UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Aplicações das equações diferenciais ordinárias: uma motivação para o estudo da matemática do ensino básico ao superior

Ana Carolina Martins

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Ana Carolina Martins

Aplicações das equações diferenciais ordinárias: uma motivação para o estudo da matemática do ensino básico ao superior

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Michelle Fernanda Pierri Hernandez

USP – São Carlos
Março de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M386a

Martins, Ana Carolina
Aplicações das equações diferenciais ordinárias: uma motivação para o estudo da matemática do ensino básico ao superior / Ana Carolina Martins; orientadora Michelle Fernanda Pierri Hernandez. -- São Carlos, 2024.
93 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Aplicações de EDO's. 3. Métodos de Resolução de EDO's. 4. Aplicação de EDO no Ensino Básico. I. Hernandez, Michelle Fernanda Pierri, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Ana Carolina Martins

Applications of ordinary differential equations: a motivation for the study of mathematics from high school to graduate school

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Michelle Fernanda Pierri Hernandez

USP – São Carlos
March 2025

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me guiou e cuidou durante essa jornada.

Ao meu companheiro, que não mediu esforços para que tudo acontecesse, me apoiando, incentivando e auxiliando em todo processo.

Aos meus pais e irmã, pelo amor, apoio e incentivo. Vocês sempre estiveram ao meu lado, em toda minha vida, me orientando e motivando nos desafios que enfrentei.

Aos meus familiares e amigos, pelas palavras de conforto, encorajamento e parceria em todos os momentos.

À minha orientadora, pela paciência, dedicação e ensinamentos.

Aos meus professores, pelos ensinamentos pessoal e acadêmico durante toda minha trajetória.

Sem vocês, nada disso seria possível.

A todos, meu muito obrigada!

"A Matemática é a linguagem em que Deus escreveu o universo."

(Galileu Galilei)

RESUMO

MARTINS, A. C. **Aplicações das equações diferenciais ordinárias: uma motivação para o estudo da matemática do ensino básico ao superior**. 2025. 93 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

Esse trabalho destaca a relevância e versatilidade das equações diferenciais ordinárias utilizado na análise e previsão de comportamentos, oferecendo uma abordagem teórica básica e prática dessa área. Especificamente, exploramos os conceitos fundamentais da teoria de equações diferenciais de primeira ordem e sua aplicabilidade em diversas áreas e algumas técnicas de resolução. Além disso, apresentamos aplicações cotidianas no qual o método é utilizado. Finalmente, abordamos uma proposta para introduzir esses conceitos no Ensino Médio.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Aplicações de EDO's, Métodos de resolução de EDO's, Aplicação de EDO no Ensino Básico.

ABSTRACT

MARTINS, A. C. **Applications of ordinary differential equations: a motivation for the study of mathematics from high school to graduate school**. 2025. 93 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

This work emphasizes the relevance and versatility of ordinary differential equations used in the analysis and prediction of behaviors, offering a basic theoretical and practical approach to this field. Specifically, we explore the fundamental concepts of first-order differential equation theory and its applicability in various areas, along with some solution techniques. In addition, we present everyday applications where this method is used. Finally, we propose a way to introduce these concepts in high school education.

Keywords: Ordinary Differential Equations, Applications of ODEs, Resolution Methods for ODEs, Application of ODEs in high school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais desempenham um papel essencial na descrição e compreensão de uma enorme quantidade de fenômenos em áreas como física, biologia, engenharia, entre outras ciências aplicadas. Atraindo assim, além de matemáticos, profissionais de diversas áreas.

Essa interdisciplinaridade de problemas do mundo real que podem ser modelados, de acordo com leis físicas, permitem a tradução de fenômenos naturais e do nosso cotidiano em equações matemáticas. Assim, é possível analisar e prever comportamentos em diversas circunstâncias, auxiliando nas tomadas de decisões.

Apesar de sua importância, o ensino das Equações Diferenciais fica restrito somente ao ensino superior, não sendo abordado na educação básica. No entanto, as possíveis aplicabilidades podem tornar mais envolvente o estudo da matemática até mesmo no Ensino Médio. Assim, como podemos então tornar o aprendizado das Equações Diferenciais mais acessível e motivador para diferente públicos, desde alunos do ensino médio, professor da educação básica e ingressantes no ensino superior?

Diante desse desafio, esse trabalho de dissertação busca possibilitar o estudo da matemática aplicada aproximando os conceitos matemáticos do público-alvo, mostrando sua utilidade prática em diversas áreas do conhecimento no nosso cotidiano. Ainda, o trabalho fornece recursos e estratégias didáticas para que professores do ensino básico possam introduzir esse conceito de forma intuitiva e contextualizada.

Dessa forma, esse trabalho busca atingir alunos do ensino médio, para que possam compreender como a matemática aplicada também está presente no dia a dia e como essas situações podem ser modeladas; professores da educação básica, como uma estratégia didática para ensinar os conceitos de EDOs e conceitos prévios necessários de forma acessível; e alunos ingressantes no ensino superior, especialmente alunos em cursos das áreas das exatas.

Assim, o objetivo desse trabalho é introduzir conceitos importantes das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, além das propriedades e possíveis aplicações no mundo real. Nosso estudo está dividido em quatro capítulos, além do Capítulo 1, voltado para a Introdução. A seguir, descreveremos brevemente os conceitos abordados em cada um deles.

No Capítulo 2, iniciamos com a definição de equações diferenciais e apresentamos alguns problemas concretos que podem ser modelados através das equações diferenciais. Esse capítulo foi baseado principalmente em (ZILL, 2003), (SILVA, 2020) e (JUNIOR, 2013).

No Capítulo 3, apresentamos alguns métodos de resolução para equações diferenciais de primeira ordem, bem como, exemplos de cada um deles. Esses métodos foram baseados em (SILVA, 2020), (JUNIOR, 2013), (NOBREGA, 2010), (YARTEY; RIBEIRO, 2017).

No Capítulo 4, apresentamos diversas aplicações de equações diferenciais em problemas de contexto real, que permitem a utilização dos métodos de resolução estudados no Capítulo 3. As aplicações escolhidas para mostrar o método envolvem desde problemas mais simples, até aplicações mais complexas, nas quais é necessária uma contextualização da teoria aplicada. Nesse capítulo, a gama de aplicações das equações ordinárias foi baseada em (ZILL, 2003), (ZILL; CULLEN, 2009), (CILDOZ; PALOMINO, 2017), (COSTA; SANTOS, 2024) e (STEWART, 2013a).

No Capítulo 5, apresentamos uma proposta de como poderia ser introduzido o conceito básico de equações diferenciais e suas aplicações no Ensino Médio. Esse capítulo foi baseado em (STEWART, 2013a) e (STEWART, 2013b).

CAPÍTULO

2

EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA E PROBLEMAS CONCRETOS

As equações diferenciais têm um papel importante na modelagem de diversos fenômenos, auxiliando o entendimento desses acontecimentos, normalmente, no decorrer do tempo.

Nesse capítulo, apresentamos conceitos importantes das equações diferenciais visando criar uma base para o entendimento dos métodos de resolução. Ainda, sugerimos algumas aplicações cotidianas em que as equações diferenciais podem ser utilizadas. Esse capítulo foi baseado principalmente em (ZILL, 2003), (SILVA, 2020) e (JUNIOR, 2013).

2.1 Equação Diferencial Ordinária

Definição 1. Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que envolve um função $y(t)$, e suas derivadas em relação a uma única variável independente t, da seguinte forma:

$$F\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\right) = 0. \tag{2.1}$$

É comum, na teoria de EDO, a equação (2.1) ser representada da seguinte forma

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right). \tag{2.2}$$

Observação 1. De modo a facilitar a notação, podemos escrever $y = y(t)$, e neste caso a equação (2.2) assume a forma:

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Vejamos, a seguir, alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias.

1. $y' = 5y + 7$
2. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$

3. $(y')^2 + 1 = y^2$

4. $ty' + 3y = \cos(t)$

5. $(y'')^3 + (y')^4 + ty = y$

6. $(1 - ty)y' = y^2$

As equações diferenciais ordinárias podem ser classificadas quanto a ordem, grau e linearidade. Apresentamos, a seguir, os exemplos citados para exemplificar as classificações.

Definição 2. A ordem de uma EDO é determinada pela derivada de maior ordem que aparece na equação.

As equação 1, 3, 4 e 6 são de primeira ordem, já a equação 5 é de segunda ordem e a equação 2 é de terceira ordem.

Definição 3. O grau da EDO refere-se ao expoente que aparece na derivada de maior ordem da equação.

As equações 1, 2, 4 e 6 são de grau 1, enquanto a equação 3 é de grau 2 e a equação 5 é de grau 3.

Definição 4. Dizemos que uma EDO é linear em $y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y'(t), y(t)$ se puder ser escrita da seguinte forma

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t),$$

ou seja, os coeficientes $a_n(t), a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$ dependem somente da variável independente t.

Os exemplos têm como equações lineares as equações 1, 2 e 4. As equações 3, 5 e 6 não são lineares pois suas derivadas não possuem grau 1. Ainda, a equação 6 não é linear por apresentar um de seus coeficientes dependendo de y em tyy'.

Definição 5. A solução de uma EDO é dada por uma função $y = y(t)$ que juntamente com as suas derivadas satisfazem a equação diferencial.

Exemplo 1. Seja a equação diferencial dada por

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{2.3}$$

Observamos que $y = te^t$ é solução dessa equação. De fato, temos que

$$y' = e^t + te^t$$

$$y'' = 2e^t + te^t$$

Logo, $y'' - 2y' + y = 2e^t + te^t - 2(e^t + te^t) + te^t = 0$.

Portanto $y = te^t$ é solução da equação diferencial (2.3) pois ela e suas derivadas satisfazem a equação.

Exemplo 2. Seja a equação diferencial dada por

$$y''' + y' = 0. \tag{2.4}$$

Observamos que $y = \cos(t)$ é solução dessa equação. De fato, temos que

$$\begin{aligned} y' &= -\operatorname{sen}(t) \\ y'' &= -\cos(t) \\ y''' &= \operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Logo, $y''' + y' = \operatorname{sen}(t) + (-\operatorname{sen}(t)) = 0$.

Portanto $y = \cos(t)$ é solução da equação diferencial (2.4) pois ela e suas derivadas satisfazem a equação.

2.2 Problemas Concretos de EDO

2.2.1 Capitalização Contínua

A taxa de rendimento em capitalização contínua tem seu crescimento proporcional ao capital $M(t)$, isto é

$$M'(t) = i \cdot M(t)$$

onde i é taxa de juros do instante da capitalização.

Suponhamos que uma aplicação financeira tenha uma capitalização contínua mensal de $0,5\%$. Como $M(t)$ é o montante no instante t, então:

$$M'(t) = 0,005 \cdot M(t).$$

Ainda, se mensalmente depositarmos um valor fixo M_1, então podemos escrever como

$$M'(t) = 0,005 \cdot M(t) + M_1.$$

2.2.2 Corpos em Queda e Resistência do ar

Considere um corpo em queda livre, sob certas condições de gravidade e resistência do ar. Observamos que a gravidade age a favor da queda enquanto a resistência do ar é uma força contrária ao movimento de forma que sejam proporcionais a velocidade. Seja $h(t)$ a altura do objeto em relação ao solo em um determinado instante t.

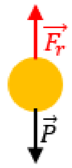


Figura 1 – Diagrama de forças: Corpo em queda livre

Fonte: Elaborada pelo autor.

Obtemos pela 2ª lei de Newton ($F = m \cdot a$) a equação do movimento:

$$m \cdot h''(t) = \overbrace{m \cdot g}^{\text{peso}} - \overbrace{k \cdot h'(t)}^{\text{res. ar}},$$

onde m é a massa do corpo; $g > 0$ é aceleração da gravidade e $k > 0$ é a constante da resistência do ar, $h'(t)$ é a velocidade e $h''(t)$ é a aceleração.

2.2.3 Disseminação de uma Doença

A disseminação de uma doença infectocontagiosa é dada pelo contato com pessoas com a doença. Em uma comunidade, denotamos o número de pessoas infectadas por $x(t)$ e o número de pessoas que ainda não foram expostas por $y(t)$, e consideramos que a taxa de contaminação seja proporcional ao números de interações entre os dois grupos. Ou seja, a taxa de contaminação é proporcional tanto a $x(t)$ quanto a $y(t)$, então

$$x'(t) = k \cdot x(t) \cdot y(t),$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Dada uma comunidade de n pessoas não contaminadas e introduzimos uma pessoa infectada, então

$$x(t) + y(t) = n + 1.$$

Assim

$$\begin{cases} x'(t) = k \cdot x(t) \cdot (n + 1 - x(t)) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Observamos que, ao longo do tempo a quantidade de pessoas da comunidade não se altera, no entanto, acontece uma diminuição do número de pessoas que ainda não foram expostas, $y(t)$, e assim, um aumento no número de pessoas contaminadas $x(t)$.

2.2.4 Lei de Newton do Esfriamento / Aquecimento

Em um corpo, a taxa de variação de temperatura $T(t)$ em um instante t é proporcional a diferença da temperatura do corpo pela temperatura do meio em que o corpo se encontra.

Considerando a temperatura ambiente constante denotada por T_a, modelamos a situação pela seguinte equação

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a), \quad k > 0$$

de forma equivalente, reescrevemos como

$$T'(t) + kT(t) - kT_a = 0,$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Adotamos k com sinal negativo na equação acima pelo fato de que o calor flui da fonte quente para fonte fria. Então, quando a temperatura do corpo é maior ao comparada com a temperatura do ambiente, ocorre uma perda de calor do corpo para o meio, e assim, uma variação negativa. Como o fator $(T - T_a)$ é positivo, devemos multiplicá-lo por um valor negativo.

$$T(t) > T_a \Rightarrow \text{corpo perde calor} \Rightarrow T(t) - T(\tilde{t}) < 0, \text{ se } t > \tilde{t} \Rightarrow T'(t) < 0.$$

No entanto, quando a temperatura do corpo é menor ao comparada com a temperatura do ambiente, ocorre um ganho de calor do corpo, e assim, uma variação positiva. Como o fator $(T - T_a)$ é negativo, devemos multiplicá-lo por um valor negativo.

$$T(t) < T_a \Rightarrow \text{corpo ganha calor} \Rightarrow T(t) - T(\tilde{t}) > 0, \text{ se } t > \tilde{t} \Rightarrow T'(t) > 0.$$

2.2.5 Dinâmica Populacional

2.2.5.1 Modelo de Malthus

A primeira modelagem matemática da dinâmica populacional de um local, traz a hipótese de que a taxa de crescimento populacional em um determinado instante é proporcional à população $P(t)$ local naquele instante. No entanto, a variação populacional é dada pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, ou seja,

$$P'(t) = k_n P(t) - k_m P(t) = (k_n - k_m)P(t),$$

ou ainda,

$$P'(t) = kP(t), \quad k > 0$$

sendo k_n a constante de proporcionalidade da taxa de natalidade, k_m a constante de proporcionalidade da taxa de mortalidade e $k = k_n - k_m$. Vejamos então que,

$$k_n > k_m \Rightarrow k > 0 \Rightarrow \text{população cresce}$$

$$k_n < k_m \Rightarrow k < 0 \Rightarrow \text{população decresce.}$$

Observamos que esse modelo não considera fatores que afetam a população, tais quais emigração e imigração, alguns tipos de doenças, fatores limitantes do meio ambiente, entre outros. Sendo assim, esse modelo pode ser útil em um curto período.

Tendo em vista as restrições do modelo de Malthus para taxa de crescimento populacional, o modelo de Verhulst traz um modelo mais preciso ao considerar os fatores externos que influenciam o crescimento em uma população em um determinado tempo.

2.2.5.2 Modelo de Verhulst

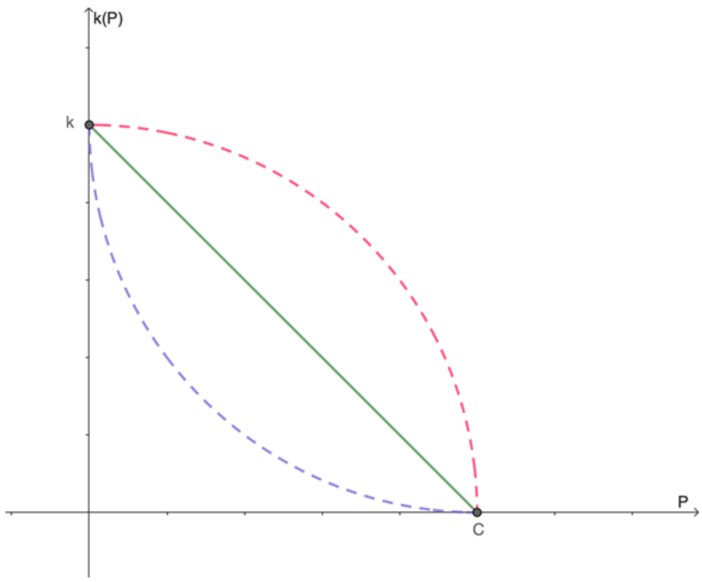
Nessa modelagem consideramos os fatores limitantes do ambiente, como suprimento e espaço, além do número de habitantes em um determinado instante. Isto considera que a população cresça até um limite sustentável, tendendo a estabilizar.

A taxa de crescimento é proporcional à população $P(t)$, no entanto devemos considerar que quando a população é baixa, a taxa de crescimento tende a ser maior, pois o ambiente possui recursos físicos e alimentícios para que haja possibilidade de crescimento. No entanto, quando a população chega próximo ao seu limite sustentável, a taxa de crescimento é baixíssima, por não haver espaço físico que supra a necessidade e os suprimentos vão se tornando cada vez mais escassos. Consideramos então, que a nossa constante de proporcionalidade depende da população em um determinado momento, com as características acima, a função mais simples é dada por

$$k(P) = a - bP$$

onde a e b são constantes positivas. Sendo C a capacidade de carga populacional suportada pelo ambiente, então $k(C) = 0$ e $k(0) = k$, assim as constantes devem assumir os seguintes valores: $a = k$ e $b = \frac{k}{C}$.

Figura 2 – A suposição mais simples para $f(P)$ é uma linha reta (cor verde)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Substituindo essa constante no modelos de Malthus, temos que

$$P'(t) = \left[k - \frac{k}{C}P(t)\right] \cdot P(t).$$

Ou ainda

$$P'(t) = kP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{C}\right].$$

Observamos que $P(t) > 0$, então a equação satisfaz as condições:

- $P(t) > C \Rightarrow \frac{P(t)}{C} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{P(t)}{C} < 0$ representando um decrescimento da população.
- $P(t) < C \Rightarrow \frac{P(t)}{C} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{P(t)}{C} > 0$ representando um crescimento da população.

Observamos que as EDOs podem ser utilizada em diversas áreas do conhecimento. No Capítulo 4 alguns desses exemplos serão retomados e aplicados aos métodos de resoluções.

2.3 Teorema de Existência e Unicidade

Nesta seção, apresentamos um importante resultado no estudo de equações diferenciais ordinárias, o Teorema de Existência e Unicidade de uma solução para uma EDO de primeira ordem. Os conceitos e definições introduzidos na sequência, apresentam informações importantes sobre a existência de soluções para que possamos estudar as propriedades de soluções de uma EDO.

Definição 6. O Problema de Valor Inicial (PVI) é uma equação diferencial juntamente com uma condição inicial, ou seja, em um determinado ponto um valor é atribuído à função incógnita.

Dessa forma, um PVI para uma EDO de 1ª ordem pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

onde f é uma função definida em um aberto A de $\mathbb{R}^2$ e $(t_0, y_0) \in A$.

Vejamos que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que a função

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

é diferenciável em (a,b) e $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Logo, $F(t)$ é uma solução da EDO

$$y'(t) = f(t) \quad a < t < b.$$

Além disso, como $F(a) = 0$, então $F(t)$ é uma solução do seguinte PVI

$$\begin{cases} y'(t) = f(t), \quad a < t < b, \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Vamos verificar se é a única solução. Suponhamos que $G(t)$ é outra solução, então

$$G'(t) = f(t) = F'(t) \Rightarrow (F-G)'(t) = 0 \Rightarrow (F-G)(t) = c, \quad t \in [a,b]$$

onde c é uma constante, pois $F-G$ é uma função contínua em $[a,b]$.

No entanto, temos que

$$(F-G)(a) = F(a) - G(a) = 0 - 0 = 0$$

concluímos então que $c = 0$ e, portanto, $F(t) = G(t)\ \forall\, t \in [a,b]$. Sendo assim, $F(t)$ é solução única do PVI.

No entanto, nem todo problema de valor inicial tem uma única solução, existem alguns casos que possuem mais de uma solução, ou nenhuma solução.

Exemplo 3. Considere o PVI

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Observamos que não existe solução para esse PVI, de fato, temos que $y = \ln \mid t \mid$, a qual não está definida para $t = 0$.

Assim, surgem dois questionamentos:

1. Como sabemos que o PVI possui solução?

2. Como sabemos que essa solução é única?

O teorema a seguir ajuda a responder essas questões.

Teorema 1. (Existência e Unicidade Local) Seja f e $\frac{\partial f}{\partial t}$ funções contínuas em uma região retangular R em um plano definida por $R = \{(t,y) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a \ \text{ e } \mid y - y_0 \mid \leqslant b\} \subset A$, onde $a, b \in \mathbb{R}^+$. Seja ainda $M = \max\limits_{(t,y)\in R} \mid f(t,y) \mid$ e $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. Então, o PVI possui uma única solução $y = y(t)$ no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Exemplo 4. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y^2 + \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Observamos que as funções $f(t,y) = y^2 + \cos t$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ são contínuas em qualquer retângulo $R = \{(t,y) \mid 0 \leqslant t \leqslant a \ \text{ e } \mid y \mid \leqslant b\}$ em que $a, b \in \mathbb{R}^+$. Além disso,

$$M = \max_{(t,y)\in R} \mid f(t,y) \mid = \max_{|y|\leqslant b; 0\leqslant t\leqslant a} \mid y^2 + \cos t \mid = b^2 + 1.$$

Assim, $\alpha = \min\{a; \frac{b}{b^2+1}\}$. Como podemos tomar qualquer valor para a, temos que o valor máximo de α é obtido quando $\frac{b}{b^2+1}$ for máximo, então, $\frac{1}{2}$. Portanto, o Teorema garante que a solução $y(t)$ existe e é única para $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$.

Exemplo 5. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Observamos que $f(t,y) = t\sqrt{y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{2\sqrt{y}}$ são contínuas em algumas regiões, no entanto, $\frac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua no retângulo $R = \{(t,y) \mid 0 \leqslant t \leqslant a \;\text{ e }\; \mid y \mid \leqslant b\}$, pois não está definida no ponto $(0,0)$. Logo, não pode ser garantida a unicidade da solução. De fato, é fácil verificar que as funções $y = 0$ e $y = \frac{t^4}{16}$ satisfazem a equação diferencial acima, e, portanto, esse problema de valor inicial tem pelo menos duas soluções.

CAPÍTULO

3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Esse capítulo tem o objetivo de mostrar métodos de resolução para alguns tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que aparecem de maneira mais frequente, mostrando as características e técnicas de resolução de cada uma delas. Isto possibilita a utilização em modelagens de fenômenos reais, permitindo gerar e interpretar as soluções. Esses métodos foram baseados em (SILVA, 2020), (JUNIOR, 2013), (NOBREGA, 2010), (YARTEY; RIBEIRO, 2017).

3.1 Equações lineares

Iniciamos nosso estudo com as equações lineares que tem um método mais simples de resolução e aparecem frequentemente em aplicações.

Definição 7. A forma geral de uma equação linear de primeira ordem é dada por:

$$y' + p(t)y = q(t), \tag{3.1}$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas num intervalo I da reta.

Observação 2. Seja $p_0(t)$, $p_1(t)$ e $q_1(t)$ funções contínuas num intervalo I e $p_1(t) \neq 0$ em I, então a equação

$$p_1(t)y' + p_0(t)y = q_1(t)$$

pode ser reescrita como $y' + p(t)y = q(t)$, onde $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas em I.

Observação 3. A equação (3.1) é chamada linear pois a parte dependente de y é linear em y. De fato, seja $g(t,y) := p(t)y$. Assim:

$$\begin{aligned} g(t,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2) &= p(t)[\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2] \\ &= \alpha_1 p(t)y_1+\alpha_2 p(t)y_2 \\ &= \alpha_1 g(t,y_1)+\alpha_2 g(t,y_2). \end{aligned}$$

Exemplo 6. A equação $y' = y\cdot \text{sen}(t)+t^2$ é uma EDO linear de primeira ordem. De fato, temos que $g(t,y) = y\cdot \text{sen}(t)$ e

$$\begin{aligned} g(t,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2) &= (\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)\cdot \text{sen}(t) \\ &= \alpha_1 y_1 \text{ sen}(t)+\alpha_2 y_2 \text{ sen}(t) \\ &= \alpha_1 g(t,y_1)+\alpha_2 g(t,y_2) \end{aligned}$$

Exemplo 7. Veja que a linearidade não ocorre quando $y' = y^2+t^2$. Neste caso, $g(t,y) = y^2$ então

$$\begin{aligned} g(t,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2) &= [\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2]^2 \\ &= (\alpha_1 y_1)^2+2\cdot(\alpha_1 y_1)\cdot(\alpha_2 y_2)+(\alpha_2 y_2)^2 \\ &= (\alpha_1)^2 g(t,y_1)+(\alpha_2)^2 g(t,y_2)+2\cdot(\alpha_1 y_1)\cdot(\alpha_2 y_2) \\ &\neq \alpha_1 g(t,y_1)+\alpha_2 g(t,y_2). \end{aligned}$$

Observação 4. Considere o PVI associado à (3.1),

$$\begin{aligned} y'+p(t)y &= q(t) \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em um intervalo I e $t_0 \in I$. Então, pelo Teorema da Existência e Unicidade, esse PVI possui uma única solução local, pois, as funções $f(t,y) = -p(t)y+q(t)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(t)$ são contínuas em t e em y.

Apresentamos a seguir métodos de resolução para a equação (3.1) e soluções para o PVI associado a esta equação.

3.1.1 Equações lineares homogêneas

A solução da equação (3.1) não é imediata, iniciamos simplificando-a de forma que $q(t) \equiv 0$, assim

$$y'+p(t)y = 0. \tag{3.2}$$

Definição 8. A equação (3.1) é chamada de **Equação linear não homogênea de primeira ordem [L.N.H.]** enquanto a equação (3.2) é chamada de **Equação linear homogênea de primeira ordem [L.H.]** associada a (3.1).

Desde que $y(t) \neq 0$ em I, a equação (3.2) pode ser facilmente resolvida isolando y' e dividimos ambos os membros por y, assim:

$$\frac{y'}{y} = -p(t).$$

Analisando o primeiro membro da equação temos que $\frac{y'}{y} = (ln \mid y(t) \mid)'$ e reescrevendo a equação, temos:

$$(ln \mid y(t) \mid)' = -p(t).$$

De forma simples, podemos resolver integrando ambos os lados da igualdade em relação a t, e obtemos:

$$ln \mid y(t) \mid = -\int p(t)dt + c_1$$

onde c_1 é uma constante de integração. Aplicando a função exponencial em ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$\mid y(t) \mid = e^{-\int p(t)dt + c_1},$$

o que implica

$$y(t) = ce^{-\int p(t)dt}, \quad \forall\, c \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Vejamos que, $y(t)$ em (3.3) é solução para a [L.H.] (3.2). Além disso, qualquer outra solução será dessa forma, para algum $c \in \mathbb{R}$.

Definição 9. A equação (3.3) é dita solução geral da equação diferencial linear homogênea [L.H] (3.2).

Exemplo 8. Dada a equação linear homogênea $y' + 2y = 0$ encontraremos a solução geral.

Neste caso temos que $p(t) = 2$. Logo, a solução geral é dada por

$$y(t) = ce^{-\int 2dt} = ce^{-2t}.$$

Exemplo 9. Seja o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' - 3y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Neste caso temos que $p(t) = -3$, logo, a solução geral é dada por

$$y(t) = ce^{-\int -3dt} = ce^{3t}.$$

Como $y(0) = 1$, então

$$1 = y(0) = ce^{0} \Rightarrow c = 1.$$

Desse modo, a solução do PVI é dada por

$$y(t) = e^{3t}.$$

Proposição 1. Sejam y_1 e y_2 soluções de [L.H.]. Então:

I. $y_1 + y_2$ também é solução de [L.H.];

II. $cy_1, \forall\, c \in \mathbb{R}$, também é solução de [L.H.];

III. a função $y(t) \equiv 0$ é solução de [L.H.].

Demonstração. (I) Substituindo $y_1 + y_2$ em [L.H.], temos que

$$\begin{aligned}(y_1+y_2)' + p(t)(y_1+y_2) &= y_1' + y_2' + p(t)y_1 + p(t)y_2\\ &= (y_1' + p(t)y_1) + (y_2' + p(t)y_2)\\ &= 0,\end{aligned}$$

pois y_1 e y_2 são soluções de [L.H.]. Logo, $y_1 + y_2$ é solução da [L.H.].

(II) Substituindo cy_1 em [L.H.], temos que

$$\begin{aligned}(cy_1)' + p(t)(cy_1) &= cy_1' + cp(t)y_1\\ &= c(y_1' + p(t)y_1)\\ &= 0\end{aligned}$$

pois y_1 é solução de [L.H.]. Logo, cy_1 é solução da [L.H.].

(III) Sendo $y(t) \equiv 0$ então $y'(t) \equiv 0$. Substituindo em [L.H.] temos que

$$y' + p(t)y = 0 + p(t)0 = 0,$$

portanto $y(t) \equiv 0$ é solução da [L.H.]. □

Observação 5. Concluímos da proposição anterior que o conjunto das soluções de [L.H.] é um espaço vetorial de dimensão 1 e que $y(t) = ce^{-\int p(t)dt}$ é uma base para esse espaço.

3.1.2 Equações lineares não homogêneas

Estudaremos um caso particular de resolução para as equações lineares, no qual denominamos como equações lineares não homogêneas de primeira ordem.

Iniciamos tentando encontrar uma solução geral para a equação linear não homogênea de primeira ordem

$$y' + p(t)y = q(t),$$

utilizando as ideias envolvidas nas [L.H]. De forma semelhante, precisamos ter

$$(\text{algo})' = q(t),$$

no qual integraríamos ambos os membros para encontrarmos a função de "algo". No entanto, $y' + p(t)y$ não parece ser a derivada de uma expressão simples. Para que o primeiro membro da equação se torne uma expressão de uma derivada trivial, procuramos uma função $\mu(t)$, contínua e diferenciável, e multiplicamos toda a equação por $\mu(t)$, dessa forma

$$\mu(t) \cdot y' + \mu(t) \cdot p(t)y = \mu(t) \cdot q(t). \tag{3.4}$$

De modo que $\mu(t) \cdot y' + \mu(t) \cdot p(t)y$ seja a derivada de alguma expressão simples. Observe que

$$(\mu(t) \cdot y)' = \mu(t) \cdot y' + \mu'(t) \cdot y$$

e assim

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t) \Leftrightarrow \mu'(t) - \mu(t)p(t) = 0.$$

Observamos que, $\mu'(t) - \mu(t)p(t) = 0$ é uma [L.H.], podendo aplicar o método de resolução apresentado, de modo que $\mu(t) = ce^{\int p(t)dt}$. Como precisamos somente de uma função que satisfaça, adotamos $c = 1$, portanto:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Dessa forma, a equação (3.4) pode ser escrita como

$$(\mu(t) \cdot y)' = \mu(t) \cdot q(t).$$

De forma simples, podemos resolver integrando ambos os lados da igualdade.

$$\mu(t) \cdot y = \int \mu(t) \cdot q(t)dt + c,$$

o que equivale a

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) \cdot q(t)dt + c.$$

Como $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, então

$$y(t) = \frac{1}{e^{\int p(t)dt}} \left[\int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)dt + c \right]$$

e, portanto,

$$y(t) = ce^{-\int p(t)dt} + e^{-\int p(t)dt} \int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)dt$$

é solução geral das equações lineares de primeira ordem não homogêneas.

Observação 6. Observamos que a primeira parcela na soma da solução geral é a solução da [L.H.] associada, e que a segunda parcela é a solução particular da [L.N.H.] quando $c = 0$, ou seja,

$$y(t) = 0e^{-\int p(t)dt} + e^{-\int p(t)dt} \int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)dt = e^{-\int p(t)dt} \int e^{\int p(t)dt} \cdot q(t)dt.$$

Assim, a solução geral das equações lineares não homogêneas de primeira ordem é dada pela soma da solução geral da [L.H.] associada com uma solução particular da [L.N.H.].

Definição 10. A função $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ é chamada de fator integrante para as equações lineares não homogêneas.

Observação 7. Observamos que decorar a fórmula da solução de uma [L.N.H.] não é simples, sendo mais prático repetir o método.

Exemplo 10. Encontremos a solução da EDO

$$y' + 2ty = t^3.$$

Observamos que $p(t) = 2t$, então,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\cdot d(t)} = e^{\int 2t dt} = e^{t^2}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{t^2}y' + e^{t^2}2ty = e^{t^2}t^3 \Rightarrow (e^{t^2}y)' = e^{t^2}t^3.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade,

$$e^{t^2}y = \int e^{t^2}t^3 dt,$$

e

$$e^{t^2}y = \frac{e^{t^2}}{2}(t^2-1) + c_1.$$

Logo,

$$y(t) = \frac{t^2-1}{2} + ce^{-t^2}.$$

Exemplo 11. Encontremos a solução da EDO

$$3y' + 12y = 4.$$

Primeiramente, dividimos ambos os lados da equação por 3, assim,

$$y' + 4y = \frac{4}{3}.$$

Observamos que $p(t) = 4$, então,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\cdot d(t)} = e^{\int 4dt} = e^{4t}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{4t}y' + e^{4t}4y = e^{4t}\frac{4}{3} \Rightarrow (e^{4t}y)' = \frac{4}{3}e^{4t}.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade,

$$e^{4t}y = \frac{4}{3}\int e^{4t}dt,$$

o que implica que

$$e^{4t}y = \frac{e^{4t}}{3} + c_1.$$

Logo,

$$y(t) = \frac{1}{3} + ce^{-4t}.$$

Exemplo 12. Encontremos a solução do seguinte PVI

$$\begin{cases} y' - y\,\mathrm{sen}(t) = 2\,\mathrm{sen}(t) \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}.$$

Observamos que $p(t) = -\,\mathrm{sen}(t)$, então,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -\,\mathrm{sen}(t)dt} = e^{\cos(t)}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{\cos(t)}y' - e^{\cos(t)}y\,\mathrm{sen}(t) = e^{\cos(t)}2\,\mathrm{sen}(t) \Rightarrow (e^{\cos(t)}y)' = e^{\cos(t)}2\,\mathrm{sen}(t).$$

Integrando ambos os membros da última igualdade,

$$e^{\cos(t)}y = \int e^{\cos(t)}2\,\mathrm{sen}(t)dt,$$

obtemos,

$$e^{\cos(t)}y = -2e^{\cos(t)} + c_1.$$

Logo,

$$y(t) = -2 + \frac{c}{e^{\cos(t)}}.$$

Como $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, então

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + \frac{c}{e^{\cos(t)}} \Rightarrow 1 = -2 + c \Rightarrow c = 3.$$

Temos que a solução do PVI é dada por

$$y(t) = -2 + \frac{3}{e^{\cos(t)}} = -2 + 3e^{-\cos(t)}.$$

3.1.3 Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli é dada por

$$y' + a(t)y = b(t)y^n$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas num intervalo I da reta e $n \in \mathbb{R}$.

A equação sempre tem como solução $y \equiv 0$, chamada solução trivial. Portanto, temos como objetivo procurar soluções não triviais.

Assim, vamos supor que existe uma solução para a equação que não se anula em algum ponto, ou seja, $y(t) \neq 0$ para $t \in I$.

Observamos que, quando $n = 0$ ou $n = 1$, temos uma equação linear e pode ser resolvida pelo método do fator integrante. No entanto, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$ esta equação é não linear, e para torná-la linear, é necessário realizar uma mudança de variável da forma $z = y^{1-n}$. De fato, com restrições usuais para a existência de raízes de ordem $n-1$,

$$z = y^{1-n} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y' = \frac{z'}{n-1} z^{\frac{n}{1-n}}.$$

Substituindo na equação de Bernoulli, temos

$$\frac{z'}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} + a(t) z^{\frac{1}{1-n}} = b(t) z^{\frac{n}{1-n}}.$$

Multiplicando toda a igualdade por $\left(\frac{1-n}{z^{\frac{n}{1-n}}}\right)$ e notando que $z \cdot z^{\frac{n}{1-n}} = z^{\frac{1}{1-n}}$, obtemos

$$z' + (1-n)a(t)z = (1-n)b(t). \tag{3.5}$$

Veja que essa nova EDO é linear não homogênea de primeira ordem e pode ser resolvida pelo método do fator integrante, sendo possível encontrar uma solução para a equação de Bernoulli.

Exemplo 13. Encontre a solução da equação $y' + 5y = y^3$.

Temos que $n = 3$, $a(t) = 5$, $b(t) = 1$ e $z = y^{-2}$. Substituindo em (3.5), obtemos

$$z' - 10z = -2.$$

Observamos que $p(t) = -10$, então,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -10dt} = e^{-10t}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{-10t} z' - 10e^{-10t} z = -2e^{-10t}.$$

Assim

$$\left(e^{-10t} z\right)' = -2e^{-10t}.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$e^{-10t} z = \frac{2}{10} e^{-10t} + c = \frac{e^{-10t}}{5} + c.$$

Logo,

$$z(t) = \frac{1}{5} + \frac{c}{e^{-10t}} = \frac{1}{5} + ce^{10t}.$$

Como $y = z^{-\frac{1}{2}}$, a solução é dada por

$$y(t) = \left(\frac{1}{5} + ce^{10t}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 14. Encontre a solução da equação $ty' + y = y^4 t^3$.

Temos que $n = 4$, $a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = t^2$ e $z = y^{-3}$. Substituído em (3.5), obtemos

$$z' - \frac{3}{t}z = -3t^2.$$

Observamos que $p(t) = -\frac{3}{t}$, então,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -\frac{3}{t}dt} = t^{-3}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$t^{-3}z' - 3t^{-4}z = -t^{-3}3t^2.$$

Assim

$$\left(t^{-3}z\right)' = -\frac{3}{t}.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$t^{-3}z = -3\ln|t| + c.$$

Logo,

$$z(t) = -3t^3\ln|t| + ct^3.$$

Como $y = z^{-\frac{1}{3}}$, a solução é dada por

$$y(t) = \left(-3t^3\ln|t| + ct^3\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

3.1.4 Equação de Ricatti

A equação de Ricatti é dada por

$$y' + a(t)y + b(t)y^2 = f(t)$$

onde $a(t)$, $b(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas num intervalo I da reta e $b(t) \neq 0$ em I. Dada uma solução particular y_1 da equação de Ricatti, é possível fazer uma mudança de variável, $y = y_1 + \frac{1}{z}$, tal que a equação se torne uma EDO linear não homogênea.

De fato, como $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$, substituindo da equação de Ricatti, temos

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + a(t)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + b(t)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 = f(t).$$

Reescrevendo,

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + y_1a(t) + \frac{1}{z}a(t) + y_1^2b(t) + 2\frac{y_1}{z}b(t) + \left(\frac{1}{z}\right)^2 b(t) = f(t).$$

Ou seja,

$$\left(y_1' + y_1a(t) + y_1^2b(t)\right) - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z}a(t) + 2\frac{y_1}{z}b(t) + \frac{1}{z^2}b(t) = f(t).$$

Como y_1 é solução da equação de Ricatti, então a equação acima pode ser reescrita como

$$f(t) - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z}a(t) + 2\frac{y_1}{z}b(t) + \frac{1}{z^2}b(t) = f(t).$$

Isto implica que

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z}a(t) + 2\frac{y_1}{z}b(t) + \frac{1}{z^2}b(t) = 0.$$

Multiplicando tudo por z^2 e reorganizando, temos

$$-z' + z[a(t) + 2y_1 b(t)] + b(t) = 0.$$

Ou seja,

$$z' - z[a(t) + 2y_1 b(t)] = b(t). \tag{3.6}$$

Veja que essa nova EDO é linear não homogênea de primeira ordem e pode ser resolvida pelo método do fator integrante, desde que seja conhecida uma solução particular y_1 da Equação de Ricatti.

Exemplo 15. Encontremos a solução da equação $y' = 1 + 2y + y^2$.

Observamos que $y_1 = -1$ é uma solução particular.

Temos que $a(t) = -2$, $b(t) = -1$ e $y_1 = -1$ é uma solução particular. Substituindo em (3.6), obtemos

$$z' = -1.$$

Tendo assim uma EDO linear, resolvemos integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$z(t) = -t + c.$$

Como $y = y_1 + \frac{1}{z} = -1 + \frac{1}{z}$, segue que $z = \frac{1}{y+1}$ e a solução é dada por

$$y(t) = \frac{1}{-t+c} - 1.$$

Exemplo 16. Encontremos a solução da equação $2y' - \left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1 = 0$, com $t > 0$, conhecendo a solução particular $y_1 = t$.

Dividimos toda a equação por 2, assim

$$y' - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{t}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Temos que $a(t) = 0$ e $b(t) = -\dfrac{1}{2t^2}$. Substituindo em (3.6), obtemos

$$z' + 2zy_1\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2t^2}.$$

Observamos que $y_1 = t$, o que implica

$$z' + z\frac{1}{t} = -\frac{1}{2t^2}.$$

Tendo assim uma EDO linear não homogênea, onde $p(t) = \frac{1}{t}$, então

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{ln\, t} = t.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$tz' + z = -\frac{1}{2t}.$$

Assim

$$(tz)' = -\frac{1}{2t}.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$tz = -\frac{ln\, t}{2} + c.$$

Logo,

$$z(t) = -\frac{ln\, t}{2t} + \frac{c}{t}.$$

Como $y = y_1 + \frac{1}{z} = t + \frac{1}{z}$, temos que a solução é dada por

$$y(t) = \frac{2t}{c - ln\, t} + t.$$

3.2 Equações não lineares

Nessa seção, abordamos os métodos de resolução para as equações diferenciais não lineares. Convenientemente, muitas vezes, escrevemos a equação

$$y' = f(t,y)$$

como

$$M(t,y) + N(t,y)y' = 0$$

Isto sempre é possível, pois basta tomarmos $M(t,y) = -f(t,y)$ e $N(t,y) = 1$.

3.2.1 Equações exatas

Definição 11. Dada a equação diferencial de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

ou ainda,

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0, \tag{3.7}$$

no qual $M,\ N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dizemos que ela é uma equação diferencial exata se existir uma função $V : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo $(t,y) \in \Omega$

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \text{ e } \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = N(t,y).$$

Exemplo 17. A equação $(t+y)^2dt + (2ty+t^2-1)dy = 0$ é exata, pois $V(t,y) = \frac{t^3}{3} + t^2y + ty^2 - y$ é tal que

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = t^2 + 2ty + y^2 = (t+y)^2 = M(t,y) \text{ e } \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = t^2 + 2ty - 1 = N(t,y).$$

Observamos ainda, que essa não é uma equação linear.

Observação 8. Observamos que, se $y = y(t), t \in I$, é solução da equação (3.7) e ela é exata, então existe uma função $V(t,y)$ tal que $\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial t} = M(t,y), \dfrac{\partial V(t,y)}{\partial y} = N(t,y)$ e

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0.$$

Logo, se $V(t,y)$ é diferenciável, pela regra da cadeia, a equação acima é o mesmo que

$$\frac{d}{dt}V(t,y(t)) = 0 \quad t \in I.$$

Ou seja, $V(t,y(t)) = c$ para todo $t \in I$ e algum $c \in \mathbb{R}$. Logo, as soluções da equação exata são dadas implicitamente pela equação $V(t,y) = c$.

Definição 12. A função $V(t,y)$ é chamada integral primeira de (3.7) e as suas curvas definidas pela equação $V(t,y) = c$ são chamadas curvas de integrais.

Observamos que, no exemplo acima, verificar que a equação é exata e encontrar sua solução foi simples. É fácil verificar que o primeiro membro é dado pela derivada de $\frac{t^3}{3} + t^2y + ty^2 - y$ em relação a t, já o segundo membro é dado pela derivação da mesma função em y. Porém, nem todas as equações esse reconhecimento é trivial. O teorema a seguir fornece um critério para determinarmos se a equação dada é exata.

Teorema 2. Suponha que as funções $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial t}$ sejam contínuas num retângulo $R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < t < b \text{ e } c < y < d\}$. Então (3.7) é uma equação diferencial exata se, e somente se, para todo $(t,y) \in R$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Demonstração. Suponhamos que a equação (3.7) é exata. Então existe uma função $V(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = M \text{ e } \frac{\partial V}{\partial y} = N.$$

Assim,
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial t},\quad \frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\quad \frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\quad \text{e}\quad \frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial y}.$$
No qual, todas as derivadas de 2ª ordem de V são contínuas, pois $\frac{\partial M}{\partial y},\frac{\partial M}{\partial t},\frac{\partial N}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial t}$ são contínuas. Segue, pelo Teorema de Schwarz que
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial y}.$$
Logo,
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}.$$

Reciprocamente, suponhamos que M e N satisfaça a equação acima. Devemos mostrar então que existe uma função $V(t,y)$ que satisfaça
$$\frac{\partial V}{\partial t}=M \text{ e } \frac{\partial V}{\partial y}=N.$$
Utilizamos a equação $\frac{\partial V}{\partial t}=M$ e,integrando em t, temos
$$V(t,y)=\int M(t,y)dt+h(y)$$
No qual, $h(y)$ é uma função arbitrária de y. Derivando a expressão acima em relação a y, temos
$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}=\int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)dt+h'(y).$$
Assim $\frac{\partial V}{\partial y}=N$, se, e somente se
$$N(t,y)=\int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)dt+h'(y).$$
Ou seja, se, e somente se
$$h'(y)=N(t,y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)dt. \tag{3.8}$$
Vejamos que, o segundo membro da equação (3.8) só depende de y. De fato,
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N(t,y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)dt\right)=\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)=0$$
pois, por hipótese $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$. Então, integrando (3.8) em y, temos
$$h(y)=\int\left[N(t,y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)dt\right]dy.$$
E, portanto,
$$V(t,y)=\int M(t,y)dt+\int\left[N(t,y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)dt\right]dy$$
é uma função tal que $\frac{\partial V}{\partial t}=M$ e $\frac{\partial V}{\partial y}=N$. $\square$

A demonstração acima nos fornece um método de resolução para calcularmos $V(t,y)$ e, portanto, a solução da equação (3.7). No entanto, é difícil memorizar a expressão para $V(t,y)$, sendo mais simples repetir todo o método de resolução. Observamos que, na maioria das vezes as soluções são expressas de maneira implícita, e nem sempre será possível mostrá-las na forma explícita.

Exemplo 18. Encontre uma solução para a equação

$$(2ty+3)+(t^2+4y)y' = 0.$$

Neste caso, temos que $M(t,y) = 2ty+3$ e $N(t,y) = t^2+4y$. Essa equação é exata pois, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2t = \frac{\partial N}{\partial t}$ e, assim, existe uma função $V(t,y)$ tal que,

$$\text{(i) } \frac{\partial V}{\partial t} = 2ty+3 \text{ e (ii) } \frac{\partial V}{\partial y} = t^2+4y$$

Integrando (i) em relação a t, obtemos

$$V(t,y) = t^2y+3t+h(y).$$

Derivando em relação a y e usando (ii), temos

$$t^2+h'(y) = \frac{\partial V}{\partial y} = t^2+4y.$$

Implicando em

$$h'(y) = 4y \Rightarrow h(y) = 2y^2.$$

Assim, as soluções são dadas implicitamente pelas curvas integrais $V(t,y) = c$, ou seja

$$V(t,y) = t^2y+3t+2y^2 = c.$$

Exemplo 19. Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} (y^2\cos(t)-3t^2y-2t)dt+(2y\,\mathrm{sen}(t)-t^3+ln\,y)dy = 0 \\ y(0) = e \end{cases}$$

Neste caso, temos que $M(t,y) = y^2\cos(t)-3t^2y-2t$ e $N(t,y) = 2y\,\mathrm{sen}(t)-t^3+ln\,y$. Essa equação é exata pois, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\cos(t)-3t^2 = \frac{\partial N}{\partial t}$, e assim, existe uma função $V(t,y)$ tal que,

$$\text{(i) } \frac{\partial V}{\partial t} = y^2\cos(t)-3t^2y-2t \text{ e (ii) } \frac{\partial V}{\partial y} = 2y\,\mathrm{sen}(t)-t^3+ln\,y.$$

Integrando (i) em relação a t, obtemos

$$V(t,y) = y^2\,\mathrm{sen}(t)-t^3y-t^2+h(y).$$

Derivando em relação a y e usando (ii), temos

$$2y\,\mathrm{sen}(t) - t^3 + h'(y) = \frac{\partial V}{\partial y} = 2y\,\mathrm{sen}(t) - t^3 + ln\,y.$$

Implicando que

$$h'(y) = ln\,y \Rightarrow h(y) = yln\,y - y.$$

Assim, as curvas integrais são dadas por $V(t,y) = c$, logo

$$V(t,y) = y^2\,\mathrm{sen}(t) - t^3 y - t^2 + yln\,y - y = c.$$

Aplicando a condição inicial do PVI, ou seja, $y(0) = e$, obtemos

$$e^2\,\mathrm{sen}0 - 0^3 e - 0^2 + eln\,e - e = c \Rightarrow c = 0.$$

Logo, a solução do problema de valor inicial será dada implicitamente por

$$y^2\,\mathrm{sen}(t) - t^3 y - t^2 + yln\,y - y = 0.$$

3.2.2 Equações com Variáveis Separáveis

Definição 13. Uma equação da forma

$$M(t)N(y)dt + P(t)Q(y)dy = 0 \tag{3.9}$$

é dita equação com variáveis separáveis, onde $P(t) \neq 0$ para todo t, e $N(y) \neq 0$ para todo y.

Multiplicando a equação acima por $\mu(t,y) = \frac{1}{P(t)N(y)}$ conseguimos rearranjar a equação de modo que separe os coeficientes dependentes da mesma variável, assim

$$\frac{M(t)}{P(t)}dt + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0. \tag{3.10}$$

Observamos que a equação (3.10) é exata pois

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M(t)}{P(t)}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q(y)}{N(y)}\right)$$

e, logo, as curvas integrais são dadas por

$$V(t,y) = \int \frac{M(t)}{P(t)}dt + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = c$$

as quais definem implicitamente a solução $y(t)$ de (3.9). De fato, se $V(t,y)$ é tal que

$$\text{(i) } \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{M(t)}{P(t)} \text{ e (ii) } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{Q(y)}{N(y)},$$

integrando (i) em relação a t, obtemos

$$V(t,y) = \int \frac{M(t)}{P(t)}dt + h(y).$$

Derivando em relação a y e usando (ii), temos

$$\frac{Q(y)}{N(y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int \frac{M(t)}{P(t)}dt\right] + h'(y)$$

Implicando que

$$h'(y) = \frac{Q(y)}{N(y)} \Rightarrow h(y) = \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy.$$

E, portanto,

$$V(t,y) = \int \frac{M(t)}{P(t)}dt + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy.$$

Exemplo 20. Supondo que $t \neq 0$ e $y \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, encontre um solução para a equação

$$t^2\operatorname{sen}(y)dt + 3t\cos(y)dy = 0.$$

Observamos que podemos escrever a equação acima na forma de

$$\frac{t}{3}dt + \frac{\cos(y)}{\operatorname{sen}(y)}dy = 0$$

e assim temos que $M(t) = t$, $N(y) = \operatorname{sen}(y)$, $P(t) = 3$ e $Q(y) = \cos(y)$. Logo, as curvas integrais são dadas por

$$V(t,y) = \int \frac{t}{3}dt + \int \frac{\cos(y)}{\operatorname{sen}(y)}dy$$

$$V(t,y) = \frac{t^2}{6} + \ln|\operatorname{sen}(y)|$$

$$\frac{t^2}{6} + \ln|\operatorname{sen}(y)| = c.$$

Logo, a solução é dada na forma implícita como

$$\ln|\operatorname{sen}(y)| = -\frac{t^2}{6} + c.$$

Ou ainda,

$$\operatorname{sen}(y) = ke^{-\frac{t^2}{6}}.$$

Exemplo 21. Encontremos a solução do PVI

$$\begin{cases} t^2y' = y - ty \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Observamos que podemos escrever a equação acima na forma de

$$y(1-t)dt - t^2dy = 0,$$

e, observe que, considerando a condição inicial $y(-1) = 1$ do PVI dado, podemos assumir que buscamos uma solução em torno do ponto $(-1, y(-1)) = (-1, 1)$. Especificamente, podemos considerar que $t < 0$ e $y > 0$. Dessa forma, chegamos a uma equação com variáveis separáveis, onde temos que $M(t) = 1-t$, $N(y) = y$, $P(t) = t^2$ e $Q(y) = -1$. Multiplicando toda a equação por $\mu(t,y) = \frac{1}{y \cdot t^2}$, obtemos

$$\frac{1-t}{t^2}dt - \frac{1}{y}dy = 0$$

Logo, as curvas integrais são dadas por

$$\begin{aligned} V(t,y) &= \int \frac{1-t}{t^2}dt - \int \frac{1}{y}dy \\ &= -\frac{1}{t} - ln \mid t \mid - ln \mid y \mid \\ &= c \end{aligned}$$

O que implica que

$$-\frac{1}{t} - ln \mid t \mid - ln \mid y \mid = c$$

Como $y(-1) = 1$, concluímos que

$$-\frac{1}{-1} - ln \mid -1 \mid - ln \mid 1 \mid = c \Rightarrow c = 1.$$

Portanto,

$$-\frac{1}{t} - ln \mid t \mid - ln \mid y \mid = 1$$

Logo, a solução do PVI é dada por

$$y(t) = \frac{1}{t \cdot e^{1+\frac{1}{t}}}.$$

Exemplo 22. Encontremos a solução do PVI

$$\begin{cases} (e^{2y} - y)\cos(t)y' = e^y \operatorname{sen}(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Observamos que podemos escrever a equação acima na forma de

$$e^y \operatorname{sen}(2t)dt - (e^{2y} - y)\cos(t)dy = 0$$

e, observe que, considerando a condição inicial $y(0) = 0$ do PVI dado, podemos assumir que buscamos uma solução em torno do ponto $(0, y(0)) = (0,0)$. Dessa forma, chegamos a uma equação com variáveis separáveis, onde temos que $M(t) = \operatorname{sen}(2t)$, $N(y) = e^y$, $P(t) = \cos(t)$ e $Q(y) = -(e^{2y} - y)$. Multiplicando toda a equação por $\mu(t,y) = \frac{1}{e^y \cos(t)}$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}(2t)}{\cos(t)}dt - \frac{(e^{2y} - y)}{e^y}dy = 0$$

Logo, as curvas integrais são dadas por

$$V(t,y) = \int \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\cos(t)}dt - \int \frac{(e^{2y} - y)}{e^y}dy.$$

Observamos que, pela identidade trigonométrica $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$, então

$$\begin{aligned} V(t,y) &= \int 2\operatorname{sen}(t)dt - \int (e^y - ye^{-y})dy \\ &= -2\cos(t) - e^y - ye^{-y} - e^{-y} \\ &= c, \end{aligned}$$

o que implica que

$$-2\cos(t) - e^y - ye^{-y} - e^{-y} = c.$$

Como $y(0) = 0$, concluímos que

$$-2\cos(0) - e^0 - 0e^{-0} - e^{-0} = c \Rightarrow c = -4.$$

Portanto,

$$-2\cos(t) - e^y - ye^{-y} - e^{-y} = -4.$$

Logo, a solução do PVI é dada implicitamente por

$$e^y + ye^{-y} - e^{-y} = 4 - 2\cos(t).$$

3.2.2.1 Equações autônomas

Uma equação autônoma é aquela em que a variável independente t não está presente de forma explícita, tais equações apresentam a seguinte forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Observe que, sendo $f(y) \neq 0$ para todo y, a equação autônoma é uma equação de variáveis separáveis.

Exemplo 23. Resolva a equação $y' = e^- y$.

Reescrevendo a equação como $e^y dy - dt = 0$, temos que as curvas integrais são dadas por

$$\int e^y dy - \int dt = c$$

logo,

$$e^y - t = c,$$

ou ainda,

$$e^y = c + t.$$

Portanto, a solução da equação é dada por

$$y(t) = \ln|c + t|.$$

3.2.3 Homogênea

Definição 14. Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dita homogênea de grau n se

$$f(\alpha t, \alpha y) = \alpha^n f(t,y)$$

Para todo $\alpha \neq 0$ e todo $(t,y) \in D$ tais que $(\alpha t, \alpha y) \in D$.

Exemplo 24. A função $f(t,y) = t^2 + y^2$ é homogênea de grau 2, pois

$$f(\alpha t, \alpha y) = (\alpha t)^2 + (\alpha y)^2 = \alpha^2 t^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(t^2 + y^2) = \alpha^2 f(t,y).$$

Exemplo 25. A função $f(t,y) = t^3 + 3ty^2$ é homogênea de grau 3, pois

$$f(\alpha t, \alpha y) = (\alpha t)^3 + 3\alpha t(\alpha y)^2 = \alpha^3 t^3 + \alpha^3 3ty^2 = \alpha^3(t^3 + 3ty^2) = \alpha^3 f(t,y).$$

Definição 15. A equação $M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ é dita homogênea se $M(t,y)$ e $N(t,y)$ são funções homogêneas de mesmo grau.

Exemplo 26. Considere a equação $(t^2 - y^2) + (2ty)y' = 0$ na qual $M(t,y) = t^2 - y^2$ e $N(t,y) = 2ty$. Para verificar que a equação é homogênea de grau 2, vamos verificar se $M(t,y)$ e $N(t,y)$ são funções homogêneas de grau 2. Então,

$$M(\alpha t, \alpha y) = (\alpha t)^2 - (\alpha y)^2 = \alpha^2 t^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2(t^2 - y^2) = \alpha^2 M(t,y).$$

Do mesmo modo,

$$N(\alpha t, \alpha y) = 2\alpha t \alpha y = \alpha^2(2ty) = \alpha^2 N(t,y).$$

De fato, a equação $(t^2 - y^2) + (2ty)y' = 0$ é homogênea de grau 2.

Exemplo 27. Considere a equação $(2t + y) + (3t^2)y' = 0$ na qual $M(t,y) = 2t + y$ e $N(t,y) = 3t^2$. Para verificar que a equação é homogênea, vamos verificar se $M(t,y)$ e $N(t,y)$ são funções homogêneas do mesmo grau. Então,

$$M(\alpha t, \alpha y) = 2\alpha t + \alpha y = \alpha(2t + y) = \alpha M(t,y).$$

Do mesmo modo,

$$N(\alpha t, \alpha y) = 3(\alpha t)^2 = \alpha^2(3t^2) = \alpha^2 N(t,y).$$

Observamos que, $M(t,y)$ tem grau 1 e $N(t,y)$ tem grau 2, portanto a equação $(2t + y) + (3t^2)y' = 0$ não é homogênea.

A equação homogênea pode ser resolvida pela mudança de variável $y(t) = tv(t)$. De fato, neste caso temos que $y' = v + t\frac{dv}{dt}$ e que apesar de não ser separável, podemos torná-la usando a mudança de variável.

Suponha que $M(t,y)+N(t,y)y'=0$ seja uma equação homogênea de grau n. Temos que $y' = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}$ e, utilizando a mudança de variável acima, para todo $t \neq 0$ e $(1,v)$ pertencente ao domínio de M e N, temos que

$$v + t\frac{dv}{dt} = -\frac{M(t,tv)}{N(t,tv)}$$

. Ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}dt &= -\frac{1}{v+\frac{M(t,tv)}{N(t,tv)}}dv,\\ &= -\frac{1}{v+\frac{t^nM(1,v)}{t^nN(1,v)}}dv\end{aligned}$$

logo,

$$\frac{1}{t}dt + \frac{1}{v+\frac{M(1,v)}{N(1,v)}}dv = 0,$$

a qual é uma equação de variáveis separáveis.

Observação 9. Observamos que, repetir o processo de mudança de variável é mais simples do que decorar a equação.

Exemplo 28. Encontre a solução da equação $(t^2-y^2)+(2ty)y'=0$.

Sabemos, do exemplo 26, que a equação é homogênea de grau 2. Aplicando então, a mudança de variável,

$$(t^2-(tv)^2)+(2t^2v)\left(v+t\frac{dv}{dt}\right)=0.$$

Reorganizando temos

$$\frac{1}{t}dt + \frac{2v}{1+v^2}dv = 0.$$

Integrando ambos os lados para encontrarmos as curvas integrais, segue que

$$\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{2v}{1+v^2}dv = c,$$

ou seja,

$$\ln|t| + \ln|1+v^2| = c,$$

o que implica que

$$\ln|1+v^2| = c - \ln|t|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}|1+v^2| &= e^{c-\ln|t|}\\ |1+v^2| &= \frac{c}{|t|}.\end{aligned}$$

Voltando a variável original pela substituição $v=\frac{y}{t}$, concluímos que a solução da equação é dada implicitamente por

$$\left|1+\left(\frac{y}{t}\right)^2\right| = \frac{c}{|t|}.$$

Exemplo 29. Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} (4t^2+ty+y^2)-t^2y'=0 \\ y(1)=2 \end{cases}$$

Sendo $M(t,y)=4t^2+ty+y^2$ e $N(t,y)=-t^2$, é fácil verificar que a equação é homogênea de grau 2. Aplicando então, a mudança de variável,

$$(4t^2+ttv+(tv)^2)-(t^2)\left(v+t\frac{dv}{dt}\right)=0,$$

o que implica

$$\frac{1}{t}dt-\frac{1}{4+v^2}dv=0.$$

Integrando ambos os lados para encontrarmos as curvas integrais,

$$\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{4+v^2}dv=c.$$

Ou seja,

$$\ln t-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{v}{2}\right)=c,$$

de onde segue que

$$\arctan\left(\frac{v}{2}\right)=2\ln t-2c.$$

Logo,

$$v=2\cdot\tan(2\ln t-2c).$$

Voltando a variável original pela substituição $v=\frac{y}{t}$, concluímos que a solução da equação é dada por

$$y=2t\cdot\tan(2\ln t-2c).$$

Como $y(1)=2$, concluímos que

$$2\cdot 1\cdot\tan(2\ln 1-2c)=2\Rightarrow c=-\frac{\pi}{8}.$$

Logo, uma solução particular do PVI é dada por

$$y=2t\cdot\tan\left(2\ln t+\frac{\pi}{4}\right).$$

3.2.4 Fator Integrante

Dada a equação de primeira ordem

$$M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0,$$

suponhamos que a EDO não é exata, com variáveis separáveis ou homogênea. Para resolvê-la, vamos tentar encontrar uma função $\mu(t,y)$, chamada fator integrante, de forma que

$$\mu(t,y)M(t,y)+\mu(t,y)N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$$

seja uma EDO exata, ou seja,

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t},$$

o que implica

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mu\frac{\partial N}{\partial t}.$$

Observamos que essa não é uma equação simples de trabalhar, o que torna, na maioria das vezes, difícil determinarmos o fator integrante.

Estudaremos, a seguir, uma classe de EDO's cujo fator integrante pode ser facilmente encontrado.

Se for possível encontrar um fator integrante que dependa somente de t, então a equação

$$\mu(t)M(t,y) + \mu(t)N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

é exata, e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t)M(t,y)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu(t)N(t,y)).$$

Logo,

$$M(t,y)\frac{\partial\mu(t)}{\partial y} + \mu(t)\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = N(t,y)\frac{\partial\mu(t)}{\partial t} + \mu(t)\frac{\partial N(t,y)}{\partial t},$$

e assim,

$$\frac{\partial\mu(t)}{\partial t} = \frac{1}{N(t,y)}\left(\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\right)\mu(t).$$

Para a equação acima fazer sentindo, $\frac{1}{N(t,y)}\left(\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\right)$ deve ser uma função que depende somente de t, isto é,

$$\frac{1}{N(t,y)}\left(\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\right) = f(t).$$

Assim, temos que

$$\frac{\partial\mu(t)}{\partial t} = f(t)\mu(t).$$

Que é uma EDO linear homogênea de 1ª ordem, na qual a solução é dada por

$$\mu(t) = e^{\int f(t)dt}$$

Observação 10. Como queremos apenas uma dentre todas as funções $\mu(t)$ que tornam a equação exata, não preocuparemos com a constante de integração.

Analogamente, se a função μ só depender de y temos que $\frac{1}{M(t,y)}\left(\frac{\partial N(t,y)}{\partial t} - \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\right) = g(y)$ e então $\mu(t) = e^{\int g(y)dy}$.

Exemplo 30. Encontremos um fator integrante para a equação $(1-ty)y' = y^2$.

Reescrevemos a equação como

$$y^2 + (ty-1)y' = 0.$$

Nesse caso, temos que $M(t,y) = y^2$ e, então $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$. Ainda, $N(t,y) = ty-1$ e, então $\frac{\partial N}{\partial t} = y$. Logo, a equação não é exata e, usando o método do fator integrante, temos que

$$\frac{1}{M(t,y)}\left(\frac{\partial N(t,y)}{\partial t} - \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\right) = -\frac{1}{y} = g(y).$$

Procuramos um fator integrante $\mu(y)$ no qual

$$\mu(y)y^2dt + \mu(y)(ty-1)dy = 0,$$

seja exata, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)y^2) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu(y)(ty-1)).$$

Assim

$$\mu'(y) = -\frac{1}{y}\mu(y).$$

Resolvendo essa EDO, temos que

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-ln|y|} = \frac{1}{|\,y\,|}.$$

Logo, um fator integrante para a equação dada é

$$\mu(y) = \frac{1}{y}.$$

Observação 11. Observamos que no exemplo 30 não seria conveniente procurar um fator integrante em relação a t, pois

$$\frac{1}{N(t,y)}\left(\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\right) = \frac{y}{ty-1} \neq f(t).$$

Exemplo 31. Encontremos um fator integrante para a equação $(t^3y-t^2)+ty = 0$.

Nesse caso, temos que $M(t,y) = t^3y-t^2$, $\frac{\partial M}{\partial y} = t^3$, $N(t,y) = t$ e $\frac{\partial N}{\partial t} = 1$. Logo, a equação é exata e, usando o método do fator integrante, temos que

$$\frac{1}{N(t,y)}\left(\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\right) = t^2 - \frac{1}{t} = f(t).$$

Procuramos um fator integrante, $\mu(t)$, no qual

$$\mu(t)(t^3y-t^2)dt + \mu(t)tdy = 0,$$

seja exata, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t)(t^3y-t^2)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu(t)t).$$

Assim

$$\mu'(t) = \left(t^2 - \frac{1}{t}\right)\mu(t).$$

Resolvendo essa EDO, temos que

$$\mu(t) = e^{\int \left(t^2 - \frac{1}{t}\right)dt} = e^{\frac{t^3}{3} - \ln|t|} = \frac{e^{\frac{t^3}{3}}}{|t|}.$$

Logo, um fator integrante para a equação dada é

$$\mu(t) = \frac{e^{\frac{t^3}{3}}}{|t|}.$$

Observação 12. Observamos que no exemplo 31 não seria conveniente procurar um fator integrante em relação a y, pois

$$\frac{1}{M(t,y)}\left(\frac{\partial N(t,y)}{\partial t} - \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\right) = \frac{t^3-1}{t^3y-t^2} \neq g(y).$$

CAPÍTULO

4

ALGUMAS APLICAÇÕES

Nesse capítulo, aprofundaremos os estudos nas aplicações das equações diferenciais ordinárias, explorando seu papel na modelagem de fenômenos do nosso cotidiano. A gama de aplicações das equações ordinárias foi baseada em (ZILL, 2003), (ZILL; CULLEN, 2009), (CILDOZ; PALOMINO, 2017), (COSTA; SANTOS, 2024) e (STEWART, 2013a).

A modelagem matemática com equações diferenciais ordinárias (EDOs) é essencial para entender fenômenos em áreas como física, biologia e engenharia, entre outros. Essa capacidade de formular e resolver EDOs permite que pesquisadores e profissionais façam previsões e tomem decisões com base nos resultados gerados, destacando a importância da matemática aplicada na resolução de problemas complexos.

Na construção dos modelos, tem-se um problema real no qual se espera uma solução aproximada. Com modelagem matemática é possível traduzi-lo para um problema aproximado de modo que se obtenha uma solução real. As vezes há a necessidade de sofisticar os modelos matemáticos para melhor aproximar a solução real do problema.

As etapas a seguir mostram o processo de modelagem matemática, facilitando o entendimento das aplicações apresentadas nesse capítulo.

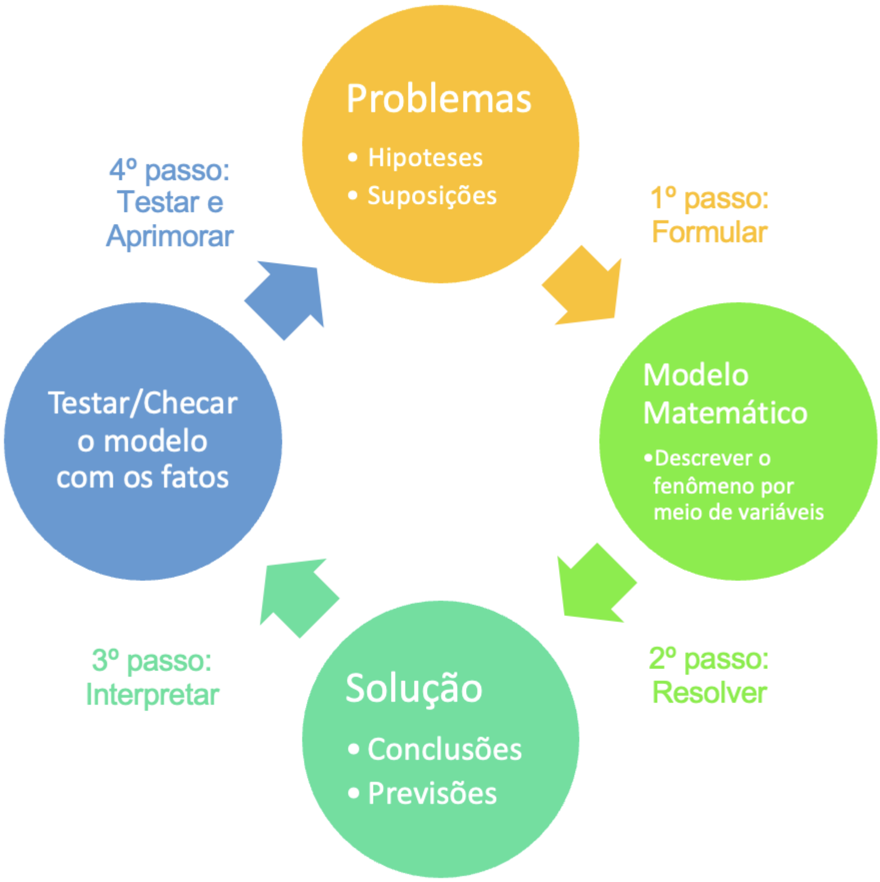


Figura 3 – Etapas do processo de modelagem com equações diferenciais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Trazer o conceito de EDOs nas aplicações em contextos reais, facilita o entendimento das teorias abordadas neste trabalho, aplicadas a fenômenos reais.

Exploraremos, a seguir, exemplos de aplicações mais simples, como variação de temperatura, movimento e taxa de crescimento populacional e econômica. Ainda, abordaremos problemas de crescimento populacional com diferentes condições, trazendo os modelos de Malthus e Verhust. Por fim, avançamos para problemas mais complexos, envolvendo conceitos específicos, utilizados na modelagem de crescimento econômico do Modelo de Solow.

4.1 Lei de Newton do Esfriamento e Aquecimento

A lei de Newton do esfriamento e aquecimento é fundamental para descrever e modelar como a temperatura de um objeto varia de acordo com o tempo. Esse modelo é bastante utilizado na engenharia, física e nas ciências ambientais.

Começamos analisando a equação, como vimos em 2.2.4, o modelo matemático que descreve o aquecimento ou esfriamento de um corpo é dada pela seguinte EDO

$$T'(t) + kT(t) = kT_a(t),$$

ou seja, a taxa de variação da temperatura é proporcional a diferença de temperaturas do corpo e do meio ambiente.

Utilizamos esse método na ciência forense, quando é necessário determinar o tempo de morte de uma pessoa.

Exemplo 32. Um corpo foi encontrado em uma casa dentro de um quarto fechado a uma temperatura constante de 22ºC. No momento da descoberta, a temperatura do corpo era de 29,4ºC. Uma hora depois, uma segunda medição foi realizada, e a temperatura do corpo era de 26,7ºC. Determine quanto tempo se passou do momento da morte até que o corpo fosse encontrado.

Considerando a equação de aquecimento e resfriamento de um corpo e que a temperatura do ambiente é constante, então $T_a(t) = T_a$ para todo t, então a EDO

$$T'(t) + kT(t) = kT_a$$

é uma EDO linear não homogênea de primeira ordem. Neste caso, para encontrar a solução devemos tomar

$$\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}.$$

Logo, multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{kt}T'(t) + e^{kt}kT(t) = e^{kt}kT_a \Rightarrow \left(e^{kt}T(t)\right)' = e^{kt}kT_a.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$\begin{aligned} e^{kt}T(t) &= \int e^{kt}kT_a dt \\ &= T_a \int e^{kt}kdt \\ &= T_a(e^{kt} + c_1) \\ &= T_a e^{kt} + c. \end{aligned}$$

Logo,

$$T(t) = T_a + ce^{-kt}.$$

Considere o momento em que o corpo foi encontrado com $t = 0$, assim, $T(0) = 29,4°C$, $T(1) = 26,7°C$ e $T_a = 22°C$, então

$$T(0) = 22 + ce^{-k0} \Rightarrow 29,4 = 22 + c \Rightarrow c = 7,4.$$

Como sabemos $T(1)$, então

$$T(1) = 22 + 7,4e^{-k1} \Rightarrow 26,7 = 22 + 7,4e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{4,7}{7,4} \Rightarrow k \cong 0,454.$$

Desse modo,

$$T(t) = 22 + 7,4e^{-0,454t}.$$

Ainda, sabemos que a temperatura média de um corpo humano saudável é de $36,5°C$, substituindo esse valor na equação podemos estimar a quanto tempo ocorreu a morte. Temos

$$T(t) = 22 + 7,4e^{-0,454t} \Rightarrow 36,5 = 22 + 7,4e^{-0,454t} \Rightarrow t \cong -1,482.$$

Observe que encontramos um tempo negativo já que a morte aconteceu antes do corpo ser encontrado. Como $t \cong -1,482$, equivale que a morte ocorreu aproximadamente 1 hora e 29 minutos antes do corpo ter sido encontrado.

4.2 Corpo em queda livre com resistência do ar

A modelagem de um corpo em queda livre considerando a resistência do ar fornece um modelo mais realista para o movimento, apesar de ser mais complexa, pois considera que a força atuante no movimento é resultante da diferença entre a forca gravitacional e a força de resistência do ar. Essas modelagens são bem comuns, por exemplo, nas aplicações em engenharia, esportes e física.

Como visto em 2.2.2, a variação da velocidade de um corpo em queda livre com resistência do ar pode ser descrita pela EDO

$$m \cdot v'(t) + k \cdot v(t) = m \cdot g$$

onde m é a massa do corpo; g é aceleração da gravidade e k representa a resistência do ar.

Utilizamos esse método no esporte, mais especificamente na análise do desempenho de um paraquedista.

Exemplo 33. Uma paraquedista pesa $58kg$ e seu equipamento juntamente com o paraquedas pesa $16kg$. Após saltar do avião, a uma altitude de 4500 metros, ela espera 15 segundos e abre seu paraquedas. Assumido que a constante de proporcionalidade da resistência do ar em queda livre seja $k = 0,5$ e com o paraquedas aberto, $k = 100$. Determine o tempo total da queda.

A resolução do problema é dividida em dois momentos. O primeiro momento em queda livre e o segundo momento com o paraquedas acionado. Considerando a equação diferencial do movimento de queda livre, temos

$$v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g.$$

Observe que a equação do movimento é uma EDO linear não homogênea de primeira ordem. Neste caso, devemos tomar

$$\mu(t) = e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{k}{m}t}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{\frac{k}{m}t} v'(t) + e^{\frac{k}{m}t} \frac{k}{m} \cdot v(t) = e^{\frac{k}{m}t} g.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$e^{\frac{k}{m}t} \cdot v(t) = g \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{k}{m}t} + c_1.$$

Logo,

$$v(t) = g \cdot \frac{m}{k} + c_1 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{4.1}$$

Como as variáveis g, m, k, e c_1 são constantes, e sabe-se que a velocidade é dada pela derivada da posição em relação ao tempo, ou seja, $h'(t) = v(t)$, então

$$h(t) = \int v(t) dt$$

e dessa forma,

$$h(t) = \int g \cdot \frac{m}{k} + c_1 \cdot e^{-\frac{k}{m}t} dt.$$

Resolvendo a integral, temos:

$$h(t) = g \cdot \frac{k}{m} \cdot t - \frac{m}{k} \cdot c_1 \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + c_2. \tag{4.2}$$

Analisamos, a seguir, cada momento da queda utilizando as equações (4.1) e (4.2).

No primeiro momento, a velocidade é dada por

$$v_1(t) = 10 \cdot \frac{74}{0,5} + c_1 \cdot e^{-\frac{0,5}{74}t}$$

onde a massa total é dada pela soma do peso da paraquedista e de seus equipamentos de salto e assume-se aceleração da gravidade como $g = 10\ m/s^2$. Sendo $t = 0$ o momento que a paraquedista salta do avião, a velocidade neste instante é nula, ou seja, $v_1(0) = 0$. Então

$$v_1(0) = 10 \cdot \frac{74}{0,5} + c_1 \cdot e^{-\frac{0,5}{74}0} \Rightarrow 0 = 10 \cdot \frac{74}{0,5} + c_1 \cdot e^{-\frac{0,5}{74}0} \Rightarrow c_1 = -1480.$$

Logo, a equação da velocidade é dada por

$$v_1(t) = 1480 - 1480 \cdot e^{-\frac{1}{148}t}.$$

Sabemos que o paraquedas é acionado em $t = 15s$ e nesse instante $v_1(15) \cong 143m/s$. Encontramos, a seguir, o espaço percorrido pela paraquedista até a abertura do paraquedas, assim, temos a seguinte equação do espaço

$$h_1(t) = 10 \cdot \frac{74}{0,5} \cdot t + \frac{74}{0,5} \cdot 1480 \cdot e^{-\frac{0,5}{74}t} + c_2.$$

Considere $t = 0$ o momento que a paraquedista salta do avião, nesse momento ela inicia o salto, ou seja, $h(0) = 0$. Então

$$h_1(t) = 10 \cdot \frac{74}{0,5} \cdot t + \frac{10}{0,5} \cdot 1480 \cdot e^{-\frac{0,5}{74}t} + c_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 10 \cdot \frac{74}{0,5} \cdot 0 + \frac{10}{0,5} \cdot 1480 \cdot e^{-\frac{0,5}{74}0} + c_2$$
$$\Rightarrow \quad c_2 = -219040.$$

Logo, a equação do deslocamento é dada por

$$h_1(t) = 1480t + 219040 \cdot e^{-\frac{1}{148}t} - 219040.$$

Como o paraquedas é acionado em $t = 15s$ temos que $h(15) \cong 1088m$. Sabemos que o percurso total do salto é de $4500m$, ainda restam $3412m$ de queda com o paraquedas acionado. Iniciamos então o segundo momento da queda, onde a velocidade é dada por

$$v_2(t) = 10 \cdot \frac{74}{100} + c_1' \cdot e^{-\frac{100}{74}t}.$$

Considere $t = 0$ o momento que é acionado o paraquedas. A velocidade neste instante é de aproximadamente $143m/s$, ou seja, $v_2(0) \cong 143m/s$. Então

$$v_2(0) = 10 \cdot \frac{74}{100} + c_1' \cdot e^{-\frac{100}{74}0} \Rightarrow 143 = 10 \cdot \frac{74}{100} + c_1' \cdot e^{-\frac{100}{74}0} \Rightarrow c_1' \cong 136.$$

Logo, a equação da velocidade nesse segundo momento do salto é dada por

$$v_2(t) = 7,4 + 136e^{-\frac{100}{74}t}.$$

Para encontrarmos o tempo de queda com o paraquedas acionado utilizamos a equação do espaço, dada por

$$h_2(t) = 10 \cdot \frac{74}{100} \cdot t - \frac{74}{100} \cdot 136 \cdot e^{-\frac{100}{74}t} + c_2'.$$

No momento em que é acionado o paraquedas, a paraquedista já percorreu aproximadamente $1088m$, ou seja, $h_2(0) \cong 1088m$. Então

$$\begin{array}{rcl} h_2(0) & = & 10 \cdot \frac{74}{100} \cdot 0 - \frac{74}{100} \cdot 136 \cdot e^{-\frac{100}{74}0} + c_2' \\ & \Downarrow & \\ 1088 & = & 10 \cdot \frac{74}{100} \cdot 0 - \frac{74}{100} \cdot 136 \cdot e^{-\frac{100}{74}0} + c_2' \\ & \Downarrow & \\ c_2' & \cong & 1189. \end{array}$$

Logo, a equação do deslocamento quando o paraquedas esta aberto é dada por

$$h_2(t) = 7,4t - 100,64e^{-\frac{1}{148}t} + 1189.$$

Sabe-se o percurso do salto é de 4500 metros, assim

$$4500 = 7,4t - 100,64e^{-\frac{1}{148}t} + 1189.$$

Pode-se verificar que neste caso, teremos $t \cong 448s$.

Como a paraquedista acionou o paraquedas com $15s$ e o tempo de queda com o paraquedas acionado é de $448s$, o tempo total da queda é de $463s$, ou seja, aproximadamente 8 minutos.

4.3 Movimento de um corpo em plano inclinado

A modelagem do movimento de um corpo em um plano inclinado considerando o atrito e a resistência do ar aparece, principalmente, em aplicações na engenharia civil, física e design de veículos.

Assim como no corpo em queda livre, as forças atuantes no movimento de um corpo em um plano inclinado são regidas pela 2ª lei de Newton, no qual, $F = m \cdot a$.

Considere um corpo em um plano inclinado, sob certas condições de gravidade, resistência do ar e atrito com o plano. Observamos que a gravidade age como uma força vertical, enquanto a resistência do ar e o atrito são forças contrárias a inclinação do plano. Seja $v(t)$ a velocidade do objeto em um determinado instante t, obtemos pela 2ª lei de Newton ($F = m \cdot a$) a equação do movimento:

$$m \cdot v'(t) = \overbrace{m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta}^{\text{peso}} - \overbrace{\mu \cdot m \cdot g \cos\theta}^{\text{atrito}} - \overbrace{k \cdot v(t)}^{\text{res. ar}}.$$

Ou ainda

$$v'(t) = g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu \cdot g \cos\theta - \frac{k}{m} \cdot v(t).$$

Onde m é a massa do corpo; g é aceleração da gravidade; θ é o ângulo do plano inclinado com a horizontal, μ é o coeficiente de atrito e $\mu > 0$, k é o coeficiente de resistência do ar e $k > 0$.

Vamos utilizar esse método em um exemplo genérico de um bloco em um plano inclinado, mas utilizar esse bloco é equivalente, por exemplo, a considerar um veículo e analisar seu comportamento na descida ou subida, no qual é fundamental para o design de suspensão e controle de estabilidade.

Exemplo 34. Uma caixa de 44 kg escorrega em um plano inclinado que faz um ângulo de $\theta = 30^\circ$ com a horizontal e tem o ponto mais alto à uma altura de 15 metros. O coeficiente de atrito com o plano é dado por $\mu = 0,4$ e a força devido a resistência do ar é $0,1v$. Determinaremos então, a equação da velocidade.

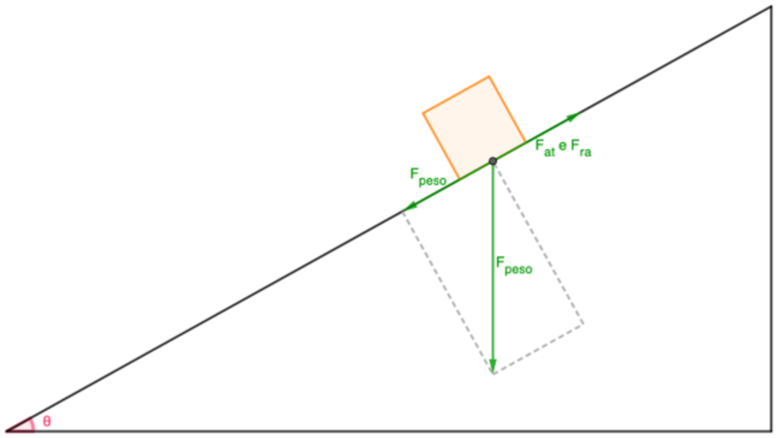


Figura 4 – Diagrama de forças: corpo em um plano inclinado

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando a equação diferencial do movimento, temos

$$v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu \cdot g \cdot \cos\theta.$$

Observe que a equação do movimento é uma EDO linear não homogênea de primeira ordem. Neste caso, devemos tomar

$$\mu(t) = e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{k}{m}t}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{\frac{k}{m}t} v'(t) + e^{\frac{k}{m}t} \frac{k}{m} \cdot v(t) = e^{\frac{k}{m}t} [g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu \cdot g \cdot \cos\theta].$$

Ou seja,

$$\left(e^{\frac{k}{m}t} \cdot v(t)\right)' = e^{\frac{k}{m}t} [g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu \cdot g \cdot \cos\theta].$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$e^{\frac{k}{m}t} \cdot v(t) = \frac{m}{k} [g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu \cdot g \cdot \cos\theta] \cdot e^{\frac{k}{m}t} + c.$$

Logo,

$$v(t) = \frac{m}{k} [g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu \cdot g \cdot \cos\theta] + c \cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Substituindo os valores dados no problema, segue que

$$v(t) = \frac{44}{0,1} [10 \cdot \operatorname{sen}30^\circ - 0,4 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ] + c \cdot e^{-\frac{0,1}{44}t},$$

e assim,

$$v(t) = 675,8 + c \cdot e^{-\frac{1}{440}t}.$$

Considere que a caixa parte do repouso, ou seja, em $v(0) = 0$, então

$$v(t) = 675,8 + c \cdot e^{-\frac{1}{440}t} \Rightarrow 0 = 675,8 + c \Rightarrow c = -675,8.$$

Assim

$$v(t) = 675,8 - 675,8 \cdot e^{-\frac{1}{440}t}.$$

4.4 Dinâmica populacional

A modelagem do crescimento populacional fornece uma análise quantitativa do desenvolvimento da população em relação ao tempo. O modelo de Malthus apresenta uma modelagem mais simplista, com um crescimento exponencial, enquanto o modelo de Verhulst, ou modelo logístico, apresenta uma modelagem mais realista ao considerar as limitações ambientais. Esse modelo aparece aplicado nas áreas de biologia e economia, onde "população" refere-se tanto a grupo de seres vivos quanto a humanos nos dados demográficos, ou até mesmo, outras quantidades, como dinheiro em uma aplicação financeira.

4.4.1 Modelo de Malthus

A modelagem da dinâmica populacional por Malthus, defende que o crescimento populacional é proporcional ao tamanho da população em um determinado instante, ou seja,

$$P'(t) = kP(t), \quad k > 0,$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Esse modelo desconsidera os fatores externos que afetam o crescimento, ou não, de uma população, o que o torna eficaz quando considerado em pequenos instantes.

Utilizamos esse método na biologia, para determinar a taxa de crescimento de um vírus em um organismo.

Exemplo 35. Um vírus se multiplica em um organismo, com uma população inicial de 1000 vírus. Observa-se que após uma hora, a população conta com 2000 vírus. Vamos determinar a constante de proporcionalidade do crescimento do vírus por hora.

Considere a equação do modelo de Malthus

$$P'(t) = kP(t).$$

Observe que esta é uma equação linear homogênea. Assim, sabemos que

$$P(t) = ce^{\int k dt} = ce^{kt}.$$

Temos então que,

$$\begin{cases} P(t) = ce^{kt} \\ P(0) = 1000 \\ P(1) = 2000 \end{cases}.$$

Analisando o momento $t = 0$, temos

$$P(0) = ce^{k0} = 1000 \Rightarrow c = 1000,$$

assim, $P(t) = 1000 \cdot e^{kt}$. Logo,

$$P(1) = 1000e^{k\cdot 1} = 2000 \Rightarrow e^k = 2 \Rightarrow k \cong 0,69.$$

Temos então, que o vírus cresce em torno de 69% a cada hora, e a equação desse crescimento é dado por $P(t) = 1000e^{0,69t}$.

A curva abaixo descreve a solução do problema dado, que, por se tratar de população, os valores negativos podem ser desconsiderados. Ainda, observamos que, o crescimento é contínuo ao longo do tempo.

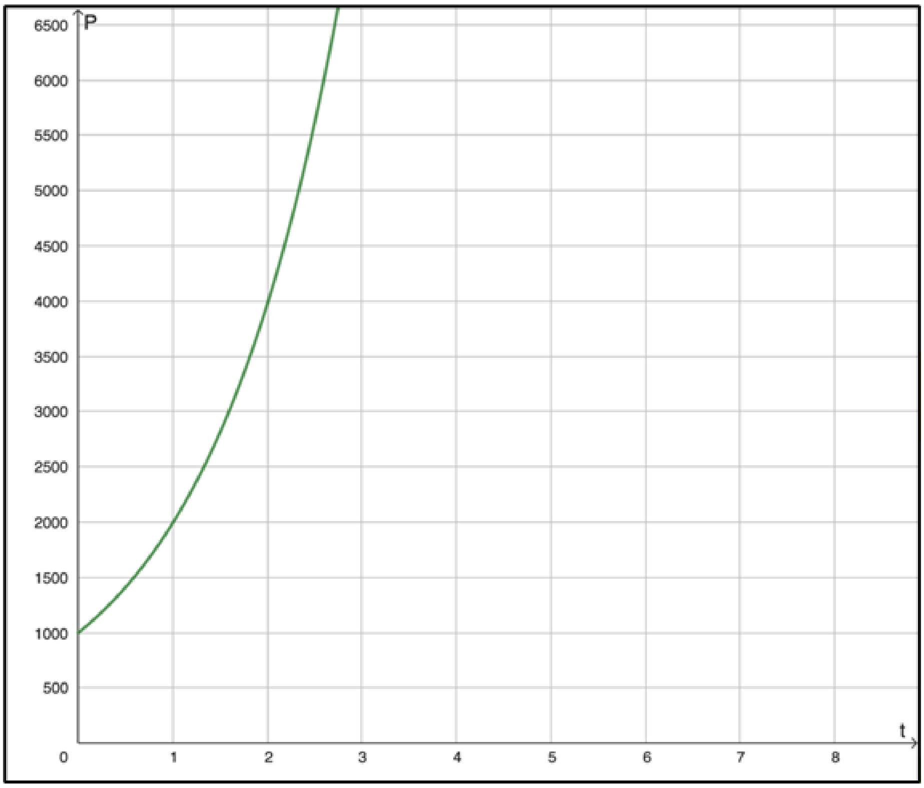


Figura 5 – Curva de crescimento $P(t)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que esse modelo mostra um crescimento desenfreado, sem considerar as limitações do ambiente. Por isto, ele é muito útil em condições ideais. Dessa forma, se faz necessário métodos mais realistas de crescimento, como por exemplo, o de Verhulst, o qual abordamos a seguir.

4.4.2 Modelo de Verhulst

Também conhecido como modelo logístico, o modelo de Verhulst, considera o crescimento populacional levando em conta as limitações e capacidade de suporte do ambiente. Isto significa que, à medida que a população chega em seu limite sustentável, a taxa de crescimento diminui. Dessa forma, o modelo é descrito pela equação

$$P'(t) = kP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{C}\right],$$

onde C é a capacidade de carga populacional suportada pelo ambiente e k é a constante de proporcionalidade.

Esse modelo é muito utilizado na saúde pública, economia e ecologia. Utilizamos um exemplo de propagação de informação em uma comunidade nessa modelagem.

Exemplo 36. Considere que inicialmente, em uma comunidade, 500 pessoas são expostas a um determinado anúncio. Observa-se que, após uma hora, 1000 pessoas já conseguem ver o mesmo anúncio. Considerando que 5000 pessoas verão o anúncio, qual equação descreve a quantidade de pessoas expostas ao anúncio na comunidade ao longo do tempo.

Considere a equação do modelo sendo

$$P'(t) = kP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{C}\right].$$

Observe que é uma equação não linear. Então podemos encontrar a solução por meio das equações com variáveis separáveis. Escrevendo como,

$$-kP\left[1 - \frac{P}{C}\right]dt + dP = 0,$$

e assim utilizando as notações introduzidas em 3.2.2, temos $M(t) = -k$, $N(P) = P\left[1 - \frac{P}{C}\right]$, $P(t) = 1$ e $Q(P) = 1$. Logo, as curvas integrais são dadas por

$$V(t,P) = \int \frac{-k}{1}dt + \int \frac{1}{P\left[1 - \frac{P}{C}\right]}dP,$$

$$V(t,P) = -kt + \ln\left|\frac{P}{C}\right| - \ln\left|1 - \frac{P}{C}\right|$$

$$-kt + \ln\left|\frac{P}{C}\right| - \ln\left|1 - \frac{P}{C}\right| = c',$$

o que implica que,

$$kt - \ln\left|\frac{P}{C}\right| + \ln\left|1 - \frac{P}{C}\right| = -c'.$$

Note que, $\frac{P}{C} > 0$ e $1 - \frac{P}{C} > 0$. Logo

$$\frac{e^{kt} \cdot \left(1 - \frac{P}{C}\right)}{\frac{P}{C}} = c.$$

Podemos reescrever

$$\frac{C - P}{P} = ce^{-kt}$$

e,

$$\frac{C}{P} - 1 = ce^{-kt}.$$

Logo,

$$P(t) = \frac{C}{ce^{-kt} + 1}.$$

Analisando as condições iniciais do problema, temos que $P(0) = 500$ e $C = 5000$. Portanto,

$$P(t) = \frac{5000}{ce^{-kt} + 1}.$$

Para $t = 0$,

$$P(0) = \frac{5000}{ce^{-k0} + 1} \Rightarrow 500 = \frac{5000}{c+1} \Rightarrow c = 9.$$

E $P(t)$ é dado por

$$P(t) = \frac{5000}{9e^{-kt} + 1}.$$

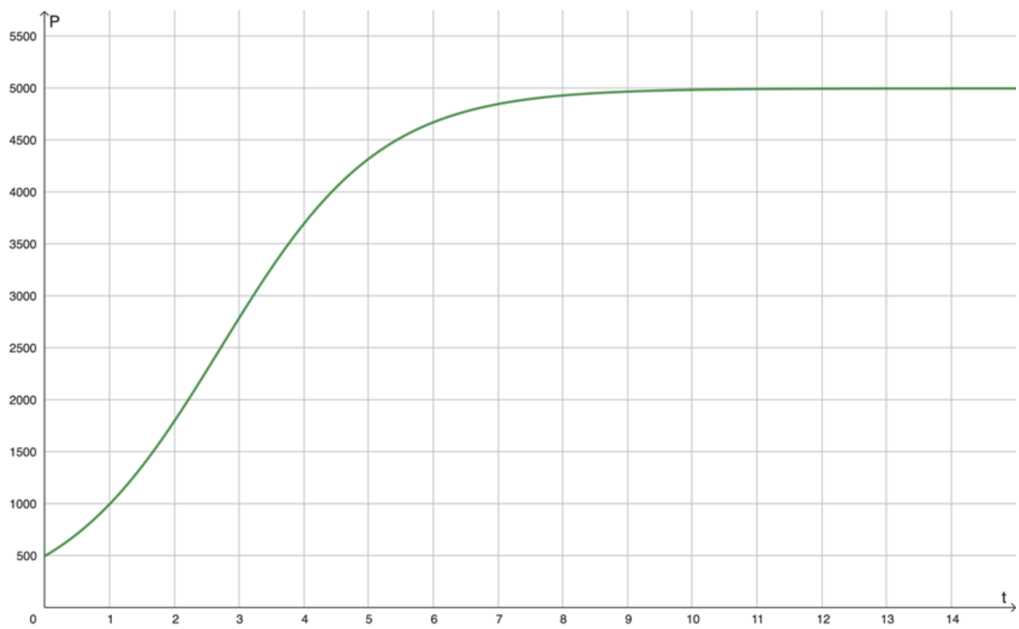
Ainda, podemos encontrar a constante de proporcionalidade, pois sabemos que após uma hora 1000 pessoas já viram o anúncio, logo, $P(1) = 1000$, e assim,

$$P(1) = \frac{5000}{9e^{-k1} + 1} \Rightarrow 1000 = \frac{5000}{9e^{-k} + 1} \Rightarrow k \cong 0,81.$$

Logo, a equação que descreve a dispersão do anúncio ao longo do tempo é descrita por

$$P(t) = \frac{5000}{9e^{-0,81t} + 1}.$$

Figura 6 – Curva de exposição do anúncio $P(t)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico mostra o crescimento da visibilidade do anúncio ao longo do tempo. Observamos que, a partir de um determinado tempo, ao chegar próximo ao seu limite de sustentabilidade, o crescimento da exposição do anúncio diminui.

4.5 Piscicultura

O biólogo Von Bertalanffy desenvolveu um modelo matemático para analisar o crescimento em peso dos peixes. Esse modelo é amplamente utilizado no estudo do crescimento alométrico, neste caso específico na alometria dos peixes, ou seja, as relações de crescimento entre diferentes partes do corpo dos peixes e seu tamanho total.

Esse modelo afirma que o crescimento do peso do peixe $p(t)$, é proporcional a sua área externa. No entanto, é necessário considerar a perda de peso pela energia consumida, que é proporcional ao seu peso. Assim:

$$p'(t) = \alpha A - \beta p, \tag{4.3}$$

onde:

- α representa a constante de crescimento relacionado à área externa do peixe,
- β representa a constante de diminuição de massa pela energia consumida,
- A representa a área externa do peixe, que é proporcional ao quadrado do comprimento, ou seja, $A = k_1 l^2$. Enquanto o peso é proporcional ao volume do seu corpo, já o volume é proporcional ao cubo de seu comprimento, assim, $p = k_2 l^3$. Portanto, pelo Princípio da Alometria, temos que
$$A = kp^{\frac{2}{3}}.$$

Substituindo na equação 4.3 e incorporando a constante k em α, temos:

$$p'(t) = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p.$$

Vamos utilizar esse modelo de uma forma mais aplicada, analisando uma equação para determinar o peso ideal de venda.

Exemplo 37. É comum encontrarmos criações de peixes, sejam para vendas ou para pesque-pague. Dessa forma, é ideal para comercialização desses peixes, analisar o peso para comércio. De acordo com a equação de Von Bertalanffy, determine o peso ideal para venda. (Observação: o peso ideal é dado em quando t se torna grande, dessa forma, quando t tende a infinito.)

Dada a equação

$$p'(t) + \beta p = \alpha p^{\frac{2}{3}},$$

observe que é uma equação não linear e podemos resolver pelo método de Bernoulli, ou seja, está na forma $y' + a(t)y = b(t)y^n$. Portanto, precisamos fazer a seguinte mudança de variáveis $z = y^{1-n}$.

No nosso caso, temos que $n = \frac{2}{3}$, $a(t) = \beta$ e $b(t) = \alpha$. Logo, devemos fazer $z = p^{\frac{1}{3}}$, e chegamos na seguinte equação

$$z' + \frac{\beta}{3}z = \frac{\alpha}{3}.$$

Então,

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\beta}{3} dt} = e^{\frac{\beta}{3}t}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{\frac{\beta}{3}t} z' + e^{\frac{\beta}{3}t} \frac{\beta}{3} z = \frac{\alpha}{3} e^{\frac{\beta}{3}t}.$$

Assim

$$\left(e^{\frac{\beta}{3}t} z\right)' = \frac{\alpha}{3} e^{\frac{\beta}{3}t}.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, segue que

$$e^{\frac{\beta}{3}t} z = \frac{\alpha}{\beta} e^{\frac{\beta}{3}t} + c.$$

Logo

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} + c e^{-\frac{\beta}{3}t}.$$

Ou ainda,

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} c e^{-\frac{\beta}{3}t}\right).$$

Como $p = z^3$, a solução geral é dada por

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} c e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3.$$

Assumindo que em $t = 0$ o peso seja insignificante, ou seja, $p(0) \cong 0$, então,

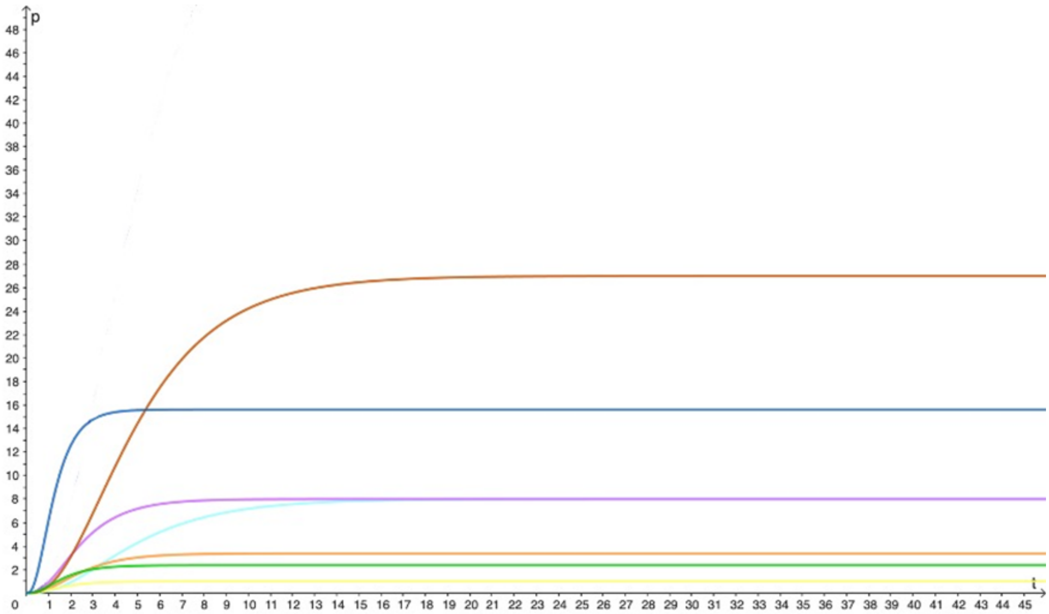
$$p(0) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} c e^{-\frac{\beta}{3}0}\right)^3 = 0 \Rightarrow c = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Temos então que $p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3$, e considerando que seu peso ideal é quando $t \to \infty$, temos

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3.$$

Isto quer dizer que $p(t)_{\text{ideal}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$ é o peso máximo ou ideal para venda.

Figura 7 – Curvas de crescimento do peso dos peixes $p(t)$ variando α e β



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe a figura 7, que mostra as curvas de solução para o peso dos peixes. Por se tratar de modelo físico, somente os valores positivos são relevantes. Nas curvas, as constantes de anabolismo (ganho) α e de catabolismo (perda) β, varia em cada equação. Observamos que, após um determinado tempo, o peso ideal é atingido e se mantém praticamente constante no decorrer do tempo.

4.6 Idade de Fóssil

As equações diferenciais têm um papel fundamental na arqueologia para datar fósseis. A idade de um fóssil pode ser estimada por meio do decaimento radioativo, pois, a quantidade de isótopo radioativo presente nele diminui de forma proporcional ao longo do tempo. Dessa forma, temos que

$$I'(t) = -\lambda I(t),$$

onde, λ é a constante de decaimento do isótopo e I é a quantidade de isótopo presente no fóssil em determinado tempo. Observamos que essa é uma equação linear homogênea. Reescrevendo na forma

$$I'(t) + \lambda I(t) = 0,$$

temos que

$$I(t) = ce^{\int \lambda dt} = ce^{\lambda t}.$$

Assumindo que em $t = 0$ temos a quantidade inicial de isótopo presente no fóssil, I_0, temos,

$$I(0) = ce^{\lambda 0} = I_0 \Rightarrow c = I_0.$$

Logo, a equação para estimar a quantidade de isótopo é dada por $I(t) = I_0 e^{\lambda t}$.

Exemplo 38. Estime a idade de um fóssil encontrado com uma concentração de um milésimo da quantidade inicial de C-14 ainda presente.

Para datar esse fóssil é necessário utilizar a informação de que a meia-vida do C-14 é de aproximadamente 5600 anos, no seguinte sentido,

$$I(5600) = \frac{1}{2} I_0 \Rightarrow I_0 e^{5600\lambda} = \frac{1}{2} I_0 \Rightarrow \lambda \cong -1,24 \cdot 10^{-4}.$$

Assim, $I(t) = I_0 e^{-1,24 \cdot 10^{-4} t}$.

Sabemos que, no presente, a quantidade de C-14 é 0,001 do inicial, assim

$$I(t) = 0,001 I_0 \Rightarrow I_0 e^{-1,24 \cdot 10^{-4} t} = 0,001 I_0 \Rightarrow t \cong 55708.$$

Logo, estimamos que o fóssil tem em torno de 55700 anos.

4.7 Fluxo de Moedas

As EDOs exercem um papel importante na economia financeira, além de oferecer uma estrutura teórica para entender a dinâmica da economia, elas auxiliam a prever cenários e formular estratégias. Uma aplicação específica é no controle de entrada de uma nova moeda em circulação. A modelagem auxiliará a simular como esse fluxo da nova moeda irá fluir no decorrer do tempo, facilitando as análises dos impactos econômicos que a nova moeda pode influenciar, por exemplo, inflação, crescimento econômico e estabilidade financeira.

Exemplo 39. Um pequeno país tem 10 bilhões em papel-moeda em circulação e a cada dia 50 milhões chegam aos bancos daquele lugar. O governo decide introduzir uma nova moeda, fazendo com que os bancos troquem notas velhas por novas sempre que a moeda antiga entrar nos bancos. Quanto tempo levará para a que nova moeda represente 90% da moeda em circulação?

Seja $n(t)$ a quantidade de moedas novas em circulação, logo, $\frac{dn}{dt}$ é o quanto de moeda velha está sendo trocadas por moedas novas por dia. Sabemos que no primeiro dia, $t = 0$, não existem moedas novas em circulação, ou seja, $n(0) = 0$. E ainda, que durante esse primeiro dia os 50 milhões que chegarão ao banco serão de notas velhas que serão trocadas por notas novas. Mas, não podemos garantir que no dia seguinte os 50 milhões que chegarão serão de notas velhas, dessa maneira, temos que estimar o fluxo de trocas das notas no decorrer dos dias.

Temos 10 bilhões em circulação, desses, $\frac{n(t)}{10^{10}}$ é a relação da quantidade de notas novas em relação ao total em circulação. Da mesma forma, $\frac{10^{10} - n(t)}{10^{10}}$ é a relação da quantidade de notas velhas em relação ao total em circulação.

Para estimar o fluxo de moeda em circulação, podemos considerar que quanto maior a quantidade de notas velhas, maior a chance de essas serem levadas ao banco. Então, podemos estimar que $\frac{dn}{dt}$ é quantidade de moedas velhas em relação ao total pela quantidade de moedas levadas ao banco diariamente, ou seja,

$$\frac{dn}{dt} = \frac{10^{10} - n(t)}{10^{10}} \cdot 50 \cdot 10^6,$$

o que equivale a

$$\frac{dn}{dt} = \frac{10^{10} - n(t)}{200}.$$

Rescrevendo como $n'(t) + \frac{n(t)}{200} = \frac{10^{10}}{200}$ fica claro que é uma equação linear não homogênea e vamos resolver encontrando um fator integrante. Assim,

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{200} dt} = e^{\frac{t}{200}}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{\frac{t}{200}} \cdot n' + e^{\frac{t}{200}} \frac{n}{200} = \frac{10^{10}}{200} e^{\frac{t}{200}} \Rightarrow \left(e^{\frac{t}{200}} \cdot n\right)' = \frac{10^{10}}{200} e^{\frac{t}{200}}.$$

Integrando ambos os membros da última igualdade,

$$e^{\frac{t}{200}} \cdot n = \int \frac{10^{10}}{200} e^{\frac{t}{200}} dt$$

e, assim,

$$e^{\frac{t}{200}} \cdot n = 10^{10} e^{\frac{t}{200}} + c.$$

Logo,

$$n(t) = 10^{10} + c e^{\frac{-t}{200}}.$$

Sabendo que $n(0) = 0$, segue que

$$n(0) = 10^{10} + c e^{\frac{-0}{200}} = 0 \Rightarrow c = -10^{10}$$

e

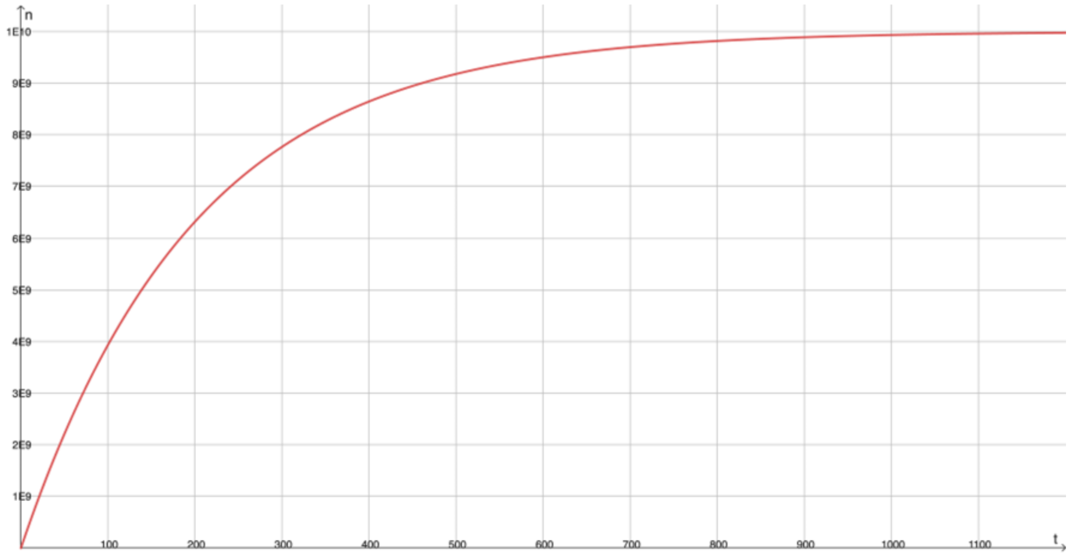
$$n(t) = 10^{10} - 10^{10} e^{\frac{-t}{200}}.$$

Queremos saber em quanto tempo 90% das moedas já estarão em circulação, ou seja, quando $n(t) = 0,9 \cdot 10^{10}$, temos que

$$n(t) = 10^{10} - 10^{10} e^{\frac{-t}{200}} = 0,9 \cdot 10^{10} \Rightarrow t \cong 461.$$

Portanto, para que 90% das moedas tenham sido trocadas, levarão 461 dias.

Figura 8 – Curva do fluxo de troca de moedas $n(t)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe na figura 8 que, quanto maior a quantidade de notas já trocadas, menor o fluxo de troca dessas moedas.

4.8 Crescimento Econômico

Uma opção realística para modelagem de crescimento econômico em uma economia fechada é o Modelo de Solow. Este modelo auxilia na tomada de decisão de quando há a necessidade de mudanças na política econômica. A dinâmica do crescimento econômico a longo prazo modelada por Solow fornece uma base para entender como o capital, força de trabalho e tecnologia impactam o desenvolvimento de uma economia.

4.8.1 Função de Produção

Para o entendimento do Modelo de Solow devemos compreender o conceito da Função de Produção per capita, que é fundamental para criação de políticas de crescimento sustentável, oferecendo insights sobre o aumento da produção devido a interação entre capital, trabalho e tecnologia.

Primeiramente vamos entender a Função de Produção que é representada pela função Cobb-Douglas. Essa função define que o produto total da economia é dado pela relação entre capital e trabalho, da seguinte forma

$$Y(t) = f(K(t), L(t)) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha},$$

em que

- $Y(t)$ é o produto total da economia;
- $K(t)$ é o estoque de capital, por exemplo, máquina, edifícios, infraestrutura, entre outros;
- $L(t)$ é a quantidade de trabalho, por exemplo, número de trabalhadores ou horas trabalhadas;
- α é a elasticidade da produção em relação ao capital, no qual, $0 < \alpha < 1$.

Podemos escrever ainda a Função de Produção per capita, ou seja, a Função Produção dividida pela força de trabalho, assim

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{f(K(t),L(t))}{L(t)}.$$

Vamos supor que $Y(t)$ é uma função homogênea de grau um, isto é,

$$f(\lambda K(t),\lambda L(t)) = \lambda f(K(t),L(t)), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Seja $f(K(t),L(t)) = K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$, assim,

$$\begin{aligned} f(\lambda K(t),\lambda L(t)) &= (\lambda K(t))^{\alpha}(\lambda L(t))^{1-\alpha} \\ &= \lambda^{\alpha}K(t)^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}L(t)^{1-\alpha} \\ &= \lambda K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} \\ &= \lambda f(K(t),L(t)). \end{aligned}$$

Portanto, $Y(t)$ é uma função homogênea de grau um. Ainda, $f(K(t),L(t))$ deve seguir as condições de Inada, dadas abaixo, para garantir que, em um modelo de crescimento econômico como o Modelo de Solow, a função se comporte de maneira mais realista e sustentável em relação ao capital e ao trabalho. Especificamente, as condições de Inada são:

i. $\frac{\partial f}{\partial L} > 0$ e $\frac{\partial f}{\partial K} > 0$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial L} = K(t)^{\alpha}(1-\alpha)L(t)^{-\alpha} = \frac{(1-\alpha)K(t)^{\alpha}}{L(t)^{\alpha}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \alpha K(t)^{\alpha-1}L(t)^{(1-\alpha)} = \frac{\alpha L(t)^{1-\alpha}}{K(t)^{1-\alpha}},$$

e como $0 < \alpha < 1$, as derivadas parciais são positivas.

ii. $\frac{\partial^2 f}{\partial L^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial K^2} < 0$

Dessa forma, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial L^2} = K(t)^{\alpha}(-\alpha)(1-\alpha)L(t)^{-\alpha-1} = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)K(t)^{\alpha}}{L(t)^{\alpha+1}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial K^2} = (\alpha-1)\alpha K(t)^{\alpha-2}L(t)^{(1-\alpha)} = \frac{(\alpha-1)\alpha L(t)^{1-\alpha}}{K(t)^{2-\alpha}},$$

novamente, como $0 < \alpha < 1$, as derivadas parciais de 2ª ordem são negativas.

Assim, a função de Coob-Douglas obedece às Condições de Inada para função de produção. Portanto, para encontrarmos a Função de Produção per capita, podemos reescrever

$$\frac{f(K(t),L(t))}{L(t)} = f\left(\frac{K(t)}{L(t)}, \frac{L(t)}{L(t)}\right) = f\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right),$$

sendo assim uma função em relação ao capital per capita. Logo,

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = f\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right).$$

e, definindo $y = \frac{Y(t)}{L(t)}$ e $k = \frac{K(t)}{L(t)}$, temos que

$$y = f(k).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{Y(t)}{L(t)} &= \frac{K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}}{L(t)} \\ &= \frac{K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}}{L(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}} \\ &= \frac{K(t)^{\alpha}}{L(t)^{\alpha}} \cdot \frac{L(t)^{1-\alpha}}{L(t)^{1-\alpha}} \\ &= \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$f(k) = k^{\alpha}.$$

Analisar a Função de Produção per capita é entender a relação do trabalho e do capital para um modelo de crescimento econômico. No entanto, devemos entender ainda como o estoque de capital se comporta ao longo do tempo, se ele valoriza ou não, para isto, estudaremos a Função de Acúmulo de Capital.

4.8.2 Função de Acumulação de Capital

Para que haja um crescimento e um desenvolvimento econômico é necessário que possua uma função que descreva como o estoque de capital muda ao longo do tempo, ao considerar os investimentos e depreciação. Dessa forma, temos que o Acúmulo de Capital é determinado pela variação do estoque de capital, da seguinte forma

$$K'(t) = sY(t) - \delta K(t),$$

no qual

- $K'(t)$ é a variação do estoque de capital,
- $Y(t)$ é o produto total da economia,
- $K(t)$ é o estoque de capital,
- s é a taxa constante da poupança,
- δ é a taxa constante de depreciação.

Logo, o modelo descreve uma economia fechada, no qual a variação de capital é dada pelo investimento, que é parte do capital que não está sendo utilizado, menos a depreciação sofrida ao longo do tempo. Para encontrarmos a Função de Acúmulo de Capital per capita devemos dividir pelo estoque de trabalho, assim

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{L(t)} = s\frac{Y(t)}{L(t)} - \delta\frac{K(t)}{L(t)} = sf(k) - \delta k = k'$$

onde $\frac{K'(t)}{L(t)} = k'$, $\frac{Y(t)}{L(t)} = y = f(k)$ e $\frac{K(t)}{L(t)} = k$. Logo, $k' = sf(k) - \delta k$ é uma equação diferencial que descreve o Modelo de Solow.

4.8.3 Modelo de Solow

Desenvolvido por Robert Solow na década de 1950, o Modelo de Solow descreve o crescimento econômico a longo prazo, fornecendo uma análise de como capital e o trabalho, e até mesmo a tecnologia, se interagem para determinar uma produção total.

A Função de Produção é a base do modelo de Solow, nela é possível analisar como a variação do trabalho e do capital impactam a produção. Ainda, é necessário considerar o acúmulo de capital, no qual, parte da produção se torna investimento, como capital, e, uma parte do capital sofre desgaste com o tempo.

Em um cenário de uma economia fechada, que não existe troca, importações ou exportações, podemos assumir o modelo de Solow como

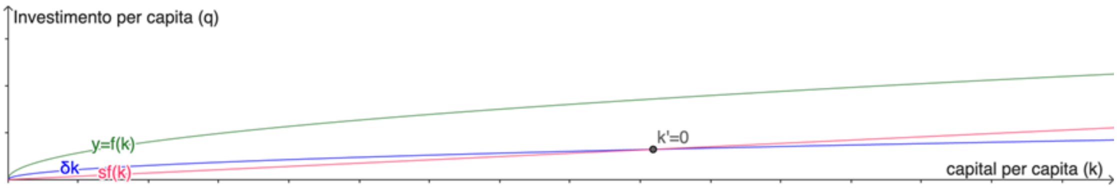
$$\begin{cases} k' = sf(k) - \delta k \\ k(0) = k_0 \end{cases},$$

no qual, a taxa de estoque de capital, por unidade de trabalho, é dada pela diferença da produção investida e a depreciação de parte do capital, por unidade de trabalho.

Uma análise importante que esse modelo fornece é do estado estacionário, que ocorre quando $k' = 0$, ou seja

$$sf(k) = \delta k.$$

Figura 9 – Modelo de crescimento econômico de Solow



Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura mostra que a longo prazo, o capital per capita atinge um nível constante, conhecido como capital estacionário, este é um estado importante no crescimento econômico, pois, a partir desse ponto, para que haja crescimento, é necessário que haja mudanças, como por exemplo um avanço tecnológico.

Utilizando a Função de Produção per capita, $f(k) = k^{\alpha}$, no nosso Modelo de Solow, temos

$$\begin{cases} k' = sk^{\alpha} - \delta k \\ k(0) = k_0 \end{cases},$$

observe que é uma equação não linear e podemos resolver pelo método de Bernoulli, rescrevendo nossa equação como

$$k' + \delta k = sk^{\alpha},$$

ou seja, está na forma $y' + a(t)y = b(t)y^n$. Portanto, precisamos fazer a seguinte mudança de variáveis $z = y^{1-n}$.

Nesse caso, temos que $n = \alpha$, $a(t) = \delta$, $b(t) = s$. Logo, devemos fazer $z = k^{\frac{1}{1-\alpha}}$, e chegamos na seguinte equação

$$z' + (1-\alpha)\delta z = (1-\alpha)s.$$

Então,

$$\mu(t) = e^{\int (1-\alpha)\delta dt} = e^{(1-\alpha)\delta t}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$, temos

$$e^{(1-\alpha)\delta t}z' + e^{(1-\alpha)\delta t}(1-\alpha)\delta z = e^{(1-\alpha)\delta t}(1-\alpha)s.$$

Assim

$$\left(e^{(1-\alpha)\delta t}z\right)' = e^{(1-\alpha)\delta t}(1-\alpha)s$$

Integrando ambos os membros da última igualdade, temos:

$$e^{(1-\alpha)\delta t}z = \frac{s}{\delta}e^{(1-\alpha)\delta t} + c.$$

Logo,

$$z(t) = \frac{s}{\delta} + ce^{(\alpha-1)\delta t}.$$

Como $z = k^{\frac{1}{1-\alpha}}$, a solução geral é dada por

$$k(t) = \left(\frac{s}{\delta} + ce^{(\alpha-1)\delta t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

em que c pode ser definido pela condição inicial $k(0) = k_0$.

Vamos aplicar a equação do crescimento econômico em uma economia fictícia, para analisar os impactos das variáveis do modelo.

Exemplo 40. Seja um país em desenvolvimento, que esteja buscando aumentar sua produção e melhorar o bem-estar da população. O governo deseja entender como as variáveis econômicas afetam o capital e a produção per capita.

Dados:

- Taxa da poupança (s): 30% ou 0,3;
- Taxa de depreciação (δ): 4% ou 0,04;
- Produção Total descrita por: $Y(t) = K(t)^{0,4}L(t)^{0,6}$.

Sabe-se que a Função de Produção per capita é dado por $y = k^{0,4}$. A equação do Modelo de Solow é dada por

$$k' = 0,3k^{0,4} - 0,04k.$$

Observamos que, pelo estado estacionário temos que

$$0,3k^{0,4} = 0,04k,$$

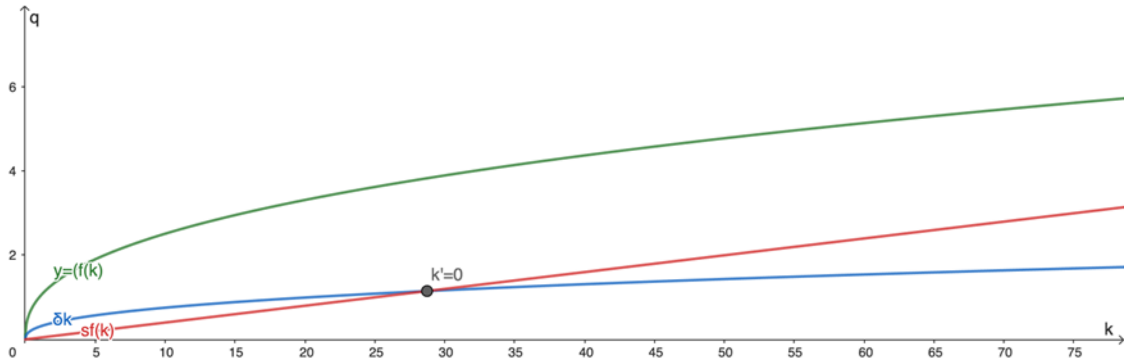
e assim, $k \cong 28,74$, ou seja, o capital por trabalhador no estado estacionário é de aproximadamente 28,74. Logo,

$$y = 28,74^{0,4} \cong 3,83,$$

Isto é, a produção por trabalhador é de aproximadamente 3,83.

A figura a seguir mostra como acontecem os avanços de acordo com capital. Ou seja, assim que a economia atingir um capital referente a 28,74 serão necessárias algumas intervenções políticas.

Figura 10 – Aplicação do modelo de crescimento de Solow



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela Equação de Bernoulli, temos

$$k(t) = \left(\frac{0,3}{0,04} + ce^{(0,4-1)0,04t} \right)^{\frac{1}{1-0,4}}.$$

Como estamos analisando uma economia em desenvolvimento, vamos adotar um k_0 baixo. Suponhamos então que $k(0) = 118$, assim temos que $c = 10$. Logo,

$$k(t) = \left(\frac{0,3}{0,04} + 10e^{(0,4-1)0,04t} \right)^{\frac{1}{1-0,4}}.$$

Analisando o tempo que essa economia levaria para atingir o estado estacionário, temos

$$k(t) = \left(\frac{0,3}{0,04} + 10e^{(0,4-1)0,04t} \right)^{\frac{1}{1-0,4}} = 28,74$$

podemos verificar que $t \cong 25$ meses. Ou seja, antes de atingir 25 meses, essa economia precisa pensar em estratégias como políticas que incentivem a poupança, ou investimento no capital humano, e até mesmo, investimento tecnológico, para que não haja uma estagnação do capital.

CAPÍTULO

5

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADA AO ENSINO BÁSICO

Esse capítulo traz uma proposta para aplicarmos o conceito de Equações Diferenciais em modelagem de situação real no Ensino Básico, mais especificamente, no Ensino Médio, com o objetivo de apresentar conceitos fundamentais de forma prática e acessível. A abordagem inclui associar a equação diferencial à uma função. No qual, ao resolvermos uma função em um determinado ponto, espera-se que essa retornará um valor, da mesma forma, ao resolver uma equação diferencial espera-se que essa retornará uma função para ser analisada as condições iniciais do problema. Com isto, é fácil entender o que se espera como resposta das modelagens.

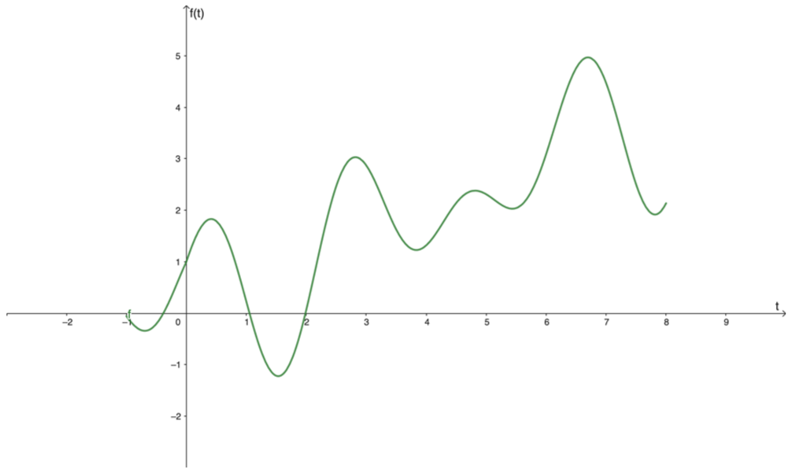
Ainda, devemos entender que as equações diferenciais descrevem situações que variam no decorrer no tempo, como o crescimento de uma planta, por exemplo. Queremos assim, analisar o crescimento dessa planta no decorrer do tempo, ou seja, a taxa de crescimento dela. Associamos a taxa de variação de algo à derivada, portanto, será necessária uma breve explicação desse conceito. Da mesma forma, ao modelarmos e encontrarmos a equação diferencial que descreve a situação, precisamos resolvê-la, para isto, precisamos do conceito "inverso" da derivada, que é a integral. Esse conceito será brevemente comentado para melhor compreensão e aplicação nos métodos de resolução. Baseados em (STEWART, 2013a) e (STEWART, 2013b).

Por fim, conseguimos aplicar as equações diferenciais em exemplos reais que podem ser observadas e interpretadas pelos alunos, promovendo um entendimento intuitivo das taxas de variação e sua importância na modelagem matemática.

5.1 Derivada

Primeiramente, vamos pensar em uma função, no qual, uma variável independente, t, está associada com uma variável dependente, $f(t)$. Essa função pode ser descrita pelo gráfico da Figura 11.

Figura 11 – Representação gráfica da curva da função $f(t)$



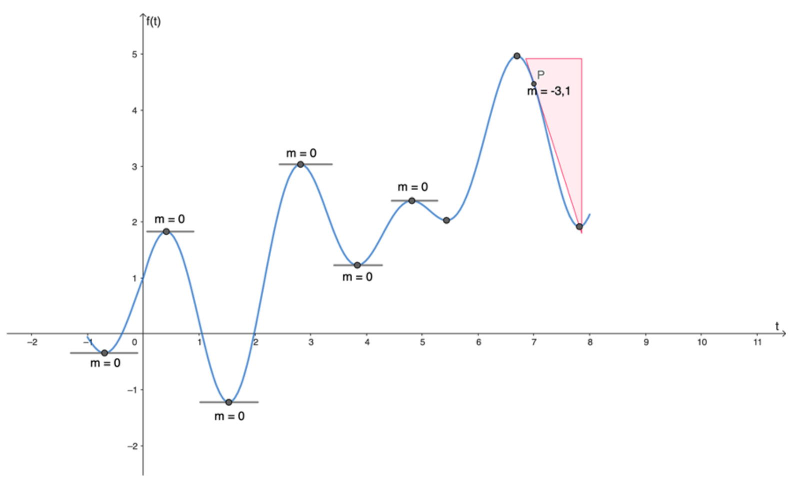
Fonte: Elaborada pelo autor.

A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um determinado ponto t, pode ser interpretada geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico na função em $(t, f(t))$. Dessa forma, podemos verificar que a derivada de uma função deverá satisfazer as seguintes propriedades:

- Função cresce se a derivada é positiva;
- Função decresce se a derivada é negativa;
- Se a derivada é igual a zero temos os pontos críticos da função, ou seja, os pontos de máximo, mínimo ou inflexão do gráfico da função.

Para calcular a inclinação da reta tangente, utilizando conceitos acessíveis ao ensino médio, podemos usar a aproximação $m = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$.

Figura 12 – Derivada de $f(t)$ como inclinação da reta tangente em um determinado ponto



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por exemplo, para estimar o valor da inclinação da reta no ponto $P(7, f(7))$, passamos a reta tangente a função ao gráfico da função para $t = 7$ e estimamos sua inclinação como cerca de $-3,1$. Assim $f'(7) = -3,1$, ou seja, a derivada da função no ponto é dada por esse valor. Observamos pelo gráfico, que neste ponto a função decresce, o que é verdade ao comparar com o valor negativo da derivada. Ainda, podemos notar os pontos em que a reta é horizontal, assim não existe uma inclinação da reta, ou seja, $m = 0$.

O conceito geométrico de derivada é fácil de ser observado, mas podemos calcular a derivada geral na função e aplicar no ponto por meio de regras de derivação de certas funções. Vamos apresentar a seguir algumas derivadas mais básicas e simples.

1. <u>Derivada de uma constante:</u> a derivada de uma constante é zero, pois em uma função constante a taxa de variação é sempre zero. Por exemplo:

$$f(t) = 5 \Rightarrow f'(t) = 0.$$

2. <u>Derivada de uma função identidade:</u> a derivada da função identidade é sempre 1. Por exemplo:

$$f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1.$$

3. <u>Derivada de uma função linear:</u> a derivada de uma função do tipo $f(t) = at + b$, é o coeficiente a, pois a taxa de variação de uma reta é constante. Por exemplo:

$$f(t) = 3t \Rightarrow f'(t) = 3.$$

4. <u>Derivada de potência:</u> Para a função $f(t) = t^n$ temos que $f'(t) = n \cdot t^{n-1}$. Por exemplo:

$$f(t) = t^5 \Rightarrow f'(t) = 5t^4.$$

5. <u>Derivada de uma função exponencial de base e:</u> a derivada de uma função exponencial é a própria função exponencial, ou seja,

$$f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t.$$

Ainda,

$$f(t) = e^{at} \Rightarrow f'(t) = ae^{at}, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$

6. <u>Regra do produto:</u> Para a função $f(t) = u(t) \cdot v(t)$ temos que

$$f'(t) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t).$$

Por exemplo:

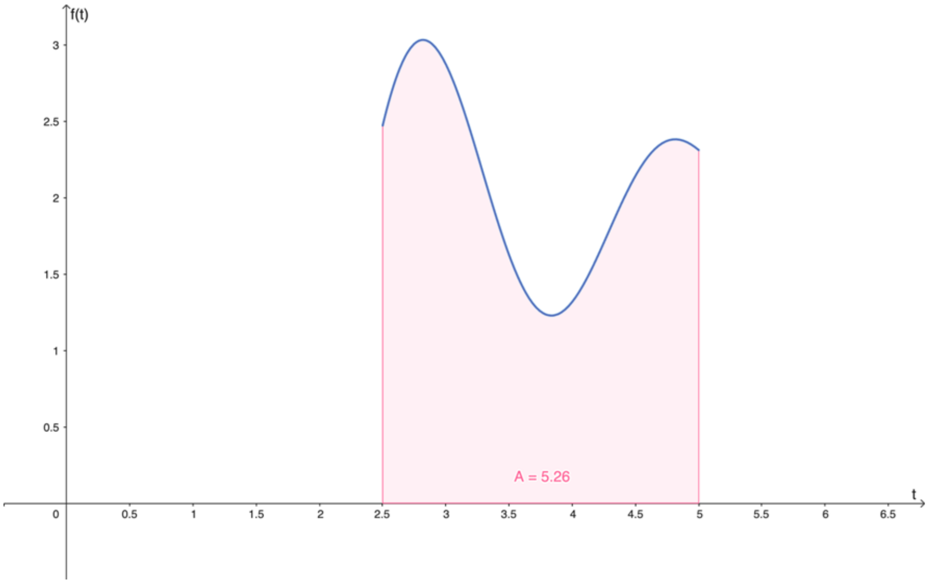
$$f(t) = t^5 e^{2t} \Rightarrow f'(t) = 5t^4 e^{2t} + t^5 2e^{2t}.$$

Essas derivadas darão base para compreendermos como podemos modelar funções matemáticas que descrevem situações cotidianas e entender as mudanças que elas apresentam.

5.2 Integral

Podemos descrever a operação integral, de forma simples, como o “inverso” da operação derivada. No entanto, o conceito geométrico de integral está relacionado a determinar áreas com lados curvos, ou seja, a área abaixo do gráfico de uma função $f(t)$.

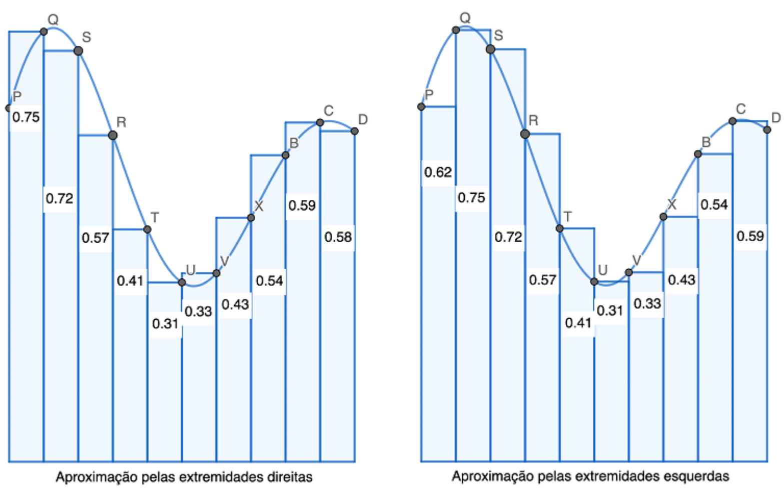
Figura 13 – Área abaixo do gráfico de uma função $f(t)$ definida em um intervalo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinarmos essa área, primeiramente utilizamos pequenos retângulos construídos abaixo da função, como ilustra a Figura 14, e determinamos a área de cada região retangular. Assim, a área abaixo da função será aproximadamente a soma das áreas das regiões retangulares, desde que os retângulos tenham base suficientemente pequenas.

Figura 14 – Aproximação da área por 10 retângulos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que, podemos fazer aproximações usando as extremidades da direita da função. Pela Figura 14, vemos que a área total aproximada pela direita é de 5,23, enquanto a área total aproximada usando as extremidades da esquerda é de 5,27. Assim, podemos concluir que a área abaixo da curva, ou seja, a integral da função definida entre 2,5 e 5, está entre 5,23 e 5,27, ou seja,

$$5,23 < \mathrm{A} < 5,27.$$

Podemos melhorar as estimativas aumentando a quantidade de retângulos, por exemplo, na nossa função, desenhamos 10 retângulos, mas poderíamos melhorar a aproximação se desenhássemos 20, 30, 50 ou até mesmo 1000. Quanto maior a quantidade de retângulos melhor será a estimativa da área.

O conceito geométrico de integral é fácil de ser observado, no entanto não é tão simples de ser executado. Logo, para estimar a área sob o gráfico de uma função entre dois pontos, utilizamos o conceito de integral, que pode ser vista, de certa forma, como a inversa da derivada da função. Neste trabalho, não apresentamos a definição formal de integral devido ao foco principal ser aplicações de equações diferenciais, sendo necessário apenas conhecimento de algumas integrais básicas.

Antes de introduzirmos essas integrais simples, notamos que, dada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotamos a integral indefinida de $g(t)$ da seguinte forma:

$$\int g(t)dt.$$

Importante ressaltar que como a integral é o "inverso" da derivada, sempre que integrarmos aparecerá uma constante de integração. Essa constante de integração, indica todas as famílias de funções que ao derivarmos retornará à função inicial, ou seja,

$$f(t) = \int f'(t)dt + c.$$

1. Integral de uma constante: Dado $k \in \mathbb{R}$,

$$\int kdt = kt + c \Rightarrow f(t) = kt + c.$$

Por exemplo:

$$\int 5dt = 5t + c \Rightarrow f(t) = 5t + c.$$

2. Integral de potência: Dado $n \in \mathbb{R}$,

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c.$$

Por exemplo:

$$\int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c \Rightarrow f(t) = \frac{t^6}{6} + c.$$

3. Integral de uma função linear: Dado a e $b \in \mathbb{R}$,

$$\int at + bdt = \frac{at^2}{2} + bt + c.$$

Por exemplo:

$$\int 3t - 6dt = \frac{3t^2}{2} - 6t + c \Rightarrow f(t) = \frac{3t^2}{2} - 6t + c.$$

4. Integral de uma função exponencial de base e: Dado $t \in \mathbb{R}$,

$$\int e^t dt = e^t + c \Rightarrow f(t) = e^t + c.$$

Ou ainda,

$$\int e^{3t} dt = \frac{1}{3}e^{3t} + c \Rightarrow f(t) = \frac{1}{3}e^{3t} + c.$$

5. Integral de uma função $\frac{f'(t)}{f(t)}$: Dado $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln|f(t)| + c.$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c \Rightarrow f(t) = \ln|t| + c.$$

Ainda,

$$\int \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2}\ln|t| + c \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}\ln|t| + c,$$

ou ainda,

$$\int \frac{5}{5t} dt = \ln|5t| + c \Rightarrow f(t) = \ln|5t| + c.$$

Observe que esse último exemplo, 5 é a derivada de 5t. Isto é importante nas aplicações de equações diferenciais apresentadas neste trabalho.

Essas integrais darão base para compreendermos como podemos encontrar as funções que descrevem situações cotidianas e são modeladas por meio das equações diferenciais.

5.3 Motivação para o estudo de equação diferenciais

A partir dos conceitos básicos apresentados de derivada e integral, torna-se possível a compreensão das equações diferenciais e seus exemplos. No entanto, podemos trazer esses exemplos de forma mais detalhada, mostrando os passos de derivada e integral, visando atingir um grupo maior de alunos, e assim, motivar os alunos contextualizando a utilização prática das equações diferenciais.

Os modelos matemáticos utilizam equações que descrevem fenômenos do mundo real. Por exemplo, o crescimento de uma bactéria, o crescimento de uma população, a velocidade de um objeto caindo, entre outros, que tem como principal objetivo entender o fenômeno e interpretar seu comportamento de acordo com o tempo.

Vamos relembrar que, quando estudamos uma função, associávamos um valor de entrada à um valor de saída. Por exemplo, seja a função $f(t) = 2t+5$, podemos obter algumas informações quando

- $t = -1$, temos que $f(-1) = 2\cdot(-1)+5 = 3$,
- $t = 0$, temos que $f(0) = 2\cdot 0+5 = 5$,
- $t = 1$, temos que $f(1) = 2\cdot 1+5 = 7$,

e ainda, conseguimos observar que temos uma função linear crescente. Portanto, temos que cada função, quando calculada em um ponto, retorna um valor como solução.

Da mesma forma, podemos entender que as equações diferenciais retornam uma função como solução, isto se deve ao fato de que as equações diferenciais descrevem situações que mudam constantemente. Por exemplo, podemos analisar o crescimento de uma população de coelhos no decorrer dos dias. Observamos que, quanto maior a população, mais rápido essa população irá crescer. Podemos assim, modelar a taxa de crescimento da população por meio de uma equação diferencial. Ao resolvermos essa equação diferencial teremos uma função que descreve o comportamento do crescimento ao longo do tempo, caso haja a necessidade de uma análise em um momento específico, basta aplicar a condição na função encontrada, por exemplo, prever como estará a população em 5 dias.

Vamos, a seguir, compreender e modelar algumas situações cotidianas utilizando um passo a passo mais detalhado, utilizando as derivadas e integrais básicas apresentadas anteriormente. Assim, podemos entender o comportamento dessas situações no tempo.

5.3.1 Idade de Fóssil

Ao encontrar um fóssil podemos encontrar uma idade aproximada analisando o quanto de massa atômica de um certo material ainda está presente nesse fóssil. Assim, consideramos que essa quantidade decaí proporcionalmente ao longo do tempo, ou seja, a taxa de decaimento da quantidade desse material pode ser escrita como

$$I'(t) = -\lambda I(t),$$

onde, λ é a constante de decaimento e I é a quantidade de massa atômica do material presente no fóssil em determinado tempo. Vamos analisar a idade aproximada de um fóssil encontrado.

Exemplo 41. Estime a idade de um fóssil encontrado com uma concentração de um milésimo da quantidade inicial de C-14 ainda presente.

Resolução. Podemos modelar essa situação da seguinte maneira

$$I'(t) = -\lambda I(t).$$

Para determinarmos a função $I(t)$ devemos utilizar os conceitos de integral aprendidos. Primeiramente vamos multiplicar toda a equação por $\frac{1}{I(t)}$, temos

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = -\lambda.$$

Integramos de ambos os lados,

$$\int \frac{I'(t)}{I(t)}dt = \int -\lambda dt.$$

Observe que o primeiro membro é a integral da função logaritmo enquanto o segundo membro temos uma constante, assim

$$\ln|I(t)| = -\lambda t + c_1.$$

Ainda não temos a função $I(t)$ de forma isolada, podemos então aplicar a função exponencial de ambos os lados, assim

$$e^{\ln|I(t)|} = e^{-\lambda t + c_1}.$$

Aplicando as propriedades de potência e exponencial, temos

$$I(t) = e^{c_1}e^{-\lambda t} = ce^{-\lambda t}.$$

Assim, a função que descreve esse comportamento é $I(t) = ce^{-\lambda t}$, então, podemos entender o comportamento dessa função, ou seja, ao longo do tempo sabemos que terá um decréscimo na quantidade de material, e como uma função exponencial, quanto maior o tempo, menor a queda do material. Mas, para precisarmos essa equação é necessário encontrar os valores das constantes.

Para datar esse fóssil é necessário utilizar a informação de que a meia-vida do C-14 é de aproximadamente 5600 anos, no seguinte sentido,

$$I(5600) = \frac{1}{2}I_0 \Rightarrow I_0e^{5600\lambda} = \frac{1}{2}I_0 \Rightarrow \lambda \cong -1,24.10^{-4}.$$

Assim $I(t) = I_0e^{-1,24.10^{-4}t}$.

Sabemos que, no presente, a quantidade de C-14 é 0,001 do inicial, assim

$$I(t) = 0,001I_0 \Rightarrow I_0e^{-1,24.10^{-4}t} = 0,001I_0 \Rightarrow t \cong 55708.$$

Logo, estimamos que o fóssil tem em torno de 55700 anos.

5.3.2 Variação de temperatura de um corpo com o meio

Podemos descrever que a taxa de perda de temperatura, $T'(t)$, de um corpo em um meio ambiente, no qual a temperatura ambiente é constante no decorrer do tempo, é proporcional a diferença da temperatura do corpo e do meio, $T(t) - T_a$. Assim, podemos modelar essa situação com a seguinte equação

$$T'(t) = k(T(t) - T_a).$$

Exemplo 42. Um corpo foi encontrado em uma casa dentro de um quarto fechado a uma temperatura constante de 22ºC. No momento da descoberta, a temperatura do corpo era de 29,4ºC. Uma hora depois, uma segunda medição foi realizada, e a temperatura do corpo era de 26,7ºC. Determine quanto tempo se passou do momento da morte até que o corpo fosse encontrado.

Resolução. Podemos modelar essa situação da seguinte maneira

$$T'(t) = k(T(t) - T_a).$$

Para determinarmos a função $T(t)$ devemos utilizar os conceitos de integral aprendidos. Primeiramente vamos reescrever a nossa equação como

$$T'(t) + kT(t) = kT_a.$$

Observamos que, o primeiro membro da equação não é uma função simples de olhar e ver que ela é a derivada de algo. No entanto, se multiplicarmos por uma função $\mu(t)$ de forma que ela parece uma derivada que conhecemos, então

$$\mu(t)T'(t) + \mu(t)kT(t) = \mu(t)kT_a.$$

Observe agora que, se $\mu(t)k$ for a derivada de $\mu'(t)$, teremos a regra do produto, no qual

$$(\mu(t)T(t))' = \mu(t)T'(t) + \mu(t)kT(t).$$

Então, $\mu'(t) = \mu(t)k$, para que isto seja verdade. E conseguimos encontrar a função $\mu(t)$. Multiplicando toda a equação por $\frac{1}{\mu(t)}$, temos

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = k.$$

Integramos de ambos os lados,

$$\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} dt = \int k dt.$$

Observe que o primeiro membro é a integral da função logaritmo enquanto o segundo membro temos uma constante, assim

$$\ln|\mu(t)| = kt + c_1.$$

Ainda não temos a função $\mu(t)$ de forma isolada, podemos então aplicar a função exponencial de ambos os lados, assim

$$e^{\ln|\mu(t)|} = e^{kt+c_1}.$$

Aplicando as propriedades de potência e exponencial, temos

$$\mu(t) = e^{c_1}e^{kt} = ce^{kt}.$$

Como queremos uma função que satisfaça nossas condições, vamos adotar $c = 1$, assim

$$\mu(t) = e^{kt}$$

E substituindo na nossa equação inicial, temos

$$e^{kt}T'(t) + e^{kt}kT(t) = e^{kt}kT_a.$$

Podemos ainda, escrever como

$$(\mu(t)T(t))' = e^{kt}kT_a.$$

De forma simples, podemos resolver integrando ambos os lados da igualdade.

$$\int(\mu(t)T(t))'dt = \int e^{kt}kT_a dt,$$

no primeiro membro temos a integral da derivada de uma função, assim, temos a própria função $\mu(t)T(t)$. Já no segundo membro T_a e k são valores constante, então basta integrar e^{kt}. Assim,

$$\mu(t)T(t) = \frac{1}{k}e^{kt}kT_a + c = e^{kt}T_a + c.$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{\mu(t)}$, temos

$$T(t) = \frac{e^{kt}T_a + c}{e^{kt}}.$$

Aplicando as propriedades de potência e simplificando, temos

$$T(t) = T_a + ce^{-kt}.$$

Assim, a função que descreve esse comportamento é $T(t) = T_a + ce^{-kt}$, aqui, podemos entender o comportamento dessa função, ou seja, ao longo do tempo sabemos que essa temperatura irá diminuir. Mas, para precisarmos essa equação é necessário encontrar os valores das constantes.

Considere o momento em que o corpo foi encontrado com $t = 0$, assim, $T(0) = 29,4°C$, $T(1) = 26,7°C$ e $T_a = 22°C$, então

$$T(0) = 22 + ce^{-k0} \Rightarrow 29,4 = 22 + c \Rightarrow c = 7,4.$$

Como sabemos $T(1)$, então

$$T(1) = 22 + 7,4e^{-k1} \Rightarrow 26,7 = 22 + 7,4e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{4,7}{7,4} \Rightarrow k \cong 0,454.$$

Desse modo,

$$T(t) = 22 + 7,4e^{-0,454t}.$$

Ainda, sabemos que a temperatura média de um corpo humano saudável é de 36,5°C, substituindo esse valor na equação podemos estimar a quanto tempo ocorreu a morte. Temos

$$T(t) = 22 + 7,4e^{-0,454t} \Rightarrow 36,5 = 22 + 7,4e^{-0,454t} \Rightarrow t \cong -1,482.$$

Observe que encontramos um tempo negativo já que a morte aconteceu antes do corpo ser encontrado. Como $t \cong -1,482$, equivale que a morte ocorreu aproximadamente 1 hora e 29 minutos antes do corpo ter sido encontrado.

O processo abordado acima, no qual revê os exemplos de uma forma mais detalhada, com conceitos básicos de derivada e integral, pode ser feito para os demais exemplos desse estudo.

5.4 Proposta didática: Introdução às Equações Diferenciais no Ensino Médio

A proposta a seguir é uma sequência didática que podem ser utilizadas por professores do Ensino Médio para a introdução dos conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias utilizadas nesse estudo. É uma proposta inicial que pode ser aprimorada e mais abrangente, nesse plano, serão utilizados somente dois exemplos vistos neste texto, no entanto, de forma similar, é possível aplicar os demais exemplos.

Nível de Ensino

Alunos do 3º ano do Ensino Médio, ou alunos com noções básicas de funções e suas representações gráficas

Tema

Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias: uma motivação para o estudo da matemática

Objetivos

- Compreender os conceitos de derivada e integral de uma forma mais simples, associando à conceitos geométricos.
- Associar as equações diferenciais a taxa de variação que acontece em fenômenos do nosso cotidiano.
- Apresentar a interdisciplinaridade dos problemas que podem ser modelados pelas EDO's.

- Aplicar métodos de resolução de EDO's.

Duração

6 aulas de 50 minutos cada

Desenvolvimento das aulas

- Aula 1: Motivação e Conceitos Iniciais

  Apresentar a importância das equações diferenciais e aplicação no cotidiano.

  1. Como podemos modelar matematicamente o crescimento de uma população ou a variação de temperatura de um corpo? Quais variáveis estão associadas? Quais suposições podemos fazer? Por exemplo, a taxa de crescimento da população depende da quantidade da população?
  2. Introduzir o conceito de taxa de variação e como elas aparecem no dia a dia.
  3. Contextualizar a utilização da modelagem matemática como uma equação diferencial.
  4. Discutir sobre fenômenos que poderiam ser modelados por equações diferenciais.

- Aula 2: Introdução às Derivadas

  Ensinar o conceito de derivada contextualizando de uma forma geométrica, como a inclinação da reta, e assim, a derivada como taxa de variação.

  1. Rever funções e gráficos, além dos conceitos necessários para introduzir EDO.
  2. Definir derivada como taxa de variação.
  3. Cálculo da derivada de funções simples:
     – Função constante;
     – Função identidade;
     – Função linear;
     – Função quadrática;
     – Função exponencial;
     – Regra do produto.
  4. Mostrar aplicações práticas:
     – Velocidade instantânea de um móvel (física);
     – Crescimento populacional.

5. Resolver exercícios básicos de cálculos de derivadas, aplicando as regras apresentadas.

- Aula 3: Introdução às Integrais

  Apresentar a integral como o processo inverso da derivada e de uma forma geométrica como a área abaixo da curva.

  1. Relacionar derivada e integral.
  2. Definir integral como a soma das enésimas áreas sob a curva de uma função.
  3. Cálculo da integral de funções simples:
     - Função constante;
     - Função linear;
     - Função quadrática;
     - Função exponencial;
     - Regra do logaritmica.
  4. Mostrar aplicações práticas:
     - Deslocamento a partir da velocidade;
     - Crescimento.
  5. Resolver exercícios básicos de cálculos de integrais, aplicando as regras apresentadas.

- Aula 4: Equações Diferenciais

  Relacionar derivadas e integrais às equações diferenciais e método de resolução.

  1. Introduzir conceito de equações diferenciais de primeira ordem.
  2. Relacionar as derivadas e as taxas de variação nos modelos matemáticos.
  3. Ensinar um método simples de resolução utilizando método de separação de variáveis:
     - Exemplos resolvidos passo a passo;
     - Exercícios simples, como por exemplos: $y'(t) = ky$, para diferentes valores de k e condições iniciais.
  4. Exemplos práticos, explicar o passo a passo de toda a modelagem e resolução do problema:
     - Datar o fóssil;
     - Estimar o tempo da morte.

- Aula 5: Aplicações

  Exemplos / Exercícios práticos, explicar o passo a passo de toda a modelagem e resolução do problema:

  – Datar o fóssil;

  – Estimar o tempo da morte.

- Aula 6: Aplicações no dia a dia

  Explorar como as equações diferenciais são utilizadas para modelar fenômenos reais.

  1. Discutir fenômenos cotidianos que podem ser modelados com equações diferenciais.
  2. Escolher um fenômenos para modelar junto com os alunos.
  3. Resolver e discutir os resultados obtidos.

  Finalizar com uma discussão sobre a importância das equações diferenciais na ciência e no dia a dia.

Recursos Didáticos

- Quadro e marcador/giz;
- Slides com gráficos e exemplos visuais;
- Folhas de atividades e exercícios.

5.5 Considerações Finais

O estudo de equações diferenciais no ensino médio, além do enriquecimento curricular, proporciona aos alunos uma ferramenta que auxilia a compreensão de fenômenos reais. Trazer possibilidade de modelagem em situações cotidianas permite que os alunos, de forma intuitiva, entendam o processo, compreendam os resultados e, consequentemente, se sintam motivados para estudar matemática.

Aplicar equações diferenciais ao ensino básico requer, dos alunos, habilidades de cálculo diferencial e integral. Esse capítulo propõe trazer uma proposta de contextualização do conceito, de forma simples, para que fique visível a taxa de variação, como derivada, e os cálculos necessários de integração. De forma que seja suficiente para o entendimento das equações diferenciais.

Outra proposta, seria um curso prévio de Cálculo Diferencial e Integral, como proposto, por exemplo, por (JUNIOR, 2015). Esse trabalho propõe a implementação de uma disciplina para o estudo dos conceitos de limite, derivada e integral, sendo dividido em dois grupos por nível de afinidade às áreas exatas. O primeiro grupo traz a disciplina de forma mais intuitiva, relacionando a utilização no dia a dia e as disciplinas do Ensino Médio, para um grupo de alunos que não pretendem seguir os estudos nas áreas exatas. Já o segundo grupo, os alunos com pretensão de seguir os estudos nas áreas das exatas, foi abordado o conteúdo de forma mais tradicional, se preocupando com o excesso de formalismo, mas trazendo o mais próximo ao curso superior. Como conclusão, observou-se que os alunos do grupo 1, no qual apresentou a disciplina de forma mais próxima a sua realidade de estudo, se manteve mais motivados e por consequência tiveram um aproveitamento maior quando comparado ao grupo 2. Com isto, utilizar a abordagem de estudo do grupo 1 seria suficiente para que os alunos dessem sequência no aprendizado de disciplinas na área das exatas, como as equações diferenciais, sendo possível aplicar o estudo proposto nesse trabalho.

Finalmente, é interessante notar que este trabalho pode ser utilizado por alunos do ensino superior da área de ciências exatas para um estudo inicial das equações diferenciais ordinárias. Por exemplo, os alunos que iniciam projetos de iniciação científica vinculadas à OBMEP logo em seu primeiro ano de graduação ou mesmo alunos que somente tenham interesse nessa área da matemática.

REFERÊNCIAS

CILDOZ, M. U.; PALOMINO, S. Modelos populacionais aplicados à aquicultura. **Biomatemática**, 2017. Citado nas páginas 18 e 53.

COSTA, L. R.; SANTOS, R. R. dos. **Métodos numéricos para EDOs e aplicações a negócios**. Ribeirão Preto, 2024. Citado nas páginas 18 e 53.

JUNIOR, J. A. de O. **Um estudo sobre a implementação do cálculo diferencial e integral no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos, 2015. Citado na página 90.

JUNIOR, L. P. L. **Primeiro Relatório de Atividades - PICME Projeto: Equações Diferenciais e Aplicações**. Ribeirão Preto, 2013. Citado nas páginas 18, 19 e 29.

NOBREGA, P. d. N. **Equações diferenciais**. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. Citado nas páginas 18 e 29.

SILVA, L. H. da. **Equações diferenciais ordinárias e suas aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos, 2020. Citado nas páginas 18, 19 e 29.

STEWART, J. **Cálculo Volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado nas páginas 18, 53 e 77.

____. **Cálculo Volume 2**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado nas páginas 18 e 77.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. **Equações Diferenciais**. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Educação a distância, 2017. Citado nas páginas 18 e 29.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. Citado nas páginas 18, 19 e 53.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Differential Equations with Boundary-Value Problems**. 7. ed. [S.l.]: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009. Citado nas páginas 18 e 53.

ICMC USP
SÃO CARLOS