

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Explorações didáticas em Matemática Financeira

Joel Luiz Pereira

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Joel Luiz Pereira

Explorações didáticas em Matemática Financeira

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

USP – São Carlos
Janeiro de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

L953e Luiz Pereira, Joel
 Explorações didáticas em Matemática Financeira /
 Joel Luiz Pereira; orientador Tiago Henrique
 Picon. -- São Carlos, 2025.
 131 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
 Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
 Computação, Universidade de São Paulo, 2025.

 1. Matemática Financeira. 2. Sequências e
 Progressões. 3. Juros Compostos. 4. Sistemas de
 Amortização. 5. Tecnologia Educacional. I. Picon,
 Tiago Henrique, orient. II. Título.

Joel Luiz Pereira

Didactic explorations in Financial Mathematics

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

USP – São Carlos
January 2025

*Dedico este trabalho a todos que, dentre as muitas formas de impactar positivamente a humanidade, escolheram trilhar o caminho da educação. Foram eles que me trouxeram até aqui.
São eles com quem sigo o meu caminho.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, José Geraldo e Maria Elizete, que nos percursos que a vida os apresentou, não puderam terminar os estudos básicos, mas sempre me ensinaram o valor da educação e estiveram me apoiando para que eu alcançasse os meus objetivos por meio dela.

Aos meus irmãos e familiares, que sempre me incentivaram na minha aspiração por uma educação superior pública.

Ao meu namorado Vinícius, com quem iniciei uma relação durante a fase final deste trabalho. Em meio a essa transição, sua constante empatia e compreensão foram fundamentais, permitindo adaptações em nossos projetos pessoais para acomodar minhas demandas acadêmicas e profissionais.

Aos meus professores do ensino básico e da graduação, que se mantêm vivos dentro de mim através de seus ensinamentos.

Aos meus alunos da rede pública municipal de Ribeirão Preto, que foram um grande apoio em momentos de dificuldade durante o curso, mesmo de forma inconsciente. Em muitas ocasiões, a certeza de que meu esforço era para proporcionar-lhes uma educação de maior qualidade é o que me manteve firme.

Aos meus colegas e professores do PROFMAT, que contribuíram em minha formação docente e enquanto pessoa, sempre trazendo reflexões e ensinamentos de forma crítica e sagaz.

À Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto e o Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação de São Carlos, pela oportunidade concedida de participar deste curso de mestrado.

Ao meu orientador, Professor Dr. Tiago Henrique Picon, pela paciência, empenho e empatia na realização deste trabalho. Sem o seu olhar, esse trabalho não seria o mesmo e, portanto, meu agradecimento especial!

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram na minha formação, deixo minha gratidão.

*“Todos os dias quando acordo
não tenho mais o tempo que passou,
mas tenho muito tempo...
Temos todo tempo do mundo.”
(Legião Urbana)*

RESUMO

PEREIRA, J. L. **Explorações didáticas em Matemática Financeira**. 2025. 131 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

Este trabalho visa contribuir para o ensino da Matemática Financeira no Brasil, em atendimento à Base Nacional Comum Curricular, estabelecendo como elo importante, para isso, a *consciência-habilidade-decisão*, isto é, desenvolver consciência financeira, possuir habilidades matemáticas e tomar decisões financeiras assertivas. Para tanto, as páginas iniciais desta dissertação irão abordar conceitos fundamentais atrelados à Matemática Financeira, tais como razão, proporção, porcentagem, conceitos econômicos, sequências e progressões, relacionando-os a problemas e situações do cotidiano. Um capítulo específico dedica-se a tópicos mais avançados da Matemática Financeira, sempre garantindo demonstrações que validem as expressões matemáticas utilizadas no ensino regular, mas também propondo inclusões de tópicos pouco explorados nas salas de aulas, que são as tabelas de amortizações envolvendo empréstimos e financiamentos, tendo em vista a relevância dessa temática à vida dos estudantes. O diferencial desta dissertação está no capítulo voltado ao desenvolvimento de um produto educacional, que propõe a integração de recursos tecnológicos, como o software Excel e o VBA (Visual Basic for Applications), para enriquecer o ensino da Matemática Financeira. A proposta inclui sequências didáticas que utilizam ferramentas digitais e linguagem de programação para promover um aprendizado mais dinâmico e interativo. Essas atividades foram elaboradas com foco em alunos do ensino fundamental e médio, oferecendo uma perspectiva prática e contextualizada da Matemática. Por fim, espera-se que este trabalho inspire novas iniciativas na Educação Financeira, reafirmando a Matemática como uma ciência essencial para a formação de indivíduos críticos e conscientes, capazes de enfrentar desafios econômicos com responsabilidade e autonomia.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Sequências e Progressões, Juros Compostos, Sistemas de Amortização, Tecnologia Educacional.

ABSTRACT

PEREIRA, J. L. **Didactic explorations in Financial Mathematics**. 2025. 131 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

This work aims to contribute to the teaching of Financial Mathematics in Brazil, in compliance with the Base Nacional Comum Curricular [Brazilian National Common Core Curriculum], establishing as an important link the *consciousness-skill-decision*, that is, developing financial awareness, possessing mathematical skills, and making assertive financial decisions. To this end, the initial pages of this dissertation will address fundamental concepts related to Financial Mathematics, such as ratio, proportion, percentage, economic concepts, sequences, and progressions, relating them to real-world problems and situations. A specific chapter is dedicated to more advanced topics in Financial Mathematics, always ensuring formal proofs that validate the mathematical expressions used in regular education, while also proposing the inclusion of topics that are less explored in classrooms, such as amortization tables involving loans and financing, considering the relevance of this subject to students' lives. The distinguishing feature of this dissertation lies in the chapter focused on the development of an educational product, which proposes the integration of technological resources, such as Excel software and VBA (Visual Basic for Applications), to enrich the teaching of Financial Mathematics. The proposal includes didactic sequences that use digital tools and programming language to promote a more dynamic and interactive learning experience. These activities were designed with a focus on elementary and high school students, offering a practical and contextualized perspective on Mathematics. Finally, it is expected that this work will inspire new initiatives in Financial Education, reaffirming Mathematics as an essential science for the development of critical and aware individuals, capable of facing economic challenges with responsibility and autonomy.

Keywords: Financial Mathematics, Sequences and Progressions, Compound Interest, Amortization Systems, Educational Technology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Layout do Excel	83
Figura 2 – Calculadora de juros simples	88
Figura 3 – Calculadora de juros simples preenchida	90
Figura 4 – Calculadora de juros compostos	91
Figura 5 – Calculadora de juros composto preenchida	93
Figura 6 – Parâmetros para a Programação VBA	94
Figura 7 – Parâmetros VBA - Exercício 1	96
Figura 8 – Tabelas PRICE e SAC - Exercício 1	96
Figura 9 – Definição de variáveis - Tabela PRICE	123
Figura 10 – Parâmetros de entrada - Tabela PRICE	123
Figura 11 – Limpeza de Dados Anteriores - Tabela PRICE	124
Figura 12 – Formatação - Tabela PRICE	125
Figura 13 – Cálculo da Prestação - Tabela PRICE	125
Figura 14 – Valores iniciais - Tabela PRICE	126
Figura 15 – Loop para Cálculo da Tabela PRICE	127
Figura 16 – Saldo total - Tabela PRICE	128
Figura 17 – Mensagem de confirmação - Tabela PRICE	128
Figura 18 – Loop para Cálculo da Tabela SAC	130

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	CONCEITOS INICIAIS	23
2.1	Razão	23
2.2	Proporção	28
2.3	Proporções e porcentagem	31
2.3.1	<i>Acréscimo e Descontos</i>	32
2.4	Indução Matemática	33
2.5	Tópicos de economia: um passeio por nomenclaturas	35
2.5.1	<i>Taxas e Índices do Mercado Financeiro</i>	36
2.5.2	<i>Investimentos: Renda Fixa e Renda Variável</i>	37
3	SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES	43
3.1	Sequências	43
3.2	Progressão Aritmética	44
3.3	Progressão Geométrica	49
3.4	Progressão Aritmético-Geométrica	55
4	MATEMÁTICA FINANCEIRA	59
4.1	Juros simples	61
4.2	Taxa proporcional e taxa equivalente	63
4.3	Juros compostos	65
4.4	Taxa equivalente nos Juros Compostos	68
4.5	Série de pagamentos uniformes	72
4.6	Sistemas de amortização	73
4.6.1	<i>Sistema de prestações constantes</i>	74
4.6.2	<i>Sistema de amortização constante</i>	76
5	UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA	81
5.1	Introduzindo o Excel	82
5.1.1	<i>Funcionalidades básicas do Excel</i>	82
5.1.1.1	<i>Fórmulas Matemáticas e Estatísticas</i>	83
5.1.1.2	<i>Funções Lógicas e Condicionais</i>	84

5.1.1.3	<i>Funções de Texto</i>	85
5.1.1.4	<i>Funções de Data e Hora</i>	85
5.1.1.5	<i>Funções Financeiras</i>	85
5.1.2	<i>Funcionalidade avançadas do Excel</i>	86
5.1.2.1	<i>Habilitando a Guia Desenvolvedor</i>	86
5.2	<i>Atividade 1 - Explorando a Matemática Financeira</i>	87
5.3	<i>Atividade 2 - Resolvendo problemas de juros simples no Excel</i>	87
5.3.1	<i>Calculadora de juros simples: passo a passo</i>	87
5.3.2	<i>Aplicação: calculadora de juros simples</i>	89
5.4	<i>Atividade 3 - Resolvendo problemas de juros compostos no Excel</i>	90
5.4.1	<i>Calculadora de juros compostos: passo a passo</i>	90
5.4.2	<i>Aplicação: calculadora de juros simples</i>	92
5.5	<i>Atividade 4 - Aplicando programação para gerar tabelas de amortização</i>	93
5.5.1	<i>Parâmetros para a programação VBA</i>	93
5.5.2	<i>Código VBA para gerar tabelas de amortização</i>	94
5.5.2.1	<i>Código VBA - Tabela PRICE</i>	94
5.5.2.2	<i>Código VBA - Tabela SAC</i>	95
5.5.2.3	<i>Análise detalhada - Código VBA para gerar tabelas de amortização</i>	95
5.5.3	<i>Aplicação: código VBA para gerar tabelas de amortização</i>	96
5.6	<i>Pasta: Explorações Didáticas</i>	97
6	<i>CONSIDERAÇÕES FINAIS</i>	99
REFERÊNCIAS		101
APÊNDICE A	<i>ATIVIDADE 1 - EXPLORANDO A MATEMÁTICA FINANCEIRA</i>	103
APÊNDICE B	<i>ATIVIDADE 2 - RESOLVENDO PROBLEMAS DE JUROS SIMPLES NO EXCEL</i>	107
APÊNDICE C	<i>ATIVIDADE 3 - RESOLVENDO PROBLEMAS DE JUROS COMPOSTOS NO EXCEL</i>	109
APÊNDICE D	<i>ATIVIDADE 4 - APLICANDO PROGRAMAÇÃO PARA GERAR TABELAS DE AMORTIZAÇÃO</i>	111
APÊNDICE E	<i>CÓDIGO VBA PARA GERAR TABELA PRICE</i>	113
APÊNDICE F	<i>CÓDIGO VBA PARA GERAR TABELA SAC</i>	117

APÊNDICE G	ANÁLISE - CÓDIGO VBA PARA GERAR TABELA PRICE E SAC	121
G.1	Análise do Código VBA para Gerar a Tabela PRICE	121
G.1.1	<i>Criação de sub-rotina</i>	121
G.1.2	<i>Definição de variáveis</i>	122
G.1.3	<i>Entrada de dados</i>	123
G.1.4	<i>Limpeza de dados anteriores</i>	124
G.1.5	<i>Formatação da Tabela PRICE</i>	124
G.1.6	<i>Preenchimento da Tabela PRICE</i>	125
G.1.7	<i>Mensagem de confirmação</i>	128
G.2	Análise do Código VBA para Gerar a Tabela SAC	129
APÊNDICE H	SITES INFORMATIVOS E LINKS ÚTEIS	131

INTRODUÇÃO

De acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), conforme abordado pelo Centro OCDE/CVM de Educação e Alfabetização Financeira para América Latina e o Caribe,

A educação financeira é o processo pelo qual consumidores/investidores financeiros aprimoram sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros e, por meio de informação, instrução e/ou aconselhamento objetivo, desenvolvem as habilidades e a confiança para se tornarem mais conscientes de riscos e oportunidades financeiras, a fazer escolhas informadas, a saber onde buscar ajuda, e a tomar outras medidas efetivas para melhorar seu bem-estar e sua proteção financeira. (CVM, 2005)

Deste modo, ao estabelecermos como objetivo o estudo da educação financeira, é importante destacar que há etapas a serem desenvolvidas com os estudantes, sendo a primeira delas a consciência cidadã, especialmente no âmbito financeiro. Após essa etapa, os alunos naturalmente perceberão, de acordo com sua faixa etária, a importância e a necessidade em dominar habilidades matemáticas envolvendo situações financeiras. Por fim, essas habilidades possibilitarão tomadas de decisões com embasamento teórico e bem alinhadas com a realidade do estudante. A essas três etapas podemos definir o elo *consciência-habilidade-decisão*.

É neste cenário, então, que a Matemática Financeira se acentua como uma proposta de ensino intrinsecamente ligado à vida cotidiana, permeando desde as simples compras do dia a dia até complexos investimentos e financiamentos. No entanto, sua importância nem sempre foi adequadamente reconhecida no contexto educacional brasileiro, resultando em lacunas no ensino e, conseqüentemente, em escolhas financeiras desorientadas por parte dos indivíduos. Este cenário motivou o desenvolvimento de estratégias para aprimorar o ensino da Matemática Financeira, abordando-a de forma mais conectada à realidade e promovendo uma compreensão mais profunda dos seus conceitos e aplicações.

Historicamente, a Matemática Financeira emergiu como uma ferramenta prática para lidar com questões comerciais e administrativas, evoluindo ao longo do tempo para abranger uma ampla gama de conceitos e técnicas. No entanto, apesar dos esforços de órgãos nacionais e internacionais para promover mudanças no ensino da Matemática Financeira, ainda há desafios a serem superados. É necessário um contínuo investimento em novas abordagens pedagógicas e na integração de recursos tecnológicos para garantir uma educação financeira eficaz e alinhada às demandas da sociedade contemporânea.

Neste contexto, esta dissertação se propõe a contribuir para a melhoria do ensino da Matemática Financeira, adotando uma abordagem diferenciada que visa não apenas apresentar os conceitos básicos, mas também explorar temas relevantes, como sistemas de amortização e tomada de decisões. A metodologia adotada baseia-se em extensas revisões bibliográficas, incluindo obras específicas de Matemática Financeira, livros didáticos do Ensino Médio e documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC).

A pesquisa também introduz sugestões de sequências didáticas utilizando recursos tecnológicos, como o software Excel, reconhecendo sua importância no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática Financeira. Ao integrar teoria e prática, esta dissertação visa fornecer subsídios para o desenvolvimento de estratégias de ensino mais eficazes, que capacitem os alunos a compreender e aplicar os conceitos de Matemática Financeira de forma crítica e autônoma, preparando-os para tomar decisões financeiras responsáveis e promover uma vida financeira mais saudável e sustentável.

CONCEITOS INICIAIS

Devido ao fato deste trabalho ser focado em Matemática Financeira, os resultados a serem obtidos nesta dissertação demandam conhecimentos prévios sobre matemática básica, tais como razão, proporção e porcentagem e, portanto, este capítulo inicial apresentará uma abordagem destes conteúdos, através de estudos aprofundados da obra de [Iezzi, Hazzan e Degenszajn \(2013\)](#). Ainda, um dos métodos utilizados na justificativa das demonstrações dos resultados apresentados neste texto é o método por indução, que também será discutido neste capítulo. Assim, a exposição desse método, juntamente com o resgate de outros conhecimentos essenciais, faz deste capítulo um elo necessário para a total compreensão do tema a ser aprofundado.

2.1 Razão

Nesta seção, utilizando-se de que a definição do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) esteja bem estabelecida, estende-se os conceitos deste conjunto no que tange à razão:

Definição 2.1.1. Sendo a e b dois números racionais, com $b \neq 0$, denomina-se razão entre a e b ou razão de a para b o quociente $\frac{a}{b}$.

Observação 2.1.1. Nota-se que é comum problemas envolvendo razões necessitarem de uma atenção especial à ordem da leitura, de modo que a primeira quantidade informada estará relacionada ao numerador, enquanto a segunda, ao denominador. Reforçar tais conhecimentos parece ser banal a princípio, mas são fundamentais na abordagem da Matemática Financeira com alunos do Ensino Fundamental e Médio, tendo em vista que, em avaliações externas, há incidência de muitos distratores envolvendo essa habilidade.¹

Observação 2.1.2. Em situações específicas, o primeiro termo de uma razão é denominado antecedente, enquanto o segundo, consequente.

¹ Distratores são respostas aparentemente corretas, utilizadas em testes de múltipla escolha, mas cuja finalidade é identificar equívocos ou processos incompletos no domínio de uma habilidade.

Exemplo 2.1.1: Em certa manhã, em um mercado, havia 72 caixas de uvas. Se foram vendidas 20 caixas, responda:

- Qual a razão entre a quantidade de caixas vendidas e o número de caixas iniciais?
- Qual a razão entre a quantidade caixas que sobraram e o número de caixas vendidas?
- Qual a razão entre o número de caixas iniciais e a quantidade de caixas vendidas?

Vamos apresentar a solução das questões acima.

a) Seja a = quantidade de caixas vendidas e b = número de caixas iniciais. Portanto, temos que a razão é dada por

$$\frac{a}{b} = \frac{20}{72} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Perceba que, por fins didáticos iniciais, a fração acima irredutível foi obtida simplificando sucessivamente por 2, evidenciando assim que razão também está relacionada com frações equivalentes e, inclusive, há mais de uma equivalência.

b) Seja a = quantidade de caixas que sobraram e b = número de caixas vendidas. Portanto, temos que a razão é dada por

$$\frac{a}{b} = \frac{52}{20} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}.$$

c) Seja a = número de caixas iniciais e b = quantidade de caixas vendidas. Portanto, temos que a razão é dada por

$$\frac{a}{b} = \frac{72}{20} = \frac{18}{5}.$$

É interessante notar a diferença proposta pelos itens (a) e (c).

Tendo em vista que a razão é caracterizada como uma fração, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) há o estabelecimento de algumas habilidades previstas para que os alunos dominem a relação entre diversas representações dos números racionais e, inclusive, sua representação em porcentagem. Essas habilidades são melhores desenvolvidas a partir do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental:

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica;

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza;

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. (BRASIL, 2018, p. 301)

Primeiramente, uma razão, por sua definição, pode ser representada na forma decimal utilizando a definição de que a fração se trata de um quociente.

Observação 2.1.3. A representação da razão fracionária em razão decimal pode ser obtida através da divisão do numerador pelo denominador.

Exemplo 2.1.2: Em cada item abaixo, represente as razões em sua forma decimal:

a) Razão dada por $\frac{2}{5}$.

b) Razão entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{8}$.

c) Razão entre 2,2 e 0,8.

Apresentando a solução das questões acima, temos:

a) Basta calcular $2 : 5 = 0,4$. Vale ressaltar que a notação matemática utilizando dois pontos, para representar uma razão, possui sua importância e equivale ao quociente entre dois números. Inclusive, utiliza-se essa notação para representar uma razão especial muito comum no dia a dia, conhecida como "escala".

b) De modo análogo, envolvendo a divisão de frações, calcula-se, sendo que

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0,666\dots$$

c) Como a razão é uma fração que permite numerador e denominador racional, temos que

$$\frac{2,2}{0,8} = 2,2 : 0,8 = 2,75.$$

De forma semelhante, entendendo a porcentagem como uma extensão das representações fracionárias, podemos representar uma razão em sua forma percentual.

Definição 2.1.2. Denomina-se taxa percentual, razão centesimal ou porcentagem a razão cujo denominador seja 100.

Se a é um número real, então $a\%$ representa a fração $\frac{a}{100}$, ou seja, as notações usuais utilizam-se do símbolo $\%$ como substituição ao denominador 100.

A principal contribuição da porcentagem, no dia a dia, é a sua possibilidade de comparação entre razões. A exemplo, se em uma sala A a frequência de alunos em um dia foi de 90%, enquanto na sala B a frequência registrada foi de 80%, permite-se comparar a frequência das turmas em relação ao total de alunos matriculados na sala e não apenas comparando o total de alunos que estavam presentes naquele dia, uma vez que em cada sala pode haver um número distinto de alunos. A porcentagem, portanto, é uma razão presente no cotidiano das pessoas e, de forma geral, ter domínio das habilidades envolvidas em suas aplicações é de interesse no desenvolvimento acadêmico dos estudantes.

Exemplo 2.1.3: Quadro comparativo entre razão e porcentagem.

Razão	$\frac{14}{100}$	$\frac{6,3}{100}$	$\frac{0,08}{100}$	$\frac{270}{100}$
Porcentagem	14%	6,3%	0,08%	270%

Observação 2.1.4. A representação na forma percentual, a partir da forma fracionária, pode ser obtida ao estabelecer frações equivalentes cujo denominador seja 100. Enquanto isso, a representação na forma percentual, a partir da forma decimal, pode ser obtida entendendo o número decimal como uma razão cujo denominador seja 1. Desta forma, ao multiplicar essa razão por $\frac{100}{100}$, obtém-se uma fração centesimal equivalente que, por definição, é a representação percentual.

Exemplo 2.1.4: Preencha o quadro abaixo com as corretas relações entre as diferentes representações de uma razão:

ITEM	Forma fracionária irredutível	Forma decimal	Forma percentual
(i)	$\frac{3}{8}$		
(ii)			16%
(iii)		0,25	
(iv)	$\frac{9}{7}$		

Vamos apresentar a solução de cada item acima, de forma a preencher o quadro proposto.

ITEM (i)

A) Na representação decimal temos que $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$.

B) Na representação percentual há duas opções introduzidas anteriormente:

1ª opção: Determinar a fração centesimal equivalente à $\frac{3}{8}$, o que pode ser obtido multiplicando-se numerador e denominador por 12,5 e obtendo $\frac{37,5}{100} = 37,5\%$.

2ª opção: Multiplicar a razão decimal $\frac{0,375}{1}$ por $\frac{100}{100}$, de modo a obter a fração centesimal $\frac{37,5}{100} = 37,5\%$.

ITEM (ii)

A) Na representação fracionária, como a porcentagem é uma fração centesimal, temos: $\frac{16}{100} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$.

B) Na representação decimal, entendendo-se que os números decimais são decorrentes das frações cujo denominador é uma potência de 10, a leitura da fração $\frac{16}{100}$ nos indica que 16 centésimos é a forma decimal do número, isto é: 0,16. Tal processo pode ser obtido também realizando as divisões do numerador pelo denominador em quaisquer etapas da fração equivalente a $\frac{16}{100}$.

ITEM (iii)

A) Na representação percentual basta multiplicar a razão decimal por $\frac{100}{100}$, obtendo uma fração centesimal $\frac{0,25}{1} = \frac{25}{100} = 25\%$. De modo geral, note que para ocorrer essa conversão basta multiplicar o número decimal por 100, o que corresponde a deslocar a vírgula em 2 casas decimais.

B) Como na representação anterior já obtivemos uma fração, para determinar uma fração irredutível basta realizar as simplificações: $\frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

ITEM (iv)

A) Na representação decimal, temos: $\frac{9}{7} = 9 : 7 = 1.\overline{285714}$.

B) Na representação percentual, embora há a possibilidade de obter frações equivalentes cujo denominador seja 100, nem sempre é uma opção viável, tendo em vista que 100 é múltiplo de fatores de 2 e 5, apenas. Deste modo, uma alternativa é a representação do número fracionário em número decimal (inclusive dízima periódica), representando aproximadamente o seu valor percentual, isto é, $\frac{9}{7} = 9 : 7 = 1.\overline{285714} \approx 128,6\%$.

Deste modo, a solução completa do exemplo é dada por

ITEM	Forma fracionária irredutível	Forma decimal	Forma percentual
(i)	$\frac{3}{8}$	0,375	37,5%
(ii)	$\frac{4}{25}$	0,16	16%
(iii)	$\frac{1}{4}$	0,25	25%
(iv)	$\frac{9}{7}$	$1.\overline{285714}$	128,6%

2.2 Proporção

Definição 2.2.1. Seja $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ duas razões em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b, d \neq 0$. Assim, denomina-se como proporção a igualdade entre essas duas razões, de modo que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Proposição 2.2.1. Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, em que a, d são denominados extremos e b, c meios, tem-se que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c$$

Demonstração. Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, basta multiplicar os membros da igualdade por $b \times d$ e simplificar a fração correspondente:

$$\begin{aligned} b \times d \times \frac{a}{b} &= b \times d \times \frac{c}{d} \\ \frac{b \times d \times a}{b} &= \frac{b \times d \times c}{d} \\ \frac{b}{b} \times d \times a &= b \times c \times \frac{d}{d} \\ 1 \times d \times a &= b \times c \times 1 \\ d \times a &= b \times c. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2.5: Qual deve ser o valor de x para que os números 16, 7, x e 105 formem, nesta ordem, uma proporção?

Na resolução da situação proposta é preciso montar uma proporção respeitando a ordem estabelecida, logo,

$$\frac{16}{7} = \frac{x}{105}.$$

Agora, aplicando a propriedade das proporções, temos que

$$7x = 16 \times 105$$

$$7x = 1680$$

$$x = 240.$$

Assim, para que haja uma proporção, $x = 240$.

Exemplo 2.2.6: Em uma sala, a quantidade de homens e mulheres está na razão de 3 para 5. Sabendo que há 27 homens nesta sala, quantos estudantes há no total da sala?

Este exemplo é interessante porque, de fato, aborda a própria definição de proporção em seu enunciado, o que pode ser útil na aplicação inicial deste conteúdo aos alunos. Para facilitar o entendimento desta questão, em sala de aula, geralmente na abordagem pedagógica da resolução é natural apresentar um quadro aos alunos, o que reproduziremos aqui:

Gênero	Razão	Quantidade real
Meninos	3	27
Meninas	5	?

Deste modo, como a razão apresentada no enunciado é de 3:5, para determinar a quantidade total de estudantes na sala podemos primeiramente calcular a quantidade de meninas, que representaremos por x e, após, somar essa quantidade ao quantitativo de meninos. Logo, trata-se de uma igualdade de razões, isto é:

$$\frac{3}{5} = \frac{27}{x}.$$

Utilizando a propriedade de proporções, apresentada anteriormente, temos:

$$3x = 5 \times 27$$

$$x = \frac{5 \times 27}{3}$$

$$x = 5 \times 9$$

$$x = 45.$$

Logo, nesta sala há 72 estudantes, sendo 45 mulheres e 27 homens.

Proposição 2.2.2. Em uma proporção, a soma dos seus antecedentes está para a soma dos seus consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente, isto é, se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração. Consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Pela propriedade das proporções é possível reescrevê-la da seguinte forma, permutando os meios: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c} \implies \frac{b}{b} \times \frac{a}{c} = \frac{c}{c} \times \frac{b}{d} \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Ainda, somando 1 em cada membro da igualdade, teremos:

$$\frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{c} = \frac{b}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}.$$

Então, utilizando novamente a propriedade das proporções, podemos permutar os meios:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Logo,

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \implies \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

□

Exemplo 2.2.7: Sabe-se que $x + y = 400$ e que x e y são diretamente proporcionais a 8 e 12, respectivamente. Deste modo, qual o valor de x e y ?

Pelo enunciado, temos que $\frac{x}{8} = \frac{y}{12}$. Assim, das propriedades de proporções, sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{8+12} &= \frac{x}{8} \\ \frac{400}{20} &= \frac{x}{8} \end{aligned}$$

$$x = 160.$$

Conclui-se que $x = 160$ e, por consequência, $y = 240$.

Exemplo 2.2.8: Ana Luiza e Felipe fizeram uma grande aposta em um sorteio de loteria, sendo que, para tanto, investiram R\$1.800,00 e R\$2.200,00 em um bolão, respectivamente. Ao final do sorteio, o bilhete premiado lhes possibilitou um prêmio no valor de R\$980.000,00 que deverá ser dividido proporcionalmente entre os dois. Quanto Ana Luiza deverá receber?

Uma proposta de solução ao exemplo representa a situação como uma razão, de acordo com a representação abaixo, sendo que o valor recebido por Ana Luiza é denominado por x :

$$\frac{\text{Valor apostado por Ana Luiza}}{\text{Valor total da aposta}} = \frac{\text{Valor a ser recebido por Ana Luiza}}{\text{Valor total do prêmio}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1800}{4000} &= \frac{x}{980000} \\ \frac{9}{20} &= \frac{x}{980000} \\ 20x &= 9 \times 980000 \\ 20x &= 8820000 \\ x &= 441000.\end{aligned}$$

Assim, Ana Luiza receberá um valor de R\$ 441.000,00 sobre o total do prêmio.

2.3 Proporções e porcentagem

Porcentagem é uma ferramenta matemática crucial, estreitamente ligada ao conceito de razão. Em essência, ela representa uma proporção expressa como uma fração de 100. Ainda, a porcentagem é uma ferramenta amplamente utilizada em diversas áreas, como economia, finanças e estatística, devido à sua simplicidade na comparação de grandezas relativas. A seguir, formalizamos o conceito de porcentagem e apresentamos exemplos práticos que ilustram como a porcentagem, o acréscimo e o desconto são aplicados no cotidiano.

Definição 2.3.1. Seja $P(x)$ a função que expressa a porcentagem, tal que $P(x) = \frac{x}{T} \times 100\%$, em que x representa a parte e T o todo em uma razão.

Exemplo 2.3.9: Considere que uma loja diminuiu o valor de um produto, que custava R\$200,00 em 20%. Qual o valor do produto, após essa alteração de preço?

No exemplo dado, para calcular o valor do produto, usamos a fórmula da porcentagem:

$$P = \frac{20}{100} \times 200 = 40.$$

Assim, o valor a ser diminuído é R\$40,00, e o novo valor do produto será:

$$V_f = 200 - 40 = 160.$$

Portanto, o produto custará R\$160,00 após a alteração de preço.

2.3.1 Acréscimo e Descontos

Quando trabalhamos com valores monetários ou numéricos, é comum lidar com acréscimos ou descontos em relação ao valor inicial. Ambos os conceitos estão diretamente relacionados à porcentagem e seguem uma estrutura semelhante de cálculo.

Definição 2.3.2. (Acréscimo) Dado um valor principal, o acréscimo é o valor somado a ele, sendo a taxa de acréscimo a porcentagem que incide sobre o valor principal para gerar o aumento.

O valor final com acréscimo pode ser calculado pela expressão:

$$V_a = V_p \times \left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

Em que,

- V_a é o valor final após o acréscimo,
- V_p é o valor principal,
- i é a taxa percentual de acréscimo.

Exemplo 2.3.10: Suponha que um produto custa R\$350,00 e é aplicado um acréscimo de 15%. Qual o valor final desse produto?

Apresentando uma solução ao exemplo, o valor final com acréscimo será dado por

$$V_a = 350 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 350 \times 1,15 = 402,5.$$

Portanto, o novo valor do produto será R\$402,50.

Definição 2.3.3. (Desconto) Dado um valor principal, o desconto é o valor subtraído a ele, sendo a taxa de desconto a porcentagem que incide sobre o valor principal para gerar a redução.

O valor final com desconto pode ser calculado pela fórmula:

$$V_d = V_p \times \left(1 - \frac{i}{100}\right).$$

Em que,

- V_d é o valor final após o desconto,
- V_p é o valor principal,
- i é a taxa percentual de desconto.

Exemplo 2.3.11: Um produto cujo preço original é R\$500,00 está sendo vendido com um desconto de 12%. Determine o valor final do produto após desconto.

No exemplo dado, para calcular o valor final após o desconto temos que

$$V_d = 500 \times \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 500 \times 0,88 = 440.$$

Assim, o valor final do produto, após o desconto, será R\$440,00.

2.4 Indução Matemática

O conjunto dos números naturais, representado pela simbologia $\mathbb{N}$, é fundamentado em quatro princípios conhecidos como axiomas de Peano. Em suma, é através desses axiomas que se derivam todas as declarações verdadeiras relacionadas aos números naturais e, por sua vez, o último axioma, conhecido como axioma da indução, é a base de todas as demonstrações relativas aos números naturais. A partir dos estudos desenvolvidos na obra de [Morgado e Carvalho \(2015\)](#), vamos, na sequência, apresentar cada axioma, tendo em vista que serão base para o Princípio da Indução, o qual será o principal método de demonstração das expressões matemáticas relacionadas a essa dissertação. De forma geral e, em termos mais simples, podemos afirmar que todos os números naturais podem ser construídos a partir dos axiomas de Peano e, portanto, são caracterizados por essas propriedades essenciais. Ainda, os elementos do conjunto dos números naturais podem ser ordenados e serão representados por $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, denotando-se como $n \in \mathbb{N}$.

Axioma 1. Seja uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$ denominado como sucessor de n .

O axioma acima garante que para cada elemento dos números naturais existe um sucessor (e um único, dada a definição de função). Ainda, como a imagem dessa função é o conjunto dos Naturais, conclui-se que todo sucessor também é natural.

Axioma 2. A função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetora (ou injetiva).²

Tendo por consequência o axioma acima, e a definição de função injetora, é possível afirmar que todo número natural, além de possuir apenas um sucessor, não compartilha esse sucessor com nenhum outro número natural, isto é, números naturais distintos possuem sucessores distintos. Ainda, para fins de demonstrações e conclusões, se dois números naturais têm o mesmo sucessor, logo, tratam-se dos mesmos números naturais.

Axioma 3. A operação $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ consiste em um único elemento.

A diferença entre os conjuntos é de um elemento, logo, há um elemento nos números naturais que não é sucessor de nenhum número, isto é, não existe um número natural que o anteceda e, portanto, justifica-se a diferença na quantidade de elementos. Este elemento, que não é sucessor de nenhum outro número, é representado pelo elemento 1. Em outras palavras, $1 \neq s(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Axioma 4. Seja $X \subset \mathbb{N}$, tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Esse axioma, a ser explorado mais profundamente em sua essência, é chamado de Princípio da Indução. Conforme a leitura matemática, temos que, se um subconjunto dos naturais contém o número 1 e, não obstante, contém os respectivos sucessores a partir de 1, logo, esse conjunto nada mais é do que o próprio conjunto dos naturais. Valendo-se dessas afirmações é que muitas demonstrações são feitas para comprovar as propriedades envolvendo os números naturais.

Desta forma, o Princípio da Indução é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.4.1. (Princípio da Indução) Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n de modo que:

- i) $P(1)$ é verdadeiro;
- ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, implica na validade de $P(s(n))$.

Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Utilizando os axiomas de Peano é possível demonstrar o princípio de indução matemática. Seja uma propriedade P que cumpra as proposições (i) e (ii), de um subconjunto dos números naturais n , representada por X , para os quais a proposição $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $X = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira}\}$. Pelo item (i), conhecido como base de indução, temos que $P(1)$

² Uma função f é injetora se, dados quaisquer elementos a e b , com $a \neq b$, pertencentes ao domínio da função, obtém-se que $f(a) \neq f(b)$.

é verdadeira, logo, $1 \in X$. A maior base indutiva concentra-se no item (ii), reconhecido como passo indutivo, em que se afirma que, para todo número natural n , se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Deste modo, o subconjunto X satisfaz as duas condições do axioma da indução e, portanto, $X = \mathbb{N}$. $\square$

Em algumas situações temos que uma determinada proposição possa ser verdadeira a partir de um determinado $k \in \mathbb{N}$, e não necessariamente para valores menores do que k . Assim, esses casos podem ser demonstrados pelo Princípio da Indução Generalizado, evidenciado a seguir.

Teorema 2.4.2. (Princípio da Indução Generalizado) Seja k um número natural e $P(n)$ uma propriedade relativa a cada número natural n , de tal modo que $n \geq k$ e que satisfaça as duas condições a seguir:

- (i) $P(k)$ é verdadeira;
- (ii) Para todo $n \geq k$, se $P(n)$ é verdadeira, implica na validade de $P(s(n))$.

Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq k$.

Demonstração. Seja X o conjunto de todos os números naturais n para os quais a proposição $P(k + n - 1)$ é verdadeira, ou seja, $X = \{n \in \mathbb{N}; P(k + n - 1) \text{ é verdadeira}\}$. Pelo item (i), $P(k) = P(k + 1 - 1)$ é verdadeira, portanto, $1 \in X$. Pelo item (ii), se $P(k + n - 1)$ é verdadeira, então $P((k + n - 1) + 1) = P(k + (n + 1) - 1)$ também é verdadeira. Então, se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Deste modo, o subconjunto X satisfaz as duas condições do axioma da indução e, portanto, $X = \mathbb{N}$. $\square$

2.5 Tópicos de economia: um passeio por nomenclaturas

Ao abordarmos a temática de Matemática Financeira, torna-se fundamental a apresentação de conceitos que, eventualmente, serão abordados em situações no decorrer deste trabalho e estão diretamente ligadas a contextos econômicos. Ainda, a compreensão desses conceitos é essencial para a adequada interpretação das dinâmicas de mercado, das políticas econômicas e das decisões financeiras que impactam tanto o indivíduo quanto a sociedade como um todo. Para tanto, este trabalho se adentra em estudos da obra de Neto (2014), bem como de informações contidas em sites oficiais de órgãos do mercado financeiro, como Banco Central do Brasil (BACEN) e Comissão de Valores Imobiliários (CVM), buscando fazer um passeio por nomenclaturas que estão atreladas às negociações financeiras.

2.5.1 *Taxas e Índices do Mercado Financeiro*

As taxas e índices, em uma economia, são de importância fundamental, tendo em vista que possibilitam orientação para tomada de decisões cruciais. Elas regem os juros aplicados em diversas operações, como empréstimos e financiamentos, influenciando diretamente o consumo e o ritmo do mercado. Por meio do ajuste dessas taxas, um país pode estimular o crescimento econômico ou conter a inflação, garantindo assim a estabilidade. Algumas dessas taxas incluem a Taxa Selic, o IPCA e o CDI, cada uma com sua importância e impacto específicos.

Definição 2.5.1. (Inflação e Deflação): a inflação é o aumento dos preços de bens e serviços, implicando na diminuição do poder de compra da moeda. A inflação é medida pelos índices de preços de uma "cesta básica de produtos e serviços" e é definida através de índices. Quando o índice é negativo, ocorre a deflação.

Dentre os índices utilizados para a determinação da inflação, temos:

- **IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo):** Indicador oficial utilizado para estabelecimento de políticas públicas e acompanhamento da meta de inflação no Brasil. O IPCA reflete a variação dos preços de uma cesta de produtos e serviços consumidos pelas famílias brasileiras com rendimentos de 1 a 40 salários mínimos, abrangendo diversas regiões metropolitanas.
- **INPC (Índice Nacional de Preços ao Consumidor):** Similar ao IPCA, mas voltado para famílias com rendimentos de 1 a 5 salários mínimos. O INPC é utilizado para reajustar salários, benefícios previdenciários e outras remunerações no Brasil.
- **IGP (Índice Geral de Preços):** Composto por três subíndices — o Índice de Preços ao Produtor Amplo (IPA), o Índice de Preços ao Consumidor (IPC) e o Índice Nacional de Custo da Construção (INCC) —, o IGP é amplamente utilizado para reajuste de contratos, especialmente de aluguéis. Dentro do IGP, destaca-se o IGP-M (Índice Geral de Preços – Mercado), que é o mais utilizado para esse fim.
- **IPC (Índice de Preços ao Consumidor):** Embora seja parte do IGP, o IPC também é divulgado separadamente e mede a variação dos preços ao consumidor final em diferentes regiões do país. Ele é uma referência para ajustes salariais e outras negociações econômicas.

Esses índices são essenciais para a formulação de políticas econômicas, pois indicam o comportamento dos preços na economia e orientam decisões de investimento, consumo e poupança, além da política monetária, como os ajustes na taxa Selic. A inflação elevada, por exemplo, pode levar o Banco Central a aumentar a Selic para controlar a demanda e estabilizar os preços.

Definição 2.5.2. (SELIC - Taxa Básica de Juros): a taxa SELIC é uma taxa média ajustada dos financiamentos diários apurados no Sistema de Liquidação e Custódia, que opera com títulos públicos federais emitidos pelo Tesouro Nacional.

A taxa Selic é amplamente noticiada no mercado porque, por meio de seus ajustes, o governo consegue direcionar os preços em direção à meta de inflação estipulada. Ao aumentar as taxas de juros, há uma diminuição do consumo e dos investimentos, o que, consequentemente, reduz os preços dos produtos, contribuindo para uma taxa de inflação mais baixa. Por outro lado, uma redução da Selic tende a estimular o consumo e os investimentos, aquecendo a economia, mas também gerando pressões inflacionárias. Além disso, a Selic influencia diretamente a rentabilidade de investimentos em renda fixa, como títulos do Tesouro Direto, que são diretamente vinculados à variação dessa taxa. Investidores frequentemente observam a Selic como referência para suas decisões de alocação de recursos entre diferentes ativos.

Dentre as influências que a Selic possui, é essencial considerar o seu papel na definição do Certificado de Depósito Interbancário (CDI). O CDI é uma referência central para o mercado financeiro, particularmente em relação a operações interbancárias e à rentabilidade de diversos produtos financeiros. A taxa CDI é influenciada pela Selic e, portanto, serve como um importante parâmetro para as condições econômicas e a política monetária vigente.

Definição 2.5.3. (CDI - Certificado de Depósito Interbancário): trata-se de títulos, emitidos por bancos, visando lastrear as operações interbancárias realizadas no mercado financeiro; caracterizam-se como transferência de recursos entre instituições financeiras.

De forma geral, o CDI é uma criação regulamentada pelo Banco Central do Brasil (BCB) visando normatizar que todos os bancos encerrem o dia com saldo positivo. Assim, quando o volume de saques ultrapassa o de depósitos em um banco, outro banco empresta dinheiro para evitar que o saldo se torne negativo. Por consequência, como é uma transação diária, quem tem reserva empresta a uma taxa de juros, sendo que essa será um referencial ao mercado financeiro para outras aplicações.

2.5.2 Investimentos: Renda Fixa e Renda Variável

Ao abordarmos sobre investimentos, é comum vermos as diferentes possibilidades de retorno financeiro. Uma educação financeira crítica deve certificar-se dos riscos atrelados a esses investimentos, garantindo uma tomada de decisão assertiva dos estudantes ou investidores a quem se propõe. Para tanto, definimos:

Definição 2.5.4. Investimento de Renda Fixa: refere-se a uma categoria de investimentos em que o retorno financeiro é previsível ou "fixo" no momento da aplicação. Esses investimentos geralmente envolvem a compra de títulos emitidos por entidades governamentais, instituições financeiras ou corporações.

Os principais investimentos de renda fixa incluem:

- **Tesouro Direto:** Títulos públicos emitidos pelo governo federal, acessíveis a investidores individuais por meio de plataformas online. Existem diversas modalidades, como o Tesouro Selic, Tesouro Prefixado e Tesouro IPCA+, cada uma oferecendo diferentes perfis de risco e retorno. Por exemplo, o Tesouro Selic é considerado seguro e adequado para quem busca liquidez e proteção contra variações da taxa Selic. Em contrapartida, as Letras de Tesouro Nacional (LTN), conhecidas como Tesouro Prefixado, são títulos públicos emitidos pelo governo brasileiro, com remuneração definida no momento da compra, deste modo, o investidor sabe exatamente quanto receberá ao final do período e são indicadas para quem deseja planejar o retorno com precisão, aproveitando cenários de queda nas taxas de juros, quando é possível garantir rendimentos mais altos. Por fim, as Notas do Tesouro Nacional Série B (NTN-B), conhecidas como Tesouro IPCA+, são títulos públicos que combinam uma taxa de juros fixa com a variação da inflação (medida pelo IPCA). Esse tipo de investimento protege o poder de compra do investidor, garantindo um retorno real acima da inflação.
- **Certificados de Depósito Bancário (CDB):** Emitidos por bancos, os CDBs oferecem um retorno atrelado ao CDI, sendo uma opção popular entre investidores que buscam uma rentabilidade superior à poupança, mas ainda com baixo risco.
- **Letras de Câmbio (LC):** Emitidas por instituições financeiras ³, as Letras de Câmbio funcionam de maneira similar aos CDBs, oferecendo retornos previsíveis e seguros. São geralmente emitidas por instituições financeiras de menor porte e, portanto, podem oferecer rendimentos ligeiramente maiores que os CDBs, mas com risco de crédito mais elevado. São indicadas para investidores que buscam diversificar seus investimentos em renda fixa.
- **Letras de Crédito Imobiliário (LCI) e do Agronegócio (LCA):** São títulos isentos de imposto de renda para pessoas físicas, emitidos por instituições financeiras para financiar setores específicos da economia. A LCI é destinada ao setor imobiliário, enquanto a LCA ao agronegócio. Ambas são geralmente consideradas seguras e oferecem rendimentos competitivos, especialmente em ambientes de alta taxa de juros.
- **Cédulas de Crédito Bancário (CCB):** São títulos de crédito emitidos por instituições financeiras que representam uma promessa de pagamento futura. Embora menos conhecidas que os CDBs, as CCBs também podem oferecer bons rendimentos, sendo utilizadas principalmente em operações de crédito entre empresas e bancos.

³ Bancos são instituições financeiras autorizadas a receber depósitos e realizar operações de crédito, enquanto que instituições financeiras englobam uma gama mais ampla de entidades, como cooperativas de crédito e financeiras, que podem não ter a mesma autorização para operar como bancos.

- **Debêntures:** Títulos de dívida emitidos por empresas para captar recursos junto a investidores. Podem oferecer retornos atrativos, porém, carregam riscos maiores dependendo da saúde financeira da empresa emissora. Debêntures incentivadas, voltadas para infraestrutura, oferecem isenção de imposto de renda, tornando-se mais atrativas.
- **Certificados de Recebíveis Imobiliários (CRI) e Certificados de Recebíveis do Agronegócio (CRA):** São títulos lastreados em recebíveis originados de operações de crédito nos setores imobiliário e do agronegócio, respectivamente. Assim como as debêntures incentivadas, CRIs e CRAs são isentos de imposto de renda para pessoas físicas, o que os torna uma alternativa atrativa de investimento. Esses títulos podem oferecer retornos elevados, mas são mais complexos e envolvem maior risco de crédito, exigindo uma análise mais detalhada por parte do investidor.
- **Fundos de Renda Fixa:** São fundos de investimento que alocam a maior parte de seus recursos em ativos de renda fixa, como títulos públicos, CDBs, LCIs e debêntures. Esses fundos oferecem aos investidores uma maneira conveniente de diversificar suas aplicações em renda fixa, contando com a gestão profissional para escolher os melhores ativos. Embora o retorno dos fundos de renda fixa seja mais modesto em comparação com fundos de ações, eles oferecem maior segurança e previsibilidade, sendo indicados para investidores com perfil conservador ou moderado.

Os investidores em renda fixa têm uma previsibilidade maior sobre os retornos e, em geral, enfrentam menor risco em comparação às aplicações de renda variável. Esses investimentos são amplamente utilizados para a preservação de capital e geração de renda passiva, sendo uma escolha frequente para fundos de emergência e metas de curto prazo.

Definição 2.5.5. Investimento de Renda Variável: refere-se a uma categoria de investimentos em que o retorno financeiro não é previsível e pode variar significativamente ao longo do tempo.

Os investimentos de renda variável são, geralmente, associados a uma instituição que regulamenta as suas transações. A seguir apresentaremos alguns exemplos de aplicações neste mercado.

- **Ações:** Representam a propriedade de uma fração de uma empresa. Ao adquirir ações, o investidor se torna sócio da empresa, participando dos lucros (dividendos) e do crescimento (valorização das ações), mas também dos riscos, incluindo a possibilidade de perda total do investimento. Investimentos em ações exigem uma análise criteriosa da empresa e do mercado, sendo recomendados para investidores com maior tolerância ao risco.
- **Fundos Imobiliários (FIIs):** Trata-se de Fundos que investem em imóveis comerciais, shoppings, galpões logísticos, entre outros, ou em títulos de dívida imobiliária. Oferecem

uma forma de investimento em imóveis sem a necessidade de adquirir um imóvel diretamente. A rentabilidade provém tanto da valorização das cotas quanto da distribuição de aluguéis. São uma opção para quem busca diversificação e renda passiva, uma vez que a rentabilidade desses fundos provém tanto da valorização das cotas quanto da distribuição periódica de rendimentos, geralmente na forma de aluguéis pagos pelos imóveis pertencentes ao fundo. Por exemplo, um FII que investe em shoppings pode distribuir aos cotistas uma parte dos aluguéis pagos pelas lojas, além de possibilitar ganhos de capital caso o valor das cotas aumente com a valorização dos imóveis. Esses fundos são negociados em bolsa, o que garante liquidez aos investidores. No entanto, como os FIIs são afetados pela dinâmica do mercado imobiliário e pelas condições econômicas gerais, seu desempenho pode variar significativamente, o que exige uma análise cuidadosa do portfólio e da gestão do fundo.

- **Commodities:** Investimentos em commodities, como ouro, petróleo, e grãos, são uma forma de expor o portfólio a ativos físicos que possuem valor intrínseco. O preço das commodities é influenciado por fatores como oferta e demanda global, condições climáticas e geopolítica. Por exemplo, em períodos de alta inflação ou instabilidade econômica, o ouro é frequentemente visto como um “porto seguro” pelos investidores, pois tende a manter ou aumentar seu valor. Entretanto, a volatilidade dos preços das commodities pode resultar em ganhos ou perdas substanciais. Na Contabilidade Financeira, empresas que dependem de Commodities utilizam diversas estratégias de transação para proteger esses ativos, sendo essas estratégias denominadas *hedge*.
- **Fundos de Investimento em Ações:** São veículos de investimento coletivo que permitem aos investidores acessar uma carteira diversificada de ações, gerida por profissionais. Esses fundos podem se especializar em setores específicos, como tecnologia ou energia, ou em estratégias particulares, como crescimento ou valor. A diversificação inerente aos fundos ajuda a mitigar os riscos, mas o desempenho ainda está sujeito às flutuações do mercado acionário. Um exemplo prático é um fundo que invista em ações de empresas de tecnologia, como Apple ou Google, onde o retorno é atrelado ao crescimento e inovação dessas companhias, mas também ao risco de queda de valor devido à volatilidade do setor.
- **Criptomoedas:** Representam uma classe emergente de ativos digitais, com o Bitcoin sendo o mais conhecido. Investir em criptomoedas envolve riscos elevados devido à sua extrema volatilidade, falta de regulamentação e natureza especulativa. No entanto, também oferecem oportunidades significativas de retorno, especialmente em um cenário de adoção crescente e inovações tecnológicas. Investidores que consideram criptomoedas devem estar cientes dos riscos envolvidos e estar preparados para a possibilidade de perdas substanciais.

Ao contrário dos investimentos de renda fixa, os investidores em renda variável não têm garantia de retorno do capital investido e podem enfrentar grandes oscilações no valor de seus

ativos. No entanto, os investimentos de renda variável também oferecem potencial de retorno mais elevado em comparação com os de renda fixa, o que os torna atraentes para investidores dispostos a assumir maior risco em busca de maiores ganhos financeiros, bem como apresentar um perfil proativo para monitorar suas aplicações financeiras e alterar estratégias de alocação, se necessário. Em contrapartida, os investimentos de renda fixa geralmente são considerados mais seguros em comparação com os de renda variável, uma vez que oferecem menor potencial de retorno, mas também menor exposição a riscos.

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

Sequências e Progressões são fundamentais tanto na Matemática Financeira quanto no aprendizado crítico de uma Educação Financeira, uma vez que modelam fenômenos como o crescimento de investimentos e amortização de dívidas e exploram temas complexos de forma progressiva, desenvolvendo habilidades matemáticas e compreensão financeira nos alunos, preparando-os para análises ao longo da vida. Sendo assim, conceituaremos e introduziremos exemplos envolvendo esses temas.

Para elaboração deste capítulo foram realizados estudos aprofundados com base nas obras de [Morgado e Carvalho \(2015\)](#), [Iezzi e Hazzan \(2013\)](#) e [Lima *et al.* \(2011\)](#). Esses estudos forneceram o embasamento teórico necessário para a conceituação e exploração dos temas abordados, permitindo a construção de exemplos contextualizados e com embasamento matemático.

3.1 Sequências

Uma sequência numérica é uma sucessão de números em que é possível verificar uma lei de formação. Ela pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$. Os valores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ são chamados termos da sequência. O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 é o segundo termo e, de forma geral, a_n é denominado como o n -ésimo termo.

Definição 3.1.1. Uma sequência em um conjunto X é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, em que cada número natural $j \in \mathbb{N}$ é associado a um termo $x_j = f(j) \in X$. Como $\mathbb{N}$ é ordenado, podemos escrever a imagem da função como $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots\}$.

Observação 3.1.1. Dizemos que uma sequência é finita quando possui um número limitado de termos, ou seja, podemos enumerar todos os elementos da sequência. Por exemplo, $\{3, 6, 8, 12, -9\}$ é uma sequência finita com 5 termos.

Observação 3.1.2. Dizemos que uma sequência é infinita quando possui um número ilimitado de termos, continuando indefinidamente. Por exemplo, a sequência dos números primos $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$ é infinita, pois, conforme Teorema Fundamental da Aritmética, sempre existe um número primo maior do que qualquer número previamente conhecido.

A partir do conceito de sequência, podemos explorar algumas com características específicas, a saber: progressões aritméticas e progressões geométricas, que são sequências com leis de formação bem definidas e que possuem ampla aplicação em problemas financeiros.

3.2 Progressão Aritmética

Por diversos momentos, inclusive em situações econômicas, é possível verificar que existem grandezas que sofrem variações iguais em períodos de tempo fixados. Em uma produção de um determinado item de consumo, por exemplo, a quantidade de matéria-prima empregada é diretamente proporcional à quantidade de produção do item. Isso significa que a matéria-prima utilizada aumenta de forma constante à medida que a produção do item cresce, com um aumento fixo a cada unidade de produção. Esse tipo de comportamento, no qual a diferença entre os valores sucessivos de uma grandeza é constante, pode ser modelado por uma progressão aritmética, que definimos abaixo.

Definição 3.2.1. Uma progressão aritmética, comumente denominada por PA, é uma sequência de números reais $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ na qual a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra r .

Exemplo 3.2.12: A sequência dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$ é uma progressão aritmética de razão $r = 1$.

Exemplo 3.2.13: A sequência $\{3, 7, 11, 15, \dots\}$ é uma progressão aritmética de razão $r = 4$.

Exemplo 3.2.14: A sequência $\{5, 2, -1, -4, \dots\}$ é uma progressão aritmética de razão $r = -3$.

Exemplo 3.2.15: A sequência $\left\{\frac{2}{3}, \frac{16}{15}, \frac{22}{15}, \frac{28}{15}, \dots\right\}$ é uma progressão aritmética de razão $r = \frac{2}{5}$, evidenciando que é possível ter razão fracionária.

Observação 3.2.1. Uma progressão aritmética é classificada como crescente quando se tratar de uma sequência crescente, conseqüentemente, $r > 0$. De modo análogo, classifica-se como decrescente quando $r < 0$.

Observação 3.2.2. Como se trata de uma sequência, a progressão aritmética pode ser classificada como finita ou infinita. Não faremos distinção da nomenclatura de uma progressão aritmética finita ou infinita.

Exemplo 3.2.16: A sequência $\{1200, 850, 500, \dots, -200\}$ representa uma progressão aritmética de razão $r = -350$. Tal sequência pode ilustrar a seguinte situação: o cliente de um banco possui um valor inicial de R\$ 1.200,00 em sua conta corrente e planeja fazer retiradas mensais de 350 reais até que o saldo da conta entre em cheque especial¹. Perceba que se trata de uma progressão aritmética decrescente. Ainda, observe que o último termo da sequência é negativo, indicando que o saldo "entrou em cheque especial".

Teorema 3.2.1. O n -ésimo termo a_n de uma progressão aritmética com n termos é dado pela expressão

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Demonstração. Utilizaremos o Princípio de Indução para verificar a validade de (3.1). Primeiramente, temos que a fórmula é verdadeira para $n = 1$, pois

$$a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1.$$

Assumiremos a validade da fórmula para algum $k \in \mathbb{N}$, assim, $a_k = a_1 + (k - 1)r$ e provaremos (3.1) para $k + 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + r \\ &= a_1 + (k - 1)r + r \\ &= a_1 + (k - 1 + 1)r \\ &= a_1 + kr. \end{aligned}$$

Segue, pelo Princípio da Indução, que a expressão (3.1) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Observação 3.2.3. Em algumas situações é interessante iniciar a numeração dos termos de uma PA a partir do zero. Desse modo, a expressão (3.1) pode ser reescrita como:

$$a_n = a_0 + nr, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.2.17: (OBMEP 2017, 1ª fase, questão 7, nível 2) Com pentágonos regulares com 1 cm de lado, formamos uma sequência de polígonos como na figura abaixo. Quantos pentágonos são necessários para formar um polígono com perímetro igual a 1736 cm?

¹ Cheque especial é uma modalidade de empréstimo pré-aprovado concedido pelo banco aos clientes que realizam uma retirada acima do valor disponível em conta corrente. Vale ressaltar que sobre esse valor incidirá uma taxa de juros, como veremos posteriormente.



Perceba que o perímetro da figura segue a PA $\{5, 8, 11, \dots, 1736\}$ com razão $r = 3$, na qual $a_n = 1736$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, pela expressão geral do termo de uma PA, temos:

$$\begin{aligned} 1736 &= 5 + (n - 1)3 \\ 1736 - 5 &= (n - 1)3 \\ \frac{1731}{3} &= n - 1 \\ n &= 577 + 1. \end{aligned}$$

Desse modo é possível verificar que são necessários 578 triângulos para formar um perímetro igual a 1736 cm.

Exemplo 3.2.18: Uma empresa adquiriu um barco no valor de 9500 reais, estimando que, após 20 anos de vida útil², o bem ainda teria um valor residual de 600 reais. Desse modo, assumindo uma depreciação linear³, qual será o valor do bem daqui a 6 anos?

Perceba que podemos representar o problema através de uma progressão aritmética $\{9500, \dots, 600\}$, na qual $a_0 = 9500$, $a_{20} = 600$ e a razão é desconhecida. Para definirmos a razão basta resolver:

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_0 + nr \\ 600 &= 9500 + 20r \\ r &= \frac{-8900}{20} \\ r &= -445. \end{aligned}$$

Agora, utilizando novamente a fórmula do termo geral da PA, determinaremos a_6 :

$$a_6 = 9500 + 20(-445) = 6830.$$

² A vida útil de um bem é o período estimado durante o qual ele pode ser utilizado de maneira eficiente e econômica, considerando fatores como desgaste, obsolescência e outros aspectos que podem afetar sua funcionalidade ao longo do tempo.

³ Na contabilidade, a depreciação de um bem é a perda de valor que ocorre devido ao seu uso, ao desgaste natural ou até mesmo obsolescência. Trata-se de um valor calculado sobre a expectativa de vida útil, que é estabelecida pelo Banco Central para fins fiscais. Ainda, após essa depreciação pode haver expectativa de que o bem tenha algum valor considerando particularidades de uso, manutenção e conservação, por exemplo. À quantia, em reais, que se espera possuir do bem após sua depreciação contábil denominamos valor residual.

Em algumas situações é conveniente calcularmos a soma dos termos de uma progressão aritmética. Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma progressão aritmética. Denotamos por $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ a soma de n termos desta PA.

Teorema 3.2.2. A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Demonstração. Note que para $n = 1$ a soma é válida, pois $S_1 = \frac{(a_1 + a_1)}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$. Suponhamos que a identidade (3.2) é válida para algum $n = k \in \mathbb{N}$. Vamos provar que (3.2) vale para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= \frac{(a_1 + a_k)k}{2} + a_{k+1} \\ &= \frac{\{a_1 + [a_1 + (k-1)r]\}k + 2(a_1 + kr)}{2} \\ &= \frac{2ka_1 + 2a_1 + kr(k-1) + 2a_1 + 2kr}{2} \\ &= \frac{2ka_1 + 2a_1 + k^2r + kr}{2} \\ &= \frac{(2a_1 + kr)(k+1)}{2} \\ &= \frac{[a_1 + (a_1 + kr)](k+1)}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{k+1})(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Segue, pelo Princípio da Indução, que a expressão (3.2) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Exemplo 3.2.19: Suprimindo um dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, a média aritmética dos elementos restantes é 16,1. Determine o valor do elemento suprimido.

No exemplo proposto, considere x o elemento suprimido. Pela expressão (3.2) teremos que

$$16,1 = \frac{S_n - x}{n-1} \Leftrightarrow 16,1 = \frac{\frac{(n+1)n}{2} - x}{n-1}. \quad (3.3)$$

Note que $\frac{(n+1)n}{2}$, x e $n-1$ são inteiros. De fato, no caso de $\frac{(n+1)n}{2}$, supondo que n seja um número par, por paridade $(n+1)n$ também é par e, portanto, ao realizar a divisão por 2,

o resultado é inteiro. Por outro lado, supondo que n seja um número ímpar, isto é, $n = 2k - 1$, teríamos que $\frac{(n+1)n}{2} = \frac{(2k-1+1)(2k-1)}{2} = \frac{2k(2k-1)}{2}$. Novamente, por paridade, conclui-se que $2k(2k-1)$ é par, resultando na divisão exata por 2. Nos outros dois casos a demonstração é trivial.

Note que 16,1 pode ser representado como a fração irredutível $\frac{161}{10}$. Dessa forma é possível concluir que a razão apresentada no segundo membro da igualdade é uma fração equivalente a $\frac{161}{10}$. Partindo da análise anterior é possível concluir que $n - 1 = 10q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Ainda, considerando que a média de $n - 1$ é 16,1 é satisfatório denotar que $20 < n - 1 < 40$, uma vez que a média dos 20 primeiros números naturais é igual a 10,5, enquanto a média dos 40 primeiros é igual a 20,5. Então, por fração equivalente, teremos que $n - 1 = 30$. Logo, $n = 31$.

Agora basta substituírmos os valores em (3.3), obtendo

$$\begin{aligned} 16,1 &= \frac{\frac{(31+1)31}{2} - x}{31-1} \\ 16,1 \times 30 &= 16 \times 31 - x \\ x &= 496 - 483 \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Desse modo, $x = 13$ e $n = 31$.

Exemplo 3.2.20: Um comerciante possuía uma dívida a ser paga em 60 parcelas progressivas. No momento de negociação a primeira parcela foi definida no valor de 350 reais. Porém, o contrato estabelecido entre as partes estipulou que o valor da segunda parcela seria 4% maior do que a primeira. A terceira parcela seria 8% maior do que a primeira e, a quarta parcela, por sua vez, seria 12% maior do que a primeira, e assim sucessivamente.

- i) Qual o valor total da dívida que o comerciante pagou?
- ii) Se o valor à vista do bem parcelado era de R\$ 38.150,00, é correto afirmar que a porcentagem de juros total no período foi de 4%? Explique.

Apresentaremos a solução para o exemplo proposto.

- i) Primeiramente, note que as parcelas estão em uma progressão aritmética com razão $r = 14$, uma vez que 4% de 350 é igual a 14, e a porcentagem dos juros das próximas parcelas sempre aumentam em 4%, resultando em uma progressão aritmética com valores das parcelas P dados por $P_1 = 350$, $P_2 = 364$, $P_3 = 378$ e assim sucessivamente. Para sabermos

o total da dívida basta realizarmos a soma dos termos dessa PA mas, para isso, calcula-se o último termo:

$$a_{60} = a_1 + (n - 1)r = 350 + 59 \times 14 = 1176.$$

Agora basta substituir os valores na expressão (3.2), que fornece a soma dos termos da progressão aritmética:

$$S_{60} = \frac{(350 + 1176)60}{2} = 1526 \times 30 = 45780.$$

Portanto, o comerciante pagou R\$ 45.780,00 pela dívida.

- ii) Basta verificar que o valor do juros foi de R\$ 7.630,00. Assim, ao representarmos a razão $\frac{7630}{38150}$ em porcentagem verificaremos que o período compreendeu 20% de juros. Dessa forma, é incorreto afirmar que a porcentagem tenha sido de 4%. Embora o aumento de cada parcela seja de 4% em relação à primeira parcela, isso não significa que os juros totais correspondam a 4% do valor à vista. Esse pode ser um erro de interpretação comum ao abordar o exemplo em sala de aula, pois os juros acumulados em uma sequência de parcelas progressivas refletem o crescimento total de todas as parcelas, não apenas o aumento percentual de uma para outra.

3.3 Progressão Geométrica

Comumente associadas às taxas de crescimento em situações cotidianas, as progressões geométricas representam sequências nas quais a taxa de crescimento é constante. Ao estabelecer um empréstimo, por exemplo, o valor inicial C será corrigido a uma taxa i , referente à finalização de um período. Assim, podemos representar o saldo final M de cada período da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} M_0 &= C, \\ M_1 &= M_0 + M_0 i = M_0(1 + i), \\ M_2 &= M_1 + M_1 i = M_1(1 + i), \\ M_n &= M_{n-1} + M_{n-1} i = M_{n-1}(1 + i). \end{aligned}$$

Nas expressões acima é possível perceber que, após finalizar um período da obtenção de um empréstimo, seu saldo final será dado pela soma do saldo anterior com a correção da taxa, que incide sobre esse saldo anterior. Dessa forma, há uma taxa de crescimento constante dada por i , sendo que $(1 + i)$ representa a razão desta sequência e, portanto, é o fator multiplicativo da dívida em relação ao período anterior.

Vale ressaltar que as taxas de crescimento constantes supracitadas não devem ser confundidas com progressão aritmética, uma vez que taxa de crescimento sempre tem por base um fator multiplicativo pelo período anterior.

Definição 3.3.1. Uma progressão geométrica, doravante denominada por PG, é uma sequência $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ em que a razão entre termos consecutivos é constante, isto é,

$$a_{k+1} = qa_k,$$

, na qual q é chamada de razão constante da progressão.

Exemplo 3.3.21: Ricardo está poupando dinheiro e, no primeiro mês, conseguiu guardar R\$2,00. Não satisfeito, resolveu colocar uma meta de, a cada mês subsequente, conseguir triplicar o valor poupado no mês anterior. Tal situação pode ser representada pela sequência $\{2, 6, 18, 54, \dots\}$, que representa uma PG de razão 3. Ao compreendermos como taxa de crescimento, verifica-se que há 200% de crescimento em relação ao termo anterior, uma vez que $(1 + i) = 3 = 300\%$, que é o fator multiplicativo. Portanto, $i = 200\%$.

Exemplo 3.3.22: A sequência finita $\{400, -200, 100, -50, 25\}$ representa uma PG de razão $-\frac{1}{2}$. Perceba que, neste caso, o conceito de taxa de crescimento não se aplica adequadamente, uma vez que $q < 0$ e os termos da progressão se alternam entre positivo e negativo.

Teorema 3.3.1. O n -ésimo termo a_n de uma progressão geométrica, de razão q e termo inicial a_1 , é dado por

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Demonstração. Utilizaremos o Princípio da Indução para verificar a validade da expressão (3.4). Primeiramente, note que a identidade é verdadeira para $n = 1$, pois

$$a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1 q^0 = a_1.$$

Assumiremos a validade de (3.4) para algum $n = k \in \mathbb{N}$. Vamos agora verificar a validade para $N = k + 1$. Dessa forma,

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} q = a_1 q^k.$$

Segue, pelo Princípio da Indução, que a expressão (3.4) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Exemplo 3.3.23: Três aumentos sucessivos de 20% sobre um produto equivalem a um aumento único de quanto, percentualmente?

Seja x o valor inicial do produto sobre qual incidirá esses aumentos. Perceba que 20% = 0,2 e, então,

- Primeiro aumento: $x + 0,2x = 1,2x$;
- Segundo aumento: $1,2x + 0,2(1,2x) = 1,44x$;
- Terceiro aumento: $1,44x + 0,2(1,44x) = 1,728x$.

Podemos notar que essa situação está sendo regida por uma PG de razão $1 + i$, na qual $i = 20\%$, uma vez que

$$\frac{1,728x}{1,44x} = \frac{1,44x}{1,2x} = \frac{1,2x}{x} = 1,2 = 1 + i.$$

Ainda, o aumento único I ao fim desse período pode ser dado por $x(1 + I) = 1,728x$, concluindo que $1 + I = 1,728$ e, portanto, $I = 72,8\%$.

Observe que, diferentemente da progressão aritmética, que nos levaria a crer que o aumento único seria de $20\% + 20\% + 20\% = 60\%$, aumentos sucessivos seguem a definição de progressão geométrica e, portanto, verifica-se um aumento mais considerável.

Observação 3.3.1. Em algumas situações é interessante iniciar a numeração dos termos de uma PG a partir do zero, isto é, $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, como no exemplo acima. Assim, podemos reescrever a expressão (3.4) como

$$a_n = a_0 + nr, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.3.24: Uma máquina nova foi adquirida no valor de R\$15.000,00. Após 10 anos de uso é esperado que o valor residual da máquina seja de R\$3.000,00. Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante, qual o valor da máquina após 5 anos?

Ao propormos uma solução ao exemplo definiremos uma PG cujo primeiro termo é $a_0 = 15000$, enquanto seu último termo $a_{10} = 3000$. Desse modo, podemos utilizar a fórmula geral do termo de uma PG e definir sua razão, assim

$$a_{10} = a_0 q^n \Leftrightarrow 3000 = 15000 q^{10} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = q^{10} \Leftrightarrow \sqrt[10]{\frac{1}{5}} = q.$$

Agora, utilizando-se novamente da fórmula geral podemos definir o valor após 5 anos, dado por

$$a_5 = a_0 q^n \Leftrightarrow a_5 = 15000 \sqrt[10]{\frac{1}{5}}^5 \Leftrightarrow a_5 = 15000 \sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow a_5 = 6708,20.$$

Portanto, após 5 anos o valor da máquina é de R\$ 6.708,20.

Teorema 3.3.2. A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, de razão $q \neq 1$, é dada por

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (3.5)$$

Demonstração. Vamos demonstrar essa fórmula por indução. Primeiramente, temos que a expressão é verdadeira para $n = 1$, pois

$$S_1 = a_1 \frac{1 - q^1}{1 - q} = a_1.$$

Assumiremos a validade da expressão (3.5) para algum $k \in \mathbb{N}$. Vamos agora verificar a validade para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q} + a_1 q^k \\ &= a_1 \left(\frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k \right) \\ &= a_1 \frac{(1 - q^k) + (1 - q)q^k}{1 - q} \\ &= a_1 \frac{1 - q^k + q^k - q^{k+1}}{1 - q} \\ &= a_1 \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Segue, pelo Princípio de Indução, que a expressão (3.5) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Exemplo 3.3.25: Determine três números em progressão geométrica, sabendo que a soma dos números é 19 e a soma de seus quadrados 133.

No exemplo dado, se definirmos a PG como $\{a, aq, aq^2\}$, podemos representar sua soma como $a + aq + aq^2 = 19$. Por sua vez, a soma dos quadrados desses termos será $a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = 133$. Desse modo teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a(1 + q + q^2) = 19, \\ a^2(1 + q^2 + q^4) = 133. \end{cases}$$

Note que $1 + q^2 + q^4 = (1 + q + q^2)(1 - q + q^2)$, portanto, podemos realizar a divisão das equações acima e teremos que $a(q^2 - q + 1) = 7$.

Agora podemos denotar um sistema de equações equivalente ao anterior:

$$\begin{cases} a(q^2 + q + 1) = 19, \\ a(q^2 - q + 1) = 7. \end{cases}$$

Realizando a subtração das equações, teremos que

$$a(q^2 + q + 1) - a(q^2 - q + 1) = 19 - 7 \Leftrightarrow 2aq = 12 \Leftrightarrow aq = 6.$$

A partir da expressão anterior e tendo em consideração que a PG é dada por $\{a, aq, aq^2\}$ é possível verificar que o termo central já está definido. Logo, a soma dos três números pode ser dada por

$$a + aq + aq^2 = 19 \Leftrightarrow \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Leftrightarrow 6q^2 - 13q + q = 0.$$

Resolvendo a equação acima encontraremos $q = \frac{2}{3}$ ou $q = \frac{3}{2}$. Portanto, a sequência em estudo é $\{4, 6, 9\}$ ou $\{9, 6, 4\}$.

Teorema 3.3.3. A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita em que $|q| < 1$ é dada pela expressão

$$S = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (3.6)$$

Demonstração. Vamos demonstrar a validade da expressão (3.6) utilizando o conceito de limite. Primeiramente, perceba que a soma parcial dos n primeiros termos da progressão geométrica infinita pode ser dada pela expressão (3.5).

Deste modo, para a soma infinita, tomamos o limite de S_n quando $n \rightarrow \infty$. Como $|q| < 1$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Assim, a soma infinita da progressão geométrica é dada por

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q},$$

concluindo, portanto, a demonstração proposta. $\square$

Exemplo 3.3.26: Calcule a soma dos termos da progressão geométrica $\left\{2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots\right\}$.

Na resolução do exemplo, a razão da PG é dada por $q = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$. Logo, temos que

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$$

Exemplo 3.3.27: Ao realizar um empréstimo com seu amigo no valor de R\$1000,00, Tiago combinou de pagar mensalmente essa dívida de modo que, a primeira parcela fosse a metade do valor do empréstimo, enquanto as parcelas subsequentes deveriam ser metade da parcela anterior. Desse modo, em quantos meses Tiago pagou sua dívida?

Para resolvermos o problema proposto, é interessante notar que a situação pode ser representada como uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$. Deste modo, temos a sequência $\{500, 250, 125, \dots\}$, que se enquadra como uma progressão geométrica infinita e que, portanto, não terá um número de parcelas n definido até que o saldo seja zero. Contudo, é interessante notar que o valor mínimo utilizado em situações de mercado é dado por R\$0,01. Assim, neste caso, utilizando-se da expressão (3.5), teríamos que

$$S_n = 500 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1000 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

De fato, é sensato adotar que a dívida total é quitada quando $1000 - S_n \leq 0,01$. Assim,

$$1000 - 1000 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 0,01.$$

Simplificando, temos

$$\frac{1000}{2^n} \leq \frac{1}{100} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100000}.$$

Como $2^n > 0$, então

$$2^n \geq 100000.$$

Aplicando o logaritmo base 2 em ambos os lados, temos

$$2^n \geq 100000$$

$$n \geq \log_2(100000)$$

$$n \geq \frac{\log(100000)}{\log(2)}$$

Assim, sabendo que $\log(100000) = 5$ e $\log(2) = 0,31$, conclui-se que

$$n \geq \frac{5}{0,31} \approx 16,61.$$

Portanto, após 17 parcelas Tiago quitará sua dívida, uma vez que o saldo residual será próximo de zero, isto é, menor que R\$ 0,01.

3.4 Progressão Aritmético-Geométrica

Devido ao currículo abordar, em grande parte, sequências numéricas que resultam em PA ou PG, muitas vezes há uma limitação no entendimento de outras possibilidades envolvendo as sequências numéricas. Apresentamos aqui um caso de estudo envolvendo essas possibilidades: a progressão aritmético-geométrica, fruto de uma combinação entre as outras progressões já abordadas.

Definição 3.4.1. Uma progressão aritmético-geométrica é uma sequência a_n tal que a_1 , q e r são números reais dados, com $q \neq 1$, e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$a_{n+1} = qa_n + r.$$

Teorema 3.4.1. O n -ésimo termo a_n de uma progressão aritmético-geométrica, com $q \neq 1$, é dado por

$$a_n = a_1 q^{n-1} + r \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Demonstração. Utilizaremos o Princípio da Indução para verificar a validade de (3.7). Primeiramente, temos que a fórmula é verdadeira para $n = 1$, pois

$$a_1 q^{1-1} + r \frac{q^{1-1} - 1}{q - 1} = a_1 q^0 + r \frac{q^0 - 1}{q - 1} = a_1 + r \frac{0}{q - 1} = a_1.$$

Assumiremos a validade da fórmula para algum $k \in \mathbb{N}$, assim, $a_k = a_1 q^{k-1} + r \frac{q^{k-1} - 1}{q - 1}$ e provaremos (3.7) para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= qa_k + r \\ &= q \left(a_1 q^{k-1} + r \frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} \right) + r \\ &= a_1 q^{k-1+1} + r \frac{q^{k-1+1} - q}{q - 1} + \frac{r(q - 1)}{q - 1} \\ &= a_1 q^k + \frac{rq^k - rq + rq - r}{q - 1} \\ &= a_1 q^k + \frac{rq^k - r}{q - 1} \\ &= a_1 q^k + r \frac{q^k - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Segue, pelo Princípio de Indução, que a expressão (3.7) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Exemplo 3.4.28: Considerando a expressão (3.7), determine o sexto termo de uma progressão aritmético-geométrica em que $a_1 = 3$, $r = 5$ e $q = 2$.

Para resolvermos a situação proposta basta substituímos os valores dados na expressão (3.7), isto é,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 q^{n-1} + r \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \\ a_6 &= 3 \times 2^5 + 5 \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \\ a_6 &= 3 \times 32 + 5 \times 31 \\ a_6 &= 251. \end{aligned}$$

Conclui-se que o sexto termo desta progressão aritmético-geométrica é 251.

Teorema 3.4.2. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmético-geométrica, de razão $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + r \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2} + r \frac{n}{1 - q}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Demonstração. Conforme viemos realizando neste trabalho, vamos demonstrar essa expressão pelo Princípio de Indução. Primeiramente, temos que a expressão é verdadeira para $n = 1$, pois

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1} + r \frac{q^1 - 1}{(q - 1)^2} + r \frac{1}{1 - q} \\ &= a_1 + r \frac{q - 1}{(q - 1)(q - 1)} + r \frac{1 \times (-1)}{(1 - q) \times (-1)} \\ &= a_1 + \frac{r}{q - 1} - \frac{r}{q - 1} \\ &= a_1. \end{aligned}$$

Assumiremos a validade da expressão (3.8) para algum $k \in \mathbb{N}$. Vamos agora verificar a validade para $k + 1$. Verifica-se, então,

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\
&= a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + r \frac{q^k - 1}{(q - 1)^2} + r \frac{k}{1 - q} + a_1 q^k + r \frac{q^k - 1}{q - 1} \\
&= a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + r \frac{q^k - 1}{(q - 1)^2} - r \frac{k}{q - 1} + a_1 q^k + r \frac{q^k - 1}{q - 1} \\
&= \frac{a_1 q^{k+1} - a_1 q^k - a_1 q + a_1}{(q - 1)^2} + \frac{r q^k - r}{(q - 1)^2} + \frac{-r k q + r k}{(q - 1)^2} \\
&\quad + \frac{a_1 q^{k+2} - 2a_1 q^{k+1} + a_1 q^k}{(q - 1)^2} + \frac{r q^{k+1} - r q^k - r q + r}{(q - 1)^2} \\
&= \frac{-a_1 q^{k+1} - a_1 q + a_1 - r - r k q + r k + a_1 q^{k+2} + r q^{k+1} - r q + r}{(q - 1)^2} \\
&= \frac{-a_1 q^{k+1} + a_1 q^{k+2} - a_1 q + a_1}{(q - 1)^2} + \frac{r q^{k+1} - r}{(q - 1)^2} + \frac{-r k q + r k - r q + r}{(q - 1)^2} \\
&= a_1 \frac{-q^{k+1} + q^{k+2} - q + 1}{(q - 1)^2} + r \frac{q^{k+1} - 1}{(q - 1)^2} + \frac{-r(q - 1)(k + 1)}{(q - 1)(q - 1)} \\
&= a_1 \frac{(q - 1)(q^{k+1} - 1)}{(q - 1)^2} + r \frac{q^{k+1} - 1}{(q - 1)^2} + r \frac{(k + 1)}{1 - q} \\
&= a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} + r \frac{q^{k+1} - 1}{(q - 1)^2} + r \frac{(k + 1)}{1 - q}.
\end{aligned}$$

Segue, pelo Princípio da Indução, que a expressão (3.8) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.4.29: Considerando a expressão (3.8), determine a soma dos 8 primeiros termos de uma progressão aritmético-geométrica cujo termo $a_1 = 1$, $r = 4$ e $q = 3$.

A soma dos 8 primeiros termos da progressão pode ser dada por

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + r \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2} + r \frac{n}{1 - q} \\
S_8 &= 1 \frac{3^8 - 1}{2} + 4 \frac{3^8 - 1}{(2)^2} + 4 \frac{8}{1 - 3} \\
S_8 &= 1 \frac{6560}{2} + 4 \frac{6560}{4} + 4 \times (-4) \\
S_8 &= 3280 + 4 \times 1640 - 16 \\
S_8 &= 9824.
\end{aligned}$$

Conclui-se, portanto, que a soma dos 8 primeiros termos da progressão aritmético-geométrica em estudo é igual a 9824.

□

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Ao estabelecermos relações financeiras há a percepção nítida dos conceitos de progressões associados às fórmulas que, por muitas vezes, naturalmente por caráter organizacional, são apresentadas sem detalhamentos das bases teóricas envolvidas. A Matemática Financeira, por sua vez, é a área que se aprofunda em tais relações, sendo muito utilizada em investimentos, empréstimos e decisões financeiras que possam ser tomadas por uma pessoa ou grupo de indivíduos e, desse modo, torna-se tão importante seu estudo. Para sua melhor compreensão, é necessário destacarmos alguns termos e conceitos específicos desta área, disponíveis na obra de [Morgado e Carvalho \(2015\)](#), que serão apresentados a seguir.

Definição 4.0.1. A quantia inicialmente aplicada em uma operação de investimento ou assumida como dívida em uma operação de empréstimo por um período de tempo específico t é denominada Capital ou Valor Principal, representando-se por C .

Exemplo 4.0.30: A área financeira de uma empresa de construção decidiu realizar capitalização de recursos através da emissão de uma debênture¹. O valor total da emissão do título foi de R\$ 50.000.000,00 sendo que o prazo para liquidar essa dívida é de 7 anos. Neste caso, ao realizar seus registros e análises financeiras, a empresa precisará considerar que $C = 50000000$ e $t = 7$ anos.

Definição 4.0.2. A remuneração do capital C em um período de tempo específico t é denominado de Juros J , sendo o valor a ser assumido como acréscimo sobre investimento ou empréstimo.

¹ As debêntures representam a emissão da dívida de empresas em formato de títulos, os quais podem ser adquiridos por pessoas ou organizações como forma de investimento com remuneração previamente estipulada por contrato. Os juros nesse tipo de negociação podem ser prefixados, pós-fixados ou híbridos. Ao fazer emissão de debêntures as empresas evidenciam para quais finalidades são os recursos (por exemplo, para financiar projetos de expansão de suas atividades).

Exemplo 4.0.31: No início do mês de março um investidor iniciante na bolsa de valores inseriu R\$ 500,00 em sua conta em uma corretora² para fazer comercialização de ações através de especulação financeira, isto é, realizar operações *day trade*³. Ao finalizar o mês, este investidor verificou que, após descontar os impostos envolvidos nas transações, o seu ganho nas operações foram de R\$ 100,00. Nesta situação é possível identificar que $C = 200$, $t = 1$ e $J = 100$.

Definição 4.0.3. A razão estabelecida entre o valor dos juros em um período e o valor principal é considerado a taxa de juros referente ao período t da operação sendo, portanto, definida por

$$i = \frac{J}{C}.$$

A relação estabelecida também pode ser evidenciada da seguinte forma

$$J = C \times i.$$

Definição 4.0.4. O valor final de uma aplicação financeira ou pago em um empréstimo é denominado Montante (M), sendo entendido como a soma do valor principal com os juros auferidos no período t , ou seja, é dada por

$$M = C + J.$$

Exemplo 4.0.32: Uma empresa tomou um empréstimo de R\$ 240.000,00 e, após dois anos, pagou ao seu credor o valor de R\$ 276.000,00. Com essas informações podemos determinar que:

- O valor principal C desta dívida é de R\$ 240.000,00;
- O montante M pago pela empresa foi de R\$ 276.000,00;
- O período t de empréstimo foi de 2 anos;
- O valor de juros J pago nesse período foi de R\$ 36.000,00, sendo que basta calcular $J = M - C$;
- A taxa i que incidiu sobre o capital no período de 2 anos foi de 15%, pois

$$i = \frac{36000}{240000} = 0,15.$$

² Corretoras de valores são instituições que atuam como intermediárias nas negociações de ativos financeiros.

³ Operações *day trade* são comercializações de compra e venda de ações em um mesmo dia, possibilitando ganhos ou perdas através das oscilações de preço da ação.

Exemplo 4.0.33: Um investidor aplicou um valor de R\$ 5.000,00 em um Certificado de Depósito Bancário (CDB)⁴ e, após 14 meses, seu saldo final nesta aplicação era de R\$ 5.625,86. Qual é a taxa de juros que incidu sobre o capital C no período?

Para determinar a taxa de juros no exemplo proposto basta verificar que o valor dos juros acumulados foi de R\$625,86. Desse modo, a taxa de juros será $i = \frac{625,86}{5000} = 0,125172$. Portanto, a taxa é de aproximadamente 12,52% no período de 14 meses.

De modo geral, o método de cálculo de juros sobre um capital é determinado através de dois regimes de capitalização, conhecidos como *Juros Simples* e *Juros Compostos*.

4.1 Juros simples

Conforme Neto (2012), o regime de capitalização simples se comporta como uma progressão aritmética (PA), de modo que os juros crescem de forma linear ao longo do tempo. Para isso, esse regime utilizará fundamentalmente as próprias definições iniciais de matemática financeira, de modo a termos uma taxa de juros i incidindo sempre sobre o capital inicial C , por n períodos de tempo, de modo que o valor dos juros seja constante ao fim de cada período. Assim, não incidirá juros sobre o saldo dos juros acumulados.

Exemplo 4.1.34: Um casal necessitou de um empréstimo no valor de R\$ 5.000,00 para finalizar a reforma de sua casa. Ao comparar as taxas de juros do mercado financeiro, preferiu pegar esse empréstimo com um amigo, que cobrou 1,5% ao mês a juros simples, isto é, sobre o valor inicial da dívida. Após 3 meses, qual o valor final que o casal deverá pagar ao amigo?

Abordando a solução para exemplo proposto, como se trata do regime de capitalização simples, temos que a taxa de juros sempre incidirá sobre o valor inicial do capital ($C = 5.000$). Desse modo, 1,5% sobre R\$ 5.000,00 é equivalente a R\$ 75,00. Portanto, ao finalizar três meses, temos que o valor dos juros total foi de R\$ 225,00, pois se trata da soma dos juros capitalizados ao final de cada mês. Assim, o valor final da dívida será o valor inicial acrescido dos juros, isto é, $M = C + J$, resultando em R\$ 5.225,00.

A partir do exemplo acima é possível perceber que, no regime de capitalização a juros simples, o valor total dos Juros (J) será dado por

$$J = C \times i \times n. \quad (4.1)$$

⁴ CDB é um título privado de renda fixa emitido por bancos que têm como interesse captar recurso através desses títulos e, a partir deles, financiar suas atividades.

Ainda, conforme definições anteriores, o valor do montante é dado por

$$M = C + J.$$

Recorrentemente em exercícios de matemática financeira é pedido o valor do montante de uma dívida ou empréstimo. Desse modo, é possível relacionar montante, capital, taxa e período, bastando substituir o valor do juros na expressão que define o valor do montante. Teremos,

$$M = C + J = C + C \times i \times n.$$

Ao colocarmos o Capital (C) em evidência, é dada a expressão que define o valor do Montante (M) no regime de capitalização simples:

$$M = C(1 + in). \quad (4.2)$$

Observação 4.1.1. O regime de capitalização simples, embora seja recorrente no estudo da matemática financeira, não é comumente utilizado em operações financeiras cotidianas. A principal razão para isso se dá pelo fato de que os valores dos juros são maiores utilizando o regime de capitalização composta. Contudo, em operações entre pessoas físicas este regime ainda é usual, bem como em operações financeiras de prazo inferior a um mês. Há ainda outras exceções, tais como descontos de duplicatas (boletos de pagamento de comércios), recebimento do cupom de títulos de renda fixa e situações jurídicas envolvendo dívidas.

Exemplo 4.1.35: Um capital é aplicado a juros simples à taxa mensal de 4%. Qual o tempo mínimo que esse capital deve permanecer aplicado para que, no resgate, haja o dobro do capital inicial?

A partir do enunciado do exemplo é possível identificar que o valor do Montante (M) é igual a $2C$, sendo $i = 0,04$. Desse modo, a partir da expressão (4.2), teremos:

$$M = C(1 + 0,04n) = 2C \implies 1 + 0,04n = 2 \implies 0,04n = 1 \implies n = 25.$$

Assim, após 25 meses o montante será igual ao dobro do capital investido.

Exemplo 4.1.36: Um comerciante tomou um empréstimo a uma taxa de juros simples de 0,75% ao mês. Sabe-se que ao final de dois anos o valor total do juros foi de R\$ 54.000,00. Qual o valor inicial do empréstimo?

Primeiramente vamos identificar as informações da situação-problema:

- C = valor a ser determinado;

- $i = 0,75\%$ ao mês;
- $n = 2$ anos;
- $J = 54.000$.

Observe que a taxa é dada em mês, enquanto o período é dado em anos. Sendo assim, é importante que a mesma unidade de medida de tempo seja utilizada. Desse modo, $n = 24$ meses.

Agora basta utilizar a expressão (4.1), que relaciona os valores em análise, de modo que:

$$54.000 = C \times 0,0075 \times 24 \implies C = \frac{54.000}{0,18} = 300.000.$$

O exemplo acima traz uma situação simples, mas que muitas vezes recorre em equívocos pelos alunos. Assim, é importante frisar a uniformidade das unidades de medida.

Observação 4.1.2. A unidade de medida utilizada no período e na capitalização da taxa de juros deve ser a mesma.

4.2 Taxa proporcional e taxa equivalente

Tendo em vista que em uma operação financeira possui dois períodos de tempo envolvidos, sendo eles o período a que se refere a taxa de juros e o período de capitalização desses juros, é importante ressaltar a necessidade de entender os métodos envolvidos para o cálculo do valor total dos juros quando esses dois períodos não forem coincidentes.

Exemplo 4.2.37: Nos últimos meses de 2020, os depósitos em poupança renderam a uma taxa de $0,12\%$ ao mês. Desse modo, o prazo que se refere à taxa de juros é mensal. De forma análoga, a ocorrência desses juros também é mensal, uma vez que, ao ter realizado um depósito em 14/10/2020, um investidor só conseguirá resgatar o valor dos juros após o final de cada mês, isto é, o primeiro juros recebido foi em 14/11/2020.

Como pudemos ver no exemplo de operação financeira acima, os períodos de tempo envolvidos foram coincidentes. Contudo, com essa mesma situação, podemos trazer um contra-exemplo, uma vez que em outras inúmeras operações os prazos não são coincidentes.

Exemplo 4.2.38: Os depósitos em poupança renderam a uma taxa de juros de $2,11\%$ ao ano, conforme indicadores do Banco Central do Brasil (BCB). Desse modo, o prazo que se refere à taxa de juros é anual. Por sua vez, a capitalização dessa taxa (cálculo dos juros) ocorre mensalmente.

No exemplo acima conseguimos ver a diferença de prazos, gerando a necessidade de calcular a taxa proporcional ou equivalente, de modo a estarem na mesma unidade de medida.

Definição 4.2.1. Seja uma taxa i_1 fixada em um tempo t_1 e, dada uma taxa i_2 referente a um intervalo de tempo t_2 , se, reduzidas ao mesmo período, possuem proporcionalmente o mesmo valor, isto é, $i_1 t_1 = i_2 t_2 K$, para qualquer K racional positivo, denomina-se que são taxas proporcionais.

Observação 4.2.1. Uma taxa proporcional também é denominada taxa linear ou nominal.

Exemplo 4.2.39: Em um empréstimo a juros simples com taxa de 9% ao semestre definiu-se que a capitalização ocorreria mensalmente. Desse modo, para calcular a taxa proporcional, deve-se dividir a taxa de juros definida na operação pela quantidade de vezes em que ocorrerá a capitalização de juros. Desse modo, como um semestre possui 6 meses, basta calcular,

$$\text{Taxa Proporcional} = \frac{9\%}{6} = 1,5\% \text{ a.m.}$$

Observação 4.2.2. A aplicação de taxas proporcionais é muito utilizada em operações de curtíssimo prazo. São nesses casos que, mesmo em situações em que o regime de capitalização é composto, há a incidência de juros através de taxas proporcionais.

Definição 4.2.2. Uma taxa i_1 é dita equivalente à taxa i_2 se, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzirem o mesmo montante.

Exemplo 4.2.40: Uma pessoa está decidindo se deve realizar um investimento no valor de R\$ 30.000,00 a uma taxa mensal de 0,8% ou a uma taxa anual de 9,6%. Sabendo que o regime de capitalização é por juros simples, qual é a melhor decisão para essa pessoa?

No exemplo acima, seja J_m o valor dos juros acumulados capitalizados mensalmente, enquanto J_a representa o valor dos juros acumulados capitalizados anualmente. Para que a decisão possa ser embasada da melhor forma e com fins comparativos, considerar-se-á um investimento no intervalo de um ano. Dessa forma, teríamos:

$$J = C \times i \times n,$$

$$J_m = 30.000 \times 0,008 \times 12 = 2.880,$$

$$J_a = 30.000 \times 0,096 \times 1 = 2.880.$$

De fato, percebe-se que não há diferença no valor total dos juros acumulados. Portanto, em situações como essa não há necessidade de calcular o valor dos juros acumulados, mas sim comparar as duas taxas. Para tanto, é importante reduzir essas taxas ao mesmo intervalo de tempo, o que foi proposto anteriormente, ao fixar o intervalo de tempo em 12 meses (1 ano).

Dessa forma, conclui-se que não há diferença na decisão a ser tomada, uma vez que as taxas são proporcionais, pois $\frac{9,6\%}{12} = 0,8\%$.

Vale ressaltar que essa decisão só é possível porque taxas proporcionais irão gerar o mesmo montante de juros em regime de capitalização simples, isto é, as taxas não são apenas proporcionais, mas sim equivalentes.

Observação 4.2.3. No regime de juros simples, taxas proporcionais e taxas equivalentes possuem o mesmo significado, uma vez que esse regime possui natureza linear.

4.3 Juros compostos

Diferentemente do que se verifica no cálculo do montante a juros simples, o regime de capitalização a juros compostos não possui valor de juros linear ao fim de cada período. Isso se dá devido ao fato de que há uma capitalização dos juros, recorrentemente denominada como juros sobre juros. Basicamente, neste regime os juros de um período são incorporados ao saldo anterior, passando, assim, a gerar juros maiores a cada fim de período.

Exemplo 4.3.41: Os alunos de uma turma do 9º ano estão organizando uma formatura e, para isso, realizaram uma rifa no início do ano, o que gerou um lucro de R\$ 2.000,00. Como os gastos com a festa irão ocorrer apenas no 2º semestre, os alunos resolveram investir esse valor em uma conta poupança. Represente em uma tabela o saldo do investimento ao final de cada mês, sabendo que o resgate ocorreu após 6 meses da aplicação e que a taxa de juros da poupança foi de 0,3% ao mês durante todo o período.

A tabela abaixo representa a situação proposta no exemplo. Note que, para os cálculos dos juros, ocorreu arredondamento de valores até a 2ª casa decimal.

Exemplo - Juros Compostos da Poupança			
Mês de referência	Saldo no início de cada mês (em R\$)	Juros apurados no mês (em R\$)	Saldo ao final do mês (em R\$)
Início do 1º mês	-	-	2.000,00
Fim do 1º mês	2.000,00	$3\% \times 2.000,00 = 6,00$	2.006,00
Fim do 2º mês	2.006,00	$3\% \times 2.006,00 = 6,02$	2.012,02
Fim do 3º mês	2.012,02	$3\% \times 2.012,02 = 6,04$	2.018,06
Fim do 4º mês	2.018,06	$3\% \times 2.018,06 = 6,05$	2.024,11
Fim do 5º mês	2.024,11	$3\% \times 2.024,11 = 6,07$	2.030,18
Fim do 6º mês	2.030,18	$3\% \times 2.030,18 = 6,09$	2.036,27

De fato, o regime de capitalização composta se comporta conforme uma progressão geométrica (PG), de tal forma que os juros incidem sempre sobre o saldo apurado ao final do período anterior. Baseando-se na obra de Neto (2012) e Morgado e Carvalho (2015), aprofundaremos a abordagem sobre juros compostos.

Teorema 4.3.1. No regime de capitalização composta com taxa i , um principal C transforma-se, após n períodos de tempo, em um montante

$$M_n = C(1 + i)^n, \quad (4.3)$$

de modo que o fator $(1 + i)^n$ é definido como fator de capitalização dos juros compostos a uma data futura.

Demonstração. Utilizaremos o Princípio da Indução para verificar a validade da expressão (4.3).

Primeiramente, perceba que (4.3) é verdadeira para $n = 1$, pois como $J = C \times i \times n$, temos:

$$M_1 = C(1 + i)^1 = C + Ci = C + J.$$

Assumiremos a validade de (4.3) para algum $k \in \mathbb{N}$. Vamos agora verificar a validade para $k + 1$:

$$M_{k+1} = M_k + iM_k = M_k(1 + i) = C(1 + i)^k(1 + i) = C(1 + i)^{k+1}.$$

Segue, pelo Princípio da Indução, que a expressão (4.3) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Perceba que a demonstração deste teorema é semelhante à demonstração da expressão (3.4), uma vez que o montante de um regime de capitalização composta, para um período de n meses, nada mais é do que o n -ésimo termo de uma PG.

Exemplo 4.3.42: No ano de 2021, a inflação (índice IPCA) registrou uma média mensal em torno de 0,802%. Deste modo, uma pessoa que possuía um valor de R\$ 30.000,00 em uma conta corrente comum, isto é, sem rendimento sobre o valor, terá seu poder de compra diminuído. Em teoria, em quantos reais esse poder de compra foi diminuído após um ano?

Ao explorarmos o exemplo acima é importante ter em vista que a inflação se trata de um aumento de preços de produtos e serviços e, caso um valor não seja corrigido pela inflação ou acima dela, entende-se que há uma perda de poder de compra. Para realizar essa comparação, podemos supor que um pacote de bens tinha um custo de R\$30.000,00 no início de 2021. Logo, devido às altas da inflação, após um ano esse mesmo pacote terá um valor maior. Assim, vamos considerar:

- $C = 30.000,00$ valor do pacote de bens;
- $i = 0,802\%$ ao mês, que equivale a $i = 0,00802$ em número decimal;
- $n = 12$ meses;
- M = valor atualizado do pacote de bens.

Deste modo,

$$M_n = C(1 + i)^n = M_n = 30.000,00(1 + 0,00802)^{12} = 33.018,02.$$

Em teoria, o valor na conta corrente teve uma perda de valor e, portanto, o que antes poderia ser comprado no valor de R\$ 30.000,00 passou a custar R\$ 33.018,02. Assim, a perda de poder de compra é dada por R\$ 33.018,02 - R\$ 30.000,00 = R\$ 3.018,02.

Observação 4.3.1. O inverso da expressão do fator de capitalização, isto é,

$$\frac{1}{(1 + i)^n},$$

é definido como fator de atualização (ou de valor presente), de modo que, ao aplicá-lo a um valor expresso em data futura, resulta-se no equivalente ao seu valor em data atual.

Exemplo 4.3.43: Um servidor público realizou um empréstimo pessoal junto ao banco a uma taxa mensal de 2,4% ao mês. Sabendo que a aquisição do empréstimo segue o regime de capitalização composta e que o o montante da dívida após 4 meses é no valor de R\$ 42.135,54, determine o valor do empréstimo sabendo que ainda não houve nenhuma amortização da dívida.

Primeiramente, perceba que a situação descrita no exemplo requer que determinemos o valor presente da dívida. Deste modo, inicialmente vamos identificar as informações:

- C = valor presente a ser determinado;
- $i = 2,4\%$ ao mês, que equivale a $i = 0,024$ em número decimal;
- $n = 4$;
- $M = 42.135,54$.

Para que o montante seja trazido a valor presente, basta multiplicar o montante da dívida no tempo $n = 4$ pelo fator de atualização, isto é:

$$C = M \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{42.135,54}{(1+0,024)^4} = 38.322,05.$$

Assim, o valor do empréstimo foi no valor de R\$ 38.322,05.

Exemplo 4.3.44: Em um contrato de financiamento imobiliário previa que, caso o cliente desejasse, poderia adiantar os pagamentos de parcelas. Para isso, a financiadora consideraria a correção da última parcela a valor presente. Sabendo que uma financiadora considerou 0,7% mensal no valor do empréstimo, se o cliente está pagando a 13ª parcela (em um total de 60 parcelas fixas no valor de R\$ 2.456,20), qual o valor total do pagamento que precisará fazer à financiadora, caso também deseje adiantar uma parcela?

No exemplo proposto, para calcular o valor presente da dívida fixada na 60ª parcela, devemos considerar, em tempo, a antecedência em que está sendo feito o pagamento desta parcela. Perceba que, como está no 13º mês de dívida, o valor devido na última parcela já deveria estar incidindo juros. Assim, deve-se desconsiderar os juros existentes apenas entre a 13ª e 60ª parcelas, isto é, o tempo de correção será a diferença, em meses, da numeração dessas parcelas. Assim,

- C = valor presente a ser determinado;
- $i = 0,7\%$ ao mês, que equivale a $i = 0,007$ em número decimal;
- $n = 60 - 13 = 47$ meses;
- $M = 2.456,20$, que equivale ao valor da 60ª parcela;

Para que o valor da parcela seja trazido a valor presente, calculamos

$$C = M \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{2.456,20}{(1+0,007)^{47}} = 1.769,61$$

Assim, ao realizar o 13º pagamento, o cliente desembolsará R\$ 2.760,20 + R\$ 1.769,61 = R\$ 4.529,81.

4.4 Taxa equivalente nos Juros Compostos

Conforme abordado no capítulo anterior, a seguinte definição é apresentada:

Definição 4.4.1. Uma taxa i_1 é dita equivalente à taxa i_2 se, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzirem o mesmo montante.

Assim sendo, diferentemente do regime de capitalização simples, quando há incidência de juros no regime de capitalização composta não existe coincidência entre a taxa proporcional e a taxa equivalente.

Exemplo 4.4.45: Uma pessoa está decidindo se deve realizar um investimento no valor de R\$ 30.000,00 a uma taxa mensal de 0,8% ou a uma taxa anual de 9,6%. Sabendo que o regime de capitalização é por juros compostos, verifique qual é a melhor decisão para essa pessoa e responda.

De modo semelhante à resolução deste problema quando a incidência era por juros simples, denotaremos:

- $C = 30.000$, que representa o capital inicial;
- J_m = valor dos juros acumulados capitalizados mensalmente;
- J_a = valor dos juros acumulados capitalizados anualmente;
- $i_m = 0,8\%$ ao mês, que equivale a $i = 0,008$ em número decimal;
- $i_a = 9,6\%$ ao ano, que equivale a $i = 0,096$ em número decimal.

Para que a decisão possa ser embasada da melhor forma e com fins comparativos, considerar-se-á um investimento no intervalo de um ano, isto é, $n_1 = 12$ meses ou $n_2 = 1$ ano. Desta forma, na hipótese do investidor escolher o investimento com taxa mensal de 0,8%, teríamos

$$\begin{aligned} J_m &= M_{n_1} - C \\ &= C(1 + i)^{n_1} - C \\ &= 30000(1 + 0,008)^{12} - 30000 \\ &= 33010,16 - 30000 \\ &= 3010,16. \end{aligned}$$

Ainda, na hipótese da escolha preterida seja por base da taxa anual de 9,6%, teríamos

$$\begin{aligned} J_a &= M_{n_2} - C \\ &= C(1 + i)^{n_2} - C \\ &= 30000(1 + 0,096)^1 - 30000 \\ &= 32880 - 30000 \\ &= 2880. \end{aligned}$$

Percebe-se que os valores obtidos não são correspondentes e, portanto, há diferença na decisão a ser tomada. Neste caso, por mais que a taxa de 0,8% a.m. seja proporcional à taxa

de 9,6% a.a, elas não são equivalentes e, sendo assim, a taxa mensal está gerando maior juros acumulados, sendo a melhor decisão de investimento.

Teorema 4.4.1. Seja I a taxa fixada a um tempo n . Dada uma taxa i referente a um intervalo de tempo nK , para qualquer K racional positivo, denominam-se taxas equivalentes se

$$I = (1 + i)^K - 1. \quad (4.4)$$

Demonstração. Note que, para que as taxas sejam equivalentes, as taxas I e i devem produzir o mesmo montante ao serem aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo. Deste modo, denotando como M_n o montante gerado por I e M_{nK} o montante gerado por i , temos:

$$\begin{aligned} M_n &= M_{nK} \Leftrightarrow \\ C(1 + I)^n &= C(1 + i)^{nK} \Leftrightarrow \\ (1 + I)^n &= (1 + i)^{nK} \Leftrightarrow \\ (1 + I) &= (1 + i)^K \Leftrightarrow \\ I &= (1 + i)^K - 1. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.4.46: Ao analisar suas opções de investimento, João verificou que uma aplicação em LCA (Letra de Crédito Imobiliário) rendia 105% do CDI (Certificado de Depósito Interbancário) mensal. Assumindo que durante o período de investimento o CDI mensal ficou fixo em 0,94%, determine a taxa equivalente a um semestre e a um ano.

Na solução proposta ao exemplo, primeiramente é calculada a taxa pela qual incidirá os juros no período mensal, dada por

$$i = 105\% \times 0,94\% = 0,987\%.$$

Desta forma, vamos calcular a taxa I equivalente à taxa i no período de 6 meses, isto é, referente à taxa I temos que $n = 1$ semestre, logo, referente à taxa i , temos que $nK = 6$ e, portanto, $K = 6$. Assim,

$$\begin{aligned} I &= (1 + i)^K - 1 \\ &= (1 + 0,00987)^6 - 1 \\ &= 1,0607 - 1 \\ &= 0,0607. \end{aligned}$$

Com base nos resultados anteriores, temos que a taxa semestral equivalente à taxa de 0,987% a.m. é dada por 6,07% a.s.. Ainda, da mesma forma, vamos calcular a taxa I equivalente à taxa $i = 0,987\%$ no período de 12 meses, isto é, referente à taxa I temos que $n = 1$ ano, logo, referente à taxa i , temos que $nK = 12$ e, portanto, $K = 12$. Assim,

$$\begin{aligned} I &= (1 + i)^K - 1 \\ &= (1 + 0,00987)^{12} - 1 \\ &= 1,125086 - 1 \\ &= 0,125086. \end{aligned}$$

Respalhando-se nos resultados anteriores, temos que a taxa anual equivalente à taxa de 0,987% a.m. é dada por 12,51% a.a., aproximadamente.

Exemplo 4.4.47: Ao optar por um investimento de capitalização mensal, Renata se preocupou em certificar-se de que o valor ao final de um ano fosse superior ao índice de inflação. Ao acessar informações em diferentes mídias e sites oficiais, ela traçou uma expectativa de que a inflação após um ano seria de até 8%. Qual a taxa mensal de retorno do investimento satisfizes as condições impostas por Renata?

No exemplo proposto, para que o retorno do investimento seja acima da inflação é imprescindível que uma taxa I a.m. seja superior a $i = 8\%$ a.a. após 12 meses. Deste modo, temos que $n = 12$ meses, referente à taxa I , enquanto que o período de tempo referente à taxa i é dado por $nK = 1$ ano, isto é, $K = \frac{1}{12}$. Logo,

$$\begin{aligned} I &> (1 + i)^{\frac{1}{12}} - 1 \\ &> (1 + 0,08)^{\frac{1}{12}} - 1 \\ &> 1,006434 - 1 \\ &> 0,006434. \end{aligned}$$

De acordo com o cálculo acima, para que o investimento resultasse em um retorno acima da inflação, Renata precisou optar por uma taxa de 0,65% a.m., aproximadamente, ou superior.

Observação 4.4.1. Comumente em relações comerciais é dada a taxa em um período, mas cuja capitalização se dá em outro período. Sobre esse fato há críticas presentes na obra de [Morgado e Carvalho \(2015\)](#), uma vez que se anuncia taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Contudo, sendo uma prática de mercado, torna-se importante sua análise.

Exemplo 4.4.48: Uma taxa de "30% ao ano com capitalização trimestral" corresponde a 7,5% ao trimestre e, por equivalência de taxas, 33,55% ao ano, aproximadamente.

Exemplo 4.4.49: Uma taxa de "2% ao mês com capitalização semestral" corresponde a 12% ao semestre e, por consequência, não teria o retorno esperado de 12,62% ao semestre, por equivalência de taxas.

Exemplo 4.4.50: Johnatas investe seu dinheiro a juros de 3% a.a. + IPCA com capitalização mensal. Desconsiderando o IPCA, qual a taxa anual de juros pela qual o investimento recebe retorno?

No exemplo proposto, devido à capitalização mensal, é preciso calcular a taxa proporcional a 3% a.a., o que corresponde a $i = 3/12 = 0,25\%$. Por sua vez, a taxa anual equivalente é dada por $I = (1 + i)^{12} - 1$, que corresponde a $I = 3,042\%$.

Conclui-se que a taxa anual de juros é dada por 3,042% a.a.

Observação 4.4.2. A taxa anunciada é chamada de taxa nominal, enquanto que a taxa equivalente é denominada de taxa efetiva. No exemplo acima, 3% a.a. é a taxa nominal, enquanto que 3,042% a.a. é a taxa efetiva.

4.5 Série de pagamentos uniformes

Uma série de pagamentos é uma sequência de pagamentos iguais em períodos igualmente espaçados ao longo do tempo.

Teorema 4.5.1. Seja i a taxa de juros de uma série uniforme A de n pagamentos iguais a P . O valor dessa série, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, é igual a

$$A = P \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}. \quad (4.5)$$

Demonstração. Seja A o valor atual da série de pagamentos, uma vez que representa a soma de todas as parcelas deslocadas para a data 0. Logo,

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^{-1} + P(1 + i)^{-2} + \dots + P(1 + i)^{-n} \\ &= P(1 + i)^{-1} [1 + (1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \dots + (1 + i)^{-n+1}]. \end{aligned}$$

Ainda, note que A representa a soma de uma PG decrescente, de razão $(1 + i)^{-1}$ cujo primeiro termo é dado por $P(1 + i)^{-1}$. Deste modo, podemos representar A como a soma de uma PG, no

qual $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ e, assim,

$$\begin{aligned} A &= \frac{P(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{1-\frac{1}{1+i}} \\ &= \frac{P(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{\frac{i}{1+i}} \\ &= \frac{P}{1+i} \times [1-(1+i)^{-n}] \times \frac{1+i}{i} \\ &= P \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \end{aligned}$$

□

Observação 4.5.1. Uma série uniforme é chamada série perpétua quando o número de período é tão grande que podemos considerá-lo como sendo infinito.

Teorema 4.5.2. Seja i a taxa de juros de uma série perpétua A de infinitos pagamentos iguais a P . O valor dessa série, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, é igual a

$$A = \frac{P}{i}.$$

Demonstração. Basta verificar que $(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$ e tende a 0 quando n é suficientemente grande. Assim, pela expressão (4.5), temos que $A = \frac{P}{i}$.

□

4.6 Sistemas de amortização

Em situações de empréstimo ou financiamento de dívidas, quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade. Uma parte do pagamento quita os juros, enquanto a outra parte amortiza (abate) a dívida. Dessa forma, podemos entender a amortização como o processo de redução e, futuramente, extinção de uma dívida, através de pagamentos periódicos acertados entre as partes.

Em geral, os financiamentos e empréstimos a longo prazo são feitos utilizando dois tipos de sistemas de amortização (SAC e PRICE) a serem discutidos nos próximos tópicos. Antes, vale ressaltar que na construção das análises desses sistemas são utilizadas algumas nomenclaturas, as quais definimos a seguir.

Definição 4.6.1. Sendo k um dos períodos referente à dívida, definimos:

- A_k = parcela de amortização de uma dívida no período k ;
- J_k = parcela de juros referente à taxa de juros i incidente sobre o saldo da dívida no período $k - 1$;
- P_k = prestação paga do financiamento no período k , sendo que $P_k = A_k + J_k$;
- D_k = saldo da dívida após o pagamento da parcela de amortização A_k .

4.6.1 Sistema de prestações constantes

Conhecido como o sistema francês ou sistema PRICE, o sistema de prestações constantes tem como principal característica parcelas constantes no processo de redução da dívida, isto é, P_k é constante, embora a parcela de amortização A_k e de juros J_k são variáveis.

Teorema 4.6.1. No sistema francês de amortização, considerando um financiamento de dívida D_0 , sendo n o número total de parcelas a serem pagas, i a taxa de juros e k um dos períodos referente à dívida, temos

$$\begin{aligned} P_k &= D_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}; \\ D_k &= D_0 \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}}; \\ J_k &= iD_{k-1}; \\ A_k &= P_k - J_k. \end{aligned}$$

Demonstração. Na primeira expressão, conforme foi demonstrado no capítulo de séries uniformes, temos que

$$A = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Deste modo, seja $A = D_0$ e $P = P_k$, logo,

$$D_0 = P_k \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow P_k = D_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}.$$

Ainda, na segunda expressão, sabemos que $D_k = D_{k-1} - P_k$. Logo, temos: a terceira e quarta expressões são decorrentes dos conceitos iniciais envolvendo financiamento, os quais já foram apresentados anteriormente. $\square$

Exemplo 4.6.51: Joana está reorganizando suas finanças e contraiu um empréstimo de R\$760,00, a ser quitado em 6 meses através de prestações constantes, com uma taxa de juros de 3,5% ao mês. Determine o valor de cada prestação e o total pago ao longo do financiamento.

Devido ao fato de que as prestações são constantes, trata-se do sistema PRICE, e a solução do exemplo é iniciada ao ser definido o valor da parcela P_k a ser paga mensalmente

$$P_k = D_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = 760 \frac{0,035}{1 - 1,035^{-6}} \approx 162,00.$$

Portanto, cada prestação será de aproximadamente $P_k = R\$162,00$. Ainda, o total pago ao longo do financiamento é dado por

$$P_k \times n = 162,00 \times 6 = 972,00.$$

Assim, Joana pagará 6 prestações constantes de R\$162,00, totalizando R\$972,00 ao final do financiamento.

Exemplo 4.6.52: Uma dívida de R\$200,00 é paga, em 5 meses, pelo sistema francês (PRICE), com juros de 10% ao mês. Qual o valor total de juros que será pago no período em que a dívida será paga?

Para resolução do exemplo proposto, devido ao fato que, pelo sistema PRICE, as prestações são constantes, primeiramente definiremos o valor da parcela P_k a ser paga mensalmente:

$$P_k = D_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = 200 \frac{0,1}{1 - 1,1^{-5}} = 52,76.$$

Para definir o valor total de juros a serem pagos durante o período da dívida é possível representar uma tabela com o saldo da dívida a cada período k , o valor A_k a ser amortizado mensalmente, os juros pagos no mês e o valor da parcela, tal como se segue:

k	P_k	J_k (10% de D_{k-1})	A_k ($P_k - J_k$)	D_k ($D_{k-1} - A_k$)
0	-	-	-	200,00
1	52,76	20,00	32,76	167,24
2	52,76	16,72	36,04	131,20
3	52,76	13,12	39,64	91,56
4	52,76	9,16	43,60	47,96
5	52,76	4,80	47,96	-

Na construção da tabela acima temos que:

1ª linha: no período $k = 0$ apenas se deve preencher o valor da dívida D_0 , pois foi nesse momento que a dívida foi contraída.

2ª coluna: preencher, em cada uma das linhas da coluna, o valor da parcela constante a ser paga mensalmente, já calculada anteriormente.

2ª linha:

- J_1 é calculado como $J_1 = 0,1 \times D_0 = 0,1 \times 200 = 20$.
- A_1 é obtido através da diferença entre o valor da parcela e o valor do juros referente ao período, isto é, $A_1 = P_1 - J_1 = 52,76 - 20,00 = 32,76$.
- D_1 é calculado através de $D_1 = D_0 - A_1 = 200,00 - 32,76 = 167,24$.

As demais linhas da tabela podem ser obtidas realizando o mesmo processo utilizado para preenchimento da 2ª linha. Assim, conclui-se que o valor total de juros no período é dado pela somatória da coluna J_k , isto é, $20 + 16,72 + 13,12 + 9,16 + 4,80 = R\$63,80$ de juros.

4.6.2 Sistema de amortização constante

Conhecido como SAC, o sistema de amortização constante consiste em um sistema cuja amortização da dívida ocorre através de prestações decrescentes, em que o valor de cada uma é formado por uma parcela de juro uniformemente decrescente, enquanto a amortização da dívida é constante. Vale ressaltar que, dado a característica desse sistema em amortizar o saldo devedor de forma constante, a prestação e o juros pago a cada mês forma uma progressão aritmética de mesma razão.

Teorema 4.6.2. No sistema de amortização constante (SAC), considerando um financiamento de dívida D_0 , sendo n o número de pagamentos, i a taxa de juros e k um dos períodos referente à dívida, temos

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{D_0}{n}; \\ D_k &= D_0 \frac{n-k}{n}; \\ J_k &= iD_{k-1}; \\ A_k &= P_k - J_k. \end{aligned}$$

Demonstração. Na primeira expressão, como sabemos que a parcela da dívida a ser amortizada será dividida em n pagamentos iguais, cada quota a ser amortizada é representada por

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

Ainda, como o saldo da dívida D_k é resultante das k amortizações realizadas anteriormente, temos que

$$D_k = D_0 - kA_k = D_0 - k \frac{D_0}{n} = D_0 \frac{n-k}{n}.$$

A terceira e quarta expressões são decorrentes dos conceitos iniciais envolvendo financiamento, os quais já foram apresentados anteriormente. □

Exemplo 4.6.53: Devido a uma crise financeira, um comerciante decidiu adquirir um empréstimo para tentar recuperar o seu empreendimento. Após negociações, o empréstimo obtido foi no valor de R\$12.000,00 com juros de 5% ao mês, a serem pagos em 6 parcelas mensais através do modelo SAC. Qual o valor dos juros pagos no último mês da dívida?

No sistema de financiamento proposto no exemplo, isto é, modelo SAC, o valor do juros de um período é dado por $J_k = iD_{k-1}$. Desta forma, para determinar o valor referente a esses juros no 6º mês basta definir qual o valor da dívida D_5 , isto é, o saldo da dívida no 5º mês. No entanto, perceba que o valor da dívida no 5º mês é o mesmo valor da amortização a ser realizada no 6º mês, logo, $D_5 = \frac{12000}{6} = 2000$ e, portanto, $J_6 = 0,05 \times 2000 = 100$. Para facilitar a visualização da solução proposta podemos representar a situação através de uma planilha de amortização da dívida, como se segue:

k	D_k	A_k	J_k (5% de D_{k-1})	P_k ($A_k + J_k$)
0	12.000	-	-	-
1	10.000	2.000	600	2.600
2	8.000	2.000	500	2.500
3	6.000	2.000	400	2.400
4	4.000	2.000	300	2.300
5	2.000	2.000	200	2.200
6	-	2.000	100	2.100

Na construção da tabela acima, temos que:

1ª linha: no período $k = 0$ apenas se deve preencher o valor da dívida D_0 , pois foi nesse momento que a dívida foi contraída.

3ª coluna: preencher, em cada uma das linhas da coluna, o valor da dívida a ser amortizada mensalmente, calculada como $A_k = \frac{D_0}{n} = \frac{12000}{6} = 2000$.

2ª linha:

- D_1 é calculado realizando o cálculo $D_1 = D_0 - A_1 = 12000 - 2000 = 10000$.
- J_1 é calculado como $J_1 = 0,05 \times D_0 = 0,05 \times 12000 = 600$.
- P_1 é obtido através da soma da amortização da dívida e o juros referente ao período, isto é, $P_1 = A_1 + J_1 = 2000 + 600 = 2600$.

As demais linhas da tabela podem ser obtidas realizando o mesmo processo utilizado para preenchimento da 2ª linha.

Exemplo 4.6.54: Renata está realizando a compra dos móveis de sua casa e, para tanto, obteve um empréstimo de R\$3.136,00, com pagamentos periódicos a serem realizados durante 7 meses.

Se o empréstimo de Renata teve juros de 2,2% a.m., qual o valor total desembolsado, após quitado, considerando que foi utilizado o modelo SAC de financiamento?

Na solução proposta ao exemplo, calcularemos primeiramente a amortização, uma vez que é constante. Logo,

$$A_k = \frac{D_0}{n} = \frac{3.136}{7} = 448,00.$$

Para verificar o total a ser desembolsado no pagamento do empréstimo, propomos a representação através de uma planilha de amortização da dívida, que pode ser reproduzida utilizando as orientações de cálculos e procedimentos expressas no Exemplo 53. Deste modo, temos

k	D_k	A_k	J_k (2,2% de D_{k-1})	P_k ($A_k + J_k$)
0	3.136,00	-	-	-
1	2.688,00	448,00	68,99	516,99
2	2.240,00	448,00	59,14	507,14
3	1.792,00	448,00	49,28	497,28
4	1.344,00	448,00	39,42	487,42
5	896,00	448,00	29,57	477,57
6	448,00	448,00	19,71	467,71
7	-	448,00	9,86	457,86

Assim, basta somar o valor das prestações mensais e obter o total desembolsado, ou seja,

$$516,99 + 507,14 + 497,28 + 487,42 + 477,57 + 467,71 + 457,86 = 3411,97.$$

Portanto, Renata desembolsará um total de R\$ 3.411,97 ao final do financiamento regido pelo modelo SAC.

A comparação entre os sistemas SAC e PRICE é essencial para uma escolha consciente no momento de contratar financiamentos, pois ambos apresentam características específicas que influenciam diretamente no custo total e na experiência de pagamento do tomador do empréstimo. Enquanto o sistema SAC oferece parcelas iniciais mais altas, que diminuem ao longo do tempo, o sistema PRICE apresenta prestações constantes, proporcionando maior previsibilidade para o tomador. No entanto, o sistema SAC tende a gerar economia nos juros totais pagos devido à amortização constante do saldo devedor.

Assim, ao desenvolver nos estudantes a consciência cidadã e as habilidades matemáticas necessárias para lidar com situações financeiras, eles estarão mais preparados para avaliar criticamente diferentes sistemas de financiamento, como SAC e PRICE, compreendendo suas implicações práticas e tomando decisões alinhadas com suas realidades econômicas e objetivos pessoais. Propomos, portanto, uma comparação desses sistemas em uma situação prática.

Exemplo 4.6.55: Pedro está planejando abrir uma loja de carros e acessórios e, para isso, precisa contratar um empréstimo no valor de R\$28.000,00. Ele recebeu duas propostas para quitar o financiamento em 12 meses: uma pelo sistema SAC e outra pelo sistema PRICE, ambas com uma taxa de juros de 3,5% a.m. Considerando o fluxo de caixa mensal de Pedro, limitado a R\$ 3.000,00 para o pagamento das parcelas, e seu objetivo de minimizar o montante total pago em juros, qual sistema de financiamento seria mais adequado para ele? Justifique.

Na solução deste exemplo propomos a construção de duas tabelas, a fim de comparação, utilizando-se as orientações de cálculos e procedimentos expressas nos Exemplos 52 e 53.

Note, no enunciado do exemplo, que há duas condições a serem satisfeitas:

- i) Prestação não pode ser superior a R\$ 3.000,00;
- ii) O montante total de juros pagos deve ser o menor possível.

Ainda, também é importante frisar que a primeira restrição se sobrepõe à segunda, uma vez que o limite da parcela é decisivo para a opção a ser feita.

Ao analisarmos a Tabela PRICE, abaixo, temos que a prestação, representada por cada linha da coluna P_k , é de R\$ 2.897,55, satisfazendo a primeira condição; ainda, o valor dos juros a serem pagos, representado pela soma da coluna J_k , é de R\$ 6.770,61.

Tabela PRICE

k	P_k	J_k (3,5% de D_{k-1})	A_k ($P_k - J_k$)	D_k ($D_{k-1} - A_k$)
0	-	-	-	28.000,00
1	2.897,55	980,00	1.917,55	26.082,45
2	2.897,55	912,89	1.984,66	24.097,78
3	2.897,55	843,42	2.054,13	22.043,66
4	2.897,55	771,53	2.126,02	19.917,63
5	2.897,55	697,12	2.200,43	17.717,20
6	2.897,55	620,10	2.277,45	15.439,75
7	2.897,55	540,39	2.357,16	13.082,59
8	2.897,55	457,89	2.439,66	10.642,93
9	2.897,55	372,50	2.525,05	8.117,88
10	2.897,55	284,13	2.613,42	5.504,46
11	2.897,55	192,66	2.704,89	2.799,57
12	2.897,55	97,98	2.799,57	-

Ao analisarmos a Tabela SAC, a seguir, temos que a prestação, representada por cada linha da coluna P_k , inicia-se em R\$ 3.313,33, o que não satisfaz a primeira condição; ainda, o valor dos juros a serem pagos, representado pela soma da coluna J_k , é de R\$ 6.370,00.

Tabela SAC

k	D_k	A_k	J_k (3,5% de D_{k-1})	P_k ($A_k + J_k$)
0	28.000,00	-	-	-
1	25.666,67	2.333,33	980,00	3.313,33
2	23.333,34	2.333,33	900,83	3.234,16
3	21.000,01	2.333,33	816,67	3.150,00
4	18.666,68	2.333,33	735,00	3.068,33
5	16.333,35	2.333,33	652,67	2.986,00
6	14.000,02	2.333,33	570,17	2.903,50
7	11.666,69	2.333,33	490,00	2.823,33
8	9.333,36	2.333,33	406,67	2.740,00
9	7.000,03	2.333,33	326,67	2.660,00
10	4.666,70	2.333,33	245,00	2.578,33
11	2.333,37	2.333,33	163,33	2.496,67
12	-	2.333,33	81,67	2.415,00

Deste modo, a partir da análise das duas tabelas de amortização, é correto afirmar que o sistema de financiamento mais adequado para Pedro, com o prazo de 12 meses, é o PRICE (prestações constantes), uma vez que garantirá parcelas com valor inferior a R\$ 3.000,00.

UTILIZANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Com a disseminação da internet e o contínuo avanço dos meios tecnológicos, tornou-se cada vez mais crucial estabelecer uma conexão eficaz entre as instituições de ensino e os recursos tecnológicos aplicados ao processo de aprendizagem dos alunos, conforme preconizado pela Base Nacional Comum Curricular:

"[...] o Ensino Médio deve garantir aos estudantes a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática. Para tanto, a escola que acolhe as juventudes, por meio da articulação entre diferentes áreas do conhecimento, deve possibilitar aos estudantes: [...] apropriar-se das linguagens das tecnologias digitais e tornar-se fluentes em sua utilização." (BRASIL, 2018, p.467)

Ainda, a Base Nacional Comum Curricular estabelece competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, destacando-se as seguintes competências:

- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p.531)

Em suma, as competências descritas reforçam a necessidade dos docentes da área de matemática estabelecerem um plano de ensino focado em desenvolvimento de habilidades e competências que possam ser aplicadas em diferentes contextos, inclusive para soluções tecnológicas voltadas ao mercado de trabalho.

Neste capítulo propomos atividades práticas a serem aplicadas em salas de aula, principalmente de informática, juntamente aos alunos, ou, na ausência desta sala, aplicações pelo professor através de recursos disponíveis na instituição de ensino. A saber, as atividades utilizarão, como base, o Excel, um software com fácil acessibilidade e, portanto, útil no dia a dia e práticas de ensino.

5.1 Introduzindo o Excel

O Excel é um programa de planilha eletrônica desenvolvido pela Microsoft. Ele é amplamente utilizado para realizar uma variedade de tarefas relacionadas à análise de dados, cálculos, visualizações e organização de informações em formato de planilha.

Uma das principais características do Excel é sua interface intuitiva, que permite a inserção e manipulação de dados em células individuais de maneira sistemática e ordenada. Por meio dessa interface, é possível utilizar fórmulas e funções que estão integradas ao software para a realização de operações matemáticas, estatísticas e lógicas com alto nível de precisão. Essa abordagem facilita não apenas a resolução de situações envolvendo processos produtivos e financeiros, mas também a validação desses resultados e sua exploração didática.

O software também se destaca pela capacidade de gerar gráficos e tabelas dinâmicas, ferramentas cruciais para a interpretação de dados e a comunicação de resultados. No contexto da matemática financeira, tais funcionalidades permitem representar visualmente o comportamento de variáveis como juros, amortizações e fluxos de caixa, favorecendo uma análise mais profunda e fundamentada.

Suas funcionalidades avançadas incluem recursos de automação, como macros e o Visual Basic for Applications (VBA), que possibilitam aos usuários desenvolver scripts personalizados para automatizar tarefas repetitivas e realizar análises de maior complexidade. Embora essas ferramentas não sejam comumente exploradas em contextos didáticos de nível médio ou básico, sua incorporação poderia oferecer uma contribuição expressiva ao aprimoramento de competências analíticas e ao estímulo do raciocínio lógico, favorecendo uma formação mais robusta e alinhada às demandas contemporâneas. Deste modo, a proposta dessa dissertação envolve a exploração de tais recursos.

5.1.1 Funcionalidades básicas do Excel

O Excel permite aos usuários inserir dados em células individuais, sempre representadas por uma letra e um número (por exemplo, A1, B7, C25), sendo as letras representantes das colunas, enquanto que os números representam as linhas, tal qual em uma Matriz. Abaixo, representamos o layout do excel, conforme [Figura 1](#).

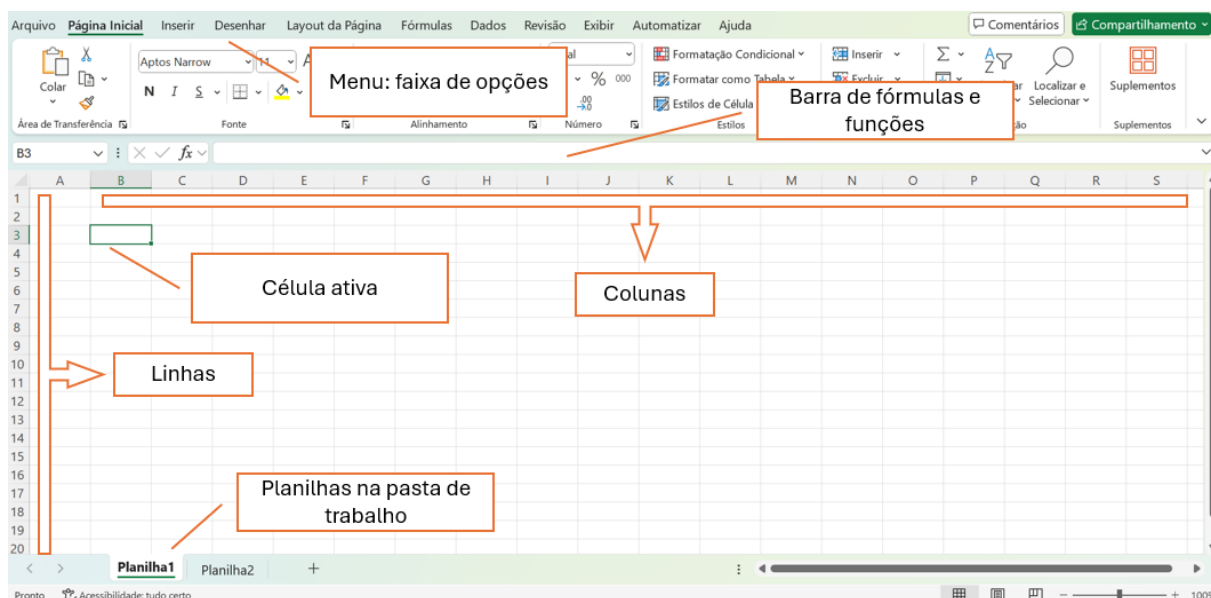


Figura 1 – Layout do Excel

Nessas células podem conter números, textos ou fórmulas. As fórmulas, também denominadas funções, são expressões matemáticas ou lógicas que permitem a realização de cálculos automáticos, análise de dados e processamento de informações de forma eficiente. Vejamos algumas delas:

5.1.1.1 Fórmulas Matemáticas e Estatísticas

As fórmulas matemáticas e estatísticas no Excel desempenham um papel crucial na análise e manipulação de dados. Elas permitem não apenas a execução de cálculos de forma automática, mas também otimizam o processo de interpretação dos dados, contribuindo para análises mais precisas e rápidas. A seguir, destacam-se algumas funções essenciais para essas operações, embora vale ressaltar que este trabalho não visa esgotar o tema, que pode ser aprofundado em consulta ao site da Microsoft Office, disponível no [Apêndice H](#).

- **SOMA:** A função SOMA permite a adição rápida de um intervalo de células, tornando o cálculo de totais eficiente. Ao utilizar `=SOMA(A1:A15)`, o Excel realiza automaticamente a soma dos valores contidos entre as células A1 e A15. Trata-se de uma ferramenta indispensável em operações que envolvem consolidação de dados numéricos, como em balanços financeiros e relatórios de desempenho. Na Matemática Financeira, pode ser utilizada para soma de total de parcelas, resultando no Montante.
- **MÉDIA:** A função MÉDIA calcula a média aritmética dos valores em um intervalo. Por exemplo, `=MÉDIA(B3:B10)` retorna a média dos valores nas células B3 a B10. Utilizada frequentemente para análises de desempenho e relatórios estatísticos, trata-se de uma medida estatística presente na abordagem matemática na Educação Básica.

- **MÍNIMO e MÁXIMO:** As funções MÍNIMO e MÁXIMO retornam o menor e o maior valor em um intervalo, respectivamente. Por exemplo, =MÍNIMO(C1:C30) e =MÁXIMO(C1:C30) são úteis para identificar extremos em conjuntos de dados. Considerando que Matemática Financeira envolve a análise de banco de dados, com múltiplas linhas, é primordial a utilização dessa fórmula.
- **DESVPAD:** A função DESVPAD calcula o desvio padrão dos valores em um intervalo, fornecendo uma medida de dispersão dos dados. Por exemplo, =DESVPAD(D5:D76) é utilizada em análises estatísticas para avaliar a variabilidade dos dados. Trata-se de um conhecimento frequentemente abordado em estatística, no Ensino Médio e Ensino Superior.
- **CONT.SE:** A função CONT.SE conta o número de células em um intervalo que atendem a um critério específico. Por exemplo, =CONT.SE(E2:E79; ">50") conta quantas células, no intervalo de E2 a E79, possuem valores maiores que 50. Essa função é útil para criar contagens condicionais em relatórios e análises.

5.1.1.2 Funções Lógicas e Condicionais

As funções lógicas e condicionais no Excel são ferramentas valiosas para a tomada de decisões baseadas em critérios específicos. Elas permitem avaliar condições, testar cenários variados e realizar buscas eficientes em tabelas, tornando as análises mais adaptáveis e informativas. Abordaremos algumas:

- **SE:** A função SE é uma das mais poderosas e versáteis no Excel, permitindo a execução de lógica condicional. Por exemplo, =SE(F1>100;"Acima da Meta";"Abaixo da Meta") retorna "Acima da Meta" se o valor em F1 for maior do que 100 e "Abaixo da Meta" caso contrário. É amplamente utilizada para análises condicionais e relatórios personalizados.
- **E e OU:** As funções E e OU são usadas em conjunto com a função SE para testar múltiplas condições. Por exemplo, =SE(E(G1>5;H1>75);"Aprovado"; "Reprovado") verifica se G1 é maior do que 5 e H1 é maior do que 75, retornando "Aprovado" apenas se ambas as condições forem verdadeiras. Já =SE(OU(I1="Sim";J1>75); "Aprovado"; "Reprovado") retorna "Aprovado" se pelo menos uma das condições for verdadeira.
- **PROCV e PROCH:** As funções PROCV (procura vertical) e PROCH (procura horizontal) são usadas para buscar valores em tabelas. Por exemplo, =PROCV(A1; A1:D10; 3; FALSO) busca o valor de A1 na matriz A1:D10, e retorna o valor correspondente da coluna C (representada pelo número 3, isto é, ordem da coluna), sendo que FALSO trará a correspondência exata do valor que se encontra naquela coluna. Essas funções são úteis para criar relatórios e análises baseadas em dados tabulares.
Consideração sobre a função PROCV: o valor de pesquisa, representado no exemplo por A1, deve estar sempre na primeira coluna no intervalo estabelecido para análise, visando

que a função funcione corretamente. No exemplo dado, caso o valor de pesquisa estivesse na célula B2, o intervalo deveria começar com B2:D10.

5.1.1.3 Funções de Texto

As funções de texto, no Excel, desempenham um papel crucial na Matemática Financeira, pois facilitam a manipulação e formatação de dados, permitindo a apresentação clara e concisa das informações financeiras. A seguir, são apresentadas algumas dessas funções e suas aplicações.

- **CONCATENAR e TEXTO:** A função CONCATENAR (ou CONCAT, nas versões mais recentes do Excel) une vários textos em uma única célula. Por exemplo, =CONCATENAR(L1;" "; M1) combina o conteúdo das células L1 e M1 com um espaço entre eles. A função TEXTO permite formatar números e datas como texto. Por exemplo, =TEXTO(N1,"dd/mm/aaaa") formata a data em N1 no formato dia/mês/ano.
- **ESQUERDA, DIREITA e EXT.TEXTO:** As funções ESQUERDA, DIREITA e EXT.TEXTO são usadas para extrair partes específicas de um texto. Por exemplo, =ESQUERDA(P1;5) retorna os primeiros 5 caracteres do texto em P1, enquanto que =DIREITA(Q1;4) retorna os últimos 4 caracteres. A função =EXT.TEXTO(R1;3;6) extrai 6 caracteres do texto em R1, começando na terceira posição.

5.1.1.4 Funções de Data e Hora

As funções de data e hora no Excel são cruciais na Matemática Financeira, pois permitem o gerenciamento preciso de prazos e vencimentos. Com elas, os analistas podem calcular juros, prazos de pagamento e períodos de investimento de maneira eficiente e confiável. Analisemos seus usos:

- **HOJE e AGORA:** As funções HOJE e AGORA retornam a data atual e a data e hora atuais, respectivamente. Por exemplo, =HOJE() insere a data atual na célula em que a função estiver escrita, enquanto que =AGORA() insere a data e a hora atuais.
- **DIAS:** A função DIAS calcula o número de dias entre duas datas. Por exemplo, =DIAS(S1;T1) retorna o número de dias entre as datas em S1 e T1.

5.1.1.5 Funções Financeiras

As funções financeiras no Excel são essenciais para a análise e tomada de decisões em Matemática Financeira, pois permitem calcular pagamentos, valores presentes e futuros de investimentos. Por meio dessas funções, os usuários podem simular cenários financeiros e otimizar a gestão de recursos em projetos e empréstimos. Vale ressaltar que os resultados dessas funções podem ser obtidos utilizando outras ferramentas do Excel. A seguir, procederemos com uma análise detalhada dessas funções

- **PGTO:** A função PGTO calcula o pagamento de um empréstimo com base em uma taxa de juros constante e um número fixo de períodos. Por exemplo, =PGTO(0,07/12; 240; -85000) calcula o pagamento mensal de um empréstimo de 85.000 reais a uma taxa de juros anual de 7%, com pagamento em 240 meses.
- **VF e VP:** As funções VF (Valor Futuro) e VP (Valor Presente) são usadas para calcular o valor futuro e o valor presente de um investimento com base em uma taxa de juros constante e pagamentos periódicos. Por exemplo, =VF(0,032; 10; -1250) calcula o valor futuro de uma série de pagamentos de 1.250 reais feitos ao longo de 10 períodos a uma taxa de juros de 3,2%.
- **TAXA:** A função TAXA calcula a taxa de juros por período de um investimento ou empréstimo. Por exemplo, =TAXA(240; -PGTO(0,07/12; 240; -85000); 85000) determina a taxa de juros mensal de um empréstimo de 85.000 reais, considerando o pagamento mensal calculado pela função PGTO, que foi obtida considerando a taxa anual.

5.1.2 Funcionalidade avançadas do Excel

Uma das funcionalidades avançadas do Excel, e foco deste estudo, é o Visual Basic for Applications (VBA), uma linguagem de programação integrada ao Microsoft Office que permite a automação de tarefas e o desenvolvimento de aplicações personalizadas dentro de softwares como Excel. Embora neste capítulo sejam apresentadas abordagens sobre algumas funcionalidades da ferramenta, para um aprofundamento mais detalhado e completo, recomenda-se a leitura da Apostila de Programação em VBA, elaborada por [Kleina \(2022\)](#).

Ainda, neste trabalho optou-se por focar o estudo desta funcionalidade direcionado ao código de programação que possibilita utilizar o VBA para geração das tabelas de amortização apresentadas no [Capítulo 4](#). Para que o VBA seja executado corretamente no Excel, é necessário ativar a guia *Desenvolvedor*, a qual não está disponível por padrão em algumas versões do programa. Assim, apresentamos um guia detalhado para que essa funcionalidade possa ser acessada no Excel.

5.1.2.1 Habilitando a Guia Desenvolvedor

Para utilizar a programação VBA no Excel, é necessário habilitar a guia *Desenvolvedor*. Professores, alunos e usuários em geral podem seguir os passos abaixo para ativá-la:

- i) No Excel, acesse o menu **Arquivo**;
- ii) Clique em **Opções**;
- iii) No painel de navegação, selecione **Personalizar Faixa de Opções**;
- iv) Em **Guias Principais**, marque a caixa de seleção **Desenvolvedor**.

Após esses passos, a guia *Desenvolvedor* estará disponível na barra de ferramentas, permitindo o acesso aos recursos de programação VBA.

5.2 Atividade 1 - Explorando a Matemática Financeira

Antes de introduzirmos o uso do Excel no aprendizado e desenvolvimento de habilidades em Matemática Financeira, propomos uma atividade exploratória a ser realizada em sala de aula. O objetivo dessa atividade é permitir que os alunos se familiarizem com conceitos financeiros fundamentais, como juros simples e compostos, de maneira prática e interativa.

A atividade poderá ser conduzida por meio de discussões em grupo e exercícios práticos, os quais possibilitarão aos alunos uma compreensão mais aprofundada das terminologias e dos cálculos envolvidos. Dessa forma, eles poderão construir uma base sólida de conhecimentos, e criticidade nos resultados, antes de utilizar ferramentas tecnológicas para automatização de cálculos.

Esse processo de aprendizado gradual facilita a transição para o uso de ferramentas como o Excel, tornando a visualização de dados e a análise mais complexa e significativa. A atividade proposta pode ser verificada no [Apêndice A](#).

5.3 Atividade 2 - Resolvendo problemas de juros simples no Excel

Nesta seção, apresentamos uma proposta de automatização para a resolução de situações-problema que envolvem valores desconhecidos em contextos econômicos, com ênfase nos cálculos de juros simples, utilizando o Excel como ferramenta. A proposta, inicialmente desenvolvida por [Silva \(2021\)](#) em sua dissertação, é ampliada aqui com contribuições que oferecem novas possibilidades de aplicação em sala de aula, incluindo sugestões de exercícios específicos, disponíveis no [Apêndice B](#).

A seção está organizada em duas partes principais. Iniciamos com a apresentação da funcionalidade automatizada, intitulada "Calculadora de Juros Simples". Em seguida, demonstramos sua aplicação prática por meio da resolução de um exercício selecionado do [Apêndice B](#), evidenciando seu potencial pedagógico para facilitar o aprendizado e estimular o raciocínio crítico dos alunos.

5.3.1 Calculadora de juros simples: passo a passo

A) Primeiramente, orientar aos alunos para reproduzir a construção de uma tabela conforme [Figura 2](#).

Observação: na construção da tabela optou-se por não acrescentar o elemento Montante nas fórmulas do Excel, uma vez que ele é resultante do Capital e Juros envolvidos. Deste modo, ressalta-se a importância da leitura do problema, pelos alunos, visando garantir que eles associem e resgatem conhecimentos básicos para obtenção de Juros e Capital, em casos que são fornecidos apenas o Montante, e vice-versa. Tal abordagem possibilita maior criticidade na realização das atividades propostas.

	A	B	C	D	E
1					
2		Juros simples	$J = C.i.n$		
3		Montante	$M = C + J$		
4					
5		Descrição	Dados	Solução	
6		Capital (C)			
7		Taxa percentual (i)			
8		Período/Tempo (n)			
9		Valor do Juros (J)			
10					

Figura 2 – Calculadora de juros simples

B) Utilizando-se da função SE, no Excel, preencher as células envolvendo a solução do problema.

B.1 - CAPITAL: na célula D6 (coluna D, linha 6), orientar pelo preenchimento da seguinte função: `=SE(C6="";C9/(C8*C7);"`).

Interpretação lógica no excel: se a célula C6 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre Capital na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o valor do Capital, dado pela função $C9/(C8 \cdot C7)$. Porém, se a célula C6 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula D6 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: se $J = C \times i \times n$, então $C = \frac{J}{i \times n}$.

B.2 - TAXA PERCENTUAL: na célula D7 (coluna D, linha 7), orientar pelo preenchimento da seguinte função: `=SE(C7="";C9/(C6*C8);"`).

Interpretação lógica no excel: se a célula C7 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre taxa percentual na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o valor da taxa, dado pela função $C9/(C6 \cdot C8)$. Porém, se a célula C7 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula D7 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: se $J = C \times i \times n$, então $i = \frac{J}{C \times n}$.

B.3 - TEMPO: na célula D8 (coluna D, linha 8), orientar pelo preenchimento da seguinte função: =SE(C8="";C9/(C6*C7);"").

Interpretação lógica no excel: se a célula C8 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre tempo na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o tempo da operação, dado pela função C9/(C6*C7). Porém, se a célula C8 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula D8 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: se $J = C \times i \times n$, então $t = \frac{J}{C \times i}$.

B.4 - JUROS: na célula D9 (coluna D, linha 9), orientar pelo preenchimento da seguinte função: =SE(C9="";C6*C7*C8;"").

Interpretação lógica no excel: se a célula C9 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre juros acumulados na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o valor do juros, dado pela função C6*C7*C8. Porém, se a célula C9 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula D9 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: $J = C \times i \times n$.

5.3.2 Aplicação: calculadora de juros simples

Para ilustrar como pode ser feita aplicação da atividade em sala de aula, propomos a resolução do Exercício 1, do [Apêndice B](#). Os exercícios subsequentes ficam à disposição para exploração tanto por professores quanto por alunos, permitindo possibilitando o desenvolvimento das competências abordadas.

Exercício 1. Enzo fez um empréstimo, para um amigo, no valor de R\$3.000,00, em que se estabeleceu, entre eles, uma taxa de 3,8% ao mês, a juros simples. Se Enzo recebeu o pagamento do empréstimo apenas um semestre depois, qual o montante recebido?

Através da situação-problema apresentada, a calculadora de juros simples deve ser preenchida conforme [Figura 3](#), sendo que a célula C9 deve ficar sem preenchimento, uma vez que o resultado será disposto na célula D9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Juros simples	J = C.i.n						
3		Montante	M = C + J						
4									
5		Descrição	Dados	Solução					
6		Capital (C)	3000						
7		Taxa percentual (i)	3,8%						
8		Período/Tempo (n)	6						
9		Valor do Juros (J)		684,00					
10									
11									
12									

Figura 3 – Calculadora de juros simples preenchida

Deste modo, ao preencher os dados o aluno perceberá que o valor de juros é de R\$ 684,00 e, portanto, como $M = C + J$, conclui-se que $M = 3000 + 684 = 3684$, isto é, Enzo recebeu um montante de R\$ 3.684,00.

5.4 Atividade 3 - Resolvendo problemas de juros compostos no Excel

Nesta seção, novamente apresentamos uma proposta de automatização para a resolução de situações-problema que envolvem valores desconhecidos em contextos econômicos, mas agora com ênfase nos cálculos de juros compostos através do software Excel. Trata-se também de uma proposta inicialmente desenvolvida por [Silva \(2021\)](#) em sua dissertação, a qual é ampliada aqui com contribuições que oferecem novas possibilidades de aplicação em sala de aula, incluindo sugestões de exercícios específicos, detalhados no [Apêndice C](#).

Da mesma forma como ocorreu na seção anterior, nossa abordagem está organizada em duas partes principais. Iniciamos com a apresentação da funcionalidade automatizada, intitulada "Calculadora de Juros Compostos". Em seguida, demonstramos sua aplicação prática por meio da resolução de um exercício selecionado do [Apêndice C](#), evidenciando seu potencial pedagógico para facilitar o aprendizado e estimular o raciocínio crítico dos alunos.

5.4.1 Calculadora de juros compostos: passo a passo

A) Primeiramente, orientar aos alunos para reproduzir a construção de uma tabela conforme [Figura 4](#).

Observação: na construção da tabela optou-se por não acrescentar o elemento Juros Acumulados, uma vez que ele é resultante do Capital e Montante envolvidos. Este modo, ressalta-se a importância da leitura do problema, pelos alunos, visando garantir que eles associem e resgatem conhecimentos básicos para obtenção de elementos de juros compostos em que há ausência de informação explícita. Tal abordagem possibilita maior criticidade na realização das atividades propostas.

	A	B	C	D	E
13					
14		Juros compostos			
15		Montante	$M = C \cdot (1+i)^n$		
16					
17		Descrição	Dados	Solução	
18		Capital (C)			
19		Taxa percentual (i)			
20		Período/Tempo (n)			
21		Montante (M)			
22					
23					

Figura 4 – Calculadora de juros compostos

B) Utilizando-se da função SE, no Excel, preencher as células envolvendo a solução do problema.

B.1 - CAPITAL: na célula D18 (coluna D, linha 18), orientar pelo preenchimento da seguinte função: =SE(C18="";C21/((1+C19)^C20);"").

Interpretação lógica no excel: se a célula C18 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre Capital na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o valor do Capital, dado pela função $C21 / ((1+C19)^{C20})$. Porém, se a célula C6 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula D18 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: se $M = C \times (1+i)^n$, então $C = \frac{M}{(1+i)^n}$.

B.2 - TAXA PERCENTUAL: na célula D19 (coluna D, linha 19), orientar pelo preenchimento da seguinte função: =SE(C19="";(C21/C18)^(1/C20)-1;"").

Interpretação lógica no excel: se a célula C18 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre taxa percentual na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o valor da taxa, dado pela função $(C21/C18)^{(1/C20)} - 1$. Porém, se a célula C18 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula D19 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: se $M = C \times (1+i)^n$, então

$$(1+i)^n = \frac{M}{C} \implies (1+i) = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{n}} \implies i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

B.3 - TEMPO: na célula D20 (coluna D, linha 20), orientar pelo preenchimento da seguinte função: =SE(C20="";LOG(C21/C18;1+C19);"").

Interpretação lógica no excel: se a célula C20 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre o tempo na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o valor do tempo/período, dado pela função $\text{LOG}(C21/C18;1+C19)$. Porém, se a célula C20 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula C21 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: se $M = C \times (1 + i)^n$, então

$$(1 + i)^n = \frac{M}{C} \implies \log(1 + i)^n = \log\left(\frac{M}{C}\right) \implies n \times \log(1 + i) = \log\left(\frac{M}{C}\right) \implies n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + i)}.$$

B.4 - MONTANTE: na célula D21 (coluna D, linha 21), orientar pelo preenchimento da seguinte função: $\text{=SE}(C21=""; C18 * (1 + C19) ^ C20; "")$.

Interpretação lógica no excel: se a célula C21 for igual a vazio (""), isto é, não tiver o dado sobre Montante na situação-problema, então ele é um dado que provavelmente está sendo de interesse, logo, utiliza-se o comando (;), que representa ENTÃO, e calcula-se o valor do Montante, dado pela função $C18 * (1 + C19) ^ C20$. Porém, se a célula C21 estiver preenchida, então (;), a função deixará a célula D21 vazia (""), pois não há uma solução a ser encontrada.

Interpretação matemática: trata-se da própria definição do Montante de Juros Compostos, conforme expressão (4.3).

5.4.2 Aplicação: calculadora de juros simples

Para ilustrar como pode ser feita aplicação da atividade em sala de aula, propomos a resolução do Exercício 7, do [Apêndice B](#). Os demais exercícios ficam à disposição para exploração tanto por professores quanto por alunos, possibilitando o desenvolvimento das competências abordadas.

Exercício 7. Caiury está interessado em comprar um carro à vista, cujo preço atual é de R\$ 42.000,00 e, para tanto, realizou um investimento de R\$ 30.000,00 em uma LCI cuja taxa de retorno fixa estabelecida é de 0,9% ao mês, sob o regime de capitalização composta. Assumindo que o valor do automóvel não se altere, por quanto tempo Caiury precisará manter o investimento até fazer o saque e comprar o automóvel?

A partir dessa situação-problema, a calculadora de juros composto deve ser preenchida conforme [Figura 5](#), sendo que a célula C20 deve ficar sem preenchimento, uma vez que o resultado será disposto na célula D20.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										
23										
24										

Juros compostos		
Montante	$M = C \cdot (1+i)^n$	
Capital (C)	30000	
Taxa percentual (i)	0,9%	
Período/Tempo (n)		38,87464
Montante (M)	42500	

=SE(C18="",C21/((1+C19)^C20),"")
=SE(C19="",C21/C18^(1/C20)-1,"")
=SE(C20="",LOG(C21/C18;1+C19),"")
=SE(C21="",C18*(1+C19)^C20;"")

Figura 5 – Calculadora de juros composto preenchida

Deste modo, ao preencher os dados conforme disposto no Exercício 7, o aluno perceberá que o período de tempo é dado por 38,875. Conclui-se, assim, que para Caiury conseguir obter o valor de R\$ 42.500,00 e comprar o automóvel à vista, precisará manter o seu investimento por 39 meses. Perceba que 38 meses não seria suficiente.

5.5 Atividade 4 - Aplicando programação para gerar tabelas de amortização

Conforme apresentado na [Subseção 5.1.2](#), o Visual Basic for Applications (VBA) é uma linguagem de programação integrada ao software Excel, que permite a automação de cálculos e o desenvolvimento de soluções personalizadas. Por meio dessa ferramenta é possível implementar o cálculo automático das tabelas de amortização discutidas na [Seção 4.6](#).

A Atividade 4, proposta nesta dissertação, consiste na implementação de códigos de programação em VBA para gerar automaticamente as tabelas de amortização do sistema PRICE e SAC. Além disso, a atividade inclui sugestões de exercícios para aplicação prática da ferramenta em sala de aula, com o objetivo de estimular a exploração tecnológica e o desenvolvimento do senso crítico dos estudantes.

Portanto, esta seção está organizada em duas partes principais. A primeira parte apresenta a descrição detalhada da implementação dos códigos em VBA no Excel, destacando, principalmente, os aspectos técnicos envolvidos. Na segunda parte é demonstrada a aplicação prática por meio de um exercício selecionado do [Apêndice D](#), o qual, por sua vez, trata-se de uma coletânea de exercícios desenvolvida para aplicação de conceitos de Matemática Financeira, com ênfase nos sistemas de amortização e na automatização dos processos de cálculo.

5.5.1 Parâmetros para a programação VBA

Antes de executar o código a ser programado no VBA, é essencial preencher corretamente as células do Excel que serão utilizadas como parâmetros nas automatizações. Siga as instruções

abaixo para garantir que as informações estejam inseridas corretamente. Ressalta-se que qualquer mudança realizada nesses parâmetros deve ser também feita na programação que será proposta.

- i) **Valor do Empréstimo:** Na célula C4, insira o valor total do empréstimo que deseja calcular. Este valor deve ser um número positivo.
- ii) **Taxa de Juros Mensal:** Na célula C5, insira a taxa de juros mensal ¹ como uma porcentagem. Por exemplo, se a taxa for de 5%, o aluno deve inserir 5. Na forma como será proposta a programação VBA, não deve acrescentar o símbolo de porcentagem, ao digitar o valor; ainda, certifique-se de não representar a taxa em número decimal.²
- iii) **Número de Períodos:** Na célula C6, insira o número total de meses em que o empréstimo será amortizado. Este valor deve ser um número inteiro positivo.

A seguir, apresentamos uma sugestão para construção dos parâmetros iniciais, no Excel:

	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

TABELA PRICE e SAC - PARÂMETROS	
Valor do Empréstimo/Financiamento	
Taxa de Juros (mensal)	
Número de Períodos (em meses)	

Figura 6 – Parâmetros para a Programação VBA

5.5.2 Código VBA para gerar tabelas de amortização

Após a configuração dos parâmetros na planilha do Excel, o próximo passo é implementar o código VBA que irá calcular e gerar cada tabela de amortização.

5.5.2.1 Código VBA - Tabela PRICE

Primeiramente, para implementar o código VBA da Tabela PRICE, siga as etapas abaixo:

- i) **Acessar o Editor do VBA:** Com a guia *Desenvolvedor* habilitada, clique em *Visual Basic* para abrir o Editor do VBA.

¹ Se a taxa de juros for dada em outro período, é necessário calcular a taxa equivalente, conforme visto na [Seção 4.4](#).

² Caso haja interesse em representação da taxa em um formato diferente, é possível alterar o código VBA que será apresentado neste trabalho.

- ii) **Criar um Módulo:** No Editor do VBA, clique com o botão direito em *Inserir* e, em seguida, clique em *Módulo*. Uma página em branco será aberta.
- iii) **Inserir o Código VBA:** No módulo criado, copie e cole o código proposto no [Apêndice E](#), referente à Tabela PRICE. Caso encontre dificuldades ao copiar o código diretamente do formato PDF, ele está disponível em uma versão alternativa em Word, conforme detalhado na [Seção 5.6](#).
- iv) **Executar o Código:** Após inserir o código, você pode fechá-lo e voltar à planilha do Excel. Para executar o código, clique na guia *Desenvolvedor* e, em seguida, em *Macros*. Selecione a macro GerarTabelaPrice e clique em *Executar*. A Tabela PRICE será gerada na planilha a partir da célula E8. Para garantia da execução é importante que as células do excel, utilizadas como parâmetros, estejam preenchidas.
- v) **Verificar os Resultados:** Após a execução do código, verifique a tabela gerada a partir das células E8 até I8. A tabela deve exibir os valores de cada período, incluindo a prestação, juros, amortização e saldo devedor. Ainda, também deve conter a linha de total, ao final da tabela.
- vi) **Criar um botão de comando:** Após verificar que o código está executando corretamente, clique na guia *Desenvolvedor*. Em seguida, com o botão direito do *mouse*, selecione a aba *Inserir* e clique em *Botão (Controle de Formulário)*. A ferramenta possibilitará que, com o *mouse*, o usuário desenhe um botão em formato retangular, o qual, após finalizado, abrirá uma janela para atribuir-lhe uma *Macro*. Escolha a macro GerarTabelaPrice e clique em *OK*. O usuário pode renomear o botão clicando com o botão direito do *mouse*, além de movê-lo e formatá-lo conforme desejar.

5.5.2.2 Código VBA - Tabela SAC

Para implementar o código VBA da Tabela SAC, na mesma planilha de Excel utilizada anteriormente com os parâmetros definidos na [Subseção 5.5.1](#), siga novamente as etapas descritas na [Subsubseção 5.5.2.1](#), porém, no *item (iii)*, inserir o código VBA proposto no [Apêndice F](#), referente à Tabela SAC. No *item (iv)*, para executar o código, selecionar a macro GerarTabelaSAC.

Ainda, perceba que, nos *itens (iv)* e *(v)*, a tabela SAC gerada pelo código proposto será a partir das células K8 até O8. Por fim, no *item (vi)* deverá ser atribuída a macro GerarTabelaSAC ao novo botão de comando que foi gerado.

5.5.2.3 Análise detalhada - Código VBA para gerar tabelas de amortização

No [Apêndice G](#), encontra-se uma análise detalhada dos códigos VBA utilizados para a geração das tabelas PRICE e SAC, permitindo que tanto o professor quanto o aluno realizem modificações nos códigos com base em seu entendimento e necessidades específicas.

Assim, ao realizar a análise das tabelas geradas, conclui-se que o valor total pago em juros foi de R\$ 5.008,00 no caso de a empresa ter optado pelo sistema PRICE, enquanto, caso tenha escolhido o sistema SAC, o total pago em juros foi de R\$ 4.875,00.

5.6 Pasta: Explorações Didáticas

Para promover a disseminação do conhecimento de forma eficaz, foi criada uma pasta de atividades, através do Google Drive, a qual compila todos os exercícios e recursos tecnológicos utilizados ao longo deste capítulo. Esta pasta serve como uma referência prática e acessível, permitindo que os leitores aprofundem sua compreensão dos conceitos apresentados. Os materiais contidos nesta pasta estão disponíveis no [Apêndice H](#), onde os interessados podem encontrar vídeos explicativos, exemplos práticos, planilhas, listas de exercícios, código VBA em formato Word e outros recursos que complementam o conteúdo discutido. Dessa forma, busca-se não apenas facilitar o aprendizado, mas também incentivar a aplicação dos conhecimentos adquiridos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo contribuir para o ensino de Matemática Financeira no Brasil, com foco na integração de recursos tecnológicos como ferramentas pedagógicas para a formação de alunos mais críticos e conscientes em suas decisões financeiras.

A proposta aqui apresentada reforça a importância da conexão entre a teoria matemática e a prática cotidiana, explorando conceitos aparentemente abstratos aos alunos, como progressões e sistemas de amortização, e suas aplicações nas decisões econômicas diárias. Além disso, ao adotar ferramentas amplamente acessíveis, como o software Excel, e explorar suas funcionalidades avançadas frequentemente subutilizadas, como o VBA (Visual Basic for Applications), demonstrou-se como a tecnologia pode potencializar o ensino, promovendo um aprendizado dinâmico e interativo.

Ao longo do estudo, foram realizadas abordagens teóricas com o objetivo de reduzir possíveis lacunas no ensino da Matemática Financeira, as quais frequentemente contribuem para a dificuldade de muitos indivíduos em gerenciar suas finanças de maneira eficaz, exacerbando problemas socioeconômicos. Nesse contexto, a abordagem centrada no elo *consciência-habilidade-decisão*, proposta nesta dissertação, busca não apenas aprimorar a compreensão teórica dos conceitos, mas também fornecer ferramentas práticas para a tomada de decisões assertivas em situações reais.

O impacto esperado desta dissertação vai além da sala de aula: busca-se preparar indivíduos para enfrentarem desafios econômicos com autonomia e responsabilidade. Contudo, desafios ainda permanecem. A implementação de práticas inovadoras, como as sequências didáticas sugeridas, requer capacitação docente e infraestrutura adequada, além de um esforço contínuo para integrar a Educação Financeira em um contexto mais amplo da Base Nacional Comum Curricular.

Por fim, espera-se que este trabalho inspire novas pesquisas e iniciativas no campo

da Educação Financeira, reafirmando a Matemática como uma ciência fundamental para a construção de uma sociedade mais equitativa e consciente. O ensino de Matemática Financeira, quando efetivamente estruturado, não é apenas uma ferramenta acadêmica, mas um agente transformador que possibilita aos alunos compreenderem e moldarem o mundo ao seu redor de maneira ética e sustentável.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base**. 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 15 de março de 2023. Citado nas páginas 24 e 81.

CVM. **Centro OCDE/CVM de Educação e Alfabetização Financeira para América Latina e o Caribe Recomendação sobre os Princípios e as Boas Práticas de Educação e Conscientização Financeira**. 2005. Disponível em: <www.oecd.org/finance/financial->. Citado na página 21.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar - Volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8ª. ed. São Paulo: Atual, 2013. Citado na página 43.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos de matemática elementar - Volume 11: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva**. 2ª. ed. São Paulo: Atual, 2013. Citado na página 23.

KLEINA, M. **Apostila de Programação em VBA**. [S.l.], 2022. <https://docs.ufpr.br/~marianakleina/Apostila_VBA.pdf>. Citado na página 86.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. d. O. **A matemática do ensino médio - Volume 2**. 5ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado na página 43.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado nas páginas 33, 43, 59, 66 e 71.

NETO, A. A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 12ª. ed. São Paulo: Atlas, 2012. Citado nas páginas 61 e 66.

_____. **Mercado financeiro**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2014. Citado na página 35.

SILVA, I. F. d. **Uma proposta de utilização da planilha excel no ensino-aprendizagem da Matemática Financeira**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2021. Citado nas páginas 87 e 90.

ATIVIDADE 1 - EXPLORANDO A MATEMÁTICA FINANCEIRA

Lista de Exercícios

EXPLORANDO A MATEMÁTICA FINANCEIRA

ESCOLA:
ALUNO:
TURMA:
PROFESSOR:

PERGUNTA NORTEADORA:

Qual o seu conhecimento atual sobre matemática financeira? Você acredita que é importante estudar sobre esse tema? Por quê?

- 1) Uma concessionária de carros novos apresenta a seguinte proposta para a compra de um automóvel:



- a) Se o comprador optar pela compra com desconto, qual o valor a ser pago?
- b) Se o comprador optar pela compra a prazo, qual o valor total desembolsado após finalização dos pagamentos?
- c) Qual a porcentagem de aumento do preço a prazo em relação ao preço à vista?
- 2) Um capital aplicado a juros simples produz um montante de R\$ 4.320,00 em cinco meses e, em nove meses, esse montante passa a valer R\$ 4.896,00. Diante do exposto, qual a taxa de juros mensal do investimento?
- 3) Juca analisou as opções de investimento entre os bancos em que possui conta e verificou que, no Banco A, um CDB promocional para primeiros investimentos oferece um retorno de 1,5% a.m. no primeiro semestre, sendo que, após esse período, o retorno é de 1% a.m. Se Juca fizer um investimento de R\$ 3.000,00 com duração de um ano, qual será o seu montante ao final do período?
- 4) (adaptado VUNESP) A família de um aluno estava se organizando financeiramente para comprar um celular para ele, no valor de R\$ 1.500,00. Ao realizarem buscas online para comprar o produto, notaram as seguintes condições: um desconto de 10% para pagamento utilizando PIX (à vista) ou um desconto de 6,8% para pagamento em cartão de crédito (a ser pago daqui a 30 dias). Admitindo que o valor desembolsado no pagamento à vista

possa ser aplicado pela família em uma aplicação de 30 dias, com um rendimento de 2,5%, responda:

- a) Quanto o comprador teria ao final da aplicação?
 - b) Qual a opção mais vantajosa para o comprador: pagar à vista ou aplicar o dinheiro e pagar em 30 dias? Justifique matematicamente.
- 5) (adaptado IEZZI, 2004) Devido a reflexos da covid-19, em 2021 a economia brasileira pôde verificar uma alta frequente da inflação. Naquele ano, as taxas de inflação foram 0,87%, 1,16% e 1,25% nos meses de agosto, setembro e outubro, respectivamente.
- a) Qual a taxa acumulada de inflação no período?
 - b) Qual deverá ser a taxa de inflação de novembro para que a taxa acumulada do quadrimestre seja de 4%?
 - c) Seria possível que a taxa do quadrimestre fosse menor que 3%? Justifique.

ATIVIDADE 2 - RESOLVENDO PROBLEMAS DE JUROS SIMPLES NO EXCEL

Lista de exercícios

CALCULADORA DE JUROS SIMPLES

- 1) Enzo fez um empréstimo para um amigo, no valor de R\$3.000,00, em que se estabeleceu, entre eles, uma taxa de 3,8% ao mês, a juros simples. Se Enzo recebeu o pagamento do empréstimo apenas um semestre depois, qual o montante recebido?
- 2) Carlos emprestou R\$2.500,00 a um amigo por um período de 6 meses, com um acordo de juros simples de 3% ao mês. Qual será o montante total que o amigo deverá devolver ao final do período?
- 3) Uma loja de materiais de construção vendeu mercadorias no valor de R\$8.000,00, com um prazo de pagamento de 4 meses. Ao final do prazo, o cliente pagou uma parcela única de R\$8.764,00. Sabendo que foi aplicada uma taxa de juros simples, qual foi a taxa mensal de juros cobrada pela loja?
- 4) Um pequeno comerciante precisou de R\$3.600,00 para recompor o estoque de seu estabelecimento, e obteve um empréstimo informal deste valor a uma taxa de juros simples de 7,2% ao mês. O pagamento será feito ao final do período de 9 meses. Desta forma, qual o valor de juros pagos neste empréstimo?
- 5) Uma fábrica renegociou o pagamento de uma dívida de R\$ 11.000,00 com um fornecedor, estabelecendo uma taxa de juros simples de 5,2% ao mês sobre o valor devido. O montante final de R\$ 13.860,00 foi quitado em uma única parcela. Com base nas condições acordadas, qual foi o tempo necessário para que a dívida fosse liquidada?

- 6) Ana adquiriu móveis para sua casa no valor de R\$ 5.400,00, com um acordo de pagamento em uma única parcela após 8 meses. O fornecedor aplicou uma taxa de juros simples de 1,2% ao mês sobre o valor inicial. Qual será o montante total a ser pago por Ana ao final do período?
- 7) Um agricultor obteve um empréstimo de R\$ 18.000,00 para custear a colheita de sua safra. O acordo foi feito com um empresário da região, que aplicou uma taxa de juros simples de 4,5% ao mês. Sabendo que o agricultor pagou um total de R\$ 21.240,00 ao final do prazo, qual foi o tempo de duração do empréstimo?
- 8) Um cliente atrasou o pagamento de uma conta em 5 meses, sendo que a empresa responsável aplicou uma taxa de juros simples de 1,8% ao mês como penalidade pelo atraso. Se o valor de juros pagos foi de R\$25,92, qual o valor inicial da conta?
- 9) A Escola Cidadão Consciente precisou financiar a compra de novos materiais didáticos no valor de R\$ 4.500,00. O fornecedor aplicou uma taxa de juros simples de 25,2% ao ano, mas, por contrato, a escola pagará no prazo de 8 meses. Qual será o montante pago pela escola ao final do período?
- 10) Vinícius, de 15 anos, trabalha como jovem aprendiz e conseguiu economizar o suficiente para pagar 70% do valor de um novo notebook, que custa R\$ 2.400,00. Para financiar o restante, pediu um empréstimo ao seu pai, que, visando ensinar-lhe educação financeira, aplicou uma taxa de juros simples de 0,6% ao mês.
 - a) Qual é o valor que o jovem aprendiz precisou emprestar de seu pai para completar a compra do notebook?
 - b) Vinícius pagou seu pai em uma única parcela, na qual o valor total de juros acumulados foi de R\$ 47,52. Qual foi o tempo de duração do empréstimo?

ATIVIDADE 3 - RESOLVENDO PROBLEMAS DE JUROS COMPOSTOS NO EXCEL

Lista de exercícios

CALCULADORA DE JUROS COMPOSTOS

- 1) Letícia aplicou R\$ 15.000,00 em um fundo de investimento que oferece retorno a uma taxa de juros compostos de 1,5% ao mês. Qual será o valor acumulado no fundo após 2 anos?
- 2) Uma pequena empresa depositou R\$ 54.000,00 em uma conta poupança com uma taxa de juros compostos de 0,7% ao mês. Após 18 meses, qual será o saldo disponível na conta?
- 3) Mariana pegou um empréstimo de R\$ 5.000,00 com uma instituição financeira, a uma taxa de juros compostos de 2,3% ao mês, para ser quitado em 10 meses. Ao quitar a dívida, qual o valor de juros acumulados que terá sido pago ao final do período?
- 4) Ederson abriu um fundo de previdência privada depositando R\$ 20.000,00, com uma taxa de juros compostos de 0,82% ao mês. Se João planeja resgatar R\$ 50.000,00, quanto tempo será necessário para atingir esse objetivo?
- 5) Os alunos do 3º ano do Ensino Médio estão realizando rifas para a formatura. Com o primeiro resultado obtido, aplicaram R\$ 1.200,00 em um Certificado de Depósito Bancário (CDB) que oferece uma taxa de juros compostos de 1,2% ao mês. Qual será o valor acumulado ao final de um trimestre? E ao final de um ano?
- 6) Camila adquiriu um celular no valor de R\$ 2.850,00. A loja ofereceu a possibilidade de começar o pagamento apenas 3 meses após a data da compra, aplicando uma taxa de juros compostos de 4,2% ao mês sobre o saldo devedor. Caso Camila opte por utilizar o

prazo disponibilizado pela loja, qual será o montante da dívida acumulada no início do pagamento?

- 7) Caiury está interessado em comprar um carro à vista, cujo preço atual é de R\$ 42.000,00 e, para tanto, realizou um investimento de R\$ 30.000,00 em uma LCI cuja taxa de retorno fixa estabelecida é de 0,9% ao mês, sob o regime de capitalização composta. Assumindo que o valor do automóvel não se altere, por quanto tempo Caiury precisará manter o investimento até fazer o saque e comprar o automóvel?
- 8) A irmã de Samuel conseguiu um prêmio de R\$ R\$350.000,00 em um sorteio de loteria. Ela está interessada em deixar esse dinheiro rendendo em um investimento, de modo que, ao completar um milhão de reais, consiga fazer retiradas constantes. Se o investimento escolhido tem retorno de 0,76% ao mês, após quanto tempo conseguirá atingir o seu objetivo?
- 9) Clara se esqueceu de pagar uma dívida de R\$ 700,00 do cartão de crédito, sendo que, após 12 meses, a empresa começou a fazer ligações de cobrança informando que o novo saldo da dívida era de R\$5.760,86. Qual a taxa mensal de juros compostos cobrada por essa instituição?
- 10) A mãe de uma Renata está sempre preocupada com a inflação. Para garantir que o seu dinheiro não perca o poder de compra, sempre faz investimentos de baixo risco, mas com retornos acima da inflação. Atualmente, possui um saldo em um investimento de CDB no valor de R\$ 12.444,80. Sabendo que esse investimento foi feito há 9 meses, com retorno mensal de 0,93% ao mês, qual foi o valor inicial da aplicação financeira?

ATIVIDADE 4 - APLICANDO PROGRAMAÇÃO PARA GERAR TABELAS DE AMORTIZAÇÃO

Lista de exercícios

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO E PROGRAMAÇÃO VBA

- 1) Uma empresa tomou um empréstimo no valor de R\$ 50.000,00, com taxa de juros de 1,5% ao mês, para ser quitado em 12 parcelas mensais. Qual o valor total pago em juros caso a empresa realizou o empréstimo pelo sistema PRICE? E caso tenha utilizado o sistema SAC?
- 2) Um financiamento de R\$ 120.000,00 deve ser quitado em 24 meses com taxa de juros de 2% ao mês. Qual o valor da prestação no primeiro e no último mês em cada sistema de amortização estudado (PRICE e SAC)?
- 3) Juliana pretende comprar uma casa por meio de programas federais de habitação e, para isso, verificou junto ao banco que há duas opções de financiamento, uma utilizando o sistema PRICE, outra utilizando o sistema SAC. O valor financiado será de R\$ 200.000,00, com prazo de 240 meses e taxa de juros de 0,4% ao mês.
 - a) Calcule o valor total das prestações no sistema PRICE.
 - b) Calcule o valor total das prestações no sistema SAC.
 - c) Considerando que Juliana não possui restrições com o valor da parcela, discorra sobre qual sistema seria mais vantajoso para ela e por quê.
- 4) Ao completar 18 anos, Marcos realizou um empréstimo com a finalidade de comprar uma moto e, para isso, optou pelo sistema de prestações constantes. Sabendo que o empréstimo

foi de R\$16.000,00, com taxa de juros de 1,6% ao mês e prazo de 30 meses, qual o saldo devedor restante após 10 meses?

- 5) O pai de Roberto pretende contratar um financiamento habitacional no valor de R\$ 300.000,00, com prazo de 180 meses e uma taxa de juros de 0,5% ao mês. Ao consultar o banco responsável, foram apresentadas duas opções de financiamento: o Sistema de Amortização PRICE (prestações constantes) e o Sistema de Amortização SAC (amortização constante).

Sabendo que o seu planejamento financeiro permite o pagamento de parcelas de até R\$ 3.000,00 e que o objetivo é minimizar o total de juros pagos ao final do financiamento, qual sistema de amortização seria mais vantajoso para ele?

- 6) Após atrasar o pagamento de seu cartão de crédito, uma cliente recebeu da instituição financeira uma proposta de renegociação de sua dívida, cujo valor era de R\$ 2.600,00. A oferta prevê um prazo de 10 meses para pagamento em prestações constantes, com uma taxa de juros de 7,5% ao mês. Qual será o valor de cada parcela e o total desembolsado pela cliente para quitar sua dívida?
- 7) Um empréstimo de R\$ 52.000,00 deve ser quitado em quatro anos, com taxa de juros de 2,3% ao mês e utilizando o sistema de amortização PRICE. Sabendo que o empréstimo foi contraído em fevereiro de 2024, com pagamento da primeira parcela em março, em qual mês e ano o saldo devedor será de R\$11.427,42?
- 8) Para tomar a melhor decisão sobre opções de financiamento, uma pessoa estava analisando algumas diferenças entre os sistemas PRICE e SAC. Para isso, considerou um empréstimo de R\$ 80.000,00, com taxa de juros de 2,7% ao mês, a ser quitado em 60 meses.
- a) Utilizando a programação VBA no excel, construa as tabelas de amortização para cada um dos sistemas em análise.
 - b) No primeiro mês, qual o valor de juros pagos em cada sistema? Explique o comportamento desses valores.
 - c) No segundo mês, qual o valor de juros pagos em cada sistema? Explique o comportamento desses valores.
 - d) A partir de qual período a prestação no sistema SAC se torna inferior à do sistema PRICE?
 - e) Em quais situações financeiras e pessoais cada sistema de amortização analisado seria mais indicado para essa pessoa?

CÓDIGO VBA PARA GERAR TABELA PRICE

```
Sub GerarTabelaPrice()  
    ' Definição de variáveis  
    Dim ValorEmprestimo As Double  
    Dim TaxaJuros As Double  
    Dim NumPeriodos As Integer  
    Dim Prestacao As Double  
    Dim SaldoDevedor As Double  
    Dim Juros As Double  
    Dim Amortizacao As Double  
    Dim TotalPrestacao As Double  
    Dim TotalJuros As Double  
    Dim TotalAmortizacao As Double  
    Dim n As Integer  
  
    ' Parâmetros de entrada - VBA Tabela Price  
    ValorEmprestimo = Range("C4").Value ' Valor do empréstimo  
    TaxaJuros = Range("C5").Value / 100  
    ' Taxa de juros mensal (conversão em número decimal)  
    NumPeriodos = Range("C6").Value ' Número de períodos (meses)  
  
    ' Limpar dados anteriores da tabela, se existirem  
    Dim LinhaInicio As Integer  
    LinhaInicio = 8 ' Linha onde a tabela começa  
    Dim LinhaFim As Integer  
    LinhaFim = LinhaInicio + 1000  
    ' Define o número máximo de períodos esperados, neste caso, 1000
```

```
' Limpa o conteúdo e a formatação do intervalo
With Range("E" & LinhaInicio & ":I" & LinhaFim)
.ClearContents      ' Limpa apenas o conteúdo
.ClearFormats       ' Limpa apenas a formatação
End With

' Definindo cabeçalho da tabela na célula E8 a I8
Range("E8").Value = "Período"
Range("F8").Value = "Prestação (R$)"
Range("G8").Value = "Juros (R$)"
Range("H8").Value = "Amortização (R$)"
Range("I8").Value = "Saldo Devedor (R$)"

' Formatar células de título em negrito e com cor
With Range("E8:I8")
.Font.Bold = True
.Interior.Color = RGB(255, 242, 204) ' Código da cor amarela
.HorizontalAlignment = xlCenter ' Centralizar texto
End With

' Definindo a largura das colunas
Columns("E:I").AutoFit

' Calcula o valor da prestação usando a fórmula do sistema PRICE
If TaxaJuros > 0 Then
Prestacao = ValorEmprestimo * (TaxaJuros / (1 - (1 + TaxaJuros) ^ -NumPeriodos))
Else
Prestacao = ValorEmprestimo / NumPeriodos ' Para taxa de juros 0%
End If

' Inicializa o saldo devedor com o valor do empréstimo
SaldoDevedor = ValorEmprestimo

' Inicializa totais
TotalPrestacao = 0
TotalJuros = 0
TotalAmortizacao = 0
```

```

' Preenchendo a tabela para cada período, começando na linha 9
For n = 1 To NumPeriodos
' Calcula os juros do período
Juros = SaldoDevedor * TaxaJuros

' Calcula a amortização do período
Amortizacao = Prestacao - Juros

' Atualiza o saldo devedor
SaldoDevedor = SaldoDevedor - Amortizacao

' Preenche a tabela com os valores calculados
Cells(n + 8, 5).Value = n ' Período
Cells(n + 8, 6).Value = Round(Prestacao, 2) ' Prestação
Cells(n + 8, 7).Value = Round(Juros, 2) ' Juros
Cells(n + 8, 8).Value = Round(Amortizacao, 2) ' Amortização
Cells(n + 8, 9).Value = Round(SaldoDevedor, 2) ' Saldo devedor

' Atualiza totais
TotalPrestacao = TotalPrestacao + Prestacao
TotalJuros = TotalJuros + Juros
TotalAmortizacao = TotalAmortizacao + Amortizacao

' Centraliza os valores
Cells(n + 8, 5).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 6).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 7).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 8).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 9).HorizontalAlignment = xlCenter
Next n

' Adiciona a linha de total
Dim LinhaTotal As Integer
LinhaTotal = NumPeriodos + 9

Cells(LinhaTotal, 5).Value = "Total"
Cells(LinhaTotal, 6).Value = Round(TotalPrestacao, 2) ' Total da Prestação
Cells(LinhaTotal, 7).Value = Round(TotalJuros, 2) ' Total dos Juros
Cells(LinhaTotal, 8).Value = Round(TotalAmortizacao, 2) ' Total da Amortização

```

```
Cells(LinhaTotal, 9).Value = 0 ' Saldo devedor final

' Centraliza a linha de total
With Range(Cells(LinhaTotal, 5), Cells(LinhaTotal, 9))
.Font.Bold = True
.Interior.Color = RGB(255, 228, 196)
.HorizontalAlignment = xlCenter
End With

' Formatar as células de total em reais
Cells(LinhaTotal, 6).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 6).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 7).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 7).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 8).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 8).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 9).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 9).Value, "R$ #,##0.00")

' Definindo bordas nas células preenchidas
With Range("E8:I" & LinhaTotal).Borders
.LineStyle = xlContinuous
.Weight = xlThin
.ColorIndex = 0
End With

MsgBox "Tabela Price gerada com sucesso!", vbInformation, "Concluído"
End Sub
```

CÓDIGO VBA PARA GERAR TABELA SAC

```
Sub GerarTabelaSAC()  
    ' Definição de variáveis  
    Dim ValorEmprestimo As Double  
    Dim TaxaJuros As Double  
    Dim NumPeriodos As Integer  
    Dim Prestacao As Double  
    Dim SaldoDevedor As Double  
    Dim Juros As Double  
    Dim Amortizacao As Double  
    Dim TotalPrestacao As Double  
    Dim TotalJuros As Double  
    Dim TotalAmortizacao As Double  
    Dim n As Integer  
  
    ' Parâmetros de entrada - VBA Tabela SAC  
    ValorEmprestimo = Range("C4").Value ' Valor do empréstimo  
    TaxaJuros = Range("C5").Value / 100  
    ' Taxa de juros mensal (conversão em número decimal)  
    NumPeriodos = Range("C6").Value ' Número de períodos (meses)  
  
    ' Limpar dados anteriores da tabela, se existirem  
    Dim LinhaInicio As Integer  
    LinhaInicio = 8 ' Linha onde a tabela começa  
    Dim LinhaFim As Integer  
    LinhaFim = LinhaInicio + 1000  
    ' Define o número máximo de períodos esperados, neste caso, 1000
```

```
' Limpa o conteúdo e a formatação do intervalo
With Range("K" & LinhaInicio & ":O" & LinhaFim)
.ClearContents      ' Limpa apenas o conteúdo
.ClearFormats      ' Limpa apenas a formatação
End With

' Definindo cabeçalho da tabela na célula E8 a I8
Range("K8").Value = "Período"
Range("L8").Value = "Prestação (R$)"
Range("M8").Value = "Juros (R$)"
Range("N8").Value = "Amortização (R$)"
Range("O8").Value = "Saldo Devedor (R$)"

' Formatar células de título em negrito e com cor
With Range("K8:O8")
.Font.Bold = True
.Interior.Color = RGB(255, 242, 204) ' Código da cor amarela
.HorizontalAlignment = xlCenter ' Centralizar texto
End With

' Definindo a largura das colunas
Columns("K:O").AutoFit

' Calcula o valor da amortização constante no sistema SAC
Amortizacao = ValorEmprestimo / NumPeriodos

' Inicializa o saldo devedor com o valor do empréstimo
SaldoDevedor = ValorEmprestimo

' Inicializa totais
TotalPrestacao = 0
TotalJuros = 0
TotalAmortizacao = 0

' Preenchendo a tabela para cada período, começando na linha 9
For n = 1 To NumPeriodos
' Calcula os juros do período
Juros = SaldoDevedor * TaxaJuros
```

```

' Calcula a prestação do período
Prestacao = Amortizacao + Juros

' Atualiza o saldo devedor
SaldoDevedor = SaldoDevedor - Amortizacao

' Preenche a tabela com os valores calculados
Cells(n + 8, 11).Value = n ' Período
Cells(n + 8, 12).Value = Round(Prestacao, 2) ' Prestação
Cells(n + 8, 13).Value = Round(Juros, 2) ' Juros
Cells(n + 8, 14).Value = Round(Amortizacao, 2) ' Amortização
Cells(n + 8, 15).Value = Round(SaldoDevedor, 2) 'Saldo devedor

' Atualiza totais
TotalPrestacao = TotalPrestacao + Prestacao
TotalJuros = TotalJuros + Juros
TotalAmortizacao = TotalAmortizacao + Amortizacao

' Centraliza os valores
Cells(n + 8, 11).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 12).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 13).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 14).HorizontalAlignment = xlCenter
Cells(n + 8, 15).HorizontalAlignment = xlCenter
Next n

' Adiciona a linha de total
Dim LinhaTotal As Integer
LinhaTotal = NumPeriodos + 9

Cells(LinhaTotal, 11).Value = "Total"
Cells(LinhaTotal, 12).Value = Round(TotalPrestacao, 2) ' Total da Prestação
Cells(LinhaTotal, 13).Value = Round(TotalJuros, 2) ' Total dos Juros
Cells(LinhaTotal, 14).Value = Round(TotalAmortizacao, 2) ' Total da Amortização
Cells(LinhaTotal, 15).Value = 0 ' Saldo devedor final

' Centraliza a linha de total
With Range(Cells(LinhaTotal, 11), Cells(LinhaTotal, 15))

```

```
.Font.Bold = True
.Interior.Color = RGB(255, 228, 196)
.HorizontalAlignment = xlCenter
End With

' Formatar as células de total em reais
Cells(LinhaTotal, 12).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 12).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 13).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 13).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 14).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 14).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 15).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 15).Value, "R$ #,##0.00")

' Definindo bordas nas células preenchidas
With Range("K8:O" & LinhaTotal).Borders
.LineStyle = xlContinuous
.Weight = xlThin
.ColorIndex = 0
End With

MsgBox "Tabela SAC gerada com sucesso!", vbInformation, "Concluído"
End Sub
```

ANÁLISE - CÓDIGO VBA PARA GERAR TABELA PRICE E SAC

G.1 Análise do Código VBA para Gerar a Tabela PRICE

Abaixo, apresentamos uma análise detalhada do código VBA utilizado para gerar a Tabela PRICE, explicando a função de cada parte em relação ao que está sendo executado no código.

G.1.1 Criação de sub-rotina

A estrutura Sub e End Sub define um procedimento em VBA, que é uma sequência de instruções que realiza uma tarefa específica. O termo Sub é uma abreviação de "Subroutine"(sub-rotina), que é um bloco de código que pode ser executado independentemente de outras partes do código.

- **Sub:** Esta palavra-chave inicia o procedimento e é seguida pelo nome do procedimento (neste caso, GerarTabelaPrice). O nome deve ser único dentro do módulo e deve seguir as regras de nomenclatura do VBA, que incluem começar com uma letra e não conter espaços. O uso de um nome descritivo, como GerarTabelaPrice, ajuda a identificar facilmente a função do código. Ainda, ajuda na associação da macro com outros elementos que podem fazer uso dela.
- **End Sub:** Esta palavra-chave indica o fim do procedimento. Tudo o que está entre Sub e End Sub é considerado parte do procedimento e será executado quando o procedimento for chamado. A estrutura "Sub . . . End Sub" é essencial para a organização do código, permitindo que várias sub-rotinas sejam definidas dentro de um único módulo, cada uma realizando uma tarefa distinta.

Utilizar uma sub-rotina possibilita que o código se torne mais modular e reutilizável. Além disso, essa abordagem facilita a depuração ¹ e a manutenção, já que cada parte do código pode ser testada de forma isolada.

G.1.2 Definição de variáveis

O comando `Dim` (abreviação de "Dimension") é utilizado no VBA para declarar variáveis, especificando seu nome e tipo de dado. A sintaxe utilizada, para tanto, é dada por:

```
Dim nome_da_variavel As Tipo
```

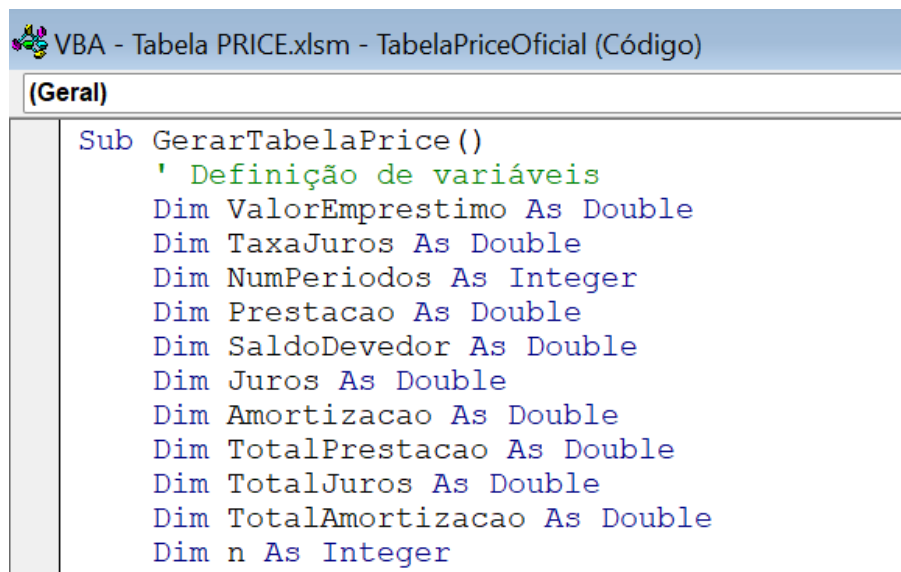
Onde Tipo pode ser:

- `Integer`: números inteiros (de -32768 a 32767)
- `Long`: inteiros mais longos (de -2147483648 a 2147483647)
- `Single`: número real de precisão simples (7 algarismos)
- `Double`: número real de precisão dupla (15 algarismos)
- `Boolean`: valores lógicos `True` (verdadeiro) ou `False` (falso)
- `String`: texto (caracteres) e deve ser escrito entre aspas duplas
- `Variant`: válido para qualquer tipo de dados

Assim, no código proposto, temos algumas variáveis definidas, como é possível ver na [Figura 9](#). Optou-se pela utilização do tipo de dado `Integer` quando a variável se tratava de número inteiro, enquanto que, ao abordar valores decimais, utilizou-se de `Double`, garantindo maior exatidão nos cálculos. ²

¹ A depuração é o processo de identificar e corrigir erros ou problemas no código de um programa.

² No código, observamos partes escritas em verde, que indicam comentários. Esses comentários são iniciados com um apóstrofo e servem para documentar o código, sem interferir na execução do programa.



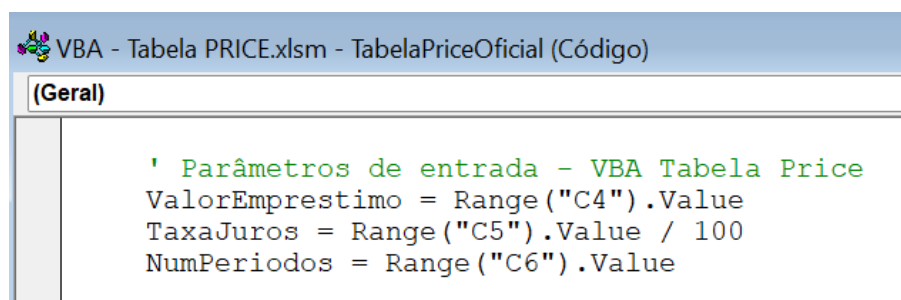
```
Sub GerarTabelaPrice()  
    ' Definição de variáveis  
    Dim ValorEmprestimo As Double  
    Dim TaxaJuros As Double  
    Dim NumPeriodos As Integer  
    Dim Prestacao As Double  
    Dim SaldoDevedor As Double  
    Dim Juros As Double  
    Dim Amortizacao As Double  
    Dim TotalPrestacao As Double  
    Dim TotalJuros As Double  
    Dim TotalAmortizacao As Double  
    Dim n As Integer
```

Figura 9 – Definição de variáveis - Tabela PRICE

G.1.3 Entrada de dados

A seguir, apresentamos uma parte essencial do código inserido no [Apêndice E](#). Essa parte lida com a captura de dados de entrada a partir de células específicas da planilha do Excel. Deste modo, permite ao programa acessar os valores inseridos pelo usuário, que são utilizados nos cálculos da Tabela PRICE. As variáveis ValorEmprestimo, TaxaJuros e NumPeriodos são definidas para armazenar, respectivamente, o valor do empréstimo, a taxa de juros mensal e o número de períodos de amortização, todos retirados das células designadas C4, C5 e C6.

A utilização dos comandos Range e Value torna essa interação possível, uma vez que Range é um comando capaz de acessar uma célula (ou um conjunto de células), enquanto que Value possibilita obter ou definir o valor de uma célula (ou um conjunto de células). Assim, esses comandos permitem que o código utilize dados dinâmicos fornecidos pelo usuário. A exemplo, ao definir o parâmetro de entrada para a variável TaxaJuros, o código obtém o valor da célula C5 e a divide por 100, representando-o em número decimal. O trecho do código envolvendo os parâmetros de entrada pode ser visto na [Figura 10](#).



```
' Parâmetros de entrada - VBA Tabela Price  
ValorEmprestimo = Range("C4").Value  
TaxaJuros = Range("C5").Value / 100  
NumPeriodos = Range("C6").Value
```

Figura 10 – Parâmetros de entrada - Tabela PRICE

G.1.4 Limpeza de dados anteriores

O código proposto neste trabalho define um intervalo de células onde a tabela será gerada, a partir da linha 8, e utiliza os métodos `ClearContents` e `ClearFormats` para limpar o conteúdo e a formatação das células dentro do intervalo especificado. Isso garante que dados antigos não interfiram nos novos cálculos. Na [Figura 11](#) é possível verificar comentários com maiores explicações sobre cada parte do código.

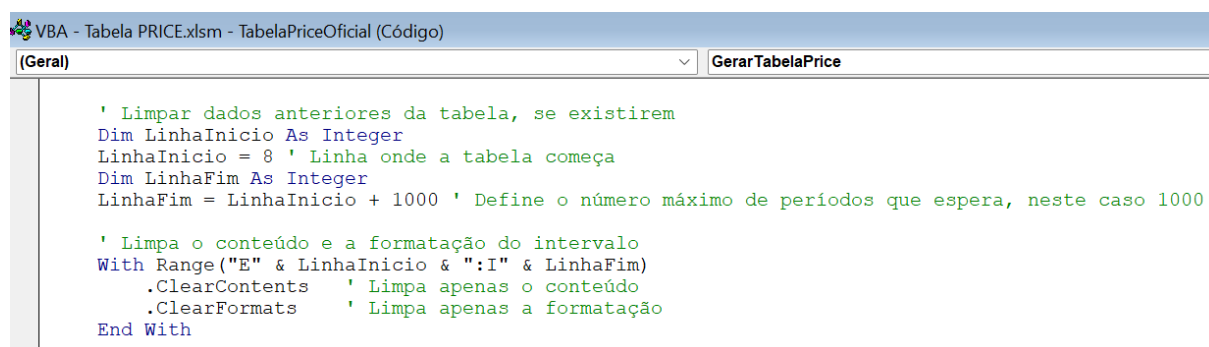


Figura 11 – Limpeza de Dados Anteriores - Tabela PRICE

A princípio, utilizando o comando `Dim`, é nomeada a variável `LinhaInicio`, que define a partir de qual linha a tabela PRICE será preenchida. Também é nomeada a variável `LinhaFim`, que é a soma da `LinhaInicio` + 1000 períodos esperados³. Assim, utilizando o comando `With` e `End With`, que se trata de um comando que visa simplificar o código, uma vez que irá referenciar um objeto específico, neste caso, o intervalo E8 a I1008, é possível limpar conteúdo e formatação deste intervalo ao utilizar os comandos `ClearContents` e `ClearFormats`.

G.1.5 Formatação da Tabela PRICE

Após a limpeza de dados anteriores, o código proposto no [Apêndice E](#) utiliza uma formatação para a Tabela PRICE. A programação sugerida pode ser alterada conforme interesse do usuário, neste caso, aluno ou professor.

Primeiramente, as células do cabeçalho são definidas em E8 a I8 e são formatadas para ter fonte em negrito (código `Font.Bold`), cor de fundo amarela (código `Interior.Color`), e o texto centralizado (código `HorizontalAlignment=xlCenter`). Além disso, a largura das colunas é ajustada automaticamente conforme valores a serem obtidos (código `AutoFit`).

Esses detalhes podem ser analisados no trecho do código em estudo, conforme [Figura 12](#). É importante ressaltar que os comandos `Range`, `Value` e `With` foram discutidos anteriormente, e desempenham um papel fundamental nos procedimentos realizados para a formatação proposta.

³ Na exploração e replicação deste código, a programação proposta pelo aluno ou professor pode utilizar menor quantidade de linhas, bem como alterar a partir de qual linha será projetada a tabela PRICE.

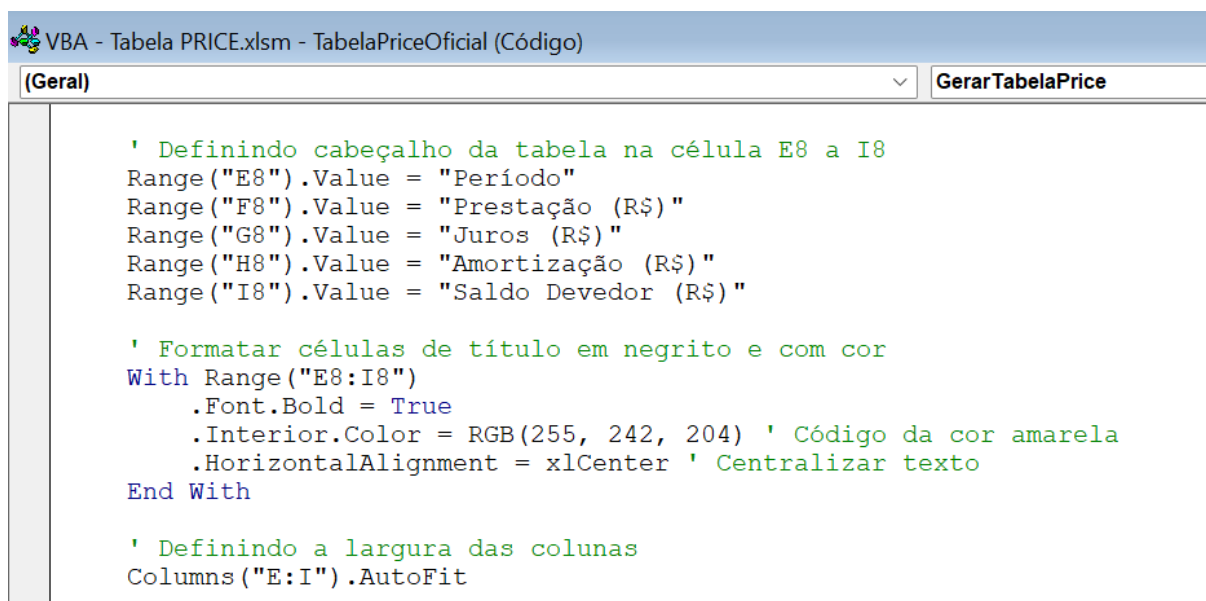


Figura 12 – Formatação - Tabela PRICE

G.1.6 Preenchimento da Tabela PRICE

Primeiramente, o cálculo da prestação é feito com base na fórmula do sistema Price. Se a taxa de juros for maior do que zero, a fórmula utilizada é dada conforme [Teorema 4.6.1](#). Caso contrário, a prestação é simplesmente o valor do empréstimo dividido pelo número de períodos. É possível verificar a linguagem de programação estabelecida no código, através da [Figura 13](#).

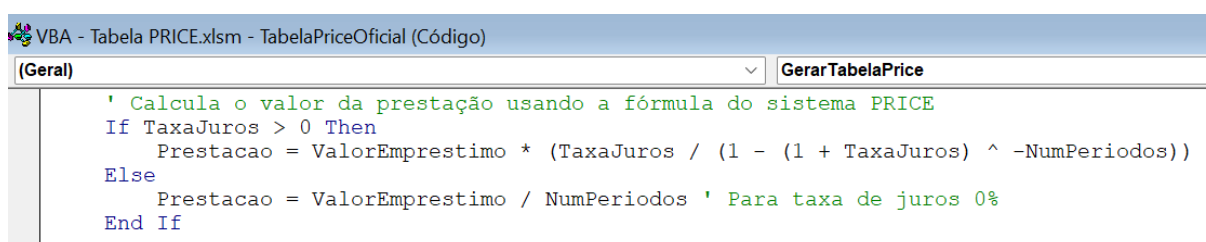


Figura 13 – Cálculo da Prestação - Tabela PRICE

Após definir o valor da prestação constante, a tabela estará pronta para ser preenchida utilizando um *loop*, que calcula e preenche a tabela de amortização da Tabela PRICE para cada período do financiamento. Para isso, são configurados os valores iniciais, conforme demonstrado no código da [Figura 14](#). Esse trecho do código tem a função de inicializar as variáveis essenciais para o cálculo da Tabela PRICE. O saldo devedor é definido como o valor total do empréstimo, visto que ainda não houve amortização; ressalta-se que o saldo devedor irá variar conforme as amortizações ocorrerem. Além disso, os totais de prestação, juros e amortização são inicializados com zero, garantindo que os valores sejam acumulados corretamente à medida que o código avança pelos períodos do financiamento.

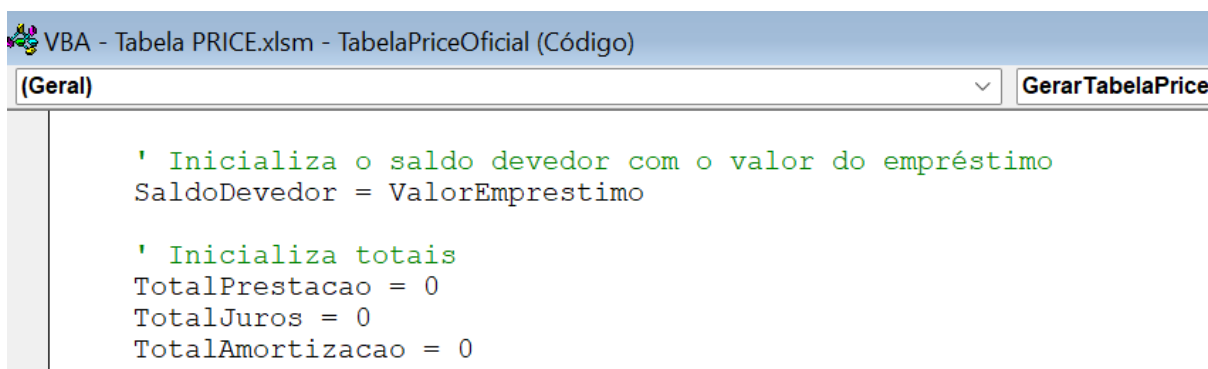


Figura 14 – Valores iniciais - Tabela PRICE

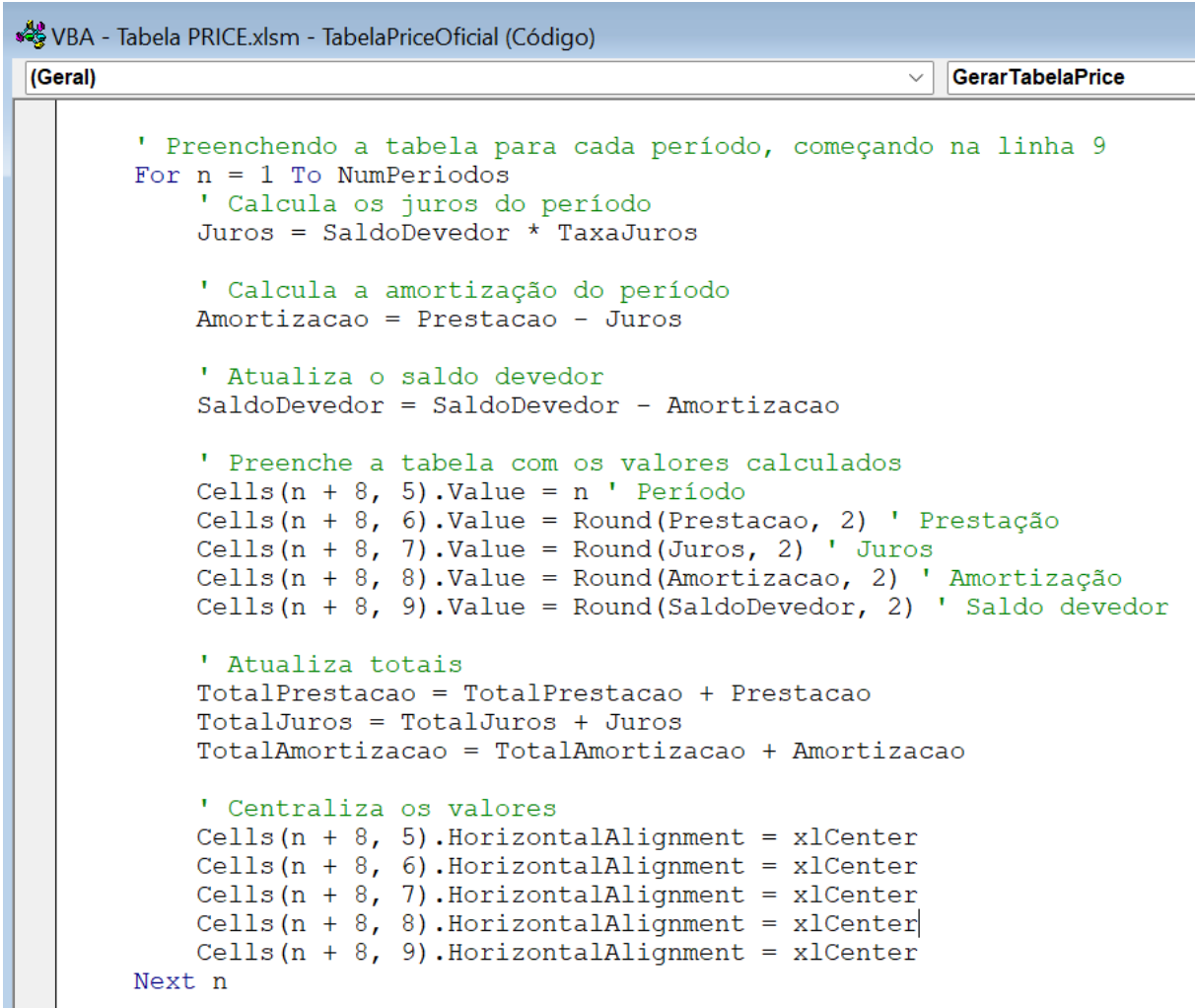
Então, utilizando a estrutura de um *loop*, o comando `For . . . Next` é empregado para iterar ⁴ sobre cada período de pagamento. Dentro de cada iteração, são realizados cálculos essenciais para a construção da tabela, incluindo os valores de juros, amortização e saldo devedor. Os juros são calculados com base no saldo devedor ao fim do período anterior e na taxa de juros mensal, enquanto a amortização é calculada como a diferença entre o saldo devedor do período e o valor da prestação previamente calculado. Ressalta-se que o valor da prestação não é atualizado em cada ciclo, uma vez que não no sistema PRICE ela é constante. Ainda, esses valores são arredondados para duas casas decimais utilizando a função `Round`, o que assegura maior precisão na apresentação dos resultados financeiros. Todo esse processo é implementado célula por célula, preenchendo cada linha da tabela de forma sequencial.

Além de realizar os cálculos, o código também gerencia o saldo devedor, que é reduzido pela amortização a cada período, refletindo fielmente o comportamento financeiro esperado. Os valores calculados são então organizados nas colunas correspondentes, sendo armazenados em células específicas da planilha. Para melhorar a apresentação, o código centraliza os dados horizontalmente em cada célula usando o comando `HorizontalAlignment` com a opção `xlCenter`, o que posiciona os valores no meio da célula. Essa centralização facilita a leitura e deixa a tabela mais organizada e visualmente clara. A tabela gerada segue a estrutura padrão com as colunas de período, prestação, juros, amortização e saldo devedor, mantendo uma disposição lógica e alinhada com os conceitos financeiros da tabela PRICE.

Por fim, o código não apenas preenche a tabela, mas também atualiza os totais de prestação, juros e amortização ao longo das iterações. Isso permite a consolidação dos valores ao final do processo, facilitando a análise global do financiamento. O leitor pode compreender melhor o funcionamento desse *loop* por meio da Figura 15, que ilustra visualmente os passos descritos. Caso surjam dúvidas sobre os cálculos envolvidos, como a determinação dos valores de prestação ou o impacto do saldo devedor nos juros, é recomendável consultar o exemplo 51,

⁴ "Iterar" significa repetir uma ação ou um conjunto de ações várias vezes, geralmente em uma sequência pré-definida. No contexto de programação, é o processo de passar por elementos de uma coleção (como números, objetos, ou células de uma planilha) ou de executar um bloco de código repetidamente, como em um *loop*.

que detalha o método matemático utilizado. Dessa forma, o código VBA fornece não apenas uma solução automatizada, mas também uma ferramenta didática para compreensão dos conceitos da tabela PRICE.



```

VBA - Tabela PRICE.xlsm - TabelaPriceOficial (Código)
(Geral) GerarTabelaPrice

' Preenchendo a tabela para cada período, começando na linha 9
For n = 1 To NumPeriodos
    ' Calcula os juros do período
    Juros = SaldoDevedor * TaxaJuros

    ' Calcula a amortização do período
    Amortizacao = Prestacao - Juros

    ' Atualiza o saldo devedor
    SaldoDevedor = SaldoDevedor - Amortizacao

    ' Preenche a tabela com os valores calculados
    Cells(n + 8, 5).Value = n ' Período
    Cells(n + 8, 6).Value = Round(Prestacao, 2) ' Prestação
    Cells(n + 8, 7).Value = Round(Juros, 2) ' Juros
    Cells(n + 8, 8).Value = Round(Amortizacao, 2) ' Amortização
    Cells(n + 8, 9).Value = Round(SaldoDevedor, 2) ' Saldo devedor

    ' Atualiza totais
    TotalPrestacao = TotalPrestacao + Prestacao
    TotalJuros = TotalJuros + Juros
    TotalAmortizacao = TotalAmortizacao + Amortizacao

    ' Centraliza os valores
    Cells(n + 8, 5).HorizontalAlignment = xlCenter
    Cells(n + 8, 6).HorizontalAlignment = xlCenter
    Cells(n + 8, 7).HorizontalAlignment = xlCenter
    Cells(n + 8, 8).HorizontalAlignment = xlCenter
    Cells(n + 8, 9).HorizontalAlignment = xlCenter
Next n
  
```

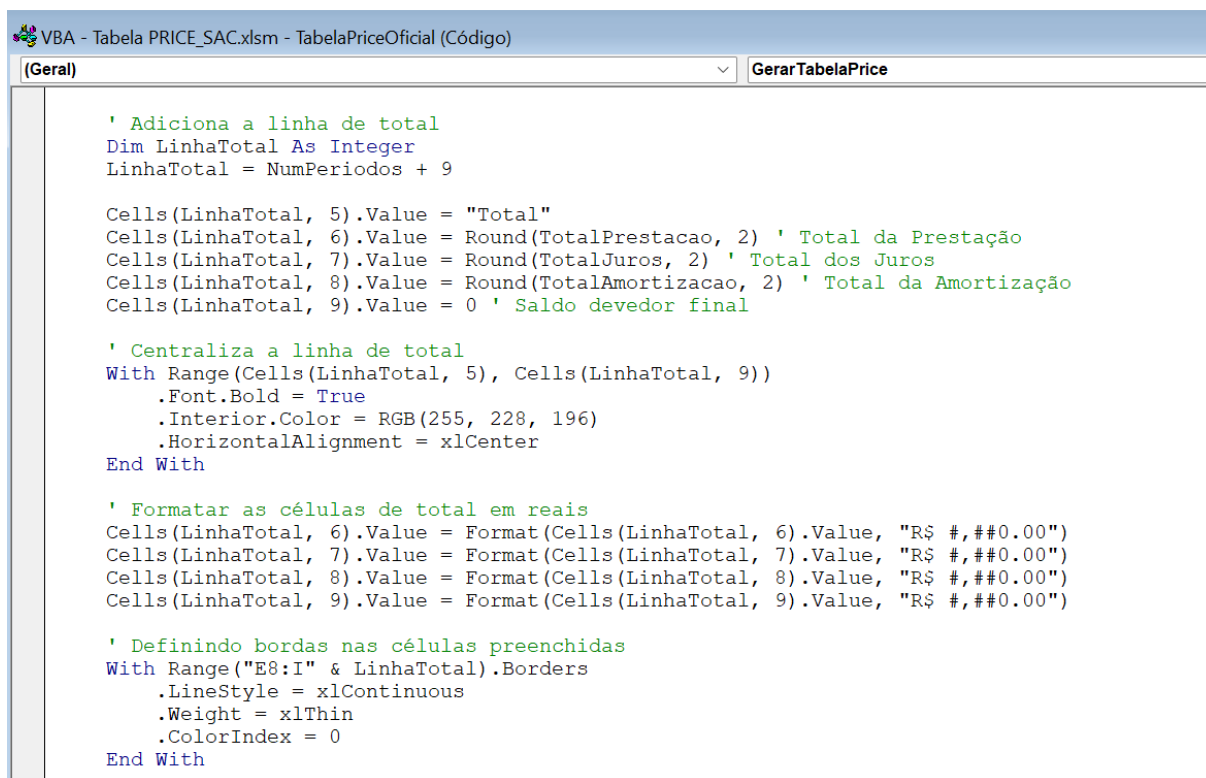
Figura 15 – Loop para Cálculo da Tabela PRICE

Após o término do *loop*, os totais de prestação, juros e amortização são calculados e exibidos em uma linha adicional na tabela. Essa linha é criada diretamente abaixo da última linha do *loop*, sendo declarada através do comando *Dim*, sendo posicionada a partir do cálculo: $\text{LinhaTotal} = \text{NumPeriodos} + 9$, onde *NumPeriodos* corresponde ao número de períodos do financiamento e 9 é o número inicial da tabela. Isso assegura que a linha de totais seja inserida corretamente, sem sobrescrever os dados anteriores. Também são utilizados os totais previamente definidos, conforme [Figura 9](#).

Assim como no cabeçalho, o código proposto aplica uma formatação especial a essa linha, destacando os valores consolidados. Para exibir os totais, cada célula dessa linha é preenchida com os valores acumulados ao longo do *loop*, e os números são formatados em moeda brasileira (R\$) utilizando o comando *Format*, que apresenta os valores com duas casas decimais. Além

disso, propomos o texto dessa linha de forma centralizada, utilizando-se de negrito e uma cor de fundo para diferenciá-la visualmente das demais linhas.

Por fim, o código proposto adiciona bordas a todas as células preenchidas da tabela, incluindo a linha de totais, visando garantindo um layout organizado. A programação desse trecho do código pode ser visualizada na [Figura 16](#).



```

' Adiciona a linha de total
Dim LinhaTotal As Integer
LinhaTotal = NumPeriodos + 9

Cells(LinhaTotal, 5).Value = "Total"
Cells(LinhaTotal, 6).Value = Round(TotalPrestacao, 2) ' Total da Prestação
Cells(LinhaTotal, 7).Value = Round(TotalJuros, 2) ' Total dos Juros
Cells(LinhaTotal, 8).Value = Round(TotalAmortizacao, 2) ' Total da Amortização
Cells(LinhaTotal, 9).Value = 0 ' Saldo devedor final

' Centraliza a linha de total
With Range(Cells(LinhaTotal, 5), Cells(LinhaTotal, 9))
    .Font.Bold = True
    .Interior.Color = RGB(255, 228, 196)
    .HorizontalAlignment = xlCenter
End With

' Formatar as células de total em reais
Cells(LinhaTotal, 6).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 6).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 7).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 7).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 8).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 8).Value, "R$ #,##0.00")
Cells(LinhaTotal, 9).Value = Format(Cells(LinhaTotal, 9).Value, "R$ #,##0.00")

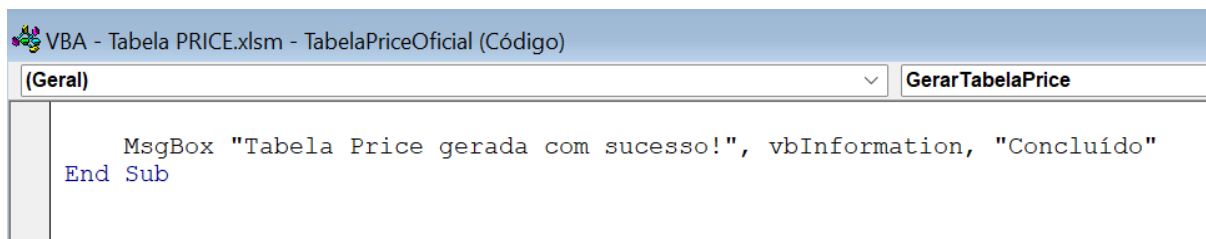
' Definindo bordas nas células preenchidas
With Range("E8:I" & LinhaTotal).Borders
    .LineStyle = xlContinuous
    .Weight = xlThin
    .ColorIndex = 0
End With

```

Figura 16 – Saldo total - Tabela PRICE

G.1.7 Mensagem de confirmação

Ao final do código há a inserção de uma mensagem de confirmação, que será exibida ao usuário indicando que a tabela foi gerada com sucesso. Também há a indicação da finalização do comando Sub, conforme [Figura 17](#).



```

MsgBox "Tabela Price gerada com sucesso!", vbInformation, "Concluído"
End Sub

```

Figura 17 – Mensagem de confirmação - Tabela PRICE

G.2 Análise do Código VBA para Gerar a Tabela SAC

Semelhantemente à programação do código que gera a Tabela PRICE, proposto no [Apêndice E](#), o código VBA proposto para gerar a Tabela SAC, disponível no [Apêndice F](#), possui a seguinte estrutura:

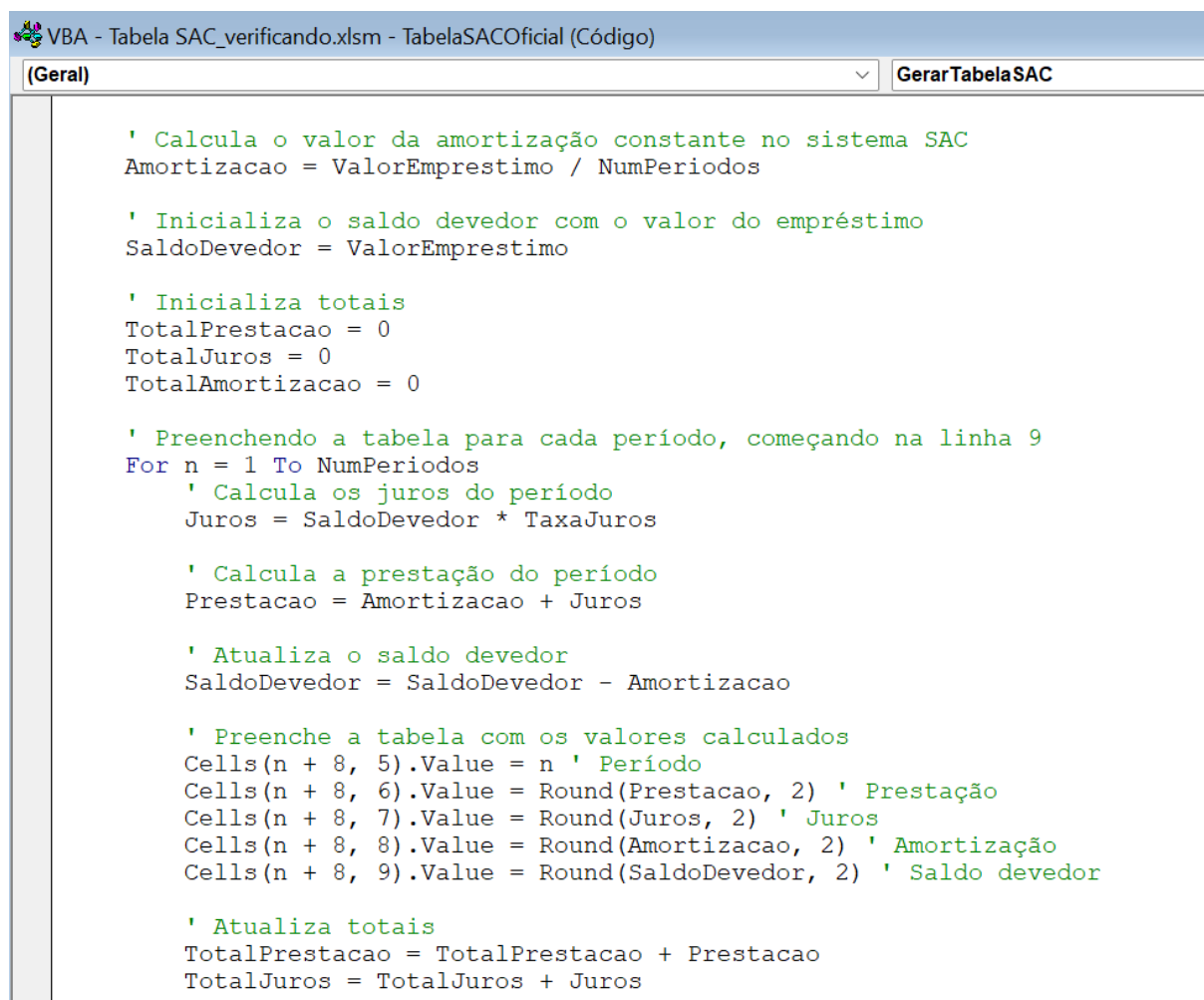
- Criação de sub-rotina
- Definição de variáveis
- Entrada de dados
- Limpeza de dados anteriores
- Formatação da Tabela SAC
- Preenchimento da Tabela SAC
- Mensagem de confirmação

Deste modo, dado que os comandos utilizados nas estruturas são idênticos, resta abordar os comandos específicos para Preenchimento da Tabela SAC. Conforme visto no [Teorema 4.6.2](#), neste sistema de financiamento as amortizações são constantes e, portanto, é a partir do seu cálculo que será montada a Tabela SAC. Assim, analisemos o trecho do código de programação, fornecido na [Figura 18](#), disponível a seguir.

Percebe-se que, ao comparar o código da Tabela SAC com o código da Tabela PRICE, disponível no [Apêndice E](#), observa-se que a principal diferença está na definição do valor da amortização. No código da Tabela SAC, a amortização é definida é dada por $A_k = \frac{D_0}{n}$, ou seja, é um valor constante. Em contraste, no código da Tabela PRICE, o primeiro valor a ser calculado era a prestação, que permanecia constante ao longo de todo o período de financiamento. Com base nesse valor da prestação, os demais componentes, como juros, amortização e saldo devedor, eram derivados. Da mesma forma ocorre com a Tabela SAC, cujo valores se derivam da amortização calculada.

Além disso, uma diferença adicional entre os códigos está nos intervalos de células utilizados para gerar a Tabela SAC, que são as células K8 até O8, enquanto que o código para gerar a Tabela PRICE se utilizava do intervalo das células E8 até I8.

Dessa forma, embora a abordagem de cálculo e a estrutura do código variem, a lógica geral de preenchimento da tabela e estrutura de *loop*, através do comando `For...Next`, é bastante semelhante entre as duas, com a principal diferença sendo a forma como os valores são inicialmente definidos (amortização constante na Tabela SAC, enquanto que a prestação é constante na Tabela PRICE). Não há, portanto, outras diferenças significativas que demandem uma análise mais aprofundada entre os códigos apresentados neste trabalho.



The screenshot shows a VBA editor window titled "VBA - Tabela SAC_verificando.xlsm - TabelaSACOficial (Código)". The window has a tab labeled "(Geral)" and a button labeled "GerarTabelaSAC". The code is written in VBA and includes comments in Portuguese. It calculates the constant amortization value for the SAC system, initializes the loan balance and totals, and then enters a loop to calculate the interest, payment, and update the balance for each period from 1 to NumPeriodos. The results are written to specific cells in the worksheet, and the totals are updated at the end of each iteration.

```
' Calcula o valor da amortização constante no sistema SAC
Amortizacao = ValorEmprestimo / NumPeriodos

' Inicializa o saldo devedor com o valor do empréstimo
SaldoDevedor = ValorEmprestimo

' Inicializa totais
TotalPrestacao = 0
TotalJuros = 0
TotalAmortizacao = 0

' Preenchendo a tabela para cada período, começando na linha 9
For n = 1 To NumPeriodos
    ' Calcula os juros do período
    Juros = SaldoDevedor * TaxaJuros

    ' Calcula a prestação do período
    Prestacao = Amortizacao + Juros

    ' Atualiza o saldo devedor
    SaldoDevedor = SaldoDevedor - Amortizacao

    ' Preenche a tabela com os valores calculados
    Cells(n + 8, 5).Value = n ' Período
    Cells(n + 8, 6).Value = Round(Prestacao, 2) ' Prestação
    Cells(n + 8, 7).Value = Round(Juros, 2) ' Juros
    Cells(n + 8, 8).Value = Round(Amortizacao, 2) ' Amortização
    Cells(n + 8, 9).Value = Round(SaldoDevedor, 2) ' Saldo devedor

    ' Atualiza totais
    TotalPrestacao = TotalPrestacao + Prestacao
    TotalJuros = TotalJuros + Juros
```

Figura 18 – Loop para Cálculo da Tabela SAC

SITES INFORMATIVOS E LINKS ÚTEIS

<<https://drcalc.net/Index.asp>> Página de consulta para dados e indicadores de índice, bem como parâmetros para automatização de cálculos envolvendo matemática financeira;

<<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>> Página oficial da Base Nacional Comum Curricular (BNCC);

<<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/oqueinflacao>> Site oficial do Banco Central do Brasil, com informações sobre inflação;

<**Pasta: Explorações Didáticas**> Pasta de recursos tecnológicos e atividades que foram propostas nesta dissertação, no Capítulo 5, disponível no Google Drive;

<support.microsoft.com/pt-br/office> Site da Microsoft Office contendo listagem de funções do Excel por categoria.

