



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAÍ

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAÍ - UFJ**  
**UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS E**  
**TECNOLÓGICAS**  
**PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL**

**VERUSKA DOLFINI BARBOSA**

**FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO**

**JATAÍ-GO**

**2021**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

### TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFJ

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Jataí (UFJ) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFJ), regulamentada pela Resolução CEPEC no 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data. O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFJ é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação  Tese

#### 2. Nome completo do autor:

VERUSKA DOLFINI BARBOSA

#### 3. Título do trabalho:

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);
  - b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
- O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;

- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Molina Gomes, Professora do Magistério Superior**, em 25/03/2022, às 14:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **VERUSKA DOLFINI BARBOSA, Discente**, em 28/03/2022, às 09:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2781969** e o código CRC **0A82A8EC**.

**VERUSKA DOLFINI BARBOSA**

**FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas (CIEXA), da Universidade Federal de Jataí (UFJ), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Adriana Aparecida Molina Gomes

**JATAÍ-GO  
2021**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFJ.

Barbosa, Veruska Dolfini  
FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO /  
Veruska Dolfini Barbosa. - 2021.  
75 f.

Orientadora: Profa. Dra. Adriana Aparecida Molina Gomes.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Jataí, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2021.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, abreviaturas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Ensino Remoto Emergencial. Funções Hiperbólicas. GeoGebra. 2. Tecnologias Digitais em Educação Matemática.. 3. Novo Ensino Médio.. 4. Funções Hiperbólicas.. 5. GeoGebra. I. Gomes, Adriana Aparecida Molina , orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO - REGIONAL JATAÍ

### ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **30** da sessão de Defesa de Dissertação de VERUSKA DOLFINI BARBOSA, que confere o título de Mestra em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

No dia dois de dezembro de 2021, a partir das **20h00 horas**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação integralmente por meio de tecnologias de comunicação à distância, intitulada “FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO” nas dependências da Universidade Federal de Jataí, cujos programas de pós-graduação stricto sensu, ora em funcionamento, estão provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás, em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES e a transferência da Biblioteca Digital de Dissertações e Tese (BDTD), justificando assim o aparecimento do nome das duas instituições nesse documento, uma no corpo do texto (UFJ), outra no cabeçalho (UFG). Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Adriana Aparecida Molina Gomes (UAE de Ciências Exatas / UFJ) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Irene Coelho de Araujo (Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul), membro titular externo; Professora Doutora Luciana Aparecida Elias (UAE de Ciências Exatas / UFJ), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca ( ) **fizeram (x) não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, sendo a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Adriana Aparecida Molina Gomes, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no dia dois de dezembro de 2021.

#### TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Molina Gomes, Professora do Magistério Superior**, em 03/12/2021, às 09:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luciana Aparecida Elias, Professor do Magistério Superior**, em 03/12/2021, às 09:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Irene Coelho de Araujo, Usuário Externo**, em 03/12/2021, às 11:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2529511** e o código CRC **AC618EEE**.

**Referência:** Processo nº 23070.063548/2021-75

SEI nº 2529511

## FOLHA DE MENÇÃO

Os Programas de Pós-Graduação stricto sensu, ora em funcionamento na Universidade Federal de Jataí (UFJ), em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, continuam provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás (UFG), no entanto, todos os elementos pré-textuais do trabalho apresentado estão identificados como Universidade Federal de Jataí, em função da migração da BDTD ter ocorrido a partir de 16 de agosto de 2021, e pelo fato das pesquisas e produções estarem sendo realizadas na UFJ.

Dedico este trabalho à minha família, minha base, minha vida, razão primeira de todas as coisas.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por toda benção recebida no aproveitamento da oportunidade de ter chegado até aqui.

Aos meus pais, pela vida e por cada incentivo durante essa caminhada.

Aos meus grandes amores, filhos e esposo, por estarem sempre ao meu lado, suportando a minha ausência, a minha correria e por vezes o meu mau humor.

A minha orientadora, professora Doutora Adriana Aparecida Molina Gomes, por toda ajuda, ensinamento e apoio durante a realização desse trabalho.

Ao meu professor/orientador da graduação, Professor Doutor Marco Aparecido Queiroz Duarte, pela colaboração e toda ajuda prestada durante a realização dessa pesquisa.

Aos meus colegas do PROFMAT, turma 2019, André Ângelo Ferrato Thomaz, Gisele Levulis Aguiar, Isaías Aristides Neto, Lucas Marques Rozendo, Marcieli Adamski Carvalho e Rafael Bento da Silva por todos os momentos de companheirismo durante essa árdua caminhada.

As professoras que compõe a banca examinadora, Irene Coelho de Araujo e Luciana Aparecida Elias pela participação e colaboração para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Minha eterna GRATIDÃO a todos.

Não basta ensinar ao homem uma especialidade. Porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma personalidade. É necessário que adquira um sentimento, um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto. A não ser assim, ele se assemelhará, com seus conhecimentos profissionais, mais a um cão ensinado do que a uma criatura harmoniosamente desenvolvida. Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias para determinar com exatidão seu lugar exato em relação a seus próximos e à comunidade.”

*Albert Einstein.*

[In: EISTEIN, Albert. Como vejo o mundo. Tradução de H.P.Andrade. 7.ed. Rio de Janeiro : Nova Fronteira, 1981.p.29. Título original: Mein Weltbild]

## RESUMO

Esta pesquisa teve início em um momento em que todos nós, professores e alunos, nos sentíamos apreensivos diante da situação atípica a qual vivenciávamos. A partir do momento em que a OMS decretou a situação de pandemia, causada pelo surgimento de um vírus de rápida propagação e letalidade, nos vimos obrigados a cumprir isolamento social e passamos a conviver em dois mundos, um presencial e outro digital. Diante desses novos fatores, as atividades educacionais passaram a ser realizadas em formato remoto através do uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) para que o ensino não fosse interrompido, deixando os estudantes cerceados de seus direitos de aprendizagem. Com a realização desse trabalho conseguimos perceber que apesar de todas as pesquisas e discussões voltadas para o uso de tecnologias nas aulas de matemática (ou outra componente curricular), abordados a mais de 30 anos, ainda não estávamos preparados para fazer uso delas. Nem mesmo os professores que já adotavam ambientes online nas suas práticas, imaginavam que seria necessária uma mudança tão rápida e emergencial, de forma quase obrigatória, devido à expansão do coronavírus. O objetivo dessa pesquisa é fazer um estudo sobre o momento pandêmico iniciado no ano de 2020, juntamente com o histórico sobre o uso das tecnologias digitais em educação matemática. A presente pesquisa foi realizada por meio de pesquisa qualitativa, do tipo levantamento bibliográfico com base em dissertações do PROFMAT que abordam a mesma temática, bem como um estudo sobre o Novo Ensino Médio. E que ao final conseguimos compreender que, é possível introduzir o tema nas aulas de matemática das disciplinas eletivas do Ensino Médio e com o intuito de auxiliar os professores da área, propomos uma sequência de atividades pedagógicas ao final desse trabalho, tendo o GeoGebra como principal aliado.

**Palavras-chave:** Ensino Remoto Emergencial. Tecnologias Digitais em Educação Matemática. Novo Ensino Médio. Funções Hiperbólicas. GeoGebra.

## ABSTRACT

This research began at a time when all of us, teachers and students, felt apprehensive about the atypical situation in which we were living. From the moment the WHO declared a pandemic situation, caused by the emergence of a virus of rapid spread and lethality, we were forced to comply with social isolation and started to live in two worlds, a face-to-face one and a digital one. Faced with these new factors, educational activities started to be carried out in a remote format through the use of Digital Information and Communication Technologies (ICT) so that teaching would not be interrupted, leaving students deprived of their learning rights. With this work we were able to realize that despite all the research and discussions about the use of technology in mathematics classes (or other curricular components), which have been going on for more than 30 years, we were still not prepared to use it. Not even the teachers who already adopted online environments in their practices, imagined that such a rapid and emergency change would be necessary, in an almost mandatory way, due to the expansion of the coronavirus. The purpose of this research is to make a study about the pandemic moment that started in the year 2020, along with the background about the use of digital technologies in mathematics education. The present research was carried out through qualitative research, of the bibliographical survey type based on dissertations from PROFMAT that address the same theme, as well as a study about the New High School. In the end, we were able to understand that it is possible to introduce the theme in mathematics classes of elective subjects in high school and in order to help teachers of the area, we propose a sequence of pedagogical activities at the end of this work, having GeoGebra as the main ally.

**Keywords:** Emergency Remote Learning. Digital Technologies in Mathematics Education. New High School. Hyperbolic functions. GeoGebra.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Horn-Book – Objeto de madeira com letras e textos impressos. . . .	24
Figura 2 – Ferule – Espécie de espeto de madeira mais grosso, que servia como apontador/indicador em sala de aula. Foi utilizado por volta de 1850 a 1870. . . . .	25
Figura 3 – (a) Ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília e (b) Gateway Arch, em St. Louis . . . . .	44
Figura 4 – Gráfico da Função Seno Hiperbólico. . . . .	45
Figura 5 – Gráfico da Função Cosseno Hiperbólico. . . . .	46
Figura 6 – Gráfico da Função Tangente Hiperbólica. . . . .	47
Figura 7 – Gráfico da Função Cotangente Hiperbólica. . . . .	48
Figura 8 – Gráfico da Função Secante Hiperbólica. . . . .	49
Figura 9 – Gráfico da Função Cossecante Hiperbólica. . . . .	50
Figura 10 – Interface Inicial do GeoGebra. . . . .	60
Figura 11 – Barra de Ferramentas do GeoGebra. . . . .	61
Figura 12 – Campo de Entrada. . . . .	62
Figura 13 – QR Code da atividade no GeoGebra. . . . .	63
Figura 14 – Atividade 1) a) . . . . .	64
Figura 15 – Atividade 1) b) . . . . .	65
Figura 16 – Atividade 3) . . . . .	66
Figura 17 – Atividade 3) . . . . .	67

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Aspectos e elementos característicos nas fases das tecnologias em Educação Matemática . . . . .	35
Tabela 2 – Dissertações do PROFMAT que abordam Funções Hiperbólicas . .	57

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

OMS	Organização Mundial da Saúde
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
ERE	Ensino Remoto Emergencial
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
NUESP	Núcleo de Educação Especial
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
CNE	Conselho Nacional de Educação
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
EAD	Educação a Distância
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
NEM	Novo Ensino Médio

## SUMÁRIO

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>1</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Minha história</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>Pandemia e Ensino Remoto Emergencial (ERE)</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>HISTÓRIA DAS TECNOLOGIAS</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2.1</b>	<b>Tecnologias</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>Tecnologias na Educação</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.3</b>	<b>Tecnologias na Matemática</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>2.4</b>	<b>As Quatro Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática</b>	<b>31</b>
<b>2.5</b>	<b>A Importância das Tecnologias no Ensino Remoto</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>NOVO ENSINO MÉDIO E A BNCC</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>3.1</b>	<b>Novo Ensino Médio (NEM)</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>FUNÇÕES HIPERBÓLICAS</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Estudo das funções hiperbólicas</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>4.2</b>	<b>As Funções Hiperbólicas</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>4.2.1</b>	Função Seno Hiperbólico . . . . .	<b>45</b>
<b>4.2.2</b>	Função Cosseno Hiperbólico . . . . .	<b>46</b>
<b>4.2.3</b>	Função Tangente Hiperbólica . . . . .	<b>47</b>
<b>4.2.4</b>	Função Cotangente Hiperbólica . . . . .	<b>48</b>
<b>4.2.5</b>	Função Secante Hiperbólica . . . . .	<b>49</b>
<b>4.2.6</b>	Função Cossecante Hiperbólica . . . . .	<b>49</b>
<b>4.3</b>	<b>Relações Fundamentais</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>4.4</b>	<b>Operações com Arcos</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>4.5</b>	<b>Abordagem das Funções Hiperbólicas nas Dissertações do PROF-</b> <b>MAT</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.5.1</b>	Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações . . . . .	<b>53</b>
<b>4.5.2</b>	Funções Hiperbólicas no Ensino Médio . . . . .	<b>53</b>
<b>4.5.3</b>	Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas . . . . .	<b>54</b>
<b>4.5.4</b>	As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações . . . . .	<b>54</b>
<b>4.5.5</b>	Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas . . . . .	<b>54</b>

4.5.6	Uma Proposta para a Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio . . . . .	55
4.5.7	As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio: Apresentação, Conceito e Aplicações . . . . .	55
4.6	<b>Considerações sobre as dissertações . . . . .</b>	56
5	<b>UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES NO GEOGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO . . . . .</b>	<b>59</b>
5.1	<b>O Software GeoGebra . . . . .</b>	59
5.2	<b>Configurações Iniciais . . . . .</b>	60
5.3	<b>Atividade . . . . .</b>	62
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>69</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>APÊNDICE A – ATIVIDADES PROPOSTAS . . . . .</b>	<b>76</b>

## INTRODUÇÃO

Em 11 de março de 2020 a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou a situação de Pandemia, originada pelo vírus Sars-Cov-2, dando início ao enfrentamento global da doença COVID-19<sup>1</sup>. Entre as consequências geradas por tal fato, podemos evidenciar as medidas de isolamento e quarentena que culminaram com o fechamento das escolas e início do Ensino Remoto Emergencial (ERE).

No Brasil, a contar deste momento, diversos órgãos envolvidos com a legislação brasileira publicaram leis, decretos, portarias e resoluções dispondo sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais, sendo estabelecidas normas excepcionais para o ano letivo de 2020 e 2021 nos níveis da Educação Básica e Superior.

Nesse cenário, podemos observar que adotar o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) bem como os softwares educacionais foi fundamental para que o ensino não fosse interrompido nesse momento, o que deixaria os alunos cerceados de seus direitos de aprendizagem, e dentro deste cenários os desafios foram grandes, pois os professores não tinham o preparo necessário para fazer uso de tecnologias e também não receberam apoio das escolas para melhoria nesse processo, com relação aos estudantes, em sua grande maioria não tinham acesso à internet e nem mesmo o apoio dos pais para auxiliá-los durante os momentos de realização das atividades.

Por motivos de urgência e a emergência de sua implantação, não se pode dizer que o início do ERE não tenha sido traumático para alguns e também que o processo de ensino e aprendizagem tenha sido satisfatório para todos. Pois, como evidenciam Moreira, Henrique e Barros (2020, p. 352): “ninguém, nem mesmo os professores que já adotavam ambientes online nas suas práticas, imaginava que seria necessária uma mudança tão rápida e emergencial, de forma quase obrigatória, devido à expansão do coronavírus”.

Sendo assim, o objetivo desse trabalho é fazer um estudo sobre esse momento pandêmico iniciado no ano de 2020, assim como investigar o uso de tecnologias digitais, em especial, na educação matemática e propor um estudo sobre Funções Hiperbólicas

---

<sup>1</sup>Segundo o Ministério da Saúde, a doença é uma infecção respiratória aguda, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global.

direcionado a alunos do Novo Ensino Médio, tendo o GeoGebra como principal aliado.

O trabalho foi realizado por meio de pesquisa qualitativa, do tipo levantamento bibliográfico, que, segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 54), trata-se de uma pesquisa elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico e internet.

Assim, tendo como alicerce desta pesquisa o momento da pandemia de COVID-19 que, para a educação, resultou na implantação do ERE, no primeiro capítulo, abordou-se as leis, decretos, portarias e resoluções que surgiram após a declaração de pandemia, evidenciamos a importância das TDIC para que esse momento fosse atravessado com o mínimo possível de prejuízos para estudantes de todos os níveis, principalmente para a educação básica.

No segundo capítulo destacamos as tecnologias, as tecnologias na educação e as tecnologias na matemática, dando ênfase as quatro fases das tecnologias na educação matemática, citadas no livro *Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento* de Marcelo de Carvalho Borba, Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva e George Gadanidis (2020).

No terceiro capítulo construiu-se uma abordagem sobre o novo Ensino Médio e a BNCC.

No quarto capítulo, as Funções Hiperbólicas foram apresentadas baseando-se em pesquisa anterior de Barbosa (2014), autora dessa dissertação de mestrado, que se faz um estudo das primeiras investigações a respeito do tema, na sequência são apresentadas as funções, seus gráficos, relações fundamentais e operações com arcos, e também apresentamos, um estudo sobre dissertações do PROFMAT que envolvem o tema Funções Hiperbólicas, visando ampliar a viabilidade e importância do estudo dessas funções já no Ensino Médio com destaque a motivação de aplicações em nosso cotidiano.

Por fim, como produto deste trabalho, propomos uma sequência de atividades para o ensino de Funções Hiperbólicas utilizando o GeoGebra, o software é apresentado brevemente, bem como algumas de suas funcionalidades, de forma a mostrar como pode ser manuseado sem nenhuma complexidade por estudantes e professores da educação básica ou do ensino superior.

Esperamos que os estudos realizados possam contribuir como fonte de estudos

a respeito do momento ao qual estamos inseridos, bem como ampliar a viabilidade e importância do estudo das Funções Hiperbólicas já no Ensino Médio com destaque a motivação de aplicações em nosso cotidiano.

## 1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Neste capítulo traçaremos um paralelo entre a história do meu ingresso na docência e no programa PROFMAT até o período de aulas remotas, passando por toda a legislação brasileira que se seguiu a partir do momento em que a OMS dispôs sobre a situação de pandemia, causada pelo surgimento de um vírus de rápida propagação e letalidade que ocasionou um grande impacto mundial.

### 1.1 Minha história

Desde pequena, matemática sempre foi a minha paixão. No colégio, sempre tive bastante familiaridade com os conteúdos matemáticos, quando concluí o ensino médio, meu pai me incentivou bastante a optar pela graduação em matemática. Porém, pelas intercorrências da vida, só ingressei no curso posteriormente, como portadora de diploma, após cursar Ciências Contábeis, em abril de 2011, e concluí o curso em dezembro de 2014.

Após a conclusão da graduação, no ano seguinte, trabalhei como professora substituta em dois colégios municipais na cidade de Cassilândia, MS.

Em 2016, fui convidada por uma professora da graduação, que na época era Técnica do Núcleo de Educação Especial (NUESP), para trabalhar em uma Escola Estadual, como professora de apoio em ambiente escolar. Fiz um curso de especialização na área de Educação Especial e até hoje trabalho com alunos especiais, atuando como professora de apoio de um aluno com paralisia cerebral, que está cursando o 9º ano do ensino fundamental e de um aluno autista, que está cursando o 6º ano do ensino fundamental.

No ano de 2018 comecei a fazer parte do quadro docente de um Colégio da rede particular. Ministrava aulas para o Ensino Fundamental, anos finais, de 6º a 9º ano; destaco que faço parte do quadro docente desta instituição até os dias de hoje.

Ainda durante o curso de graduação, uma colega de turma e eu, sonhávamos em ingressar, juntas, no mestrado, sonho que comecei a concretizar no ano de 2019, infelizmente, sem a companhia da minha colega, que escolheu trilhar outros caminhos.

Ao concluir a graduação queria dar continuidade ao estudo realizado com o trabalho de conclusão de curso (TCC), cujo título é Funções Hiperbólicas e Aplicações.

Assim, conversei com a orientadora para aprofundarmos a discussão do TCC da graduação no trabalho a ser desenvolvido no mestrado. Segundo o Regimento do PROFMAT, o trabalho de conclusão deve estar de acordo com temas específicos do currículo de Matemática da Educação Básica, por esse motivo resolvi unir o tema com o momento ao qual vivenciamos a partir de 2020, a situação de pandemia.

Por se tratar de um assunto atual, tendo em vista que não estávamos preparados tecnologicamente, nem teoricamente para uma mudança tão drástica em nossas vidas e em nossa prática pedagógica, tornando-se necessário que ocorressem pesquisas e discussões voltadas ao tema deste trabalho de conclusão de curso.

Tomazinho (2020) destaca que, a mudança para o Ensino Remoto Emergencial exige que os professores assumam mais controle do processo de criação, desenvolvimento e implementação de cada aula. Justificando assim a utilização do Software GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino remoto. Software que conheci com maior ênfase durante as aulas remotas no PROFMAT.

## **1.2 Pandemia e Ensino Remoto Emergencial (ERE)**

Em dezembro de 2019, a identificação de um novo vírus, nomeado de SARS-CoV-2 e causador da doença COVID-19, ocasionou um grande impacto mundial. No Brasil, em 6 de fevereiro de 2020, o presidente da república sancionou a Lei nº 13.979 (BRASIL, 2020a), adotando medidas de isolamento e quarentena, com objetivo de proteção coletiva.

No dia 11 de março de 2020 a OMS declara situação de pandemia e em 20 de março, o congresso nacional brasileiro publicou o Decreto Legislativo nº 6, de 2020 (BRASIL, 2020b), reconhecendo a ocorrência do estado de calamidade pública.

Tal situação exigiu do mundo como um todo, que fossem tomadas medidas extremas para o combate e transmissão do novo vírus. No Brasil, tudo isso culminou com o fechamento das escolas, a partir das portarias nº 343, de 17 de março de 2020 (BRASIL, 2020c) e nº 544, de 16 de junho de 2020 (BRASIL, 2020d) e da Medida Provisória nº 934, de 1º de abril de 2020 (BRASIL, 2020e), dispondo sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais e estabelecendo normas excepcionais para o ano letivo nos níveis da Educação Básica e da Educação Superior. De acordo com o Parecer CNE/CP nº 19/2020 (BRASIL, 2020g) aprovado em 08 de

dezembro de 2020, *ipsis litteris*:

O Conselho Nacional de Educação (CNE), visando a orientar a integração curricular e a prática das ações educacionais em nível nacional, na condição de órgão normativo e de atividade permanente na estrutura da educação nacional, previsto no § 1º do artigo 9º da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que “estabelece as diretrizes e bases da educação nacional” (LDB), emitiu três documentos pertinentes: – Parecer CNE/CP nº 5, de 28 abril de 2020, que tratou da “reorganização do Calendário Escolar e da possibilidade de cômputo de atividades não presenciais para fins de cumprimento da carga horária mínima anual, em razão da Pandemia da COVID-19”; – Parecer CNE/CP nº 9, de 8 de junho de 2020, que retomou essa temática, com o reexame do Parecer CNE/CP nº 5/2020; e – Parecer CNE/CP nº 11, de 7 de julho de 2020, que definiu “Orientações Educacionais para a Realização de Aulas e Atividades Pedagógicas Presenciais e Não Presenciais no contexto da Pandemia (CNE/CP, 2020, p. 2-3).

Para estabelecer normas educacionais excepcionais a serem adotadas durante o estado de calamidade pública, foi sancionada a Lei nº 14.040, de 18 de agosto de 2020 (BRASIL, 2020f), que define em parágrafo único do artigo 1º, que “o CNE editará diretrizes nacionais com vistas à implementação do disposto nesta Lei”. Em função deste mandamento, em 11 de dezembro de 2020 foi publicada no Diário Oficial da União, a Resolução CNE/CP nº 2 de 10 de dezembro de 2020 (BRASIL, 2020h) que instituiu as Diretrizes Nacionais orientadoras dos sistemas de ensino para a implementação do disposto na Lei pelas instituições e redes escolares de Educação Básica e Instituições de Educação Superior, públicas, privadas, comunitárias e confessionais. Ainda nesta mesma resolução, o CNE, regulamentou também o uso de mídias sociais de longo alcance (WhatsApp, Facebook, Instagram, etc.) para estimular e orientar os estudos, pesquisas e projetos diante do novo cenário da educação.

Assim, regulamentado por toda a legislação, passou a vigorar nas escolas brasileiras o Ensino Remoto Emergencial (ERE), como podemos perceber no próprio nome, esta nova modalidade de ensino foi instaurada em caráter de emergência e de forma remota, devido as exigências de isolamento e distanciamento social estabelecidas como medidas preventivas de propagação do vírus e por consequência da doença COVID-19.

Conforme Behar (2020), podemos evidenciar que o ERE é uma modalidade de ensino que pressupõe o distanciamento geográfico de professores e alunos e foi ado-

tado de forma temporária nos diferentes níveis de ensino por instituições educacionais do mundo inteiro para que as atividades escolares não fossem interrompidas.

Assim, diferente da Educação a Distância, o ensino remoto se caracteriza pela interação de professor e aluno, seguindo os mesmos horários das aulas presenciais, variando de instituição para instituição. A ideia é que, se mantenha a rotina da sala de aula, porém em ambiente virtual, com o auxílio das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), tais como as plataformas digitais para videoconferências <sup>2</sup> ou por meio de aplicativos multiplataformas <sup>3</sup>.

Nesse cenário, o desafio assumido pelos professores foi grande, sendo necessário criatividade e o uso de diversas estratégias para que fosse possível desenvolver as atividades necessárias para o andamento do ano letivo. Já para os estudantes, as principais dificuldades foram a insuficiência de internet e aparelhos tecnológicos como Notebook, Computadores e Celulares.

Diante da situação desenhada até aqui, podemos observar o quanto foi importante o papel das TDIC durante o momento pandêmico e como elas foram cruciais para que o ensino não fosse interrompido em um momento de isolamento social e de escolas fechadas, deixando os alunos cerceados de seus direitos de aprendizagem.

---

<sup>2</sup>Como exemplos de Plataformas digitais para videoconferências, podemos citar: Google Meet, Zoom, Skype, Microsoft Teams, WhatsApp, entre outros.

<sup>3</sup>Entre os aplicativos multiplataformas, os quais foram amplamente usados durante o ERE, podemos destacar: WhatsApp, Telegram, Google Classroom.

## 2 HISTÓRIA DAS TECNOLOGIAS

Nesse capítulo, faremos um levantamento sobre o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) na Educação, destacando a sua importância e a sua presença cada vez maior nas aulas de Matemática, até os dias atuais, quando elas se tornaram indispensáveis por conta do ensino remoto.

### 2.1 Tecnologias

De acordo com o Dicionário da Língua Portuguesa, Aurélio, tecnologia é o conjunto de conhecimentos, especialmente princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade. Ou seja, tecnologia é um conjunto de métodos, técnicas, processos e procedimentos utilizados na atividade humana. Se resumindo em tudo aquilo que o homem criou para melhorar a sua vida cotidiana.

Então, tecnologia não se trata apenas de computadores, celulares, Tvs de última geração, entre outros exemplos os quais poderíamos citar. A verdade é que a tecnologia sempre existiu ao longo da evolução humana. Segundo Altoé e Silva (2005),

as tecnologias estão presentes em todos os lugares e em todas as atividades que realizamos. Isso significa que para executar qualquer atividade necessitamos de produtos e equipamentos, que são resultados de estudos, planejamentos e construções específicas. Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplica ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade nós chamamos de tecnologia. (ALTOÉ E SILVA, 2005, p.03)

Assim, podemos dizer que a tecnologia está presente na evolução da humanidade desde a pré-história. Como exemplo de técnicas desenvolvidas nesse período temos o domínio do fogo, a criação de ferramentas de pedra, a invenção da roda, entre outras, criadas a fim de priorizar a sobrevivência humana.

Foi a partir do século XVII, conforme presenciamos nas aulas de História, na educação básica, que a tecnologia passou a avançar com mais intensidade e rapidez. Com a revolução industrial, o homem deixou a vida essencialmente agrária e começou a vivenciar a vida nos grandes centros. A partir de então observou-se diversas inovações que mudaram o mundo: máquina a vapor, ferrovias, geradores, motores

elétricos, automóveis, vacinas, luz elétrica, fotografia, telefone, rádio, avião, televisão, radar, computador, energia nuclear, satélite, internet, celular, notebook, televisão de plasma, câmera digital, entre outros.

No âmbito educacional, o filósofo Bruzzi <sup>4</sup> (2016) evidencia que a educação vive às voltas com as tecnologias desde 1650. Exemplo é o aparato Horn-Book (Figura 1), que se tratava de uma madeira com letras impressas utilizada na época colonial para alfabetizar crianças, partindo da leitura e escrita de textos religiosos.

Figura 1 – Horn-Book – Objeto de madeira com letras e textos impressos.



Fonte: Foto retirada da internet. (<https://medievalbooks.nl/tag/hornbook/>)

Outro exemplo descrito pelo autor e datado de 1850 a 1870 é o Ferule (Figura 2), ferramenta usada como apontador/indicador em salas de aula. Tanto o Horn-Book, como o Ferule, tinham dupla aplicação, serviam tanto para aprendizagem como para

<sup>4</sup>Filósofo Demerval Bruzzi, ex-diretor de Criação de Conteúdo e Formação de Professores em EAD do Ministério da Educação durante o período de janeiro de 2008 a junho de 2011.

castigo físico imputado aos alunos dispersos e/ou que não conseguiam aprender as lições.

Figura 2 – Ferule – Espécie de espeto de madeira mais grosso, que servia como apontador/indicador em sala de aula. Foi utilizado por volta de 1850 a 1870.



Fonte: Foto retirada da internet.

(<https://www.timetoast.com/timelines/transformacoes-tecnologicas-produzidas-pelo-homem>)

Como destacamos anteriormente, foi a partir do século XVII que passamos a observar os maiores avanços tecnológicos, a ascensão do capitalismo e a Revolução Industrial, impulsionaram a criação de novas tecnologias na educação, como o quadro negro, o lápis, o retroprojctor, a calculadora, a caneta esferográfica, entre outros, até chegar finalmente à era do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), nos anos 2000.

Assim, com a popularização dos computadores, dispositivos eletrônicos e internet, se deu origem a uma grande quantidade de equipamentos e softwares que transformaram a sala de aula.

## 2.2 Tecnologias na Educação

Daremos início a este tópico diferenciando os termos: Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), para isso, iremos destacar as diferenças observadas entre uma e outra apresentadas

pela autora Marcela Dâmaris, em seu Blog <sup>5</sup>:

As **Tecnologias da Informação e Comunicação**<sup>6</sup> correspondem as tecnologias que interferem e mediam os processos informacionais e comunicativos das pessoas, como por exemplo o rádio, o jornal e a TV. E as **Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação**<sup>7</sup> são um conjunto de diferentes mídias que se diferenciam pela presença de tecnologia digital, ou seja, equipamentos que se utilizam do processamento de dados armazenados e funcionam através da decodificação de códigos numéricos. (DAMARIS, 2019)

Para Pantoja Corrêa e Brandemberg

O termo digital, deriva de dígito, do latim digitus, que significa dedo, de modo que ao ser inserido em tecnologias, quer dizer que temos acesso a milhares de informações ao simples toque dos dedos, mas não somente isso, também se refere ao tipo de recepção de sinal que é digital e não analógico, bem como tem seu significado ligado ao conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, neste caso em zeros e uns (0 e 1), o chamado sistema binário de representação, que é a linguagem que os dispositivos reconhecem. (PANTOJA CORRÊA; BRANDEMBERG, 2020, p. 37)

Assim, utilizaremos, nesse trabalho, o termo TDIC para nos referirmos as tecnologias utilizadas nas escolas, em especial, no ensino de Matemática no contexto da pandemia.

Em nosso dia a dia, podemos observar que nossas crianças e jovens estão cada vez mais conectados às tecnologias digitais, configurando-se como uma geração que estabelecem novas relações com o conhecimento e que, portanto, requer que transformações aconteçam na escola. (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2017)

Segundo Bruzzi (2016),

uma tecnologia educacional como o computador ou a internet, por meio do recurso de redes interativas, favorece novas formas de acesso

---

<sup>5</sup>Para maiores informações, sugerimos consultar o Blog: <https://marceladamaris.com/tecnologia-tdic-tdic-e-te-qual-e-a-diferenca-entre-esses-terminos/>. Marcela é Mestre em Educação pela Universidade Federal de Lavras. Trabalha com formação de professores para uso de tecnologias digitais e coordenou a área de tecnologia educacional da Secretaria Municipal de Educação de Pouso Alegre, MG, no período de 2009 a 2016.

<sup>6</sup>Equipamentos antigos, como videocassete, telefone fixo usavam uma tecnologia analógica, pois os sinais de áudio ou vídeo eram traduzidos em pulsos elétricos e, portanto, são TIC.

<sup>7</sup>Já os projetores multimídia e os telefones celulares atuais, são TDIC's, pois convertem os sinais em zeros e uns.

à informação e à comunicação, e amplia as fontes de pesquisa em sala de aula, criando novas concepções dentro da realidade atual, abrindo espaço para a entrada de novos mecanismos e ferramentas que facilitem as ligações necessárias que atendam o novo processo cognitivo do século XXI. (BRUZZI, 2016, p. 480)

Nesta mesma perspectiva, Nogaro e Cerutti (2017), preocupados com o aluno que não tem um computador próprio e nem acesso à internet, observam que

o mundo todo está conectado e a tecnologia está cada vez mais presente na vida das pessoas, porém, nem todos têm, de fato, acesso a ela. Há uma desigualdade significativa, enquanto uma pequena parte da população tem acesso à internet e variadas ferramentas tecnológicas, outra parte bem maior da população quanto muito tem acesso a computadores em locais públicos, e acesso restrito a internet e muitos não tiveram contato com computadores e internet na escola.” (NOGARO; CERUTTI, 2017, p. 1598)

Diante de tal realidade, Mazon (2012, p. 37 apud GEWEHR, 2016, p. 43) destaca a importância de se fazer uso das TIC em sala de aula, visto que

essas tecnologias vêm sendo utilizadas cada vez mais em outras esferas da sociedade. Assim, “se torna também responsabilidade da escola possibilitar aos alunos conhecimentos tecnológicos básicos, como saber operar com computadores, por exemplo, que serão essenciais para sua convivência social”. (GEWEHR, 2016, p. 43)

Sendo assim, fizeram-se necessárias todas as mudanças e adaptações que vêm ocorrendo na maneira de ser e de agir do professor. A interação professor-aluno vem sofrendo avanços, se tornando muito mais complexa, o professor deixa então de ser um mero transmissor de conhecimentos para ser mais um orientador, um estimulador do processo que leva os discentes a edificarem seus próprios conhecimentos.

Gewehr (2016) destaca que o professor pode contribuir para a construção de sujeitos realmente críticos, no entanto, precisa estar preparado, capacitado e impreterivelmente precisa manter-se atualizado. Salienta, ainda, a importância do estímulo do professor ao educando, para que este possa desenvolver a consciência crítica, tornando-se autônomo e capaz de expor seu pensamento em diferentes situações.

Diante da educação do século XXI, o papel do professor é mais do que ensinar, é possibilitar para que os alunos tenham acesso aos novos recursos tecnológicos, sejam

acompanhados, mediados e se se tornem protagonista de seu aprender. Para isto, é necessário que seja evidenciada a interação, além da troca de ideias e experiências para a obtenção do conhecimento e saberes.

Esta mesma ideia está descrita no texto **Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no contexto escolar: possibilidades**, encontrado no site de apresentação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) <sup>8</sup>, que evidencia como objetivo da incorporação das TDIC é o de apoiar os professores na implementação de diversos tipos de metodologias de ensino, alinhando o processo de ensino-aprendizagem à realidade dos estudantes e podendo despertar maiores interesses e engajamento dos alunos em todas as etapas da Educação Básica.

A BNCC (BRASIL, 2017) destaca ainda que

o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao uso crítico e responsável das tecnologias digitais tanto de forma transversal – presentes em todas as áreas do conhecimento e destacadas em diversas competências e habilidades com objetos de aprendizagem variados – quanto de forma direcionada – tendo como fim o desenvolvimento de competências relacionadas ao próprio uso das tecnologias, recursos e linguagens digitais –, ou seja, para o desenvolvimento de competências de compreensão, uso e criação de TDICs em diversas práticas sociais, como destaca a competência geral 5: *“Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.”* (BRASIL, 2017, p. 9, grifo do documento)

Além do mais, este documento, destaca em sua quinta competência específica da matemática no Ensino Médio que se faz necessário “Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas” (BRASIL, 2018, p. 523).

Nesse sentido, Fontana e Cordenonsi (2015), relatam que as tecnologias

---

<sup>8</sup>Trabalho extraído do site da BNCC (BRASIL). Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/193-tecnologias-digitais-da-informacao-e-comunicacao-no-contexto-escolar-possibilidades>

visam facilitar o processo educacional, oferecendo uma alternativa como recurso didático inovador e não convencional, com o intuito de proporcionar novas formas de ensinar, mas principalmente como potencializador da aprendizagem. Assim pode-se incluir como objetos de aprendizagem as imagens e gráficos, vídeos, sons e qualquer outro recurso educacional digital a ser utilizado para fins educacionais e que contenha sugestões sobre o contexto de sua utilização, ou seja, ele precisa de uma contextualização para seu uso, não basta largá-lo aos estudantes sem demonstrar a potencialidade de seu uso educacional. (FONTANA; CORDENONSI, 2015, p108)

Tudo isso culmina com o fato de que hoje vivenciamos uma era mais digitalizada, onde grande parte da população possui um smartphone que tem toda uma gama de funcionalidades que a cada dia vem tomando conta de nossas vidas (telefone, redes sociais, jogos, e-mails, agendas, notícias, movimentações bancárias, etc). Na educação, tal realidade não é diferente e temos a nossa disposição diversos softwares elaborados para auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem.

Nesse contexto, escolhemos dar ênfase ao GeoGebra, que por ser um software dinâmico, contribui de forma significativa para a realização da sequência de atividades que será proposta no final dessa pesquisa. Nesta atividade, voltada para as aulas remotas ou Itinerários Formativos do Novo Ensino Médio, o estudante terá que passar pelas fases do experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar os conceitos matemáticos, construindo assim, nas suas próprias ações, os seus conhecimentos.

### **2.3 Tecnologias na Matemática**

A utilização das TDIC na matemática não é novidade, diversas pesquisas têm sido realizadas sobre o tema e na maioria delas, como em Miskulin (1999), Zulatto (2002), Miskulin et al (2006), Marin e Penteado (2011), são evidenciados os benefícios que o seu uso tem proporcionado. Zulatto (2002), nos relata que o uso de softwares possibilita que os alunos explorem propriedades, façam descobertas, levantem conjecturas e tirem suas próprias conclusões, que são formalizadas posteriormente pelos professores. Sendo assim, a visualização gráfica, a investigação, a simulação (fazer e refazer) e a construção de hipóteses matemáticas potencializam sua aprendizagem.

Segundo Miskulin et al (2006),

a informática possui uma ação positiva para o desenvolvimento da

capacidade cognitiva e provoca um rompimento da relação vertical entre professor e alunos da sala de aula tradicional, desta forma os autores acreditam que a informática torna a aprendizagem mais cooperativa. (MISKULIN et al, 2006, p. 8)

Para Marin e Penteado (2011), no ensino de matemática, há vários softwares que permitem explorar os conceitos de matemática de uma forma mais dinâmica e detalhada. Alguns deles são o *GeoGebra*, o *Poly*<sup>9</sup>, o *Scratch*<sup>10</sup>, o *Winplot*<sup>11</sup>, o *MathLab*<sup>12</sup> e o *Cinderella*<sup>13</sup>.

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2020) quando olhamos grande parte das pesquisas em educação matemática desenvolvidas no Brasil nos últimos trinta anos, notamos diversificados contextos, propostas e perspectivas com relação ao uso didático e pedagógico de tecnologias para investigação matemática. Para o autor, são quatro, as fases das tecnologias digitais em Educação Matemática, a saber:

- Primeira Fase (1985);
- Segunda Fase (Início dos anos 1990);
- Terceira Fase (1999);
- Quarta Fase (2004).

Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 19), em síntese, destacam que a primeira fase é caracterizada pelo uso do *software* LOGO<sup>14</sup>. A segunda fase, pelo uso de softwares de geometria dinâmica e sistemas de computação algébrica; a terceira, pelo

---

<sup>9</sup>Poly é um programa gratuito que permite explorar e construir poliedros. Disponível para download em: <http://www.peda.com/poly/>.

<sup>10</sup>Scratch é uma linguagem de programação que foi desenvolvida para ajudar pessoas acima de 8 anos no aprendizado de conceitos matemáticos e computacionais. Com ele é possível criar histórias animadas, jogos e outros programas interativos. Página oficial: <https://scratch.mit.edu/>.

<sup>11</sup>Winplot é um gerador de funções gráficas especialmente projetado para o estudo visual de uma série de equações matemáticas. Disponível para download em: <https://winplot.softonic.com.br/?ex=BB-1857.3>.

<sup>12</sup>MATLAB é uma plataforma de computação e programação numérica usada por milhões de engenheiros e cientistas para analisar dados algoritmos e, desenvolver criar modelos. Disponível para download em: <https://la.mathworks.com/campaigns/products/trials.html?prodcode=ML>.

<sup>13</sup>Cinderella é um programa de Geometria Dinâmica de autoria de J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp, destinado a fazer geometria no computador, Cinderella constitui um utensílio para investigar construções geométricas de grande qualidade. Disponível para download em: <https://cinderella.de/tiki-index.php?page=Download+Cinderella.2>.

<sup>14</sup>Logo é uma linguagem de programação que vem sendo utilizada para trabalhar com crianças e adolescentes. Foi desenvolvida por Seymour Papert, um educador matemático, nos anos sessenta, no MIT - Massachusetts Institute of Technology, de Cambridge, MA, Estados Unidos, e adaptada para o português em 1982, na Unicamp, pelo Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED). Disponível para download em: <http://prdownloads.sourceforge.net/slogo3b/SLogo2004mar.zip?download>

uso da internet em cursos à distância e a quarta fase, pelo uso da internet rápida que democratiza a publicação de material digital na Internet .

Os aspectos e elementos característicos de cada uma dessas fases estão detalhados no subitem a seguir.

#### **2.4 As Quatro Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**

Este item está baseado no livro Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento de Marcelo de Carvalho Borba, Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva e George Gadanidis.

Neste livro os autores exploram uma sistematização para discutir o uso de tecnologias no ensino e aprendizagem de Matemática e destacam que as ideias têm como cenário a perspectiva de que o uso de tecnologias em Educação Matemática (no Brasil) pode ser compreendido em quatro fases ou momentos.

De acordo com os autores, a primeira fase é caracterizada fundamentalmente pelo uso do software LOGO e teve início por volta de 1985, apesar de que nos anos 1980 o uso de calculadoras simples e científicas e de computadores já era discutido em educação matemática.

A principal perspectiva teórica sobre o uso pedagógico do LOGO, segundo Borba, Silva e Gadanidis (2020) et al Papert (1980) é o construcionismo, o qual enfatiza as relações entre linguagem de programação e pensamento matemático.

Esse software consiste em uma linguagem de programação onde “cada comando determina um procedimento a ser executado por uma tartaruga (virtual). Os movimentos da tartaruga, como passos e giros, possibilitam a construção de objetos geométricos como segmentos de reta e ângulos.” (Borba, Silva e Gadanidis, 2020, p. 19)

Para Miskulin (1999) o Logo propicia um ambiente de aprendizagem baseado em resolução de problemas, e o aluno trabalhando nesse ambiente envolve-se em um processo de busca e investigação, cria hipóteses, “monta estratégias” e avalia-as constantemente de acordo com os seus objetivos, com vistas a solucionar seus desafios e problemas.

Para Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 21-22) a primeira fase é também o momento de surgimento da perspectiva de que as escolas poderiam ou deveriam ter

laboratórios de informática e destacam que a ideia era que, as possibilidades oferecidas pelos computadores permitissem abordagens inovadoras para a educação, ajudando a formar cidadãos reflexivos que poderiam explorar as tecnologias em outras situações, assim como a construção de conhecimentos pessoais.

A segunda fase, segundo Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 22),

tem início na primeira metade dos anos 1990, a partir da acessibilidade e popularização do uso de computadores pessoais. Nessa fase, existe grande variedade de perspectivas sobre como estudantes, professores e pesquisadores viam o papel dos computadores em suas vidas pessoais e profissionais. Muitos nunca utilizaram um computador durante essa fase, por razões como desconhecimento de sua existência, desinteresse, falta de oportunidade, insegurança ou medo. Outros utilizaram, mas não vislumbravam os novos rumos que a humanidade seguiria mediante seu uso ou então foram totalmente contra seu uso educacional. Outros ainda, por perceberem as transformações cognitivas, sociais e culturais que ocorreriam com o uso de TI, buscaram explorar possibilidades didáticas e pedagógicas. (BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2020, P. 22)

Os autores destacam, nessa fase, o uso dos softwares voltados às múltiplas representações de funções (como o Winplot, o Fun e o Graphmatica) e de geometria dinâmica (como o Cabri Géomètre e o Geometricks). E afirmam que esses softwares são caracterizados não apenas por suas interfaces amigáveis, que exigem pouca ou nenhuma familiaridade com linguagens de programação, mas principalmente pela natureza dinâmica, visual e experimental, destacando que as noções de experimentação com tecnologias e visualização são fundamentais nessa fase, trazendo novos aspectos à investigação e demonstração matemática.

Borba, Silva e Gadanidis, evidenciam que as atividades que propõem a construção de objetos com uso de softwares de geometria dinâmica, bem como as atividades criadas a partir de softwares de representações gráficas de funções, buscam construir cenários que possibilitem a investigação matemática e fazem com que novos tipos de problemas possam ser explorados e elaborados em diversos níveis de ensino.

A terceira fase tem início por volta de 1999 com a chegada da internet. De acordo com os autores, em educação, a internet começa a ser utilizada como fonte de informações e como meio de comunicação entre professores e estudantes e para a realização de cursos à distância para a formação continuada de professores, via e-mails, chats e fóruns de discussões, por exemplo. (Borba, Silva e Gadanidis, 2020, p. 31)

Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 35) defendem que essa terceira fase da pesquisa tecnológica, que tem uma forte interface com a formação inicial e continuada de professores, encontra-se em franco desenvolvimento e vem transformando softwares da segunda fase, e ao mesmo tempo é influenciada por novas possibilidades da quarta fase.

Percebemos, que as atividades desenvolvidas durante o ERE esteve diretamente relacionada com esta terceira fase de uso de tecnologias (não apenas na matemática, mas em todas as áreas do conhecimento e em todos os níveis de instrução) onde a investigação coletiva realizada a partir de uma interação em um ambiente virtual de aprendizagem, permitiu a interação síncrona através de videoconferências e proporcionou aos envolvidos uma relação de proximidade nesse momento tão crítico ao qual atravessamos.

Para Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 35) atualmente estamos vivenciando a quarta fase com relação ao uso de tecnologias em educação matemática. Essa fase teve início em meados de 2004, com o advento da internet rápida. Desde então a qualidade de conexão, a quantidade e o tipo de recursos com acesso à internet têm sido aprimorados, transformando a comunicação online.

Os aspectos da quarta fase são caracterizados pelos autores a partir das seguintes expressões:

- GeoGebra: Integração entre geometria dinâmica e múltiplas representações de funções; cenários inovadores de investigação matemática.
- Multimodalidade: Diversificados modos de comunicação passaram a estar presentes no ciberespaço; uso de vídeos na internet; fácil acesso a vídeos em plataformas ou repositórios (YouTube e TED Talks); produção de vídeos com câmeras digitais e softwares de edição com interfaces amigáveis.
- Novos designs e interatividade: Comunicadores online – telepresença (Skype); ambientes virtuais de aprendizagem (Moodle, ICZ e Second

Life); aplicativos online (applets); objetos virtuais de aprendizagem (RIVED).

- Tecnologias móveis ou portáteis: Celulares inteligentes, tablets, laptops, dentre outros (Comunicação por sms; multifuncionalidade; câmeras digitais, jogos e outros aplicativos; multiconectáveis (USB); interação através do toque em tela; acesso à internet.)
- Performance: Estar online em tempo integral; internet na sala de aula; reorganização de dinâmicas e interações nos ambientes escolares; redes sociais (Facebook); compartilhamento de vídeos (YouTube); a Matemática dos estudantes passa a ir além da sala aula (torna-se pública no ciberespaço; presente em diversos tipos de diálogos e cenários sociais).
- Performance matemática digital: Uso das artes na comunicação de ideias matemáticas; estudantes e professores como artistas; produção audiovisual e disseminação de vídeos na internet; narrativas multimodais e múltiplas identidades online; surpresas, sentidos, emoções e sensações matemáticas; ambientes multimodais de aprendizagem; novas imagens públicas sobre a Matemática e os matemáticos. (BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2020, P. 35 e 36)

Na perspectiva dos autores, uma nova fase surge quando inovações tecnológicas possibilitam a constituição de cenários qualitativamente diferenciados de investigação matemática; quando o uso pedagógico de um novo recurso tecnológico traz originalidade ao pensar-com-tecnologias.

Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 37) destacam que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior. Há certa “sobreposição” entre as fases, elas vão se integrando. Ou seja, muito dos aspectos que surgiram nas três primeiras fases são ainda fundamentais dentro da quarta fase. Muitas das tecnologias “antigas” ainda são utilizadas.

Como vimos, este não é um assunto novo, pesquisas e discussões voltadas para o uso de tecnologias nas aulas de matemática (ou outra componente curricular) é um tema que vem sendo abordado a mais de 30 anos e hoje (após o ERE) se tornou indispensável e indissociável em todo o ambiente escolar.

Na tabela a seguir apresentamos resumidamente aspectos e elementos que caracterizam cada uma das quatro fases das tecnologias em Educação Matemática.

Tabela 1 – Aspectos e elementos característicos nas fases das tecnologias em Educação Matemática

<b>Fase</b>	<b>Tecnologias</b>	<b>Natureza ou base tecnológica das atividades</b>	<b>Perspectivas ou noções teóricas</b>	<b>Terminologia</b>
Primeira (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação	Construcionismo; Micromundo.	Tecnologias Informáticas (TI)
Segunda (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géométré, Geometricricks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres humanos com mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; forum; Google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologia da informação e comunicação (TIC).
Quarta (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; applets; vídeos; Youtube; Wolfram Alpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet na sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis e portáteis.

Fonte: Adaptado de Borba, Silva e Gadanidis (2020)

Observando a Tabela 1, nota-se que a inclusão das TDIC no ensino de matemática acompanha o desenvolvimento da internet e de dispositivos que a tornam acessível a docentes e discentes. Mas, isso se deve também ao desenvolvimento de softwares que muito auxiliam no ensino de matemática, iniciando pelo LOGO na primeira fase, passando pelos vários softwares que surgem na segunda fase, até, dentre outros, chegar ao GeoGebra na quarta fase.

## 2.5 A Importância das Tecnologias no Ensino Remoto

Joye, Moreira e Rocha (2020) descrevem que para alguns, estamos convivendo em dois mundos, um presencial e outro digital, em que as TDIC estão em toda parte. Essas serviriam como canais para alguns serviços ocorrerem, tais como: trabalhos não essenciais à população, que poderiam ocorrer em casa (home office), e as atividades educacionais remotas com o intuito de diminuir as dificuldades de acesso à educação em um momento emergencial.

As TDIC já existiam antes da pandemia, ou seja, não foram pensadas para um caráter emergencial. Talvez, por isso, tenham desempenhado um papel primordial para o ERE, pois foram utilizadas por professores e alunos que necessitaram se adaptar e, por vezes, aprender a usar o que já existia. Devido a urgência e a emergência de sua implantação, não se pode dizer que o início do ERE não tenha sido traumático para alguns e também que o processo de ensino e aprendizagem tenha sido satisfatório para todos. Pois, como evidenciam Moreira, Henrique e Barros (2020, p. 1): “ninguém, nem mesmo os professores que já adotavam ambientes online nas suas práticas, imaginava que seria necessária uma mudança tão rápida e emergencial, de forma quase obrigatória, devido à expansão do coronavírus”.

Ao analisarmos as quatro fases descritas por Borba, Silva e Gadanidis (2020) na seção anterior, em especial a quarta, fica evidente que as TDIC foram/são primordiais para o período de ensino remoto. Pois, sem as plataformas digitais, os softwares e as multiplataformas que favoreceram o ensino, os ambientes de aprendizagem virtual e os dispositivos para acesso as essas ferramentas, principalmente os telefones celulares (smartfones), não seria possível fazer com que o conhecimento chegasse aos milhares de estudantes que de uma hora para outra se viram impossibilitados de frequentar as escolas. Assim, sem todas as ferramentas que compõe as TDIC ficaria difícil imaginar como a educação atravessaria esse momento tão conturbado da história da humanidade.

No ensino remoto, as TDIC possibilitaram que o ensino chegasse à maioria dos estudantes do Brasil, onde, segundo pesquisa, o celular (64%) e o computador (24%) foram os principais meios de conectividade para aqueles que tinham acesso à internet (CHAGAS, 2020). Nesses dispositivos, era possível acessar os ambientes virtuais de aprendizagem, plataformas para atividades síncronas, os quais era possível

assistir as aulas como se estivessem em uma sala de aula, instalar aplicativos sobre as mais diversas áreas do conhecimento e, principalmente, manter contato com os educadores por meio de redes sociais.

Quando o período de pandemia se findar, acreditamos que as TDIC devem ser incorporadas de vez no ambiente escolar, pois elas proporcionam mais dinamismo as aulas e autonomia para alunos. Resta então a escolas e professores saberem como fazer essa incorporação de forma que todos os agentes da educação possam participar, principalmente os estudantes.

Pois, uma vez adicionadas ao processo educacional, as TDIC se caracterizarão pela conectividade, rapidez, fluidez e apropriação de recursos que desencadearão processos que poderão melhorar o ensino como um todo. Para isso, serão necessários planejamento e capacitação para todos. Infelizmente, a mesma pesquisa apontada por Chagas (2020), citada no parágrafo anterior, relata que 4% dos alunos de escolas particulares não tinham acesso à internet, enquanto que para os alunos de escolas públicas esse percentual era de 26%. Isso mostra que para que as TDIC sejam implementadas de vez nas escolas do Brasil, há dois problemas a serem resolvidos: a falta de acesso à internet a uma parcela grande de estudantes; e a disparidade que existe ao acesso à internet entre alunos de escolas privadas e escolas públicas.

### 3 NOVO ENSINO MÉDIO E A BNCC

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre o novo ensino médio, bem como a proposta contida na BNCC para este segmento, com destaque as competências e habilidades que devem ser atingidas nessa etapa da educação.

#### 3.1 Novo Ensino Médio (NEM)

Em 16 de Fevereiro de 2017, o Presidente da República em exercício Michel Temer assinou a Lei nº 13.415 (Brasil, 2017) que:

altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. (BRASIL, 2017, p 1.)

Dentre as mudanças mencionadas na lei, relevantes a esta pesquisa, podemos citar que os direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio serão definidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), onde 60% da carga horária será obrigatória e definida pela BNCC e o restante da carga horária (40%) será composto pelos itinerários formativos.

De acordo com a definição constante na própria base:

BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)

Desse modo, podemos dizer que a BNCC é a referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares de todo o Brasil, onde são estabelecidas competências e habilidades a serem atingidas durante todas as etapas da educação.

A BNCC do Ensino Médio está organizada por áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas). Áreas estas, que constituem a formação geral básica, articulada aos itinerários formativos como um todo indissociável.

Para entendermos melhor o que é Itinerário Formativo, recorremos ao portal do MEC, onde podemos encontrar uma página de perguntas e respostas que tem como objetivo sanar as dúvidas sobre esta nova modalidade de ensino, assim, encontramos a seguinte definição:

Itinerário Formativo é o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no ensino médio. Os itinerários formativos podem se aprofundar nos conhecimentos de uma área do conhecimento (Matemáticas e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da formação técnica e profissional (FTP) ou mesmo nos conhecimentos de duas ou mais áreas e da FTP. As redes de ensino terão autonomia para definir quais os itinerários formativos irão ofertar, considerando um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar.” (BRASIL, 2018)

O estudante tem a oportunidade da flexibilização das disciplinas que compõem 40% de sua formação, ou seja, o NEM pretende atender às necessidades e às expectativas dos estudantes, fortalecendo o protagonismo juvenil na medida em que possibilita que eles escolham o itinerário formativo no qual desejam aprofundar seus conhecimentos.

A BNCC ainda salienta que:

é fundamental que a flexibilidade seja tomada como princípio obrigatório. Independentemente da opção feita, é preciso destacar a necessidade de “romper com a centralidade das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real” (Parecer CNE/CEB nº 5/2011). Para tanto, é fundamental a adoção de tratamento metodológico que favoreça e estimule o protagonismo dos estudantes, como também que: evidencie a contextualização, a diversificação e a transdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos, contemplando vivências práticas e vinculando a educação escolar ao mundo do trabalho e à prática social e possibilitando o aproveitamento de estudos e o reconhecimento de saberes adquiridos nas experiências

peçoais, sociais e do trabalho (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 7, § 2º) (BRASIL, 2018, p. 479)

Nesse contexto, o estudante terá mais tempo para se dedicar ao que gosta e ao que pretende fazer no futuro. Para auxiliá-los, a proposta prevê desde os anos iniciais, o componente curricular Projeto de Vida, que tem como objetivo ajudar os estudantes a identificar interesses, aptidões e objetivos e a conectar suas escolhas com seus projetos de vida, oferecendo atividades especializadas para que esses estudantes conheçam as áreas de conhecimento que querem buscar.

Sobre o componente curricular de Matemática e suas Tecnologias, a BNCC propõe (Brasil, 2018)

a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. [...] Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018, p. 528)

Sendo assim, o foco é que o professor proponha temas atuais, voltados ao cotidiano dos estudantes e que contemplem atividades com o uso de tecnologias.

No que diz respeito a matemática e suas tecnologias, a BNCC destaca cinco competências específicas para o ensino médio, as quais trazemos a seguir:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios

da Matemática. 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

Ao se analisar as cinco competências, podemos observar que cada uma delas trás habilidades as quais o professor/estudante deve atingir ao abordar determinado tema, com foco na atividade proposta no final dessa pesquisa, destacamos as habilidades a seguir:

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Nesse sentido, podemos dizer que a BNCC tem como propósito

que os estudantes desenvolvam habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar,

representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529)

Dessa forma, destacamos que o principal objetivo da sequência de atividades proposta no final dessa pesquisa é proporcionar, aos estudantes do Ensino Médio que se sintam familiarizados com a matemática, um estudo que aborde o tema: Funções Hiperbólicas. E que, após conhecerem essas funções, possam fazer comparações entre as funções trigonométricas circulares e as hiperbólicas, citando o máximo possível de diferenças/similaridades entre funções homônimas (por exemplo,  $\sin x$  e  $\sinh x$ ).

A proposta também visa, que os estudantes, possam comparar as funções hiperbólicas padrões do GeoGebra com suas respectivas expressões com exponenciais. Estas comparações proporcionarão aos estudantes diferenciarem as funções trigonométricas circulares e hiperbólicas, verificando propriedades comuns e distintas entre elas. Por exemplo, as funções  $\sin x$  e  $\cos x$  são periódicas de período  $2\pi$  enquanto que  $\sinh x$  e  $\cosh x$  não são, mas todas têm como domínio o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. Além disso, ao realizar tal atividade, alunos e alunas estarão explorando o GeoGebra e, conseqüentemente, fazendo novas descobertas a seu respeito.

Com a realização do estudo proposto e da sequência de atividades o aluno poderá, ao final, ter propriedade de mais um conteúdo matemático em que possa fazer um elo de aplicação com a realidade, podendo observar a presença do tema de forma interdisciplinar, na arte, arquitetura, na física, etc.

## 4 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Neste capítulo trataremos, de maneira breve, das funções hiperbólicas, apresentando suas fórmulas em funções de exponenciais e principais propriedades, objetivando servir de texto básico para professores e/ou estudantes se inteirarem sobre o tema para a realização da sequência de atividades, e também apresentamos, um estudo sobre dissertações do PROFMAT que abordam a mesma temática, visando ampliar a viabilidade e importância do estudo dessas funções já no Ensino Médio.

### 4.1 Estudo das funções hiperbólicas

Os primeiros estudos matemáticos voltados a trigonometria hiperbólica foram realizados em torno da curva denominada Catenária.

A Catenária é a curva obtida quando uma corda ou corrente flexível é suspensa livremente por dois pontos, fato que chamou muito a atenção dos estudiosos. O problema para encontrar a equação que representa essa curva pode ser considerado um dos mais famosos e difíceis problemas da história do cálculo. Tal problema foi abordado, entre outros, por Leonardo Da Vinci (1452-1519) e Galileu (1564-1642), que acreditavam ser essa curva uma parábola.

Em 1690, no *Acta Eruditorum*, jornal fundado por Leibniz (1646-1716), Jakob Bernoulli (1654-1705) desafiou a comunidade científica propondo um concurso para encontrar a forma da corrente suspensa. Foram mais de cinquenta anos desde as primeiras tentativas para solucioná-lo, até ser encontrada e comunicada oficialmente a sua resolução. Chegaram à solução, seu irmão Johann Bernoulli (1667-1748), Leibniz e Huygens (1629-1695).

O estudo das funções hiperbólicas se iniciou com o estudo de tal curva devido ao fato de que o gráfico da função cosseno hiperbólico ser análogo à curva da catenária. Estes estudos foram introduzidos por Vincenzo Riccati (1707-1775), que em seu segundo livro relatou as fórmulas de adição e subtração das funções hiperbólicas.

Porém, a primeira pessoa a publicar um estudo completo sobre as funções hiperbólicas foi o matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Hoje, conhecido por várias atribuições, uma delas é a primeira prova, apresentada em 1761, de que  $\pi$  é um número irracional. Segundo Boyer (1974, p. 340), o tratamento que Euler (1707-

1783) deu para as funções circulares, Lambert deu para as funções hiperbólicas, coube a ele introduzir as notações  $\operatorname{senhx}$ ,  $\operatorname{coshx}$  e  $\operatorname{tghx}$  para os equivalentes hiperbólicos das funções circulares da trigonometria e popularizar a trigonometria hiperbólica e suas utilidades.

Figura 3 – (a) Ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília e (b) Gateway Arch, em St. Louis



Fonte: (a) Jornal de Brasília<sup>15</sup> e (b) Instagram<sup>16</sup>

Como já foi dito, a equação da catenária é semelhante ao cosseno hiperbólico. Este fato alavancou também o estudo das funções hiperbólicas que são apresentadas na próxima seção. Curvas semelhantes a catenária podem ser observadas em várias construções pelo mundo afora. Dois exemplos são mostrados nas Figura 3, com arcos na ponte Juscelino Kubitschek e o monumento Gateway Arch.

## 4.2 As Funções Hiperbólicas

Nessa seção, apresentam-se as representações algébricas das funções hiperbólicas, destacando algumas das suas propriedades analíticas e gráficas. As funções hiperbólicas são representadas por operações que envolvem as exponenciais  $e^x$  e  $e^{-x}$ , por isso, suas análises passam também por essas funções. Nas apresentações que seguem, o símbolo  $\mathbb{R}$  representa o conjunto dos números reais. Detalhes das deduções das fórmulas e demonstrações de propriedades podem ser encontradas em Barbosa (2014) e Santos (2015).

<sup>15</sup>Extraído do site: <https://jornaldebrasilia.com.br/brasilia/apos-interdicao-por-falha-na-placa-da-junta-faixa-da-ponte-jk-e-liberada/>. (06/12/2019)

<sup>16</sup>Extraído do site: <https://www.instagram.com/p/B94L2LMDjYg/>. (18/03/2020)

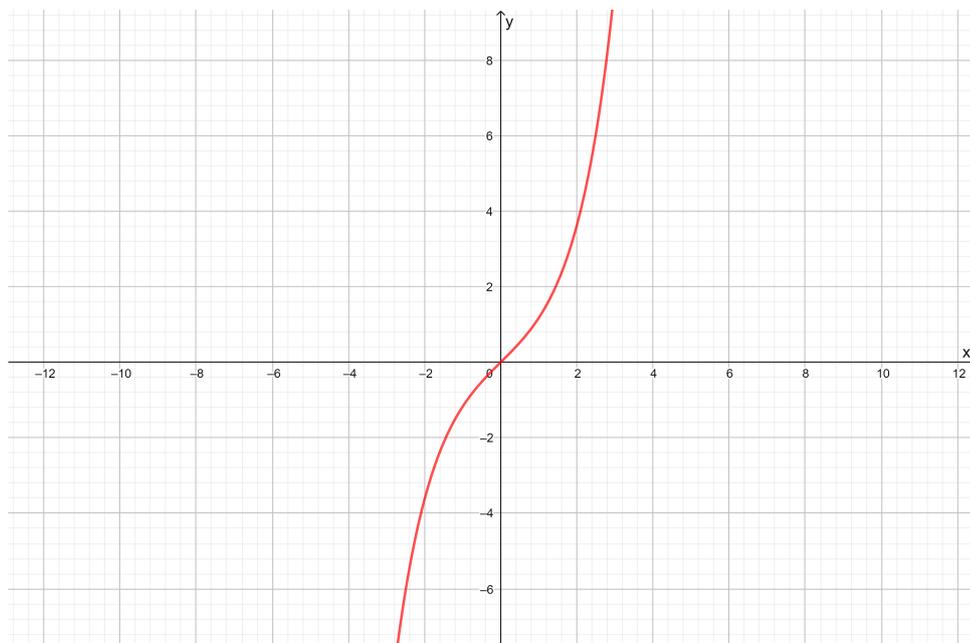
### 4.2.1 Função Seno Hiperbólico

De acordo Barbosa (2014) e Santos (2005), a função seno hiperbólico é definida em  $\mathbb{R}$ , como:

$$y = \operatorname{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{Equação 1}$$

1.  $\operatorname{senh}0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$ , logo seu gráfico passa pela origem;
2.  $\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{senh}x$ , ou seja, é uma função ímpar e como podemos perceber na Figura 4 seu gráfico é simétrico em relação à origem;
3. Domínio:  $\mathbb{R}$ ;
4. Imagem:  $\mathbb{R}$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{senh}x = +\infty$ ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{senh}x = -\infty$ .

Figura 4 – Gráfico da Função Seno Hiperbólico.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 7 jul. 2021.

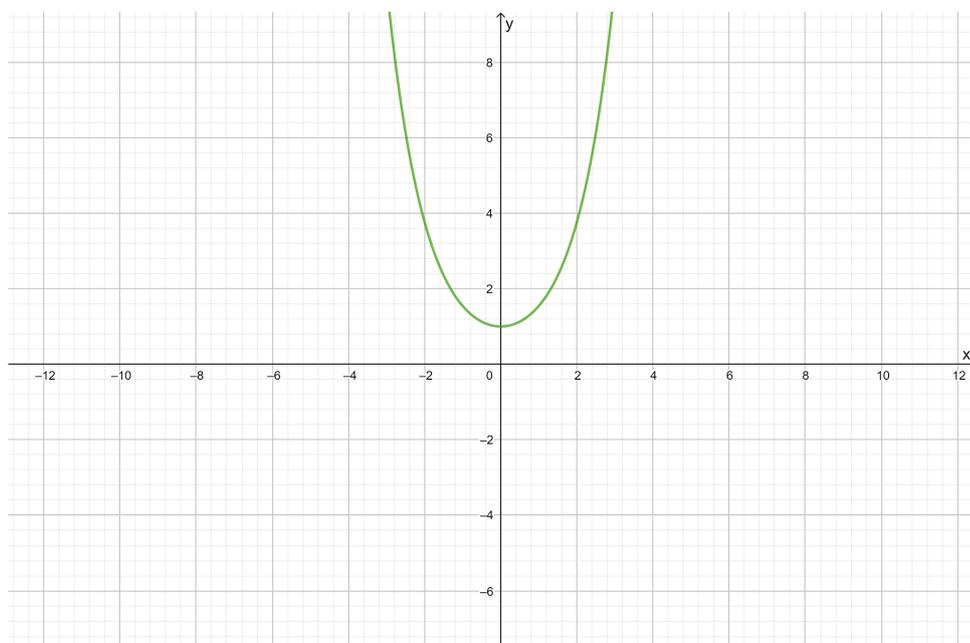
#### 4.2.2 Função Cosseno Hiperbólico

Para Barbosa (2014) e Santos (2005), a função cosseno hiperbólico é uma função de variável real a variável real definida por:

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{Equação 2}$$

1.  $\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$ , isto é, para abscissa igual a zero a ordenada vale 1;
2.  $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ , assim a função é par, logo. Como mostra a Figura 5, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo  $y$ ;
3. Domínio:  $\mathbb{R}$ ;
4. Imagem:  $[1, +\infty)$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$ ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$ .

Figura 5 – Gráfico da Função Cosseno Hiperbólico.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 7 jul. 2021.

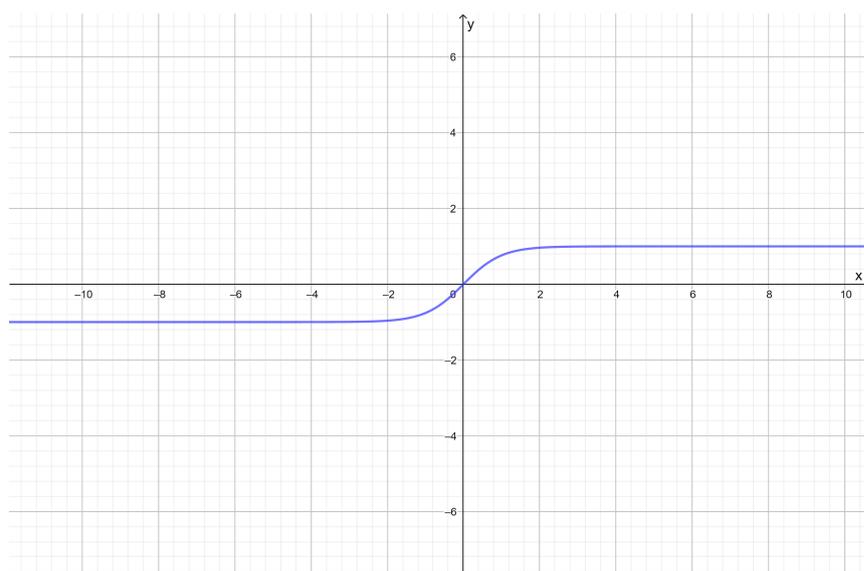
### 4.2.3 Função Tangente Hiperbólica

Barbosa (2014) e Santos (2015), entendem que a função tangente hiperbólica é a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = y = \operatorname{tgh}x = \frac{\operatorname{senhx}}{\operatorname{cosh}x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{Equação 3}$$

1.  $\operatorname{tgh}0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} = 0$ , logo, seu gráfico passa pela origem;
2.  $\operatorname{tgh}(-x) = \frac{\operatorname{senh}(-x)}{\operatorname{cosh}(-x)} = \frac{-\operatorname{senhx}}{\operatorname{cosh}x} = -\operatorname{tgh}x$ , isto é, trata-se de uma função ímpar, corroborado pela Figura 6, onde se pode ver que seu gráfico é simétrico em relação à origem;
3. Domínio:  $\mathbb{R}$ ;
4. Imagem:  $(-1, 1)$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tgh}x = 1$ ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh}x = -1$ .

Figura 6 – Gráfico da Função Tangente Hiperbólica.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 7 jul. 2021.

#### 4.2.4 Função Cotangente Hiperbólica

Baseado nos trabalhos de Barbosa (2014) e Santos (2015), concluímos que a função cotangente hiperbólica se define em  $\mathbb{R}$  como:

$$y = \operatorname{cotgh}x = \frac{\operatorname{cosh}x}{\operatorname{senh}x} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{Equação 4}$$

1.  $\operatorname{cotgh}0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{e^0 - e^{-0}} = \frac{2}{0}$  (é impossível), logo,  $y = \operatorname{cotgh}x$  não está definida para  $x = 0$ .

O que pode ser observado na Figura 7;

2.  $\operatorname{cotgh}(-x) = \frac{\operatorname{cosh}(-x)}{\operatorname{senh}(-x)} = \frac{\operatorname{cosh}x}{-\operatorname{senh}x} = -\operatorname{cotgh}x$ , isto é, é uma função ímpar, tendo o gráfico simétrico em relação à origem;

3. Domínio:  $\mathbb{R} - 0$ ;

4. Imagem:  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ;

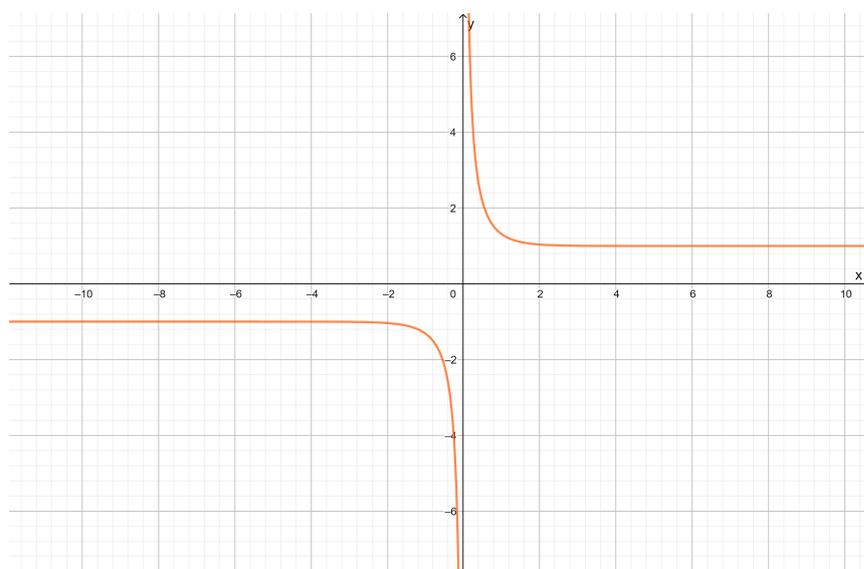
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cotgh}x = 1$ ;

6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cotgh}x = -1$ ;

7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cotgh}x = +\infty$ ;

8.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cotgh}x = -\infty$ .

Figura 7 – Gráfico da Função Cotangente Hiperbólica.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 7 jul. 2021.

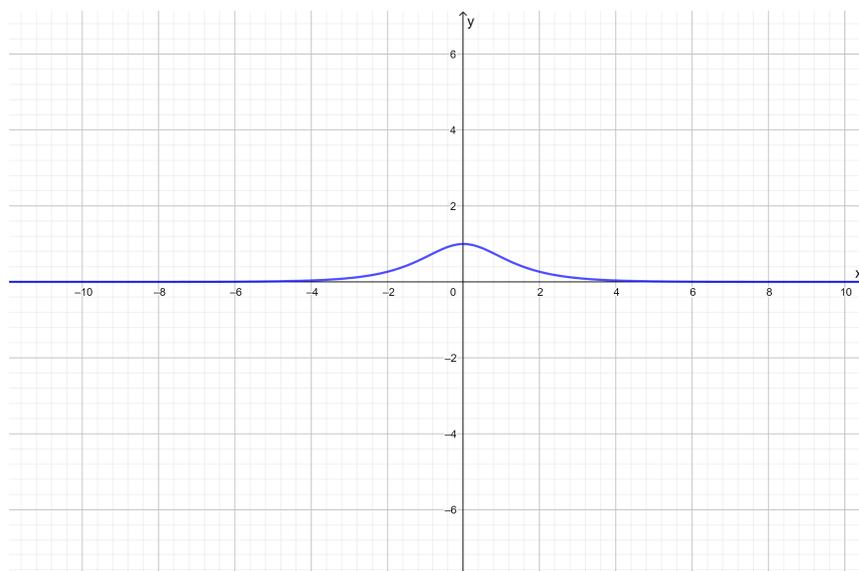
#### 4.2.5 Função Secante Hiperbólica

De acordo com Barbosa (2014) e Santos (2015) a função secante hiperbólica se define em  $\mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$y = \operatorname{sech}x = \frac{1}{\operatorname{cosh}x} = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \text{Equação 5}$$

1.  $\operatorname{sech}0 = \frac{2}{e^0 + e^{-0}} = 1$ , isto é, a abscissa zero tem ordenada igual 1;
2.  $\operatorname{sech}(-x) = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \operatorname{sech}x$ , ou seja, é uma função par, como pode ser observado na Figura 8 seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y;
3. Domínio:  $\mathbb{R}$ ;
4. Imagem:  $(0, 1]$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sech}x = 0$ ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sech}x = 0$ .

Figura 8 – Gráfico da Função Secante Hiperbólica.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 7 jul. 2021.

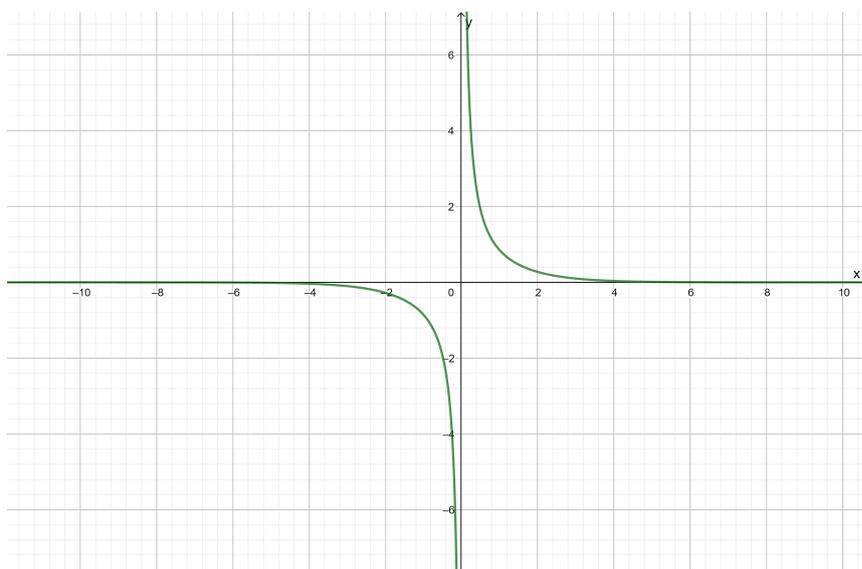
#### 4.2.6 Função Cossecante Hiperbólica

Conforme as demonstrações de Barbosa (2014) e Santos (2015) a função cossecante hiperbólica, também definida em  $\mathbb{R}$ , é dada por:

$$y = \operatorname{cossech}x = \frac{1}{\operatorname{cossech}x} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \text{Equação 6}$$

1.  $\operatorname{cossech}0 = \frac{2}{e^0 - e^{-0}} = \frac{2}{0}$  (é impossível). Portanto a função  $\operatorname{cossech}x$  não está definida no ponto  $x = 0$ , conforme também observado em seu gráfico, na Figura 9;
2.  $\operatorname{cossech}(-x) = \frac{2}{e^{-x} - e^x} = -\operatorname{cossech}x$ , logo, é uma função ímpar, e seu gráfico é simétrico em relação à origem;
3. Domínio:  $\mathbb{R} - 0$ ;
4. Imagem:  $\mathbb{R} - 0$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cossech}x = 0$ ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cossech}x = 0$ ;
7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cossech}x = +\infty$ ;
8.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cossech}x = -\infty$ .

Figura 9 – Gráfico da Função Cossecante Hiperbólica.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 7 jul. 2021.

### 4.3 Relações Fundamentais

Usando as expressões das funções hiperbólicas apresentadas anteriormente, em função de exponenciais, tem-se as seguintes relações (identidades), (BARBOSA, 2014, p. 29-30; e Paulo, 2014, p 28-52):

$$\cosh x + \sinh x = e^x; \quad \text{Equação 7}$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}; \quad \text{Equação 8}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ (identidade fundamental)}; \quad \text{Equação 9}$$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x; \quad \text{Equação 10}$$

$$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{cossech}^2 x; \quad \text{Equação 11}$$

### 4.4 Operações com Arcos

As operações com arcos também podem ser provadas a partir das expressões em função das exponenciais e das relações fundamentais. Os detalhes e demonstrações se encontram no trabalho de conclusão de curso de Barbosa (2014, p. 31-36). São elas:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x; \quad \text{Equação 12}$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cdot \cosh y - \sinh y \cdot \cosh x; \quad \text{Equação 13}$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y; \quad \text{Equação 14}$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cdot \cosh y - \sinh x \cdot \sinh y; \quad \text{Equação 15}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x; \quad \text{Equação 16}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x; \quad \text{Equação 17}$$

$$\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x; \quad \text{Equação 18}$$

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1; \quad \text{Equação 19}$$

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh^2 x - 1}{2}}; \quad \text{Equação 20}$$

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh^2 x + 1}{2}}; \quad \text{Equação 21}$$

$$\operatorname{tgh}(x + y) = \frac{\operatorname{tgh}x + \operatorname{tgh}y}{1 + \operatorname{tgh}x \cdot \operatorname{tgh}y} \quad \text{Equação 22}$$

$$\operatorname{tgh}(x - y) = \frac{\operatorname{tgh}x - \operatorname{tgh}y}{1 - \operatorname{tgh}x \cdot \operatorname{tgh}y} \quad \text{Equação 23}$$

$$\operatorname{tgh}(2x) = \frac{2\operatorname{tgh}x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x} \quad \text{Equação 24}$$

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}; \quad \text{Equação 25}$$

$$\sinh 3x = 4\sinh^3 x + 3\sinh x; \quad \text{Equação 26}$$

$$\cosh 3x = 4\cosh^3 x + 3\cosh x; \quad \text{Equação 27}$$

#### 4.5 Abordagem das Funções Hiperbólicas nas Dissertações do PROFMAT

Nesta seção faremos um levantamento das dissertações já defendidas no PROFMAT que tratam do tema Funções Hiperbólicas e que defendem a inclusão do mesmo nos anos finais da educação básica.

Sete trabalhos são analisados e seus resumos estão descritos nos subitens a seguir:

#### 4.5.1 Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações

Vasconcelos (2013) aborda em seu texto que as funções hiperbólicas sugerem uma analogia com as funções trigonométrica e que elas surgem naturalmente a partir de combinações simples das funções exponenciais  $\frac{e^x}{2}$  e  $\frac{e^{-x}}{2}$ , as duas principais, o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico, são resultados da soma e diferença direta entre elas.

O autor também aborda a história da matemática, citando alguns matemáticos e suas contribuições. Trazendo também um breve histórico das funções hiperbólicas, mostrando que uma das necessidades do seu estudo foi as grandes descobertas geográficas dos séculos XV e XVI que pediam métodos de navegação mais aperfeiçoados.

Em suas considerações, Vasconcelos (2013) avalia que o estudo das Funções Hiperbólicas já no ensino médio é importante e viável, visto que elas são, apenas curvas, originadas da combinação direta das funções exponenciais, já estudadas no ensino médio e, possuem muitas aplicações importantes.

#### 4.5.2 Funções Hiperbólicas no Ensino Médio

Alhadas (2013) traz em sua dissertação uma proposta didática que visa a introdução de noções de Funções Hiperbólicas na matriz curricular de matemática do Ensino Médio.

O texto apresenta as definições de funções hiperbólicas, discute a história do seu surgimento e desenvolvimento e suas propriedades, verifica suas semelhanças e suas relações com as funções trigonométricas circulares, também traz aplicações, como determinar, por exemplo, a forma exata da curva assumida por um cabo homogêneo flexível, de densidade uniforme, suspenso pelas duas extremidades, sob a ação da gravidade

Alhadas (2013) defende que a introdução do tema na matriz curricular seria possível, uma vez que os alunos, especificamente do 3º ano do Ensino Médio, já têm o conhecimento das funções exponenciais, das funções trigonométricas circulares, bem como suas relações, e também o conhecimento do estudo das secções cônicas, especificamente a hipérbole. Essa inserção seria bastante beneficiada com o uso de softwares livres, como GeoGebra e Winplot. Para concluir, o autor propõe uma lista de

atividades.

#### 4.5.3 Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas

Rodrigues (2014), tem como principal objetivo em sua dissertação o estudo das funções hiperbólicas através dos conceitos e propriedades da hipérbole. Ele apresenta uma revisão sobre ângulos trigonométricos e funções trigonométricas. Apresenta as definições do seno, cosseno e demais funções hiperbólicas e suas propriedades, a exemplo das relações de soma de ângulos hiperbólicos, que são tratadas com e sem a utilização de funções exponenciais.

Rodrigues (2014) não argumenta sobre a introdução do tema na matriz curricular do Ensino Médio.

#### 4.5.4 As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações

Freitas (2015), apresenta um estudo das Funções Hiperbólicas e suas aplicações. Faz uma análise de como essas funções são abordadas em alguns livros de cálculo diferencial comumente usados nos cursos de graduação na área de exatas, constatando que são feitas através de sua definição exponencial.

Freitas (2015) aborda o tema utilizando a hipérbole como curva geratriz a partir do estudo de ângulos hiperbólicos. As definições são feitas paralelamente às das funções trigonométricas circulares, analisando suas semelhanças e diferenças.

No último capítulo, a pesquisadora apresenta algumas aplicações do estudo das Funções Hiperbólicas, com ênfase na catenária. A autora também não trata da inclusão do tema na matriz curricular do Ensino Médio.

#### 4.5.5 Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas

O trabalho de Santos (2015) tem como objetivo apresentar as funções hiperbólicas, analisando suas semelhanças e diferenças com as funções trigonométricas circulares.

O autor apresenta uma breve revisão sobre a trigonometria circular e a hipérbole, descrevendo seus principais elementos e propriedades. Posteriormente, realiza

um estudo sobre as funções hiperbólicas, apresentando as definições de seno, cosseno e das demais funções hiperbólicas e suas principais propriedades.

Santos (2015), conclui o texto com algumas aplicações destas funções no cotidiano, não fala sobre a inclusão do tema na grade curricular do ensino médio.

#### 4.5.6 Uma Proposta para a Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio

Em seu estudo sobre as funções hiperbólicas, Ferrara (2018), faz um desenvolvimento por meio da analogia com as funções trigonométricas circulares. Conta um pouco da história das funções hiperbólicas desde seu surgimento e apresenta, através de fotografias, várias situações e usos de tais funções no planeta Terra, dando ênfase a catenária.

Ferrara (2018) traz uma proposta que visa introduzir este conteúdo na matriz curricular de matemática no Ensino Médio, defendendo que tal estudo seria possível, haja vista que os alunos, nesta etapa, dominam assuntos como análise e interpretação de gráficos, funções afim, quadrática, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas circulares, também dominam as cônicas, pois estão compostas no currículo mínimo de Matemática e essa inserção facilitaria a continuidade do estudo de tais funções em alguns cursos de nível superior.

#### 4.5.7 As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio: Apresentação, Conceito e Aplicações

O último texto analisado é o trabalho de Silva (2019). Esta autora também defende a inserção do conteúdo das funções hiperbólicas no Ensino Médio. Apresenta os conceitos básicos a respeito do tema, bem como alguns aspectos históricos do desenvolvimento das funções hiperbólicas na história da matemática.

Como nos demais textos, a dissertação traz um paralelo entre as funções hiperbólicas e as funções trigonométricas. A autora relata que tal fato traz as funções hiperbólicas para um campo conhecido dos alunos, destacando as diferenças e as similaridades entre tais conceitos.

Silva (2019) sugere o software gratuito Winplot como ferramenta para facilitar a inserção do tema e também traz em seu texto conceitos, por ela, considerados indispensáveis para o entendimento das funções hiperbólicas, tais como, funções exponenciais,

funções circulares e cônica hipérbole. A equação da catenária é apresentada como uma aplicação a respeito do tema.

#### **4.6 Considerações sobre as dissertações**

Os trabalhos de Vasconcelos (2013), Alhadas (2013), Ferrara (2018) e Silva (2019) defendem a introdução do tema na matriz curricular do 3º Ano do Ensino Médio, destacando que os alunos já têm o conhecimento de assuntos como análise e interpretação de gráficos, funções afim, quadrática, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas circulares.

Alhadas (2013) e Silva (2019), defendem ainda que essa inserção seria bastante facilitada com o uso de softwares livres, como GeoGebra e Winplot.

Os trabalhos de Rodrigues (2014), Freitas (2015) e Santos (2015), objetivam apresentar apenas um estudo das Funções Hiperbólicas e suas aplicações, os autores não tratam da inclusão do tema na matriz curricular do Ensino Médio.

Na análise, percebemos que todos os autores defendem que há a necessidade de uma melhor compreensão do assunto através do seu ensino, sua importância e suas aplicações, pois pudemos perceber, que as Funções Hiperbólicas, especialmente o cosseno hiperbólico, são uma ferramenta bastante utilizada nos nossos dias em muitas áreas do saber, contando-se inúmeras aplicações do seu uso na matemática, em especial no cálculo diferencial e integral, bem como em diversas outras ciências.

Na tabela 2, a seguir, trazemos o resumo das dissertações analisadas, contendo o título, autor, universidade, ano de publicação e objetivo de cada uma delas:

Tabela 2 – Dissertações do PROFMAT que abordam Funções Hiperbólicas

<b>TÍTULO</b>	<b>AUTOR</b>	<b>UNIVERSIDADE</b>	<b>ANO</b>	<b>OBJETIVO</b>
Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações	Jerry Gleison Salgueiro Fidanza Vasconcelos	Universidade Federal do Amazonas	2013	Mostrar a importância das funções hiperbólicas para o desenvolvimento das ciências.
Funções Hiperbólicas no Ensino Médio	Márcio de Castro Alhadad	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro	2013	Apresentar as definições de funções hiperbólicas, discutir a história do seu surgimento e desenvolvimento e verificar suas semelhanças e suas relações com as funções trigonométricas circulares.
Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas	Kennedy Félix Rodrigues	Universidade Federal de Sergipe	2014	Estudar as funções hiperbólicas através dos conceitos e propriedades da hipérbole.
As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações	Maria do Bom Conselho da Silva Beserra Freitas	Universidade Federal da Paraíba	2015	Apresentar um estudo das Funções Hiperbólicas e suas aplicações.
Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas	Jonas José Cruz dos Santos	Universidade Federal da Paraíba	2015	Apresentar as funções hiperbólicas, analisando suas semelhanças e diferenças com as funções trigonométricas circulares.
Uma Proposta Para a Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio	Mário Vicente Ferrara	Universidade Estadual de Maringá	2018	Fornecer subsídios ao professor, para que o mesmo possa apresentar as funções hiperbólicas aos seus alunos.
As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio: Apresentação, Conceito e Aplicações	Cristiane Mene-gante da Silva	Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul	2019	Apresentar uma forma de abordagem das funções hiperbólicas para estudantes do Ensino Médio.

Fonte: A própria autora

Acreditamos que, hoje é possível introduzir esse tema nas aulas de matemática das disciplinas eletivas do Ensino Médio, com base nos trabalhos de Vasconcelos (2013), Alhadas (2013), Ferrara (2018) e Silva (2019), nas habilidades destacadas no capítulo 3 e também nas Habilidades dos Itinerários Formativos do Currículo de Mato Grosso do Sul associadas às competências gerais da BNCC, listadas a seguir:

(EMIFCG01) Identificar, selecionar, processar e analisar dados, fatos e evidências com curiosidade, atenção, criticidade e ética, inclusive utilizando o apoio de tecnologias digitais.

(EMIFCG04) Reconhecer e analisar diferentes manifestações criativas, artísticas e culturais, por meio de vivências presenciais e virtuais que ampliem a visão de mundo, sensibilidade, criticidade e criatividade.

(EMIFMAT05) Selecionar e mobilizar intencionalmente recursos criativos relacionados à Matemática para resolver problemas de natureza diversa, incluindo aqueles que permitam a produção de novos conhecimentos matemáticos, comunicando com precisão suas ações e reflexões relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como adequando-os às situações originais.

(EMIFMAT06) Propor e testar soluções éticas, estéticas, criativas e inovadoras para problemas reais, considerando a aplicação dos conhecimentos matemáticos associados ao domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais, de modo a desenvolver novas abordagens e estratégias para enfrentar novas situações. (SED-MS, 2021)

Sendo assim, constatamos que em sequência aos estudos das Funções Exponenciais, Funções Logarítmicas e das Razões Trigonométricas o estudante tem condições de acompanhar o estudo das Funções Hiperbólicas, bem como, realizar as atividades propostas ao final dessa pesquisa, passando a ter propriedade de um interessante conteúdo matemático.

## 5 UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES NO GEOGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO

Um exemplo de TDIC que há algum tempo tem se tornado ferramenta auxiliar no ensino de matemática é o software GeoGebra. Neste capítulo faremos um breve<sup>17</sup> relato sobre o software e seus comandos iniciais, visando que o professor e/ou estudante que não seja familiarizado com o seu uso possa acompanhar e realizar a sequência de atividades pedagógicas proposta.

### 5.1 O Software GeoGebra

O GeoGebra é um software/aplicativo de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, escrito em Java e disponível gratuitamente para os sistemas operacionais Windows, Linux e MAC.

Este, busca integrar Geometria, Álgebra, Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística, entre outras áreas da matemática. Possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, pois apoia o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.<sup>18</sup>

Com as opções Android e IOS, o aluno tem a possibilidade de baixar o aplicativo em seu próprio celular, com interface de usuário simples e completamente interativa. Assim, a tecnologia torna-se uma ferramenta, cujo acesso ocorre dentro da própria sala de aula, tornando-se um recurso pedagógico de apoio ao professor no desenvolvimento do plano de aula. Nesse sentido, o GeoGebra tem grande vantagem, por ser um software manipulável no próprio celular. (MISKULIN *et al*, 2006)

Além disso, o GeoGebra conta também com um aplicativo de realidade aumentada, que tem o objetivo de colocar objetos matemáticos 3D em qualquer superfície e visualizar os objetos em qualquer ângulo.

Para enfatizar a importância do GeoGebra, referindo-se as fases das tecnologias digitais em educação matemática mencionadas no Capítulo 2, ressaltamos a quarta fase vivenciada, para Borba, Silva e Gadanidis (2020):

---

<sup>17</sup>Para um melhor estudo do software, sugerimos a leitura do livro: ARAÚJO, L. C. L. de; NÓBRIGA, J.C.C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Exato, 2010.

<sup>18</sup>Para maiores informações, sugerimos consultar o site: <https://www.GeoGebra.org/about>.

[...] o GeoGebra é uma das tecnologias de maior destaque e interesse na atual fase, sendo utilizado em versão online e em constantes atualizações de versões; por outro lado o GeoGebra compila plataformas de geometria dinâmica e dos sistemas de computação algébrica, [...] (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2020, p. 3).

Como descrito até aqui o GeoGebra é um software dinâmico, interativo e de fácil manuseio. É o que veremos nas linhas a seguir, onde destacamos alguns detalhes a respeito do GeoGebra e de sua operacionalização.

## 5.2 Configurações Iniciais

Destaco que a versão do software utilizada nas imagens de apresentação é da versão 6.0.659.0-offline.

Ao ser iniciado, o GeoGebra apresenta a Interface Inicial identificada na Figura 10, nesta, o usuário já pode visualizar uma janela gráfica que se divide em uma janela de visualização 2D, uma janela de álgebra e um campo de entrada de texto.

Figura 10 – Interface Inicial do GeoGebra.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 17 ago. 2021.

A janela de visualização possui um sistema de eixos cartesianos onde o usuário faz as construções geométricas com o mouse. Ao mesmo tempo, as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela de álgebra. O campo de entrada de texto é usado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções e estes são exibidos na janela de visualização, imediatamente após a tecla Enter ser pressionada.

A Barra de Ferramentas está localizada na parte superior do GeoGebra, possui 11 ícones. Nela, encontram-se ferramentas necessárias para o usuário construir, mover, medir, modificar objetos construídos, entre outros. Ao abrir o GeoGebra a Barra de Ferramentas apresenta a configuração visual destacada na figura 11.

Figura 11 – Barra de Ferramentas do GeoGebra.



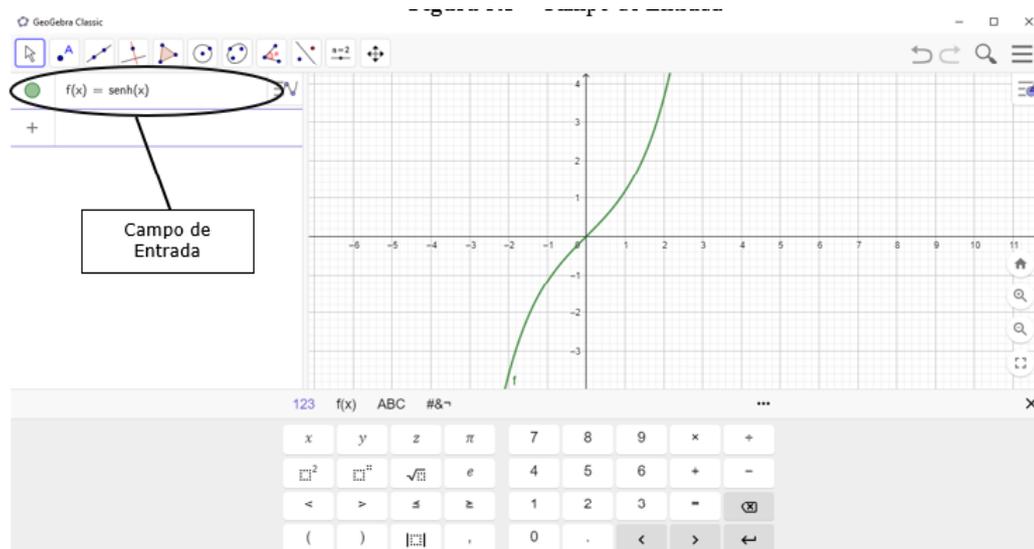
Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 17 ago. 2021.

A barra de menu fica na parte superior direita e segue o padrão da maioria dos softwares para computadores. Iremos destacar abaixo as suas principais divisões:

- Arquivo: possui opções com relação ao arquivo em execução (novo, abrir, gravar, exportar imagem, compartilhar, baixar e visualizar Impressão);
- Editar: possui opções de edição do arquivo em execução (desfazer, refazer, selecionar tudo, opções de configuração, copiar e colar);
- Exibir: traz as opções de exibição das janelas (Janela de Álgebra, Janela de Visualização, Janela de Visualização 3D, Planilha, Protocolo de Construção, Campo de Entrada, Atualizar Janelas, Recalcular todos os Objetos, entre outros).
- Configurações: permite que o usuário configure a interface do GeoGebra (mudar a fonte, modificar a representação das coordenadas, trocar o idioma, dentre outras opções).

O Campo de Entrada (Figura 12), localizado no canto superior esquerdo da Interface Inicial, é utilizado para a entrada de qualquer tipo de dado ou comando que se deseja executar no GeoGebra. Segundo Nóbrega e Araújo (2010), praticamente todas as ferramentas da Barra de Ferramentas podem ser acessadas usando comandos escritos. Nesta versão do software os comandos também podem ser inseridos através do teclado, localizado no espaço inferior da tela.

Figura 12 – Campo de Entrada.



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em: 17 ago.2021.

Na Figura 12, podemos observar que foi digitado no Campo de Entrada " $f(x) = \sinh(x)$ " e a Janela de Visualização mostra o gráfico da Função Seno Hiperbólico construído.

### 5.3 Atividade

Nesta sessão, listaremos as atividades propostas juntamente com a resolução, passo a passo. Abordaremos de forma detalhada todos os comandos do GeoGebra necessários para a realização de cada uma delas e em seguida apresentaremos os gráficos para a conclusão.

A atividade pode ser impressa a partir do Apêndice, feita diretamente no GeoGebra pelo link: <https://www.geogebra.org/m/usyqxjwv> ou, a partir da leitura da imagem do QR Code a seguir:

Figura 13 – QR Code da atividade no GeoGebra.



Fonte: Fonte: a própria autora.

As atividades estão listadas a seguir:

1. Traçar os gráficos das funções:

- a.  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = e^{-x}$ , separados e no mesmo plano. Que observações podem ser feitas sobre tais gráficos?
- b.  $f(x) = e^x + e^{-x}$  e  $g(x) = e^x - e^{-x}$ , separados e no mesmo plano. Que observações podem ser feitas sobre tais gráficos?

**Objetivo:** proporcionar observações sobre os gráficos das funções exponenciais crescente e decrescente e de suas combinações lineares, levando a interpretações pertinentes. Preparar para o trabalho com gráficos das funções hiperbólicas.

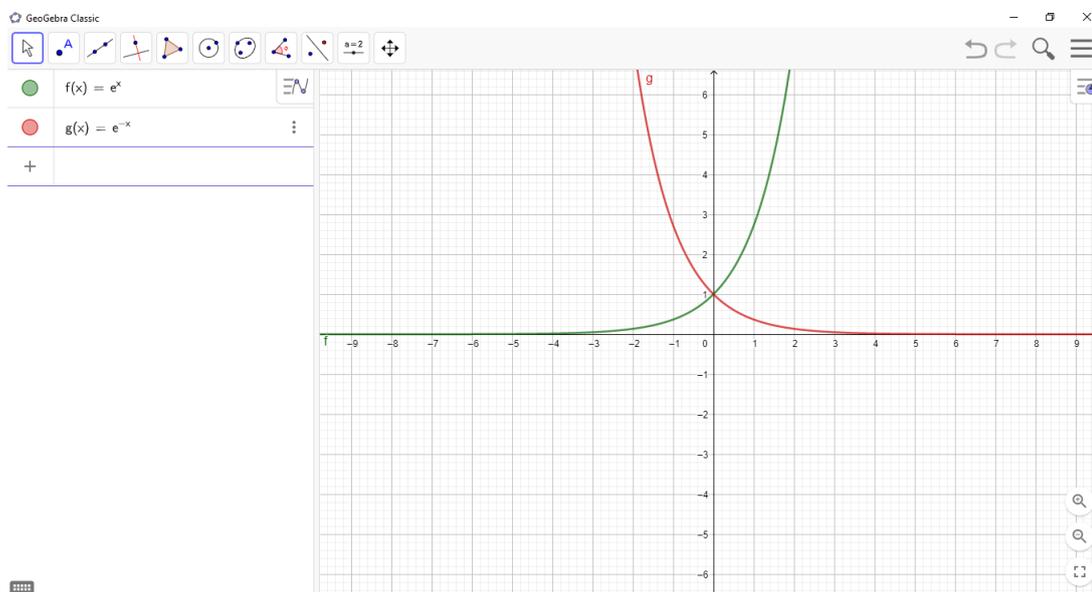
**Avaliação:** A avaliação é processual e supõe o desenvolvimento de todas as etapas desta atividade de aprendizagem, de modo a contemplar o manuseio do software, a construção dos gráficos, as considerações a respeito das observações realizadas, bem como a consolidação da atividade como um todo.

**Realização da atividade 1) a)**

- 1º) Iniciar o GeoGebra;
- 2º) Digitar no campo de entrada:  $f(x) = e^x$ ;
- 3º) Pressionar a tecla ENTER;
- 4º) Digitar no campo de entrada:  $g(x) = e^{-x}$ ;
- 5º) Pressionar a tecla ENTER.

6º) Fazer observações sobre o comportamento (crescente ou decrescente) dos gráficos traçados.

Figura 14 – Atividade 1) a)

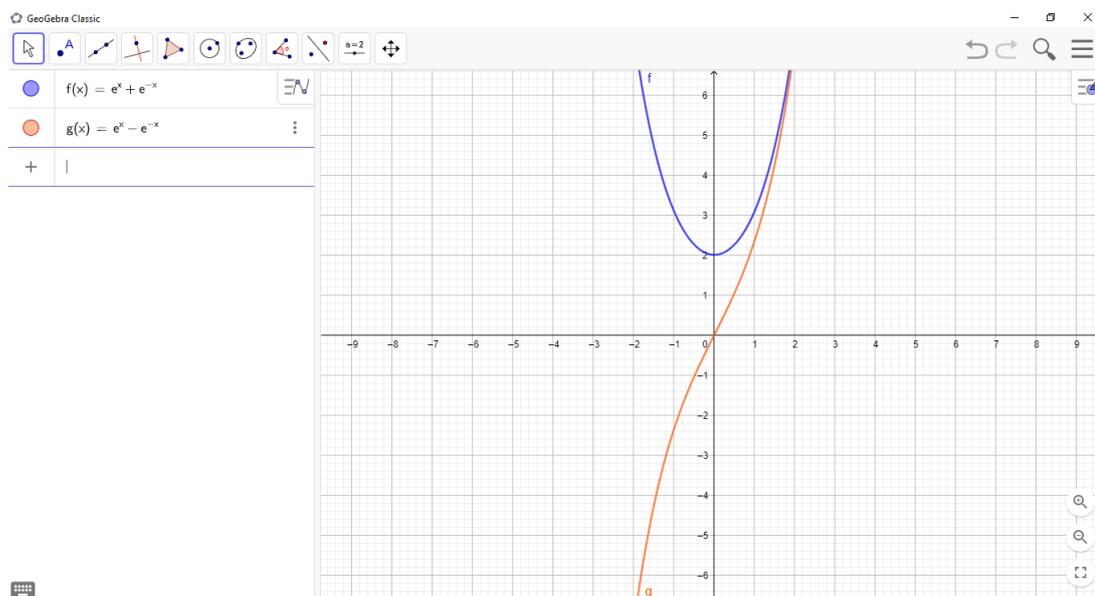


Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 17 out. 2021.

### Realização da atividade 1) b)

- 1º) Abrir um novo documento;
- 2º) Digitar no campo de entrada:  $f(x) = e^x + e^{-x}$ ;
- 3º) Pressionar a tecla ENTER;
- 4º) Digitar no campo de entrada:  $g(x) = e^x - e^{-x}$ ;
- 5º) Pressionar a tecla ENTER.
- 6º) Fazer observações sobre o comportamento (crescente ou decrescente) dos gráficos traçados.

Figura 15 – Atividade 1) b)



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 17 out. 2021.

2. Traçar os gráficos das funções hiperbólicas e suas correspondentes na forma exponencial. Verifique se há alguma diferença entre os seus traçados. Por exemplo,  $g(x) = \cosh x$  e  $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

**Objetivo:** concluir que a programação do GeoGebra para as funções hiperbólicas foi feita usando as funções exponenciais.

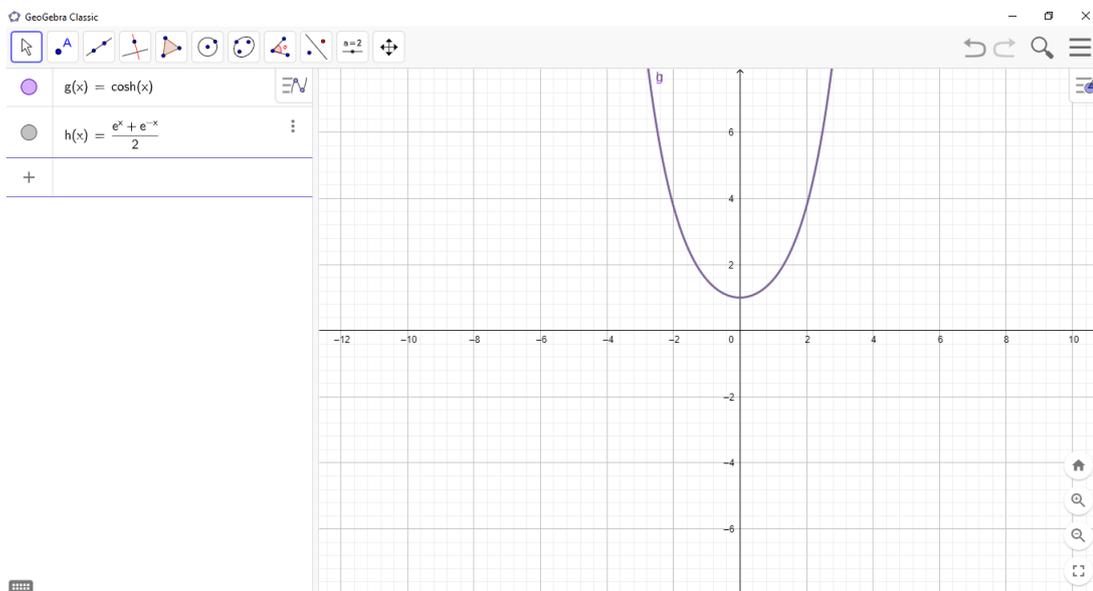
**Avaliação:** A avaliação é processual e supõe o desenvolvimento de todas as etapas desta atividade de aprendizagem, de modo a contemplar o manuseio do software, a construção dos gráficos, as considerações a respeito das observações realizadas, bem como a consolidação da atividade como um todo.

### Realização da atividade 2

- 1º) Abrir um novo documento;
- 2º) Digitar no campo de entrada:  $g(x) = \cosh x$  ;
- 3º) Pressionar a tecla ENTER;
- 4º) Digitar no campo de entrada:  $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ;
- 5º) Pressionar a tecla ENTER.
- 6º) Fazer observações sobre os gráficos traçados e concluir que a programação do GeoGebra para as funções hiperbólicas foi feita usando as funções exponenciais.

7º) Em um novo arquivo fazer o mesmo para o seno hiperbólico, tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica e cossecante hiperbólica.

Figura 16 – Atividade 3)



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 17 out. 2021.

3. Esboçar no mesmo plano os gráficos de  $f(x) = \text{sen}x$  e  $g(x) = \text{senhx}$ 
  - i. Determinar o(s) ponto(s) de interseção entre seus gráficos
  - ii. Concluir sobre o conjunto domínio de cada uma das duas funções
  - iii. Concluir sobre o conjunto imagem de cada uma das duas funções
  - iv. O que acontece com cada função quando  $x$  cresce ou decresce indeterminadamente.

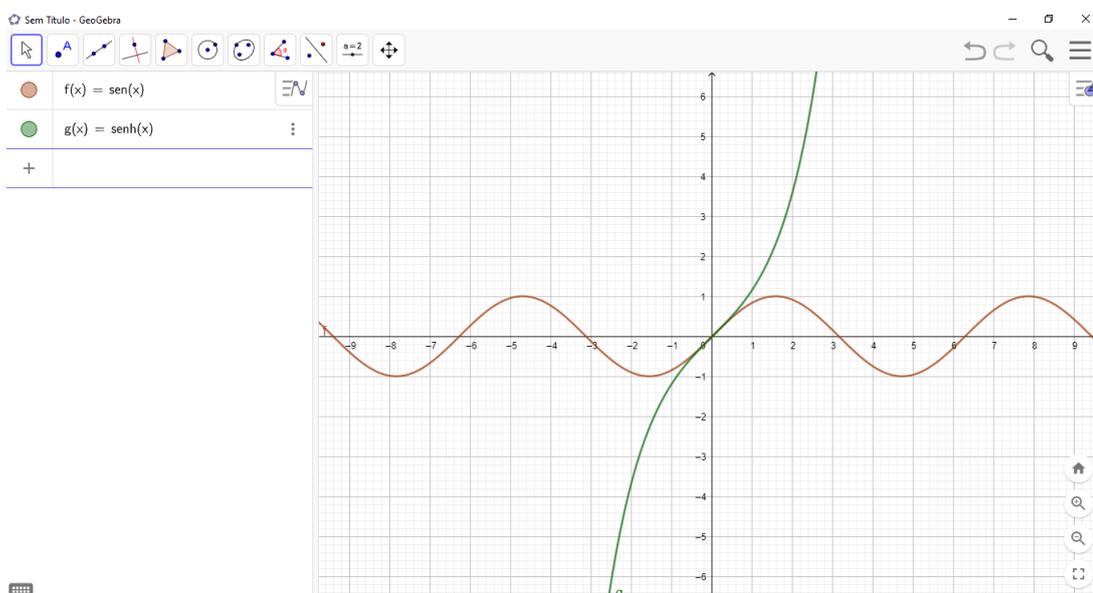
**Objetivo:** distinguir graficamente as funções trigonométricas e hiperbólicas. Por meio de suas representações gráficas, estabelecer seus conjuntos domínio e imagem e também quanto a crescimento e decrescimento, fazendo as devidas comparações. Estabelecer similaridades e diferenças entre as representações.

**Avaliação:** A avaliação é processual e supõe o desenvolvimento de todas as etapas desta atividade de aprendizagem, de modo a contemplar o manuseio do software, a construção dos gráficos, as considerações a respeito das observações realizadas, bem como a consolidação da atividade como um todo.

### Realização da atividade 3

- 1º) Abrir um novo documento;
- 2º) Digitar no campo de entrada:  $f(x) = \text{sen}x$ ;
- 3º) Pressionar a tecla ENTER;
- 4º) Digitar no campo de entrada:  $g(x) = \text{senh}x$ ;
- 5º) Pressionar a tecla ENTER.
- 6º) Fazer observações sobre os gráficos traçados e concluir os itens de I) a IV).

Figura 17 – Atividade 3)



Fonte: Foto extraída pela autora do trabalho, em 17 out. 2021.

4. Fazer o mesmo que no exercício 3 para as funções:

- a.  $f(x) = \text{cos}x$  e  $g(x) = \text{cosh}x$
- b.  $f(x) = \text{tg}x$  e  $g(x) = \text{tgh}x$
- c.  $f(x) = \text{cot}g x$  e  $g(x) = \text{cot}g h x$
- d.  $f(x) = \text{sec}x$  e  $g(x) = \text{sech}x$
- e.  $f(x) = \text{cossec}x$  e  $g(x) = \text{cossech}x$

A realização da atividade 4) é análoga a realização da atividade 3).

5. Deslize os controles e conclua se em algum momento o traçado da catenária coincide com o da parábola.

**Objetivo:** concluir que o gráfico do cosseno hiperbólico não é uma parábola.

**Avaliação:** A avaliação é processual e supõe o desenvolvimento de todas as etapas desta atividade de aprendizagem, de modo a contemplar o manuseio do software, as considerações a respeito das observações realizadas, bem como a consolidação da atividade como um todo.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo foi desenvolvido durante um período que se tornou histórico para toda a humanidade. Muitas pesquisas foram e ainda serão realizadas a respeito deste momento.

Na educação os impactos foram marcantes, nós, professores, nos sentíamos apreensivos diante de toda a situação atípica a qual vivenciávamos. A partir do momento em que a OMS decretou a situação de pandemia, causada pelo surgimento de um vírus de rápida propagação e letalidade, nos vimos obrigados a cumprir isolamento social e passamos a conviver em dois mundos, um presencial e outro digital.

Diante de tudo isso as atividades educacionais passaram a ser realizadas em formato remoto através do uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) para que o ensino não fosse interrompido, deixando os estudantes cerceados de seus direitos de aprendizagem.

Com a realização desse trabalho conseguimos perceber que apesar de todas as pesquisas e discussões voltadas para o uso de tecnologias nas aulas de matemática (ou outra componente curricular), abordados a mais de 30 anos, não estávamos preparados para fazer uso delas. Nem mesmo os professores que já adotavam ambientes online nas suas práticas de ensino, imaginavam que seria necessária uma mudança tão rápida e emergencial, de forma quase obrigatória, devido à expansão do coronavírus.

Nossos objetivos foram de realizar um estudo sobre o momento pandêmico iniciado no ano de 2020, abordando parte da legislação brasileira que se seguiu até o momento em que foi instaurado o ERE, destacando as dificuldades enfrentadas por professores e estudantes, os quais não se encontravam preparados para o ensino online.

Apresentamos um breve histórico sobre o surgimento das tecnologias, das tecnologias na educação e das tecnologias em educação matemática, destacando as quatro fases das tecnologias digitais no ensino da matemática baseado no livro de Borba, Silva e Gadanidis (2020).

No terceiro momento, interpelamos o Novo Ensino Médio e a BNCC.

No quarto capítulo desenvolvemos um estudo sobre as funções hiperbólicas, seus gráficos, relações fundamentais, operações com arcos e realizamos um levantamento bibliográfico com base em dissertações do PROFMAT que tratam do tema

Funções Hiperbólicas e que visam ampliar a viabilidade e importância do estudo dessas funções já no Ensino Médio. Neste item, concluímos, a partir das dissertações, das habilidades da BNCC para o novo ensino médio e das habilidades dos Itinerários Formativos do Currículo de Mato Grosso do Sul que é possível introduzir o tema nas aulas de matemática das disciplinas eletivas do Novo Ensino Médio.

E, por fim, no quinto e último capítulo propomos uma sequência de atividades pedagógicas, tendo o GeoGebra como principal aliado, as quais têm como principal objetivo proporcionar aos estudantes do Ensino Médio, aprofundar seus estudos nessa área e após conhecerem as funções hiperbólicas, consigam fazer comparações entre as funções trigonométricas circulares e as hiperbólicas, citando o máximo possível de diferenças/similaridades entre funções homônimas. Assim desenvolvendo, através das atividades pedagógicas e utilização do Software GeoGebra, um meio facilitador para ensino de Funções Hiperbólicas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTOÉ, A.; SILVA, H. da. **O Desenvolvimento Histórico das Novas Tecnologias e seu Emprego na Educação**. Novas Tecnologias. Maringá: Eduem, 2005, p 13-25. Disponível em: <http://files.pedagogiahorizonte.webnode.com/200000156-87d9d88dbc/O%20Desenvolvimento%20Hist%C3%B3rico%20das%20Novas%20Tecnologias%20na%20Educa%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2021.

ALHADAS, M de C. **Funções Hiperbólicas no Ensino Médio**. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2013. Disponível em: [https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=614\\_584129642793b204e32dfa2958795c060b92de18](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=614_584129642793b204e32dfa2958795c060b92de18). Acesso em: 05 jun. 2021.

BACICH, L. NETO, A. T.; DE MELLO TREVISANI, F. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Local: Penso Editora, 2015.

BARBOSA, V. D. **Funções hiperbólicas e aplicações**. 2014. 58p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). UEMS, Cassilândia, MS, 2014.

BEHAR, P. A. **O Ensino Remoto Emergencial e a Educação a Distância**. Jornal da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 6 jul. 2020. Coronavírus. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/coronavirus/base/artigo-o-ensino-remoto-emergencial-e-a-educacao-a-distancia/>. Acesso em: 13 fev. 2021.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. Edição do Kindle. Belo Horizonte : Autêntica, 2020. (Tendências em educação matemática / coordenação Marcelo de Carvalho Borba)

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomides. São Paulo, SP: Edigar Blucher: Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Poder Legislativo. **Lei n. 13.415**, de 16 de fevereiro de 2017. altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Diário oficial da União. Brasília, DF, 16 de fevereiro de 2017. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm). Acesso em: 01 de novembro de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base** [internet]. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 24 fev. 2021.

BRASIL. Poder Legislativo. **Lei n. 13.979**, de 6 de fevereiro de 2020. Dispõe sobre as medidas para enfrentamento da emergência de saúde pública de importância internacional decorrente do coronavírus responsável pelo surto de 2019. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 07 de fevereiro de 2020a. Disponível em: [www.in.gov.br/en/web/dou/-/lei-n-13.979-de-6-de-fevereiro-de-2020-242078735](http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/lei-n-13.979-de-6-de-fevereiro-de-2020-242078735). Acesso em: 19 fev. 2021.

BRASIL. Congresso Nacional. **Decreto Legislativo nº 6**, de 20 de março de 2020. Reconhece, para os fins do art. 65 da Lei Complementar nº 101, de 4 de maio de 2000, a ocorrência do estado de calamidade pública, nos termos da solicitação do Presidente da República encaminhada por meio da Mensagem nº 93, de 18 de março de 2020. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 20 de março de 2020b. Disponível em: [www.in.gov.br/en/web/dou/-/decreto-legislativo-249090982](http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/decreto-legislativo-249090982). Acesso em: 19 fev. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Portaria nº 343**, de 17 de março de 2020. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais, enquanto durar a situação de pandemia do novo coronavírus- COVID-19. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 18 de março de 2020c. Disponível em: [www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-343-de-17-de-marco-de-2020-248564376](http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-343-de-17-de-marco-de-2020-248564376). Acesso em: 19 fev. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Portaria nº 544**, de 16 de junho de 2020. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais, enquanto durar a situação de pandemia do novo coronavírus - Covid-19, e revoga as Portarias MEC nº 343, de 17 de março de 2020, nº 345, de 19 de março de 2020, e nº 473, de 12 de maio de 2020. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 17 de junho de 2020d. Disponível em: [www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-544-de-16-de-junho-de-2020-261924872](http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-544-de-16-de-junho-de-2020-261924872). Acesso em: 19 fev. 2021.

BRASIL. Poder Executivo. **Medida Provisória Nº 934**, de 1º de abril de 2020. Estabelece normas excepcionais sobre o ano letivo da educação básica e do ensino superior decorrentes das medidas para enfrentamento da situação de emergência de saúde pública de que trata a Lei nº 13.979, de 6 de fevereiro de 2020. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 1º de abril de 2020e. Disponível em: [www.in.gov.br/en/web/dou/-/medida-provisoria-n-934-de-1-de-abril-de-2020-250710591](http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/medida-provisoria-n-934-de-1-de-abril-de-2020-250710591). Acesso em: 19 fev. 2021.

BRASIL. Poder Legislativo. **Lei n. 14.040**, de 18 de agosto de 2020. Estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas durante o estado de calamidade pública reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020; e altera a Lei nº 11.947, de 16 de junho de 2009. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 19 de agosto de 2020f. Disponível em: [www.in.gov.br/en/web/dou/-/lei-n-14.040-de-18-de-agosto-de-2020-272981525](http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/lei-n-14.040-de-18-de-agosto-de-2020-272981525). Acesso em: 19 de fev. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno. **Parecer nº 19** de 8 de dezembro de 2020. Reexame do Parecer CNE/CP nº 15, de 6 de outubro de 2020, que tratou das Diretrizes Nacionais para a implementação dos dispositivos da Lei nº 14.040, de 18 de agosto de 2020, que estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas durante o estado de calamidade pública reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 10 de dezembro de 2020g. Disponível em:

[www.portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=167131-pcp019-20&category\\_slug=dezembro-2020-pdf&Itemid=30192](http://www.portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=167131-pcp019-20&category_slug=dezembro-2020-pdf&Itemid=30192). Acesso em: 19 fev. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução **CNE/CP nº 2** de 10 de dezembro de 2020. Institui Diretrizes Nacionais orientadoras para a implementação dos dispositivos da Lei nº 14.040, de 18 de agosto de 2020, que estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas pelos sistemas de ensino, instituições e redes escolares, públicas, privadas, comunitárias e confessionais, durante o estado de calamidade reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 11 de dezembro de 2020h. Disponível em: [www.in.gov.br/en/web/dou/-/resolucao-cne/cp-n-2-de-10-de-dezembro-de-2020-293526006](http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/resolucao-cne/cp-n-2-de-10-de-dezembro-de-2020-293526006). Acesso em: 19 fev. 2020.

CERUTTI, E.; NOGARO, A. **Desafios docentes no ensino superior: entre a intencionalidade pedagógica e a inserção da tecnologia**. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 12, n. 3, p. 1592-1609, jul-set/2017. E-ISSN: 1982-5587. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.21723/riaee.v12.n.3.2017.9119>. Acesso em: 05 jun. 2021.

CHAGAS, E. **DataSenado: quase 20 milhões de alunos deixaram de ter aulas durante pandemia**. Senado Notícias, 12 ago 2020. Disponível em: <https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2020/08/12/datasenado-quase-20-milhoes-de-alunos-deixaram-de-ter-aulas-durante-pandemia>. Acesso em: 17 ago. 2021.

FONTANA, F. F.; CORDENONSI, A. **TDIC como mediadora do processo de ensino-aprendizagem da arquivologia**. ÁGORA: Arquivologia em debate, Florianópolis, SC, v. 25, n. 51, p. 101-131, out. 2015. ISSN 0103-3557. Disponível em: <https://agora.emnuvens.com.br/ra/article/view/548>. Acesso em: 15 fev. 2021.

FERRARA, M. V. **Uma Proposta para a Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio**. 2018. 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018. Disponível em: [https://sca.proffmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=4199\\_83be3edf096751ac290c4ab917418768e2a5f5d6](https://sca.proffmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=4199_83be3edf096751ac290c4ab917418768e2a5f5d6). Acesso em: 05 jun. 2021.

FREITAS, M. B. C. S. B. **As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações**. 2015. 61 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: [https://sca.proffmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=1916\\_d541e0fbd14d3da3e9359e654a8be4f5d1b81577](https://sca.proffmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=1916_d541e0fbd14d3da3e9359e654a8be4f5d1b81577). Acesso em: 05 jun. 2021.

GEWEHR, D. **Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) na Escola e em Ambientes não Escolares**. 2016. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino). Pós Graduação Stricto Sensu Mestrado em Ensino, Recursos, Tecnologias e Ferramentas no Ensino, Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2017. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/handle/10737/1576>. Acesso em: 05 jun. 2021.

JOYE, C.; MOREIRA, M. R.; ROCHA, S. D. **Educação a Distância ou Atividade Educacional Remota Emergencial: em busca do elo perdido da educação escolar em tempos de COVID-19.** *Research, Society and Development*, v. 9, n. 7, e521974299, 2020 (CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | *Society and Development* 9, 7 (2020), e521974299–e521974299

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. **Professores que Utilizam Tecnologia de Informação e Comunicação para Ensinar Cálculo.** *Educação Matemática Pesquisa*, v. 13, n. 3. São Paulo, 2011. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/7057>. Acesso em: 10 jul. 2021.

MATO GROSSO DO SUL. Secretária Estadual de Educação. SED. **Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul.** Ensino Médio. 2021. Disponível em: <https://www.sed.ms.gov.br/wp-content/uploads/2021/12/Curriculo-Novo-Ensino-Medio-v02-B.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2021.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções Teórico-metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo de Ensino-aprendizagem da Geometria.** 1999. Tese (Doutorado em Educação) –Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br//Acervo/Detalhe/232997>. Acesso em: 15 jun. 2021.

MISKULIN, R. G. S.; PEREZ, G.; SILVA, M. R. C.; MONTREZOR, C. L.; SANTOS, C. R.; TOON, E.; FILHO, P. A. L.; SANTANA, P. H. O; **Identificação e Análise das Dimensões que Permeiam a Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação nas Aulas de Matemática no Contexto da Formação de Professores.** *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 19, n. 26, 2006. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1869>. Acesso em: 10 jul. 2021.

MOREIRA, J. A. M.; HENRIQUES, S.; BARROS, D. **Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia.** *Dialogia*, São Paulo, SP, n. 34, p. 351-364, jan./abr. 2020. Disponível em: <https://repositorioaberto.uab.pt/handle/10400.2/9756>. Acesso em: 20 mar. 2021.

NÓBRIGA, J.C.C.; ARAÚJO, L. C. L. de. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra.** São Paulo: Exato, 2010

PANTOJA CORRÊA, J. N.; BRANDEMBERG, J. C. **Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no Ensino de Matemática em Tempos de Pandemia: Desafios e Possibilidades.** *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.]*, v. 8, n. 22, p. 34–54, 2020. DOI: 10.30938/bocehm.v8i22.4176. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4176>. Acesso em: 05 jun. 2021.

PAULO, S. G. O. **Da Catenária a Trigonometria Hiperbólica.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade do Estado do Pará. 2014. Disponível em: [http://ccse.uepa.br/downloads/tcc/2013/paulo\\_2013.pdf](http://ccse.uepa.br/downloads/tcc/2013/paulo_2013.pdf). Acesso em: 27 jun. 2014.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2. Ed. Novo Hamburgo: Freevale, 2013.

RODRIGUES, K. F. **Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas**. 2014. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014. Disponível em: [https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=3005\\_a6714f3646cf915e6884e975a2f6cde4f8ce6daf](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=3005_a6714f3646cf915e6884e975a2f6cde4f8ce6daf). Acesso em: 05 jun. 2021.

SANTOS, J. J. C. dos. **Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas**. 2015. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: [https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=2181\\_19ea3248e31f2c34f0856ad2a5c6da49dc7f78c6](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=2181_19ea3248e31f2c34f0856ad2a5c6da49dc7f78c6). Acesso em: 05 jun. 2021.

SILVA, C. M. **As Funções Hiperbólicas no Ensino Médio: Apresentação, Conceito e Aplicação**. 2019. 57 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, 2019. Disponível em: [https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=4690\\_f6c898de526935cf6ab8049232963983e040500c](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=4690_f6c898de526935cf6ab8049232963983e040500c). Acesso em: 05 jun. 2021.

TOMAZINHO, P. **Ensino Remoto Emergencial: a oportunidade da escola criar, experimentar, inovar e se reinventar**. 06 abr. 2020 (Webinar). SIPENE/RS, Porto Alegre. Disponível em: <https://www.sinepe-rs.org.br/noticias/ensino-remoto-emergencial-a-oportunidade-da-escola-criar-experimentar-inovar-e-se-reinventar>. Acesso em: 10 fev. 2021.

VASCONCELOS, J. G. S. F. **Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicação**. 2013. 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013. Disponível em: [https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=479\\_829dcd92ee84a5cc3259a2a89209722a392d54ad](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=479_829dcd92ee84a5cc3259a2a89209722a392d54ad). Acesso em: 05 jun. 2021.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP Rio Claro, SP, 2002. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91012>. Acesso em: 05 jun. 2021.

## APÊNDICE A – ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Traçar os gráficos das funções:
  - a.  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = e^{-x}$ , separados e no mesmo plano. Que observações podem ser feitas sobre tais gráficos?
  - b.  $f(x) = e^x + e^{-x}$  e  $g(x) = e^x - e^{-x}$ , separados e no mesmo plano. Que observações podem ser feitas sobre tais gráficos?
  
2. Traçar os gráficos das funções hiperbólicas e suas correspondentes na forma exponencial. Verifique se há alguma diferença entre os seus traçados. Por exemplo,  $g(x) = \cosh x$  e  $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
  
3. Esboçar no mesmo plano os gráficos de  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \sinh x$ 
  - i. Determinar o(s) ponto(s) de interseção entre seus gráficos
  - ii. Concluir sobre o conjunto domínio de cada uma das duas funções
  - iii. Concluir sobre o conjunto imagem de cada uma das duas funções
  - iv. O que acontece com cada função quando  $x$  cresce ou decresce indeterminadamente.
  
4. Fazer o mesmo que no exercício 3 para as funções:
  - a.  $f(x) = \cos x$  e  $g(x) = \cosh x$
  - b.  $f(x) = \operatorname{tg} x$  e  $g(x) = \operatorname{tgh} x$
  - c.  $f(x) = \operatorname{cotg} x$  e  $g(x) = \operatorname{cotgh} x$
  - d.  $f(x) = \sec x$  e  $g(x) = \operatorname{sech} x$
  - e.  $f(x) = \operatorname{cosec} x$  e  $g(x) = \operatorname{cossech} x$
  
5. Deslize os controles e conclua se em algum momento o traçado da catenária coincide com o da parábola.