

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Fractais com Transformações Afins

Barbara Carmona Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Barbara Carmona Silva

Fractais com Transformações Afins

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
Agosto de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586f Silva, Barbara Carmona
Fractais com Transformações Afins / Barbara
Carmona Silva; orientador Miguel Vinícius Santini
Frasson. -- São Carlos, 2024.
62 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Fractais. 2. Transformações afins. 3. Sistemas
iterados de funções. I. Frasson, Miguel Vinícius
Santini, orient. II. Título.

Barbara Carmona Silva

Fractals with Affine Transformations

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
August 2024

Dedico este trabalho aos meus amados pais,

ROSE & FRANCISCO,

e aos meus queridos filhos de coração,

RAUAN & LUIZ.

São eles os pilares do meu crescimento e inspiração diária.

*Que este trabalho, tal qual um fractal,
reflita a infinita complexidade e beleza do nosso vínculo.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela força e orientação durante toda minha jornada acadêmica até aqui, iluminando meu caminho e fortalecendo meu esforço diário.

Aos meus pais, Rose e Francisco, meu muito obrigada, pelo apoio e sacrifícios que tornaram meu caminho possível, seu encorajamento inabalável e suas crenças em mim são como âncora que me sustenta em tempos de desafios e alegrias.

Agradeço aos meus sobrinhos, Rauan e Luiz, que trago em meu coração como filhos. Vocês são minha inspiração diária. Que este trabalho sirva como um lembrete de que o aprendizado é uma das maiores dádivas que podemos levar para a vida.

Ao meu namorado, Felipe, cujo amor, compreensão e paciência me fortaleceram em todos os aspectos da vida. Seu apoio inabalável e seu sorriso amoroso iluminam meus dias, mesmo nos momentos mais desafiadores.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu professor orientador, Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson, por seu comprometimento excepcional, orientação e apoio incansável ao longo deste processo de pesquisa. Foi um privilégio ser orientada por alguém tão exemplar. Obrigada por me auxiliar nesta jornada de licenciada a mestre.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.

*“As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones,
os litorais não são círculos e as cascas das árvores não são lisas,
tampouco os raios se deslocam em linha reta.”*

(Benoit Mandelbrot)

RESUMO

SILVA, B. C. **Fractais com Transformações Afins**. 2024. 62 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Os fractais são formas geométricas que apresentam a propriedade da autossimilaridade, isto é, partes da forma têm as características, com ligeiras variações, do todo. São formas de grande beleza, e realizam-se na natureza, como em algumas plantas (ramos, folhas, flores), animais (conchas de moluscos, penas), cristais, flocos de neve, cordilheiras, rios, nuvens etc. Neste trabalho estudaremos um subconjunto dos fractais que pode ser caracterizado completamente pela autossimilaridade dada por um conjunto de transformações do plano que mantém fixa a figura. A teoria que estuda tais formas autossimilares é conhecida como a teoria dos Sistemas Iterados de Funções. Apesar da sofisticação da teoria, a parte com transformações afins é belíssima e acessível para alunos do ensino médio, incluindo o cálculo da dimensão dos fractais.

Palavras-chave: Fractais, Transformação Afim, Sistemas Iterados de Funções.

ABSTRACT

SILVA, B. C. **Fractals with Affine Transformations**. 2024. 62 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Fractals are geometric shapes that have the property of self-similarity, that is, parts of the shape have the characteristics of the whole, with slight variations. They are shapes of great beauty, and are found in nature, such as in some plants (branches, leaves, flowers), animals (mollusc shells, feathers), crystals, snowflakes, mountain ranges, rivers, clouds, etc. In this work we study a subset of fractals that can be completely characterized by the self-similarity given by a set of transformations of the plane that keep the figure fixed. The theory that studies such self-similar forms is known as the theory of Iterated Function Systems. Despite the sophistication of the theory, the part with affine transformations is beautiful and accessible to high school students, including computing the dimension of fractals.

Keywords: Fractals, Affine Transformations, Iterated Function Systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espiral Áurea.	21
Figura 2 – Colar de Apolônio.	22
Figura 3 – Conjunto de Cantor.	22
Figura 4 – Curva de Peano.	23
Figura 5 – Curva de Koch e Floco de Neve.	23
Figura 6 – Triângulo e Tapete de Sierpinski.	24
Figura 7 – Conjunto de Julia.	25
Figura 8 – Conjunto de Mandelbrot.	26
Figura 9 – Interpretação geométrica do Método de Newton.	28
Figura 10 – Método de Newton para $f(x) = x^2 - 5$ e suas bacias de atração em \mathbb{R}	31
Figura 11 – Método de Newton para $f(x) = x^3 - 1$ e suas bacias de atração em \mathbb{R}	31
Figura 12 – Fractal de Newton para o polinômio $z^3 - 1$	32
Figura 13 – Deformação de um conjunto pela função $f(z) = z^2$	34
Figura 14 – Exemplos de fractais de Julia.	36
Figura 15 – Valores de c para os conjuntos de Julia da figura anterior.	37
Figura 16 – Conjunto de Julia “Basílica” estudado.	39
Figura 17 – Transcrição do triângulo de Sierpinski como um SIF.	42
Figura 18 – Passos das iterações do SIF do triângulo de Sierpinski.	44
Figura 19 – Curvas de nível da função menor distância de um ponto a um conjunto.	49
Figura 20 – Curvas de nível das distâncias de dois conjuntos.	50
Figura 21 – Imagem das instruções do Octave para o Triângulo de Sierpinski.	54
Figura 22 – Imagem das instruções do wxmaxima para a Folha de Samambaia.	56
Figura 23 – Decomposição do fractal “flor” em partes similares.	57
Figura 24 – “Flor” quadrada gerada com um SIF.	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Figuras autossimilares	19
1.2	Uma linha do tempo do estudo dos fractais	19
1.3	Exemplos de figuras autossimilares	21
1.3.1	Espiral áurea	21
1.3.2	Colar de Apolônio	21
1.3.3	Conjunto de Cantor	21
1.3.4	Curva de Peano	22
1.3.5	Floco de Neve de Koch	23
1.3.6	Triângulo de Sierpinski	23
1.3.7	Dimensão de Hausdorff	24
1.3.8	Conjuntos fractais de Julia	24
1.3.9	Fractal de Mandelbrot	25
2	FRACTAIS DE JULIA E DE MANDELBROT	27
2.1	Introdução: convergência de métodos numéricos	27
2.2	Método de Newton	27
2.3	Órbitas de pontos e bacias de atração	29
2.4	Funções iteradas e popularização dos fractais	33
2.5	Autossimilaridades de fractais gerados por processos iterados	33
2.6	Conjuntos fractais de Julia	35
2.6.1	Ordem no caos: algumas propriedades	35
2.7	Conjunto de Mandelbrot	39
3	FRACTAIS COM SISTEMAS ITERADOS DE FUNÇÕES	41
3.1	Introdução	41
3.2	Sistemas Iterados de Funções	42
3.3	Espaços métricos e distância de Hausdorff	43
3.3.1	Espaços métricos	43
3.3.2	Convergência de sequências	45
3.3.3	Contrações, pontos fixos e convergência de órbitas	46
3.3.4	Conjuntos compactos	48
3.3.5	Distância de Hausdorff	48

3.4	Contrações afins	50
3.5	Convergência das iteradas de um SIF	51
3.6	Como gerar imagens de um SIF	52
3.6.1	No Octave	52
3.6.2	No wxMaxima	53
3.7	Um exemplo	56
4	CONCLUSÃO	59
	REFERÊNCIAS	61

INTRODUÇÃO

1.1 Figuras autossimilares

O fascinante caos ordenado na geometria com padrões aparentemente complexos e interligados com a natureza é o que hoje conhecemos como conjunto de fractais, que são obras de arte matemáticas, com o início nos estudos de objetos com propriedades autossimilares.

Figuras autossimilares são objetos geométricos que utilizam padrões matemáticos em suas transformações. Essas figuras ou estruturas são exatas ou aproximadamente semelhantes as partes ou elementos que os compõem, ou seja, um objeto é autossimilar quando permanece o mesmo em qualquer escala em que seja observado.

Tal autossimilaridade é a base do conjunto de fractais, que durante todo seu caminho até a sua definição formal em 1970, que veremos em breve, desafiou a Geometria Euclidiana e diversos estudiosos com suas teorias e construções.

1.2 Uma linha do tempo do estudo dos fractais

Abaixo, temos a construção de uma pequena linha do tempo com alguns pensadores sobre a autossimilaridade e fractais, até sua criação e sua utilização nos dias de hoje. Adiante, nos aprofundaremos em algumas dessas construções.

- **Desde a antiguidade:** Espiral Áurea usada pela primeira vez a muitos anos atrás, contribui para a beleza e harmonia da matemática e natureza. Ver figura 1.
- **Século II a.C.:** Apolônio desenvolve construções com círculos e retas tangentes que geram fractais denominados Colar de Apolônio. Ver figura 2.

- **1500:** Dürer realiza construções com polígonos regulares, gerando fractais que levam seu nome, ([DÜRER, 1525](#)).
- **1808:** Gauss faz suas primeiras contribuições para a teoria dos polígonos regulares, ([GAUSS, 1986](#)).
- **1883:** Cantor desenvolve sua teoria dos conjuntos e autossimilaridade, construindo o Conjunto de Cantor, ([GRATTAN-GUINNESS, 2005](#)). Ver figura 3.
- **1890:** Peano publica seu “monstro matemático” chamado de Curva de Peano, que até hoje desperta curiosidade e críticas, ([PEANO, 1890](#)). Ver figura 4.
- **1891:** Hilbert publica uma curva de cobertura da superfície de um quadrado, ([HILBERT, 1891](#)).
- **1906:** Koch publica sua Curva e Ilha de Koch, onde sua construção lembra a de um Floco de Neve, ([KOCH, 1906](#)). Ver figura 5.
- **1918:** Julia e Fatou publicam trabalhos semelhantes sobre autossimilaridade. Ver figura 7.
- **1919:** Hausdorff publica um trabalho sobre dimensão, conhecida como Dimensão de Hausdorff, usado por Mandelbrot anos depois para a definição de fractais, ([HAUSDORFF, 1914](#)).
- **1920-1930:** Sierpinski descreveu a figura conhecida como Triângulo de Sierpinski, ([SIERPIŃSKI, 1915](#)). Ver figura 6.
- **1967:** Mandelbrot publica seu trabalho sobre o comprimento da Costa da Grã-Bretanha, ([MANDELBROT, 1967](#)).
- **1975:** Mandelbrot publica a definição formal de Fractal, utiliza autores e publicações anteriores para embasar suas ideias, ([MANDELBROT, 1975](#)).
- **1982:** Barnsley desenvolve um algoritmo para modelagem de fractais, ([BARNSELEY, 2000](#)).
- **1985:** Musgrave gera paisagens com fractais, ([MUSGRAVE, 1993](#)).
- **1986:** Glazier *et al.* publicam um estudo sobre aplicação dos fractais na física do caos, ([GLAZIER *et al.*, 1986](#)).
- **1990:** Falconer cria um estudo com discussões sobre os desafios atuais na teoria das dimensões fractais, ([FALCONER, 1990](#)).

Daí em diante, os fractais popularizaram-se e houve inúmeras publicações desde então.

1.3 Exemplos de figuras autossimilares

Com a linha do tempo, podemos perceber que as figuras autossimilares datam de antes de Cristo e nos dá a base para o que hoje denominamos fractais. Nos aprofundaremos no trabalho de alguns pesquisadores contidos na linha do tempo.

1.3.1 Espiral áurea

Sem autor conhecido, a *espiral áurea* é um trabalho de conceito matemático usado e observado no decorrer da história em que podemos construir um retângulo semelhante ao mesmo, retirando-se um quadrado, e traçando um quarto de círculo nesse quadrado. Assim, sucessivamente vamos construindo a chamada “espiral áurea”, que é autossimilar em cada retângulo. É encontrado na natureza, como nas formas de conchas de moluscos e pétalas de flores, na construção de alguns edifícios históricos, em obras de grandes artistas como Leonardo da Vinci, entre outros. A razão áurea nos mostra como a matemática influencia e contribui na beleza e harmonia da natureza. Veja a Figura 1.

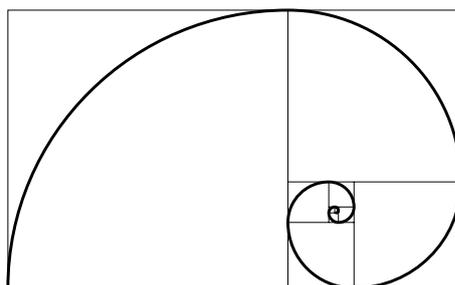


Figura 1 – Espiral Áurea.

1.3.2 Colar de Apolônio

Apolônio de Perga foi um matemático grego, nascido por volta de 262 a.C.. Conhecido por suas contribuições na geometria, tendo como sua obra mais famosa “Cônicas”. Em um de seus problemas ele propõe encontrar um círculo tangente a três outros círculos. Apolônio descobriu que existem dois círculos que não se intersectam e são tangentes aos outros dois círculos originais. Pensando nesse problema como um processo iterativo, podemos construir o fractal chamado *Colar de Apolônio* ou *Junta de Apolônio*. Veja a Figura 2.

1.3.3 Conjunto de Cantor

Introduzido pelo matemático alemão Georg Cantor em 1883, em seu estudo das propriedades topológicas dos conjuntos, o *conjunto de Cantor* é um exemplo de um conjunto

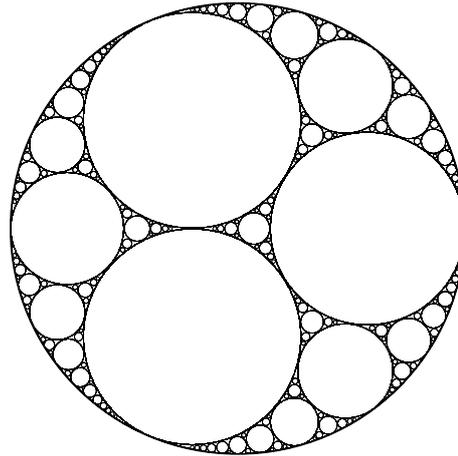


Figura 2 – Colar de Apolônio.

autossimilar, infinito não-enumerável, fechado, com a mesma cardinalidade que o conjunto dos números reais, um conjunto perfeito (fechado e sem pontos isolados) e de medida nula¹.

A sua construção se dá considerando um segmento de reta, então dividir o mesmo em três partes iguais e eliminar a central. Repetir a mesma construção anterior em cada segmento e, assim, sucessivamente e indefinidamente. Logo o Conjunto de Cantor é o conjunto de pontos que permanecem após as infinitas fases ou, dito de outra forma, dos pontos que não são removidos em algumas fases. É um objeto fundamental no estudo moderno da teoria dos conjuntos. Veja a Figura 3.



Figura 3 – Conjunto de Cantor nas cinco primeiras iteradas do processo.

1.3.4 Curva de Peano

Giuseppe Peano foi um matemático italiano com diversas contribuições na teoria dos conjuntos, dos números e na geometria. Sua contribuição para a Teoria Fractal foi na construção da Curva de Peano em 1890. A construção de uma curva em um segmento pode ser usada para definir uma curva que preenche todo o plano de maneira ordenada. Iniciamos com um segmento de reta, substituímos por uma curva de nove segmentos e cada segmento seguinte por mais uma curva de nove segmentos, e assim sucessivamente e indefinidamente. É um exemplo clássico de objeto fractal com propriedade de autossimilaridade complexa e infinita, que pode ser visto na

¹ Um conjunto A tem medida nula se dado um número pequeno $\varepsilon > 0$, conseguimos uma coleção de intervalos I_n que cobrem A e cuja soma dos comprimentos de I_n não excede ε .

Figura 4. Também desenvolveu o conceito de dimensão fracionária que serviu como base para outros autores aprimorarem o conceito.

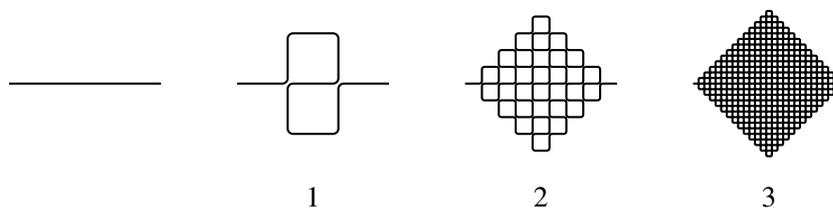


Figura 4 – Curva de Peano com até 3 iterações do processo.

1.3.5 Floco de Neve de Koch

O matemático polonês Helge Von Koch criou em 1905 uma curva que hoje recebe seu nome. Iniciando-se com um triângulo equilátero, em cada próxima construção, acrescenta-se um outro triângulo equilátero de cada lado, retirando-se o segmento do meio (base do triângulo). O resultado após infinitas iterações é a figura que se assemelha a um floco de neve, uma formação cristalina, formado do processo de adição e remoção de triângulos equiláteros em cada lado de um triângulo inicial. Acreditamos que seus trabalhos auxiliaram na descoberta e definição do que é um fractal. Veja a Figura 5.

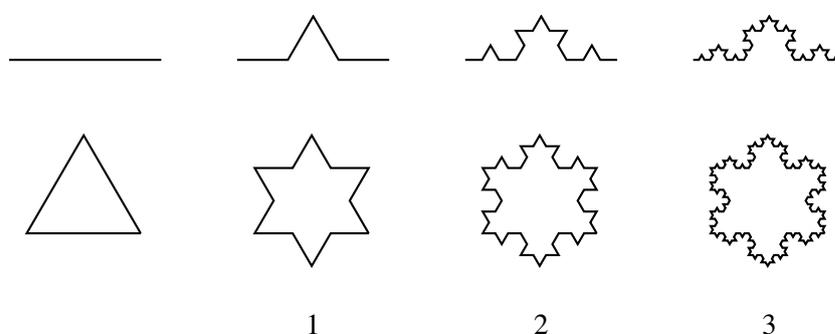


Figura 5 – Curva de Koch e Floco de Neve em 3 iterações do processo.

1.3.6 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski foi um matemático polonês com grande reputação, principalmente nas décadas de 1920-1930, quando seu nome foi dado a uma cratera lunar. Uma de suas publicações descreveu a figura conhecida como Triângulo de Sierpinski onde, considerando um triângulo equilátero, devemos marcar os segmentos dos pontos médios para dividir em 4 outros triângulos equiláteros e eliminar o central, repetir os passos anteriores indefinidamente. Podemos utilizar o mesmo pensamento para outras figuras como o quadrado, chamado de Tapete de Sierpinski, dividindo cada lado do quadrado em 9 partes. Vejamos alguns exemplos de suas construções (Figura 6).

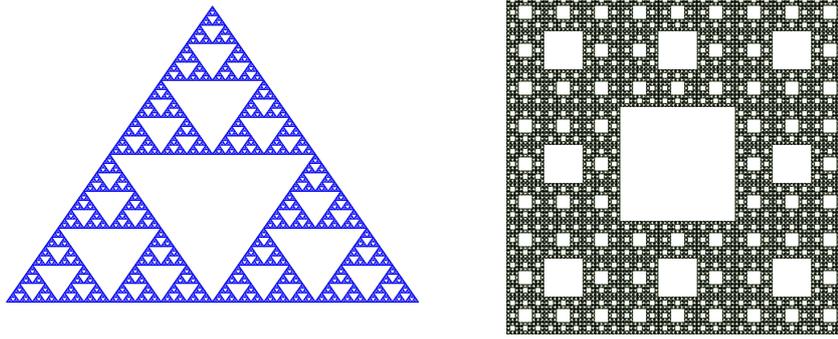


Figura 6 – Triângulo e Tapete de Sierpinski.

1.3.7 Dimensão de Hausdorff

Felix Hausdorff foi um matemático conhecido por seu trabalho sobre dimensão fracionária, que leva o nome de Dimensão de Hausdorff, que é uma generalização da dimensão Euclidiana para conjuntos não lineares e fractais. Essa medida de dimensão permite medir a complexidade de um conjunto fractal, fornecendo uma forma de quantificar seus detalhes e padrões. Todo seu trabalho serviu de base para a estruturação da teoria e definição de fractal.

O conceito de dimensão é claro para segmentos, quadrados ou cubos, cujas dimensões são 1, 2 e 3, respectivamente. Se encolhemos um segmento, um quadrado ou um cubo pela metade, respectivamente o comprimento é encolhido por $\frac{1}{2}$, a área é encolhida por $\frac{1}{2^2}$ e o volume é encolhido por $\frac{1}{2^3}$, ou seja, a dimensão está no expoente. Hausdorff generalizou o cálculo da dimensão de um objeto pelo seu método da contagem de bolas. Se precisamos de N bolas de raio ε (pequeno) para cobrir um objeto, e se ao encolher essas bolas em $\frac{1}{r}$ precisarmos de M bolas, calculamos d onde $M = N^d$ e a dimensão do objeto será d , calculado como $d = \frac{\log M}{\log N}$.

Para fractais que podem ser divididos em n partes encolhidas por $\frac{1}{r}$, não é difícil calcular que a dimensão de Hausdorff do objeto é $d = \frac{\log n}{\log r}$. Por exemplo, a dimensão do conjunto de Cantor (duas partes de $\frac{1}{3}$ do tamanho) é $d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$. A dimensão do Triângulo de Sierpinski (3 cópias de metade do tamanho) é $d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58$. A dimensão do floco de neve de Koch (cada segmento é substituído por 4 segmentos de $\frac{1}{3}$ do tamanho) é $d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$.

1.3.8 Conjuntos fractais de Julia

O matemático francês Gaston Julia criou uma das representações mais populares e estudadas na área da matemática e representação gráfica. Durante um período em que ficou internado, escreveu sobre um conjunto de fractais dados, grosso modo, pelos pontos $z \in \mathbb{C}$ para os quais o processo iterativo $z_{n+1} = f(z_n)$ começando com $z_0 = z$, não tende ao infinito, para uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ simples, em geral da forma

$$f(z) = z^2 + c, \quad \text{para algum } c \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

(Mais estudaremos em maior detalhe no capítulo 2, e veremos que esses conjuntos são as bacias de atração de f .) O conjunto de Julia exibe uma variedade de formas intrincadas e complexas, que podem variar de espirais a figuras mais geométricas. São estruturas fascinantes com detalhes e padrões infinitos em todas as escalas. Após 25 anos de sua publicação, depois das guerras mundiais, seu trabalho foi redescoberto e Julia conseguiu ver sua aplicação e popularização. Veja a Figura 7 para um exemplo desses conjuntos.

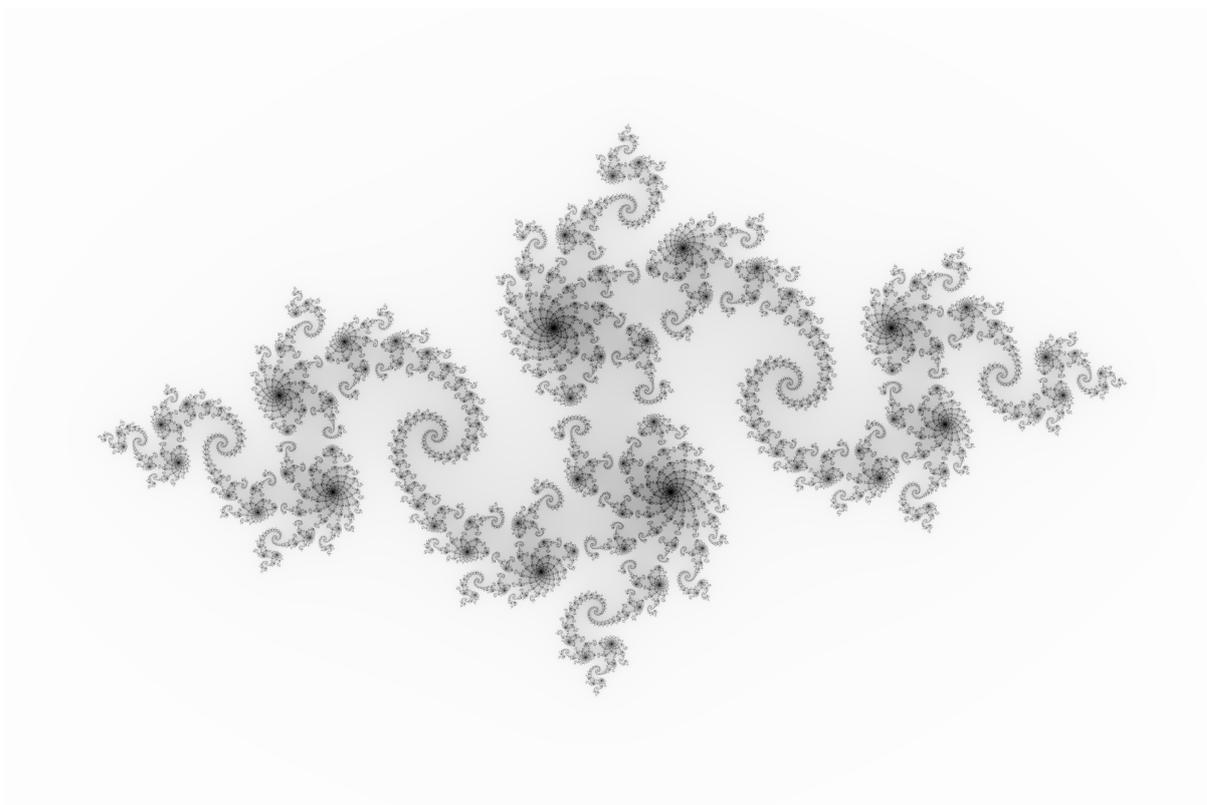


Figura 7 – Conjunto de Julia da função $f(z) = z^2 - 0,797 - 0,16i$.

1.3.9 *Fractal de Mandelbrot*

Benoit Mandelbrot foi um matemático de família judaica, veio morar na França fugindo da perseguição do governo nazista. Foi educado por um tio professor e matemático. Em 1958 muda-se para os EUA, onde começa um trabalho na IBM (International Business Machines Corporation), onde pôde com ideias criativas e o desejo de encontrar algo novo na geometria, utilizar os recursos disponibilizados pela empresa para auxiliar suas descobertas. Analisa os trabalhos de Fatou e Julia com o auxílio de computadores, visualizando-os pela primeira vez em 1970. Às consequências desse trabalho nomeou de Geometria Fractal, cujos objetos apresentavam características de autossimilaridade e podiam ter a dimensão dentro da definição de Hausdorff. Sua obra trouxe uma nova perspectiva para a compreensão e modelagem de padrões complexos encontrados na natureza e em sistemas abstratos. Mandelbrot, em suas pesquisas descobriu que figuras geradas a partir de equações matemáticas com números complexos pode gerar um padrão

fractal incrivelmente bonito, fascinante e com características de autossimilaridade. Na próxima seção nos aprofundaremos mais no Conjunto de Mandelbrot, mostrado na Figura 8.

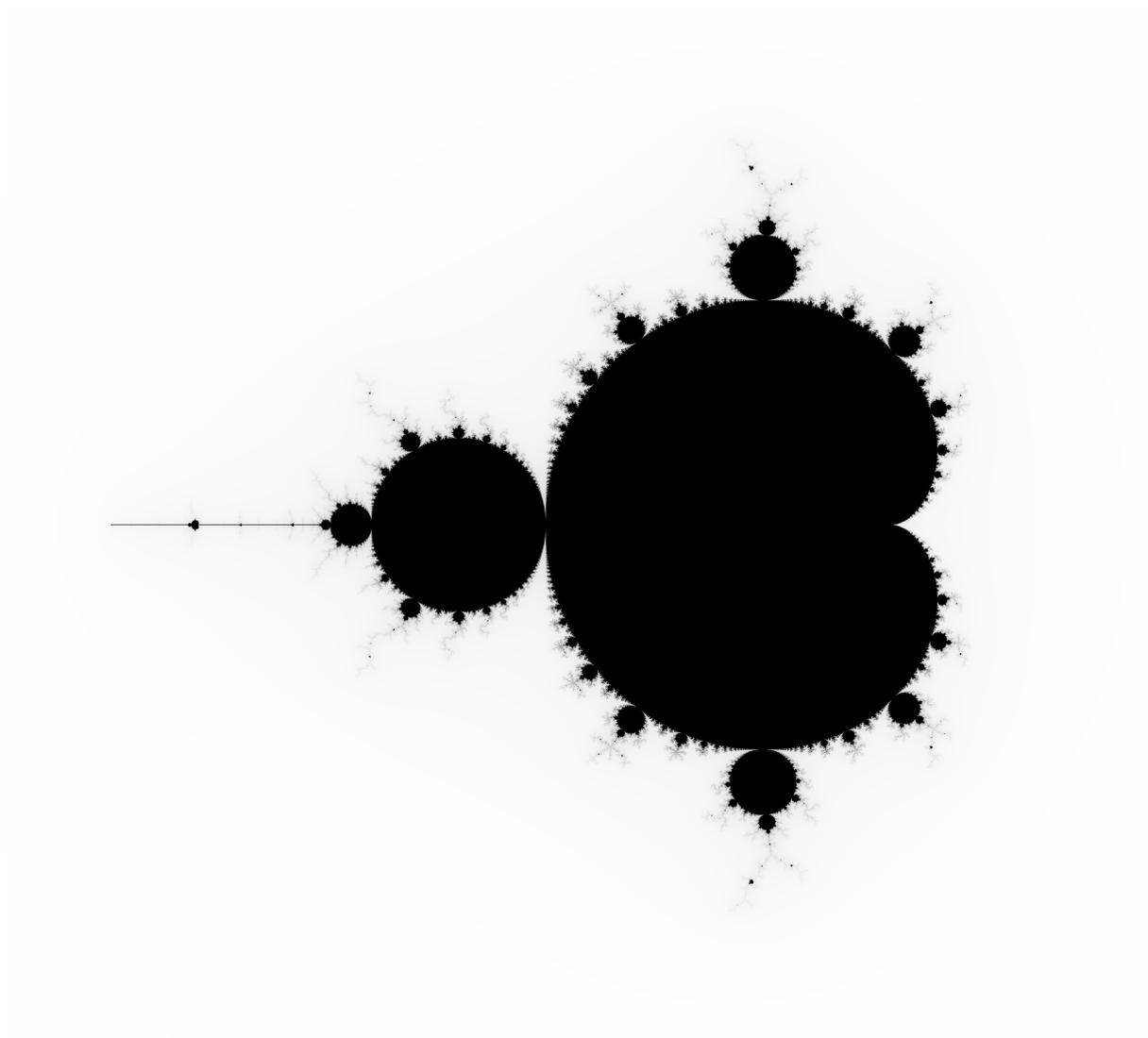


Figura 8 – Conjunto de Mandelbrot, estudado na Seção 2.7, p. 39.

FRACTAIS DE JULIA E DE MANDELBROT

2.1 Introdução: convergência de métodos numéricos

Entre as aplicações da matemática no mundo real está em se obter boas aproximações numéricas para soluções de equações ou sistemas lineares ou não-lineares, onde entram as aplicações dos métodos numéricos, especialmente na Engenharia e na Computação, onde é muito importante o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes, que convergem em poucas iterações. Por isso, desde há séculos, os matemáticos estudam a convergência dos métodos iterativos.

Um *método iterativo* é definido por um valor inicial x_0 e uma maneira de se definir o próximo valor a partir do anterior, como em $x_{n+1} = f(x_n)$ onde f é uma função.

Aconteceu que, nesse estudo da convergência dos métodos numéricos, ao se analisar as regiões dos valores iniciais em que os métodos convergem a determinadas raízes (as chamadas bacias de atração de cada raiz), os matemáticos se depararam com regiões complexas, com autossimilaridades (veja uma explicação adiante, na Seção 2.5), regiões hoje chamadas fractais.

Vamos começar nosso estudo por um dos métodos de cálculo de aproximações de raízes.

2.2 Método de Newton

Um dos métodos mais importantes é o Método de Newton, também chamado de Newton-Raphson¹, para se encontrar aproximações das raízes de uma função $f(x)$. A ideia é simples: começando de uma aproximação x_0 da raiz de $f(x) = 0$, em cada passo iterativo aproxime $f(x)$ ao redor do ponto $(x_n, f(x_n))$ por sua reta tangente r e calcule o zero x_{n+1} dessa reta.

¹ Isaac Newton (1643-1727) em sua obra intitulada “*De analysi per aequationes número terminorum infinitas*”, usou o método pela primeira vez para estudar as raízes da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$. Joseph Raphson (1648-1715), em 1690 aprimorou o método para utilização em qualquer função real em sua obra “*Analysis aequationum universalis*”.

Do Cálculo, sabemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função $f(x)$ é sua derivada $f'(x)$, de forma que a reta tangente ao gráfico em $x = x_n$ tem equação

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad (2.1)$$

Fazendo $y = 0$ em (2.1) e dividindo por $f'(x_n)$ podemos calcular o zero x_{n+1} :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.2)$$

Se fazemos $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, o método de Newton tem a forma de um método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$.

Por utilizar retas tangentes, esse método também é conhecido como método das tangentes. Para uma interpretação geométrica, veja a Figura 9.

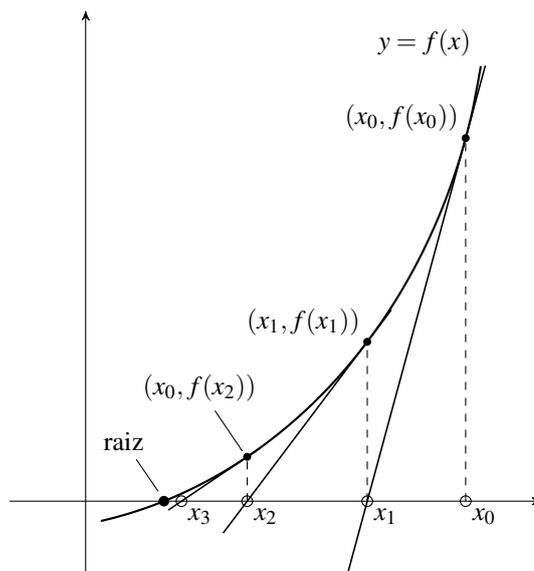


Figura 9 – Interpretação geométrica do Método de Newton. Trace tangentes ao gráfico no ponto $x = x_n$, e a raiz é aproximada pelas interseções das tangentes com o eixo das abscissas.

Exemplo 1. Vamos usar o método de Newton para calcular $\sqrt{5}$. Sabemos que $x = \sqrt{5}$ satisfaz $x^2 = 5$ e portanto $\sqrt{5}$ é a raiz (positiva) da função $f(x) = x^2 - 5$. Então $f'(x) = 2x$, e a iteração do método de Newton fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n} \quad (2.3)$$

Por $2^2 = 4$ ser o quadrado perfeito mais próximo de 5, usaremos $x_0 = 2$ como aproximação

inicial da raiz e temos as seguintes iteradas, com estimativa² de erro.

$x_0 = 2$	Erro
$x_1 = \frac{2^2 + 5}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4} = 2,25$	$ x_1^2 - 5 = \frac{1}{16} = 0,0625$
$x_2 = \frac{x_1^2 + 5}{2x_1} = \frac{161}{72} = 2,236111\dots$	$ x_2^2 - 5 = \frac{1}{5184} \approx 1,93 \times 10^{-4}$
$x_3 = \frac{x_2^2 + 5}{2x_2} = \frac{51841}{23184} = 2,2360679777\dots$	$ x_3^2 - 5 = \frac{1}{537497856} \approx 1,86 \times 10^{-9}$

Com apenas 2 iterações já temos uma aproximação com pelo menos três casas decimais corretas, e com 3 iterações, já temos 9 casas decimais corretas! A título de comparação, com o uso de uma calculadora, temos $\sqrt{5} \approx 2,23606797749979$.

2.3 Órbitas de pontos e bacias de atração

Considere um método iterativo $x_{n+1} = f(x_n)$. Dado um valor inicial x_0 , chamamos a sequência (x_0, x_1, x_2, \dots) de *órbita* de x_0 . No Exemplo 1 vimos o exemplo de uma órbita começando em $x_0 = 2$, usada para calcular $\sqrt{5}$.

Se queremos estudar todas as condições iniciais cujas órbitas convergem para algum valor α , estamos interessados no conjunto chamado de *bacia de atração de α* , e denotado $B(\alpha)$.

Observando seu ponto inicial, além das órbitas convergentes, uma órbita pode permanecer limitada, por exemplo formando um ciclo ao redor de alguma possível órbita periódica³, ou pode divergir em módulo para ∞ , ou mesmo não estar bem definida. Mais adiante, na Seção 2.6 veremos exemplos desses conjuntos.

Se para um valor inicial x_0 , alguma iterada x_n não estiver definida, impedindo a definição da órbita para todo n natural, x_0 é chamado um *ponto de escape*.

Exemplo 2. Retomando o Exemplo 1, o gráfico de $f(x) = x^2 - 5$ é convexo, com as retas tangentes ficando todas abaixo do gráfico. Veja a Figura 10.

Se $x_0 = 0$, a reta tangente é horizontal e não cruza o eixo x , então a iterada (2.3) não está definida. Então 0 é um pontos de escape, o único como veremos abaixo.

Se $x_0 > \sqrt{5}$, a tangente por $(x_0, f(x_0))$ cruza o eixo x em $x_1 > \sqrt{5}$ mais próximo a $\sqrt{5}$ do que era x_0 , de forma que x_n convergirá para $\sqrt{5}$. Se $0 < x_0 < \sqrt{5}$, a reta tangente cortará o eixo x em $x_1 > \sqrt{5}$, então caímos no caso anterior e x_n também convergirá para $\sqrt{5}$. Assim, se $x_0 > 0$, as iteradas convergem para $\sqrt{5}$, isto é, $B(\sqrt{5}) = (0, \infty)$.

² Do Cálculo, pela Fórmula de Taylor de $f(x)$ ao redor de $\sqrt{5}$, temos $f(x) \approx f(\sqrt{5}) + 2\sqrt{5}(x - \sqrt{5})$ para x próximo de $\sqrt{5}$, e portanto podemos estimar o erro $|x - \sqrt{5}| < \frac{1}{4}|f(x)|$, de forma que x tem pelo menos tantas casas decimais corretas quanto $|f(x)|$.

³ Mais adiante, na Seção 2.6 veremos exemplos desses conjuntos, especialmente quando estudarmos o fractal Basílica.

Se $x_0 < 0$, temos o caso espelhado do caso $x_0 > 0$ e podemos concluir que as iteradas convergem para $-\sqrt{5}$, em outras palavras, $B(-\sqrt{5}) = (-\infty, 0)$.

Exemplo 3. Vamos estudar o método de Newton para $f(x) = x^3 - 1$. A única raiz real de $f(x)$ é $x = 1$. Como $f'(x) = 3x^2$, a iterada do método de Newton fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2}. \quad (2.4)$$

Para $x_0 > 1$, sendo o gráfico de $f(x)$ côncavo, a tangente em $(x_0, f(x_0))$ fica abaixo do gráfico e é crescente, e como $f(x_0) > 0$, a iterada x_1 estará em $(1, x_0)$, fazendo com que a órbita seja uma sequência decrescente e limitada. Do Cálculo, sabemos que essas sequências convergem, e passando o limite $n \rightarrow \infty$ em (2.4), pode-se mostrar que o limite da sequência é um zero de f . Portanto, a órbita convergirá para 1.

Para $0 < x_0 < 1$, a tangente em $(x_0, f(x_0))$ é crescente e fica abaixo do gráfico, e como $f(x_0) < 0$, a iterada x_1 estará em $(1, \infty)$, e daí caímos no caso anterior, e a órbita convergirá para a raiz 1.

Note que para $x_0 = 0$, a reta tangente ao gráfico é horizontal, então $e_0 = 0$ é um ponto de escape. Para descobrir outros pontos de escape, podemos inverter o problema em (2.4) para descobrir qual e_1 seria levado em 0, temos

$$0 = \frac{2e_1^3 + 1}{3e_1^2} \implies e_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0,7937$$

e e_1 é o único valor real que levado a 0. Continuando para calcular⁴ e_2 que é levado em e_1 , depois e_3 que é levado em e_2 etc., descobrimos a sequência dos pontos de escape

$$\begin{aligned} e_0 &= 0, \\ e_1 &= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0,7937, \\ e_2 &= \frac{(2\sqrt{6} - 5)^{\frac{2}{3}} - (2\sqrt{6} - 5)^{\frac{1}{3}} + 1}{2^{\frac{4}{3}}(2\sqrt{6} - 5)^{\frac{1}{3}}} \approx -1,433775, \\ e_3 &\approx -2,249474804827873, \\ &\vdots \end{aligned}$$

que tende a $-\infty$. Os pontos de escape estão ilustrados na Figura 11 com bolas abertas.

Vamos analisar o caso $e_1 < x_0 < 0$. Como e_1 é mandado em 0 e ao se aproximar de 0, a tangente permanece crescente mas fica cada vez mais horizontal, x_1 estará em $(0, \infty)$, e dos casos anteriores, a órbita convergirá para 1.

Agora o caso geral $x_0 < e_1$. Por um momento, seja $e_2 < x_0 < e_1$. Como e_2 e e_1 são mandados em e_1 e 0, e pela continuidade do processo, o intervalo (e_2, e_1) é mandado no intervalo

⁴ Usamos o software de computação algébrica *wxMaxima* para essas contas.

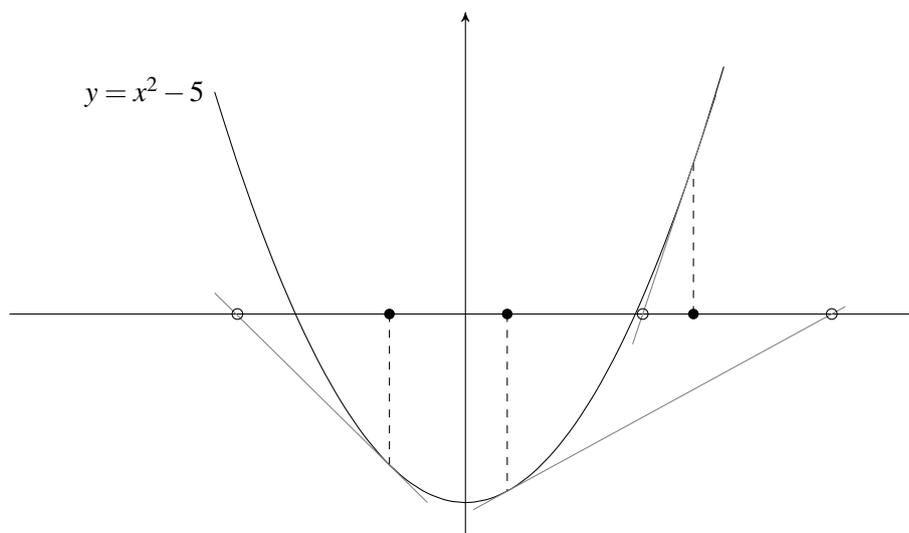


Figura 10 – Iteradas do método de Newton para $f(x) = x^2 - 5$, para vários casos de x_0 (reais). Pontos x_0 são marcados com bolas cheias, as retas tangentes são traçadas sólidas e os pontos x_1 são marcados com bolas abertas. Nos números reais, as bacias de atração das raízes $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$ são, respectivamente, $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$.

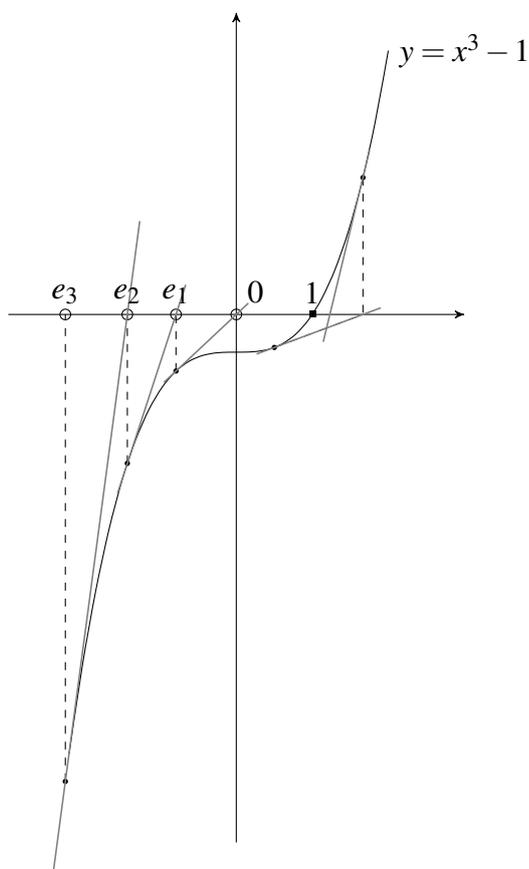


Figura 11 – Iteradas do método de Newton para $f(x) = x^3 - 1$, para vários casos de x_0 (reais). Os pontos de escape $e_0 = 0, e_1, e_2, \dots$, estão marcados com bolas abertas. A bacia de atração da raiz 1 é $B_1 = \mathbb{R} \setminus \{e_0, e_1, e_2, \dots\}$.

$(e_1, 0)$. Usando o mesmo raciocínio, vemos o caso geral em que o intervalo (e_{n+1}, e_n) é mandado no intervalo (e_n, e_{n-1}) . Com isso, deduzimos o caso $x_0 < 0$ em que x_0 não é um ponto de escape.

Assim, a bacia de atração da raiz real 1 é formada por todos os números reais, exceto os pontos de escape $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$.

À parte dos métodos numéricos nos números reais, como os exemplos acima, segundo (SUTHERLAND, 2014), desde cedo, a convergência dos métodos numéricos veio sendo estudada, mesmo para *números complexos*, e as bacias de atração tiveram a atenção dos matemáticos. No século XIX, a convergência do método de Newton foi estudada por matemáticos como E. Schröder e A. Cayley para funções com variáveis nos números complexos. Em 1879, Cayley mostrou que para funções quadráticas $f(z) = az^2 + bz + c$ com raízes α e β no plano complexo, a reta mediatriz de α e β divide o plano complexo em dois semiplanos que eram as bacias de atração das respectivas raízes que eles continham, com comportamento caótico sobre a mediatriz. Ele então propôs o mesmo problema da convergência do método de Newton para equações cúbicas, como $f(z) = z^3 - 1$. Cayley mesmo disse, em 1879: “A solução é fácil e elegante no caso de uma função quadrática, mas o próximo caso seguinte de uma equação cúbica parece apresentar considerável dificuldade.” (CAYLEY, 1879). Acabou não tendo sucesso, sem perceber que as bacias descritas pelo método de Newton de $f(z) = z^3 - 1$ eram, na verdade, conjuntos de fractais, mostrados na Figura 12, hoje chamados de fractais de Newton.

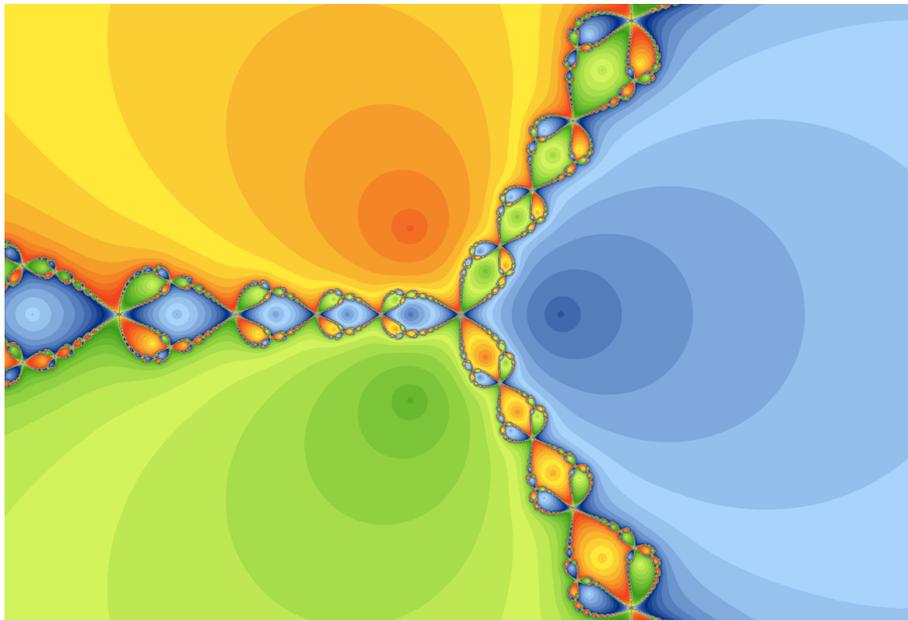


Figura 12 – Fractal de Newton para o polinômio $p(z) = z^3 - 1$ é construído pelas bacias de atração do Método de Newton para as raízes do polinômio, coloridas em tons de azul, verde e laranja, respectivamente relativas às raízes 1 , $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Veja (SUTHERLAND, 2014, Fig. 4.1). No Exemplo 3, onde estudamos o método no mesmo polinômio para números reais, os pontos de escape e_n são precisamente os vértices das figuras em forma de folha que estão sobre o eixo real. Uma bela análise desse fractal é feita no vídeo de Jeffrey Chasnov intitulado “The Newton Fractal Explained! Deep Dive Maths”, <<https://youtu.be/TOR37v5GV5o>>.

2.4 Funções iteradas e popularização dos fractais

Poucas décadas mais tarde, já no início do século XX, após a Primeira Guerra Mundial, Pierre Fatou e Gaston Julia estudaram independentemente a teoria das funções racionais iteradas da forma $x_{n+1} = f(x_n)$. Uma boa introdução história pode ser encontrada em (SUTHERLAND, 2014, §4).

O enorme interesse por esses trabalhos permaneceu até próximo da década de 1930, quando, provavelmente por conta da Segunda Guerra Mundial, inexplicavelmente desapareceu. Mas seus estudos geraram frutos que foram redescobertos por Benoit Mandelbrot, que sob a supervisão de ambos e com acesso a computadores pôde visualizá-los pela primeira vez.

No fractal de Julia, como vimos na Seção 1.3.8, p. 24, dado um valor c , o “conjunto cheio” de Julia J_c é o conjunto dos z tais que o processo iterativo ($x_0 = z, x_{n+1} = x_n^2 + c$) forma uma órbita limitada. Veja a Figura 7, p. 25.

Após a Segunda Guerra Mundial, Benoit Mandelbrot teve Gaston Julia como orientador na École Polytechnique de Paris. Mandelbrot definiu seu conjunto como o conjunto dos c tais a órbita de $z = 0$, pelo mesmo processo de Julia, permanece limitada. No final dos anos 1950, ele trabalhava na IBM, e usou os computadores para visualizar esses conjuntos pela primeira vez. Ao fazer isso, ele foi capaz de mostrar como a complexidade visual pode ser criado a partir de regras simples. Após isso, os fractais ficaram populares. O seu famoso fractal é baseado em quando a iteração da aplicação de uma função converge ou diverge, como explicaremos adiante. A propriedade de autossimilaridade e sua excepcional beleza faz com que esqueçamos de seu propósito inicial, que é a utilização de iterações dessas funções, que buscamos resgatar nesse trabalho.

2.5 Autossimilaridades de fractais gerados por processos iterados

Num método iterativo $x_{n+1} = f(x_n)$, seja $x = x_0$ um valor inicial e suponha que sua órbita $(x, x_1, x_2, x_3 \dots)$ seja limitada. Então a órbita para o valor inicial $f(x)$, a saber $(x_1, x_2, x_3 \dots)$, também é limitada. Então se A é algum conjunto de valores iniciais com órbitas limitadas (convergindo ou não), segue que $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ também é um conjunto de órbitas limitadas.

Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função derivável⁵ em seu domínio, então a imagem $f(A)$ se assemelha bastante com o próprio A , ainda que com certa deformação. Vamos emprestar a explicação do livro Variáveis Complexas e Aplicações de (ÁVILA, 2008, cap. 8, pp. 245 a 247), com grifos do original.

⁵ Na teoria das funções de variável complexa, toda função derivada contínua tem todas as derivadas e é analítica.

Consideremos uma função $w = f(z)$, analítica num certo ponto z_0 , com $f'(z_0) \neq 0$, seja γ uma curva regular passando pelo ponto z_0 , dada por $z = z(t)$, com $z(0) = z_0$. Essa curva transforma-se numa curva Γ do plano w , dada parametricamente por $w(t) = f(z(t))$, tal que $w_0 = f(z_0) = w(0)$. (...)

Sejam agora γ' uma nova curva por z_0 , Γ' sua imagem passando por w_0 . (...) Isto é, o ângulo $\theta' - \theta$ entre as curvas γ' e γ é preservado pela transformação f , tanto em valor, como em sentido e orientação. (...)

Mas, além de preservar ângulos, a transformação f tem outra propriedade interessante. Lembremos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

Isto significa que pequenos segmentos com uma extremidade em z_0 são contraídos ou expandidos na razão $|f'(z_0)|$, independentemente das direções desses segmentos. Deste fato e da preservação de ângulos, decorre que a função f transforma figuras nas proximidades de z_0 em figuras semelhantes nas proximidades de w_0 . Por causa disso, f é chamada de *transformação conforme* ou *representação conforme* de uma vizinhança de z_0 numa vizinhança de w_0 .

Por exemplo, para a função quadrática $f(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. Observe que na construção geométrica da função no plano cartesiano, z^2 tem o dobro do argumento (ângulo) de z e seu módulo é elevado ao quadrado. Somar c apenas traslada a figura. Então, aplicando f a uma figura retangular (curvas que se encontram em ângulo reto), por exemplo, a imagem é uma figura encurvada, amplificando e encurvando partes, mas ainda com ângulos retos. Essa figura é um “quadrilátero” com lados curvados e ângulos retos, bastante semelhante em aspecto a um retângulo. Veja a Figura 13.

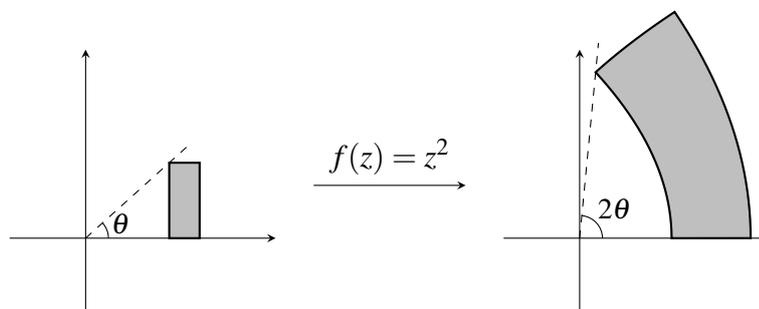


Figura 13 – Deformação de um conjunto pela função $f(z) = z^2$: apesar da deformação, a imagem do conjunto pela função mantém o aspecto do conjunto original.

Podemos aplicar essa ideia para conjuntos limitados por métodos iterativos, seja para o método de Newton ($x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$), seja uma iteração com função mais simples como $x_{n+1} = x_n^2 + c$, como nos fractais de Julia, onde $f(A)$, $f^2(A)$, $f^3(A)$ etc. são regiões de A que

são semelhantes em aspecto a A , garantindo a autossimilaridade dos fractais gerados por modos iterativos.

2.6 Conjuntos fractais de Julia

O conjunto de Julia fornece uma visão fascinante das propriedades caóticas das funções iteradas, além de representarem uma interseção interessante entre matemática pura, arte computacional e teoria do caos.

A definição geral do conjunto cheio de Julia para qualquer função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é o conjunto dos pontos z no plano complexo para os quais a órbita $(z, f(z), f^2(z), f^3(z), \dots)$ sob a iteração $x_{n+1} = f(x_n)$ permanece limitada.

No entanto, as funções mais simples, como as quadráticas, já produzem conjuntos de Julia extremamente interessantes, e os conjuntos de Julia se popularizaram para as funções $f(z) = z^2 + c$, para um valor c complexo fixado, onde o conjunto cheio de Julia é denotado por J_c . Vamos considerar apenas essas funções quadráticas de agora em diante.

Como vimos na seção anterior, o próprio conjunto de Julia J_c é mandado por f numa região $f(J_c)$, que é similar ao próprio J_c . Também $f^2(J_c)$, $f^3(J_c)$ etc. são similares a J_c , formando infinitas partes, cada vez menores, semelhantes ao todo, dando o aspecto fractal ao conjunto, com estruturas refinadas. Sendo assim, podemos observar que o comportamento do conjunto de Julia é bastante sensível às condições iniciais.

Na Figura 14 mostramos alguns exemplos de conjuntos de Julia.

2.6.1 Ordem no caos: algumas propriedades

Ao observarmos alguns fractais, podemos notar algumas simetrias, como por exemplo a rotação de meia volta em relação ao centro. Vamos justificá-las.

Por aparecer apenas potências pares de z na fórmula de $f(z) = z^2 + c$,

$$f(-z) = (-z)^2 + c = z^2 + c = f(z),$$

então f é uma função par. Se z é um ponto do conjunto de Julia J_c , sua órbita é limitada. Mas como $f(-z) = f(z)$, a órbita de $-z$ é $(-z, f(-z), f^2(-z), f^3(-z), \dots)$, idêntica à órbita de z a partir do segundo ponto, e portanto $-z \in J_c$. Portanto, há *simetria de meia volta* com relação à origem.

Para valores reais de c , vemos que há ainda mais simetria na figura. Veja por exemplo os fractais “Basílica” ($c = -1$) e “Avião” ($c = -1,5$). Parece haver simetria de reflexão em relação aos eixos coordenados.

Suponha que c é um número real. Então $c = \bar{c}$. Das propriedades dos números complexos

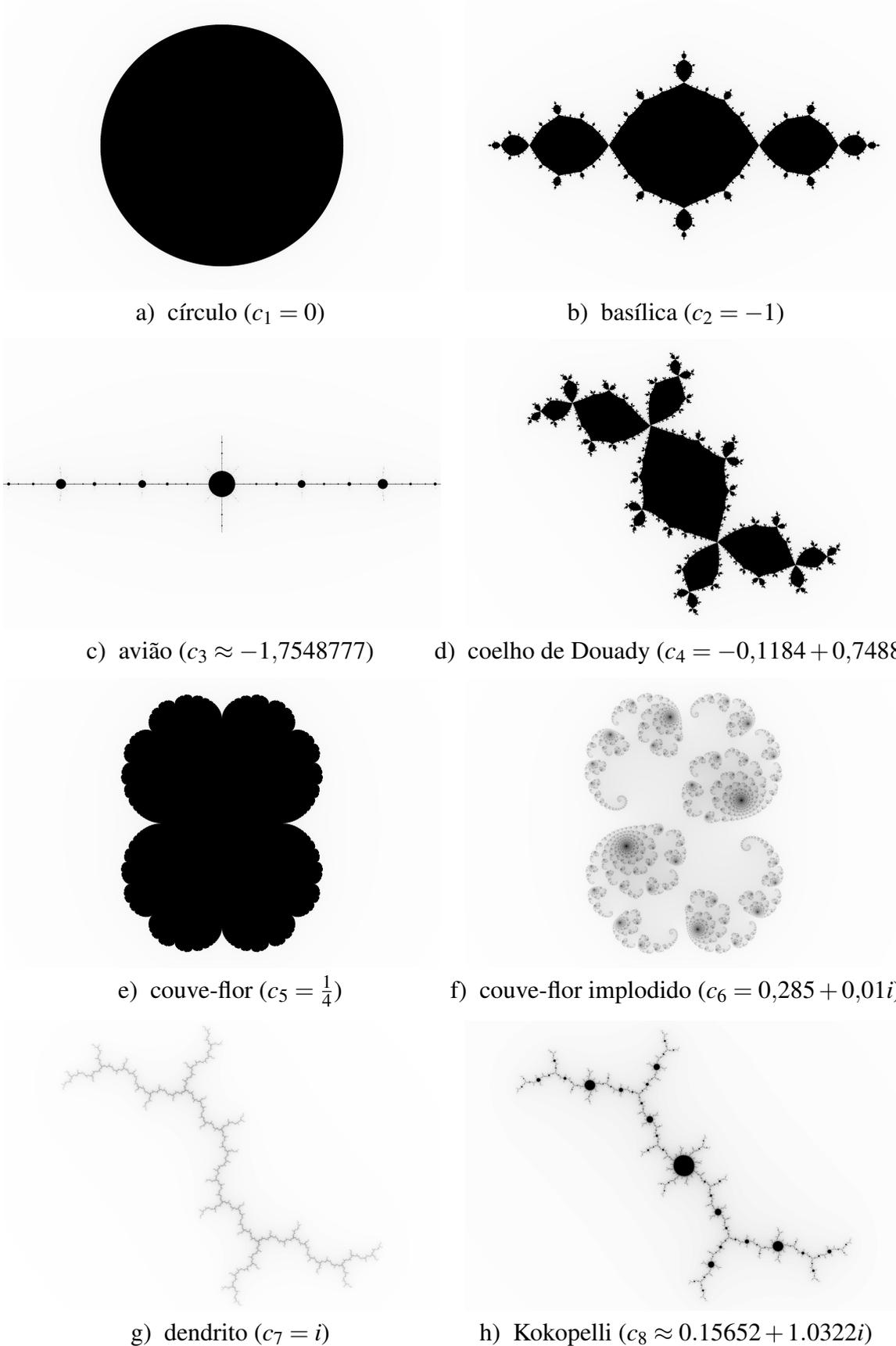


Figura 14 – Exemplos de fractais de Julia. Na Figura 15 são mostrados os valores de c correspondentes a cada conjunto de Julia acima, em relação ao conjunto de Mandelbrot.

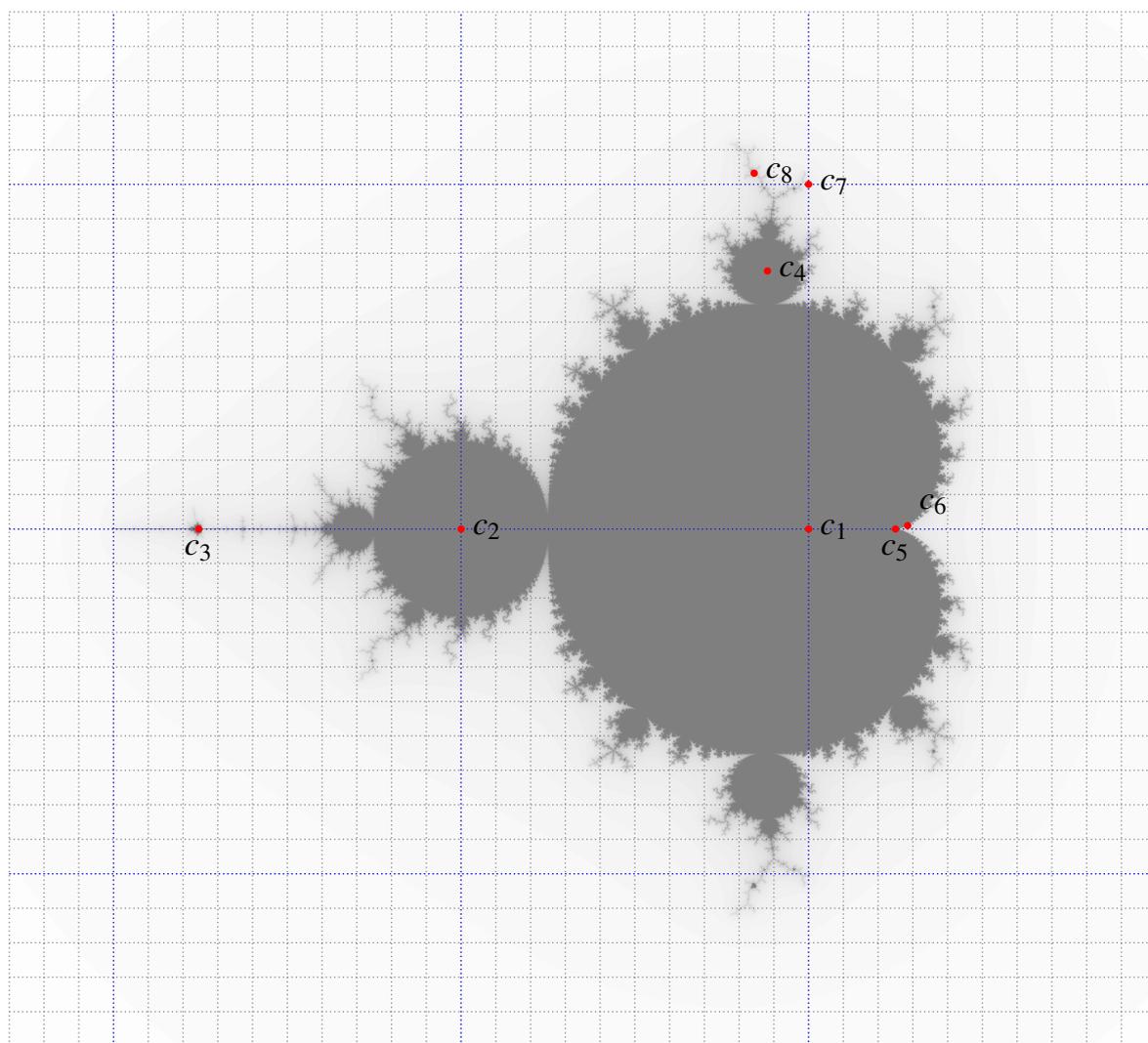


Figura 15 – Valores de c para os conjuntos de Julia da Figura 14 apresentados sobre o conjunto de Mandelbrot.

sobre conjugados, $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$ e $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$. Então, para qualquer $z \in \mathbb{C}$,

$$f(\bar{z}) = (\bar{z})^2 + c = \overline{z^2 + c} = \overline{z^2 + c} = \overline{f(z)}.$$

ou seja, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. E daí

$$f^2(\bar{z}) = f(f(\bar{z})) = f(\overline{f(z)}) = \overline{f(f(z))} = \overline{f^2(z)}.$$

Analogamente, (ou melhor, por indução) podemos mostrar que $f^n(\bar{z}) = \overline{f^n(z)}$.

Agora olhe para a órbita de z no conjunto de Julia J_c , com c real. Então sua órbita $(z, f(z), f^2(z), f^3(z), \dots)$ é limitada. Como $|z| = |\bar{z}|$, a órbita de \bar{z} , $(\bar{z}, \overline{f(z)}, \overline{f^2(z)}, \overline{f^3(z)}, \dots)$, também é limitada, daí \bar{z} também está em J_c , ou seja, $z \in J_c \Leftrightarrow \bar{z} \in J_c$. Então, para cada conjunto $X \subset J_c$, temos que os conjuntos $-X$ e \bar{X} estão contidos em J_c , dando que J_c tem *simetria de reflexão pelos eixos coordenados* no caso onde c é um número real.

Por último, *cada componente com interior não vazio é levada em outra componente de interior não vazio* em cada iteração. Isso segue da propriedade da função aberta para funções complexas analíticas *não constantes* como $f(z) = z^2 - 1$, ou seja, para essas funções, um conjunto aberto é mapeado em outro conjunto aberto. Veja (ÁVILA, 2008, Cor. 8.2, p. 249). Como cada componente tem interior não vazio, esse interior tem que ser mapeado em um conjunto aberto, que está no interior de alguma componente, isto é, não pode ter partes em componentes distintas.

Exemplo 4. Vamos estudar o conjunto de Julia J_{-1} , conhecido como “Basílica”. Pelas relações de simetria de J_{-1} estudadas, sendo -1 um número real, J_{-1} tem simetria de reflexão pelos eixos coordenados.

Veja a Figura 16 onde, na parte de cima, é mostrado o fractal em que nomeamos as principais componentes de J_{-1} por A, B, C, D, E e F , por ordem decrescente de tamanho, e marcamos algumas componentes derivadas $-B, -C, \bar{D}$ etc. Pelas simetrias, $\bar{B} = B, \bar{C} = C, \bar{D} = -D$ etc.

Na parte de baixo da figura, a mesma imagem com uma malha pontilhada quadriculada de 0,1 de distância para fácil visualização das coordenadas dos pontos. As coordenadas inteiras estão marcadas com linhas azuis pontilhadas. Marcamos pontos z_k em azul nas principais componentes, e em vermelho marcamos suas imagens $w_k = f(z_k)$. Alguns pontos z_k estão marcados. Vejamos alguns exemplos:

$$z_1 = 0 \in A \implies w_1 = f(0) = 0^2 - 1 = -1 \in -B.$$

$$z_2 = 0,9 \implies w_2 = 0,9^2 - 1 = -0,19 \in A.$$

$$z_4 = 0,6i \implies w_4 = (0,6i)^2 - 1 = -1,36 \in -C.$$

Analisando as imagens dos z_k , podemos estabelecer as órbitas dos pontos nas principais componentes marcadas:

$$\begin{array}{l} X \quad : \quad A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \\ \hline f(X) \quad : \quad -B \quad A \quad B \quad -C \quad -\bar{F} \quad D \end{array}$$

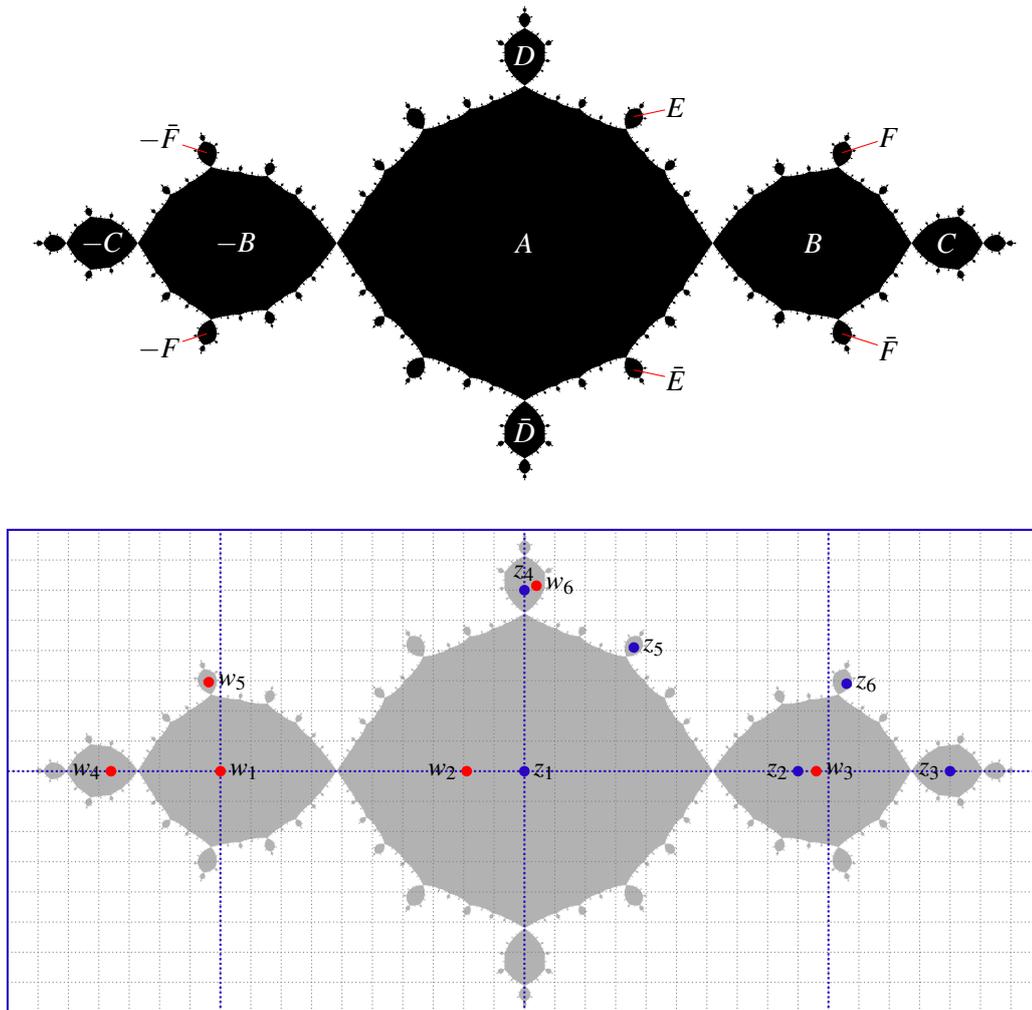


Figura 16 – Conjunto de Julia “Basílica” estudado no Exemplo 4. Acima, é mostrado o fractal e são nomeadas as principais componentes de J_{-1} por A, B, C, D, E e F , em ordem decrescente de tamanho, e também algumas componentes derivadas $-B, -C, \bar{D}$ etc. Abaixo, a mesma imagem é mostrada com uma malha pontilhada quadriculada de 0,1 de distância para fácil visualização das coordenadas dos pontos. Marcamos pontos z_k em azul nas principais componentes, e em vermelho marcamos suas imagens $w_k = f(z_k)$.

Das relações $f(-X) = f(X)$ e $f(\bar{X}) = \overline{f(X)}$, podemos estabelecer a trajetória de qualquer ponto das componentes estudadas. Por exemplo, a órbita de $z \in D$ percorre, nessa ordem, as componentes $D, -C, B, A, -B, A, -B, \dots$. É possível mostrar que as orbitas todas se aproximam da órbita periódica dada pelos pontos 0 e -1 .

2.7 Conjunto de Mandelbrot

O fractal de Mandelbrot carrega uma riqueza estrutural e uma complexidade visual. Em sua observação, podemos encontrar detalhes e padrões que se estendem até o infinitamente pequeno. A sua estrutura é caracterizada por sua complexidade geométrica, cada detalhe, ao ser ampliado, são cópias de formas autossimilares.

Uma das propriedades mais marcantes é a noção de órbita, onde cada ponto dentro do fractal é submetido a iterações matemáticas, revelando comportamentos caóticos. A autossimilaridade também é uma de suas propriedades, onde o fractal se assemelha ao conjunto completo em diferentes escalas, além de apresentar uma beleza estética única.

Vamos nos aprofundar na órbita do conjunto de Mandelbrot, mas antes temos que entender que cada ponto complexo no plano corresponde a uma sequência infinita de números complexos derivados do processo iterativo. E a base desse processo é a repetida aplicação na equação $z_{n+1} = z_n^2 + c$, onde z_n é a sequência de números complexos e c é o ponto em consideração. Assim podemos definir o conjunto de Mandelbrot da seguinte forma:

$$M = \{c \in \mathbb{C} / \text{a órbita de } O_f \text{ por } f(z) = z^2 + c, \text{ é limitada}\}$$

Ao selecionarmos um ponto c inicial, iterativamente aplicamos a equação de Mandelbrot, gerando uma sequência de números complexos: z_1, z_2, z_3, \dots . A cada iteração verificamos se a sequência converge (limitada) ou diverge (ilimitada). E é isso que determina a inclusão ou exclusão do ponto do fractal Mandelbrot. Vejamos, algumas de suas iterações:

$$\begin{aligned} z_1 &= f(z_0) = 0^2 + c = c \\ z_2 &= f(z_1) = c^2 + c \\ z_3 &= f(z_2) = (c^2 + c^2) + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

E assim sucessivamente e indefinidamente. Observe que pequenas variações nos valores iniciais podem resultar em órbitas diferentes, nos mostrando um comportamento caótico. E cada ponto no fractal Mandelbrot está associado a um Conjunto de Julia. A escala de c na equação determina o tipo de Conjunto de Julia associado.

FRACTAIS COM SISTEMAS ITERADOS DE FUNÇÕES

3.1 Introdução

Nesse capítulo, vamos estudar fractais gerados pelos chamados Sistemas Iterados de Funções (SIF), que são fractais formados pela união de partes que são imagens do todo por de transformações afins, e podemos ver como a propriedade da autossimilaridade tem um papel fundamental na construção desses fractais.

Por exemplo, o Triângulo de Sierpinski (ver Figura 6, p. 24) é formado por 3 cópias do todo, reduzidas à metade, devidamente posicionadas.

As ideias principais, que exploraremos melhor ao longo do capítulo, são:

- i) Em um espaço completo¹, uma contração² $f : X \rightarrow X$ tem um único ponto fixo y , isto é, $f(y) = y$ para exatamente um $y \in X$ e, além disso, y é o limite de qualquer órbita $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$, qualquer que seja o valor inicial x . Esse resultado é conhecido como o Teorema do Ponto Fixo de Banach.
- ii) Um Sistema Iterado de Funções é um conjunto $\{T_1, \dots, T_n\}$ de contrações afins, isto é, cada $T_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação afim da $T_i(x) = A_i x + v_i$ que é, ao mesmo tempo, uma contração.
- iii) Define-se a distância de Hausdorff $d_{\mathbb{H}}(A, B)$ entre dois conjuntos A e B fechados e limitados (conjuntos compactos) de \mathbb{R}^2 . Além disso, o conjunto X desses subconjuntos de \mathbb{R}^2 é um espaço métrico completo com a distância de Hausdorff.

¹ Ou seja, “sem furos”, isto é, sequências em que os termos se aproximam – sequências de Cauchy – são convergentes.

² Uma função $f : X \rightarrow X$ em um espaço métrico X com distância $d(\cdot, \cdot)$ é uma contração se existe $r < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y)$.

- iv) Veremos que $T(X) = T_1(X) \cup T_2(X) \cup \dots \cup T_n(X)$ é uma contração em X .
- v) Segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que, começando por qualquer conjunto C compacto, as iteradas $C, T(C), T^2(C), \dots, T_n(C), \dots$ aproximam um “ponto fixo”, isto é, um conjunto A tal que $T(A) = A$. Veremos que A é o fractal procurado.
- vi) Esses passos permitem traçar o fractal. Basta começar com um conjunto de um ponto qualquer, e a cada iterada de T teremos um conjunto que é mais próximo do fractal. Com algumas poucas iteradas, traçamos o fractal com boa aproximação, usando algum *software*.

Teremos que tratar de alguns conceitos matemáticos necessários para entender como podemos traçar os fractais usando SIF.

3.2 Sistemas Iterados de Funções

Os Sistemas Iterados de Funções (SIF) constituem uma abordagem interessante na construção de fractais, feitos pela aplicação iterativa de um conjunto de funções contrativas em \mathbb{R}^2 ou outro um espaço métrico.

A ideia é identificar as partes autossimilares do fractal, dividindo-o completamente nessas partes. Então montam-se funções T_i cuja imagem do todo é uma das partes. A princípio, as funções poderiam ser quaisquer funções, mas vamos nos restringir a transformações afins, da forma

$$T_i x = A_i x + v_i \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$ é um vetor coluna, dados A_i , uma matriz 2×2 , e $v_i \in \mathbb{R}^2$, um vetor coluna. Vemos que a autossimilaridade é essencial na construção do fractal.

Por exemplo, o triângulo de Sierpinski. Veja a Figura 17.

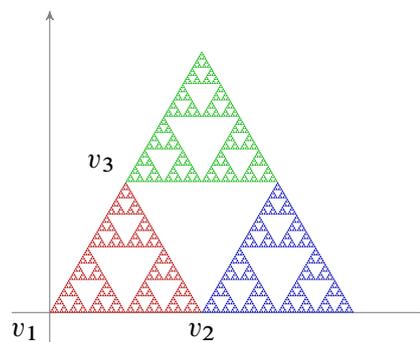


Figura 17 – Transcrição do triângulo de Sierpinski como um SIF. O triângulo todo pode ser dividido em três partes que são cópias com metade do tamanho do original, transladadas aos vértices v_i do triângulo em vermelho.

Considere a origem no canto inferior esquerdo. Podemos dividir o triângulo de Sierpinski em 3 cópias reduzidas à metade do tamanho (isto é, uma homotetia de razão $\frac{1}{2}$), transladadas aos

vértices do pequeno triângulo inferior esquerdo, que vamos supor que tem lado de tamanho 2. As três funções ficam:

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y), \\ T_2(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y) + (2,0), \\ T_3(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y) + (1,\sqrt{3}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

que podem ser postas na forma matricial (3.1) pondo

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{2}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

O processo iterativo inicia-se com um conjunto inicial, frequentemente um conjunto simples, como um único ponto, e aplica-se iterativamente as funções de SIF a esse conjunto. A união dessas imagens é o passo seguinte do processo. A cada iteração, o conjunto se transforma, refinando sua estrutura. A propriedade fundamental é a autossimilaridade, cada função do SIF contribui para a criação dessas estruturas repetidas.

A convergência do processo é justificado por um ferramental teórico matemático que explicaremos adiante. Algumas propriedades essenciais no SIF é uma contração, garantindo que a aplicação iterativa encolha o conjunto em direção a um *atrator*, que é o conjunto limite do processo, o próprio fractal. A Figura 18 ilustra diversos passos do processo iterativo, começando com o conjunto inicial C_0 como um único ponto na origem.

3.3 Espaços métricos e distância de Hausdorff

O estudo de espaços métricos e da distância de Hausdorff em fractais vem da necessidade de justificar o processo de convergência para conjuntos: precisamos falar de distâncias, seqüências e, em particular, distância entre conjuntos. Nesta seção apresentaremos resultados da teoria dos espaços métricos, omitindo provas refinadas, para as quais daremos referências, sendo a principal delas o livro *Superfractals*, (BARNSELY, 2006).

3.3.1 Espaços métricos

A noção de distância é a extensão matemática do conceito natural que temos de distância: uma medida $d \geq 0$ entre dois objetos com a propriedade de que ir diretamente de A a B é mais perto que ir de A até C e então de C a B , o que se chama desigualdade triangular.

Formalmente, um *espaço métrico* é um X um conjunto não vazio junto com uma *métrica* em X , isto é, uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

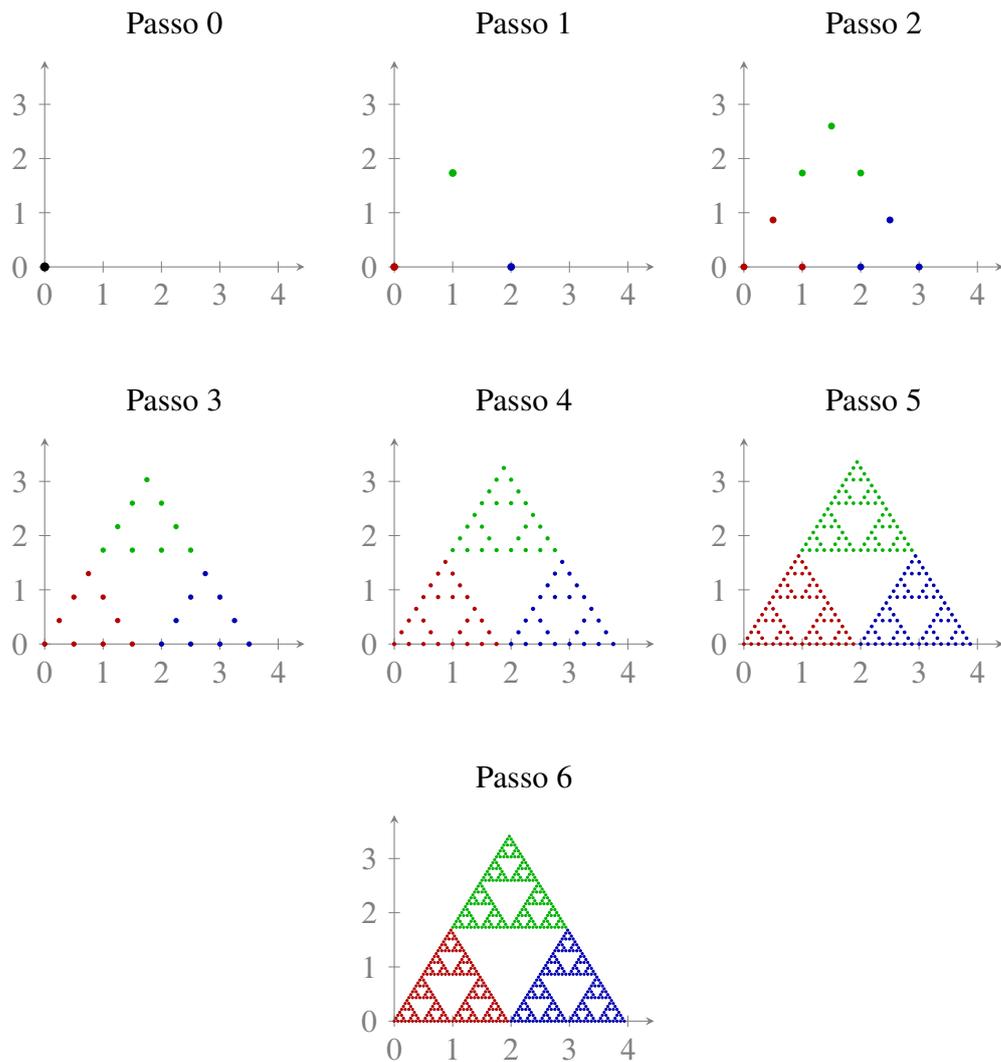


Figura 18 – Passos das iteração do SIF do triângulo de Sierpinski. O passo 0 é o conjunto com apenas a origem. Em cada passo seguinte, os pontos vermelhos, azuis e verdes são, respectivamente, as imagens dos pontos do passo anterior pelas transformações afins T_1 , T_2 e T_3 .

1. *Distância não negativa*: para quaisquer dois $x, y \in X$, a distância $d(x, y)$ é sempre não negativa, atingindo zero apenas quando x e y coincidem. Em outras palavras, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. *Simetria*: a métrica é simétrica, ou seja, $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
3. *Desigualdade triangular*: a distância entre dois pontos nunca excede a distância entre os mesmos, passando por um ponto intermediário. Em outras palavras, $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$ para todos $x, y, z \in X$.

Chamamos a $d(x, y)$ de distância entre x e y .

Exemplos usuais de distâncias em \mathbb{R}^2 são a distância euclidiana e a distância taximétrica. Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (a, b)$ em \mathbb{R}^2 :

- *Distância usual, ou distância euclidiana*:

$$d_2(P, Q) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

É o comprimento usual de um segmento, dada pelo Teorema de Pitágoras.

- *Distância taximétrica ou métrica da soma*:

$$d_1(P, Q) = |x-a| + |y-b|.$$

É a distância que percorremos pelas ruas de uma cidade, onde para ir de um ponto a outro da cidade, andamos por exemplo numa direção alguns quarteirões, depois viramos (um ângulo reto) na rua final e andamos o resto até o destino.

- Há ainda muitas outras distâncias, como a *métrica do máximo* d_∞ e a *métrica discreta* d_d ,

$$d_\infty(P, Q) = \max\{|x-a|, |y-b|\}, \quad d_d(P, Q) = \begin{cases} 0, & P = Q, \\ 1, & P \neq Q. \end{cases}$$

Vamos usar a distância usual d_2 neste trabalho.

3.3.2 Convergência de seqüências

Precisamos formular o conceito de convergência. Podemos pensar que uma seqüência (x_n) converge para L quando seus termos ficam arbitrariamente próximos de L conforme n cresce. Em outras palavras, para qualquer conceito de “perto” (distância $< \varepsilon$), existe um índice N tal que, se $n \geq N$, todo x_n , x_n esté perto de L . Em linguagem formal matemática:

Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n \geq N$ implica $d(x_n, L) < \varepsilon$.

Denotamos que (x_n) converge para L por $x_n \rightarrow L$.

Sejam X e Y espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* se para toda sequência convergente $x_n \rightarrow L$, temos que $f(x_n) \rightarrow f(L)$. Outra definição equivalente é que f manda pontos de X próximos em pontos de Y próximos. Por exemplo, a função *distância a um ponto* x_0 , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$, é contínua (LIMA, 2014, cap. 2, exemplo 1.c).

Usando a desigualdade triangular, note que os termos de uma sequência convergente ficam arbitrariamente próximos. De fato, se (x_n) converge para L , dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $d(x_n, L) < \frac{\varepsilon}{2}$ quando $n \geq N$. Então, para $m, n \geq N$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, L) + d(x_n, L) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Essas sequências em que os termos se aproximam são chamadas *sequências de Cauchy*: (x_n) é sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que se $m, n \geq N$ implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Vimos que toda sequência convergente é de Cauchy.

Sabemos que o conjunto dos racionais \mathbb{Q} tem “furos”, enquanto que a reta real \mathbb{R} é “contínua”. Uma maneira de medir isso é se as sequências de Cauchy (x_n) em X convergem para $L \in X$. Um espaço métrico com essa propriedade é chamado *completo*.

Por exemplo, na seção 2.2 sobre o Método de Newton, no Exemplo 1, p. 28, vimos o exemplo de uma sequência de racionais $[x_0 = 2 \in \mathbb{Q}$ e, por (2.3), se $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_{n+1} \in \mathbb{Q}]$ que converge para $\sqrt{5}$, que não é racional. Então \mathbb{Q} não é completo, mas pode-se provar que \mathbb{R} , \mathbb{R}^n , \mathbb{C} são espaços métricos completos com as métricas usuais. (LIMA, 2014, cap. 6)

3.3.3 Contrações, pontos fixos e convergência de órbitas

Seja X um espaço métrico completo. Uma função $f : X \rightarrow X$ é uma *contração* se existe $r < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y). \quad (3.4)$$

Ou seja, f manda pontos x e y em $f(x)$ e $f(y)$, mais próximos do que x e y . É fácil mostrar que toda contração é uma função contínua.

É muito importante a estimativa com $r < 1$ em (3.4), pois podemos usar a série geométrica para mostrar que a órbita $x, f(x), f^2(x), \dots$ é uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar esse fato.

Usando que f é contração,

$$\begin{aligned} d(f(x), f^2(x)) &\leq r d(x, f(x)), \\ d(f^2(x), f^3(x)) &\leq r d(f(x), f^2(x)) \leq r^2 d(x, f(x)), \\ d(f^3(x), f^4(x)) &\leq r d(f^2(x), f^3(x)) \leq r^3 d(x, f(x)) \\ &\dots \\ d(f^n(x), f^{n+1}(x)) &\leq r^n d(x, f(x)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Recordemos a série geométrica:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1-r}. \quad (3.6)$$

Agora, suponha que $m < n$. Usando a desigualdade triangular e (3.5),

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &\leq d(f^m(x), f^{m+1}(x)) + d(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x)) + \cdots + d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \\ &\leq r^m d(x, f(x)) + r^{m+1} d(x, f(x)) + \cdots + r^{n-1} d(x, f(x)) \\ &= r^m (1 + r + r^2 + \cdots + (n-m-1)) d(x, f(x)) \\ &< r^m (1 + r + r^2 + \cdots) d(x, f(x)) \\ &= r^m \frac{d(x, f(x))}{1-r} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar N natural tal que

$$r^N \frac{d(x, f(x))}{1-r} < \varepsilon,$$

o que é possível porque $r < 1$. Se $m < n$, de (3.7),

$$d(f^m(x), f^n(x)) < r^m \frac{d(x, f(x))}{1-r} < r^N \frac{d(x, f(x))}{1-r} < \varepsilon,$$

ou seja, a órbita $x, f(x), f^2(x), \dots$ é uma sequência de Cauchy. Como X é um espaço métrico completo, a órbita converge para $L \in X$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = L.$$

Usando que toda contração é uma função contínua,

$$f(L) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = L,$$

ou seja, $f(L) = L$, o que se chama de *ponto fixo* de f . É fácil mostrar que não pode haver dois pontos fixos: se L_1, L_2 são pontos fixos,

$$d(L_1, L_2) = d(f(L_1), f(L_2)) \leq r d(L_1, L_2),$$

o que só é possível se $d(L_1, L_2) = 0$, isto é, se $L_1 = L_2$. Como o ponto fixo de f é único, a órbita de qualquer ponto inicial convergirá para o mesmo ponto fixo. Esse resultado é conhecido como *Teorema do Ponto Fixo de Banach*. Veja (LIMA, 2014, Cap. 6, Teo. 16), que enunciamos a seguir.

Teorema 1 (Ponto fixo de Banach). Toda contração $f: M \rightarrow M$, de um espaço métrico completo M , possui um único ponto fixo. Dado qualquer $x_0 \in M$, a sequência $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$ converge para o ponto fixo de f .

Esse teorema será crucial para garantir o processo de construção do fractal. Veremos que, usando um sistema iterado de funções, montaremos adiante uma contração T no espaço X dos conjuntos compactos (isto é, cada “ponto” de X é um conjunto compacto de \mathbb{R}^2). O fractal será o ponto fixo dessa contração.

3.3.4 Conjuntos compactos

Entre os subconjuntos de qualquer espaço métrico, estão os conjuntos compactos, que têm uma série de propriedades interessantes e úteis na nossa construção dos fractais com Sistemas Iterados de Funções.

Recordaremos algumas definições e resultados numa observação, despretenciosamente, deixando as demonstrações para nossa referência (LIMA, 2014), que nesta seção são citadas pelo capítulo e teorema ou proposição. Vamos nos restringir ao nosso espaço métrico \mathbb{R}^2 , onde moram nossos fractais, e a distância d é a euclidiana.

Observação 1. i) Uma *bola aberta* de centro x e raio $r > 0$ é o conjunto $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, x_0) < r\}$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é *aberto* quando todo ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em A (Seção 3.2). Uma bola aberta é um conjunto aberto, por exemplo (Cap. 3, Prop. 1).

ii) Um conjunto F é *fechado* se seu complementar é aberto (Seção 3.5).

iii) Em \mathbb{R}^2 , os conjuntos fechados e limitados são chamados *compactos*³ (Cap. 7, prop. 10 – Teorema de Borel-Lebesgue).

iv) A união de um número finito de compactos é compacto (Cap. 7, exemplo 7).

v) Toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ leva conjuntos compactos de X em conjuntos compactos de Y .

vi) Se K é compacto, toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus extremos, isto é, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in K\}$ e $f(x_1) = \max\{f(x) : x \in K\}$ (Cap 7, prop. 6).

3.3.5 Distância de Hausdorff

Um fractal é um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Precisamos então de um espaço métrico onde os “pontos” são subconjuntos de \mathbb{R}^2 . O matemático Felix Hausdorff mostrou que o conjunto dos subconjuntos compactos de um espaço métrico é também um espaço métrico completo com a métrica que ficou conhecida como *distância de Hausdorff*, que apresentaremos a seguir. Nesta seção, nossa referência é (BARNESLEY, 2006).

Seja $\mathbb{H} = \{A \subset \mathbb{R}^2 : A \text{ é compacto}\}$, que chamaremos de conjunto de Hausdorff.

A fim de definir uma métrica em \mathbb{H} , vamos começar definindo a função *menor distância de um ponto a um conjunto* A , com A compacto,

$$d_A(x) = \min\{d(x, a) : a \in A\}$$

³ Esta não é a verdadeira definição de conjuntos compactos, que envolveria pontos de acumulação ou coberturas abertas terem subcoberturas finitas, mas uma que nos servirá neste trabalho, sem muitos detalhes técnicos.

A Figura 19 ilustra as curvas de nível dessa distância, de um ponto x a um conjunto A , um triângulo preenchido.

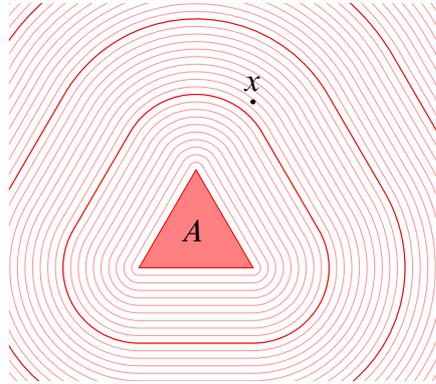


Figura 19 – Curvas de nível da função menor distância de um ponto a um conjunto. Cada curva de nível dista da seguinte por 0,1. As curvas de nível mais escuras são as de valores naturais. Podemos ver que $d(x,A) \approx 1,2$.

Do item vi) da Observação 1, existe $a_0 \in A$ tal que $d_A(x) = d(x, a_0)$, pois o mínimo de $f(a) = d(x, a)$ é atingido por A ser compacto. Pode-se ver que $d_A(x) = 0$ se e somente se $x \in A$, sendo nesse caso $a_0 = x$. Daí vemos que a palavra “distância” não é usada no sentido estrito da métrica, pois a distância ser zero não implica em igualdade de objetos.

A partir de d_A , podemos definir a “distância” de A até B , ambos compactos de \mathbb{R}^2 , por

$$d_A(B) = \max\{d_A(b) : b \in B\}.$$

A Figura 20 ilustra dois conjuntos compactos A e B , um triângulo e um quadrado, com um exemplo em que $d_A(B) \neq d_B(A)$. Então essa “distância” nem sequer é simétrica. Também, se $B \subset A$, para todo $b \in B$ temos que $d_A(b) = 0$ e então $d_A(B) = \max\{0\} = 0$. Reciprocamente, se $d_A(B) = 0$, então é zero o máximo de $d_A(b)$ para todo $b \in B$, então $d_A(b) = 0$ e $b \in A$, portanto $B \subset A$.

No entanto, pode-se definir a distância de Hausdorff entre dois compactos A e B por

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\}. \quad (3.8)$$

Finalmente temos uma verdadeira distância entre conjuntos compactos! É fácil ver que $d_{\mathbb{H}}(A, B) = d_{\mathbb{H}}(B, A)$ e que $d_{\mathbb{H}}(A, B) \geq 0$. Se $d_{\mathbb{H}}(A, B) = 0$, então $d_A(B) = 0$ e $d_B(A) = 0$, que implicam respectivamente $B \subset A$ e $A \subset B$, e portanto $A = B$. A prova de que vale a desigualdade triangular está em (BARNSELY, 2006, Th. 1.12.13, p. 65). Portanto a distância de Hausdorff faz de \mathbb{H} um espaço métrico, e em (BARNSELY, 2006, Th. 1.13.1, p. 78), o autor prova que \mathbb{H} , com a métrica $d_{\mathbb{H}}$, é um espaço métrico completo!

Uma propriedade importante da distância de Hausdorff, referente a uniões, é a estimativa

$$d_{\mathbb{H}}(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_{\mathbb{H}}(A, C), d_{\mathbb{H}}(B, D)\}.$$

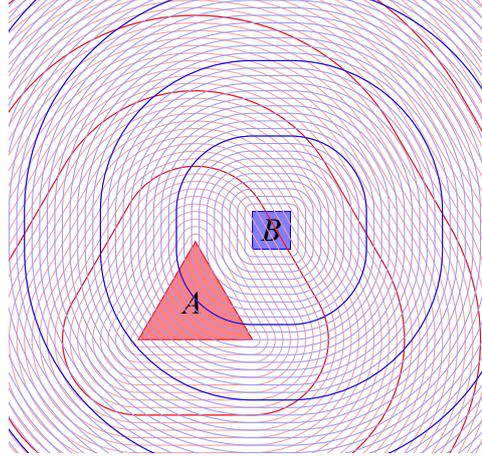


Figura 20 – Curvas de nível das distâncias de dois conjuntos. Cada curva de nível dista da seguinte por 0,1. As curvas de nível mais escuras são as de valores naturais. A distância de A até B é a maior curva de nível a partir de A que engloba B . Podemos ver que $d_A(B) \approx 1,3$ e $d_B(A) \approx 1,9$. Então, $d_{\mathbb{H}}(A, B) \approx 1,9$.

Note que não aparecem os termos $d_{\mathbb{H}}(A, D)$ e $d_{\mathbb{H}}(B, C)$! A prova pode ser encontrada em (BARNSELY, 2006, Th. 1.12.15, p. 66). Como um exercício, pode-se mostrar que

$$d_{\mathbb{H}}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \max_{i=1, \dots, n} \{d_{\mathbb{H}}(A_i, B_i)\}. \quad (3.9)$$

em que é notável que não apareçam em (3.9) termos $d_{\mathbb{H}}(A_i, B_j)$ com $i \neq j$.

Estamos prontos para tratar a convergência das iteradas dos Sistemas Iterados de Funções.

3.4 Contrações afins

Um Sistema Iterado de Funções é um conjunto $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de *contrações afins* $T_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que são da forma

$$T_i(x) = A_i x + b_i, \quad (3.10)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$ é apresentado como um vetor coluna, assim como b_i , e A_i é uma matriz 2×2 , e se requer que T_i seja uma contração.

Veja que T_i é uma transformação linear $x \mapsto A_i x$, seguida de uma translação $x \mapsto x + b_i$. A transformação linear $A_i x$ pode ser uma homotetia contrativa (isto é, com razão r com $|r| < 1$), como no exemplo do Triângulo de Sierpinski na Seção 3.2, ou uma rotação combinada com uma homotetia contrativa, ou outra transformação que “encolha” a imagem.

Vamos analisar quando uma transformação afim $T(x) = Ax + b$ é uma contração. Se representamos pontos de \mathbb{R}^2 como vetores coluna, podemos expressar o módulo de um vetor x pela expressão $|x|^2 = x'x$, onde $'$ denota a transposição de matrizes. Usando que $(AB)' = B'A'$, a

distância euclidiana de $T(x)$ a $T(y)$ é a (raiz quadrada da) expressão matricial

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)|^2 &= |Ax + b - Ay - b|^2 = |A(x - y)|^2 \\ &= (A(x - y))'(A(x - y)) = (x - y)'A'A(x - y) \end{aligned}$$

Como $A'A$ é uma matriz simétrica positiva (LIMA, 1996, Teo. 13.9, p. 172 e obs. seguinte), pelos teoremas 13.1, 13.6 (teorema espectral) e 13.9 de (LIMA, 1996, cap. 13), \mathbb{R}^2 tem uma base ortogonal de autovetores de $A'A$ e seus autovalores λ_1 e λ_2 são reais e não negativos. A partir daí, decompondo $x - y$ como combinação linear dos autovetores de $A'A$, é fácil mostrar que

$$|T(x) - T(y)| \leq r|x - y|$$

onde $r = \max\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\}$, sendo a igualdade atingida para um autovetor de $A'A$ (LIMA, 1996, exerc. 13.18, p. 179). Fica um critério para que T seja uma contração afim.

Teorema 2 (Critério contrativo). A transformação afim $T(x) = Ax + b$ é uma contração afim se e somente se os autovalores de $A'A$ forem menores do que 1. Além disso,

$$|T(x) - T(y)| \leq r|x - y|$$

com a razão de contração $r = \max\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\}$, onde $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$ são os autovalores reais de $A'A$.

3.5 Convergência das iteradas de um SIF

Vamos justificar o item **iv**) da introdução deste capítulo e o os passos apresentados na Seção 3.2.

Vamos considerar o sistema iterado de funções $S = \{T_1, \dots, T_n\}$. Seja \mathbb{H} o espaço de Hausdorff de \mathbb{R}^2 . Pelas propriedades da Observação 1 sobre os conjuntos compactos, para A compacto de \mathbb{R}^2 , por $T_i(A)$ ser compacto e união finita de compactos ser um conjunto compacto, está bem definida a função $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dada por

$$T(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_n(A). \quad (3.11)$$

Usando (3.9), p. 50, e que cada T_i é uma contração afim, com razão de contração r_i , vamos analisar a distância de Hausdorff de $T(A)$ a $T(B)$, para $A, B \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(T(A), T(B)) &= d_{\mathbb{H}}\left(\bigcup_{i=1}^n T_i(A), \bigcup_{i=1}^n T_i(B)\right) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \{d_{\mathbb{H}}(T_i(A), T_i(B))\} \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \{r_i d_{\mathbb{H}}(A, B)\} \\ &= r d_{\mathbb{H}}(A, B) \end{aligned}$$

onde $r = \max_i \{r_i\} < 1$. Ou seja, T é uma contração!

Podemos juntar, então, todas as peças.

- i) O conjunto de Hausdorff \mathbb{H} é um espaço métrico completo com a métrica $d_{\mathbb{H}}$.
- ii) Por todas as funções do SIF S serem contrações, a função $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ em (3.11) é uma contração.
- iii) Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, começando com qualquer $A \in \mathbb{H}$, a órbita $A, T(A), T^2(A), \dots$ converge para um limite $L \in \mathbb{H}$, ou seja, L é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 .
- iv) Por construção, as transformações afins têm imagem $T_i(L)$ autossimilares com L . Então $L = T(L)$ é a união de suas partes $T_i(L)$, que são autossimilares com L . Portanto L é o fractal buscado, gerado pelo sistema iterado de funções.

3.6 Como gerar imagens de um SIF

Uma maneira fácil usando computadores é usar a n -ésima iterada da função T em (3.11) a partir de um conjunto inicial compacto C_0 , que costuma-se tomar com apenas um ponto.

Se um SIF tem n funções, cada iterada

$$C_{i+1} = T(C_i) = T_1(C_i) \cup \dots \cup T_n(C_i)$$

terá n^i pontos. Isso pode ser um inconveniente computacional se n for grande, como por exemplo no tapete de Sierpinski (ver Figura 6, p. 24), que tem 8 partes autossimilares, em que na 5ª iterada já tem $8^5 = 32768$ pontos, ou se as partes do fractal forem muito desproporcionais em área.

Alguns softwares, como o wxMaxima usam uma estratégia de adicionar pontos a partes baseado em probabilidades, como explicaremos mais adiante.

3.6.1 No Octave

O *software* livre Octave⁴ fornece uma linguagem bastante potente para manipulação de matrizes.

Criamos uma sequência de comandos (em fonte monoespçada) que podem ser adaptados para qualquer fractal gerado por um Sistema Iterado de Funções. Mas que funciona bem apenas quando o SIF tem poucas funções.

$$(A_i x + b_i)' = x' A_i' + b_i'$$

⁴ GNU Octave – Scientific Programming Language, <octave.org>.

1. Defina o conjunto inicial:

$$C = [0;0];$$

2. Defina as matrizes A_1, A_2, A_3 e os vetores translação b_1, b_2, b_3 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = A_1;$$

$$A_3 = A_1;$$

$$b_1 = [0;0];$$

$$b_2 = [2;0];$$

$$b_3 = [1;\sqrt{3}];$$

3. Defina as transformações afins em forma transposta:

$$T_1 = @(x) A_1 * x + b_1;$$

$$T_2 = @(x) A_2 * x + b_2;$$

$$T_3 = @(x) A_3 * x + b_3;$$

4. Determine um número de passos e gere recursivamente as iteradas.

```
passos = 8;
for k=1:passos
    C = [T1(C), T2(C), T3(C)];
endfor
```

No passo acima, o Octave permite juntar matrizes uma ao lado da outra, como se fossem submatrizes, o que é bem conveniente.

5. Plote o fractal como um conjunto disperso de pontos (*scatter* em inglês).

```
scatter(C(1,:), C(2,:), "marker", ".");
```

que gera a imagem na Figura 21.

3.6.2 No wxMaxima

Vamos nos referir ao fractal Folha de Samambaia apresentado em (ROUSSEAU; SAINT-ALBIN, 2015, Ex. 12.4, p.71), em que as partes autossimilares são:

- i) a folhagem exceto as duas folhas embaixo, encolhida e levemente rotacionada, dada por T_1 ;

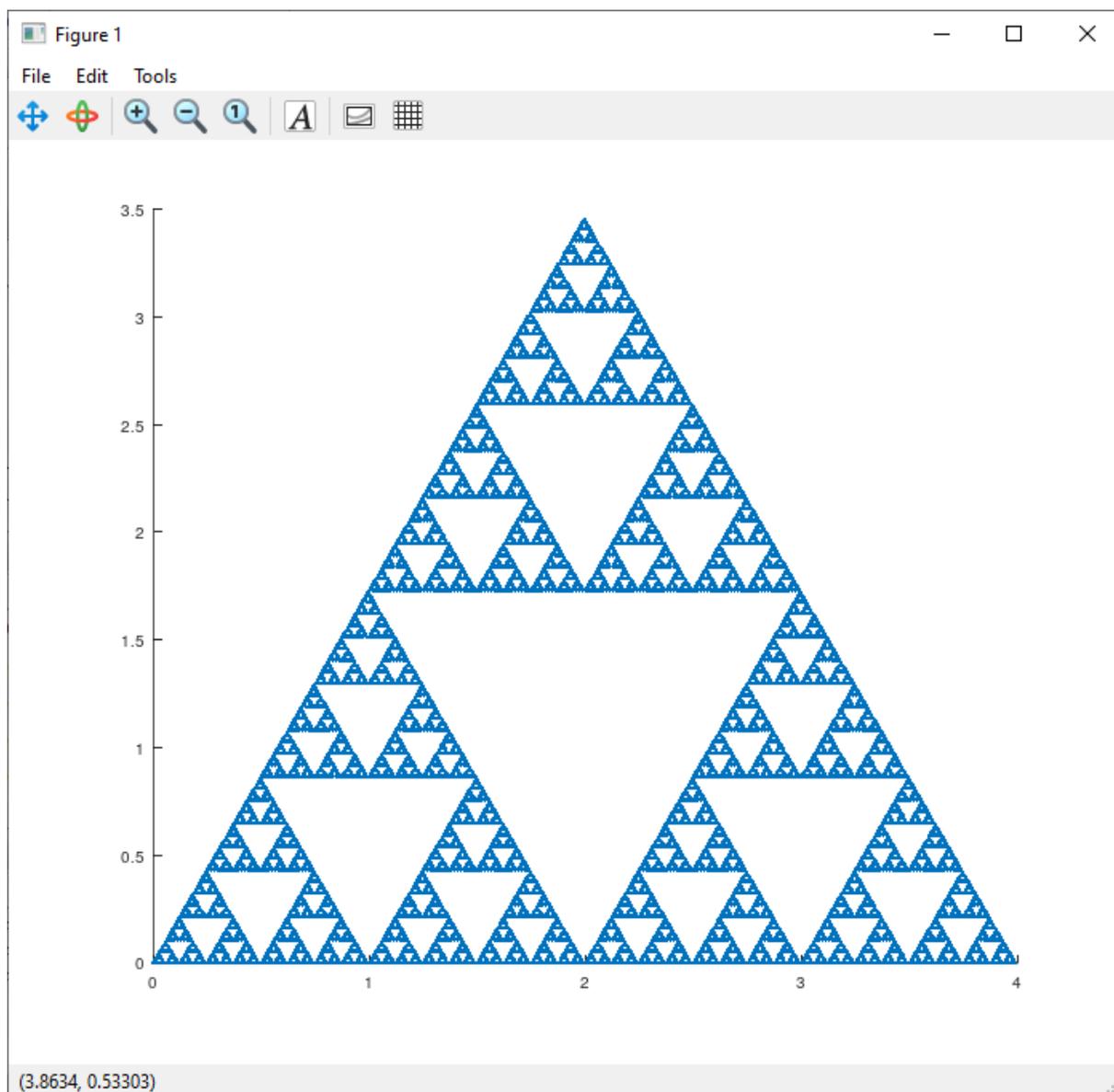


Figura 21 – Imagem gerada pelas instruções do Octave da Seção 3.6.1, para o triângulo de Sierpinski.

- ii) uma folha na base à esquerda, rotacionada e encolhida, dada por T_2 ;
- iii) uma folha na base à direita, refletida, rotacionada e encolhida, dada por T_3 e
- iv) o talo, achatando na direção horizontal e encolhendo, dado por T_4 .

O *software* livre wxMaxima⁵

Daremos o código apresentado em (ROUSSEAU; SAINT-ALBIN, 2015, p. 77) para gerar o fractal Folha de Samambaia no wxMaxima, que tem uma função dedicada `ifs` (sigla para SIF em inglês), que usa um sistema de probabilidades para distribuir os pontos.

1. Definindo as quatro matrizes do SIF:

```
A1: matrix([ 0.85, 0.04], [-0.04, 0.85]);
A2: matrix([ 0.20,-0.26], [ 0.23, 0.22]);
A3: matrix([-0.15, 0.28], [ 0.26, 0.24]);
A4: matrix([ 0.00, 0.00], [ 0.00, 0.16]);
```

2. Pelo sistema de distribuição de pontos usando probabilidades acumulativas: 75% dos pontos vão no ramo acima, $86\% - 75\% = 11\%$ dos pontos na folha da base à esquerda, $97\% - 86\% = 11\%$ dos pontos na folha da base à direita e $100\% - 97\% = 3\%$ dos pontos serão postos no talo.

```
prob: [75, 86, 97, 100];
```

3. Definindo o SIF pelos conjuntos das matrizes e das translações:

```
mat: [A1, A2, A3, A4];
trans: [[0., 1.6], [0., 1.6], [0., 0.44], [0., 0.]];
```

4. Definindo o ponto inicial e o número de iteradas, que darão o número de pontos:

```
ini: [0,0]; iter: 20000;
```

5. Finalmente, chamando a função que traça o SIF.

```
ifs(prob, mat, trans, ini, iter, [style,dots],[same_xy,true]);
```

que gera a imagem na Figura 22.

⁵ wxMaxima – a document based interface for the computer algebra system Maxima, <<http://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>>

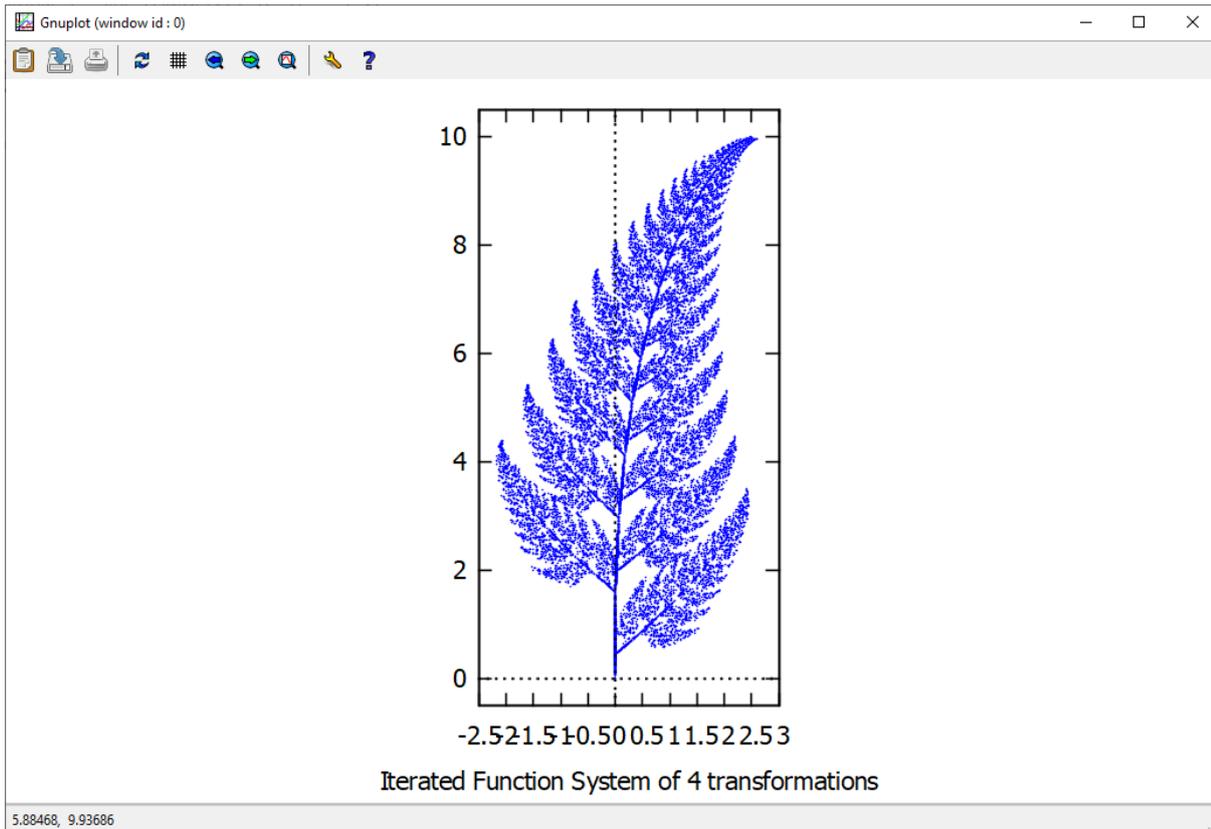


Figura 22 – Imagem gerada pelas instruções do wxMaxima da Seção 3.6.2, para a Folha de Samambaia.

3.7 Um exemplo

Já fizemos, na Seção 3.2, o exemplo do Triângulo de Sierpinski como o SIF de três funções em (3.2) ou, na forma matricial que adotamos, em (3.3). No código da Folha de Samambaia, na Seção 3.6.2, pode-se obter as contrações afins que a geram. Vamos agora fazer um exemplo do zero.

Suponha que queiramos um fractal semelhante a uma flor de quatro pétalas, conforme o esquema da Figura 23. Se $OA = 2$, é fácil calcular que $p = AM = \sqrt{2}$, $q = OE = 2 - \sqrt{2}$ e $r = OF = 2 + \sqrt{2}$, e por simetria, as coordenadas dos pontos $A = (p, 0)$, $B = (0, p)$, $C = (-p, 0)$, $D = (0, -p)$.

O sistema iterado de funções que gera a flor deve levar o fractal todo (isto é, o círculo azul de centro na origem O e raio r) nos círculos menores de centros O, A, B, C e D , com raios q e p nos demais, o que corresponde a homotetias de razão $\frac{q}{r}$ e $\frac{p}{r}$ e translações para os centros.

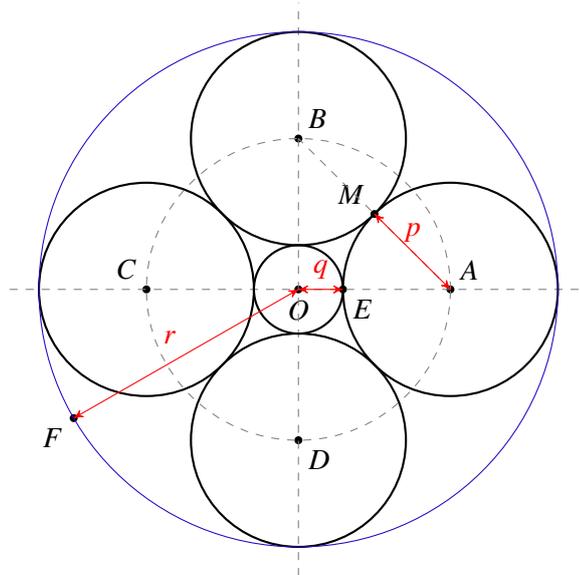


Figura 23 – Decomposição do fractal “flor” em partes similares. As contrações afins devem levar o círculo externo em azul em um dos círculos internos em preto.

Eis o SIF correspondente.

$$T_1(x) = \frac{q}{r}x, \quad T_2(x) = \frac{p}{r}x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_3(x) = \frac{p}{r}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$T_4(x) = \frac{p}{r}x + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_5(x) = \frac{p}{r}x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Na Figura 24 vemos o fractal traçado com o auxílio do *software* Octave, com o código seguinte:

```
p = sqrt(2);
q = 2 - p;
r = 2 + p;

T1 = @(x) (q/r)*x ;
T2 = @(x) (p/r)*x + [2;0];
T3 = @(x) (p/r)*x + [0;2];
T4 = @(x) (p/r)*x + [-2;0];
T5 = @(x) (p/r)*x + [0;-2];

C = [0;0];
passos = 5;
for k=1:passos
    C = [T1(C),T2(C),T3(C),T4(C),T5(C)];
endfor

scatter(C(1,:),C(2,:), "marker", ".")
```

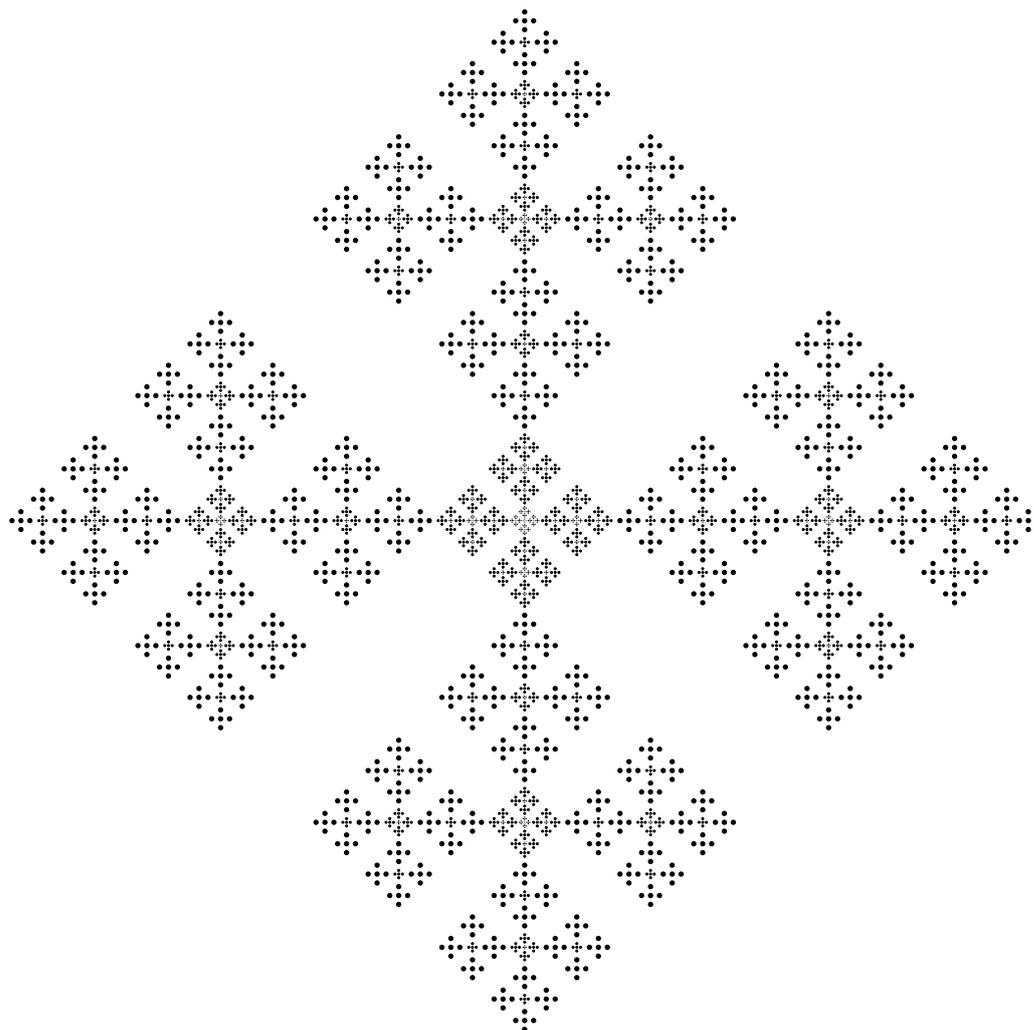


Figura 24 – “Flor” quadrada gerada com o SIF da Seção 3.7.

Obtivemos uma flor com pétalas quadradas como atrator de nosso SIF, não a de pétalas circulares esperada. Onde erramos?

CONCLUSÃO

Ao longo desta dissertação exploramos de maneira abrangente o fascinante mundo dos fractais, com ênfase especial nos conjuntos de Julia e Mandelbrot, bem como no uso de sistemas iterados de funções (SIF) e transformações afins. Através de uma abordagem histórica, foi possível contextualizar o desenvolvimento dos fractais, desde as contribuições iniciais de Gaston Julia até a popularização do conceito por Benoit Mandelbrot, que trouxe uma nova perspectiva para a geometria e suas aplicações.

Os fractais são objetos matemáticos com propriedades únicas, como a autossimilaridade e a complexidade infinita, características que se manifestam de forma particularmente marcante nos conjuntos de Julia e Mandelbrot. O Conjunto de Mandelbrot, em particular, serve como um ponto central, a partir do qual uma infinidade de conjuntos de Julia emergem, cada um exibindo uma complexidade única e autossimilar. A investigação destas estruturas não só realça a beleza estética da geometria fractal, mas também a profundidade matemática que estas figuras carregam, revelando padrões complexos que se repetem em escalas cada vez menores.

A aplicação das transformações afins e dos sistemas iterados de funções permitiu um aprofundamento na compreensão de como esses fractais são gerados e de suas propriedades dinâmicas. Esses métodos matemáticos fornecem uma estrutura formal para a criação e análise de fractais, destacando como operações simples podem levar à geração de figuras de complexidade infinita.

Ao final deste trabalho, reafirmamos a importância dos fractais no estudo da geometria moderna e suas aplicações em diversos campos, como a física, a biologia e as artes visuais. A investigação contínua neste domínio promete não apenas avançar o entendimento teórico dos fractais, mas também possibilitar novas aplicações práticas, ampliando o impacto desse campo na ciência e na tecnologia.

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. ISBN 978-85-216-1217-9.
- BARNESLEY, M. F. **Fractals everywhere**. 2. ed. New York: Morgan Kaufmann, 2000.
- _____. **Superfractals**. New York: Cambridge University Press, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CAYLEY, P. Desiderata and suggestions: No. 3. the newton-fourier imaginary problem. **American Journal of Mathematics**, Johns Hopkins University Press, v. 2, n. 1, p. 97–97, 1879. ISSN 00029327, 10806377. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2369201>>.
- DÜRER, A. **Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen**. Nüremberg: SLUB Dresden, 1525.
- FALCONER, K. **Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications**. [S.l.]: Wiley, 1990.
- GAUSS, C. F. **Disquisitiones Arithmeticae**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1986.
- GLAZIER, J. A.; JENSEN, M. H.; LIBCHABER, A.; STAVANS, J. Structure of arnold tongues and the $f(\alpha)$ spectrum for period doubling: Experimental results. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 34, p. 1621–1624, Aug 1986.
- Landmark writings in western mathematics. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Ed.). [S.l.]: Elsevier, 2005. cap. 46.
- HAUSDORFF, F. **Grundzüge der Mengenlehre**. [S.l.]: Von Veit & Comp., 1914.
- HILBERT, D. Über die stetige abbildung einer linie auf ein flächenstück. **Mathematische Annalen**, n. 38, p. 459–460, 1891.
- KOCH, H. v. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. **Acta Math.**, n. 30, p. 145–174, 1906.
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1996. (Coleção Matemática Universitária).
- _____. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- MANDELBROT, B. B. How long is the coast of britain?: Statistical self-similarity and fractional dimension. v. 156, p. 636–638, 1967.
- _____. **Les objets fractals: forme, hasard et dimension**. [S.l.: s.n.], 1975.
- MUSGRAVE, F. K. Methods for realistic landscape imaging. In: . [S.l.: s.n.], 1993.
- PEANO, G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. **Math. Ann.**, n. 36, p. 157–160, 1890.
- ROUSSEAU, C.; SAINT-ALBIN, Y. **Matemática e atualidades**. [S.l.]: SBM, 2015. v. 2.
- SIERPIŃSKI, W. Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. **Compt. Rend. Acad. Sci.**, Paris, 1915.

SUTHERLAND, S. An introduction to julia and fatou sets. **Springer Proceedings in Mathematics and Statistics**, v. 92, p. 37–60, 01 2014.

