UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

A cartografia como objeto de ensino de matemática no ensino fundamental

Leandro Aparecido Nogueira

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Leandro Aparecido Nogueira

A cartografia como objeto de ensino de matemática no ensino fundamental

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

USP – São Carlos
Setembro de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassie
Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

N778c

Nogueira, Leandro Aparecido
A cartografia como objeto de ensino de matemática no ensino fundamental / Leandro Aparecido Nogueira; orientadora Cynthia de Oliveira Lage Ferreira. -- São Carlos, 2024.
82 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Cartografia. 2. BNCC. 3. Dissertação. 4. Matemática. 5. Ensino Fundamental. I. de Oliveira Lage Ferreira, Cynthia, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Leandro Aparecido Nogueira

Cartography as an object of mathematics teaching in elementary school

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

USP – São Carlos
September 2024

Agradecimentos

Uma das maiores virtudes do ser humano é a gratidão. Então, primeiramente sou grato a Deus, que por mais que eu achasse impossível, me deu sabedoria para tornar as coisas possíveis. Em seguida, gostaria de agradecer aos meus pais e demais familiares, que nunca deixaram de estar ao meu lado, sempre com palavras generosas de incentivo e muito amor.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT-2019: Adriana, Antônio Carlos, Bárbara, Bianca, Breno, Francisco, Gevair, Irineu, Jean, Luciana, Pedro, Sula, Talita e Valdirene. Sem esse companheirismo não chegaríamos tão longe. A todos vocês, meu respeito e admiração.

Meu muito obrigado a todos os professores do programa PROFMAT que fizeram parte dessa jornada, e lembrá-los que nada disso seria possível sem a dedicação de cada um de vocês. Obrigado por tanto conhecimento adquirido, pois me acompanharão por toda minha vida.

Em especial, gostaria de agradecer minha orientadora, a Prof.ª Dra. Cynthia de Oliveira Lage Ferreira, que gentilmente aceitou me orientar nos caminhos da dissertação e esteve sempre pronta a responder minhas dúvidas, e generosamente compreendia minha falta de tempo. E também, não poderia deixar de agradecer uma grande amiga de minha trajetória como professor, meus agradecimentos à Prof.ª Eliana Aparecida Soares do município de Guariba (SP), que sempre me incentivou e nunca deixou de acreditar em mim.

Meus agradecimentos também a toda equipe do Departamento Administrativo do ICMC.

Não há mais a agradecer, apenas buscar novas oportunidades.

RESUMO

Nogueira, Leandro Aparecido. **A cartografia como objeto de ensino de matemática no ensino fundamental.** 2024. 82p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Este trabalho tem como objetivo apresentar a cartografia como uma possibilidade de trabalho integrado entre a geografia e a matemática, tendo como norte as habilidades relacionadas a este conteúdo que são apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Ao longo das etapas, vamos fazer uma retomada histórica da cartografia, discutir conceitos cartográficos, apresentar atividades que integram as duas disciplinas e analisar um estudo de caso que mostra que esse trabalho pode acontecer na prática da sala de aula.

Palavras-chave: Cartografia, BNCC, Dissertação, Matemática, Ensino fundamental.

ABSTRACT

Nogueira, Leandro Aparecido. **Cartography as an object of mathematics teaching in elementary school.** 2024. 82p. Dissertation (Mestrado em Ciências - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

This work aims to present Cartography as a possibility of integrated work between Geography and Mathematics, having as its guide the skills related to this content that are presented in the National Common Curricular Base (BNCC). Throughout the stages, we will review the history of Cartography, discuss cartographic concepts, present activities that integrate the two disciplines and analyze a case study that shows that this work can happen in classroom practice.

Keywords: Cartography, BNCC, Dissertation, Mathematical, Elementary school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em decorrência da evolução da sociedade, bem como as demandas em constante mudança do mercado de trabalho e das tecnologias, o processo de ensino e aprendizagem tem se tornado um novo desafio, e isso tem dificultado cada vez mais o trabalho do professor em sala de aula, onde temos buscado diversas alternativas e mecanismos na intenção de despertar interesse nos alunos. Que por sua vez, a matemática seja uma disciplina atraente, não só para quem busca ensinar, mas também para quem busca adquirir conhecimento.

A transição para métodos de ensino mais interativos e adaptativos, em consonância com o avanço tecnológico, apresenta tanto oportunidades quanto obstáculos. A matemática, muitas vezes percebida como uma disciplina intimidante, apresenta-se pouco atrativa causando uma série de dificuldades que vão desde a falta de motivação dos alunos até lacunas de compreensão conceitual e deficiências na formação de professores.

A cartografia, por sua vez, tem uma forte ligação entre a ciência geográfica e a matemática, de forma a representar os dados da superfície terrestre, criando, assim, um grande instrumento de comunicação através de seus objetos geográficos físicos e humanos. E tais elementos matemáticos utilizados na cartografia podem ser fortes aliados para o professor de matemática, destacando-se a interdisciplinaridade entre as disciplinas, criando esse elo entre a matemática e a geografia.

Como professor de matemática do ensino fundamental, noto uma dificuldade muito grande dos alunos referente à interpretação de textos, mapas, tabelas e gráficos. Talvez devido às ordens de apresentação dos conteúdos nos currículos de matemática e que, muitas vezes, são apresentados e trabalhados de forma descontextualizada. Além disso, há também, a questão da importância dada a esses temas.

Com base nessas questões, realizei minha pesquisa utilizando a cartografia como instrumento para o ensino da matemática de forma contextualizada, trazendo atividades que mais se aproximassem da realidade dos alunos e que de alguma forma fossem vistas pelos alunos como uma oportunidade de uma experiência diferente.

Observa-se que as situações didáticas apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) garantem proximidade com os preceitos do Ensino de Ciências por Investigação (ECI), abordagem didática fortemente associada à ideia de alfabetização científica:

> "...uma forma de trabalho que o professor utiliza na intenção de fazer com que a turma se engaje com as discussões e, ao mesmo tempo em que travam contato com fenômenos naturais, pela busca de resolução de um problema, exercitam práticas e raciocínios de comparação, análise e avaliação bastante utilizadas na prática científica" (SASSERON, 2015, p. 58).

O tema desenvolvido desta pesquisa foi: a cartografia como instrumento de ensino de matemática no ensino fundamental, ou seja, o uso da cartografia em atividades de investigação matemática com alunos do ensino fundamental II de uma escola pública do município de Guariba (SP).

O objetivo geral da pesquisa foi investigar como os alunos do 9º ano operam com atividades de investigação matemática envolvendo cartografia.

Os objetivos específicos foram:

1) Explorar com os alunos do 9º ano do ensino fundamental atividades utilizando a metodologia de investigação matemática e o tema cartografia.

2) Identificar quais regras ou métodos matemáticos são utilizados pelos alunos quando resolvem atividades investigativas envolvendo cartografia.

3) Estimular a cultura da escrita em aulas de matemática.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido em uma escola pública do município de Guariba (SP), que contava, no período da prática realizada, com 312 alunos, distribuídos em 12 turmas, de 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Para o desenvolvimento desta proposta, foi escolhida uma turma do 9º ano, que contava com 23 alunos e na qual eu atuava como professor de matemática.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: na Seção 2, discuto o referencial teórico referente aos conceitos e à importância da investigação matemática, utilizando um pouco da história da cartografia. Descrevo, também, as definições de cartografia e sua importância no ensino, além de alguns conceitos matemáticos e geográficos que serviram de base para elaboração das atividades trabalhadas.

Na Seção 3, descrevo os procedimentos metodológicos utilizados, que tiveram enfoque na pesquisa qualitativa, detalhando todo o trabalho realizado com os alunos através das atividades propostas. Ainda relato como se efetivou a intervenção pedagógica, descrevendo os métodos de coleta de dados e de como se realizou a análise dos dados emergentes da investigação.

E Na Seção 4, relato as conclusões desta pesquisa, trazendo respostas e analisando se os objetivos gerais e específicos propostos foram atingidos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A história da cartografia

A palavra "cartografia" vem do grego *graphein*, que significa "escrito" ou "descrito", e do latim *charta,* que significa carta, definida pelo dicionário, é o conjunto de estudos científicos, operações técnicas e empreendimentos artísticos que orientam o trabalho de criação de mapas geográficos.

O termo cartografia foi utilizado pela primeira vez pelo historiador português Manuel Francisco Carvalhosa, em uma carta datada no ano de 1939. A cartografia provavelmente é a mais antiga representação do pensamento geográfico, devido à necessidade de que o homem precisava representar o ambiente onde vivia, acompanhando o progresso da civilização e empregava os mais variados recursos, como o barro, a madeira, o couro, entre outros.

Segundo Tostes (2006, p. 26), “antes mesmo de desenvolver um sistema de escrita, o homem pré-histórico já deixava suas marcas nas paredes das cavernas espalhadas pelo mundo, com as conhecidas pinturas rupestres”.

A principal finalidade da cartografia é representar o espaço geográfico de maneira visualmente compreensível, e isso inclui a representação de características físicas, políticas, culturais e ambientais da Terra.

2.2 A cartografia e sua evolução

As práticas cartográficas da Idade Antiga eram significativamente diferentes das práticas cartográficas modernas. Em comparação com os mapas contemporâneos, durante esse período, as representações do espaço geográfico eram frequentemente limitadas em precisão e escopo. A cartografia tem uma longa história que remonta aos primeiros mapas criados por civilizações antigas como os criados por egípcios, gregos e romanos. O tipo de escrita mais antigo conhecido é a escrita cuneiforme (Figura 1), desenvolvida pelos sumérios em 3.500 a.C., onde os caracteres tinham forma de cunha.

Figura 1: Escrita cuneiforme

Fonte: https://seminarioc1.blogspot.com/2017/04/escrita-cuneiforme.html

O desenvolvimento da ciência e da arte acompanhou o progresso da civilização desde os primórdios, devido à necessidade de orientação, exploração e expansão territorial. Esta ciência surgiu pela primeira vez com os mapas de itinerários rupestres, partindo da ideia de que a observação e localização do espaço são necessárias.

De acordo com CASTRO, 2012, desde os povos primitivos comprova-se a existência do uso da cartografia, mapeando abrigos, as trilhas para a caça, e as rotas de navegação. Portanto, mapear ou representar o espaço são fatos que acompanham a humanidade desde os seus registros mais antigos.

O mapa de Ga-Sur (Figura 2) é o mais antigo que se tem conhecimento, está datado em 2.500 a.C. e foi encontrado na cidade de Ga-Sur, a 300 Km ao norte da cidade de Babilônia. Trata-se de uma placa de barro que representava o vale de um rio, que para alguns estudiosos referia-se ao Rio Eufrates.

Figura 2: Mapa de Ga Sur

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_do_mapa-m%C3%BAndi

Segundo CASTRO, (2012, p.21 e p.22), “Aristóteles (350 a.C.) formulou argumentos para provar a esferecidade da Terra, descobriu a obliquidade do eixo dela e desenvolveu os conceitos de “equador”, “polo”, “trópicos” e “Klimata” (zonas tórridas, temperadas e frias). Em sua obra *Metaphysica*, sistematizou e denominou a Geodesia a partir dos métodos de medições elaborados pelos egípcios”. Porém, foi a partir de Cláudio Ptolomeu (98-168 d. C.) que se pode falar, pela primeira vez, de uma autêntica cartografia. No apogeu da cartografia grega, ele publicou o Guia para a geografia, em oito volumes. O oitavo volume – Princípios de cartografia, geografia, astronomia, matemática e das projeções – descreve duas projeções, ambas modificações da projeção cônica, que perduram por 14 séculos, até Mercator, o defensor da teoria geocêntrica. Ptolomeu refutou a ideia de que a Terra seria uma ilha cercada por mares e esboçou, pioneiramente, a técnica da transposição da forma esférica para um plano com meridianos e paralelos, estes últimos dividindo nosso planeta em tipos de clima e em zonas tórridas, temperadas e frias.

Durante a Idade Média (300 – 1400), os princípios cristãos e religiosos causaram um retrocesso na sociedade e também nos cartógrafos da época. Porém, em meados do século XIII, capitães da frota genovesa criaram as cartas para as navegações no mar Mediterrâneo com um nível de precisão até então desconhecido.

Com a Revolução científica na Europa (1400 – 1700) ocorreram 3 fatos importantes no renascimento da cartografia, que, segundo CASTRO (2012, P.26), são:

1) Tradução da Geografia de Ptolomeu para o latim (1405): a redescoberta de Ptolomeu foi marcada pelo esforço dos humanistas italianos em recuperar a herança deixada pelos gregos e romanos. Surgiu a *Tabulae Modernae*, como um complemento dos mapas de Ptolomeu.

2) Invenção da imprensa e da gravação (1470): até então, os mapas eram desenhados a mão e seu uso era limitado às cortes reais, companhias de navegação e universidades. As primeiras gravações de mapas foram em madeira, sendo, porém, logo substituídas pelas gravações em cobre, feitas com buril ou estilete. A posição do mapa na chapa é invertida, como se vista em um espelho. Essa técnica perdurou por mais de 300 anos.

3) Os grandes descobrimentos (1490): a invenção da bússola, a elaboração das cartas portulanas e o aperfeiçoamento dos barcos a vela fizeram com que o mundo conhecido dobrasse de extensão.

No século XVI, a história da cartografia é marcada pelas grandes navegações, e de acordo com Oliveira (1993), começou a se destacar a cartografia holandesa, tendo como principal representante Gerardo Mercator, mais conhecido como Mercator. Sua maior criação para o ramo da cartografia foi a projeção tendo como base um cilindro.

Ao longo do tempo, a cartografia veio sofrendo transformações devido aos avanços tecnológicos e o surgimento de novos instrumentos. De acordo com Francischett (2004), a cartografia vem sofrendo, nos últimos anos, um profundo impacto com as transformações tecnológicas resultantes do uso da informática.

A cartografia evoluiu consideravelmente com o advento da tecnologia digital e dos sistemas de informação geográfica (SIG) nos últimos anos. Hoje em dia, a cartografia não se limita apenas à representação de terrenos e fronteiras geográficas, mas também abrange uma variedade de campos, desde o mapeamento de dados socioeconômicos até o rastreamento de mudanças ambientais.

Uma das principais mudanças na cartografia contemporânea é a transição dos mapas em papel para os mapas digitais interativos. Com o surgimento de tecnologias como Google Maps e Google Earth, os mapas se tornaram acessíveis a qualquer pessoa com acesso à internet. Além disso, a capacidade de sobrepor diferentes camadas de informações em um mapa, como dados demográficos, condições climáticas e tráfego em tempo real, revolucionou a forma como usamos e abrangemos a cartografia.

Outro aspecto importante é a democratização da cartografia. Antes, a produção de mapas era dominada por cartógrafos profissionais e instituições governamentais. Hoje, qualquer pessoa pode criar e compartilhar seus próprios mapas online, graças às plataformas, que permite aos usuários colaborarem na criação de mapas de código aberto.

Além disso, a cartografia tem desempenhado um papel crucial em diversas áreas, como planejamento urbano, gestão de desastres, conservação ambiental e desenvolvimento sustentável. Mapas são ferramentas essenciais para entender e abordar problemas complexos em nossa sociedade.

2.3 A cartografia e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC é um documento normativo que estabelece as aprendizagens essenciais que todos os estudantes brasileiros têm o direito de desenvolver ao longo da Educação Básica. Ela define as competências e habilidades que devem ser trabalhadas nas diferentes etapas da educação, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Assim, a BNCC ressalta o trabalho com cartografia em suas competências específicas e nas competências de geografia: "Desenvolver o pensamento espacial, fazendo uso das linguagens cartográficas e iconográficas, de diferentes gêneros textuais e das geotecnologias para a resolução de problemas que envolvam informações geográficas".

Dentro da BNCC, a área de Ciências Humanas, que inclui a disciplina de geografia, abrange diversos conhecimentos, habilidades e competências que os alunos devem adquirir ao longo de sua formação escolar. A cartografia, como parte integrante da geografia, é frequentemente mencionada como um conteúdo a ser trabalhado no ensino fundamental e médio.

A cartografia, no contexto da BNCC, é abordada não apenas como uma técnica de representação gráfica, mas também como uma ferramenta que contribui para o desenvolvimento da alfabetização espacial dos estudantes. Isso inclui a capacidade de interpretar mapas, compreender escalas, localizar-se no espaço, analisar relações espaciais e compreender as representações cartográficas.

Para Richter e Moraes (2020, p. 149), ao analisarem a BNCC, a "expectativa é que os alunos dominem a leitura e a elaboração de mapas e utilizem variados recursos, tais como: fotografia, esquemas, desenhos, imagens de satélites, gráficos, entre outros", para obterem, conforme proposta da BNCC, "além da ampliação gradativa da concepção do que é um mapa e de outras formas de representação gráfica, reunir aprendizagens que envolvem o raciocínio gráfico". (BRASIL, 2018, p. 363 apud RICHTER; MORAES, 2020).

Em toda etapa da Educação Básica e em diversos componentes curriculares, a cartografia, pela nova proposta da BNCC, se insere e se desenvolve mais expressivamente nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio. O pensamento espacial e o raciocínio geográfico se desenvolvem nos alunos como uma possibilidade de leitura do espaço, onde o ser humano está e atua. Segue abaixo o quadro referente às habilidades da BNCC que envolvem a cartografia:

Quadro 1: Habilidades de geografia de acordo com a BNCC:

Ano	**Unidade Temática**	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
6.º ano	Formas de representação e pensamento espacial	Fenômenos naturais e sociais representados de diferentes maneiras	(EF06GE08) Medir distâncias na superfície pelas escalas gráficas e numéricas dos mapas.
			(EF06GE09) Elaborar modelos tridimensionais, blocos-diagramas e perfis topográficos e de vegetação, visando à representação de elementos e estruturas da superfície terrestre.
7.º ano	Formas de representação e pensamento espacial	Mapas temáticos do Brasil	(EF07GE09) Interpretar e elaborar mapas temáticos e históricos, inclusive utilizando tecnologias digitais, com informações demográficas e econômicas do Brasil (cartogramas), identificando padrões espaciais, regionalizações e analogias espaciais.
			(EF07GE10) Elaborar e interpretar gráficos de barras, gráficos de setores e histogramas, com base em dados socioeconômicos das regiões brasileiras.

8.º ano	Formas de representação e pensamento espacial	Cartografia: anamorfose, croquis e mapas temáticos da América e África	(EF08GE18) Elaborar mapas ou outras formas de representação cartográfica para analisar as redes e as dinâmicas urbanas e rurais, ordenamento territorial, contextos culturais, modo de vida e usos e ocupação de solos da África e América.
			(EF08GE19) Interpretar cartogramas, mapas esquemáticos (croquis) e anamorfoses geográficas com informações geográficas acerca da África e América.
9.º ano	Formas de representação e pensamento espacial	Leitura e elaboração de mapas temáticos, croquis e outras formas de representação para analisar informações geográficas	(EF09GE14) Elaborar e interpretar gráficos de barras e de setores, mapas temáticos e esquemáticos (croquis) e anamorfoses geográficas para analisar, sintetizar e apresentar dados e informações sobre diversidade, diferenças e desigualdades sociopolíticas e geopolíticas mundiais.
			(EF09GE15) Comparar e classificar diferentes regiões do mundo com base em informações populacionais, econômicas e socioambientais representadas em mapas temáticos e com diferentes projeções cartográficas.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018, p. 384-395)

Portanto, a cartografia é uma parte importante do ensino de geografia na BNCC, e seu estudo visa promover o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas à leitura e interpretação do espaço geográfico ao longo de sua Educação Básica.

2.4 A relação entre a cartografia e a matemática

A relação entre a cartografia e a matemática é fundamental, uma vez que a cartografia é a ciência que estuda a representação gráfica da superfície terrestre em mapas. A matemática desempenha, portanto, um papel importantíssimo, pois fornece os métodos e as ferramentas necessárias para a criação, a interpretação e a análise dos mapas. Neste sentido, ambas estão intrinsicamente ligadas, pois a representação precisa e eficaz da superfície terrestre em mapas requer uma compreensão profunda e da aplicação de conceitos matemáticos.

2.5 A cartografia e o ensino

A cartografia desempenha um papel fundamental no ensino, pois é uma ferramenta essencial para compreender e representar o espaço geográfico, permitindo a visualização e interpretação de informações espaciais, auxiliando no entendimento de fenômenos geográficos, sociais, econômicos e ambientais. O ensino da cartografia é crucial em diversos níveis educacionais e disciplinas, principalmente na geografia.

A cartografia escolar faz parte da geografia, e nenhum desses conhecimentos se faz sem o outro. Assim, para se construir o conhecimento da cartografia escolar, alguns conceitos e contribuições se fazem necessários para atingir os objetivos propostos. A geografia por sua vez, estuda primeiramente o espaço geográfico e as relações do homem com a natureza e é indispensável a interação do sujeito com o objeto no intuito de ensinar, tendo em vista que:

> “O ensino da geografia e o da cartografia são indissociáveis e complementares: a primeira é o conteúdo e a outra é a forma. Não há possibilidade de estudar o espaço, sem representa-lo, assim como, não podemos representar o espaço sem informação” (PASSINI, 2007, p. 148).

A alfabetização cartográfica como princípio básico da cartografia escolar pode ser tratada e entendida como o ponto inicial no processo de ensino aprendizagem espacial, como demonstra Oliveira (1978) ao tratar da cartografia infantil:

> “A cartografia infantil é um campo de estudos que está à espera do interesse e da dedicação de geógrafos, cartógrafos, educadores e professores, para ser desenvolvido. O estudo da cartografia deve ser precedido pelo estudo de uma cartografia infantil, na qual a criança tenha oportunidade de desenvolver

> atividades preparatórias, para em seguida realizar concretamente as operações mentais de redução, rotação e generalização, que são propriedades fundamentais do processo de mapeamento. Para que o desenvolvimento de uma cartografia infantil seja eficaz, é preciso considerar o mapa como um entre os vários tipos de linguagem de que os homens dispõem para se comunicarem e se expressarem" (OLIVEIRA, 1978 apud MARTINELLI, 2002, p. 02).

Este espaço complexo precisa ser representado e compreendido pela criança porque na geografia, a percepção, a cognição e a representação são fatores cruciais na construção do conhecimento do indivíduo e do espaço em que vive, criando assim, uma verdadeira linguagem espacial vivida pela criança.

É exigido do professor, como norteador do processo ensino-aprendizagem, um amplo conhecimento cartográfico, uma vez que o mesmo se torna responsável pela construção desses conhecimentos junto aos alunos. Dentro dos Parâmetros Curriculares do ensino de geografia nos anos iniciais de 1º ao 5º, destaca-se um dos objetivos gerais para que o aluno saiba:

> "[...] utilizar a linguagem cartográfica para obter informações e representar a espacialidade dos fenômenos geográficos; e mais especificamente para o 1º ciclo, para o aluno reconhecer, no seu cotidiano, os referenciais espaciais de localização, orientação e distância de modo a deslocar-se com autonomia e representar os lugares onde vivem e se relacionam" (MEC/PCN).

E ainda reforça que um dos critérios para avaliação dos alunos no final dessa fase:

> "Ler, interpretar e representar o espaço por meio de mapas simples [...] Com este critério avalia-se se o aluno sabe utilizar elementos da linguagem cartográfica como um sistema de representação que possui convenções e funções específicas, tais como cor, símbolos, relações de direção e orientação, função de representar o espaço e suas características, delimitar as relações de vizinhança" (MEC/PCN).

Alguns recursos utilizados no ensino da cartografia são fundamentais para facilitar a compreensão e o aprendizado, como mapas, globos terrestres, softwares e aplicativos, atividades práticas e outros. E ao combinar esses recursos podemos criar um ambiente de aprendizado diversificado e estimulante para os alunos.

2.6 Conteúdos matemáticos e geográficos para se trabalhar explorando mapas

Existe um vasto campo de conteúdos matemáticos para se trabalhar na exploração de mapas. Conteúdos estes, tratados no ensino fundamental, médio e superior, sendo alguns de naturezas bem específicas e outros de natureza bem ampla. Propiciando assim, uma assimilação eficaz de conceitos através da manipulação e interpretação de mapas. A seguir, listamos alguns desses conteúdos:

- Razão e proporção
- Segmentos proporcionais
- Regra de três
- Escala
- Semelhanças de figuras
- Fração
- Números decimais
- Transformação de medidas
- Movimento de translação, rotação e reflexão (isometria)
- Homotetia
- Porcentagem
- Elementos de geometria plana
- Coordenadas cartográficas
- Plano cartesiano
- Fusos horários
- Projeções cartográficas
- Funções
- Logaritmos
- Geometria espacial
- Cálculo diferencial e integral
- Geometria analítica e descritiva
- Espaços vetoriais e álgebra linear
- Geometrias euclidiana e não-euclidiana
- Relações trigonométricas
- Trigonometria plana e esférica

Com base no trabalho de campo realizado, tratarei de alguns conteúdos matemáticos relacionados à geografia e que nos serviram de base para interpretação e compreensão dos conceitos cartográficos.

2.6.1 Escalas

As escalas em mapas representam a relação entre a distância no mapa e a distância real na superfície da Terra. Elas são essenciais para interpretar corretamente as dimensões geográficas e planejar viagens, entender a distribuição geográfica de características e muito mais. Existem dois tipos principais de escalas em mapas: a escala gráfica e a escala numérica.

O conteúdo envolvendo escalas é uma ferramenta fundamental para o professor de matemática, que através dela consegue trabalhar vários outros conteúdos como: razão, proporção, transformação de medidas, regra de três, entre outros. Contudo, podemos ainda interligá-las às questões relacionadas a geografia. O uso de escalas visa fornecer uma avaliação objetiva do progresso dos alunos e orientar os educadores na adaptação do ensino para atender às necessidades individuais dos estudantes.

Escala Numérica

A representação de uma escala numérica pode ser feita através de uma fração, como por exemplo: $\frac{1}{2.000}$ ou em forma de uma razão (1:2.000), que significa que a área foi reduzida 2 mil vezes. Devemos ainda considerar que em toda escala numérica o numerador e o denominador devem ser compreendidos em centímetros. Seguindo o mesmo exemplo, onde em uma escala de $\frac{1}{2.000}$ temos que para cada 1 cm do mapa corresponde a 2.000 cm no real.

Em relação a alguns livros didáticos do ensino fundamental a representação da escala é apresentada da seguinte forma:

E = $\frac{d}{D}$

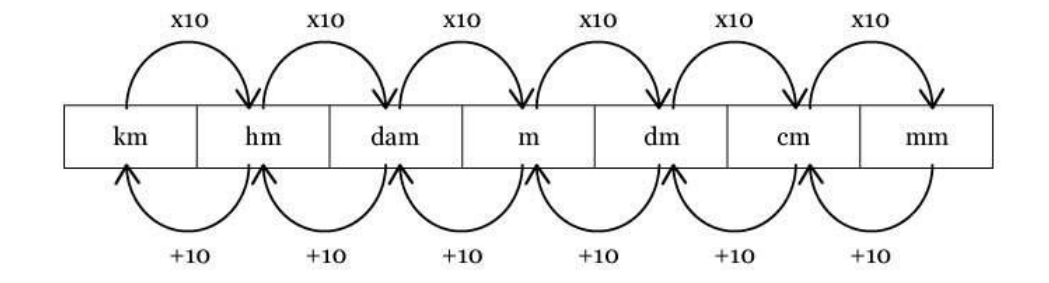
Escala = $\frac{dimensão\ no\ papel\ do\ objeto}{dimensão\ real\ do\ objeto}$

2.6.2 Transformação de Medida de Comprimento

Este conceito consiste em converter uma unidade de medida em outra, que por sua vez são grandezas que compõem o sistema métrico decimal. A medida de comprimento está presente em nosso cotidiano e, muitas vezes, ao tentarmos solucionar um problema, se faz necessário a utilização deste conceito.

Muitos livros didáticos do ensino fundamental fazem uso da tabela abaixo para facilitar o entendimento dos alunos:

Figura 3: Sistema de Conversão



Fonte: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/medidas-de-comprimento

A unidade fundamental do Sistema Internacional de medidas de comprimento é o metro. Assim, tendo como base o metro, temos os múltiplos do metro: o decâmetro (dam), o hectômetro (hm) e o quilômetro (km), e os submúltiplos do metro: o decímetro (dm), o centímetro (cm) e o milímetro (mm). Para representar distâncias maiores utilizamos os múltiplos e para distâncias menores utilizamos os submúltiplos. As conversões são feitas de modo bem simples e prático, multiplicando-se ou dividindo-se por 10, conforme a tabela acima.

2.6.3 Razão e Proporção

A razão e a proporção são conceitos matemáticos fundamentais que descrevem as relações entre quantidades. A razão, por sua vez, descreve a relação entre duas quantidades, enquanto a proporção é uma igualdade entre duas razões.

1. Razão:
    - A razão é uma comparação entre duas quantidades. É expressa como a divisão de uma quantidade pela outra.

- Se tivermos duas quantidades a e b, sendo b diferente de zero, a razão de a para b é representada como $\frac{a}{b}$, ou a:b.

2. Proporção:
   - A proporção é uma igualdade entre duas razões. Se duas razões são iguais, então elas formam uma proporção.
   - Se tivermos duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde b e d são diferentes de zero, então elas formam uma proporção se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

A resolução de problemas com razão e proporção envolve frequentemente a utilização de regras de três simples e compostas. Esses conceitos são amplamente utilizados em diversos campos, como matemática, física, economia e muitos outros.

2.6.4 Projeções cartográficas

O globo é a representação mais precisa da superfície da Terra. A apresentação pelo meio de cartas invariavelmente resultará em distorções. Não há projeções melhores ou piores, cada uma é adaptada a determinados objetivos. No entanto, nada resolve a questão de como representar a curvatura da Terra numa superfície plana.

Entre os cartógrafos, o principal drama por eles vivido é transferir tudo o que existe numa superfície de curvatura positiva, que é a Terra, para uma superfície plana, que é o mapa. O estudo das projeções geográficas torna-se um elemento crucial para se trabalhar a matemática.

Segundo Oliveira (1988), essa transferência só é possível:

> “de maneira imperfeita, infiel, isto é, com algumas alterações ou imperfeições. Por isso é que o problema das projeções cartográficas exige, não só de nós, para sua compreensão, como dos matemáticos, astrônomos, cartógrafos, enfim todos os que criam projeções, uma grande dose de imaginação” (OLIVEIRA, 1988, p. 57).

A escolha de uma projeção depende do propósito do mapa e das características que se deseja preservar. As projeções cartográficas são classificadas de acordo com a superfície de projeção e às suas propriedades.

Quanto às superfícies de projeção, elas podem ser: cônicas, cilíndricas ou planas. Abaixo, de acordo com os exemplos, podemos observar a transformação da superfície terrestre em uma superfície plana.

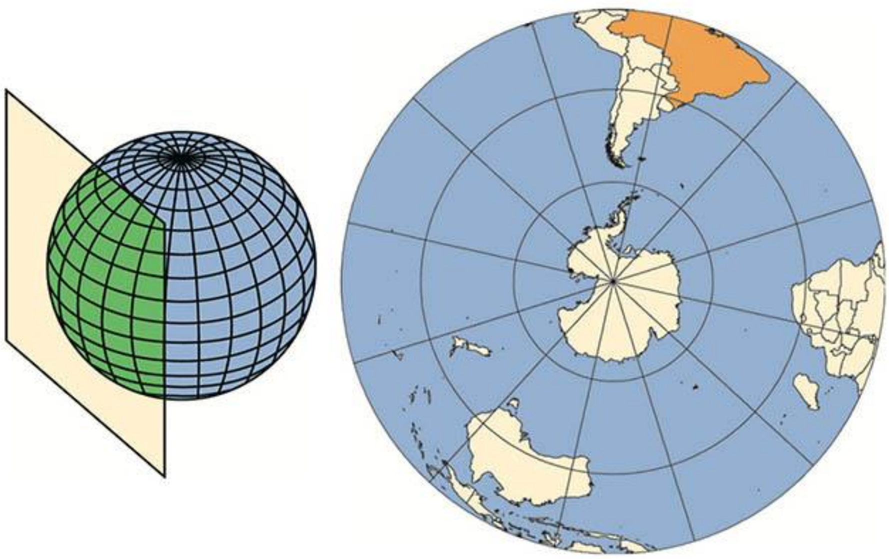
A projeção cartográfica é a transformação das coordenadas geográficas de uma superfície esférica da terra para coordenadas geográficas em uma superfície plana na forma de mapa.

Modelos de projeções cartográficas

Projeção Plana ou Azimutal

São aquelas (projeções) que projetam os pontos do globo terrestre em uma superfície plana. São chamadas azimutais porque mantem a propriedade de direção: as linhas que saem de um ponto central (ponto de tangência) são desenhadas em linha reta.

Figura 4: Representação – Projeção Azimutal



Fonte: https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/as-projec-o-es-cartogra-ficas.html

Caraterísticas Gerais:

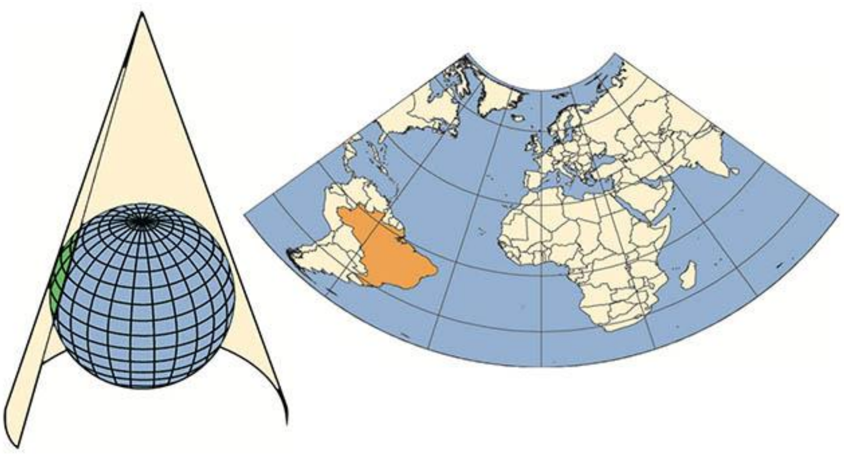
- **Ponto Central:** Cada projeção azimutal tem um ponto central, onde a distorção é mínima.
- **Distorção:** A distorção aumenta à medida que se afasta do ponto central. Em muitas projeções azimutais, as áreas periféricas podem parecer muito distorcidas.
- **Aplicações específicas:** Utilizadas em aviação, comunicações e mapas que mostram rotas de viagem, devido à precisão direcional.

Portanto, é um tipo de projeção que traz uma distorção significativa longe do ponto central, devido à distorção de forma e áreas nas bordas, não sendo ideal para mapas mundiais completos.

Projeção Cônica

É um tipo de projeção em que a superfície da Terra é projetada em um cone que toca a esfera terrestre ao longo de uma linha de latitude conhecida como linha padrão, ou ao longo de duas linhas de latitude, chamadas de linhas padrão em uma projeção cônica secante. Quando o cone é desdobrado em um plano, ele produz um mapa com características especificas.

Figura 5: Representação – Projeção Cônica



Fonte: https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/as-projec-o-es-cartogra-ficas.html

Caraterísticas Gerais:

- **Superfície de projeção:** Um cone que corta ou toca a esfera terrestre.

- **Linhas Padrão:** Linhas de latitude onde o cone toca ou corta a esfera. Nessas linhas, a distorção é mínima.
- **Distorção:** A distorção aumenta à medida que se afasta das linhas padrão. Nas regiões próximas a essas linhas, a forma e a área são representadas com maior precisão.

É um tipo de projeção que é utilizada para representar áreas de tamanho médio e grande com extensão predominante Leste-Oeste, porém não é adequada para representação global devido a distorção significativa longe das linhas padrão.

Projeção Cilíndrica

As projeções cilíndricas são aquelas que mapeiam a superfície da Terra em um cilindro, que quando desenrolado forma um retângulo plano. São bastante utilizadas para criar mapas, especialmente devido a sua simplicidade e utilidade em várias aplicações.

Figura 6: Representação – Projeção Cilíndrica

Fonte: https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/as-projec-o-es-cartogra-ficas.html

Caraterísticas Gerais:

- **Distorções:** Todas as projeções cilíndricas apresentam algum tipo de distorção. Em geral, a distorção aumenta à medida que se aproxima dos polos.

- **Simplicidade:** São relativamente simples de criar, o que as tornam populares em vários contextos.
- **Aplicações:** Muito utilizadas em atlas, livros didáticos, mapas de parede e sistema de navegação.

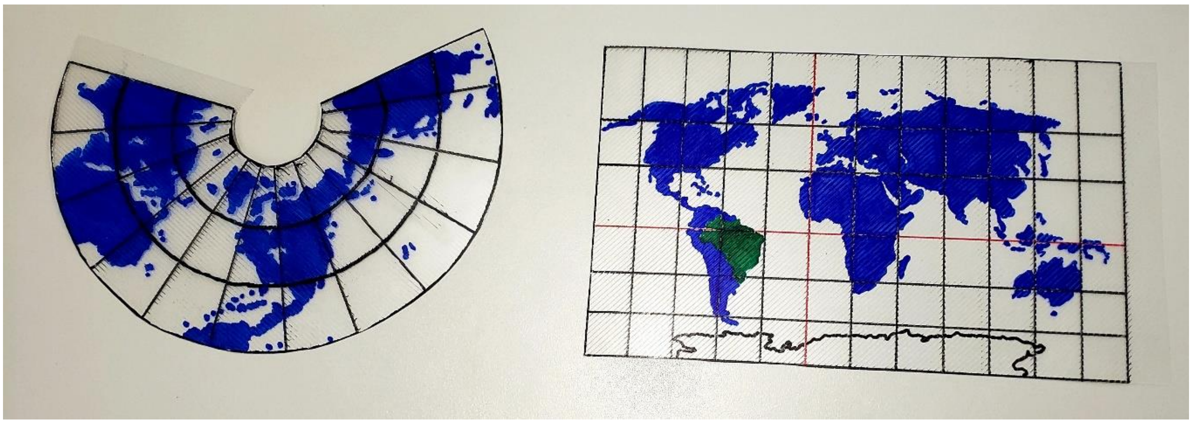
É importante destacar que nenhuma projeção cartográfica é perfeita, e cada uma possui suas limitações. A escolha da projeção dependerá dos objetivos específicos do mapa e da área geográfica que se deseja representar com maior precisão.

Conversando com os professores de geografia e até mesmo pesquisando nos livros didáticos, notei que o tema sobre projeções são poucos explorados, apenas trazem imagens referente ao assunto. Gostaria de deixar uma atividade como sugestão, onde o professor pode criar as projeções juntamente com os alunos de forma bem prática e divertida.

Atividade: Criando Projeções Cilíndricas e Cônicas

1- Em uma capa plástica, desenhe os mapas e recorte-os:

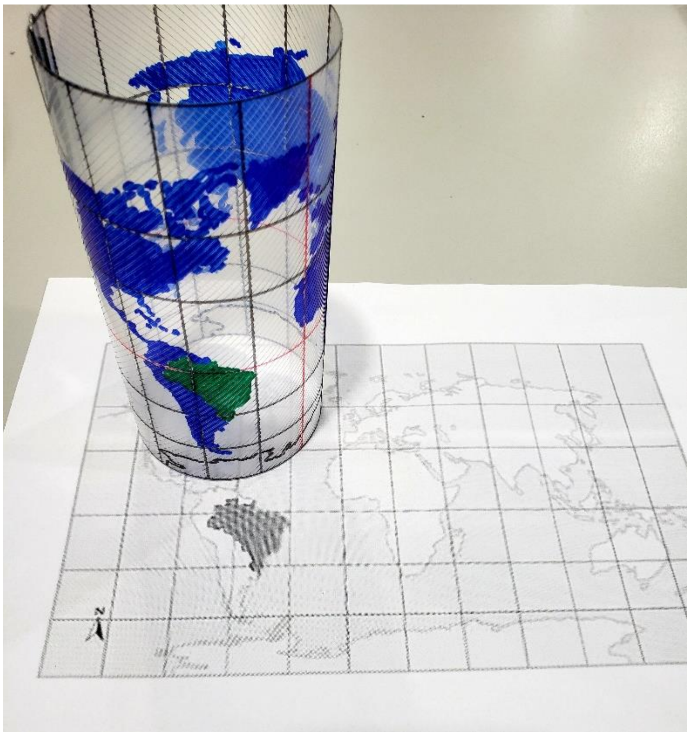
Figura 7: Mapas – Atividade (Projeções)



Fonte: Arquivo pessoal do autor

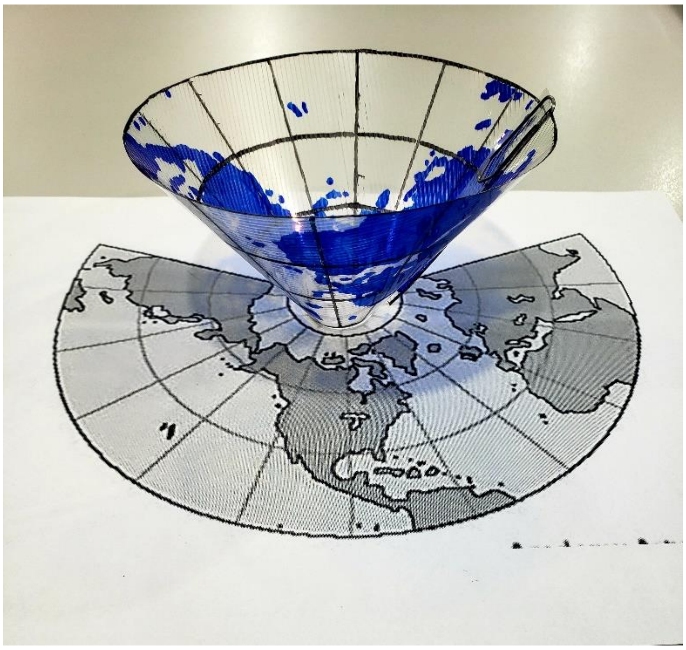
2- Em seguida, monte o cilindro e o cone:

Figura 8: Representação no cilindro



Fonte: Arquivo pessoal do autor

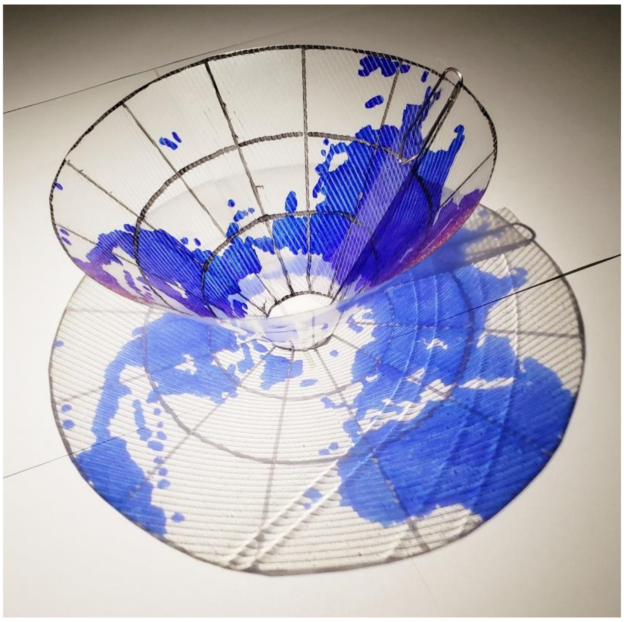
Figura 9: Representação no cone



Fonte: Arquivo pessoal do autor

3- Em uma superfície plana de cor clara, coloque o cone que construímos no centro e com a lanterna do celular coloque em cima do objeto, e o desenho será projetado na superfície plana:

Figura 10: Projeção para o plano



Fonte: Arquivo pessoal do autor

2.7 A geometria euclidiana e não-euclidiana

A Geometria euclidiana é uma geometria desenvolvida pelo matemático grego Euclides, por volta de 300 a.c., responsável por um trabalho que reúne um conjunto de treze livros denominado “Os Elementos”. A obra é considerada umas das mais influentes de todos os tempos, onde Euclides organizou a geometria de forma axiomática, propondo postulados e construindo daí todo um pensamento geométrico.

Euclides, definiu 5 postulados que servem como fundamento da geometria euclidiana:

1. **Postulado 1:** Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
2. **Postulado 2:** Uma linha reta pode ser prolongada (de uma única maneira) indefinidamente.
3. **Postulado 3:** Um círculo pode ser desenhado com qualquer centro e qualquer raio.

4. **Postulado 4:** Todos ângulos retos são congruentes.
5. **Postulado 5:** Por um ponto exterior a uma reta dada (ambos no mesmo plano), existe uma única reta paralela à reta dada. (Postulado das Paralelas).

Os matemáticos que vieram após Euclides criaram outras geometrias também baseadas em seus postulados. Em particular, o quinto postulado de Euclides, considerado como o Postulado das Paralelas, sempre foi muito investigado por matemáticos e até mesmo pelo próprio Euclides. Alguns matemáticos, como Bernhard Riemann e Nikolai Ivanovich Lobachevsky propuseram uma ideia diferente a de Euclides em relação ao seu quinto postulado.

Assim, foram surgindo outras geometrias, denominadas geometrias não-euclidiana, com destaque a geometria hiperbólica e a geometria esférica:

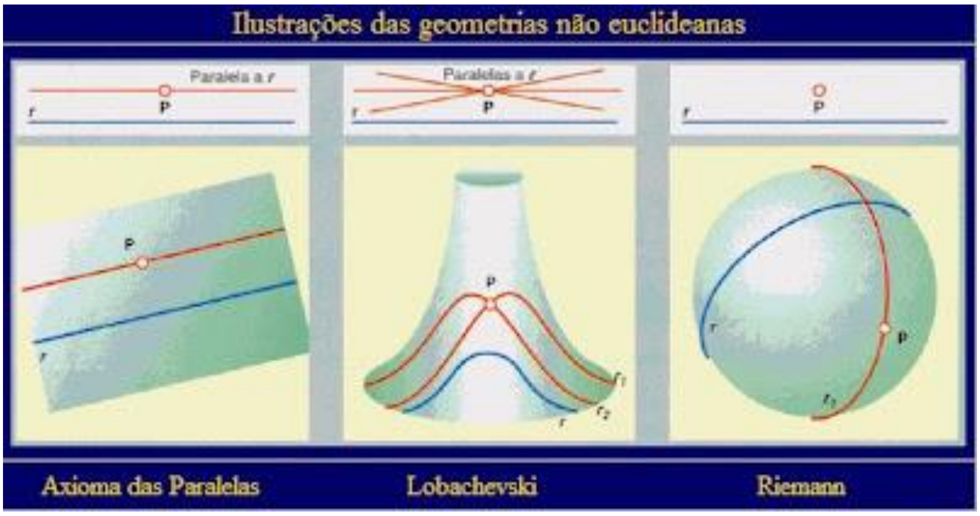
Quadro 2: Geometria Hiperbólica x Geometria Esférica

5º Postulado e o surgimento das geometrias não euclidianas	
Geometria Hiperbólica	**Geometria Esférica**
Por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta. (Geometria de Lobachevsky – Geometria Hiperbólica).	Por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta. (Geometria de Riemann – Geometria Esférica ou Elíptica).

Fonte: Elaborado pelo autor

Geometria Euclidiana x Geometria de Lobachevisk x Geometria de Riemann

Figura 11: 5º postulado – geometria não euclidiana



Fonte: http://beafemika.blogspot.com/2008/09/euclides-geometrias-no-euclidianas.html

A princípio, essas geometrias não tiveram grandes aplicações, mas posteriormente foram aprimoradas e utilizadas em diferentes campos, como por exemplo, na Teoria da Relatividade de Albert Einstein, nos cálculos das rotas aéreas e marítimas.

Seguem abaixo algumas comparações entre as geometrias euclidiana e esférica:

Quadro 3: Geometria Euclidiana x Geometria Esférica

Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
Por um ponto exterior a uma reta dada (ambos no mesmo plano), existe uma única reta paralela à reta dada.	Por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta.
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo no plano é de 180°, ou seja, é igual a dois ângulos retos.	A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180º, ou seja, maior que dois ângulos retos.
A circunferência de um círculo é igual a π vezes o seu diâmetro.	A circunferência de um círculo é menor do que π vezes o seu diâmetro.
A menor distância entre dois pontos no plano é um segmento de reta.	A menor distância entre dois pontos em uma superfície esférica é um arco de circunferência máxima.

É possível construir um quadrado.	Não é possível construir um quadrado, porém é possível construir um quadrilátero com quatro lados congruentes e quatro ângulos congruentes (porém não retos).
A área é medida em unidade de área.	A área é medida em graus.
A área de um triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura.	A área de um triângulo esférico é encontrada através da soma das medidas dos ângulos esféricos internos, subtraído 180° e multiplicando esse resultado por r^2.

Fonte: Elaborado pelo autor

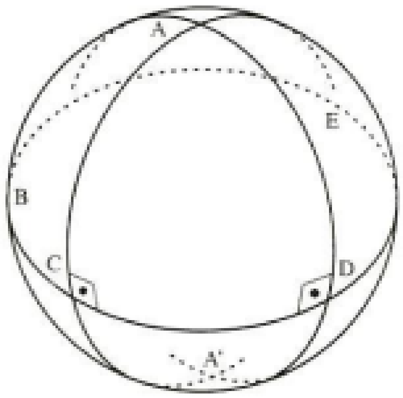
2.8 Geometria Esférica

Geometria esférica é o estudo da geometria na superfície de uma esfera em que a geometria euclidiana não consegue ser usada de forma precisa. Alguns conceitos da geometria esférica são vistos ainda no ensino fundamental nos conteúdos de geografia, quando são trabalhados com os alunos as linhas imaginárias: equador, paralelos, meridianos, fusos horários e etc. Porém, o aluno termina essa fase consciente de que a menor distância entre dois pontos é uma reta. De fato, em se tratando de uma superfície plana. Para uma superfície esférica já não podemos concluir o mesmo conceito.

Através dessa observação, muitos professores de matemática desconhecem outros tipos de geometria e perdem a oportunidade de apresentá-las aos alunos, principalmente, porque partimos do conceito de que não vivemos em um planeta plano. Gostaria de salientar que o objetivo não seria apresentar os cálculos complexos e, sim, de apresentar as ideias elementares de outras geometrias.

A geometria esférica é uma geometria não-euclidiana, tendo como responsável pelo seu desenvolvimento o alemão Georg Bernhard Riemann, contrariando o Postulado 5 de Euclides, que estabelece que não existem paralelas a uma reta dada, considera o plano como uma superfície e as retas sendo círculos máximos da esfera.

Figura 12: Retas representadas no plano de Riemann



Fonte: Coutinho (2001, pg. 74)

As geometrias não-euclidiana vieram para complementar o conhecimento geométrico, e não para substituir a geometria euclidiana. Segundo Coutinho (2001), surgiram duas clássicas Geometrias: a de Lobackevisky (hiperbólica) e a de Riemann (esférica). Existem várias outras, porém vamos nos deter na geometria de Riemann neste trabalho.

Devemos levar em consideração alguns pontos elementares da geometria esférica:

• Uma superfície pode ser finita, mas ilimitada;

• A reta (círculo máximo) tem comprimento finito, mas é ilimitada; pois percorrendo uma circunferência máxima retornamos ao ponto de partida, mas podemos percorrê-la indefinidamente;

• Não existe semelhança de triângulos, só congruência;

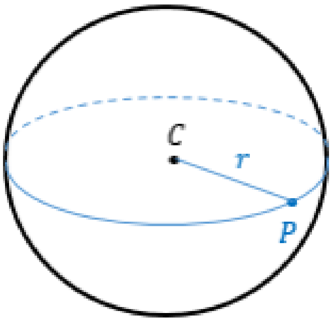
• A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior do que dois ângulos retos;

• A área é proporcional ao excesso da soma dos ângulos internos.

Vamos abordar algumas noções matemáticas elementares da geometria esférica, tais como: esfera, superfície esférica, circunferência máxima, distância entre dois pontos em uma superfície esférica, ângulo esférico, triângulo esférico, e a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Esfera: Seja o ponto C (centro da esfera) e r um número real positivo. Chamamos de esfera o lugar geométrico dos pontos P do espaço, cujas distâncias a C são menores ou iguais a r.

Figura 13: Representação esférica

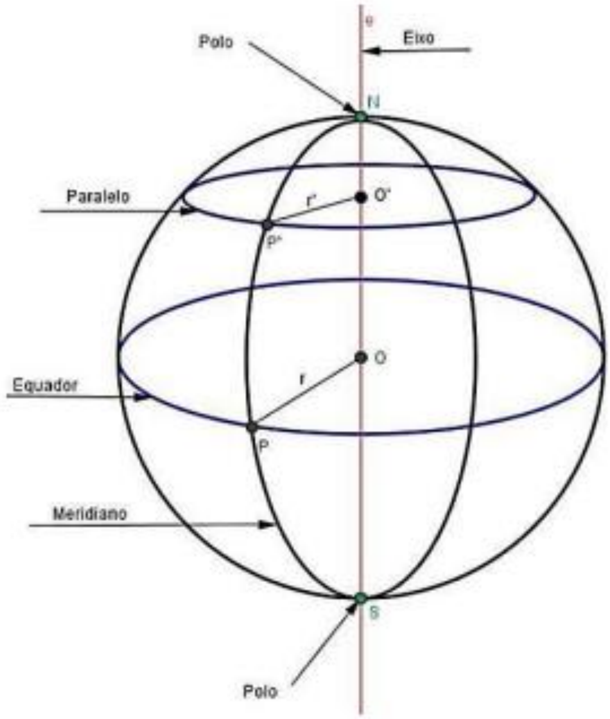


Fonte: Arquivo pessoal do autor

Superfície Esférica: é o lugar geométrico dos pontos que distam exatamente r do centro da esfera. Os elementos notáveis de uma superfície esférica são:

I. Eixo: Trata-se de qualquer reta que contém o centro da esfera.
II. Polos: São os pontos de interseção entre o eixo com a superfície esférica, determinando 2 polos: Polo Norte e Polo Sul.
III. Equador: Circunferência máxima tal que o plano que a contém forma ângulo de 90º com o eixo.
IV. Paralelo: Circunferência tal que o plano que a contém forma ângulo de 90º com o eixo. Nos livros de geografia há ainda a informação de que essa circunferência é paralela ao Equador.
V. Meridiano: Circunferência máxima que contém os polos.

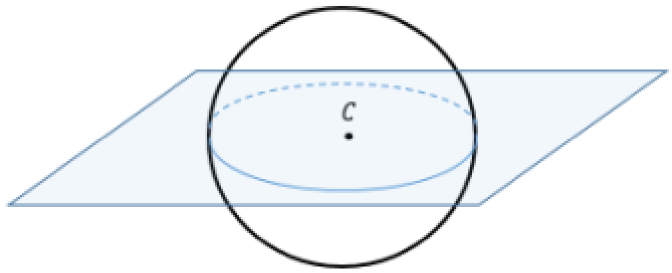
Figura 14: Elementos notáveis de uma superfície esférica



Fonte: Zanella (2011)

Circunferência máxima: A interseção entre a esfera e um plano contendo o centro é chamada de circunferência máxima, que é definida como reta na geometria esférica.

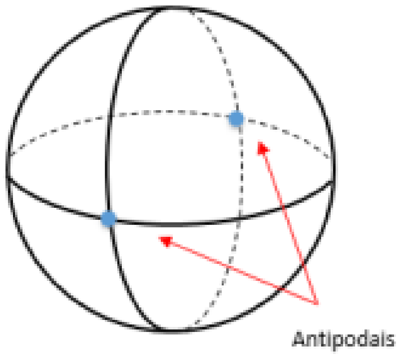
Figura 15: Circunferência máxima



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Os pontos determinados pela interseção de dois círculos máximos são chamados de polos, antipodais ou antípodas. Note que a distância esférica entre dois pontos é maior que zero e menor que π já que a distância é dada pelo comprimento do menor arco que liga os dois pontos. E, a distância será π quando os dois pontos forem antípodas.

Figura 16: Interseção entre dois círculos máximos

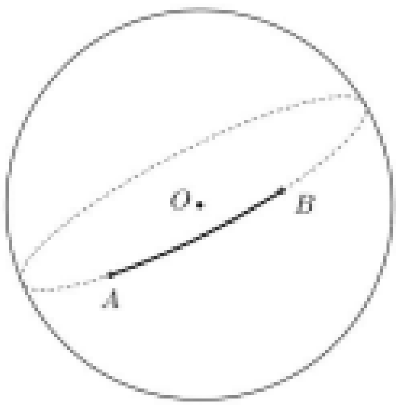


Fonte: Arquivo pessoal do autor

Distância entre dois pontos em uma superfície esférica: Geodésica é a curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos. Ou seja, é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos.

Na geometria plana, a distância entre dois pontos é o segmento de reta formado por esses dois pontos, como o plano na geometria esférica é uma superfície esférica, a distância entre dois pontos é um arco de circunferência máxima, também conhecido como geodésica.

Figura 17: Geodésica



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Podemos obter a medida da distância entre dois pontos em uma superfície esférica a partir do conhecimento da medida do ângulo AÔB, em que O é o centro da esfera, considerando que o arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, temos que:

$$360° \longrightarrow 2\pi r$$

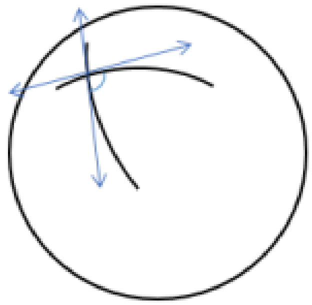
$$\alpha° \longrightarrow d\,(A,B)$$

Portanto,

D(A,B) = $\frac{2\pi r\alpha}{360°}$ onde, D(A,B) é o comprimento do arco AB, r é o raio da superfície esférica e α é a medida do ângulo central.

Ângulo esférico: é o ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas. Sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas semirretas tangentes a esses arcos. O vértice do ângulo esférico é o ponto de interseção entre os dois círculos máximos.

Figura 18: Ângulo esférico

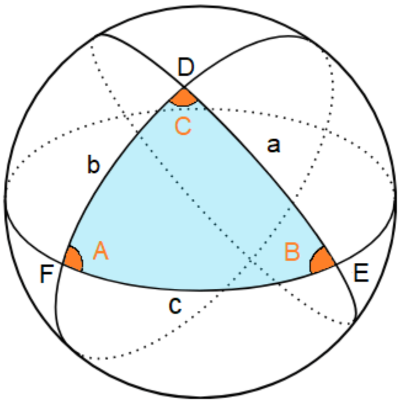


Fonte: Arquivo pessoal do autor

Segundo Santos (2009), outra maneira de definirmos ângulos na superfície esférica é pelo ângulo diedral entre os semiplanos que contém as semicircunferências máximas. Ângulo diedral é o ângulo formado pela interseção entre dois semiplanos de mesma origem.

Triângulo esférico: superfície limitada por três arcos de circunferências máximas, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que uma semicircunferência máxima. De acordo com a figura abaixo, temos a representação de um triângulo esférico de vértices D, E e F; seus lados são as geodésicas a,b e c; e seus ângulos internos A, B e C.

Figura 19: Triângulo esférico



Fonte: https://noic.com.br/astronomia/curso/astronomia-de-posicao/trigonometria-esferica/

Na geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo difere da geometria euclidiana. No triangulo esférico a soma dos ângulos interno varia da seguinte forma:

$$180° < A + B + C < 540°.$$

Diante do conteúdo citado, gostaria de deixar como sugestão de atividade, o uso do software GeoGebra. Não realizei atividades com as turmas, porém é uma das ferramentas que uso quando tenho que tratar de assuntos referentes a geometria plana e sólidos geométricos:

Exemplo 1: Representar elementos da Esfera:

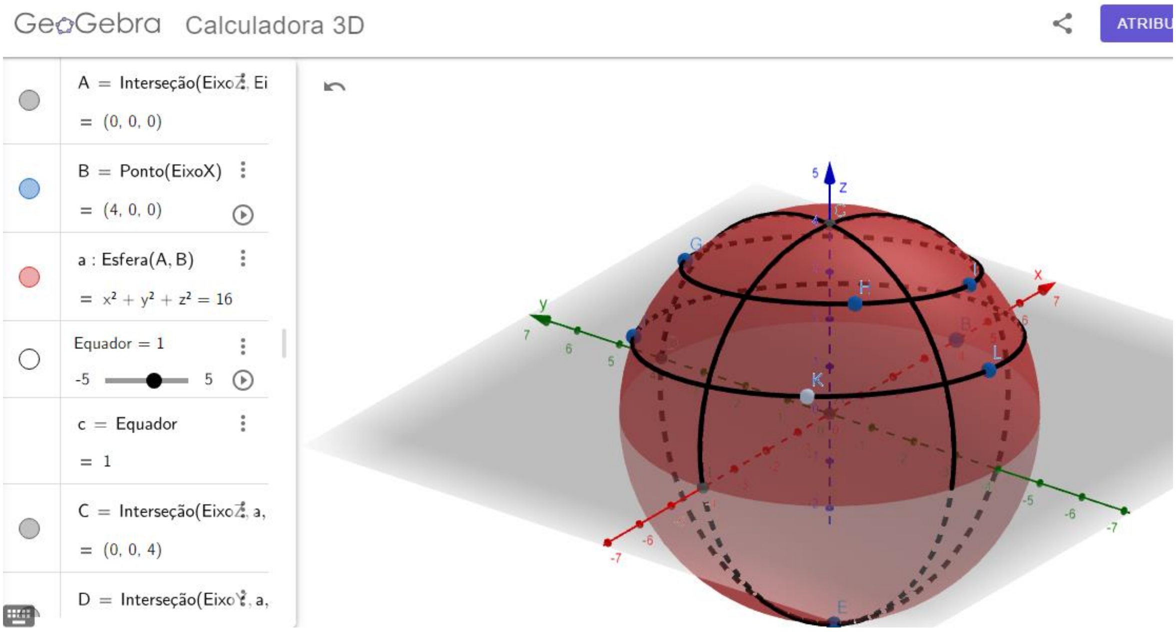
- Traçar os paralelos e os meridianos;

- Identificar eixos;

- Definir polos;

- Equação da esfera.

Figura 20: Representação dos elementos da esfera (Geogebra)



Fonte: Arquivo pessoal do autor

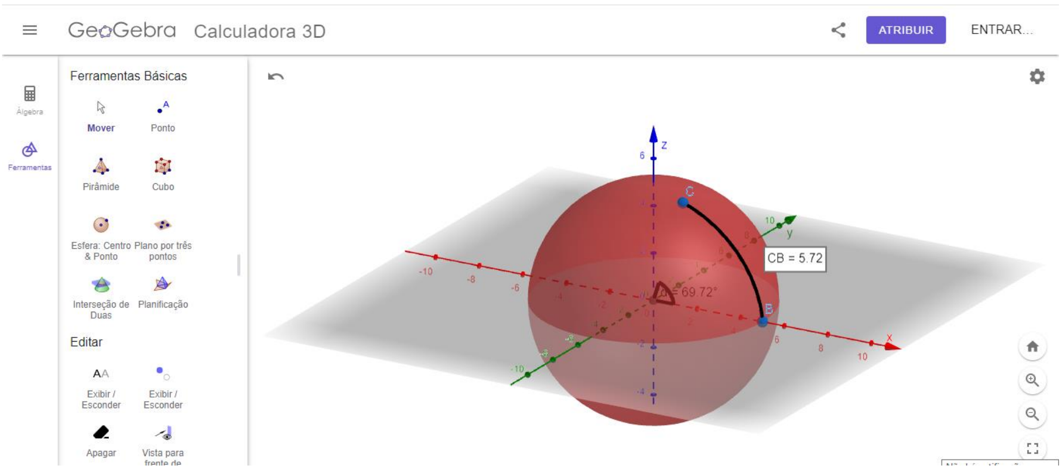
Exemplo 2: Distância entre dois pontos em uma superfície esférica (Geodésica):

- Criar a esfera de raio 5;

- Criar 2 pontos na superfície da esfera;

- Achar a distância entre dois pontos CB.

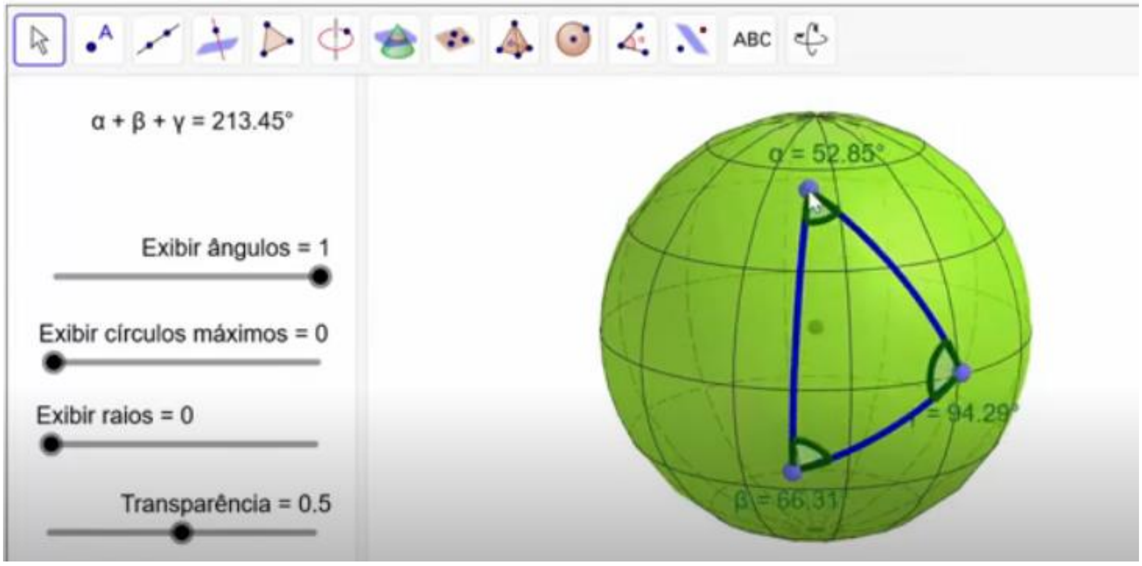
Figura 21: Representação distância entre dois pontos (Geogebra)



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Exemplo 3: Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico:

Figura 22: Triângulo esférico (Geogebra)



Fonte: Arquivo pessoal do autor

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O trabalho foi desenvolvido com base metodológica na pesquisa qualitativa, envolvendo uma turma de alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública do município de Guariba, na qual atuo como professor de matemática. A referida turma, na ocasião da pesquisa, era composta de 23 alunos, dos quais 12 do sexo feminino e 11 do sexo masculino. O objetivo consistiu em investigar como os alunos da referida turma operam com atividades de investigação matemática envolvendo cartografia.

A pesquisa qualitativa é aquela focada em entender aspectos mais subjetivos, como comportamentos, ideias, pontos de vista, etc. Utilizada para explorar fenômenos complexos e compreender as experiências, significados e perspectivas dos participantes.

Segundo Mirian Goldenberg (2004, p.14), “na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc.”.

Já a investigação matemática, por sua vez, é uma abordagem educacional que enfatiza a descoberta e a exploração ativa dos conceitos matemáticos pelos alunos. Em vez de simplesmente receber informações dos professores os alunos são encorajados a fazer perguntas, explorar padrões, formular conjecturas e encontrar soluções por conta própria ou em colaboração com seus colegas.

Essa abordagem visa desenvolver não apenas o conhecimento matemático dos alunos, mas também suas habilidades, seu pensamento crítico, raciocínio lógico e resolução de problemas, capacitando-os a se tornarem pensadores independentes e autônomos.

Ressalto que durante os encontros, anotei e observei os fatos, procurando acompanhar cada grupo na realização das atividades, buscando compreender e questionar o raciocínio dos alunos, para que eu pudesse entender os procedimentos adotados. Estimulando e interagindo com os grupos, criando discussões para que questionassem os resultados obtidos.

Quadro 4: Objetivos e atividades desenvolvidas por encontros

Encontros	Objetivo	Atividade desenvolvida
1º e 2º	Estabelecer uma escala para o mapa.	Definir uma escala para o trajeto demarcado no mapa utilizando instrumentos para medir.
3º e 4º	Elaborar estratégias para calcular a distância utilizando uma escala definida.	Calcular distâncias no mapa através de escala definida.
5°	Avaliação: Escalas Numéricas	Fazer uso dos conceitos de escalas numéricas.
6º, 7º e 8º	Elaborar estratégias para calcular o perímetro e a área de uma figura não regular.	Calcular o perímetro e a área de um polígono não regular.
9º, 10º e 11º	Analisar e interpretar mapas com legendas.	Calcular o número de pessoas de diferentes países, por meio da legenda do mapa.

12º e 13º	Projeção de pontos.	Fazer projeção de pontos em um mapa definindo o seu perfil topográfico.
14º e 15°	Apresentação de Geometrias não euclidianas.	Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e distância entre dois pontos em uma superfície esférica.

Fonte: Elaborado pelo autor

As atividades foram baseadas no cotidiano dos alunos, ou seja, lidar com questões concernentes à vida dos estudantes e a sociedade em que eles estão inseridos é uma das funções sociais da escola, e cabe a ela vincular os conteúdos às necessidades da sociedade. De acordo com a BNCC:

> “[...] cabe aos sistemas e rede de ensino, assim como as escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora [...]” Brasil. Ministério da Educação. BNCC, 2.018. p.19-20.

Contextualizar os conteúdos é fundamental para promover uma aprendizagem significativa, destacando a importância do desenvolvimento de uma abordagem que se baseia em temas relevantes. Para isso, é necessário propor atividades e organizar seções que estejam relacionadas ao ambiente do aluno e às experiências que ele vivencia diariamente.

Partindo desse pressuposto, fazemos uso da matemática por meio da investigação matemática, que é uma abordagem educacional que envolve o uso de situações do mundo real para ensinar conceitos matemáticos. Em vez de apenas aprender fórmulas e procedimentos, os alunos são desafiados a aplicar esses conceitos para resolver problemas autênticos.

A investigação matemática também promove a colaboração e o trabalho em equipe, já que muitas vezes os alunos precisam trabalhar juntos para coletar dados, construir modelos e interpretar resultados.

No entanto, a investigação matemática requer planejamento cuidadoso por parte dos educadores, selecionando situações do mundo real que sejam apropriadas para os alunos e alinhar essas atividades com os objetivos de aprendizagem. Além disso, os professores precisam apoiar os alunos enquanto eles trabalham nas tarefas, fornecendo orientação e *feedbacks* adequados.

No geral, o ensino da matemática por meio da investigação matemática pode ser uma maneira eficaz de ajudar os alunos a desenvolver um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos e como eles se aplicam fora da sala de aula.

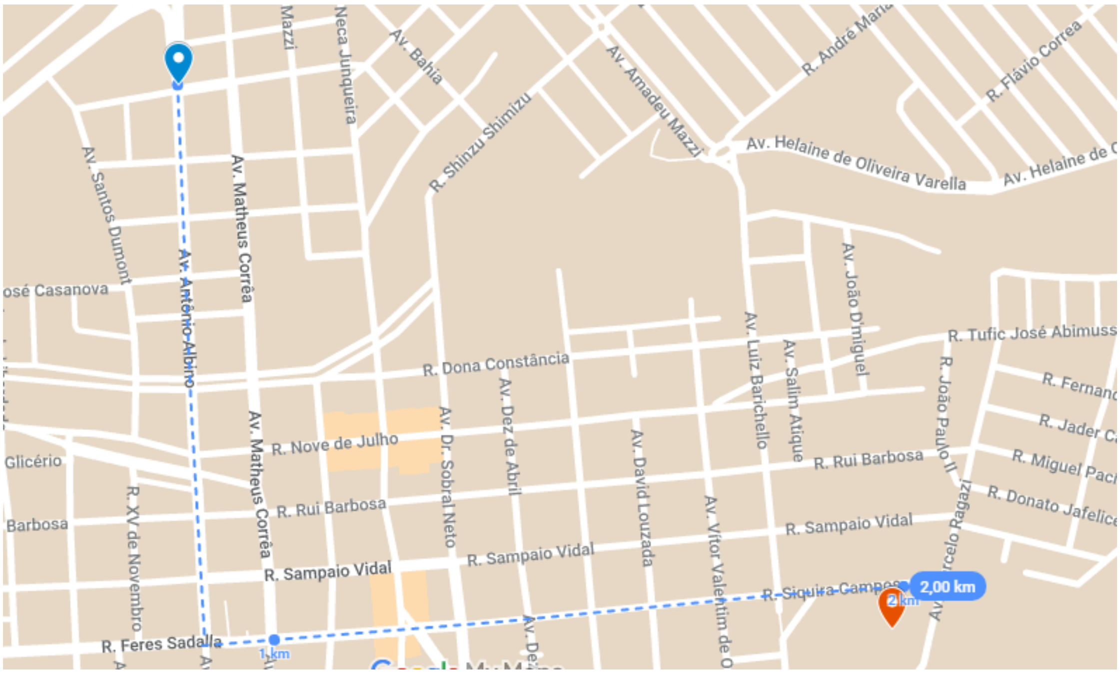
Nesta Seção, também descrevo como abordei e orientei cada uma das atividades desenvolvidas com os alunos. Saliento ainda, que cada atividade foi desenvolvida em grupo de 4 alunos, com exceção da atividade 5 que esta foi aplicada individualmente.

3.1. Primeira Atividade – Definindo Escalas

A primeira atividade envolveu o tema escala numérica, onde propus aos alunos definirem uma escala numérica através de um mapa da cidade, e para que descobrissem a importância da dimensão do espaço através da utilização de escalas presentes nos mapas. Separei a turma em grupos de 4 alunos e entreguei aos grupos a atividade 1:

Atividade 1 – Definir a escala numérica com base nos dados definidos no mapa, ou seja, o trajeto demarcado pela linha tracejada.

Figura 23: Mapa – Atividade I



Fonte: Arquivo pessoal do autor

No primeiro momento, os alunos não receberam nenhuma orientação matemática, cartográfica ou mesmo geográfica. A orientação era que eles realizassem a tarefa de acordo com o solicitado no enunciado, sem auxílio do professor para a compreensão da proposta. A primeira reação dos alunos foi de espanto, já que os mesmos disseram que não estavam acostumados com esse tipo de atividade sem antes terem estudado o conteúdo. No entanto, quis observar os conhecimentos prévios dos alunos e como eles se comportavam diante de um problema real. De posse do mapa, os alunos deveriam criar estratégias para definir a escala, fazendo uso de fórmulas matemáticas, noções de medidas, conversão de unidades, aproximação de valores e outras técnicas. Ao decorrer da atividade fiquei surpreso com a falta de conhecimento sobre o assunto, pois a grande maioria dos alunos não tinham ideia de como conduzir tal problema. Trago adiante alguns relatos dos alunos:

> “Professor, para realizar essa tarefa é só fazer a medição com a régua e pegar o resultado? ” (Aluno 12 – Grupo C).
>
> “Professor, não sabemos o que é uma escala numérica! ” (Aluno 7 - Grupo B)

A resolução de problemas, na investigação matemática, segundo Ponte, Bocardo e Oliveira terá um caráter investigativo, quando:

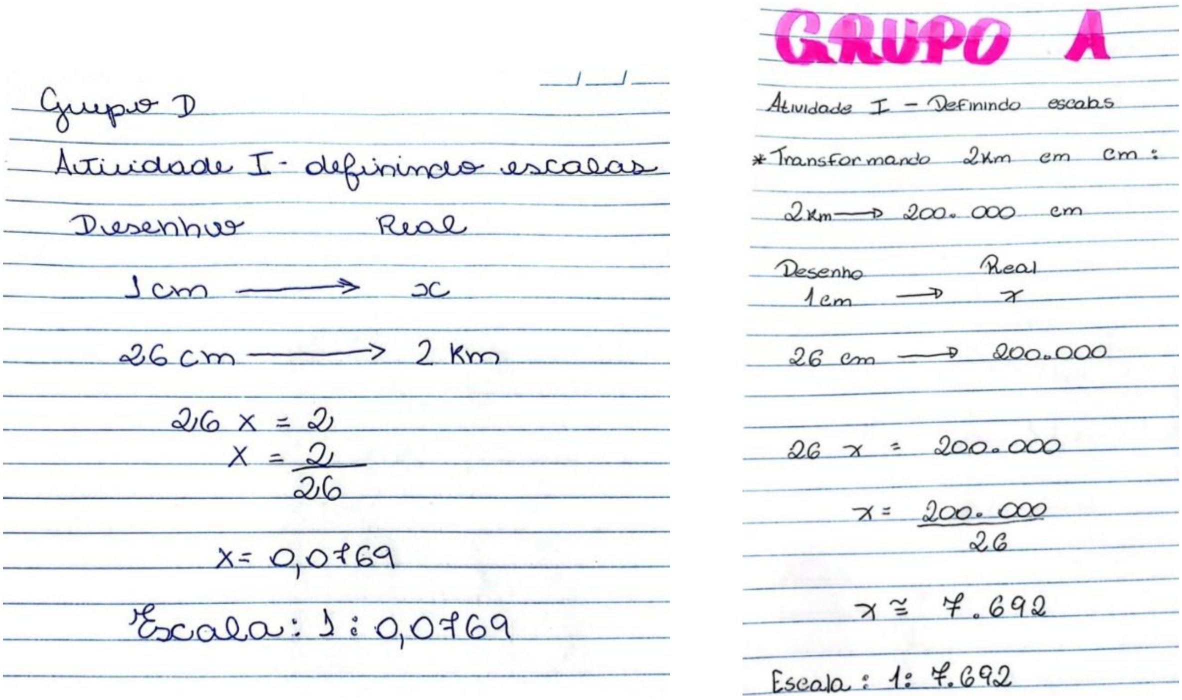
> “[...] envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.20)

Diante dos questionamentos, notei que a grande maioria dos alunos realmente não tinham conhecimento sobre escalas, e a partir daí resolvi introduzir o assunto e instigá-los para obtenção das respostas. Minha primeira intervenção foi em relação aos conceitos matemáticos sobre escalas, então comecei a questionar a distância que eles observaram no mapa (medida real) e a distância que eles haviam medido no mapa (medida do desenho), e disse:

> “A escala é a relação entre a distância medida no mapa e a distância real do trajeto, ou seja, para cada 1 cm do desenho correspondia a quantos centímetros no real?”

Segue abaixo alguns resultados da atividade:

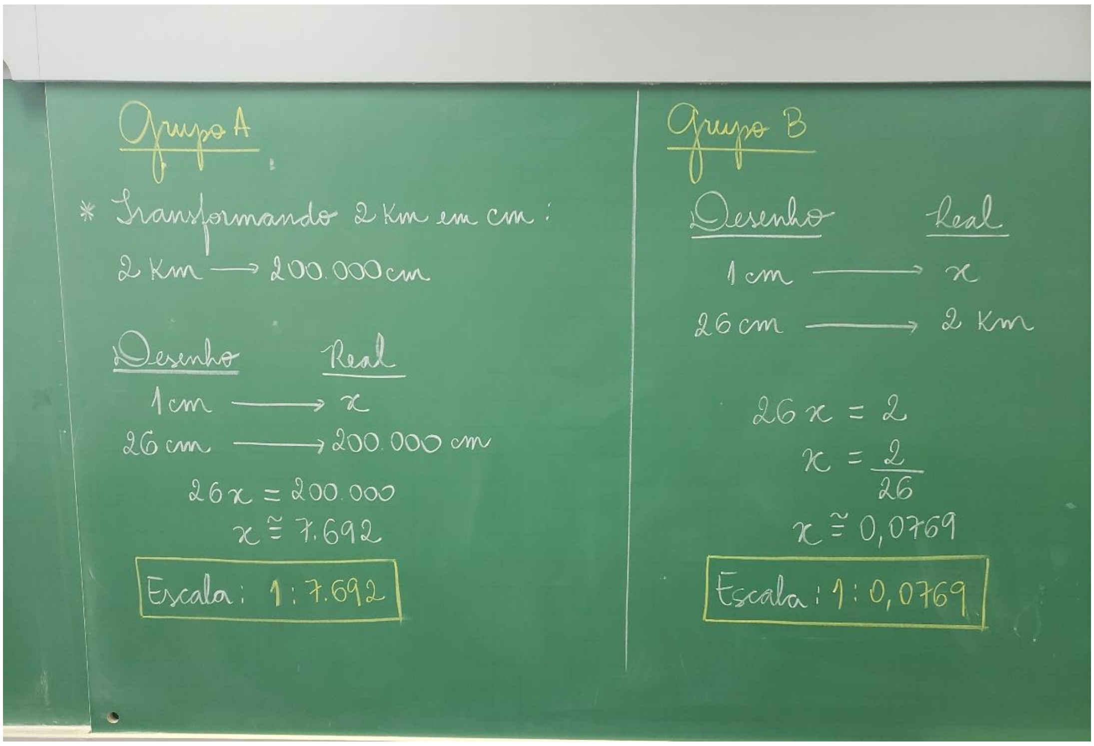
Figura 24: Respostas dos alunos



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Após análise das respostas coloquei as duas situações no quadro de acordo com a figura:

Figura 25: Comparando conclusões



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Em seguida, pedi para que os alunos chegassem a uma conclusão: comparando os resultados e analisando porque os resultados eram diferentes apesar de ser o mesmo problema. Assim, os grupos analisaram e chegaram na mesma conclusão, pois um dos resultados estava diferente por não ter realizado a transformação das unidades de medidas.

No final da atividade solicitei aos alunos para que escrevessem o que tinham achado da atividade. Segue alguns depoimentos:

> "Achei a atividade diferente das que estamos acostumados a realizar, de início tivemos dificuldade em resolvê-la por não termos o conhecimento sobre escalas. Deve ter sido por conta da pandemia (COVID-19) ter atrapalhado nosso aprendizado, mas conseguimos realizá-la." (Aluno 8).
>
> "Eu achei a atividade complicada. O grupo se ajuda bastante e isso torna a atividade mais fácil. Não é tão difícil calcular a distância utilizando escalas. A atividade em grupo é mais fácil, pois os colegas podem se ajudar. Sozinho é mais difícil, porque a pessoa tem que pensar sozinha." (Aluno 15).
>
> "De início ficamos desanimados, passamos muito tempo sem saber o que fazer com as informações porque achamos que não íamos conseguir resolver, mas em grupo pudemos discutir e realizar os cálculos, e a todo tempo queríamos que o professor nos orientasse." (Aluno 09).

Nessa primeira atividade, notei que os alunos se sentiram bastante inseguros na realização. Essa insegurança ocorre pelo fato de que alunos enxergam a matemática como uma ciência pronta e acabada, onde a resposta correta do problema tem solução única e percebemos isso no comentário do aluno 09.

Nas aulas de matemática, os alunos devem expressar suas ideias através da escrita ou conversando com os colegas e os professores. Ao discutir com os colegas durante a realização das atividades, eles podem aprimorar a habilidade de organizar o pensamento e expressá-lo, além de argumentar a seu favor e ouvir as opiniões dos colegas. Dessa forma, são incentivados a ter posturas de respeito, empatia, cooperação, pensamento crítico, entre outras.

Confrontar diferentes ideias e opiniões ajuda os alunos a coordenarem seus próprios pensamentos, formando novas conexões entre os assuntos. Além disso, os diálogos os encorajam a reconhecer a necessidade de obter novas informações, reorganizar e redefinir ideias existentes.

É importante ressaltar que, com atividades práticas e orientações adequadas, os alunos podem superar suas dificuldades e desenvolver uma compreensão mais sólida desses conceitos matemáticos.

3.2. Segunda Atividade – Utilizando escalas para o cálculo de distâncias

Na segunda atividade, aproveitei para dar continuidade ao que eles haviam trabalhado na atividade anterior, ainda explorando o assunto “escalas”. A proposta era que eles (alunos), a partir da escala encontrada, fizessem uso dela e calculassem a distância dos trajetos demarcados no mapa. Tratava-se do mesmo mapa com os trajetos demarcados em cores azul e verde, conforme abaixo:

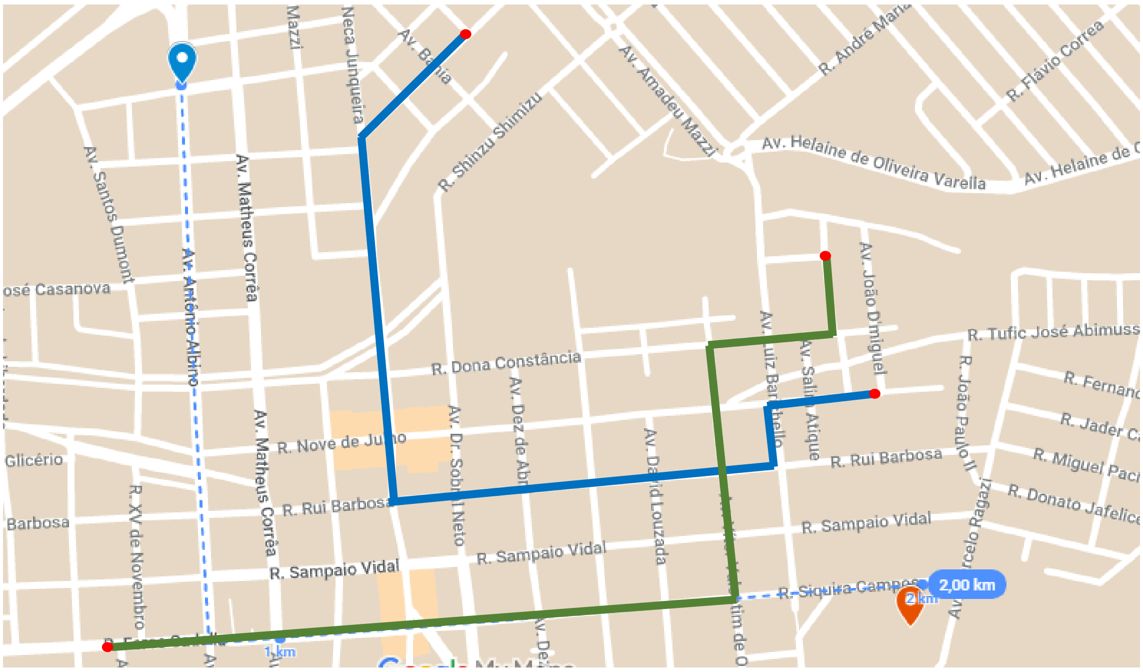
Atividade 2 – Utilizando escalas para cálculo de distâncias.

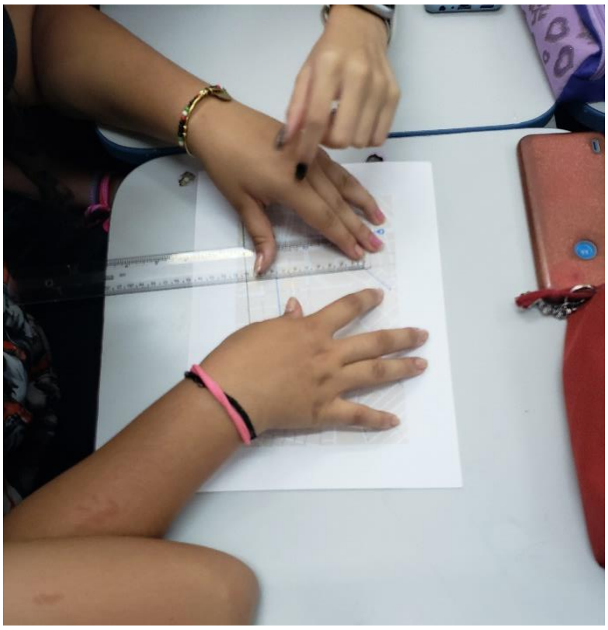
Com base na escala encontrada na atividade 1, calcule a distância real em Km:

a) O trajeto destacado em azul;

b) O trajeto destacado em verde.

Figura 26: Mapa – Atividade II





Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Entender a ideia de escalas pode ser difícil para alguns alunos, especialmente àqueles que tem dificuldade de pensar de forma abstrata, ou seja, de compreender como os números em uma escala se relacionam com os números de forma real. Durante essa atividade, os alunos perceberam que as informações da atividade anterior facilitavam a resolução do problema proposto. Assim, realizaram a atividade sem muitas dificuldades, e após a realização do trabalho em grupo, houve a discussão dos resultados:

> "No começo, meu grupo estava meio perdido, começamos a medir o trajeto e depois somamos os valores, daí percebemos que ainda estava faltando algo, que era fazer a transformação das medidas". (Aluno 11).
>
> "Achei um pouco difícil e confuso, não sabia se teria que transformar os valores antes ou depois". (Aluno 06).
>
> "Para mim não tive muita dificuldade, sabendo da existência da escala ficou mais fácil de saber a distância real do trajeto. Foi só medir o trajeto, multiplicar pelo valor da escala e transformar em quilômetros". (Aluno 09).
>
> "Primeiro fomos medindo e juntando as medições do trajeto azul, e logo pensei em resolver o problema usando regra de três". (Aluno 02).
>
> "Nosso grupo resolveu organizar a tarefa, e dar uma ordem para cada etapa: Primeiro: Vamos medir e somar o trajeto total utilizando a régua. Segundo: Com o uso da escala vamos encontrar a distância do trajeto. E terceiro: Vamos transformar a distância encontrada em quilômetros". (Aluno 03).

Na atividade 2, percebi que os alunos estavam mais à vontade em relação a realização da tarefa, senti que com base nos conhecimentos adquiridos na atividade anterior, eles estavam mais seguros diante da resolução do problema. No momento da socialização houve uma discussão rica entre os alunos, que perceberam a importância de organizar as informações e ordenar a realização das tarefas em etapas, como mencionado pelo Aluno 03.

3.3. Terceira Atividade – Avaliação sobre "Escalas Numéricas"

Na terceira atividade, tive a intenção de realizar uma avaliação em relação aos assuntos abordados nas atividades 1 e 2. Foi elaborado um questionário com 5 questões de múltipla escolha, que por sua vez foi realizada individualmente sem aviso prévio. Seguem abaixo as questões:

1) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala:

(A) 1:250 (B) 1:2500 (C) 1:25000 (D) 1:25000000

2) Considerando que a distância real entre Yokohama e Fukushima, duas importantes localidades, onde serão realizadas competições dos Jogos Olímpicos de Verão 2020 é de 270 quilômetros, em um mapa, na escala de 1:1.500.000, essa distância seria de:

(A) 1,8 cm (B) 40,5 cm (C) 1,8 m (D) 18 cm

3) Escala, em cartografia, é a relação matemática entre as dimensões reais do objeto e a sua representação no mapa. Assim, em um mapa de escala 1:50.000, uma cidade que tem 4,5 Km de extensão entre seus extremos será representada com:

(A) 9 cm (B) 90 cm (C) 225 mm (D) 11 mm

4) Um grupo de pesquisadores do IBGE foi convidado para mapear um trajeto que, em um mapa de escala cartográfica 1: 300.000, mede 3 cm. A distância real do trajeto é de:

(A) 7 Km (B) 9 km (C) 12 km (D) 15 km

5) O professor de Geografia e os alunos da Escola Municipal Guariba analisam um mapa onde a distância real entre duas cidades é 235 quilômetros. Sabendo que a diferença gráfica, no mapa, entre elas é 5 centímetros, qual a escala numérica aproximada desse mapa analisado pelo professor e alunos?

(A) 1:4.700 (B) 1:47.000 (C) 1:470.000 (D) 1:4.700.000

Não devemos pensar na avaliação como algo isolado e sim como parte do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que a ação avaliativa consiste em refletir sobre todos os elementos que compõem o processo de ensino de aprendizagem. Porém, a avaliação passa a ser uma forma de verificação da eficácia do método utilizado pelo professor e com base nos resultados das avaliações, o professor tem como refletir se sua prática foi adequada, e assim, poder reorientar-se quando necessário.

A avaliação formativa, por sua vez, concentra-se no progresso do aluno ao longo do tempo, sendo um processo contínuo e interativo, incorporado ao aprendizado e ao ensino, com o objetivo de fornecer respostas aos alunos e professores. Diferente da avaliação somativa, que tem por objetivo de atribuir uma nota ou julgamento no final de um período de aprendizagem.

Segundo Luckesi (2006), para que a avaliação possa contribuir para uma aprendizagem bem-sucedida é necessário que ela:

> "[...] deixe de ser utilizada como recurso de autoridade, que decide sobre o destino do educando, e assuma o papel de auxiliar o crescimento. [...]"

O quadro abaixo mostra os resultados da avaliação:

Tabela 1: Resultados da Avaliação

Questões	Qtde. Acertos	Qtde. Erros	% Acertos	% Erros
1	19	4	83%	17%
2	18	5	78%	22%
3	12	11	52%	48%
4	21	2	91%	9%
5	19	4	83%	17%
Total	**89**	**26**	**77%**	**23%**

Fonte: Elaborada pelo autor

Com base nos resultados, notei uma discrepância na questão de número 3 em relação as demais questões. Após a realização da avaliação, fiz a devolutiva da mesma para eles verificarem as respostas e analisarem seus erros. Porém, resolvi investigar a questão de maior número de erros. Então questionei-os:

> Professor: “Notei algo diferente nessa atividade, gostaria de saber como vocês realizaram?!?!”
>
> Aluno X: “Então, fizemos primeiro a transformação de 4,5 Km para cm. Como de Km para cm são cinco casas, acrescentamos cinco zeros obtendo 4.500.000 cm. Em seguida dividimos o valor por 50.000, chegando ao valor de 90 cm”.
>
> Professor: “Na verdade, é como se vocês tivessem multiplicado 4,5 por 100.000?!? Correto?!?”
>
> Aluno X: “Isso!!!”
>
> Professor: “Verifiquem por favor então o resultado desse cálculo”.
>
> Aluno X: “Nossa, está errado! Não é 4.500.000 e sim 450.000”.

Diante disso, trabalhei outros exemplos de transformações de medidas e reforcei a ideia de como fazer a transformação corretamente, não apenas fazer os “acréscimos de zeros”.

É importante ressaltar que a devolutiva da avaliação é importante para o processo de desenvolvimento do educando, permitindo que compreenda melhor suas habilidades, destacando pontos fortes e fracos. E com base nos resultados, podemos ajustar o ensino, adaptando assim às necessidades individuais, contribuindo para um aprendizado eficaz e o desenvolvimento contínuo no ambiente escolar.

3.4. Quarta Atividade – Calculando áreas de figuras planas não-regulares

Nesta atividade, propus aos alunos, com base em um mapa que trazia um local de conhecimento deles (o lago da cidade), a ideia de obter o cálculo do perímetro e da área da região demarcada no mapa. Cabe ressaltar que os alunos permaneceram nos mesmos grupos de início das atividades. Segue abaixo a atividade entregue a eles:

Atividade 4 – Calculando áreas de figuras não-regulares
Com base na escala presente no mapa (1:2030), calcule:
a) O perímetro da região demarcada no mapa;
b) A área em metros quadrados (m²).

Figura 27: Mapa – Atividade IV (Lago Municipal)

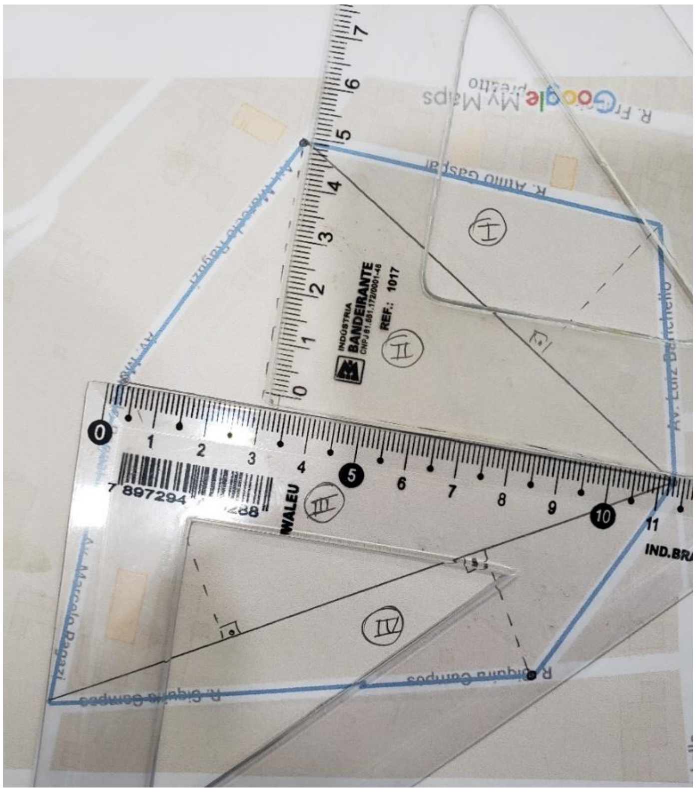
Fonte: Arquivo pessoal do Autor

De posse do mapa, os alunos deveriam criar estratégias que calculassem o perímetro e a área da figura demarcada, fazendo uso daquilo que eles conhecessem para realizar tal atividade. Notei uma certa rejeição dos alunos em relação ao formato da figura, por não se tratar de uma figura (polígono) de formato conhecido por eles, ou seja, que se enquadrasse dentro dos padrões geométricos conhecidos por eles.

No item a) da atividade proposta, os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em realizar o cálculo do perímetro. Porém, no item b), onde o solicitado era calcular a área de uma figura não-regular, os alunos tiveram que pensar em como eles realizariam tal tarefa, pois não se tratava de uma figura que possuía uma fórmula pronta. Segue algumas descrições de algumas respostas das atividades:

> “Primeiro realizamos o cálculo do perímetro, medimos todos os lados da figura e somamos os valores, depois multiplicamos pelo valor da escala e fizemos a transformação. Assim: 9,8 + 4,7 + 5 + 7 + 5,8 + 6,7 = 39 cm. Depois multiplicamos 39 por 2.030, que resultou em 79.170 cm, e dividimos 79.170 por 100, que resultou em 791,7 metros. Para calcular a área tivemos um pouco de dificuldade, mas pensamos e lembramos em algumas aulas de geometria que podíamos dividir a figura em outras formas geométricas que não iria alterar a área total. Daí resolvemos dividir a figura em triângulos, e utilizamos esquadros para traçar as alturas. A figura ficou dividida em 4 triângulos. Então calculamos a área de todos os triângulos:

Figura 28: Utilização de esquadros (Medição das Alturas)



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Triângulo 1:

Base: 9,9 cm ➔ 200,97 m

Altura: 3,4 cm ➔ 69,02 m

Área: $\frac{Base\ x\ Altura}{2} = \frac{13.870,94}{2} = \mathbf{6.935,47\ m^2}$

Triângulo 2:

Base: 10,9 cm ➔ 221,27 m

Altura: 3,4 cm ➔ 105,56 m

Área: $\frac{Base\ x\ Altura}{2} = \frac{23.357,26}{2} = \mathbf{11.678,63\ m^2}$

Triângulo 3:

Base: 13,3 cm ➔ 269,99 m

Altura: 5,4 cm ➔ 109,62 m

Área: $\frac{Base\ x\ Altura}{2} = \frac{29.596,30}{2} = \mathbf{14.798,15\ m^2}$

Triângulo 4:

Base: 13,3 cm ➔ 269,99 m

Altura: 2,7 cm ➔ 54,81 m

Área: $\frac{Base\ x\ Altura}{2} = \frac{14.798,15}{2} = \mathbf{7.399,07\ m^2}$"

"Juntamos todos os valores das áreas dos triângulos: 6.935,47 + 11.678,63 + 14.798,15 + 7.399,07 = 40.811,32 m² ou aproximadamente 4,08 ha". (Grupo B)

"Nesta atividade, achamos bem mais complicada que as outras, porque não tínhamos noção de como encontrar a área da figura. Resolvemos então fazer o cálculo do perímetro e depois pensar na outra parte da atividade. Começamos medindo com a régua e transformando os valores e depois somamos, e encontramos o perímetro, um valor de 792,3 metros. No item b, começamos a discutir se havia uma fórmula para hexágono e encontramos uma para hexágono regular, que é para 6 lados iguais. Como tínhamos calculado o perímetro, resolvemos dividir o valor em 6, assim: 792,3 dividido por 6 que deu 132,05. Usamos a fórmula:

Área Hexágono $\frac{6l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6.(132,05)^2.1,7}{4} = \frac{177.859,46}{4} = 44.464,86\ m^2$

Encontrando o valor de 44.464,86 m²". (Grupo C)

"Nosso grupo só conseguiu calcular o perímetro e ficamos frustrados em não ter conseguido calcular a área. Pensamos, mas não conseguimos chegar em nenhuma fórmula". (Grupo D)

De acordo com o relato do Grupo B fiquei surpreso com a percepção deles em utilizar os esquadros para medir a altura dos triângulos, isso mostra a familiaridade que já estavam criando com a investigação matemática para a resolução do problema apresentado. O mesmo sentimento tive em relação ao Grupo D, a criatividade em tentar utilizar o conhecimento que já possuíam para tentar solucionar o problema, mesmo que de forma errônea.

Notei também, que mesmo com uma certa insegurança, os alunos não deixaram de apresentar soluções para a atividade, investigando-a do ponto de vista matemático. Para tanto, a realização do trabalho em grupo foi de grande importância, pois permitiu essa troca de ideias e interação entre eles.

Segundo Ponte (2003), o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Como de costume, apresentei a eles as resoluções de cada grupo, e comentei sobre o que estava correto e o que podia ser melhorado, e sobre algumas questões também fui questionado: *“Professor, teria outras formas de encontrar a área dos triângulos? ” (Aluno X).* Diante desse questionamento, tive a oportunidade de abordar outros temas, como construções geométricas, para encontrar a altura de um triângulo usando compasso e régua, e apresentei a eles a fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo de posse das medidas dos 3 lados do triângulo. Portanto, fiz com que eles percebessem que existiam várias outras formas de realizar a atividade, e que não devemos nos prender a uma única solução para o problema.

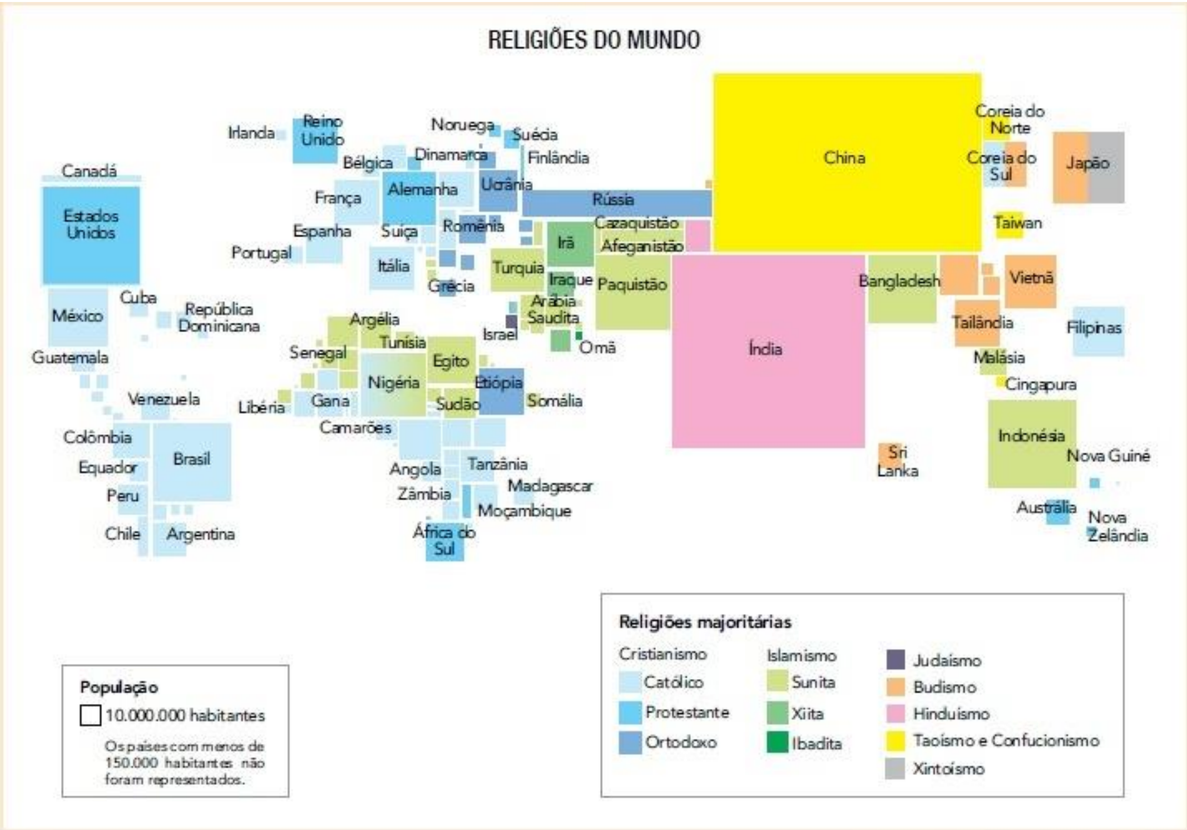
Por outro lado, mesmo que alguns alunos não tenham completado a atividade corretamente, esta possibilitou o uso da investigação matemática como ferramenta na resolução de problemas, permitindo que os tornassem independentes em criar conjecturas, comparar resultados, pois esse tipo de metodologia conduz à colaboração de todos os integrantes do grupo, afim de resolvê-la.

3.5. Quinta Atividade – Descobrindo quantidades por meio da legenda do mapa

Na quinta atividade, propus aos alunos que novamente interpretassem um mapa, desta vez, a atividade trazia um mapa com uma legenda, em que as informações a serem analisadas estavam diretamente relacionadas à interpretação da área do quadrado apresentado na legenda.

Atividade 5 – Descobrindo quantidades por meio da legenda do mapa.
De acordo com as informações da legenda do mapa, calcule aproximadamente o número de adeptos das religiões dos países abaixo:
a) Brasil;
b) Estados Unidos;
c) Índia;
d) China.

Figura 29: Mapa – Atividade V



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Esta atividade requeria dos alunos que calculassem o número de adeptos de cada religião de um determinado país com base nas informações da legenda, fazendo com que criassem conjecturas quanto a proporcionalidade, relacionando as informações da legenda com as áreas dos países do mapa.

Segue abaixo o relato dos grupos:

> “Nosso grupo começou a analisar o mapa e tentar entender o que a legenda queria dizer, então chegamos à conclusão que devíamos pensar quantos quadradinhos daqueles cabiam dentro de cada país. Primeiro medimos com a régua as dimensões do quadradinho da legenda: 0,4 cm x 0,4 cm = 0,16 cm², pensamos que cada quadradinho desse correspondia a 10.000.000 de habitantes. Em seguida, contornamos com caneta os países e fomos medindo os lados e anotando os valores, e depois fomos calculando a área de cada país:
>
> a) Brasil: 1,5 cm x 1,4 cm = 2,1 cm²
>
> 0,16 cm² ➔10.000.000 hab.
>
> 2,1 cm² ➔ X
>
> X = 131.250.000 Católicos.
>
> b) Estados Unidos: 1,9 cm x 1,9 cm = 3,61 cm²
>
> 0,16 cm² ➔10.000.000 hab.
>
> 3,61 cm² ➔ X
>
> X = 225.625.000 Protestantes.
>
> c) Índia: 3,7 cm x 3,7 cm = 13,69 cm²
>
> 0,16 cm² ➔10.000.000 hab.
>
> 13,69 cm² ➔ X
>
> X = 855.625.000 Hinduístas.
>
> d) China: 5,2 cm x 3,5 cm = 18,2 cm²
>
> 0,16 cm² ➔10.000.000 hab.
>
> 18,2 cm² ➔ X
>
> X = 1.137.500.000 Taoístas e Confucionistas”. (Grupo C)
>
> “O nosso grupo teve um pouco mais de dificuldade em perceber que se tratava de uma regra de três. Primeiro medimos as dimensões dos países e calculamos a área, e em seguida ficamos tentando relacionar com a legenda. Depois de um certo tempo discutindo, nosso grupo conseguiu realizar a atividade”. (Grupo A).
>
> “Essa atividade foi bem tranquila para o nosso grupo, conseguimos resolver em pouco tempo e sem problemas. Só medimos as áreas dos países e depois fizemos a regra de três com a informação da legenda encontrando a quantidade de habitantes dos países”. (Grupo D).

Analisando os relatos dos grupos, os alunos, por sua vez, ao tentarem resolver um problema matemático, buscam alternativas ou meios que eles já conhecem e muitas vezes acabam desistindo. Acredito que esse tipo de atividade desperte no aluno o interesse de buscar novas alternativas.

No entanto, durante a realização dessa atividade, os alunos perceberam a aplicação de conceitos já discutidos e aprendidos durantes as aulas anteriores. Buscaram relacionar a área da legenda com as áreas dos mapas, associando assim, ao conceito de proporcionalidade.

No relato dos grupos C e D, podemos perceber o domínio da aplicação dos conceitos matemáticos diante do problema proposto, e que ocorreu de forma diferente do grupo A, uma vez que demandou mais tempo para resolver a mesma atividade.

É importante levar em consideração o ritmo de aprendizagem de cada aluno, considerando a escola como um ambiente em que todos devem ser tratados com equidade e que o desenvolvimento do aluno tem uma forte ligação com o ambiente em que ele está inserido.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, segue abaixo alguns dos objetivos gerais de matemática para o ensino fundamental:

> - identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> - resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;

Após a realização das atividades, solicitei aos alunos para que escrevessem sobre o que eles acharam das atividades realizadas durante os encontros:

> “Achei as atividades muito interessantes e diferentes das que estávamos acostumados nas aulas de matemática. Pudemos resolver a atividade em grupo, facilitou bastante porque um ajuda o outro”. (Aluno A).
>
> “As primeiras atividades eu achei bem difícil, porque tivemos que pensar muito para resolver, mas foi ficando mais fácil. Na minha opinião, as aulas ficaram mais divertidas, porque trocamos informações e mesmo sendo diferentes as opiniões pudemos discutir para resolver de forma correta a atividade”. (Aluno B)
>
> “Na minha opinião, gostaria que todas as aulas de matemática fossem em grupo porque aprendemos de forma divertida, e trabalhamos com questões que fazem parte do nosso dia-a-dia. Aos poucos fomos realizando as

> atividades, e mesmo com dificuldades não desistimos no meio do caminho, pelo contrário, ficamos mais ansiosos para chegar na resposta”. (Aluno C)

Com base nos relatos, podemos perceber a importância de se trabalhar com problemas ou atividades que fazem parte do dia-a-dia dos alunos, instigando o interesse em criar conjecturas para solucionar os problemas. E notamos também a satisfação dos alunos em realizar as atividades em grupo.

3.6. Sexta Atividade – Perfil Topográfico (Projeção de Pontos)

Nesta atividade, trabalhei com outra turma de forma individual, desta vez, os mais novos (7º ano), podendo utilizar cores e que visualmente fosse mais atrativo e compreensivo para os alunos. Então, resolvi aplicar a atividade em conjunto com a professora de geografia. Começamos fazendo a atividade com a introdução do assunto: “Perfil Topográfico”, que de forma colaborativa, a professora de geografia abordou o tema e fez toda a parte teórica.

Em seguida, foi entregue a atividade abaixo para cada aluno, e passei as seguintes orientações:

Atividade 6 – Perfil Topográfico – Projeção de pontos.

a) Pinte o mapa de acordo com as instruções abaixo (medidas em metros):

0 a 50 (verde claro);

50 a 100 (verde escuro);

100 a 150 (amarelo);

150 a 200 (Azul);

200 a 250 (Roxo);

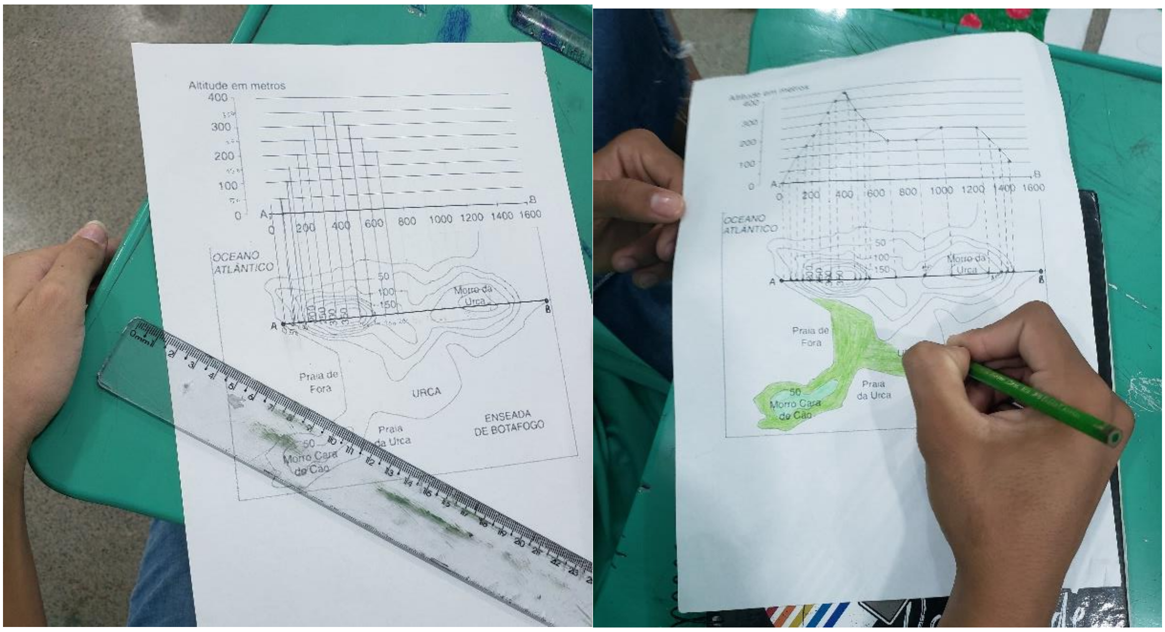
250 a 300 (Laranja);

300 a 350 (Vermelho).

b) Observe o segmento de reta AB no mapa, faça a projeção dos pontos da intersecção do segmento de reta e as divisões do mapa para o gráfico;

c) Ligue os pontos projetados no gráfico.

Figura 30: Realização da Atividade VI



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Começamos a primeira parte da atividade fazendo o item a), colorindo cada repartição do mapa de acordo com o solicitado, e em seguida, fizemos as projeções dos pontos do mapa para o gráfico, que por sua vez, foi mais trabalhosa, mas quando entenderam o processo executaram a tarefa sem maiores dificuldades.

Minha intenção nessa atividade era integrar as duas disciplinas e fazer com que os alunos percebessem essa relação entre elas.

De acordo com a BNCC, a interdisciplinaridade é vista como uma estratégia pedagógica que visa superar a fragmentação do conhecimento, promovendo a integração entre diferentes disciplinas e áreas de estudo. Essa integração permite aos alunos estabelecerem conexões significativas entre os diversos conteúdos curriculares, facilitando a compreensão dos temas abordados e estimulando o pensamento crítico e criativo.

Para promover a interdisciplinaridade, a BNCC sugere a adoção de práticas pedagógicas que incentivem a colaboração entre professores de diferentes áreas, a realização de projetos interdisciplinares que abordem temas relevantes e contextualizados, e o uso de metodologias que estimulem a integração de conhecimentos de forma significativa para os alunos.

Após a execução das atividades, perguntei aos alunos o que eles acharam da atividade. Segue então:

> "Achei a atividade divertida e conseguimos aprender muito. O mais interessante foi ver o desenho do mapa refletido no gráfico". (Aluno C).
>
> "Eu gostei muito de fazer essa atividade, achei bacana ver os dois professores juntos na sala de aula. Mas gostei mesmo de colorir e ver o resultado final do desenho no gráfico". (Aluno D).
>
> "Legal a atividade, só tive dificuldade em ligar os pontos, mas deu tudo certo". (Aluno E).

Diante dos relatos dos alunos, percebemos importância de se trabalhar de forma lúdica no ensino da matemática, visando tornar o aprendizado mais dinâmico e atrativo. De acordo com autores como Malba Tahan e Ubiratan D'Ambrosio, o lúdico desempenha um papel fundamental no processo de aprendizagem matemática, pois estimula a criatividade, o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a colaboração entre os alunos. Ao introduzir jogos e desafios, os professores têm a oportunidade de contextualizar os conceitos matemáticos de forma concreta e significativa, promovendo uma compreensão mais profunda e duradoura.

Aprender matemática não precisa ser algo rígido e incompreensível. É importante criar um ambiente descontraído e acolhedor, onde os alunos se sintam livres para explorar, experimentar e até mesmo cometer erros sem medo de serem julgados. Nesse sentido, o professor desempenha um papel fundamental, pois cabe a ele oferecer oportunidades para que os alunos desenvolvam sua autonomia, criatividade e confiança em relação à matemática. O lúdico não se limita apenas a jogos e atividades recreativas, mas engloba a construção de um ambiente de aprendizagem prazeroso e estimulante.

Assim, a inclusão de atividades lúdicas no ensino de matemática representa uma abordagem pedagógica inovadora e eficaz. Essa estratégia desperta o interesse dos alunos, promove uma aprendizagem mais significativa e contribui para a formação de indivíduos críticos, criativos e proficientes em matemática.

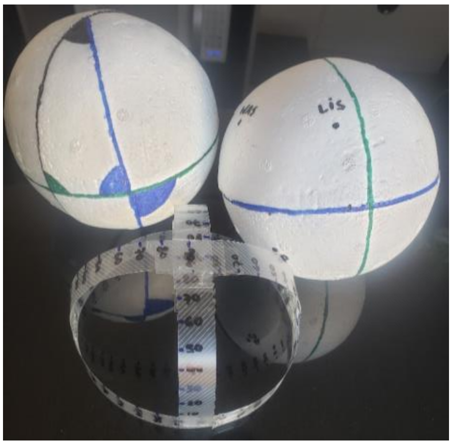
3.7. Sétima Atividade – Trabalhando com geometrias não-euclidianas

Nesta atividade, em particular com uma turma do 9º ano do ensino fundamental, abordei um tema diferente dos conteúdos comumente explorados nos anos finais do ensino fundamental e resolvi trabalhar uma atividade que tratasse um pouco das outras geometrias. Minha intenção foi trabalhar alguns conceitos da geometria esférica e comparar os resultados obtidos entre as duas geometrias.

Antes de iniciar a atividade, questionei meus alunos em relação a outros tipos de geometria, instigando-os a pensar se havia alguma diferença com o que fazemos em uma superfície plana e uma superfície esférica. Partindo desse questionamento, fui introduzindo o conceito de geometria não-euclidiana, em especial, a geometria esférica.

Para a atividade prática levei 2 esferas de isopor e 1 transferidor esférico:

Figura 31: Materiais para realização da Atividade VII



Fonte: Arquivo pessoal do autor

Após a definição de alguns conceitos como: os elementos de uma esfera, círculos máximos, geodésica, ângulos esféricos e triângulo esférico, separei a turma em 4 grupos e damos início às atividades. Separei a atividade em 2 partes: A e B:

Parte A:

A- Utilizando o transferidor esférico, encontre as medidas dos ângulos internos dos triângulos demarcados na esfera:

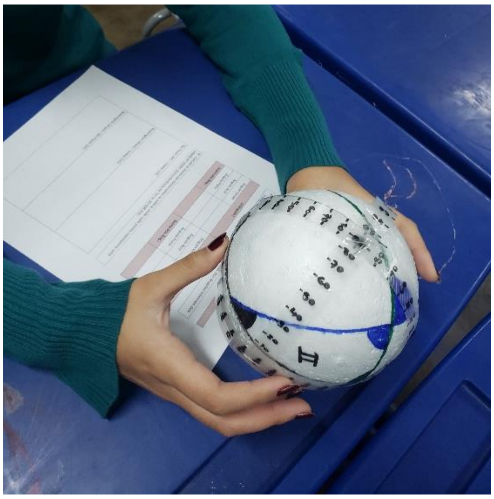
Triângulo I		Triângulo II	
Ângulo Verde		Ângulo Verde	
Ângulo Azul		Ângulo Azul	
Ângulo Preto		Ângulo Preto	
Soma dos Âng.:		**Soma dos Âng.:**	

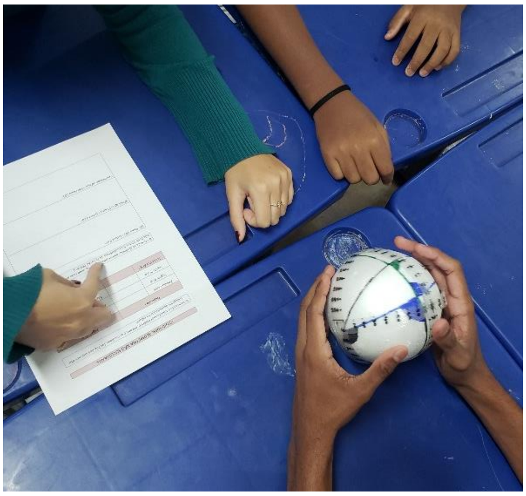
Parte B:

B – Calcule as distâncias demarcadas na esfera, onde cada ponto representa uma cidade do Globo:

São Paulo (SP) – Lisboa (LIS):
Washington (Wash) – Lisboa (LIS):
Washington (Wash) – São Paulo (SP):

Figura 32: Utilização do transferidor esférico





Fonte: Arquivo pessoal do autor

O objetivo da parte A, foi mostrar de forma prática a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e como obter a medida dos ângulos com auxílio de um transferidor esférico, e na parte B, calcular distâncias em uma superfície esférica. E por fim, a partir dos resultados obtidos, fazer comparações entre as duas geometrias (euclidiana e esférica), como, por exemplo, comparar as distâncias entre as cidades obtidas na esfera e aquelas medidas em um mapa plano.

A parte B foi realizada criando uma proporção com a circunferência da Terra e a medida do arco entre as duas cidades:

Comprimento (KM)	**Medida em Graus (º)**
Comprimento da Circunferência da Terra (aproximadamente 40.008 km)	360º
Distância entre as duas cidades (Km)	Distância entre as duas cidades (º)

Essa foi uma das atividades do meu trabalho que mais gostei. O despertar da curiosidade, a ansiedade de como fazer, fui sentindo isso na medida que fomos avançando cada parte da atividade.

No final da atividade pedi para que eles relatassem o que acharam e o que acrescentou no seu aprendizado:

> "Achamos a atividade muito interessante e prática. Não sabíamos da existência de outras geometrias, e como as coisas vão tomando sentido quando podemos praticar". (Grupo A)

> “Muito interessante em como medir os ângulos na esfera, e mais interessante descobrirmos a matemática por meio de atividades práticas. Poder dividir o conhecimento, transformar objetos em estudos, obter uma visão diferenciada de como aprender de modo diferente dos livros didáticos”. (Grupo B)
>
> “Nosso grupo se atrapalhou um pouco para achar as medidas com o transferidor, mas o professor, sempre muito atencioso, foi conduzindo e conseguimos obter as medidas. A atividade que mais gostamos foi de medir as distâncias entre as cidades na esfera, uma vez que a Terra é redonda”. (Grupo C)
>
> “Nossa, quanto aprendizado! Na medida que fomos desenvolvendo os exercícios, fomos percebendo do quanto é importante aprendermos na prática e conseguir fazer aplicação dos conhecimentos teóricos. Queríamos praticar mais, porém o tempo é pouco, mas valeu a pena cada atividade”.(Grupo D).

Com base nos relatos dos alunos, podemos perceber a importância de trabalharmos com atividades nas quais conseguimos conciliar a teoria com a prática. A interação entre teoria e prática na matemática é um ciclo contínuo de inspiração e aplicação. A teoria fornece a base para a resolução rigorosa de problemas, enquanto a prática desafia e refina essas teorias, promovendo um avanço contínuo no conhecimento matemático.

Assim, de uma forma simples, atingimos alguns resultados importantes em relação ao aprendizado dos alunos, uma vez que esses conceitos muitas vezes são explorados e apresentados apenas na teoria, com aplicação de fórmulas e sem nenhuma representação prática. Ao contrário disso, quando dispomos de materiais e atividades práticas, aumentamos a possibilidade de contribuir e enriquecer o aprendizado de forma a despertar a vontade de buscar novos métodos e conceitos matemáticos.

No próximo capítulo, apresento algumas considerações acerca desta intervenção pedagógica, com as quais busco responder à questão de pesquisa. Saliento que são percepções pessoais e que outro pesquisador, talvez, pudesse ter outras opiniões sobre a investigação efetivada.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática e a cartografia estabelecem profundas relações históricas, onde a cartografia é a ciência e a prática de criar mapas, enquanto a matemática fornece as ferramentas e os métodos para fazer isso de maneira precisa e eficaz. Por meio da pesquisa, pude observar essa ligação entre ambas disciplinas e que a investigação matemática desempenha um papel fundamental para solucionar os mais variados problemas relacionados à cartografia.

Partindo desse princípio, diante do presente trabalho, elenquei alguns objetivos para a pesquisa: em primeiro lugar, explorar com os alunos do 9 ano do ensino fundamental atividades que utilizavam a metodologia da investigação matemática e o tema cartografia; em segundo, identificar conceitos e operações matemáticas utilizadas por eles para a resolução das atividades propostas, e por fim, estimulá-los a escreverem sobre os procedimentos matemáticos adotados.

Em relação ao primeiro objetivo, disponibilizei 7 atividades que foram realizadas em 15 encontros, em média dois encontros por atividade. Para as atividades, houve a utilização de vários tipos de mapas e temas relacionados aos conceitos da cartografia, sendo estes presentes em todas as atividades.

Ressalto que nas atividades foram utilizados mapas da própria cidade e de locais conhecidos por eles, onde fiz uso do aplicativo *My Maps* (*Google Maps*) para a criação das atividades. Assim, o estudo da cartografia como tema das atividades, objeto deste trabalho, fez com que os alunos fossem despertados para o querer saber.

Diante das atividades, os alunos, em grupos, analisavam e discutiam estratégias para a realização das questões e elaboravam por escrito as conclusões do grupo. Em seguida, após o término de cada atividade, reuníamos e compartilhávamos as estratégias e soluções diante de todos, para que os alunos tivessem acesso às variadas maneiras de solucionar as atividades solicitadas.

Já o segundo objetivo, que era identificar conceitos e procedimentos adotados por eles na realização das atividades, foram explorados os seguintes conceitos matemáticos: transformação de medidas, escalas, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, regra de três, perímetro, área de figuras planas, interpretação gráfica e projeção de pontos. No entanto, o tema cartografia serviu como instrumento para o ensino de alguns conceitos matemáticos, fazendo com que os alunos percebessem a necessidade da investigação matemática na busca para solucionar problemas. Outro fator importante, foi desenvolver nos alunos o interesse de buscar soluções e estimulá-los a criar novos meios e procedimentos, entendendo que a matemática não é uma ciência acabada e que se limita apenas a uma única solução.

Para estabelecer o terceiro objetivo, onde minha intenção foi estimular a escrita matemática, os alunos deveriam, no final de cada atividade, descrever os procedimentos adotados por eles, pontuando suas dificuldades e facilidades encontradas na resolução dos problemas propostos, e assim, sua interação com os demais membros do grupo.

Percebi que nas primeiras atividades os alunos tiveram algumas dificuldades, tanto na resolução das tarefas quanto na escrita, visto que os alunos não estavam familiarizados com o tema. No entanto, as dificuldades foram diminuindo à medida que foram realizando e expondo suas opiniões diante de todos, adquirindo segurança diante das atividades propostas. Outro fator relevante é a importância de se trabalhar em grupo, uma vez que os alunos têm a oportunidade de discutir conceitos matemáticos, compartilhar estratégias de resolução de problemas, propiciando assim, um ambiente colaborativo, podendo se beneficiar das diferentes perspectivas e abordagens dos colegas.

Diante dos resultados da pesquisa posso inferir que os alunos por meio das atividades propostas: tiveram a oportunidade de criar novas conjecturas, ou fizeram uso das que já conheciam, revendo assim os conceitos já aprendidos; o fazer coletivo, por meio dos trabalhos em grupo, possibilitando assim a troca de ideias, a verificação dos resultados e a contribuição para a autonomia de cada um deles; o aprendizado através de resolução de problemas que retratam o cotidiano dos alunos.

Gostaria de relatar também o quanto foi prazeroso e satisfatório em se trabalhar com atividades práticas e lúdicas, uma vez que conseguimos despertar a curiosidade e o interesse dos alunos, podendo contextualizar o ensino, utilizando-se de situações do meio em que os alunos estão inseridos, promovendo assim, uma aprendizagem mais significativa e próxima da realidade.

Ao terminar esta dissertação, gostaria de comentar que buscarei proporcionar aos meus alunos diferentes tendências e metodologias, para melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem.

E por fim, espero que o presente trabalho possa servir de inspiração para que novas práticas sejam pensadas, formuladas e desenvolvidas em sala de aula em diferentes contextos e realidades.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, MEC. **Parâmetros curriculares nacionais: Geografia.** Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CASTRO, José Flávio Morais. **História da Cartografia e Cartografia Sistemática.** Belo Horizonte, MG: Ed. PUC Minas, 2012.

COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas.** 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática.** Campinas: Papirus, 2001.

FRANCISCHETT, M. N. **A cartografia no ensino da geografia: a aprendizagem mediada.** Cascavel: Edunioeste, 2004.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Editora Recorde, 2004.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar - estudos e proposições.** – 18. ed. – São Paulo: Cortez, 2006.

MARTINELLI, Marcello. **Cartografia para escolares: um desafio permanente. In: Cartografia para Escolares no Brasil e no mundo.** Belo Horizonte: CD-Rom. 2002.

OLIVEIRA, Cêurio de. **Curso de cartografia moderna**. Rio de Janeiro: IBGR, 1988. Dicionário cartográfico. 4º edição. Rio de Janeiro: IBGE, 1993.

PASSINI, E. Y. **Prática de Ensino de Geografia e Estágio Supervisionado**. São Paulo: Contexto, 2007.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Autêntica Editora, 2003.

RICHTTER, Denis e MORAES, Loçandra Borges de. **A cartografia escolar na BNCC de Geografia do Ensino Fundamental: uma análise do pensamento espacial e do**

raciocínio geográfico. In: ROSA, Claudia do Carmo, BORBA, Odiones da Fátima, OLIVEIRA, Suzana Ribeiro Lima. (org.). **Formação de professores e ensino de Geografia: contextos e perspectivas.** Goiânia: ed. C&A Alfa Comunicação, 2020. P. 141-168.

ROCHA, Cézar Henrique Barra. **Geoprocessamento: tecnologia transdisciplinar.** Juiz de Fora, MG: 3ª Ed. Do Autor, rev. e atual., 2007.

SANTOS, J. C. A. P. **Uma proposta de geometria não euclidiana para sala de aula.** São Paulo: IME – USP; Projeto de ensino de matemática, 2009.

SASSERON, Lúcia Helena. **Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola.** Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências, v. no 2015, 2015, pp. 49-67.

TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava.** Rio de Janeiro: Record, 1993.

Links acessados:

<https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/as-projec-o-es-cartogra-ficas.html>. Acessado em 12/02/2024.

<http://beafemika.blogspot.com/2008/09/euclides-geometrias-no-euclidianas.html> Acessado em 13/02/2024.

<https://noic.com.br/astronomia/curso/astronomia-de-posicao/trigonometria-esferica/> Acessado em 13/02/2024.

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_do_mapa-m%C3%BAndi>Acessado em 21/02/2024.

<https://seminarioc1.blogspot.com/2017/04/escrita-cuneiforme.html> Acessado em 21/02/2024.

<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/medidas-de-comprimento> Acessado em 21/02/2024.