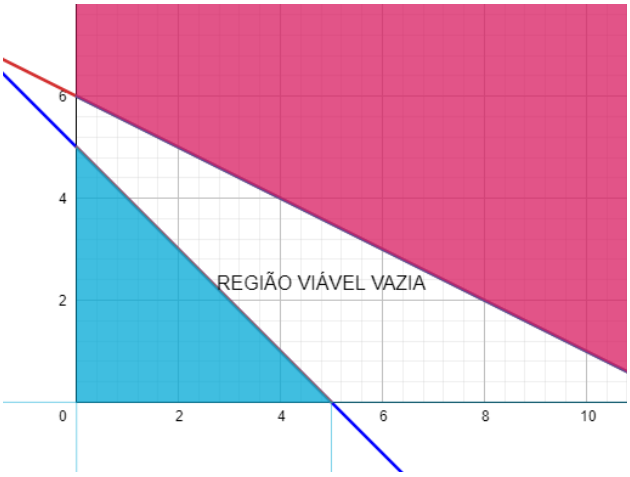
Portanto, pelo Teorema 2.1, para o Problema da Ração a solução ótima será o ponto de intersecção das retas $0,07x_1 + 0,21x_2 = 0,34$ e $0,82x_1 + 0,79x_2 = 2,64$ conforme a Figura 2.9. Algebricamente, resolvendo o sistema de equações chegamos a $x_1 \approx 2,445$ e $x_2 \approx 0,805$. Assim, João deverá utilizar 2,445 kg de milho e 0,805 kg de farelo de soja para obter o custo mínimo de R$ 0,8933 por quilo de insumos, cumprindo os requisitos mínimos de nutrição animal.

Uma observação importante no momento de levar a solução do modelo matemático para o problema real são os possíveis erros de arredondamento. Em nosso exemplo o arredondamento para cima das variáveis x_1 e x_2 buscou aproximar os valores calculados pelo Geogebra para a realidade do problema. Nesse momento faz-se necessário verificar se os novos valores aproximados ainda satisfazem às restrições do problema. Assim, para os valores $x_1 = 2,445$ e $x_2 = 0,804$ vemos que $0,07(2,445) + 0,21(0,805) = 0,3402 \geq 0,34$ e $0,82(2,445) + 0,79(0,805) = 2,64085 \geq 2,64$, portanto, a solução é válida.

O Método Gráfico nos ajuda a entender melhor o problema e visualizar situações possíveis. Um problema de PL pode ter uma solução ótima, como vimos no exemplo, mas também ocorrem situações em que não há soluções possíveis e casos com infinitas soluções.

Graficamente, no caso em que não há soluções, a região viável é vazia, como mostra a Figura 2.10. Nesse caso, não há pontos no gráfico que satisfaça todas as restrições do problema e o problema é inviável.

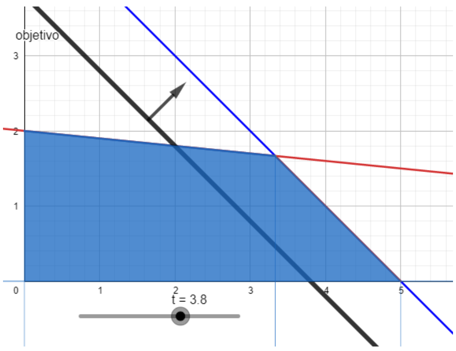
Figura 2.10: Região viável vazia



Fonte: Elaborada pelo autor.

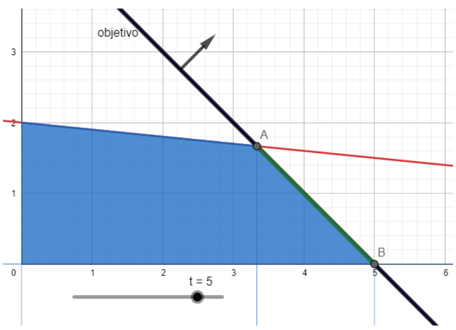
Nos problemas com infinitas soluções as curvas de nível da função objetivo serão paralelas a uma das retas base das restrições e, quando atingir o valor máximo (ou mínimo), será coincidente com um segmento que limita a região viável, definindo assim infinitos pontos ótimos. Na Figura 2.11 vemos a curva de nível e o sentido do seu crescimento, já na Figura 2.12 vemos a curva de nível coincidente com o segmento AB que limita a região viável e, nesse caso, todos os pontos pertencentes ao segmento AB são soluções ótimas do problema.

Figura 2.11: Curva de nível paralela ao segmento que limita a região viável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.12: Função objetivo atingindo valor máximo viável em todo segmento AB.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em geral, os problemas de PL possuem mais do que duas variáveis, o que torna inviável o Método Gráfico. Alguns problemas com três variáveis ainda podem ser resolvidos graficamente mas com grande dificuldade de visualização. Para resolvê-los, portanto, é necessário um método algébrico. Na próxima seção, apresentaremos o Método Simplex, um procedimento totalmente algébrico mas, segundo Hillier e Lieberman (2013), seus conceitos subjacentes são geométricos. Com base no Teorema 2.1 e outros conceitos geométricos, o método Simplex fará uma busca nos pontos extremos da região viável, aplicando em cada passo um teste até encontrar a solução ótima.

2.5.2 Método Simplex

Desenvolvido por George Dantzig em 1947, o Método Simplex é, até hoje, um dos métodos mais utilizados para solucionar problemas com grande dimensão de PL (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Além disso, ele pode ser base para o método *Branch-and-bound* que é um método de resolução de PLI.

O método simplex é um procedimento algébrico e iterativo que, partindo de uma *solução básica*, busca, a cada iteração, uma nova *solução básica viável* que melhore o valor da função objetivo, até encontrar o valor ótimo (FAVERO; BELFIORE, 2013). Para compreender o conceito de solução básica e solução básica viável, será preciso revisar Sistemas de Equações Lineares e sua forma matricial.

Em um sistema $Ax = b$, onde A é uma matriz $m \times n$, b é um vetor $m \times 1$ e x é o vetor $m \times 1$ das incógnitas x_i, $i = 1, \ldots, m$. Se $m = n$ e todas as m equações lineares forem "coerentes"[5], o sistema tem uma única solução. No caso em que $m > n$, pelo menos $m - n$ equações serão redundantes. Caso $m < n$ o sistema terá infinitas soluções.

Para encontrar uma solução em um sistema $Ax = b$, em que $m < n$, primeiramente escolhemos uma conjunto de $n - m$ variáveis de x, chamadas de *variáveis não básicas* (VNB) e atribuímos valores iguais a zero. As m variáveis restantes são chamadas de *variáveis básicas* (VB) e são determinadas resolvendo as m equações restantes. Essa solução com m variáveis básicas determinadas e $n - m$ variáveis não básicas com valores iguais a zero é chamada de *solução básica* (SB). Duas SB são ditas *adjacentes* se elas possuem $m - 1$ variáveis básicas em comum. Em um problema de PL uma solução básica é dita solução básica viável (SBV) se esta é satisfaz todas as restrições do problema.

Nesta seção apresentaremos um exemplo de problema de PL e resolveremos pelo método simplex seguindo um algoritmo proposto em Favero e Belfiore (2013), que descreveremos a seguir com algumas adaptações.

Algoritmo Simplex - Forma analítica

- **Início:** O problema deve estar na forma padrão.
- **Passo 1:** Encontrar uma solução básica viável (SBV) inicial para o problema de PL. Uma SBV inicial pode ser obtida atribuindo valores iguais a zero para $m - n$ variáveis de decisão. Para que essa solução seja viável, ela deve ser satisfazer todas restrições do problema.

[5]Ser coerente neste caso significa ser *linearmente independentes*. Conceitos de Álgebra Linear não serão abordados neste trabalho, para aprofundamento no assunto sugiro Hoffman e Kunze (1971).

- **Passo 2:** Teste de otimalidade. Uma SBV é ótima se não houver SBV adjacente melhor. Para investigar se existe uma SBV adjacente melhor verificamos o valor da função objetivo. Enquanto houver pelo menos uma das variáveis não básicas na função objetivo com coeficiente positivo, existe uma SBV adjacente melhor.

- **Iteração:** Determinar uma SBV adjacente melhor. Para escolher a SBV adjacente que melhore o resultado da função objetivo cumpriremos os seguintes passos:

  1. escolher a VNB que passará para o conjunto de variáveis básicas. Essa escolha é feita com base no coeficiente da VNB na função objetivo. Num problema de maximização escolhemos o maior coeficiente e no problema de minimização o menor;
  2. escolher a VB que passará para o conjunto de variáveis não básicas. A variável escolhida a sair da base será aquela que limita a crescimento da variável não básica escolhida no processo anterior;
  3. atualizar o sistema de equações pelo **método de eliminação de Gauss-Jordan** de modo que cada nova equação deve possuir apenas uma variável básica com coeficiente igual a 1, cada variável básica deve aparecer em apenas uma equação, e a função objetivo deve ser escrita em função das variáveis não básicas, de forma que os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo z possam ser obtidos diretamente e o teste de otimalidade possa ser verificado facilmente.

Graficamente o algoritmo simplex é um método consiste em investigar os pontos extremos da região viável. Veremos um exemplo de PL com duas variáveis resolvido pelo algoritmo simplex, de forma analítica, e o gráfico representando o "caminho" até a solução.

Seja o seguinte problema de PL:

Maximizar:

$$z = x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
0,4x_1 - 2x_2 &\leq 1,\\
0,8x_1 - 2x_2 &\leq 3,\\
3x_1 - x_2 &\leq 30,\\
2x_1 + 10x_2 &\leq 100,\\
-5x_1 + 10x_2 &\leq 30,\\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Ao inicializar o algoritmo o problema deve estar na forma padrão, para isso devemos transformar as desigualdades das restrições em igualdades introduzindo as variáveis de folga x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7 conforme abaixo:

Maximizar:

$$z = x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 0,4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 0,8x_1 - 2x_2 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 &= 30, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_6 &= 100, \\ -5x_1 + 10x_2 + x_7 &= 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Com o problema na forma padrão, iniciaremos o **Passo 1** do algoritmo escolhendo uma solução básica viável. Nesse caso, atribuindo zero para as variáveis x_1 e x_2 encontramos a SB inicial.

$$\begin{aligned} 0,4(0) - 2(0) + x_3 &= 1 & \Rightarrow x_3 = 1 \\ 0,8(0) - 2(0) + x_4 &= 3 & \Rightarrow x_4 = 3 \\ 3(0) - (0) + x_5 &= 30 & \Rightarrow x_5 = 30 \\ 2(0) + 10(0) + x_6 &= 100 & \Rightarrow x_6 = 100 \\ -5(0) + 10(0) + x_7 &= 30 & \Rightarrow x_7 = 30 \end{aligned}$$

Solução básica viável inicial $SBV_1 = (0; 0; 1; 3; 30; 100; 30)$ com função objetivo $z = 0$. Considerando apenas as variáveis originais do problema temos:

$$SBV_1' = (0; 0)$$

Passo 2: como o coeficiente das variáveis não básicas x_1 e x_2 na função objetivo são positivos devemos escolher qual das variáveis não básicas x_1 e x_2 vai entrar para base. Como essa escolha depende do coeficiente da VNB na função objetivo e, em nosso caso, ambas são iguais a 1, temos um caso de empate. Como qualquer caminho que escolher nos levará à outra solução e não há um método conveniente para prever qual escolha chegará primeiro, essa escolha deverá ser *arbitrária* (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Escolheremos portanto a variável x_1 para entrar na base.

Para a escolha da variável que vai sair da base devemos analisar as restrições do problema com $x_2 = 0$.

$$\begin{aligned} 0,4(x_1) - 2(0) + x_3 &= 1 & \Rightarrow x_3 = 1 - 0,4x_1 \\ 0,8(x_1) - 2(0) + x_4 &= 3 & \Rightarrow x_4 = 3 - 0,8x_1 \\ 3(x_1) - (0) + x_5 &= 30 & \Rightarrow x_5 = 30 - 3x_1 \\ 2(x_1) + 10(0) + x_6 &= 100 & \Rightarrow x_6 = 100 - 2x_1 \\ -5(x_1) + 10(0) + x_7 &= 30 & \Rightarrow x_7 = 30 + 5x_1 \end{aligned}$$

Sabendo que todas as variáveis devem obedecer à restrição de *não-negatividade* vamos encontrar a variável básica que mais limita o crescimento de x_1.

$$
\begin{array}{lll}
x_3 \geq 0 & \Rightarrow 1 - 0,4x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq 2,5 \\
x_4 \geq 0 & \Rightarrow 3 - 0,8x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq 3,75 \\
x_5 \geq 0 & \Rightarrow 30 - 3x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq 10 \\
x_6 \geq 0 & \Rightarrow 100 - 2x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq 50 \\
x_7 \geq 0 & \Rightarrow 30 + 5x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \geq -6
\end{array}
$$

Observe que a variável que mais limita o crescimento de x_1 é a variável x_3, pois caso x_1 assuma um valor estritamente maior que $2,5$, x_3 terá um valor negativo tornando a solução inviável. Portanto, x_3 será a variável a sair da base. As variáveis básicas agora serão x_1, x_4, x_5, x_6 e x_7 e as não básicas serão x_2 e x_3.

Devemos agora utilizar o processo de eliminação de gaussiana para atualizar o sistema de equações formado pelas restrições e pela função objetivo. Para isso, vamos organizá-la de uma forma conveniente para o processo.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
z & -x_1 & -x_2 & & & & & & = 0 \\
 & 0,4x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & & & = 1 \\
 & 0,8x_1 & -2x_2 & & +x_4 & & & & = 3 \\
 & 3x_1 & -x_2 & & & +x_5 & & & = 30 \\
 & 2x_1 & +10x_2 & & & & +x_6 & & = 100 \\
 & -5x_1 & +10x_2 & & & & & +x_7 & = 30
\end{array} \tag{2.24}
$$

O processo de eliminação deve manter a variável que vai entrar na base apenas em uma equação (a que possui também a variável que vai sair da base) e com o coeficiente igual a 1. Para fazer isso, localizamos a equação que possui as variáveis que irão trocar de lugar, nesse caso, a segunda equação e dividimos a por $0,4$ para que o coeficiente de x_1 seja igual a 1, depois eliminaremos x_1 de cada uma das outras equações. O processo está descrito abaixo, onde L_i significa a linha i no sistema (2.24).

$$
\begin{array}{lll}
L_1 & = & L_1 + \dfrac{L_2}{0,4} \\
L_2 & = & \dfrac{L_2}{0,4} \\
L_3 & = & L_3 - (0,8)\dfrac{L_2}{0,4} \\
L_4 & = & L_4 - 3\dfrac{L_2}{0,4} \\
L_5 & = & L_5 - 2\dfrac{L_2}{0,4} \\
L_6 & = & L_6 + 5\dfrac{L_2}{0,4}
\end{array}
$$

Após o processo, temos como resultado o novo sistema de equações (2.25) atualizado, de modo que podemos fazer o teste de otimalidade indicado no **Passo 2** do algoritmo simplex.

$$\begin{array}{rrrrrrrl} z & & -6x_2 & +2,5x_3 & & & & = 2,5 \\ & x_1 & -5x_2 & +2,5x_3 & & & & = 2,5 \\ & & 2x_2 & -2x_3 & +x_4 & & & = 1 \\ & & 14x_2 & -7,5x_3 & & +x_5 & & = 22,5 \\ & & 20x_2 & -5x_3 & & & +x_6 & = 95 \\ & & -15x_2 & +12,5x_3 & & & +x_7 & = 42,5 \end{array} \tag{2.25}$$

A solução do sistema (2.25) é $SBV_2 = (2,5; 0; 0; 1; 22,5; 95; 42,5)$, onde $(x_2; x_3) = (0; 0)$, pois são as variáveis não básicas. Novamente, considerando apenas x_1 e x_2, as variáveis originais do problema:

$$SBV_2' = (2,5; 0).$$

No **Passo 2** do algoritmo, precisamos verificar os coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo. Na primeira linha do sistema (2.25), os coeficientes das variáveis estão com o sinal trocado. O que significa que valores negativos estão contribuindo para o incremento da função objetivo. Vemos que a variável x_2 possui coeficiente igual a -6. Logo, ainda existe SBV adjacente melhor e seguimos para uma nova iteração.

Como o coeficiente de x_2 na primeira linha do sistema atualizado é negativo e é o menor coeficiente dentre as variáveis não básicas, x_2 deverá entrar na base.

Para o segundo passo da iteração, no lugar de desenvolver as equações explicitamente e usar a restrição de não negatividade para localizar a VB que mais limita o crescimento da VNB que deverá entrar, vamos usar o *teste da razão mínima* equivalente, que resume esse processo (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

1. Selecione cada coeficiente da VB que irá sair nas equações de restrição e que seja estritamente positivo (> 0).

2. Para cada equação de restrição, divida o termo independente pelo respectivo coeficiente da VB selecionado no passo anterior.

3. Identifique a equação que possui a menor das razões.

4. A variável básica dessa equação será a que deverá sair da base.

Seguindo esse teste encontramos a menor razão em $\frac{1}{2}$, na terceira linha do sistema (2.25), onde a variável x_4 é a VB que deverá sair da base para a entrada de x_2. Seguimos, portanto, ao terceiro passo da iteração.

Novamente devemos atualizar o sistema (2.25) utilizando o processo de eliminação. Suprimiremos os cálculos do processo, que se dá de modo análogo ao da primeira iteração, e apresentamos o novo sistema (2.26) atualizado.

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} z & & & -3,5x_3 & +3x_4 & & & & = 5,5 \\ & x_1 & & -2,5x_3 & +2,5x_4 & & & & = 5 \\ & & x_2 & -1x_3 & +0,5x_4 & & & & = 0,5 \\ & & & 6,5x_3 & -7x_4 & +x_5 & & & = 15,5 \\ & & & 15x_3 & -10x_4 & & +x_6 & & = 85 \\ & & & -2,5x_3 & +7,5x_4 & & & +x_7 & = 50 \end{array} \tag{2.26}$$

A nova solução básica viável para o problema é $SBV_3 = (5; 0,5; 0; 0; 15,5; 85; 50)$. Considerando apenas as variáveis originais do problema x_1 e x_2, temos:

$$SBV_3' = (5; 0,5).$$

Mas ainda há SBV adjacente melhor, pois temos uma variável não básica com coeficiente positivo na função objetivo (lembrando que no sistema (2.26) o sinal está trocado). No caso, será a variável x_3 que entrará na base. Assim prosseguimos para mais uma iteração do Método Simplex.

Utilizando novamente o teste da razão mínima, vemos que x_5 será a variável que deixará a base para a entrada de x_3. No terceiro passo da iteração, atualizando o sistema (2.26), temos no novo sistema:

$$\begin{array}{lllllllll} z & & & & -\frac{10}{13}x_4 & +\frac{7}{13}x_5 & & & = \frac{180}{13} \\ & x_1 & & & -\frac{5}{26}x_4 & +\frac{5}{13}x_5 & & & = \frac{285}{26} \\ & & x_2 & & -\frac{15}{26}x_4 & +\frac{2}{13}x_5 & & & = \frac{75}{26} \\ & & & x_3 & -\frac{14}{13}x_4 & +\frac{2}{13}x_5 & & & = \frac{31}{13} \\ & & & & \frac{80}{13}x_4 & -\frac{30}{13}x_5 & +x_6 & & = \frac{640}{13} \\ & & & & \frac{125}{26}x_4 & +\frac{5}{13}x_5 & & +x_7 & = \frac{1455}{26} \end{array} \tag{2.27}$$

Resolvendo o sistema, onde x_4 e x_5 são iguais a zero (VNB), encontramos a solução $SBV_4 = (\frac{285}{26}; \frac{75}{26}; \frac{31}{13}; 0; 0; \frac{640}{13}; \frac{1455}{26})$, ou utilizando apenas as variáveis originais do problema:

$$SBV_4' = \left(\frac{285}{26}; \frac{75}{26}\right).$$

Ainda devemos prosseguir com mais uma iteração pois, a variável x_4 possui coeficiente positivo na função objetivo. Agora, veremos que a variável a sair da base será x_6 e, após a atualização do sistema (2.27), temos uma nova solução básica viável a seguir.

$$\begin{array}{lllllllll} z & & & & & +\frac{1}{4}x_5 & +\frac{1}{8}x_6 & & = 20 \\ & x_1 & & & & +\frac{5}{16}x_5 & +\frac{1}{32}x_6 & & = \frac{25}{2} \\ & & x_2 & & & -\frac{1}{16}x_5 & +\frac{3}{32}x_6 & & = \frac{15}{2} \\ & & & x_3 & & -\frac{1}{4}x_5 & +\frac{7}{40}x_6 & & = 11 \\ & & & & x_4 & -\frac{3}{8}x_5 & +\frac{13}{80}x_6 & & = 8 \\ & & & & & \frac{35}{16}x_5 & -\frac{25}{32}x_6 & +x_7 & = \frac{35}{2} \end{array} \tag{2.28}$$

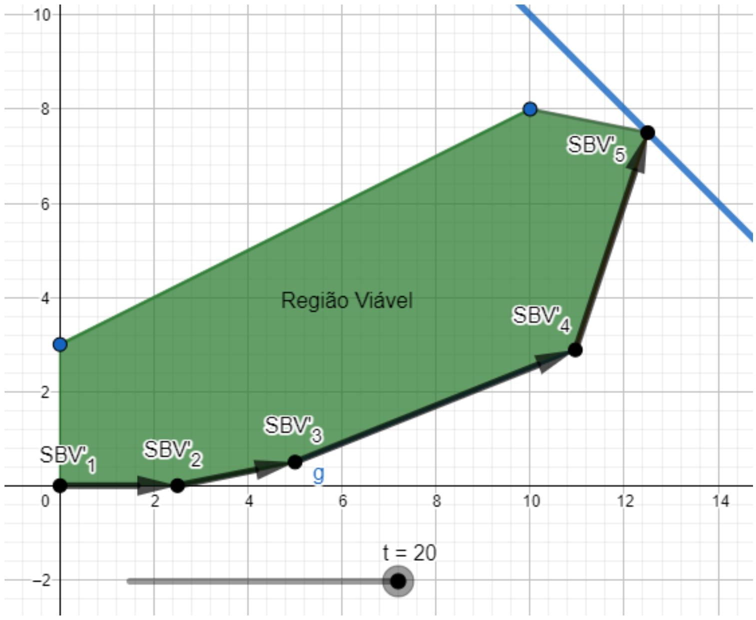
Dessa última iteração, temos a seguinte solução $SBV_5 = \left(\frac{25}{2}; \frac{15}{2}; 11; 8; 0; 0; \frac{35}{2}\right)$ ou escrita apenas com as variáveis originais do problema:

$$SBV_5' = \left(\frac{25}{2}, \frac{15}{2}\right).$$

Por fim, com a nova configuração da solução, nenhuma das variáveis não básicas x_5 e x_6 possuem coeficiente positivo na função objetivo. Não há, portanto, solução básica adjacente melhor e chegamos ao valor máximo da função objetivo $z = 20$.

A Figura 2.13 mostra graficamente o caminho do Algoritmo Simplex para o nosso exemplo. A linha azul representa a função objetivo atingindo o máximo no parâmetro $t = 20$. As

Figura 2.13: Ilustração do Algoritmo Simplex.



Fonte: Elaborada pelo autor.

setas indicam o caminho de cada iteração do algoritmo. Foram quatro iterações partindo da solução básica viável inicial SBV_1' até chegar na solução ótima SBV_1'.

Uma observação importante é que, no momento do empate, na escolha da primeira VNB que deve entrar para base, caso escolhêssemos a variável x_2, o caminho seria pela parte superior da região viável e teríamos uma iteração a menos no processo.

Problemas com maior número de variáveis requer uma quantidade extensa de cálculo algébricos[6] e aritméticos, necessitando portanto do uso de ferramentas computacionais.

Mostraremos o exemplo[7] de problema de PL que resolvemos com ajuda da ferramenta online **PHPSimplex** disponível no site ⟨http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=pt⟩http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=pt (GRANJA; RUIZ, 2006).

[6]Para problemas com mais variáveis é indicado o algoritmo simplex na **Forma Tabular** que dispensa manipulações algébricas e simplifica os cálculos aritméticos.

[7]Exemplo modelado a partir do exercício 5, página 9, do Minicurso: Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio, (NETO, 2009)

Exemplo:

Minimizar:

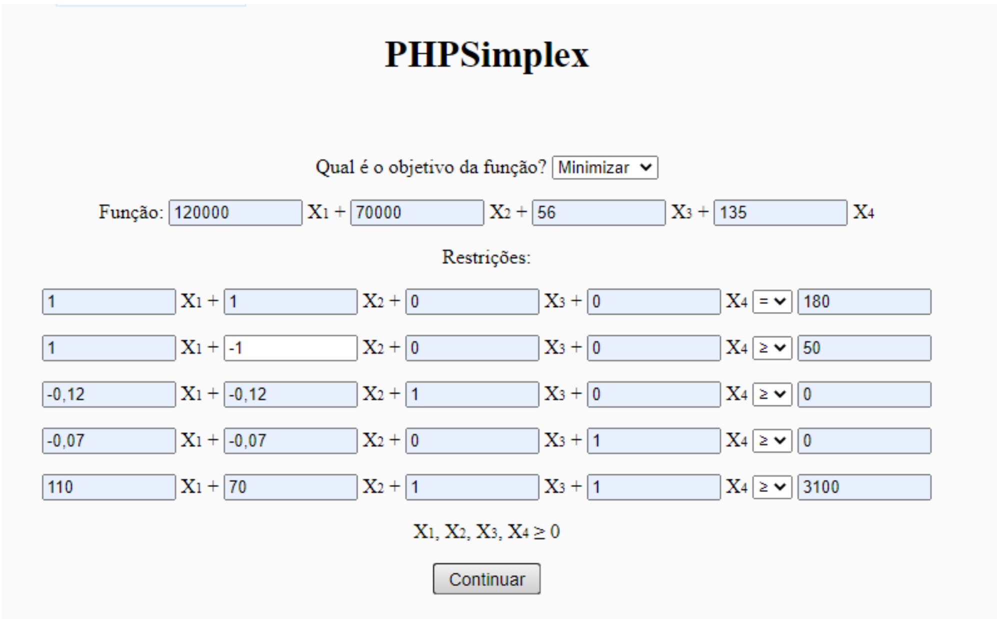
$$z = 120000x_1 + 70000x_2 + 56x_3 + 135x_4$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 180 \\
x_1 - x_2 &\geq 50 \\
-0,12x_1 - 0,12x_2 + x_3 &\geq 0 \\
-0,07x_1 - 0,07x_2 + x_4 &\geq 0 \\
110x_1 + 70x_2 + x_3 + x_4 &\geq 3100 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Na primeira página do PHPSImplex devemos informar o método de resolução (Simplex ou gráfico), quantas variáveis tem o problema e quantas restrições. Clicando em continuar aparecem os campos para colocar os coeficientes das variáveis e o termo independente das restrições, como mostra a Figura 2.14 já com os valores preenchidos do nosso exemplo.

Figura 2.14: Dados do problema incluído no PHPSimplex.

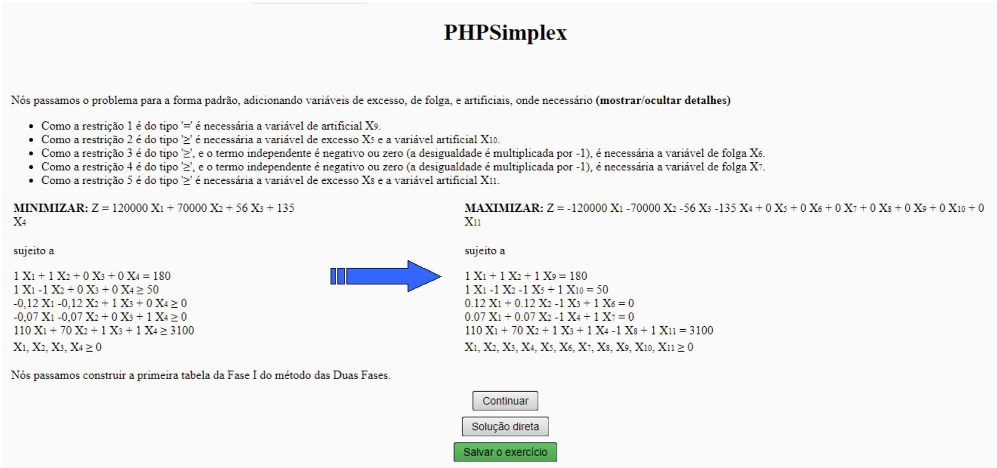


Fonte: Obtido a partir do PHPSimplex

Ao clicar em continuar o programa transforma o problema na forma padrão, informando o motivo da inclusão de cada variável de folga, e oferece três opções: continuar, que vai mostrando cada iteração do Algoritmo Simplex; solução direta, que apresenta a solução ótima do problema (se houver); e salvar o exercício. Veja na Figura 2.15 nosso exemplo na forma padrão com a inclusão de 7 variáveis de folga.

Clicando em continuar o método apresentado é a forma Tabular do Simplex e é possível acompanhar cada iteração, visualizando qual variável entra e sai da base.

Figura 2.15: Transformação do problema na forma padrão no PHPSimplex



Fonte: Obtido a partir do PHPSimplex

Em nosso exemplo a solução ótima é encontrada após 6 iterações com $z = 18352910,6$ e $x_1 = 115$, $x_2 = 65$, $x_3 = 21,6$ e $x_4 = 12,6$.

Na próxima seção veremos duas possibilidades para resolver problemas de Programação Linear Inteira. Para esses problemas, as possíveis soluções são pontos discretos dentro de uma região viável delimitada por um PL. A dificuldade na resolução desses problemas está diretamente relacionada à característica combinatória, ou seja, o número de possíveis soluções que devem ser levadas em consideração para obter a solução ótima.

2.5.3 Enumeração Completa

Existem diversas técnicas desenvolvidas para busca da solução inteira de um problema de PLI, técnicas de enumeração, métodos de planos de corte, técnicas híbridas, por exemplo. Dentre as técnicas de enumeração está o método *Branch-and-Bound* que trataremos na próxima seção. Mas para compreender melhor método devemos compreender o processo de enumeração de um problema de PLI.

Tomemos como exemplo um problema da mochila da seguinte forma[8]:

Maximizar:

$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$

Sujeito a:

$$400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500$$

$$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3$$

Considerando os limites de restrição podemos definir os valores inteiros possíveis para cada variável. Como $x_1 \geq 0$ e $x_1 \leq \frac{1500}{400}$ valor máximo para a variável é 3. Portanto, temos quatro possibilidades para x_1: $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_1 = 3$.

[8]adaptado do Problema do Vendedor no Semáforo (NETO, 2009)

Ao analisar os valores possíveis para as outras variáveis, em cada uma das possibilidades para x_1, obtemos todas as combinações possíveis e os respectivos valores da função objetivo conforme listados na Tabela 2.1.

x_1	x_2	x_3	z
3	0	0	**1,5**
2	1	0	**1,4**
2	0	1	**1,6**
2	0	0	**1,0**
1	2	0	**1,3**
1	1	1	**1,5**
1	1	0	**0,9**
1	0	2	**1,7**
1	0	1	**1,1**
1	0	0	**0,5**
0	3	0	**1,2**
0	2	1	**1,4**
0	2	0	**0,8**
0	1	2	**1,6**
0	1	0	**0,4**
0	0	1	**0,6**
0	0	0	**0**

Tabela 2.1: Tabela de enumeração completa

Após a enumeração completa dos possíveis valores das variáveis, podemos verificar a solução ótima $(x_1; x_2; x_3) = (1; 0; 2)$ com $z = 1,7$. Observe que a solução desse problema sem a restrição de integralidade das variáveis seria $(x_1; x_2; x_3) = (3,75; 0; 0)$. Uma aproximação indevida poderia induzir ao erro de sugerir $(3; 0; 0)$ como solução ótima.

A enumeração completa foi possível nesse exemplo devido à quantidade pequena de variáveis e à grande limitação dos seus valores possíveis. Caso tivéssemos a seguinte restrição para o problema:

$$400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 15000$$

. Nesse caso, os possíveis valores inteiros de x_1, seriam entre 0 e $\frac{15000}{400} = 37,5$, ou seja, teríamos 38 possibilidades apenas para x_1. A enumeração completa poderia chegar a uma quantidade de $38 \times 39 \times 28 = 41.496$ possibilidades.

Logo, é evidente que o espaço de soluções viáveis de um PLI pode ser demasiadamente grande e a Enumeração Completa será uma estratégia impraticável. Neste caso, uma técnica de resolução bastante utilizada é um método de enumeração inteligente, o *Branch-and-Bound*, que busca por pontos que sejam possíveis candidatos a solução ótima, sem que precise enumerar todas as soluções viáveis antes.

2.5.4 *Branch-and-Bound*

Nesta seção, faremos uma breve abordagem sobre o método *Branch-and-Bound* (B&B)

a partir de um exemplo, mais detalhes teóricos podem ser encontrados em Arenales et al. (2011) ou em Hillier e Lieberman (2013).

O método *Branch-and-Bound* consiste em, inicialmente, "relaxar" o problema de PLI para um problema de Programação Linear, retirando a restrição de integralidade sobre as variáveis inteiras. Em seguida, resolvemos esse problema, agora de PL, utilizando o Algoritmo Simplex. A partir dessa solução é criado dois novos subproblemas, escolhendo uma variável inteira cujo valor na solução encontrada com a resolução do problema relaxado não foi inteira e introduzindo uma restrição em cada um deles. As restrições impostas deverão limitar o valor da variável aos valores inteiros mais próximos do valor obtido a partir problema relaxado. Na sequência, aplica-se o mesmo procedimento nos subproblemas obtidos.

Ao longo da resolução dos subproblemas relaxados, é utilizado um critério baseado em dois limitantes obtidos para a função objetivo do problema de PLI que determinará se um subproblema será dividido em outros dois ou não. Um desses limitantes pode ser fornecido pela relaxação do problema e o outro pode ser obtido pelas soluções inteiras encontradas com a resolução dos problemas relaxados ao longo do procedimento. Dado que o objetivo aqui é apenas uma apresentação breve do método, não aprofundaremos sobre esse assunto.

Para uma simples ilustração do funcionamento do *Branch-and-Bound*, resolveremos o exemplo apresentado na Seção 2.5.3. Primeiro faremos a relaxação do problema retirando a restrição de integralidade das variáveis inteiras criando o novo problema de PL que chamaremos de P_0.

P_0 Maximizar:

$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$

Sujeito a:

$$400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.$$

Utilizando a ferramenta PHPSimplex encontramos a seguinte solução ótima para P_0:

$$S_0 = (3,75; 0; 0)$$

$$z_0 = 1,875$$

Agora escolhemos a variável x_1 para criar dois novos problemas a partir do P_0:

- P_1, com o acréscimo da restrição $x_1 \leq 3$

  P_1: Maximizar:

  $$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$

  Sujeito a:

  $$400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500,$$

  $$x_1 \leq 3,$$

  $$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.$$

- P_2, com o acréscimo restrição $x_1 \geq 4$.

  P_2: Maximizar:
$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$
  Sujeito a:
$$400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500,$$
$$x_1 \geq 4,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

O problema P_2 é inviável, visto que $x_1 \geq 4 \Rightarrow 400x_1 \geq 1600$ o que ultrapassa a primeira restrição, pois os valores de x_2 e x_3 são estritamente positivos.

Portando, precisamos resolver apenas o problema P_1 utilizando o algoritmo simplex. Utilizando o PHPSimplex, a solução ótima para P_1 foi:
$$S_1 = (3; 0; 0,5454...)$$
$$z_1 = 1,827272...$$

Devemos agora limitar a variável x_3 e criaremos dois novos subproblemas a partir de P_1:

- P_3, com o acréscimo da restrição $x_3 = 0$.

  P_3: Maximizar:
$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$
  Sujeito a:
$$400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500,$$
$$x_1 \leq 3,$$
$$x_3 = 0,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

- P_4, com o acréscimo da restrição $x_3 \geq 1$.

  P_4: Maximizar:
$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$
  Sujeito a:
$$400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500,$$
$$x_1 \leq 3,$$
$$x_3 \geq 1,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

O problema P_3 possui solução ótima em, aproximadamente, $S_3 = (3; 0,769; 0)$ com $z_3 = 1,8077$. O problema P_4 possui solução ótima em $S_4 = (2,375; 0; 1)$ com $z_4 = 1,7875$.

Nesse caso, os dois problemas podem gerar outros subproblemas. Qual deles devemos dividir primeiro é uma escolha estratégica. Existem várias técnicas para escolher o "caminho" dessas ramificações dos problemas, por exemplo, a busca em profundidade e busca em largura. Ao final da seção ilustraremos a diferença dessas duas técnicas, seguiremos em profundidade e dividiremos o problema P_4 que mantém a variável x_3 com duas possibilidades inteiras ao contrário de P_3 que limita seu valor a 0.

O problema P_4 deverá ser dividido em dois problemas P_5, com restrição adicional de $x_1 \leq 2$, e P_6, com restrição adicional de $x_1 \geq 3$. Mas P_6, com a restrição $x_1 \geq 3$, limita as outras variáveis a 0, resolveremos apenas o problema P_5.

P_5: Maximizar:

$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500&,\\ x_1 \leq 2&,\\ x_3 \geq 1&,\\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3&. \end{aligned}$$

A solução ótima de P_5 é $S_5 = (2; 0; 1,27272...)$, com $z_5 = 1,76363...$.

Como ainda temos solução com valores reais devemos continuar a divisão. O problema P_5 será dividido em dois problemas: P_7, com a restrição adicional de $x_3 \leq 1$, e P_8, com restrição adicional de $x_3 \geq 2$.

P_7: Maximizar:

$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500&,\\ x_1 \leq 2&,\\ x_3 = 1&,\\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3&. \end{aligned}$$

P_8: Maximizar:

$$z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3$$

Sujeito a:

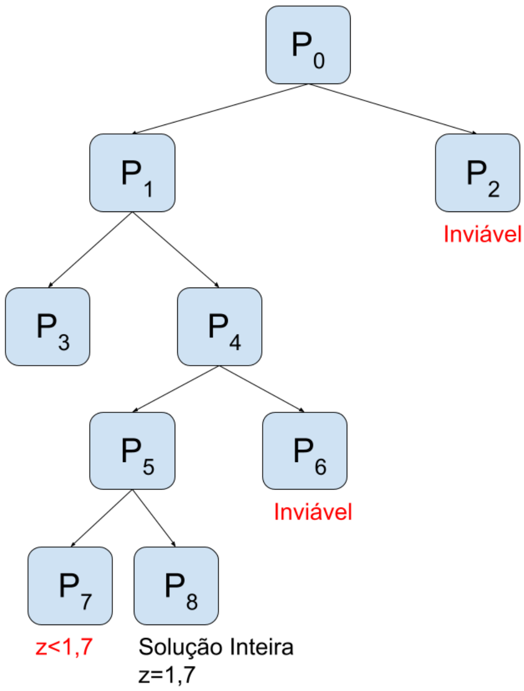
$$\begin{aligned} 400x_1 + 390x_2 + 550x_3 \leq 1500&,\\ x_1 \leq 2&,\\ x_3 \geq 2&,\\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3&. \end{aligned}$$

Note que a restrição adicional de $x_3 \leq 1$ em P_7, junto com a restrição anterior $x_3 \geq 1$ que havia em P_5, obrigou a variável a assumir o valor $x_3 = 1$. Também, em P_8 a restrição adicional $x_3 \geq 2$ se sobrepõe à restrição anterior $x_3 \geq 1$ em P_5.

Resolvendo P_7 encontramos a solução $S_7(2; 0,3846; 1)$ com $z_7 = 1,753846$ e resolvendo P_8 encontramos a solução $S_8 = (1; 0; 2)$ com $z_8 = 1,7$.

A solução $S_8 = (1; 0; 2)$ do problema P_8 é inteira e satisfaz o problema original. O problema P_7 não possui solução inteira e poderia ser dividido em dois novos problemas, P_9 e P_{10}, adicionando a restrição $x_2 = 0$ e a restrição $x_2 \geq 1$. Mas a primeira leva à mesma solução de P_8 ($S_9 = S_8$) e a segunda restrição gera um problema com solução ótima e $z_{10} = 1,6125 < z_8$, o que não melhora o resultado. Guardamos, portanto, a solução do subproblema P_8 como um limitador, outras soluções inteiras que não melhorem o valor de z são descartadas.

Figura 2.16: Árvore de enumeração - *Branch-and-Bound*



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 2.16 mostra a árvore de enumeração inteligente até a solução ótima de acordo com o método *Branch-and-Bound* e utilizando a técnica de busca em profundidade. O problema P_3 ficou aguardando devido essa estratégia. Para garantir a escolha da melhor solução devemos voltar até ele e resolver os sub-problemas gerados a partir dele. Para não estender o conteúdo dessa seção, os cálculos não foram aqui descritos mas, a resolução desses subproblemas não melhoram o valor da função z e, portanto, S_8 é a solução ótima do problema. Veja que a solução $(1; 0; 2)$ é a mesma encontrada na enumeração completa da seção 2.5.3.

Capítulo 3

Proposta para o Ensino

Como sugerimos no final do Capítulo 1, a Programação Linear e Inteira pode ser utilizada no Ensino Médio como um curso à parte da disciplina de Matemática, sendo abordada como uma disciplina eletiva que estará inserida no itinerário normativo da área de Matemática e suas tecnologias no contexto do Novo Ensino Médio.

Com base nas ementas das disciplinas eletivas divulgadas pela Secretaria de Educação do Estado da Bahia no portal da Jornada Pedagógica 2021, disponível em jornadapedagogica.educacao.ba.gov.br, e em ementas de disciplinas divulgadas em outros estados[1], elaboramos as três disciplinas eletivas a serem ofertadas para turmas de 1º, 2º e 3º ano, respectivamente, apresentadas nas seções seguintes. A carga horária está baseada no Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) (BAHIA, 2021), que estipulou 40 horas para o 1º ano e 80 horas para os anos seguintes. O planejamento será dividido em três unidades como está previsto para o ano letivo do Ensino Médio no Estado da Bahia. As disciplinas deverão, preferencialmente, serem encadeadas, visando assim um aprofundamento do Itinerário Formativo escolhido pelo aluno, porém o professor poderá ministrar a segunda e a terceira sem pré-requisitos, considerando que possuem abordagens diferentes sobre o mesmo tema.

Ao final de cada seção apresentamos um Plano Descritivo para a disciplina eletiva de acordo com a estrutura proposta pelo DCRB (BAHIA, 2021).

3.1 Disciplina Eletiva 1

Para a primeira unidade da disciplina, devemos introduzir os conceitos de otimização e linearidade com a apresentação de problemas motivadores. Esses problemas devem ser simples, de duas variáveis, como o Problema da Ração apresentado na Seção 2.5.1. O professor deve sugerir o problema e aguardar que os alunos criem estratégias para a solução, inicialmente concentrando os esforços na modelagem do problema, destacando as propriedades de proporcionalidade, aditividade e divisibilidade, características em problemas de PL. A partir da modelagem do problema inicial outros problemas similares deverão também ser modelados e os problemas propostos devem ressaltar a importância da modelagem matemática. Além de exercitar a modelagem de problemas, o professor também precisará reforçar com os alunos as manipulações algébricas com equações e inequações lineares através de exercícios

[1]SÃO PAULO (2021) e CEARÁ (2021)

de fixação. Esse momento inicial culminará com a apresentação histórica da Programação Linear e, para situar os alunos sobre a importância da matemática no período da Segunda Guerra e o período pós-guerra, recomendamos a exibição do filme *O jogo da imitação* (2014) do diretor *Morten Tyldum*. O tempo proposto para essa fase inicial da disciplina são de 10 horas.

A segunda unidade estará voltada apenas para o software GeoGebra. Utilizaremos a calculadora gráfica do software para plotagem de gráficos, sendo necessários computadores com acesso à internet ou apenas com o software GeoGebra instalado. Também existe a possibilidade do aluno fazer uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra. As aulas iniciais deverão ser para familiarização com o ambiente e experimentação com plotagens de funções lineares e orientações para o uso de funções básicas do programa. Em seguida, um estudo para a representação gráfica das soluções de inequações e sistemas de inequações lineares. Listas de exercícios e apresentações em sala de aula devem ser as atividades preferenciais para essa fase. O aluno deve se familiarizar com a ferramenta, alterando preferências, exibindo e ocultando gráficos e regiões de inequações. Exercícios finais de avaliação devem explorar a habilidade do aluno em modelagem de problemas e agora a representação gráfica desses modelos. A carga horária proposta para a segunda unidade será de 10 horas.

A última parte da disciplina será o momento em que o aluno aprenderá a resolver os problemas modelados na primeira unidade. O professor deverá voltar aos problemas sugeridos no começo do ano e solucioná-los com a ajuda da ferramenta gráfica. Agora os alunos podem visualizar a região e deverão plotar o gráfico da função objetivo do problema assumindo valores diversos. A princípio o professor deve testar a curiosidade do aluno e deixar que eles identifiquem o sentido para onde querem levar a função objetivo, ou seja, o sentido onde a maximiza ou a minimiza, de modo a encontrar a solução ótima, se houver. O professor deve explorar todas as possibilidades de um problema de Programação Linear, os casos com solução única, com infinitas soluções, sem solução viável e os casos em que a função objetivo cresce (ou decresce) ilimitadamente. Um ponto de atenção para o professor, nesse momento, é retomar o resultado encontrado ao problema original, validando sua resposta e confirmando o sucesso do modelo proposto para o problema. Uma proposta de avaliação final para a disciplina é o estudo de caso e tomada de decisão em uma empresa a partir de um problema de PL. O professor pode criar uma empresa fictícia e sugerir um problema de PL ou pedir aos alunos que modelem um problema de seu cotidiano como um modelo de PL, resolvê-lo e apresentar sua solução pelo método gráfico, utilizando o GeoGebra. Dessa forma atinge-se o objetivo de que os alunos trabalhem com problemas do seu contexto. Aqui sim, promoverá a pesquisa, a investigação matemática. Também é interessante discussões para destacar as vantagens obtidas com o resultado. A carga horária para a última unidade será de 20 horas.

Para elaboração dos planos de aula sugerimos ao professor a utilização de problemas propostos em Silva (2016), Lopes (2017), Palomo (2018), Zachi (2016) e Hernandez (2017). Além dos problemas de PL, em Neto (2009) o professor encontra um breve histórico sobre Pesquisa Operacional e, em Almeida (2015), uma apostila com uma introdução ao conceito de otimização direcionado ao aluno do Ensino Médio.

Com base no texto apresentado, elaboramos o Plano Descritivo para a disciplina eletiva do 1º ano do Ensino Médio.

Plano Descritivo

- **Título:** Introdução à Programação Linear.

- **Resumo:** Esta disciplina busca apresentar conceitos de otimização e linearidade por meio da modelagem e resolução de problemas de Programação Linear, utilizando o software GeoGebra. Pretende-se trabalhar com os alunos as habilidades de modelagem, representação e solução de problemas pelo método gráfico.

- **Área do conhecimento:** Matemática e suas tecnologias.

- **Habilidades:** Relacionadas na BNCC pelos códigos EM13MAT101, EM13MAT301, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT405, EM13MAT501 e EM13MAT510.

- **Objetos do conhecimento:** Modelagem matemática. Plano Cartesiano. Representação gráfica de funções lineares. Representação gráfica de inequações lineares. Inequação. Sistemas de equações lineares. Solução de sistemas de inequações lineares. Curvas de nível. Maximização e Minimização de funções.

- **Objetivos gerais:** Apresentar aos estudantes conhecimentos sobre Programação Linear e sua história visando fortalecer conteúdos da base comum. Ensinar os alunos a utilizar o software GeoGebra para plotagem de gráficos. Resolver problemas de Programação Linear com duas variáveis pelo método gráfico.

- **Objetivos específicos:** Fortalecer conhecimentos sobre equação, inequação e função linear. Introduzir conceitos de modelagem matemática. Ampliar conhecimento sobre representação geométrica da função afim e solução de sistemas de inequações. Introduzir conceitos de otimização.

- **Unidade Curricular:** Laboratórios de matemática, projetos, grupos de pesquisa e oficina.

- **Sequência de Situações/Atividades Educativas:** Ensino-aprendizagem através de resolução de problemas. Iniciar cada tópico com um problema motivador. Contextualizar problemas e modelar problemas de situações reais. Apresentações em laboratórios de informática. Oficinas de tomada de decisão em situações hipotéticas.

- **Recursos didáticos:** Quadro branco e pincel atômico colorido ou lousa e giz colorido; computadores com acesso a internet ou software Geogebra instalado; projetor multimídia; apostilas.

- **Carga horária:** 40 horas.

- **Avaliação sugerida:** Participação em sala. Atividades em sala e em casa. Apresentação com utilização do *software* GeoGebra.

- **Fontes de informação:** Silva (2016), Lopes (2017), Palomo (2018), Zachi (2016), Hernandez (2017) e Neto (2009)

3.2 Disciplina Eletiva 2

Nessa segunda disciplina aprofundaremos os conhecimentos sobre os problemas de Programação Linear e Inteira com foco na modelagem matemática. O objetivo da disciplina é praticar com os alunos a modelagem matemática.

A primeira unidade da disciplina, o professor deverá trabalhar a interpretação dos problemas e sua "tradução" para a linguagem matemática, exercitando com os alunos problemas variados envolvendo equações e sistemas de equações. Um problema motivador para essa parte introdutória poderá ser o Problema da Dieta[2]. Com esse problema o professor pode trabalhar temas transversais como qualidade de vida e economia doméstica. O modelo do Problema da Mistura, apresentado na Seção 2.4.1, deve ser apresentado aos alunos e, como exercícios, eles deverão utilizá-lo para modelar diversos problemas propostos pelo professor. Sugerimos adaptar os problemas propostos como exercícios em Neto (2009), solicitando apenas a sua modelagem. Como atividade avaliativa para essa unidade o professor pode orientar os alunos a apresentar a modelagem do Problema da Dieta com os alimentos de seu consumo diário, consultando os valores nutricionais e considerando a ingestão de calorias recomendada de acordo com suas atividades. A carga horária sugerida são de 20 horas.

Na segunda unidade o professor apresentará novos modelos de problemas de PL e PLI. Para cada modelo a apresentar o professor deve iniciar com um problema motivador e deixar que os alunos tentem desenvolver um modelo matemático para o problema. Nessa metodologia o professor irá apresentar os modelos para o Problema do Transporte (Seção 2.4.2), o Problema da Mochila (Seção 2.4.3) e para o Problema de Corte e Empacotamento (Seçao 2.4.4). Para apresentar esses dois últimos modelos sugerimos as seguintes atividades:

Atividade 1: Apresentação do Problema da Mochila.

- Escrever no quadro o seguinte problema: João pretende vender refrigerantes, água e cerveja na feira. Ele tem uma caixa de isopor que suporta 5 kg. A lata de refrigerante pesa 390 gramas e gera um lucro de 60 centavos, a garrafa de água pesa 550 gramas e gera um lucro de 80 centavos e a lata de cerveja pesa 400 gramas e gera um lucro de 50 centavos. Supondo que ele venda tudo que leve na caixa, quantas garrafas de água, latas de cerveja e de refrigerante ele deve levar para obter lucro máximo?

- A atividade individual ou em grupo.

- Para representar o isopor o professor entregará aos alunos uma folha de papel A4 e para representar os itens, entregará 33 fichas, sendo 9 de água, 12 de cerveja e 12 de refrigerante.

- O aluno deverá escolher as fichas e colá-las na folha de A4 de modo a obter o máximo de lucro possível.

- O professor vai acompanhar o processo de escolha das fichas pelos alunos. No final deverá aplicar um questionário para verificar o método que cada aluno utilizou e se a solução obtida pode ser aplicada na prática. A solução ótima é 10 latas de refrigerante

[2] O problema consiste em escolher quantidades de alimentos para uma dieta alimentar, de modo a minimizar as calorias ingeridas garantindo a ingestão de quantidades de nutrientes necessários. Veja o exemplo 1.9 em Neto (2009)

e 2 garrafas de água, gerando um lucro de R$ 7,60. O método para encontrar a solução foi o método *Branch-and-Bound*. O professor não irá explicar sobre o método de resolução, o objetivo da atividade é construir o modelo e discutir os resultados e, ao final da atividade, apresentar o modelo do Problema da Mochila aos alunos.

Atividade 2: Apresentação do Problema de Corte e Empacotamento.

- Escrever no quadro o seguinte problema: Uma gráfica utiliza folhas de papel tamanho A4 para fazer dois tipos de cartões de visita, o tipo CV1 de dimensões 10 cm $\times$ 4 cm e o CV2 de dimensões 8 cm $\times$ 4 cm. Para fabricá-los, primeiro a gráfica corta o papel A4 em 7 tiras horizontais, no modo "retrato", de 21 cm$\times$ 4 cm e depois corta as tiras nos tamanhos dos cartões. A gráfica vende os cartões CV1 por R$ 0,60 e o CV2 por R$ 0,50. Ajude a gráfica a ter o melhor aproveitamento em uma única folha, sabendo que deve produzir, no mínimo, 5 cartões de cada tipo.

- Atividade individual ou em grupo.

- O professor irá distribuir folhas de papel A4 e tesoura para os alunos.

- Os alunos deverão recortar o papel em tiras de 21 cm $\times$ 4 cm cm e então planejar os cortes dos cartões de visita.

- O professor acompanhará a atividade e primeiro discutirá o padrão de corte a ser feito na tira. Nesse caso há apenas 3 padrões de corte com máximo aproveitamento, o padrão P1, com dois cartões do tipo CV1, o padrão P2, com dois cartões do tipo CV2 e o padrão P3, com um cartão de cada tipo. A solução ótima é o corte de 4 tiras no padrão P1, duas tiras no padrão P2 e uma tira no padrão P3, com receita total de R$ 7,90. O professor não irá explicar sobre o método de resolução, o objetivo da atividade é construir o modelo e discutir os resultados. Ao final da atividade, apresentar o modelo do Problema de Corte e Empacotamento aos alunos.

- O professor poderá também sugerir uma mudança no problema cortando as tiras horizontais no modo "paisagem". Nesse caso os padrões possíveis serão: P1, com 2 cartões do tipo CV1 e um cartão do tipo CV2; P2, com 1 cartão do tipo CV1 e dois carões do tipo CV2; e P3 com 3 cartões do tipo CV2. A solução ótima será todos os cortes no padrão P1, com receita de R$ 7,60.

No final da unidade o professor pode utilizar como avaliação uma aplicação do modelo do Problema da Mochila ou do Problema de Corte e Empacotamento em alguma situação do cotidiano do aluno, até mesmo do seu trabalho. A carga horária sugerida são de 30 horas.

A terceira unidade da disciplina terá como objetivo a utilização de software de planilha eletrônica como ferramenta para auxílio na modelagem de problemas, na enumeração de soluções para problemas de PLI e na elaboração de um orçamento familiar visando a redução de custos. O professor precisará de recursos como computadores com um software de planilha eletrônica de sua escolha e projetor. Os problemas modelados na unidade anterior deverão ser aproveitados e apresentados, utilizando a manipulação de tabelas como apoio do *software* escolhido. Os alunos deverão praticar a utilização do *software*, construindo tabelas e testando soluções possíveis para problemas de PLI sugeridos pelo professor. Durante toda a unidade o professor auxiliará o aluno na construção do seu orçamento. Esse será o seu trabalho para a conclusão da unidade. A planilha elaborada deve permitir que o aluno faça alterações e alimente com novos dados conforme sua necessidade, criando assim uma cultura de acompanhamento dos seus gastos. A carga horária sugerida é de 30 horas

Com base no texto apresentado, elaboramos o Plano Descritivo para a disciplina eletiva do 2º ano do Ensino Médio.

Plano Descritivo

- **Título:** Modelos matemáticos em Programação Linear e Programação Linear Inteira.
- **Resumo:** Esta disciplina busca a apresentação dos conceitos de modelagem matemática por meio dos problemas clássicos de Programação Linear. Pretende-se que seja trabalhado com o aluno as habilidades de interpretação e modelagem de problemas, organização de dados em tabelas e planilhas.
- **Área do conhecimento:** Matemática.
- **Habilidades:** Relacionadas na BNCC pelos códigos EM13MAT201, EM13MAT203, EM13MAT301 e EM13MAT302
- **Objetivos gerais:** Trabalhar modelagem matemática de prolemas de Programação Linear e Programação Linear Inteira visando uma integração da matemática com a sociedade; Ensinar alunos a utilizar planilhas eletrônicas como ferramenta para organização de orçamentos.
- **Objetivos específicos:** Aproximar os conteúdos matemáticos com os problemas reais através da modelagem; Explorar as habilidades dos alunos para resolução de problemas e construção de modelos; Conhecer os problemas clássicos de Programação Linear e Programação Linear Inteira; Identificar problemas na comunidade em que se possa aplicar os modelos estudados; Sugerir problemas de otimização no ambiente familiar e de trabalho do aluno; Auxiliar o aluno a construir uma planilha de orçamento familiar com a utilização de planilhas eletrônicas.
- **Objetos do conhecimento:** Modelagem matemática;
- **Unidade curricular:** Laboratórios de matemática, projetos, grupos de pesquisa e oficina.
- **Sequência de Situações/Atividades Educativas:** Ensino-aprendizagem através da resolução de problemas. O professor deve incentivar os alunos a criar modelos próprios para os problemas e depois apresentar os modelos matemáticos. Criar projetos de modelagem de problemas envolvendo situações reais dos alunos com base nos modelos matemáticos apresentados. Criar grupos de pequisa para construção de um orçamento familiar visando redução de custos.

- **Recursos didáticos:** Quadro branco e pincéis atômicos coloridos ou lousa e giz colorido; computadores com algum software planilha eletrônica instalado; projetor multimídia; apostilas, folhas de papel A4.
- **Carga horária:** 80 horas.
- **Avaliação sugerida:** Participação em sala; Atividades em sala e em casa; Apresentação de projeto; Elaboração da planilha de orçamento familiar.

3.3 Disciplina Eletiva 3

Na terceira disciplina o aluno será preparado para a compreensão do Método Simplex, começando com a noção de algoritmos, revisão de sistemas lineares e o processo de eliminação Gauss-Jordan. O Método Simplex será apresentado de forma analítica e forma tabular, com o auxílio da ferramenta web PhPSimplex. No final, em sincronia com a disciplina matemática, que estará trabalhando com os alunos a habilidade EM13MAT310 conforme Tabela 3 do Apêndice 4, apresentaremos as dificuldades de encontrar solução ótima em um problema de PLI pelo processo de enumeração completa e o método *Branch-and-Bound* como um método de enumeração inteligente.

A primeira unidade da disciplina será voltada apenas para o estudo dos algoritmos. O problema motivador para a unidade será a construção de um passo-a-passo para a solução de sistemas de equações lineares. Inicialmente o professor deverá definir algoritmo e exemplificar com situações cotidianas, como receitas de bolo, instruções de montagens, etc. Para representar os algoritmos recomendamos o uso de fluxogramas pela sua didática mais clara. O professor poderá escolher uma ferramenta didática computacional para a representação dos algoritmos (COSTA; JUNIOR, 2021). Uma breve revisão sobre sistemas lineares será necessário antes do professor construir, em conjunto com os alunos, um algoritmo para o processo de eliminação Gauss-Jordan. Por fim, o aluno deverá desenvolver um algoritmo para resolver sistemas de equações lineares. Para essa unidade a carga horária proposta será de 30 horas.

A segunda unidade começa com uma apresentação sobre problemas de Programação Linear. O objetivo agora é a resolução de um problema linear proposto pelo professor. O problema proposto deve ser um dos problemas sugeridos pelos alunos nas disciplinas anteriores, caso ainda não haja, o professor poderá optar por um exemplo com poucas iterações como o apresentado na Seção 2.5.2. O professor construirá o modelo matemático e colocará o problema na forma padrão. O Algoritmo Simplex, em sua forma analítica, será apresentado aos alunos que primeiro tentarão aplicá-lo sozinhos ao problema proposto. Uma sugestão de atividade é separar a sala em grupos e entregar variações do problema para cada grupo tentar desenvolver o algoritmo. O professor fará as correções em sala de aula para que os alunos identifiquem em qual passo do algoritmo errou. Devido à quantidade de manipulações algébricas em problemas com mais que duas variáveis, recomendamos a apresentação da forma tabular e da ferramenta online *PhPSimplex* (GRANJA; RUIZ, 2006) aos alunos. As formas de avaliação recomendadas são as atividades em sala e a participação do aluno, evitando o desgaste com cálculos excessivos em provas e testes. A carga horária será de 30 horas.

Na última unidade, o professor apresentará um problema de PLI, por exemplo, o apresentado na Seção 2.5.3, e pedirá aos alunos que escrevam todas as possibilidades de resposta. Eles deverão também estimar a quantidade de soluções possíveis para o mesmo problema acrescentando variáveis e alterando suas restrições. O professor deverá ressaltar a característica combinatória dos problemas de PLI, a quantidade de operações necessárias para calcular cada solução viável e construir com os alunos um algoritmo para a enumeração completa das soluções de um problema de PLI. Utilizando a relaxação das variáveis inteiras, o professor deverá comparar a solução encontrada pelo Método Simplex e a solução inteira obtida na enumeração completa. Por último, o algoritmo do método *Branch-and-Bound* é apresentado aos alunos como método de solução para problemas de PLI. Devido à quantidade de cálculos para aplicações dos métodos, os exercícios propostos aos alunos devem ser estritamente didáticos, com poucas variáveis, no máximo 3. Para um apoio aos professores recomendo a utilização do *PhPSimplex* e também o Sistema Interativo para Métodos de Otimização (SIMO), elaborado pelo CEFET-MG Campus Timóteo e disponível no site https://otimizacao.js.org/index.html, para testar os exercícios antes de propor aos alunos.

Com base no texto apresentado, elaboramos o Plano Descritivo para a disciplina eletiva do 3º ano do Ensino Médio.

Plano Descritivo

- **Título:** Algoritmos e o método Simplex de resolução de problemas de Programação Linear e Programação Linear Inteira.
- **Resumo:** Esta disciplina busca trabalhar com os alunos o conceito de algoritmos e apresentar o método Simplex para solução de problemas de Programação Linear.
- **Área do conhecimento:** Matemática e suas tecnologias.
- **Habilidades:** Relacionadas na BNCC pelos códigos EM13MAT102, EM13MAT301, EM13MAT302, EM13MAT315, EM13MAT406, EM13MAT501 e EM13MAT510.
- **Objetivos gerais:** Resolver problemas de Programação Linear utilizando o Método Simplex. Resolver problemas de Programação Linear Inteira utilizando a enumeração completa.
- **Objetivos específicos:** Noções básicas de algoritmo: Entrada, Saída, Laços e Decisões. Utilizar algoritmos para resolver problemas. Resolver sistemas lineares utilizando o processo de eliminação Gauss-Jordan. Transformar problemas de Programação Linear para a forma padrão. Compreender o Método Simplex. Aplicar o algoritmo Simplex para solução de problemas de Programação Linear. Utilizar a ferramenta web PhPSimplex. Enumerar soluções possíveis em um problema de Programação Linear Inteira.
- **Objetos do conhecimento:** Algoritmos. Solução de sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss-Jordan. Solução de problemas de Programação Linear com 3 ou mais variáveis. Noções de princípio multiplicativo e combinatória.

- **Unidade Curricular:** Laboratórios de matemática, projetos, grupos de pesquisa e oficina.

- **Sequência de Situações/Atividades Educativas:** Ensino-aprendizagem através da resolução de problemas. O professor deve incentivar os alunos a construir algoritmos com base apenas em conhecimentos prévios para posteriormente formalizar uma linguagem (no caso o fluxograma). Na apresentação do problema de Programação Linear o foco será o método de resolução através do algoritmo Simplex. Para os problemas de Programação Linear Inteira, o professor deverá reforçar a característica combinatória do problema. Proposta de trabalhos em grupo para encontrar soluções por meio da enumeração completa e também por heurísticas propostas pelos alunos.

- **Recursos didáticos:** Quadro branco e pincéis atômicos coloridos ou lousa e giz colorido; computadores com acesso a internet; projetor multimídia; apostilas.

- **Carga horária:** 80 horas.

- **Avaliação sugerida:** Participação em sala. Atividades em sala e em casa. Apresentação de projeto. Resolução de problemas em grupo.

Capítulo 4

Considerações Finais

Com as novas diretrizes propostas pela Lei nº 13.415/2017, o currículo do Ensino Médio ganhará uma ampliação de carga horária e novas disciplinas, chamadas Disciplinas Eletivas, que deverão ser criadas e ofertadas pela escola e escolhidas pelos alunos conforme a sua intenção de aprofundamento em determinadas áreas do conhecimento. A criação de disciplinas eletivas em áreas diversas do conhecimento requererá da escola um maior esforço no planejamento do ano letivo. Acreditamos que o presente trabalho deverá contribuir com esse planejamento oferecendo às escolas uma sugestão para a construção de disciplinas eletivas na área de matemática e suas tecnologias. As três disciplinas sugeridas neste trabalho relacionam a Programação Linear e Inteira com os conteúdos presentes no currículo obrigatório da área de matemática do Ensino Médio e acrescentam duas habilidades para aprofundamento: a modelagem matemática e a noção de algoritmos. Além de trabalhar essas duas habilidades com os alunos, o professor poderá explorar a característica interdisciplinar da Programação Linear e Inteira, buscando situações problemas em áreas das ciências sociais, biológicas e geográficas, por exemplo.

No primeiro capítulo apresentamos algumas referências que justificam o uso da modelagem matemática e da metodologia de ensino através da resolução de problemas. Neste sentido, a BNCC faz menções diretas sobre o uso da modelagem e resolução de problemas para o ensino da matemática, o que reforçou a escolha da Programação Linear e Inteira como um tema a ser abordado no Ensino Médio. Apresentamos como referências para o uso da Programação Linear e Inteira no Ensino médio algumas dissertações de discentes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que possuem temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática na Educação Básica, conforme orienta o regimento do PROFMAT. Nesse ponto, acreditamos que nosso trabalho poderá servir como uma breve revisão bibliográfica do tema, pois buscamos, dentre todas as dissertações disponíveis no site do PROFMAT até o final do ano de 2020, as que abordavam em seu tema os termos Programação Linear, Otimização, Programação Inteira e Otimização inteira, selecionando algumas que os relacionavam com o Ensino Médio e propuseram algum tipo de sequência didática. Visamos, com isso, fornecer ao professor um direcionamento para sua pesquisa e escolha de atividades a serem propostas em sala de aula.

Acreditamos que o segundo capítulo deste trabalho poderá contribuir com professores que não tiveram contato com a área de Pesquisa Operacional a se familiarizarem com o assunto. Nele buscamos uma linguagem mais simples, exercitando a aplicação dos métodos gráficos e

Simplex em exemplos que poderão ser utilizados com alunos do Ensino Médio. Destacamos também a contribuição das ferramentas computacionais como o GeoGebra e o PhPSimplex. Sobre a primeira, bastante conhecida como ferramenta didática, existem diversos trabalhos voltados para seu uso no ensino da Programação Linear, Freitas (2019), Zachi (2016), Palomo (2018) e Silva (2019) são alguns exemplos que referenciamos neste trabalho. Já a segunda é utiliza para resolver apenas problemas de Programação Linear e, na página da web onde está inserida, encontramos um exemplo e orientações para utilização. Ambas proporcionam ao professor uma maior agilidade na construção de exemplos e apresentação em sala de aula e, também, proporcionam aos alunos uma aula mais interativa e os aproxima dos recursos tecnológicos educativos, acessíveis inclusive pelo próprio celular.

Com a introdução de disciplinas eletivas no Novo Ensino Médio, o aluno poderá escolher os componentes curriculares que desejam se aprofundar e assim ter contato com conhecimentos que normalmente teriam apenas em cursos profissionalizantes ou no nível superior. Como proposta para trabalhos futuros, sugerimos a elaboração de novas disciplinas eletivas explorando temas como a Pesquisa Operacional e a Modelagem Matemática e também a elaboração de sequências didáticas voltada para as disciplinas eletivas sobre o tema. Alguns modelos de problemas da Programação Linear e Inteira podem, também, ser abordados no Ensino Médio, por exemplo o Problema do Caixeiro Viajante e o o Problema da Mochila 0-1, que fazem parte do modelo de Programação Linear Inteira e não foram apresentados nesse trabalho, podem ser utilizados para modelar problemas da comunidade do aluno como o roteamento do transporte escolar ou a escolha do cardápio nutricional de uma cantina. Haverá também a necessidade da elaboração de livros didáticos voltados para tais disciplinas ou para os temas gerais, como a Pesquisa Operacional, mas adaptados para sua utilização no Ensino Médio.

A aplicação das disciplinas eletivas propostas nesse trabalho poderão enfrentar alguns desafios comuns às demais disciplinas, principalmente nas escolas da rede pública, por exemplo: a falta de recursos computacionais, dificultando o acesso às ferramentas sugeridas no plano descritivo da disciplina; a falta de embasamento dos alunos, principalmente nas manipulações algébricas. Além dessas, o professor precisa dominar os conceitos de PL e PLI, assuntos que nem sempre estão presentes nos currículos da graduação.

Referências Bibliográficas

ALLEVATO, N.; VIEIRA., G. *Do ensino através da resolução de problemas abertos às inestigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem*. Quadrante, Portugal, XXV, n. 1, p. 113–132, 2016.

ALMEIDA, E. P. B. de. *Introdução à Programação Linear: uma proposta de ensino e aprendizagem para alunos do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2015.

ARENALES, M. et al. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier:ABEPRO, 2011.

BAHIA. *Novo Ensino Médio: Documento Orientador - Rede Pública de Ensino*. Salvador: Governo do Estado/SEC, 2020. Disponível em: ⟨http://jornadapedagogica.educacao.ba.gov.br/wp-content/uploads/2020/01/Documento-Orientador-Novo-Ensino-Medio-na-Bahia-Versao-Final.pdf⟩.

BAHIA. *Organizadores Curriculares Essenciais*. Salvador: SEC, Emitec, DICAT, 2020. Disponível em: ⟨http://jornadapedagogica.educacao.ba.gov.br/wp-content/uploads/2020/12/ORGANIZADORES-CURRICULARES-ESSENCIAIS_COMPLETO_EF_E_EM-1.pdf⟩.

BAHIA. *Documento Curricular Referencial da Bahia da Etapa do Ensino Médio*. Salvador: SEC, 2021. Disponível em: ⟨http://dcrb.educacao.ba.gov.br/dcrb-consulta-publica-ensino-medio-regular/⟩.

BARBOZA, A. O. et al. *Técnicas da Pesquisa Operacional no Problema de hprários de atendentes em centrais telefônicas*. gestão & produção. v. 10, n. 1, p. 109 – 127, 2003. Disponível em: ⟨https://www.academia.edu/433302/Tecnicas_da_pesquisa_operacional_no_problema_de_horarios_de_atendentes_em_centrais_telefonicas⟩.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BNCC. *Base nacional comum curricular - Ensino Medio*. Brasília: MEC, 2018.

BYRON, H. et al. MaximizaÇÃo do processo produtivo em uma fÁbrica tÊxtil com aplicaÇÃo do software lindo. *Blucher Engineering Proceedings*, v. 7, n. 3, p. 3075 – 3087, 2020. ISSN 2357-7592. Disponível em: ⟨www.proceedings.blucher.com.br/article-details/maximizao-do-processo-produtivo-em-uma-fbrica-txtil-com-aplicao-do-software-lindo-35299⟩.

CAMARGO, R. S. S. *Introdução à programação Linear no Ensino Médio utilizando a Resolução Gráfica*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Manaus - AM, 2014.

CEARÁ. *Catálogo Componentes Eletivos*. Ceará: SEDUC, COETI, CEDTI, 2021. Disponível em: ⟨https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2021/03/catalogo_eletivas_2021_final.pdf⟩.

COSTA, J. da; JUNIOR, S. R. Aplicação de ferramentas didáticas e lúdicas, associadas ao ensino e aprendizagem de algoritmo e lógica de programação. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento, Ano 06*, v. 06, p. 68–81, 2021. ISSN 2448-0959. Disponível em: ⟨https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/logica-de-programacao⟩.

DANTZIG, G. B. *Linear Programming and Extensions*. Nova Jersey: Princeton University Press, 1963.

DEVLIN, K. *Os Problemas do Milênio*. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. ISBN $978-85-01-06753-1$.

FAVERO, L. P.; BELFIORE, P. *Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia*. [S.l.]: Elsevier, 2013.

FREITAS, H. D. P. de. A utilização da pesquisa operacional para o gerenciamento dos leitos em um hospital particular: Estudo de caso baseado em simulação computacional. *Projeto de pesquisa apresentado ao programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção*, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, 2013.

FREITAS, J. R. B. *Abordagem Geométrica de Problemas de Programação Linear no Espaço 2D*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Macapá - AP, 2019.

FRIAS, S. de A. *Otimização de funções lineares, uma abordagem simples para aplicaçao em sala de aula*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Rio de Janeiro - RJ, 2017.

GEOGEBRA. 2014. Disponível em: ⟨http://www.geogebra.org/⟩.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. *Otimização Combinatória e Programação Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

GRANJA, D. I.; RUIZ, J. J. R. *PhPSimplex*. 2006. Disponível em: ⟨http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=pt⟩.

GUROBI, O. *State of Mathematical Optimization Report, 2021*. Gurobi Optimization, 2021. Disponível em: ⟨https://cdn.gurobi.com/wp-content/uploads/2021/02/State-Of-Mathematical-Optimization-Report-2021.pdf⟩.

HERNANDEZ, V. V. *Otimização Linear como ferramenta de integração de saberes no Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, São José dos Campos - SP, 2017.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. 9. ed. [S.l.]: AMGH, 2013.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1971.

LOPES, A. L. M. *Otimização Linear: conceitos e aplicações nas aulas de Matemática para o Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Bauru - SP, 2017.

MOREIRA, A. Aplicação de um modelo de programação linear inteira mista (plim) na expansão da rede de distribuição de energia elétrica em angola. *Dissertação submetida ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Eletrotécnica – Sistemas Elétricos de Energia*, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Portugal, 2013.

NETO, L. L. de S. et al. Forecast uti: aplicativo para previsão de leitos de unidades de terapia intensiva no contexto da pandemia de covid-19. *Epidemiol. Serv. Saude*, Epidemiol. Serv. Saude, Brasília - DF, v. 29, n. 4, 2020. Disponível em: ⟨http://scielo.iec.gov.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1679-49742020000400065&lng=pt&nrm=iso⟩.

NETO, L. L. S. Tópicos de pesquisa operacional para ensino médio. *Anais do XIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - XIII ERMAC.*, Synergismus scyentifica UTFPR, Pato Branco, v. 4, n. 2, 2009.

NUNES, C. B.; SANTANA, E. R. S. Resolução de problemas: um caminho para fazer e aprender matemática. Acta Scientiae, Canoas, v. 19, n. 1, p. 2–19, 2017.

OLIVEIRA, S. da S. Aplicação de programação linear inteira e heurísticas de construção de rotas para otimização de rotas de coleta de lixo. *Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia de Produção Mecânica*, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, 2013.

OLIVEIRA, U. S. *Aplicando a Programação Linear e a Programação Linear Inteira como suporte para temas transversais no ensino de matemática no Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Cruz das Almas - BA, 2016.

PALOMO, A. *Programação Linear no Ensino Médio: Uma análise do método gráfico*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Campinas - SP, 2018.

PIEROT, J. N. *Programação Linear: uma proposta de estudo com alunos do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Teresina - PI, 2019.

POLYA, G. *How to solve it - A new aspect of Mathematical Method*. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1945. ISBN $978-0-691-11966-3$.

POSSINELLI, J. C. *Aprendizagem da geometria por meio da Otimização Linear*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Cornélio Procópio - PR, 2017.

REGHIM, D. Aplicação da programação linear em problemas agrícolas. *Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática*, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio - PR, 2018.

RIBAS, C. C. G. B. *Programação Linear: abordagem para o Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Curitiba - PR, 2014.

SILVA, A. B. *O método simplex e o método gráfico na resolução de problemas de otimização*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Jataí - GO, 2016.

SILVA, C. A. F. da. *Abordagem geométrica de problemas de Programação Linear no espaço 3D*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Macapá - AP, 2019.

SOUSA, A. E. S. de. *Introdução à Programação Linear no Ensino Médio: Uma apresentação dos métodos de resolução com o apoio de recursos tecnológicos*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Feira de Santana - BA, 2021.

TARTAGLIA, M.; SANTOS, L. M. R. dos; ROQUE, I. C. Um modelo matemático de programação linear inteira para a alocação de horários na escola estadual effie rolfs. *Anais do VIII SAEPRO*, Universidade Federal de Viçosa, 2013. Disponível em: ⟨http://www.saepro.ufv.br/wp-content/uploads/2013.24.pdf⟩.

TAVEIRA, R. C. L. *Ensino da Matemática por meio de problemas clássicos de otimização combinatória*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Uberaba - MG, 2019.

VELINOV, A.; GICEV, V. Practical application of simplex method for solving linear programming problems. BJAMI, v. 1, n. 1, p. 7 a 16, 2018.

WEBER, R. F. F. *Programação Linear no Ensino Médio: um estudo de modelos de transporte com uma proposta para deficientes visuais*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Campinas - SP, 2018.

ZACHI, J. M. *Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Rio Claro - SP, 2016.

Anexo 1

As tabelas apresentadas no presente anexo foram extraídas dos Organizadores Curriculares Essenciais (OCE) (BAHIA, 2020b), documento elaborado em 2020 para reorganizar e orientar as escolas para o planejamento, execução e acompanhamento de ações para a continuidade dos estudos dos estudantes da Rede Pública do Estado da Bahia após as medidas temporárias para o enfrentamento da emergência de saúde pública causada pela epidemia do vírus COVID-19. Durante a elaboração deste trabalho o Governo do Estado da Bahia publicou o Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) (BAHIA, 2021), que em seu volume 2 contempla o currículo do ensino médio. Como o documento ainda está em fase de homologação, optamos por manter o currículo proposto pelo OCE. Dentre as habilidades propostas na OCE, apenas a habilidade EM13MAT405, para o 1º ano, não aparece na DCRB.

Tabela 1: Currículo proposto para o 1º ano do Ensino Médio.

1ª Série	
Unidade I	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Sistema de coordenadas, ponto (representação algébrica e geométrica).	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Relação, função, domínio e imagem de uma função.	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Representação algébrica e geométrica de uma função.	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
Unidade II	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Função constante, função afim, problemas envolvendo função, zero/raiz da função.	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
Função quadrática, problemas envolvendo função, zero/raiz da função, ponto mínimo ou máximo e vértice.	(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
Representação geométrica: função constante, função afim e função quadrática (parábola, véritce, eixo de simetria, concavidade e localização (estudo dos coeficientes)	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax2.
Unidade III	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Função exponencial. Construção da definição da função exponencial, gráficos (deslocamento), equação e problemas.	(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

Fonte: BAHIA (2020b).

Tabela 2: Currículo proposto para o 2º ano do Ensino Médio.

2ª Série	
Unidade I	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Introdução geral às sequências - Lei de formação	(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
Progressão aritmética: fórmula geral e soma dos termos	(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
Progressão geométrica: fórmula geral e soma dos termos	(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
Matemática financeira: Juros simples e compostos. Descontos e descontos sucessivos	(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
Unidade II	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Triângulo retângulo e suas relações métricas	EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Teorema de Pitágoras. Teorema de Tales. Semelhança de triângulos.	EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Relações trigonométricas nos triângulos retângulos e ângulos notáveis	EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Unidade III	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Cálculos de seno, cosseno e tangentes.	EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Relações entre seno, cosseno e tangentes.	EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Relação fundamental da trigonometria.	EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Fonte: BAHIA (2020b).

Tabela 3: Currículo proposto para o 3º ano do Ensino Médio.

3ª Série	
Unidade I	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Estatística: Pesquisas, coleta e organização de dados. Amostra/variáveis. Porcentagem. Construção de tabelas e gráficos.	(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
Probabilidade: Definição de probabilidade, probabilidade em um espaço amostral finito. Espaços amostrais equiprováveis.	(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
Unidade II	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Geometria. Área e volume de prismas, pirâmides, cone, cilindro e esfera.	(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Unidade III	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Análise combinatória. Princípio fundamental da contagem. Arranjos. Permutações com ou sem repetições.	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore

Fonte: BAHIA (2020b).