



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Jorge Luis de Sousa Santos

**UMA PROPOSTA DE CONTRIBUIÇÃO EFETIVA DA MATEMÁTICA
DO ENSINO BÁSICO À FORMAÇÃO DO JOVEM EMPREENDEDOR**

RECIFE
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Jorge Luis de Sousa Santos

**UMA PROPOSTA DE CONTRIBUIÇÃO EFETIVA DA MATEMÁTICA
DO ENSINO BÁSICO À FORMAÇÃO DO JOVEM EMPREENDEDOR**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente

RECIFE
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237p

Santos, Jorge Luis de Sousa

Uma proposta de contribuição efetiva da matemática do ensino básico à formação do jovem empreendedor / Jorge Luis de Sousa Santos. - 2022.
100 f. : il.

Orientador: Rodrigo Genuino Clemente.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2022.

1. Educação empreendedora. 2. Matemática financeira. 3. Empreendedorismo de negócios. I. Clemente, Rodrigo Genuino, orient. II. Título

CDD 510

JORGE LUIS DE SOUSA SANTOS

Uma proposta de contribuição efetiva da matemática do ensino básico à formação do jovem empreendedor.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 22/07/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente (Orientador)– UFRPE

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira- UFCG

Prof. Dr. Ricardo Nunes Machado Junior– PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho a todos aqueles que valorizam e compartilham o conhecimento como ferramenta de crescimento pessoal e coletivo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Agradeço a meu núcleo familiar de origem, pai: Oséas (in memoriam), mãe: Eda e irmãos: José Carlos, Jarbas, Jane (in memoriam), James e Jaílson (in memoriam), e a meu núcleo familiar constituído, esposa: Madalena e filhos: Patrícia, Breno e Tatiana. Todos tiveram ou têm parcela de contribuição relevante ao longo de minha vida.

Agradeço a todos os demais familiares e amigos, admitindo dispensada a citação nominal.

Agradeço aos professores que me orientaram nesse caminho de aprendizado permanente, em particular, àqueles que me ensinaram matemática, desde cedo minha fonte de conhecimento favorita.

Agradeço, de igual modo, aos professores do Profmat.

Agradeço aos colegas do programa, porque acredito que, direta ou indiretamente, a experiência de cada um repercute para os demais.

Agradeço finalmente ao meu orientador, Prof. Dr. Rodrigo pela disponibilidade, objetividade e prestatividade em sua atuação.

“O sonho antigo de uma sociedade mais justa não depende de paixões ou ideologias efêmeras, mas da valorização do conhecimento como instrumento fundamental na escolha das decisões.”

(Jorge Luis de Sousa Santos)

Declaração

Eu, Jorge Luis de Sousa Santos, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob o título “Uma proposta de contribuição efetiva da matemática do ensino básico à formação do jovem empreendedor”, entregue como trabalho de conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo o uso de paráfrase sem as devidas indicações das fontes será considerado plágio e estará sujeito a processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador Dr. Rodrigo Genuíno Clemente de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 10 de agosto de 2022


Jorge Luis de Sousa Santos

Resumo

A ideia deste trabalho originou-se na observação dos elevados índices de evasão escolar no ensino básico, principalmente na passagem dos anos finais do ensino fundamental para os iniciais do médio. Dentre as justificativas mais frequentes para o fato, estavam presentes a procura pelo ingresso no mercado de trabalho, como alternativa para complementação da renda familiar, e o desinteresse pela atividade escolar. Em paralelo, os dados gerais apontavam expressivos contingentes de desempregados, entre eles muitos jovens com formação insuficiente, produzindo, em consequência, um aumento das tentativas de acesso à atividade informal.

O desenvolvimento da proposta permitiu a percepção de que o universo objeto de interesse poderia atender bem mais que o estudante de escola pública de baixa renda. Ela procura examinar algumas alternativas do suporte da Matemática e suas Tecnologias ao aluno da escola básica que demonstra interesse pelo empreendedorismo. Para tanto, buscou-se respaldo nas diretrizes nacionais de ensino e nas fases principais de implementação de um negócio, consideradas as disparidades de um país continental.

Foram explicitados os principais tópicos da ferramenta matemática financeira e os conceitos básicos de economia e gestão financeira, buscando sempre evidenciar a aplicação matemática associada. De modo similar, foram destacadas as fases típicas da montagem de um empreendimento.

Ao final, apresenta-se um conjunto de aplicações em que são sugeridas atividades e exercícios com potencial de reprodução em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Empreendedora, Suporte Matemático, Matemática Financeira, Empreendedorismo de Negócios.

Abstract

The idea of this study came from the high rates of school dropout in basic education, especially in the transition from middle to high school. The search for entry into the job market as an alternative to supplement family income and the lack of interest in school activities were among the most frequent reasons. At the same time, general data pointed to a significant number of unemployed, including many young people with insufficient training which increase attempts to develop informal activities.

The proposal development allowed the perception that this issue could serve much more than for low-income public-school students. It seeks to examine some alternatives for supporting Mathematics and its Technologies for students who show an interest in entrepreneurship. For this, support was sought in national teaching guidelines and in the main phases of business implementation, considering the disparities of a continental country.

The main topics of financial mathematics tools and the basic concepts of economics and financial management were explained, always seeking to highlight the associated mathematical application. Similarly, typical phases of setting up a business were highlighted.

At the end, a set of applications with activities and exercises for reproduction in classrooms is suggested.

Keywords: Entrepreneurial Education, Mathematical Support, Financial Mathematics, Business Entrepreneurship.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A curva da oferta	44
Figura 2 – A curva da demanda	45
Figura 3 – Equilíbrio de mercado	45
Figura 4 – Excesso de oferta	46
Figura 5 – Excesso de demanda	46
Figura 6 – Ponto de equilíbrio financeiro	53

Sumário

	Introdução	21
1	CARACTERIZAÇÃO DA PROPOSTA	25
1.1	Pressupostos	25
1.2	Delimitação	27
2	TÓPICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA	33
2.1	Juros simples	33
2.2	Juros compostos	34
2.3	Rendas, Séries ou Anuidades	37
2.4	Empréstimos, Financiamentos e Sistemas de Amortização	40
3	TÓPICOS BÁSICOS DE ECONOMIA E GESTÃO FINANCEIRA	43
3.1	O mercado e os agentes econômicos	43
3.2	Os fatores de produção	47
3.3	As variações nos preços pela inflação e os índices de preços	47
3.4	O custo do dinheiro	48
3.5	O Sistema Financeiro no Brasil	49
3.6	Principais instrumentos de Gestão Financeira	50
3.6.1	Fluxo de caixa	51
3.6.2	Capital de giro	52
3.6.3	Viabilidade financeira	52
4	PRINCIPAIS FASES DE UM PROJETO DE NEGÓCIOS	55
4.1	Prospecção do tipo de negócio	55
4.2	Projeções de Receitas, Gastos e Investimentos	56
4.3	Viabilização e Implantação	56
4.4	Operação	57
5	SUGESTÕES E PROPOSTAS DE ABORDAGENS	59
5.1	Bloco 1	59
5.2	Bloco 2	60
5.3	Bloco 3	61
5.4	Bloco 4 Examinando questões do ENEM	66
5.4.1	Enem 2012 - Questão 166	66
5.4.2	Enem 2015 – Questão 150	67
5.4.3	Enem 2018 – Questão 175	68

5.4.4	Enem 2019 – Questão 150	69
5.4.5	Enem 2012 – Questão 140	69
5.4.6	Enem 2015 – Questão 156	71
5.4.7	Enem 2017 – Questão 136	72
5.4.8	Enem 2018 – Questão 137	72
5.4.9	Enem 2017 – Questão 137	74
5.4.10	Enem 2020 – Questão 139	74
5.4.11	Enem 2020 – Questão 156	75
5.4.12	Enem 2019 – Questão 172	76
5.4.13	Enem 2019 – Questão 178	78
5.4.14	Enem 2016 – Questão 144	79
5.4.15	Enem 2016 – Questão 146	79
5.4.16	Enem 2016 – Questão 157	80
5.4.17	Enem 2015 – Questão 152	81
5.4.18	Enem 2018 - Questão 148	81
5.4.19	Enem 2021 - Questão 173	82
5.4.20	Enem 2021 - Questão 149	83
5.4.21	Enem 2021 - Questão 162	84
5.4.22	Enem 2020 – Questão 175	85
5.4.23	Enem 2019 - Questão 168	86
5.4.24	Enem 2014 – Questão 153	87
5.4.25	Enem 2012 – Questão 156	88
5.4.26	Enem 2016 - Questão 145	89
5.4.27	Enem 2016 – Questão 169	90
5.4.28	Enem 2014 – Questão 136	91
5.4.29	Enem 2021 - Questão 180	92
5.4.30	Enem 2019 – Questão 151	93
5.4.31	Enem 2013 – Questão 160	93
5.4.32	Enem 2015 - Questão 136	94
5.4.33	Enem 2012 – Questão 162	95
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS	99

Introdução

Estudiosos de diversas áreas do conhecimento têm destacado a necessidade de que se estimule uma maior integração dos conteúdos próprios do ensino básico aos presentes na formação do empreendedor de negócios, aquele que viabiliza a disponibilidade de produtos ou serviços. A recomendação decorre do descompasso existente entre o aprendizado escolar e a realidade que os estudantes precisam enfrentar ao buscarem espaço no mercado de trabalho, em intenso processo de mudança. As dificuldades de acesso ao mercado formal motivam o aumento da procura para exercer uma atividade empreendedora ou um trabalho autônomo, geralmente, sem preparação adequada.

As alternativas para a inserção de jovens no mercado apresentam limitações competitivas, em particular, para aqueles originários dos segmentos socioeconômicos de renda mais baixa. A situação pode incorporar um conjunto razoável de defasagens que produzem em sequência mais desequilíbrios sociais.

O Brasil, particularmente, apresenta fragilidades em sua economia com déficits fiscais expressivos, aumento da inflação, altas taxas de desemprego e excessiva concentração de renda. Dados disponíveis revelam que o resultado primário do Governo Central do Brasil apresentou déficit de 88,9 bilhões de reais, em 2019, equivalente a 1,2% do Produto Interno Bruto (PIB), déficit de 743,1 bilhões, em 2020, equivalente a 10% do PIB e déficit de 35 bilhões, em 2021, equivalente a 0,4% do PIB¹.

A inflação em 2019 teve taxa de 4,31%, com centro da meta definido em 4,25% e teto superior da banda em 5,75%; em 2020, a inflação anual foi de 4,52%, com centro em 4% e teto superior em 5,5%; em 2021, houve inflação de 10,06%, para uma meta de 3,75% e teto superior de 5,25%. Para 2022, está indicada a meta de 3,5% com teto superior de 5%; até o mês de maio do ano em curso, a inflação acumulada é de 4,78%, com valor acumulado nos últimos doze meses em 11,73%².

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o desemprego se refere às pessoas com idade para trabalhar que não estão trabalhando, mas estão disponíveis e tentam encontrar trabalho. As taxas de desemprego têm apresentado patamares relevantes; no quarto trimestre de 2019 atingiu a taxa de 11,1% e, no terceiro trimestre de 2020 e primeiro de 2021, chegou a 14,9%. No primeiro trimestre de 2022, a taxa recuou para 11,1%³.

O Brasil está entre os dez países mais desiguais do mundo — afirma o sociólogo Luis Henrique Paiva, coordenador de estudos em seguridade social do Instituto de Pesquisa Econômica

¹ Disponível em: <<https://www.gov.br/economia/pt-br/assuntos/noticias/>> Acesso em 5 jun 2022.

² Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controlinflacao/historicometas>> Acesso em 5 jun 2022.

³ Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/indicadores>> Acesso em 5 jun 2022.

Aplicada (Ipea). Entre mais de 180 países, o Brasil tem a segunda maior concentração de renda dos 1% mais ricos. Relatório da Organização das Nações Unidas (ONU), divulgado em 2019, antes da pandemia, informou que 1% da população mais rica detinha 28,3% da renda brasileira. Ampliando a faixa de 1% para 10% dos brasileiros mais ricos, a participação na renda do país sobe para 41,9% do total. Desse modo, 90% da população tem acesso a menos de 60% da renda total⁴.

Tais fatores repercutem na disponibilidade de recursos para investimento e custeio nas mais diversas áreas, a exemplo da saúde, educação, alimentação, transportes, lazer, cultura e outras, que assegurem minimamente o bem-estar de sua população. Seus impactos negativos na qualidade de vida de parcela relevante da sociedade são exaustivamente conhecidos, porém a oferta de soluções consistentes é bastante escassa.

As consequências provocadas pela pandemia de covid-19, com impacto em escala mundial, são ainda mais graves em países com desempenho econômico insuficiente e incorporam novas variáveis a esse espectro de alterações.

Em termos educacionais, fenômenos previsíveis como baixo desempenho e agravamento da taxa de evasão escolar são exemplos de efeitos danosos já diagnosticados nos anos recentes e que tendem a apresentar um panorama mais sombrio, por força do maior prazo que será demandado para uma desejável recuperação econômica.

No que se refere ao desempenho escolar, nossa posição já é bastante incômoda pois ocupamos os últimos lugares em avaliações internacionais e as notas nas avaliações domésticas se situam, em sua maioria, abaixo das metas fixadas. Por outro lado, os índices de evasão escolar são elevados, com maior relevância a partir da passagem do ensino fundamental para o médio e mais presentes na escola pública.

Internamente, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), principal indicador de qualidade da educação brasileira, medido a cada dois anos e divulgado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), evoluiu de 4,7, em 2017, para 4,9, em 2019, nos anos finais do ensino fundamental, com meta global fixada em 5,2. Quanto aos anos finais do ensino médio, nos mesmos anos de referência, a transição foi de 3,8 para 4,2, com a meta fixada em 5,0⁵.

Em âmbito mundial, o Programa Internacional de Avaliação de Aluno (Pisa), sigla em inglês do Programme for International Student Assessment, envolve a mais relevante comparação entre países, no que se refere ao desempenho educacional. A página do Inep na internet esclarece que a avaliação do Pisa busca identificar em que medida as escolas, em cada país participante, estão preparando seus jovens para exercerem a cidadania na sociedade.

A investigação é realizada a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desen-

⁴ Disponível em: <<https://www12.senado.leg.br/noticias/>> Acesso em 5 jun 2022.

⁵ Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb/resultados/>> Acesso em: 29 abr. 2022.

volvimento Econômico (OCDE), órgão internacional que reúne países desenvolvidos, avaliando os domínios em leitura, matemática e ciências. Os convites para participação foram estendidos a países em desenvolvimento e o Brasil tem estado presente desde a primeira edição, no ano 2000, quando obteve a 36^a posição em leitura, único componente analisado, com participação de 40 países. No último evento, realizado em 2018, o Brasil alcançou a faixa no ranking de 55^a a 59^a, em leitura, de 69^a a 72^a, em matemática, e de 64^a a 67^a, em ciências, dentre 79 países participantes ⁶.

Os dados relativos à evasão escolar adicionam indicadores de igual modo preocupantes a esse panorama. De acordo com o Censo Escolar 2020, divulgado pelo Inep, as taxas de evasão na rede pública por ano/série no Brasil, entre 2017/2018, foram de 6,7% para o 9º ano do ensino fundamental, 11,2% para a 1ª série, 10,1% para a 2ª série e 5,8% para a 3ª série do ensino médio. As principais alegações apresentadas pelos estudantes para sua motivação são a necessidade de trabalhar e a falta de interesse ⁷.

As informações disponíveis para o tema revelavam maior expressividade das taxas de evasão a partir dos anos finais do ensino fundamental e seu agravamento no ensino médio. A pandemia de covid-19 alterou significativamente esse comportamento com as restrições necessárias de isolamento social e as dificuldades de acessibilidade remoto no âmbito dos segmentos de menor renda. Dados do Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef), divulgados em 2012, indicavam que a evasão escolar no Brasil abrangia cerca de 5 milhões de alunos. Foi estimado ainda que a pandemia produziu um acréscimo nesta quantidade, de 5% entre os alunos do ensino fundamental e de 10% no ensino médio. Entre aqueles que permaneceram matriculados, a dificuldade foi de acesso, com 4 milhões de estudantes sem conectividade ⁸.

Parte dos alunos que atingem o ensino médio não prosseguem seus estudos acadêmicos, optando pelo exercício de atividades nas mais variadas áreas de negócios, seja por influência familiar, seja por aptidão natural. A outra parte relevante é composta por jovens do grupo de renda mais baixa, os quais, em algum momento do ciclo, são forçados a procurar outra alternativa para contribuir com a melhoria da renda familiar e/ou satisfazer anseios pessoais.

Desse modo, há um expressivo contingente de jovens que não consegue acessar o mercado de trabalho, tanto pela redução global da oferta quanto pela falta de preparo para atender aos requisitos do mercado e são frustrados pelas circunstâncias. Ao se defrontarem com tais barreiras, é natural a busca por espaço no mercado informal, embora o preparo prévio seja quase inexistente. Surge deste impasse, então, o exercício de um trabalho autônomo ou de uma atividade empreendedora de pequeno porte.

⁶ Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/busca-geral/211-noticias/218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil>> Acesso em: 29 abr. 2022.

⁷ Disponível em: <https://download.inep.gov.br/censo_escolar/resultados/2020/apresentacao_coletiva.pdf> Acesso em 30 abr. 2022

⁸ Disponível em: <<https://www.camara.leg.br/noticias/814382-educadores-alertam-para-aumento-de-evasao-escolar-durante-a-pandemia/>> Acesso em: 29 abr. 2022.

Cumpram-se mencionar também que, até a conclusão do ciclo básico, não são frequentes as abordagens pelas escolas dos assuntos que preparem seus alunos para este caminho. Várias instituições de ensino, com mais ênfase na fase final do ensino básico, direcionam seus conteúdos para as áreas de humanas, exatas, artes, saúde, entre outras. Não há, entretanto, um tratamento sistemático das questões básicas do empreendedorismo nesta etapa do processo de ensino/aprendizagem, sugerindo a ausência de suporte para aqueles que iniciam vida profissional apenas com os conhecimentos já obtidos.

No contexto deste trabalho, pretende-se destacar o modo como uma disciplina integrante da formação básica, ou seja, a Matemática e suas Tecnologias, pode contribuir para a preparação do jovem que pretende empreender. O desenvolvimento da proposta será efetivado de modo indireto por meio de pesquisa e análise bibliográfica em conteúdos didáticos vinculados e de sua adequação às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Ensino Médio. Das conclusões obtidas, será possível propor algumas estratégias a título de sugestão para aplicação em sala de aula, desde o ensino básico, destacando temas e aplicações práticas.

Todas as premissas ora elencadas, representam um caminho inicial no sentido de que possam ofertar condições de maior competitividade aos jovens no mercado profissional e contribuam para sua formação integral.

1 Caracterização da Proposta

1.1 Pressupostos

A ocorrência de atividades empreendedoras nas interações humanas em sociedade dispõe de registros desde períodos remotos e assumiu contornos semelhantes aos atuais, após as transformações decorrentes dos processos de industrialização, a partir do século XVIII.

O termo empreendedor, cuja origem é a palavra francesa *entrepreneur*, passou a ser empregado para caracterizar com mais propriedade aquela pessoa que assumia os riscos e investia em novas atividades. Criava-se, portanto, uma diferenciação dessa, tanto para os capitalistas, fornecedores do capital de investimento, quanto para os administradores, responsáveis pela gestão organizacional das empresas.

O conceito evoluiu bastante desde então, porém ainda preserva a referência primitiva de designar alguém que assume riscos e promove buscas por inovação. Em consulta ao Dicionário Online de Português, www.dicio.com.br, realizada em 30.04.2022, empreendedorismo é a capacidade de projetar novos negócios ou de idealizar transformações inovadoras ou arriscadas em companhias ou empresas. É vocação, aptidão ou habilidade de desconstruir, de gerenciar e de desenvolver projetos, atividades ou negócios.

Em todo o mundo, a modalidade tem prosperado em diversos modelos de negócio e em empresas de variados setores da economia. Contribuições de fatores diversos como o avanço tecnológico, a automação, a especialização crescente do mercado de trabalho, a escassez de oferta de emprego, entre outros, têm induzido ainda mais a procura por atuação em atividades empreendedoras. O fenômeno pode ser observado em escalas de maior dimensão, no trabalho individual autônomo e no empreendedorismo de micro e pequeno portes.

No Brasil, o desenvolvimento da prática é mais recente, mas já é bem expressivo. Teve maior impulso nos anos finais da última década de 90 e, segundo dados da pesquisa Global Entrepreneurship Monitor (GEM) - Empreendedorismo no Brasil – 2019¹, Empreendedorismo no Brasil, a taxa de empreendedorismo total no país, em 2019, foi de 38,7%, significando que este era o percentual da população adulta brasileira (18 - 64 anos) envolvida de alguma forma com a atividade empreendedora, o que corresponde a 53 milhões de indivíduos.

¹ O programa de pesquisa Global Entrepreneurship Monitor(GEM), de abrangência mundial, é uma avaliação anual do nível nacional da atividade empreendedora. Teve início em 1999, com a participação de 10 países, por meio de uma parceria entre a London Business School, da Inglaterra, e o Babson College, dos Estados Unidos. Nesses 20 anos, mais de 80 países participaram do programa, que permanece crescendo ano a ano. Atualmente, no mundo, o GEM é o maior estudo contínuo sobre a dinâmica empreendedora. A coordenação do GEM no Brasil é realizada pelo Instituto Brasileiro de Qualidade e Produtividade – IBQP, com parceria técnica e financeira do Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas – SEBRAE.

A relevância do tema motivou em vários países sua incorporação ao conjunto de assuntos próprios do ensino básico. A motivação para empreender pode surgir e ser estimulada desde fases da infância e adolescência e com essa constatação foram implementados programas e projetos relacionados.

O relatório GEM 2019/20 - Global Report traz ainda dados relativos ao contexto, em 54 países, acerca do suporte que a atividade empreendedora recebe em cada nação. São alguns componentes ponderados e transformados em índice, entre eles a existência de educação empreendedora integrada ao ciclo escolar básico. O Brasil ocupa a 49ª posição nesse ranking com índice 2,03, entre variações máxima de 5,45 e mínima de 1,44².

As iniciativas brasileiras nesse sentido ainda são esparsas e outros fatores adversos requerem atenção, pois o ambiente econômico atual não favorece a realização de investimentos e os impactos decorrentes da pandemia ainda devem perdurar por prazo incerto.

No contexto educacional, como já destacado, os indicadores disponíveis sobre a qualidade da educação básica, tanto na comparação com os de outros países quanto aqueles medidos por critérios internos, apresentam déficits de qualidade. Sob o foco do mundo dos negócios, uma das condicionantes restritivas ao melhor desempenho, de acordo com a pesquisa - Empreendedorismo no Brasil 2019, é a falta de investimentos na educação empreendedora em todos os níveis, principalmente, no ensino básico.

O interesse do jovem pelo empreendedorismo pode ter origem na descoberta de aptidão natural para o negócio ou em alguma tradição familiar, em relação ao qual se faz referência de “empreendedor por oportunidade”. Há, entretanto, um contingente significativo de jovens que também buscam este caminho como opção para satisfazer necessidades básicas e/ou contribuir na formação de renda familiar, dada a inexistência de alternativas em segmentos formais do mercado de trabalho. Nesse contexto, tem-se o “empreendedor por necessidade”. Também são elevados os dados de abandono escolar associado a este objetivo, especialmente na passagem do ensino fundamental para o médio.

As principais dificuldades ressaltadas afetam de modo mais severo os alunos integrantes das camadas sociais de renda mais baixa e usuários do ensino público, ou seja, aqueles que integram os segmentos com indicadores mais desfavoráveis de desempenho e abandono escolar.

A título de oportunidades com potencial de acelerar ações que promovam a transformação e melhoria desse cenário, podem ser mencionadas as diversas convergências entre as competências e respectivas habilidades da BNCC/Matemática e suas Tecnologias – Ensino Médio com os conceitos do empreendedorismo, a serem explicitados nesse trabalho.

Outro flanco de possibilidade são as alterações introduzidas pela Lei nº 13.415/2017, ao definir o denominado Novo Ensino Médio, quando ampliou o tempo mínimo do estudante na escola e permitiu que o aluno opte pela formação profissional e técnica. Houve, ainda, o decreto

² Disponível em: <<https://gem-2019-2020-global-report-rev-280520-1590656414.pdf>> Acesso em 05 jun 2022.

nº 10.393/2020 que instituiu a Nova Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) e o Fórum Brasileiro de Educação Financeira (FBEF), permitindo ações que fortaleçam a cidadania e repercutam na educação básica brasileira.

É interessante registrar a frequência de questões relacionadas ao universo dos negócios nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Em paralelo, os vestibulares ainda realizados por algumas instituições brasileiras, em relação aos componentes que tratam do conhecimento matemático e de suas tecnologias, exploram pouco o assunto sob esse enfoque. As provas do ENEM, ao contrário, têm apresentado uma variada gama de questões versando sobre a matéria.

O presente trabalho objetiva apresentar contribuições que favoreçam a aproximação dos vínculos entre os conteúdos da educação básica e aqueles próprios da área de negócios. Evidentemente, a trajetória ideal para que este processo aconteça deve envolver progressivamente todo o conjunto programático desta etapa de ensino. No âmbito deste trabalho, estão sendo examinadas algumas condições de sua implementação para o componente Matemática e suas Tecnologias.

1.2 Delimitação

Uma proposta que apresente alternativas objetivas de maior integração do ensino da matemática à formação daqueles que pretendem ingressar no mundo do empreendedorismo encerra naturalmente uma abrangência muito ampla. Os modelos de negócios são bastante variados e dinâmicos, recomendando para o desenvolvimento de um trabalho com o propósito aqui delineado a fixação de alguns parâmetros delimitadores de seu alcance.

Em primeiro lugar, suas proposições serão orientadas pela compatibilidade com as diretrizes da BNCC/Matemática e suas tecnologias, no que se refere às competências e habilidades definidas para o ensino médio. Nesse sentido, elencamos tais dados no texto, ajustados aos propósitos do presente trabalho.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para formação científica geral dos estudantes, que deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.)

HABILIDADES

Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação.

Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos.

Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

A competência amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam tomar decisão conjunta para investigar questões de impactos sociais que os mobilizem e, assim, propor e/ou participar de iniciativas e/ou ações que visem solucionar esses problemas. Ela deve também fornecer condições para o planejamento e execução de pesquisas, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de projetos, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos.

HABILIDADES

Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão. Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmé-

tica, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento da competência estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, espaciais, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida; por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho.

HABILIDADES

Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º grau, em contextos diversos.

Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.

Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira.

Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação

científica.

Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.

Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

As habilidades vinculadas a essa competência tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa a capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliar a capacidade de pensar matematicamente.

HABILIDADES

Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional.

Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra.

Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma.

Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decréscimo.

Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas.

Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

As habilidades vinculadas a essa competência assumem um importante papel na formação matemática dos estudantes que, mediante investigações, devem formular conjecturas, refutá-las ou validá-las e comunicar com precisão suas conclusões.

HABILIDADES

Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de uma função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.

Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Em sequência, foram agrupadas as situações mais representativas em que a matemática fornece suporte relevante, nas fases sensíveis de um projeto de negócios.

- Fase I - Prospecção do tipo de negócio

Identificação do tipo de empresa e detalhamento do(s) produto(s)/serviço(s);

Pesquisa e análise de mercado;

Concorrência;

Detalhamento exaustivo dos itens de produção e complementares;

Alternativas de marketing do(s) produto(s)/serviço(s).

- Fase II - Projeções Receitas/Gastos/Investimentos

Estimativa de todos os quantitativos identificados com respectivos custos e despesas para tocar o negócio;

Obtenção do valor a ser investido para o início da operação - orçamento;

Precificação do(s) produto(s)/serviço(s);

Projeções (receitas, custos, despesas e investimentos) e fluxos.

- Fase III – Viabilização

Alternativas de execução (recursos necessários, recursos disponíveis/capital próprio, patrocínio, sociedade, empreendedor individual, financiamento, empréstimo)

Viabilidade (VPL, TIR, Ponto de Equilíbrio/Payback)

- Fase IV – Operação

Receitas/custos/despesas/lucro

Custos e despesas fixos e variáveis

Recebimentos/Compromissos financeiros

Fluxo de caixa

Capital de giro

O terceiro e último componente a considerar nessa abordagem está incorporado em face do reconhecimento das dificuldades impostas pelo atual cenário da economia brasileira e seus reflexos imediatos no panorama educacional. A localização geográfica e as condições socioeconômicas da população residente impõem sérias limitações ao ensino básico brasileiro. Assim, não seria prudente, num primeiro momento, apresentar avanços de conteúdo que possam trazer mais embaraços que soluções. As sugestões de temas matemáticos ora apresentados têm a expectativa de se constituir em patamar inicial, com a possibilidade de que prospere pela expertise dos professores em sala de aula, amparados evidentemente por ações concretas e progressivas dos responsáveis pelo segmento educacional brasileiro.

2 Tópicos de Matemática Financeira

A matemática financeira aborda predominantemente os cálculos de juros em operações financeiras características, quando se realiza, por exemplo, um empréstimo/financiamento¹ ou uma aplicação em conta poupança/fundo de investimento. Na primeira alternativa, o tomador dos recursos pagará juros pelo período de sua utilização; na segunda, o aplicador coloca recursos numa instituição financeira que lhe remunera pelo tempo acordado.

Os tópicos de Matemática Financeira ora abordados foram desenvolvidos com base nos textos dos livros (5, 6).

O conceito de juros é bastante antigo e tem origem na percepção da relação próxima entre o dinheiro e o tempo. Quando um capital C é colocado à disposição de alguém, por um período de tempo t , o retorno do capital C virá acrescido de uma remuneração J , relativa ao tempo decorrido. O capital C é denominado principal, a remuneração J juro e a soma $C + J = M$ montante.

A razão $i = J/C$ é chamada taxa de juros e significa a taxa de acréscimo do capital no período considerado. Geralmente, as taxas de juros apresentam-se de duas maneiras: forma percentual e forma unitária. A taxa de 12% ao ano (percentual) ou de 0,12 ao ano (unitária) produzem o mesmo resultado. Assim, o capital de R\$1.000,00, aplicado à taxa de 12% ao ano, produz juros de $12\% \times 1.000,00 = 0,12 \times 1.000,00 = 120,00$, após um ano.

2.1 Juros simples

No regime de juros simples, a remuneração do capital inicial aplicado (principal) é diretamente proporcional ao seu valor e ao período da aplicação. O capital inicial é designado C_0 , a taxa i e o número de períodos n .

Exemplo 2.1. Um capital inicial de R\$500,00, com taxa de 2% ao mês, gera juros simples de

$$J_1 = C_0 \times i \times n = 500,00 \times 0,02 \times 1 = 10,00 \text{ em 1 mês}$$

$$J_2 = C_0 \times i \times n = 500,00 \times 0,02 \times 2 = 20,00 \text{ em 2 meses}$$

$$J_3 = C_0 \times i \times n = 500,00 \times 0,02 \times 3 = 30,00 \text{ em 3 meses}$$

$$J_n = C_0 \times i \times n = 500,00 \times 0,02 \times n = 10,00 \times n \text{ em } n \text{ meses}$$

¹ No financiamento, os recursos têm destinação específica, principalmente, para a aquisição de bens. No empréstimo, a liberação é livre, não há vinculação. Em grande parte dos textos sobre o assunto, esta referência específica não é realizada, usando-se o termo empréstimo para qualquer caso, por exemplo.

A sequência de montantes $M = C + J$ fornecida pelos vários períodos n no cálculo dos juros simples pode ser resumida

$$C_n = C_0 + C_0 \times i \times n$$

$$C_n = C_0(1 + i \times n)$$

É relevante destacar que os juros simples são calculados sempre sobre o capital inicial. No caso explicitado anteriormente, os valores de C_n são 500, 510, 520, 530, 540, ... para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Percebe-se facilmente que os valores de C_n formam uma progressão aritmética de razão $r = C_0 \times i$.

No âmbito dos juros simples, duas taxas quaisquer i_1 e i_2 relacionadas respectivamente aos períodos n_1 e n_2 , referidos à unidade comum de tempo das taxas, quando apresentam iguais quocientes da taxa em relação ao período respectivo, são ditas proporcionais.

$$\text{Assim, } i_1/n_1 = i_2/n_2$$

Exemplo 2.2. A taxa de 4% ao trimestre é proporcional à taxa de 16% ao ano, pois $0,04/3 = 0,16/12$ ou $0,04 \times 12 = 0,16 \times 3$, resultando $0,48 = 0,48$.

Dois taxas são ditas equivalentes quando aplicadas ao mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo produzem o mesmo juro. No regime de juros simples, as taxas de juros proporcionais são igualmente equivalentes, ou seja, uma taxa de 24% ao ano é equivalente a 2% ao mês.

Os juros simples são menos utilizados na prática financeira formal e são usados com mais frequência em situações específicas de curto prazo e de cobrança de juros de mora.

2.2 Juros compostos

Para o regime de juros compostos, o cálculo dos juros relativos ao primeiro período é realizado de modo similar, aplicando-se a taxa acordada sobre o capital inicial. A diferença principal ocorre nos cálculos do segundo período em diante. O saldo devedor no início do período define o valor sobre o qual incidirá a taxa de juros.

Para o primeiro período, ela incide sobre o capital inicial C_0 e gera o juro $J_1 = C_0 \times i$; o saldo devedor passa então para $C_1 = C_0 + J_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1 + i)$.

Em sequência, tem-se

$$J_2 = C_0(1 + i) \times i \text{ e } C_2 = C_1 + J_2 = C_0(1 + i) + C_0(1 + i) \times i = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2$$

$$J_3 = C_0(1+i)^2 \times i \text{ e } C_3 = C_2 + J_3 = C_0(1+i)^2 + C_0(1+i)^2 \times i = C_0(1+i)^2(1+i) = C_0(1+i)^3$$

$$J_n = C_0(1+i)^{n-1} \times i \text{ e } C_n = C_0(1+i)^n.$$

Essa demonstração respalda o teorema fundamental que explicita como um capital inicial modifica-se ao longo de n períodos, sujeito a uma taxa i , no regime de juros compostos.

Teorema 2.3. *No regime de juros compostos de taxa i , um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$.*²

Exemplo 2.4. O capital inicial de R\$500,00, com taxa de 2% ao mês, no regime de juros compostos, modifica-se como segue

$$C_1 = 500,00 \times (1 + 0,02)^1 = 500,00 \times 1,02 = 510,00$$

$$C_2 = 500,00 \times (1 + 0,02)^2 = 500,00 \times 1,0404 = 520,20$$

$$C_3 = 500,00 \times (1 + 0,02)^3 = 500,00 \times 1,061208 = 530,60$$

$$C_4 = 500,00 \times (1 + 0,02)^4 = 500,00 \times 1,08243216 = 541,22$$

Com juros simples os valores do capital aumentaram de forma constante (crescimento linear) e formaram uma progressão aritmética. Agora, com os juros compostos, os valores do capital aumentam a uma taxa constante i (crescimento exponencial) e formam uma progressão geométrica de razão $q = 1 + i$.

No regime de juros compostos, as taxas de juros não são proporcionais e, dessa forma, uma taxa de 24% ao ano não corresponde à taxa de 2% ao mês. Se o capital C_0 for aplicado a uma taxa I por um período T e o mesmo capital for aplicado a uma taxa i por um período t , com $T = n.t$, para que produzam o mesmo juro, tem-se

$$C_0(1 + I) = C_0(1 + i)^n$$

$$(1 + I) = (1 + i)^n$$

Dessa maneira, quando se tem a taxa referida ao tempo T e se deseja a taxa equivalente no tempo t , sendo $T = n \times t$,

$$(1 + i)^n = (1 + I)$$

$$(1 + i)^{\frac{n}{n}} = (1 + I)^{\frac{1}{n}}$$

$$(1 + i) = (1 + I)^{\frac{1}{n}}$$

² Texto extraído do livro Matemática Discreta da Coleção Profmat - Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Morgado, A. C.; Carvalho, P. C.P. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. pg 87

$$i = (1 + I)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Exemplo 2.5. A taxa de 24% ao ano equivale a qual taxa mensal?

$$i = (1 + 0,24)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$1 + i = 1,24^{\frac{1}{12}}$$

$$\log(1 + i) = \log 1,24^{\frac{1}{12}}$$

$$\log(1 + i) = (\log 1,24)/12$$

$$\log(1 + i) = 0,093422/12$$

$$\log(1 + i) = 0,007785$$

$$1 + i = 10^{0,007785}$$

$$1 + i = 1,0181$$

$$i = 1,0181 - 1 = 0,0181 \quad \text{ou} \quad 1,81\%$$

A taxa equivalente a 24% ao ano é, aproximadamente, 1,81% ao mês.

Se por outro lado, a taxa disponível for aquela referida a uma fração do tempo, busca-se a taxa relativa ao tempo mais longo,

$$(1 + I) = (1 + i)^n$$

$$I = (1 + i)^n - 1$$

Exemplo 2.6. Dada uma taxa bimestral de 3%, calcular a taxa equivalente anual.

Solução.:

$$I = (1 + 0,03)^6 - 1$$

$$I = 1,03^6 - 1$$

$$I = 1,1941 - 1$$

$$I = 0,1941 \quad \text{ou} \quad 19,41\%$$

A taxa de 3% ao bimestre é equivalente a cerca de 19,41% ao ano.

Observa-se com frequência serem feitas referências em situações desse tipo, na tentativa de fazer crer que há proporcionalidade entre as taxas. Cita-se que a taxa é de 18% ao ano, com capitalização bimestral de 3%, quando na realidade a taxa equivalente a 3% ao bimestre é 19,41% ao ano.

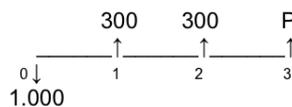
Os problemas de Matemática Financeira em larga escala envolvem o deslocamento de valores no tempo. A fórmula que respalda o processo, conforme expressa o Teorema 2.3, $C_n = C_0(1 + i)^n$, evidencia que uma quantia inicial C_0 será transformada, depois de n períodos de tempo e a uma taxa i , em uma nova quantia C_n .

De maneira geral, convencionou-se fazer referência ao capital inicial (ou ao capital no tempo de referência) como valor atual A e ao seu valor no futuro como F . A fórmula pode então ser reescrita $F = A(1 + i)^n$ e representa a fórmula da equivalência de capitais; quando se dispõe do valor atual e se pretende o valor futuro, multiplica-se o valor A por $(1 + i)^n$; inversamente, dispondo do valor futuro F , divide-se esse valor por $(1 + i)^n$, para se obter o valor atual A .

As situações descritas são ilustradas usualmente por fluxos financeiros, também conhecidos como fluxos de caixa, que facilitam a compreensão das ocorrências presentes nos problemas.

Exemplo 2.7. Um empréstimo de R\$1.000,00 foi realizado com taxa mensal de 5%. Ao fim do primeiro e do segundo mês, foram pagas duas prestações de R\$300,00. Qual deve ser o valor da terceira prestação para sua liquidação?

Solução.:



Para resolver o problema, os valores futuros das três prestações devem ser deslocados para o momento zero, somados e igualados ao valor do empréstimo.

$$1.000 = 300/(1 + 0,05) + 300/(1 + 0,05)^2 + P/(1 + 0,05)^3$$

$$1.000 = 300/1,05 + 300/1,1025 + P/1,157625$$

$$1.000 \times 1,157625 = 300 \times 1,1025 + 300 \times 1,05 + P$$

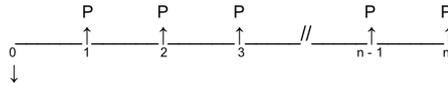
$$P = 1.157,62 - 330,75 - 315,00$$

$$P = 511,87$$

A prestação final deve ser igual a R\$511,87.

2.3 Rendas, Séries ou Anuidades

Denomina-se renda, série ou anuidade a um conjunto de valores referidos a vários momentos no tempo. Se tais valores são iguais e obedecem a intervalos também iguais no tempo, a série é dita uniforme. Os valores são chamados pagamentos ou termos.



Se A é o valor atual da série representada pelos termos P , em n períodos, mediante uma taxa i , ele corresponde à soma de todos os n valores futuros de P descontados para o momento zero por intermédio da taxa i . O valor obtido será, então, expresso por

$$A = P/(1+i) + P/(1+i)^2 + P/(1+i)^3 + \dots + P/(1+i)^n.$$

Mas esse valor da série no momento zero corresponde à soma dos termos de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é $P/(1+i)$ e a razão $1/(1+i)$. Desse modo, aplicando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica,

$$S_n = a_1 \times (1 - q^n)/(1 - q)$$

temos

$$A = P/(1+i) \{ [1 - 1/(1+i)^n] / [1 - 1/(1+i)] \}$$

$$A = P[1 - (1+i)^{-n}]/i \quad \text{ou} \quad A = P \cdot [(1+i)^n - 1] / [i(1+i)^n].$$

Essa demonstração prova o teorema seguinte,

Teorema 2.8. *O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P , um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A = P[1 - (1+i)^{-n}]/i$.³*

Esse tipo de situação é bastante comum em uma primeira modalidade de empréstimo, podendo acontecer sob a forma de liberação financeira ou na aquisição de algum produto ou serviço.

Exemplo 2.9. Um equipamento foi adquirido por R\$5.000,00 e será liquidado em 10 pagamentos iguais e mensais, com juros de 4% ao mês, a primeira parcela vencendo no primeiro mês após a aquisição. Qual o valor de cada pagamento?

Solução.:

$$A = 5.000,00$$

$$i = 4\% \text{ ao mês}$$

$$n = 10$$

$$5.000,00 = P[(1 + 0,04)^{10} - 1] / [0,04 \times (1 + 0,04)^{10}]$$

³ Texto extraído do livro Matemática Discreta da Coleção Profmat - Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Morgado, A. C.; Carvalho, P. C.P. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. pg 92

$$5.000,00 = P[1,04^{10} - 1]/[0,04 \times 1,04^{10}]$$

$$5.000,00 = P[1,4802 - 1]/[0,04 \times 1,4802]$$

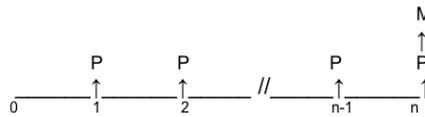
$$5.000,00 = P[0,4802/0,0592]$$

$$8,1115 \times P = 5.000,00$$

$$P = 616,41$$

O pagamento mensal será de R\$616,41.

Outra possibilidade a considerar utilizando-se séries uniformes, diz respeito a um conjunto de valores recolhidos com a finalidade de resgate no momento n . Dessa forma, os recolhimentos serão deslocados para o momento futuro n , com uma taxa de remuneração i .



A soma desses valores será

$$M = P + P(1+i) + P(1+i)^2 + P(1+i)^3 + \dots + P(1+i)^{n-1}$$

$$M = P[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1}]$$

Esse valor da série no momento n corresponde à soma dos termos de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 1 e a razão $(1+i)$. Assim, utilizando-se da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, tem-se

$$M = P(1 \times [1 - (1+i)^n])/[1 - (1+i)]$$

$$M = P[1 - (1+i)^n]/(-i)$$

$$M = P[(1+i)^n - 1]/i$$

Exemplo 2.10. São realizados 12 depósitos de R\$500,00, iniciando 30 dias após o acerto, com remuneração de 2% ao mês. Qual será o montante no fim do período?

Solução.:

$$P = 500,00$$

$$n = 12$$

$$i = 2\% \text{ ao mês}$$

$$M = 500,00 \times [(1 + 0,02)^{12} - 1]/0,02$$

$$M = 500,00 \times [(1,02^{12} - 1)/0,02]$$

$$M = 500,00 \times [(1,2682 - 1)/0,02]$$

$$M = 500,00 \times 0,2682/0,02$$

$$M = 500,00 \times 13,41$$

$$M = 6.705,00$$

O montante ao final do período será de R\$6.705,00.

2.4 Empréstimos, Financiamentos e Sistemas de Amortização

As operações de empréstimo/financiamento são de expressiva relevância no suporte às mais diversas necessidades humanas e, particularmente, às atividades produtivas. São comuns em amplo espectro dos negócios e ocorrem desde empréstimos de menor valor, geralmente de curto prazo e para suprir necessidades do dia a dia do empreendimento, a operações de financiamento de maior monta e prazo mais longo, destinadas usualmente à aquisição de imóveis, máquinas, instalações, equipamentos, etc...

Os bancos também realizam os chamados descontos de duplicatas para clientes que dispõem de algum valor F a receber de terceiros no futuro. É aplicada uma taxa de desconto d , pelo período até o vencimento, e liberada para o cliente a quantia A . Essa diferença $F - A$ corresponde ao denominado desconto, sendo calculada por $A = F(1 - d \times t)$. Esse tipo de desconto é referido como desconto comercial ou “por fora” e há outras formas de realizar descontos, salientando-se que algumas instituições acrescentam taxas administrativas ao fazer operações dessa natureza.

Exemplo 2.11. Uma duplicata de R\$500,00 é descontada 60 dias antes do vencimento, em uma instituição financeira que cobra taxa de desconto de 4% ao mês. Qual valor será liberado para o cliente?

Solução.

$$A = 500,00(1 - 0,04 \times 2)$$

$$A = 500,00(1 - 0,08)$$

$$A = 500,00 \times 0,92$$

$$A = 460,00$$

O valor liberado será R\$460,00.

Abordam-se agora os tipos de empréstimos/financiamentos costumeiramente realizados em prazos maiores e destinados principalmente à aquisição de bens imóveis ou duráveis. Serão destacados os sistemas de amortização envolvidos, com foco em dois desses sistemas: o Sistema de Amortização Constante – SAC e o Sistema Francês, também conhecido como Tabela Price.

Preliminarmente, deve-se registrar que o pagamento parcelado de um empréstimo envolve dois componentes, um referente ao abatimento do principal da dívida, denominado amortização, e o outro relativo ao pagamento dos juros.

Exemplo 2.12. Um financiamento de R\$120.000,00 será pago em cinco prestações, pelo Sistema de Amortização Constante - SAC, com juros de 12% ao ano. A planilha de amortização será,

Ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	120.000,00	-	-	-
1	96.000,00	24.000,00	14.400,00	38.400,00
2	72.000,00	24.000,00	11.520,00	35.520,00
3	48.000,00	24.000,00	8.640,00	32.640,00
4	24.000,00	24.000,00	5.760,00	29.760,00
5	-	24.000,00	2.880,00	26.880,00

No SAC, como as parcelas de amortização são constantes, divide-se o valor financiado pelo número de prestações: $120.000,00/5 = 24.000,00$. Os saldos devedores de cada período são obtidos diminuindo o saldo devedor do período anterior pela amortização do período atual. Os juros de cada período são calculados pela incidência da taxa sobre o saldo devedor do período anterior. As prestações resultam da soma da amortização e juros do mesmo período.

Exemplo 2.13. O mesmo financiamento de R\$120.000,00 será pago em cinco prestações, pelo Sistema Francês/Tabela Price, com juros de 12% ao ano. Segue planilha de amortização⁴

Ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	120.000,00	-	-	-
1	101.111,05	18.888,95	14.400,00	33.288,95
2	79.955,43	21.155,62	12.133,33	33.288,95
3	56.261,13	23.694,30	9.594,65	33.288,95
4	29.723,52	26.537,61	6.751,34	33.288,95
5	-	29.723,52	3.566,82	33.290,34

No SF/Tabela Price, as prestações são constantes e seu valor por período é calculado dividindo-se o valor total da operação pelo fator de uma série de pagamentos com a taxa e o número de prestações estabelecidos. Dessa forma, o valor da prestação será

$$P = 120.000,00 / [(1 + 0,12)^5 - 1] / [0,12 \times (1 + 0,12)^5]$$

$$P = 120.000,00 / [(1,12)^5 - 1] / [0,12 \times (1,12)^5]$$

$$P = 120.000,00 / 3,6048$$

⁴ Em casos da espécie, geralmente, é preciso realizar um pequeno acerto na prestação do último período.

$$P = 33.288,95$$

Os juros de cada período são calculados sobre o saldo devedor do período anterior. As amortizações em cada período são obtidas pela diferença entre o valor da prestação e o juro do período em consideração.

3 Tópicos Básicos de Economia e Gestão Financeira

É oportuno, preliminarmente, destacar as vantagens competitivas de quem decide ingressar no empreendedorismo com domínio dos conhecimentos básicos sobre questões econômicas e financeiras. Em paralelo, tais questões também estão presentes em informações cotidianas veiculadas por variadas mídias, sendo fácil perceber o forte respaldo de conteúdo matemático em todo o processo.

A compreensão efetiva desses assuntos é, independente de foco específico, requisito para o aprimoramento da consciência cidadã de todo indivíduo. Em sequência, são elencados os principais conceitos básicos para quem pretende se envolver com as atividades do mundo dos negócios.

Os conceitos reproduzidos neste capítulo foram desenvolvidos com base nos seguintes textos técnicos: (8), e informações disponíveis em <<https://www.bcb.gov.br>>, <<https://www.ibge.gov.br>> e <<https://www.sebrae.gov.br>>.

3.1 O mercado e os agentes econômicos

Os estudos econômicos introdutórios destacam que as necessidades humanas são ilimitadas, enquanto os recursos para satisfazê-las são escassos. As necessidades estão vinculadas a como acessar os chamados bens econômicos, que são aqueles que apresentam valor e sua obtenção implica algum encargo. Podem ser classificados como bens materiais, quando são tangíveis e podem ser acumulados, a exemplo de alimentos, roupas, sapatos, celulares, computadores, carros, etc..., ou como bens imateriais ou serviços, compreendendo tudo aquilo que é intangível, pois sua disponibilidade cessa logo após sua prestação, não permitindo acumulação. É o caso da consulta médica, do corte de cabelo, do conserto do celular, dentre outros.

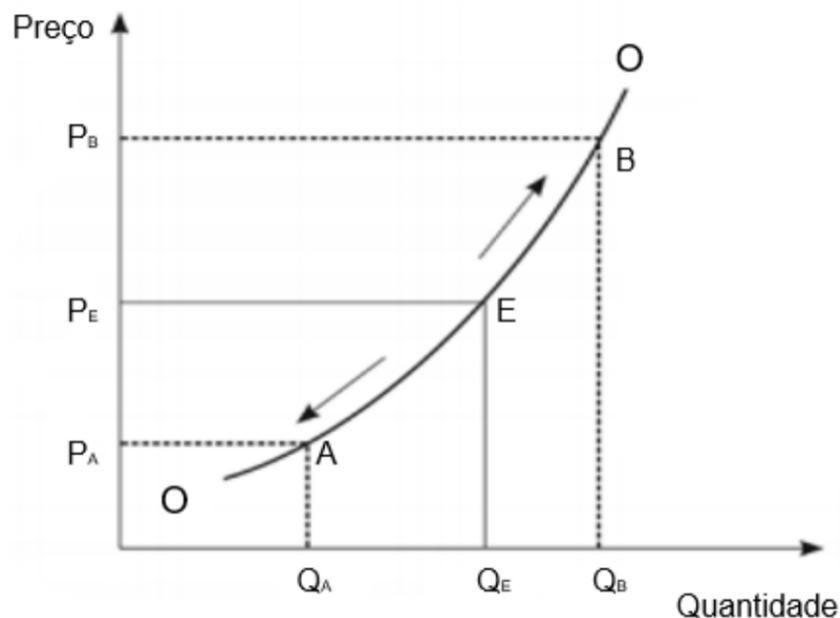
No mundo contemporâneo predomina o que se convencionou denominar economia de mercado, significando a satisfação das várias necessidades humanas pela interação de dois grandes grupos. De um lado, estão aqueles que se organizam para produzir e ofertar bens ou serviços, denominados fornecedores ou produtores. De outro, os que buscam de variadas formas adquirir bens ou serviços, definidos como consumidores ou demandantes.

A interação desses dois grandes grupos ocorre de forma ampla no ambiente designado mercado, composto por todos os locais onde vendedores e compradores transacionam mercadorias e serviços e, desse modo, promovem a atuação das chamadas forças da oferta e da demanda. Numa situação de livre mercado, os preços dos bens e serviços são definidos pela chamada lei da

oferta e da procura, significando que a decisão dos fornecedores do quanto produzir se aproxima da decisão dos consumidores do quanto adquirir, sinalizando para esta quantidade um nível de preço, denominado preço de equilíbrio.

Quando os agentes não podem interferir com relevância nos preços, ou seja, os preços são livremente definidos pelo mercado, diz-se que a situação é de concorrência perfeita. Neste caso, se houver tendência de aumento no preço de mercado, será gerada uma expectativa de aumento de ganhos e os produtores ficarão inclinados a produzir em maior quantidade. Em sentido oposto, a diminuição do preço de mercado acarreta menores valores nas vendas e, por conseguinte, tendência de redução da quantidade ofertada (Figura 1).

Figura 1 – A curva da oferta



Fonte: Produzido pelo autor

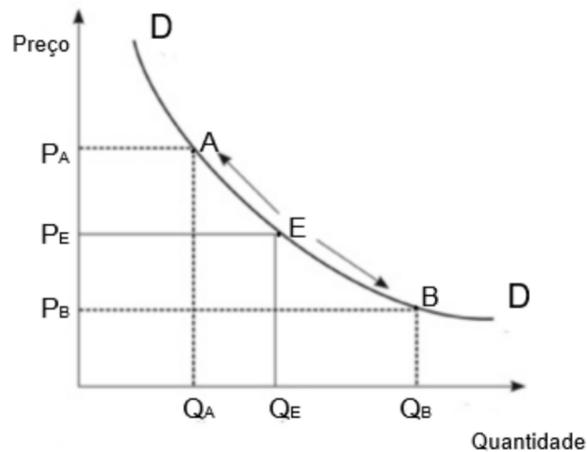
Essa relação entre o preço e a quantidade ofertada, em que a um aumento/redução do preço corresponde respectivamente um aumento/redução da quantidade ofertada, mantidas as demais condições, caracteriza a denominada lei da oferta. A curva da oferta apresenta tendência crescente.

Para quem consome, seu objetivo é orientado em obter os produtos e serviços que necessite com os menores preços, considerando as limitações impostas por seu nível de renda. Cada patamar de renda define condições variadas, pois há indivíduos cuja renda atende tanto seu nível de consumo quanto lhe permite realizar poupança, há os que comprometem toda sua renda com consumo e há também aqueles com renda insuficiente para suportar seu nível básico de consumo.

A demanda ou consumo apresenta comportamento inverso ao da oferta. Um deslocamento

do preço de mercado para um valor mais alto implica uma redução da quantidade demandada, uma vez que, quanto mais alto o preço menor será a quantidade comprada. Já a diminuição do preço, acarreta um aumento da quantidade consumida (Figura 2).

Figura 2 – A curva da demanda

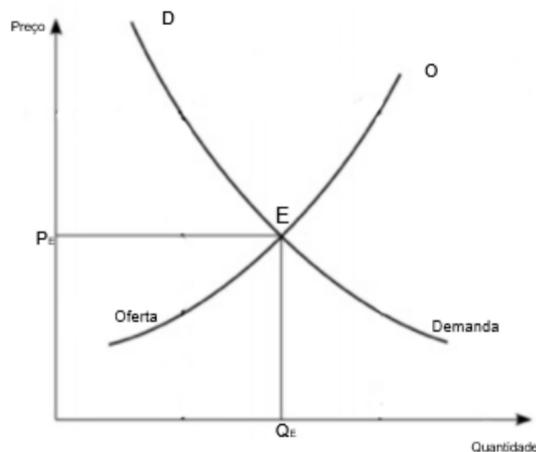


Fonte: Produzido pelo autor

Assim, a lei da demanda define que, mantidas as demais condições, a ocorrência de um aumento/redução no preço provoca de modo respectivo uma redução/aumento da quantidade demandada. A curva da demanda tem tendência decrescente.

Sobrepondo-se as curvas da oferta e da demanda, é possível identificar o ponto comum entre ambas, relacionado ao preço em que a quantidade ofertada e demandada se igualam. Nesta situação, diz-se que o mercado está em equilíbrio e o preço assim definido pela lei da oferta e da procura, se constitui em seu preço de equilíbrio (Figura 3).

Figura 3 – Equilíbrio de mercado

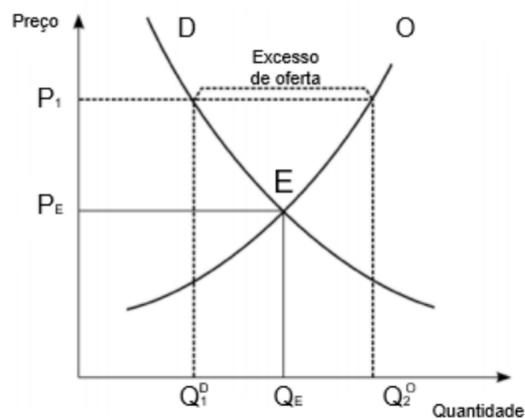


Fonte: Produzido pelo autor

O ambiente econômico é bastante competitivo e são vários os fatores que podem interferir nas condições de mercado. Eles provocam alterações em quantidades e preços de produtos e serviços, citando-se, entre outros, variações no tamanho do mercado, nas preferências de consumo, na renda dos consumidores, nos preços de bens e serviços substitutos, nas expectativas sobre a oferta, nas tecnologias de produção, etc...

Desequilíbrios eventuais nos preços de mercado podem gerar excesso de oferta, caracterizado por um aumento no preço do produto que tende a promover uma quantidade ofertada maior que a demandada (Figura 4).

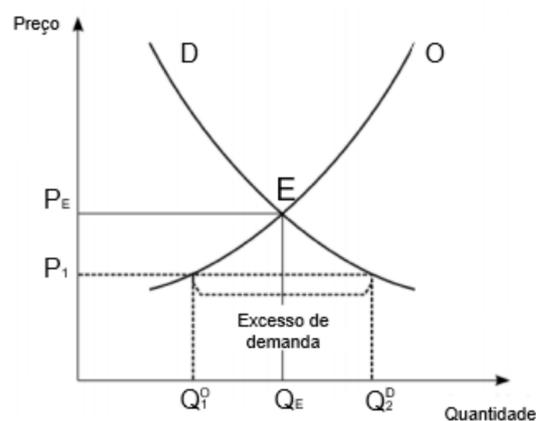
Figura 4 – Excesso de oferta



Fonte: Produzido pelo autor

Na situação inversa, ocorre uma redução no preço do bem, de modo que a quantidade demandada tende a ser maior que a ofertada, gerando o excesso de demanda (Figura 5).

Figura 5 – Excesso de demanda



Fonte: Produzido pelo autor

Na formação dos preços de mercado, é necessário destacar o papel do governo por sua interferência mediante a cobrança de impostos, taxas e licenciamentos e também pelo controle que exerce sobre os preços de alguns produtos e serviços. São exemplos os combustíveis, os reajustes dos aluguéis e a fixação do salário mínimo.

3.2 Os fatores de produção

Toda atividade realizada com o objetivo de produzir um bem ou serviço requer o emprego de alguns componentes no processo, os quais são denominados fatores de produção. Eles podem variar bastante, dependendo da natureza do bem ou do serviço que se pretende ofertar.

De acordo com o Dicionário Financeiro¹, fatores de produção, em economia, são o conjunto de elementos indispensáveis a um processo produtivo, seja ele de um bem ou serviço.

De maneira geral, os fatores presentes no processo produtivo são classificados como terra, trabalho e capital. A terra compreende seu uso em atividades de cultivo, de exploração de seus recursos naturais ou de mineração. O trabalho corresponde à utilização de recursos humanos, isto é, todas as modalidades de mão-de-obra empregada na atividade planejada. O conceito de capital é amplo e abrange recursos, maquinário, equipamentos, etc...

Também são bastante relevantes os fatores relativos ao nível de disponibilidade de recursos tecnológicos e de capacidade empresarial, conforme o tipo de negócio ou serviço que se pretenda implementar.

Ao ser examinado, um caso específico que se queira levar adiante, impõe-se um levantamento detalhado e exaustivo de todo o processo produtivo, para se obter os requisitos de matéria-prima, mão-de-obra, insumos, maquinário, equipamentos, energia, água, comunicações, licenciamentos, impostos, dentre outros.

3.3 As variações nos preços pela inflação e os índices de preços

A inflação ocorre quando há aumento generalizado dos preços de bens e serviços. O processo inverso, quando há redução geral dos preços, denomina-se deflação, mas é bem menos frequente. As causas da inflação são atribuídas de modo geral a pressões de demanda ou de custos, e a inércia inflacionária ou expectativas de inflação. Ela acarreta diminuição do poder de compra da moeda, gera desequilíbrio relativo de preços, afeta negativamente a economia como um todo e provoca prejuízos mais severos para as classes de renda mais baixa da população.

O Sistema Especial de Liquidação e de Custódia – Selic² é a infraestrutura do mercado

¹ Disponível em: <<https://www.dicionariofinanceiro.com.br>> Acesso em 10 jun 2022.

² <<https://www.bcb.gov.br>>. Acesso em: 11 de maio de 2022)

financeiro para compra e venda de títulos públicos federais e seu gestor é o Banco Central do Brasil. De modo geral, quando acontece inflação há um excesso de dinheiro em circulação e para reduzi-la o Banco Central pode usar o recurso de aumentar a Taxa Selic que é a Taxa Básica de Juros da economia brasileira.

O controle da inflação é conduzido pelo Banco Central por meio do regime de metas, no qual se compromete a atuar de forma a garantir que a inflação efetiva esteja em linha com uma meta pré-estabelecida, anunciada publicamente. São fixadas bandas para a meta pela impossibilidade de um controle rígido sobre o comportamento dos preços e para permitir acomodação de alguns choques.

No Brasil, a inflação é definida usando-se o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) como referência do regime de metas, que é calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), com coleta, em geral, do dia 1 a 30 do mês de referência e mede o preço de uma cesta de consumo representativa para famílias com renda de 1 a 40 salários mínimos, em 13 áreas geográficas de maior densidade habitacional do país. A cesta de consumo inclui itens de transporte, alimentação e bebidas, habitação, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais, comunicação, educação e vestuário.

A apuração do IPCA por outra entidade confere credibilidade ao regime de metas a serem cumpridas. O Banco Central trabalha para que a inflação anual, medida pelo IPCA, se situe em torno do centro da meta definida pelo Conselho Monetário Nacional - CMN.

Outros índices de preços são disponibilizados para atualização monetária, a exemplo do Índice Nacional de Preços ao Consumidor - INPC, também apurado pelo IBGE, e o Índice Geral de Preços – IGP da Fundação Getúlio Vargas, entre vários.

3.4 O custo do dinheiro

O dinheiro pode também ser percebido como mercadoria e sua disponibilidade tem um preço, uma espécie de aluguel que se paga por seu uso durante um intervalo de tempo acordado. Ao valor que se paga pelo acesso ao dinheiro, referido em geral como recurso ou capital, denomina-se juro. De um lado, o emprestador fornece os recursos que são colocados à disposição do tomador, durante um determinado período, a um custo calculado convencionalmente pelo emprego de uma taxa percentual, designada taxa de juros. Juro, afinal, é a remuneração do capital emprestado.

Na origem, tem-se a taxa básica de juros fixada pelo Banco Central e numa sequência que incorpora as mais variadas características formam-se as diversas taxas aplicadas pelo mercado financeiro.

As instituições financeiras captam recursos do público com uma taxa que depende, entre outros fatores: da forma de captação, do porte da instituição financeira, da conjuntura

macroeconômica, da linha de crédito a ser emprestada. A taxa de captação é a remuneração paga pelas instituições em aplicações financeiras - caderneta de poupança, Certificado de Depósito Bancário (CDB), etc..., com o objetivo de captar recursos para conceder empréstimos.

Ao emprestar recursos, as instituições realizam as operações praticando uma outra taxa, a taxa de aplicação. O spread bancário é a diferença, em pontos percentuais, entre a taxa de juros pactuada nos empréstimos e financiamentos (taxa de aplicação) e a taxa de captação.

$$\text{Spread bancário} = \text{Taxa de aplicação} - \text{Taxa de captação}$$

É importante observar que o spread bancário não corresponde ao lucro auferido pela instituição financeira ao conceder o empréstimo ou financiamento. O spread deve ser compreendido como uma diferença de custos, que a instituição financeira utiliza para cobrir despesas diversas (despesas administrativas, impostos e provisão para o caso de inadimplência, entre outras). De forma simplificada, o lucro da instituição financeira é o que resta após a cobertura dessas despesas.

3.5 O Sistema Financeiro no Brasil

O Sistema Financeiro Nacional - SFN é composto por todas as instituições que promovem a intermediação financeira no Brasil. De forma ampla, fazem parte dele as organizações que realizam e viabilizam os negócios entre aqueles que precisam de recursos financeiros com os que dispõem deles para emprestar. São bastante amplas as alternativas de soluções financeiras pelo sistema, resumindo-se sua estrutura para apreciação.

Estrutura do SFN

Órgãos Normativos

CMN – Conselho Monetário Nacional (órgão máximo do SFN)

CNSP – Conselho Nacional de Seguros Privados

CNPC – Conselho Nacional de Previdência Complementar

Órgãos Supervisores

BC – Banco Central do Brasil

CVM – Comissão de Valores Mobiliários

Susep – Superintendência de Seguros Privados

Previc – Superintendência Nacional de Previdência Complementar

Órgãos Operadores

Bancos e caixas econômicas

Administradoras de consórcios

Cooperativas de crédito

Corretoras e distribuidoras

Instituições de pagamento
Demais instituições não bancárias
Bolsa de valores
Bolsa de mercadorias e futuros
Seguradoras e resseguradores
Entidades abertas de previdência
Sociedades de capitalização
Entidades fechadas de previdência complementar

3.6 Principais instrumentos de Gestão Financeira

São bastante diversos os instrumentos de gestão financeira, bem como as possibilidades de análise que proporcionam. Neste trabalho, serão destacados apenas os mais importantes para facilitar a compreensão de quem se inicia no universo dos negócios.

No tipo de empreendedorismo que se examina, seja pessoa física ou jurídica, o objetivo é a maximização do lucro, resultante da diferença entre as receitas das vendas dos produtos ou serviços e os custos e despesas incorridos em todo o processo produtivo. A receita total em determinado período corresponde ao número de unidades vendidas, observados os respectivos preços praticados. Os custos e despesas totais são representados por todos os encargos presentes desde a fase preparatória de produção/prestação até a entrega do produto/serviço ao cliente.

Os custos são os gastos que estão diretamente relacionados com a produção/prestação de bens/serviços, ou seja, vinculam-se diretamente à atividade-fim da empresa. As despesas, por seu turno, são os demais dispêndios necessários ao funcionamento do negócio. Tanto os custos quanto as despesas são classificados em fixos, quando não variam com a quantidade produzida, e variáveis, quando dependem da quantidade produzida.

Alguns exemplos dessa categorização são:

Custos fixos: mão-de-obra e encargos dos funcionários da área de produção, aluguel de máquinas e equipamentos.

Custos variáveis: matéria-prima, energia da área de produção, embalagens, distribuição de produtos.

Despesas fixas: mão-de-obra dos setores de apoio, aluguel, gastos com segurança, manutenção programada, contas de telefone e água.

Despesas variáveis: manutenção não programada, impostos sobre vendas, fretes de entrega de produtos.

Assim, evidencia-se a equação básica do negócio:

$$\text{Receita total} - \text{Gastos totais} = \text{Lucro}$$

É necessário acompanhar criteriosamente o comportamento de todos os componentes desta equação aparentemente simples. Falhas eventualmente incorporadas, durante o levantamento de seus componentes, podem facilmente transformar o lucro almejado em prejuízo.

3.6.1 Fluxo de caixa

É indispensável que a empresa desde a fase inicial do negócio mantenha controle efetivo do seu fluxo de caixa. Mediante pesquisa no portal do Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas – SEBRAE³, em artigo de Paulo Sérgio Dortas, nele estarão registradas todas as entradas e saídas do empreendimento, devidamente classificadas como receitas e gastos. Além disso, deverão ser previstos todos os valores relativos a recebimentos e pagamentos futuros, tendo-se como referência um prazo que atenda às necessidades de cada tipo de empresa. As previsões devem ser bem realistas, evitando-se projeções que se mostrem inexequíveis posteriormente. Há também que se considerar apenas os interesses do negócio, não existindo espaço para situações particulares.

Recomenda-se que a cada dia seja realizada a conformidade do saldo apresentado pelo fluxo de caixa em relação aos saldos do caixa da empresa e dos depósitos em instituições financeiras. Segue esboço simplificado de um modelo de fluxo de caixa.

Modelo simplificado de Fluxo de Caixa

	Previsto	Realizado	Previsto	Realizado	Previsto	Realizado
	1	1	2	2	→	→
Entradas						
Vendas realizadas						
Previsão de vendas						
Outras receitas						
↓						
Total das Entradas						
Saídas						
Compras a prazo						
Salários						
Energia						
↓						
Total das Saídas						
Entradas – Saídas						

→ Adicionar quantos períodos forem adequados à rotina da empresa

↓ Relacionar detalhadamente todas as receitas, custos e despesas que possam ocorrer

³ Disponível em: <<https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/seis-dicas-para-um-fluxo-de-caixa-eficaz,12b8bb13a8d6d410VgnVCM1000003b74010aRCRD>> Acesso em 10 jun 2022.

3.6.2 Capital de giro

Ainda em pesquisa no portal do Sebrae⁴, o capital de giro é composto pelos recursos (dinheiro, crédito, estoques, etc...) necessários para bancar a liquidez, isto é, possibilitar que a empresa continue funcionando. Logo, é a diferença entre os recursos disponíveis em caixa e a soma das despesas e contas a pagar.

Desse modo, seu valor, definido para o período que a empresa deseja cobrir, será obtido somando-se todas as contas a receber e o valor disponível em estoque, menos todas as contas a pagar e o valor a pagar em impostos e despesas. Assim, este valor necessário para fazer a empresa funcionar durante um certo período de tempo, corresponde ao seu capital de giro.

3.6.3 Viabilidade financeira

A análise de viabilidade financeira deve ser realizada sempre que se deseje implementar alguma intervenção de maior porte no transcorrer de um empreendimento. Tal situação pode ser exemplificada por um projeto de expansão do negócio ou pela introdução de novos produtos no mercado. Um momento especialmente importante para proceder essa análise, acontece na fase que antecede a execução de um novo empreendimento. Estão definidos o investimento necessário e suas fontes e as projeções das receitas e gastos nos períodos iniciais do negócio. É imperioso então verificar sua condição de viabilidade e de retorno num determinado prazo.

Como os dados envolvidos na avaliação são referidos a momentos diferentes no tempo, são empregados os conceitos de matemática financeira no tratamento da questão. Parte-se do pressuposto que se busca o retorno do investimento realizado, acrescido de uma margem de lucro, referenciado a uma taxa mínima denominada taxa de atratividade.

Para tanto, são mais frequentes os cálculos:

Valor Presente Líquido - VPL - Os fluxos de caixa são trazidos para a mesma data, em geral para a data de início dos desembolsos, com a taxa de atratividade definida. São considerados positivos os valores das receitas projetadas e negativos os valores dos custos, despesas e investimentos. Se o resultado obtido for maior que zero, o projeto é viável e quanto maior for este valor maior será o lucro estimado.

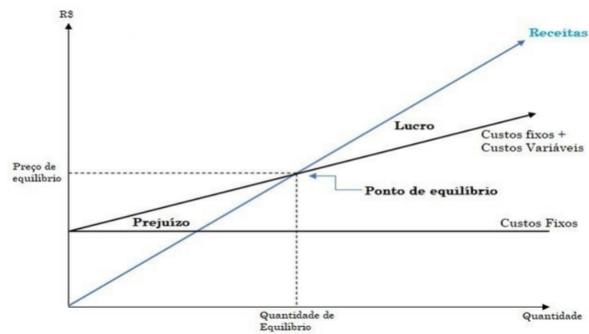
Taxa Interna de Retorno - TIR - Proceder-se de forma similar, calculando-se agora a taxa de desconto de modo que o VPL seja igual a zero. Compara-se, ao final, a taxa encontrada com a taxa de atratividade de referência e se esta taxa for maior que a taxa de atratividade o negócio tem viabilidade. É comum utilizar-se a taxa Selic como referência para a atratividade.

Ponto de equilíbrio/Payback - Indicador utilizado para se identificar o prazo necessário para um investimento atingir o ponto em que as receitas totais e as despesas totais se igualam, informando o tempo de recuperação do capital investido.

⁴ <<https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/o-que-e-e-como-funciona-o-capital-de-giro,a4c8e8da69133410VgnVCM1000003b74010aRCRD>>. Acesso em 11 ago 2022

Na Figura 6, é possível identificar o ponto de equilíbrio PE, correspondente à quantidade de unidades vendidas por determinado preço, de tal modo que as receitas se igualam aos custos e despesas totais. Para quantidades vendidas acima desse ponto o negócio está produzindo lucro; para quantidades menores, apresentará prejuízo.

Figura 6 – Ponto de equilíbrio financeiro



No Capítulo 5 encontram-se explicitados, em exemplos, os cálculos dos indicadores ora citados.

4 Principais fases de um projeto de negócios

Os conceitos básicos apresentados anteriormente objetivam facilitar a compreensão das técnicas aplicáveis ao exame de alternativas nas fases principais de desenvolvimento de um projeto de negócios. Faz-se necessário destacar, inicialmente, que tais estudos, pelos avanços das ciências que lhes dão respaldo, são revestidos de rigor técnico e robustecidos por inovações. De maneira geral, elabora-se nesta fase o plano de negócios da iniciativa, com nível de abrangência maior.

Entretanto, lida-se aqui com proposta direcionada a fornecer suporte a alunos do ensino básico, que enxergam na atividade empreendedora uma oportunidade profissional ou que a ela recorrem por contingência de necessidade.

Com tais esclarecimentos, elencaremos as principais atividades e instrumentos vinculados ao processo, ressaltando que os trabalhos devem ser conduzidos com o máximo possível de acurácia, embora considerando as limitações de recursos e de aplicabilidade a cada caso específico.

4.1 Prospecção do tipo de negócio

Seja qual for a motivação para o início de um negócio, o requisito de maior relevância para seguir adiante está relacionado à definição de realizar detalhadas pesquisas acerca do produto ou serviço e do tipo de empreendimento que se pretende.

Esta fase compreende a pesquisa e análise de mercado e deve permitir a obtenção de informações sobre a possibilidade de introdução do produto ou serviço por escassez de oferta, por exemplo, quem são os concorrentes, quanto produzem, com que qualidade e quais preços praticam, bem como, eventuais alternativas de incorporação de melhorias que resultem em ganho diferencial. No caso de produto novo, verificar as reais condições de consumo potencial. Dessa forma, haverá uma margem maior de segurança na proposição do que produzir, em que quantidade e para quem.

Em paralelo, deve-se fazer o levantamento preliminar da estratégia de marketing a desenvolver, para uma adequada divulgação do produto no mercado e indicação dos meios para a conquista de clientes.

4.2 Projeções de Receitas, Gastos e Investimentos

É necessário levantar exaustivamente todos os requisitos envolvidos na produção do bem ou na prestação do serviço: matéria-prima, insumos complementares, materiais, utensílios, máquinas, equipamentos, ou seja, quantificar detalhadamente todos os itens que, direta ou indiretamente, são exigidos no processo. Adicionalmente, é imperioso avaliar toda a infraestrutura requerida ao processo produtivo, incluindo energia elétrica, abastecimento d'água, esgotamento sanitário/industrial, comunicações e demais recursos tecnológicos. Impostos, licenciamentos, transportes, fretes, e outros itens acessórios, de igual modo, precisam ser computados. Todo item específico do tipo de negócio que represente gasto, deve ser apurado.

Os recursos humanos, um dos fatores mais relevantes na montagem de qualquer atividade produtiva, impõem o exame criterioso da mão-de-obra envolvida em cada estágio de produção e em outros componentes que lhe dão suporte. É necessário ainda examinar a natureza da contratação dessa mão-de-obra, para que se conheçam os desdobramentos das obrigações trabalhistas e previdenciárias que dela decorrem.

Faz-se necessário observar em qual local a produção ocorrerá, o tamanho necessário, a construção e instalações, a necessidade de promover adequações e o valor a pagar por seu uso. Obviamente, se a atividade puder ser iniciada em ambiente domiciliar ou qualquer outro disponível, parte desses itens não serão considerados.

Após quantificar todos os componentes levantados, pesquisam-se os preços respectivos para a finalização do orçamento. Os dados da análise de mercado fornecem os meios para que seja possível estabelecer a precificação dos produtos ou serviços e, assim, com as quantidades de vendas planejadas podem ser projetadas as receitas futuras do empreendimento.

Do lado dos dispêndios que forem identificados, também é possível definir suas projeções no tempo para os gastos futuros. O volume de gastos previstos para as etapas pré-operacional e de início de produção definem o tamanho do investimento requerido.

4.3 Viabilização e Implantação

Após a definição do valor do investimento, o empreendedor precisa avaliar a possibilidade de assumir o encargo de sua execução com capital próprio, parcial ou totalmente. Outras alternativas podem ser buscadas quando não há disponibilidade suficiente de recursos, a exemplo de investimento em sociedade, empreendedorismo individual, patrocínio de investidores em projetos inovadores e empréstimos ou financiamentos.

Em uma eventual procura por empréstimos/financiamentos, faz-se necessário realizar pesquisa detalhada sobre os valores das taxas praticadas pelas instituições financeiras, se são prefixadas ou pós-fixadas e se há requerimento de cobrança de seguros, exigência de garantias ou outros compromissos, tudo com foco numa escolha criteriosa.

Considerar que existe oferta de linhas de crédito específicas, por intermédio de instituições oficiais, a exemplo do Programa Nacional de Apoio às Microempresas e Empresas de Pequeno Porte – Pronampe.

Na solução por empréstimo ou financiamento, os impactos da contratação acontecem quando do pagamento das prestações. Nesta oportunidade, também, são examinados os indicadores de viabilidade, porque só haverá sentido em dar prosseguimento à ideia, se forem favoráveis.

4.4 Operação

Para esta fase, são destacados alguns dos instrumentos de gestão financeira, bastante relevantes ao controle efetivo da empresa, buscando maximizar seus resultados. Entre eles o monitoramento das contas principais, do fluxo de caixa e do capital de giro.

Em várias das situações descritas, o sólido domínio de conhecimento matemático significa forte diferencial, seja por sua aplicação direta seja pelo emprego indireto de seu raciocínio.

5 Sugestões e propostas de abordagens

Neste capítulo estão detalhadas, com base nos conteúdos descritos, algumas situações e exercícios que podem ser levados adiante, sempre com a perspectiva do relevante suporte da matemática e suas tecnologias. A ideia agora é apresentar sugestões que possam servir de modelo ou ter desenvolvimento em sala de aula, com critério de avaliação de melhor oportunidade de realização, definida em conjunto por cada professor e escola.

5.1 Bloco 1

Direcionar, quando houver convergência, a realização de atividades que contribuam para o aprimoramento das competências e habilidades, recomendadas, tanto na BNCC quanto nas características desejáveis ao perfil do empreendedor, a exemplo de inovação, criatividade, avaliação acurada de riscos, tomada de decisões, etc... Para tanto, seria adequado estimular tarefas que promovam a evidenciação de conceitos tradicionalmente integrantes do ensino básico e também presentes nas rotinas do empreendedorismo.

Não se pretende pré-definir todas as possibilidades, considerando que a escolha dos assuntos pode ocorrer com foco em lacunas particulares. É possível sugerir, no entanto, abordagens do tipo:

- destacar a presença da ferramenta progressões aritméticas nos cálculos do regime de juros simples, no qual o montante é obtido por $C_n = C_0(1 + n \times i) = C_0 + C_0 \times n \times i$, correspondente a uma progressão aritmética de razão $C_0 \times i$;
- de modo idêntico, as progressões geométricas estão presentes nos cálculos do regime de juros compostos, em que o montante é calculado por $C_n = C_0(1 + i)^n$. Assim, os valores do capital aumentam a uma taxa constante i , formando uma progressão geométrica de razão $1 + i$;
- salientar que o valor de uma série de n pagamentos iguais (série uniforme), um período antes do primeiro pagamento, é igual à soma dos n termos de uma progressão geométrica;
- evidenciar as situações no sistema de amortização SAC em que ocorrem progressões aritméticas;
- exemplificar os variados conceitos de funções com os temas aqui tratados, a exemplo de: função constante e custos fixos, função linear e receitas e custos variáveis, função crescente e curva de oferta, função decrescente e curva de demanda, dentre outros;

- explorar o estudo de estatística e análise combinatória do ensino básico para favorecer circunstâncias que exijam a realização de pesquisas e colaborem em processos de tomada de decisões.

5.2 Bloco 2

Implementação de atividades em grupos mediante a condução de trabalhos em equipe, de modo que os estudantes possam realizar pesquisas examinando as diversas situações que ocorrem no desenvolvimento de modelos de negócios.

As situações podem abranger aspectos relacionados a coletas de dados para pesquisas de mercado, disponibilidade de mão-de-obra, matéria-prima, insumos, infraestrutura e equipamentos, estratégia de marketing, levantamentos de custos e estimativas de recursos, alternativas de captação e financiamento, etc...

Em todas as ações propostas percebe-se evidente o requerimento do domínio de conhecimentos matemáticos, seja pela sua aplicação direta seja pelo uso indireto de raciocínios associados.

Nesse sentido, a formação de grupos de trabalho pode ser sinalizada para:

- analisar as condições de ingresso de um produto ou serviço no mercado, examinando-se se já existe algo similar no ambiente econômico de interesse, quem são os fornecedores, as quantidades ofertadas e os preços praticados. Nessa coleta de dados deve-se também averiguar se há espaço no mercado alvo para aumento da oferta e, no caso de produto ou serviço novo, o tamanho de sua receptividade;
- com base na fatia de mercado planejada, dar sequência às etapas de estimativas, em termos de quantidades e preços, dos fatores de produção envolvidos: local de produção (próprio, alugado ou a adquirir); matéria-prima (obtenção de todos os materiais integrantes do processo) e demais insumos (componentes complementares necessários, mesmo não fazendo parte do objeto final); aparato de infraestrutura (energia elétrica, água, esgoto, comunicações, etc...); mão-de-obra de produção e administrativo-financeira (remunerações e obrigações); despesas gerais com impostos, taxas, licenciamentos, etc...;
- os dados coletados, na medida que orientam quantidades a produzir e prática de preços, auxiliam tanto a elaboração de orçamentos (volume financeiro requerido para montagem do negócio) quanto a formação de preços dos produtos (pela apropriação de todos os custos incorridos). Deve-se atentar ainda para um criterioso exame de classificação dos custos fixos e variáveis;
- examinar alternativas viáveis de uma estratégia de marketing, com proposição de medidas que promovam a divulgação dos produtos, a ampliação da clientela e o fortalecimento das

vendas;

- reunir todas as condicionantes citadas para planejar a implementação do empreendimento desde a fase de pré-produção às posições futuras, com os recursos humanos identificados e definidas as formas de contratação de mão-de-obra;
- estimar os recursos financeiros necessários e como ocorrerá sua captação. Há recursos próprios disponíveis ou será preciso recorrer a outras alternativas? Esses dados são de fundamental importância para subsidiar eventuais adesões ao projeto, por intermédio de incubadoras, bancos, investidores de risco, governos, etc... Simular opções de financiamento.

5.3 Bloco 3

Desenvolver em sala de aula, a prática de exercícios envolvendo conceitos básicos de gestão financeira, tais como:

a) O IPCA, índice oficial para medir a inflação no Brasil, é divulgado mensalmente¹ informando-se o índice do mês, o acumulado no ano e o acumulado nos últimos doze meses. Até abril/22, temos:

Mês	IPCA (%)	Acumulado no ano (%)	Acumulado 12 meses (%)
Maió/21	0,83	3,22	8,06
Junho/21	0,53	3,77	8,35
Julho/21	0,96	4,76	8,99
Agosto/21	0,87	5,67	9,68
Setembro/21	1,16	6,90	10,25
Outubro/21	1,25	8,24	10,67
Novembro/21	0,95	9,26	10,74
Dezembro/21	0,73	10,06	10,06
Janeiro/22	0,54	0,54	10,38
Fevereiro/22	1,01	1,56	10,54
Março/22	1,62	3,20	11,30
Abril/22	1,06	4,29	12,13

Apenas pela observação direta dos dados, já se tem por exemplo: a inflação do mês de abril/22 foi de 1,06%; a inflação desde o início do ano até abril/22 foi de 4,29%; a inflação dos últimos doze meses, encerrados em abril/22, foi de 12,13%.

Diversos contratos firmados preveem reajustes anuais com base em índices de preços, entre eles o IPCA.

Exemplo 5.1. Calcular o reajuste de um contrato de valor mensal de R\$1.500,00, cuja atualização ocorrerá a partir de maio/22.

¹ Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=downloads>> Acesso em 25 mai 2022.

Neste caso, o reajuste a aplicar deve corresponder ao percentual de 12,13%. Assim,

$$0,1213 \times 1.500,00 = 181,95$$

$$1.500,00 + 181,95 = 1.681,95$$

Novo valor mensal do contrato: R\$1.681,95

b) Sempre que houver necessidade de se tomar decisões envolvendo a realização de operações de empréstimos e financiamentos, é preciso examinar as alternativas disponíveis com bastante cautela, principalmente em períodos de inflação mais alta e taxa de juros elevadas.

As diferenças marcantes entre as taxas que remuneram aplicações e aquelas praticadas pelas instituições financeiras nas operações de crédito justificam as recomendações. É bastante interessante propor que os alunos realizem tarefas que melhor evidenciem esses fatos.

c) Outro aspecto relevante a ser trabalhado, diz respeito ao significado de ganho real ou efetivo.

Exemplo 5.2. Um investidor conseguiu aplicar R\$2.000,00, no início de abril/22, em uma aplicação que lhe rendeu 2% ao mês. Quanto foi seu ganho real considerando a inflação de 1,06% registrada no mês.

$$\text{A aplicação rendeu } 2.000,00 \times (1 + 0,02) = 2.000,00 \times 1,02 = 2.040,00.$$

Porém, com a inflação de 1,06%, o poder de compra dessa quantia de R\$2.040,00 não é mais o mesmo. É necessário, portanto, dividir essa importância por $(1 + 0,0106)$, o que fornece $2.040,00 / (1 + 0,0106) = 2.040,00 / 1,0106 = 2.018,60$.

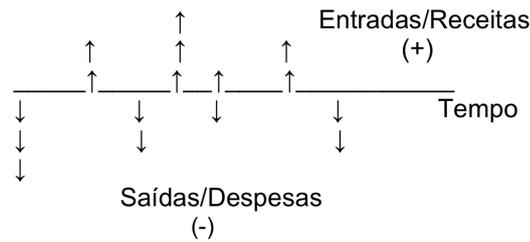
Na verdade, foi feita simultaneamente a multiplicação do valor original (2.000,00), por $(1 + \text{taxa de aplicação})$ e a divisão por $(1 + \text{taxa de inflação})$, ou seja,

$$2.000,00 \times (1,02)/(1,0106) = 2.000,00 \times 1,0093 = 2.018,60$$

A divisão direta dessas duas taxas conduz a uma nova taxa que considera o ganho nominal da aplicação e abate a perda decorrente da inflação. Seu uso leva, portanto ao ganho real ou efetivo. De modo análogo, a taxa da aplicação é denominada taxa nominal de juros e seu valor, quando descontada a inflação, taxa real ou efetiva de juros. No exemplo, a taxa nominal foi de 2% e a taxa real ou efetiva foi de 0,93%.

Alguns tipos de aplicações sofrem reduções sobre as remunerações pela incidência de impostos, por exemplo.

d) Os fluxos de caixa são instrumentos essenciais para o adequado controle da vida econômico-financeira de qualquer empreendimento, seja para acompanhamento de fatos no curto prazo, seja para projeções de médio e longo prazos.



Os fluxos de caixa permitem a verificação da sustentabilidade do negócio e para prazos menores exibem diretamente se os recebimentos são suficientes para suporte à operação da empresa. Por meio do exame desse fluxo simples, é possível também definir as necessidades de capital de giro do negócio.

Quando se analisam situações de prazo mais longo, as projeções são feitas e trabalham-se com os valores descontados para determinado período, elaborando-se um fluxo de caixa descontado.

Exemplo 5.3. Prova do Exame Nacional de Desempenho dos Estudante – ENADE 2012 – Tecnologia em Gestão Financeira

Questão 13

As compras de matérias-primas da Companhia Alfa em agosto foram de R\$70.000,00, em setembro, de R\$140.000,00 e, em outubro, de R\$280.000,00. Desses montantes, 10% foram pagos em dinheiro, 70% foram pagos no mês imediatamente seguinte ao mês da compra e os 20% restantes foram pagos dois meses após o mês da compra. O aluguel de R\$5.000,00 foi pago a cada mês. Os salários corresponderam a R\$38.000,00 por mês².

Com base nessa situação, o total de desembolso de caixa do mês de outubro da Companhia Alfa foi de

- A) R\$323.000,00
- B) R\$280.000,00
- C) R\$183.000,00
- D) R\$169.000,00
- E) R\$71.000,00

Solução.:

O fluxo de desembolsos pode ser assim representado

² GITMAN, L.,J.; MADURA, J. Administração financeira: uma abordagem gerencial. São Paulo: Addison Wesley,2003, p. 379 (adaptado).

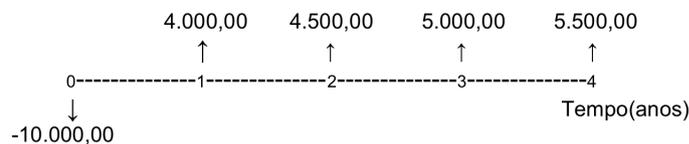
	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Matéria-prima 1	7.000,00	49.000,00	14.000,00	-	-
Matéria-prima 2	-	14.000,00	98.000,00	28.000,00	-
Matéria-prima 3	-	-	28.000,00	196.000,00	56.000,00
Aluguel	5.000,00	5.000,00	5.000,00	5.000,00	5.000,00
Salários	38.000,00	38.000,00	38.000,00	38.000,00	38.000,00

			183.000,00		

Resposta: Alternativa C

e) Valor Presente Líquido

Exemplo 5.4. Examinando o fluxo previsto para um investimento de R\$10.000,00 e os retornos previstos nos quatro anos seguintes, tem-se



Para calcular o VPL, é necessário promover o desconto dos retornos previstos para os anos 1 a 4, trazendo todos para a referência do ano 0, e comparar o valor obtido com o investimento realizado. Nesses casos, o desconto é efetuado utilizando-se a Taxa Mínima de Atratividade - TMA, cujo valor situa-se usualmente próximo da taxa Selic. A taxa Selic está definida atualmente em 12,75% ao ano e assumindo o valor de 12% ao ano

$$\begin{aligned}
 4.000,00 / (1 + 0,12)^1 &= 3.571,43 \\
 4.500,00 / (1 + 0,12)^2 &= 3.587,37 \\
 5.000,00 / (1 + 0,12)^3 &= 3.558,90 \\
 5.500,00 / (1 + 0,12)^4 &= 3.495,35 \\
 \hline
 &14.213,05
 \end{aligned}$$

$$\text{VPL} = -10.000,00 + 14.213,05 = 4.213,05$$

Como o VPL > 0 (positivo) o investimento é viável. Os retornos esperados superam o investimento. Evidentemente, quanto maior seu valor, maior o retorno.

f) Taxa Interna de Retorno – TIR

A taxa interna de retorno é calculada descontando-se o fluxo de modo que o VPL seja nulo. Isso significa a procura da taxa que anula o investimento.

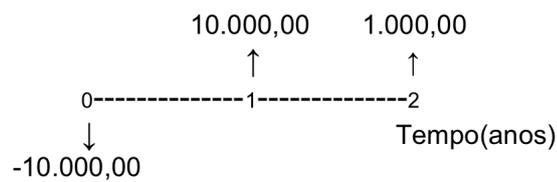
Exemplo 5.5. Questão da prova do concurso para o cargo de Analista Legislativo da Assembleia Legislativa de Rondônia, coordenado pela Fundação Getúlio Vargas, realizado em 2018.

Suponha que um projeto exija um investimento inicial de R\$ 10 mil e gere um fluxo de receita de R\$ 10 mil e de R\$ 1 mil nos dois períodos seguintes. A taxa interna de retorno deste

projeto (TIR) se situa no intervalo entre

- A) 8,01% e 9%.
- B) 9,01% e 10%.
- C) 10,01% e 11%.
- D) 11,01% e 12%.
- E) 12,01% e 15%.

Solução.:



$$1.000/(1+i)^2 + 10.000/(1+i)^1 = 10.000$$

$$10.000(1+i)^2 - 10.000(1+i)^1 - 1.000 = 0$$

$$X = (1+i)$$

$$10.000X^2 - 10.000X - 1.000 = 0$$

$$10X^2 - 10X - 1 = 0$$

$$X = [10 \pm \sqrt{140}]/20$$

$$X = (10 \pm 11,83)/20$$

A raiz positiva é 1,0915

$$(1+i) = 1,0915$$

$$i = 0,0915$$

A TIR buscada é 9,15%. (Alternativa B)

g) Ponto de Equilíbrio

O ponto de equilíbrio financeiro de uma unidade produtiva corresponde à receita de vendas suficiente para cobrir os custos fixos e variáveis incorridos na produção.

Exemplo 5.6. Se a empresa vende seu produto ao preço de R\$10,00 a unidade, tem custos fixos de R\$10.000,00 e custo variável de R\$6,00 por unidade produzida, seu ponto de equilíbrio será

Total da receita de vendas = custos fixos + custos variáveis

$$10 \times Q = 10.000,00 + 6 \times Q$$

$$10Q - 6Q = 10.000,00$$

$$4Q = 10.000,00$$

$$Q = 2.500$$

Nessa situação, a empresa precisa vender no mínimo 2.500 unidades de seu produto para não apresentar prejuízo. O lucro só será obtido com vendas superiores a esse patamar.

5.4 Bloco 4 Examinando questões do ENEM

Atentar para as abordagens do tema nas questões que integram o ENEM e as diretrizes de inserção de seus conteúdos nas recomendações definidas para o novo ensino médio. Observa-se que os vestibulares das principais instituições brasileiras, em relação aos componentes que tratam do conhecimento matemático e de suas tecnologias, ainda não incorporam o assunto de forma relevante. As provas do ENEM, ao contrário, têm apresentado uma variada gama de questões versando sobre a matéria.

Diante dessa diretriz, selecionamos, na sequência, várias questões integrantes desses exames, diretamente vinculadas ao assunto, apresentando uma alternativa de solução.

5.4.1 Enem 2012 - Questão 166

As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_O = -20 + 4P$$

$$Q_D = 46 - 2P$$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

- A) 5
- B) 11
- C) 13
- D) 23
- E) 33

Solução. O preço de equilíbrio de mercado ocorre para o nível de preço em que a quantidade demandada e a quantidade ofertada são as mesmas. Assim, tal preço pode ser obtido

igualando-se as equações das quantidades de oferta e de demanda:

$$-20 + 4P = 46 - 2P$$

$$4P + 2P = 46 + 20$$

$$6P = 66$$

$$P = 11$$

Logo, o valor do preço de equilíbrio é 11, referido na Alternativa B.

5.4.2 Enem 2015 – Questão 150

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R\$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação $q = 400 - 100p$, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p , o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p , em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

- A) R\$0,50 $\leq p <$ R\$1,50
- B) R\$1,50 $\leq p <$ R\$2,50
- C) R\$2,50 $\leq p <$ R\$3,50
- D) R\$3,50 $\leq p <$ R\$4,50
- E) R\$4,50 $\leq p <$ R\$5,50

Solução. A arrecadação com a venda de pães é dada pela quantidade vezes o preço. Como em média se arrecada R\$300,00 com a venda de 100 pães, o preço praticado no caso é de R\$3,00, pois $A = q \times p = 100 \times 3,00 = 300,00$. A modificação no preço de venda do pão impactará a arrecadação $A = q \times p$, com a condição dada $q = 400 - 100p$, e deverá ser superior aos R\$300,00 de arrecadação média, logo:

$$A = (400 - 100p) \times p \geq 300$$

$$A = 400p - 100p^2 \geq 300$$

$$-100p^2 + 400p - 300 \geq 0$$

$$-p^2 + 4p - 3 \geq 0$$

As raízes de $p^2 - 4p + 3 = 0$, são 1 e 3 e o sinal negativo de p^2 indica que a concavidade da parábola está voltada para baixo. Assim, os valores positivos da inequação encontram-se no intervalo entre 1 e 3. Examinando os valores possíveis para o preço no intervalo, tem-se:

$$p = 3 \implies q = 400 - 100 \times 3 = 100;$$

$$p = 1 \implies q = 400 - 100 \times 1 = 300.$$

Para valores de p entre 1 e 3, as quantidades q se situarão entre 100 e 300, evidenciando que $p = 1$ implica a maior quantidade q para o mesmo nível de arrecadação. O intervalo que contém esse preço encontra-se na Alternativa A.

5.4.3 Enem 2018 – Questão 175

Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R\$200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R\$232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações. Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

- A) 20
- B) 24
- C) 29
- D) 40
- E) 58

Solução.

A loja vende em N parcelas de valor X

A primeira alternativa oferece em $(N+5)$ parcelas de valor $(X-200)$

A segunda alternativa oferece em $(N-4)$ parcelas de valor $(X+232)$

Como o valor do automóvel é o mesmo em todas as opções, comparando a oferta da loja com a primeira alternativa, obtemos:

$$N \times X = (N + 5) \times (X - 200)$$

$$N \times X = N \times X - 200N + 5X - 1.000$$

$$5X - 200N = 1.000 \tag{5.1}$$

E com a segunda:

$$NX = (N - 4) \times (X + 232)$$

$$N \times X = N \times X + 232N - 4X - 928$$

$$4X - 232N = -928 \tag{5.2}$$

Resolvendo o sistema de equações (5.1) e (5.2) obtemos

$$20X - 800N = 4000 \quad (5.1) \times 4$$

$$-20X + 1160N = 4640 \quad (5.2) \times (-5)$$

$$360N = 8640$$

$$N = 24$$

A loja oferta o pagamento em 24 parcelas e está indicado na Alternativa B.

5.4.4 Enem 2019 – Questão 150

Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado. O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de:

- A) 398,02
- B) 400,00
- C) 401,94
- D) 404,00
- E) 406,02

Solução. O valor a vista deve corresponder aos valores das prestações, descontadas com a taxa negociada, para o momento da aquisição do produto. Temos a primeira prestação descontada por um período e a segunda prestação por dois. Assim,

$$\text{Valor a vista} = 202,00 / (1 + 0,01) + 204,02 / (1 + 0,01)^2$$

$$\text{Valor a vista} = 200,00 + 200,00 = 400,00.$$

O valor está relacionado na Alternativa B.

5.4.5 Enem 2012 – Questão 140

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar a vista, por R\$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 30 000,00, e mais uma prestação de R\$ 26 000,00 para dali a 6 meses.

- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 20 000,00, mais uma prestação de R\$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R\$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R\$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R\$ 39 000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R\$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar a vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor a vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo. Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Solução. As opções ofertadas para o pagamento são:

Opção 1: 55 mil

Opção 2: 30 mil e após 6 meses 26 mil

Opção 3: 20 mil , após 6 meses 20 mil e após 6 meses 18 mil

Opção 4: 15 mil e após 12 meses 39 mil

Opção 5: 60 mil após 12 meses

É necessário descontar todos os valores em relação a uma mesma data para realizar a análise das opções. No caso, é mais prático trazer todos para a data inicial:

Opção 1: $V_1 = 55mil$

Opção 2: $V_2 = 30mil + 26mil/(1 + 0,1) = 30mil + 23,64mil = 53,64mil$

Opção 3: $V_3 = 20mil + 20mil/(1 + 0,1) + 18mil/(1 + 0,1)^2 = 20mil + 18,18mil + 14,88mil = 53,06mil$

Opção 4: $V_4 = 15mil + 39mil/(1 + 0,1)^2 = 15mil + 32,23mil = 47,23mil$

Opção 5: $V_5 = 60mil/(1 + 0,1)^2 = 49,59mil$

Do ponto de vista de Arthur, a opção mais interessante é a 4, pois apresenta o menor desembolso quando comparada às demais. A solução está indicada na Alternativa D.

5.4.6 Enem 2015 – Questão 156

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso. Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

- A) 2.075,00
- B) 2.093,00
- C) 2.138,00
- D) 2.255,00
- E) 2.300,00

Solução.

1ª prestação 500,00 + 1% 180.000,00

2ª prestação 500,00 + 1% 179.500,00

3ª prestação 500,00 + 1% 179.000,00

...

9ª prestação 500,00 + 1% 176.000,00

10ª prestação 500,00 + 1% 175.500,00

O saldo devedor no pagamento da 10ª prestação também pode ser obtido por intermédio da fórmula de uma progressão aritmética, com $a_1 = 180.000,00$, $n = 10$ e $r = -500,00$.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_n = 180.000,00 + (10 - 1) \times (-500,00)$$

$$a_n = 180.000,00 - 4.500,00$$

$$a_n = 175.500,00$$

Assim, o valor da 10ª prestação é:

$$V = 500,00 + 0,01 \times 175.500,00$$

$$V = 500,00 + 0,01 \times 175.500,00$$

$$V = 500,00 + 1.755,00$$

$$V = 2.255,00$$

Valor expresso na Alternativa D.

5.4.7 Enem 2017 – Questão 136

Um empréstimo foi feito à taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P . O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela. A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é:

- A $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$
 B $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} \right]$
 C $P \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$
 D $P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{3i}{100}\right)} \right]$
 E $P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3} \right]$

Solução. O valor correspondente ao pagamento envolve: a sexta prestação pelo seu valor nominal, a sétima prestação com valor descontado pela antecipação de um período e a oitava prestação com valor descontado pela antecipação de dois períodos. Desse modo, tem-se:

$$V = P + P/(1 + i/100) + P/(1 + i/100)^2$$

$$V = P[1 + 1/(1 + i/100) + 1/(1 + i/100)^2]$$

A expressão está apresentada na Alternativa A.

5.4.8 Enem 2018 – Questão 137

Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma

data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i , por um período de tempo n , produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \times (1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R\$820,00, a uma taxa de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o valor do desconto seja superior a 25% do valor da parcela. Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln(4/3)$ e 0,0131 como aproximação para $\ln(1,0132)$. A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

- A) 56ª
- B) 55ª
- C) 52ª
- D) 51ª
- E) 45ª

Solução. A questão pede a identificação de uma das parcelas futuras de R\$820,00, para pagamento conjunto no mesmo momento do pagamento da 30ª prestação, com a condição de que seu desconto seja superior a 25% de seu valor nominal. Deve-se, portanto, descontar uma das parcelas de 820,00 de modo que seu valor se torne inferior a 75% de 820,00, ou $0,75 \times 820,00 = 615,00$, correspondendo a um desconto maior que 25%. Assim,

$$820/(1 + 0,0132)^n < 615$$

$$820 < 615 \times (1 + 0,0132)^n$$

$$820/615 < (1 + 0,0132)^n$$

$$4/3 < (1 + 0,0132)^n$$

$$1,0132^n > 4/3$$

$$\ln 1,0132^n > \ln 4/3$$

$$n \times \ln 1,0132 > \ln 4/3$$

$$n \times 0,0131 > 0,2877$$

$$n > 21,96$$

$$n = 22$$

Logo, a primeira prestação que apresenta um desconto maior que 25% é a 30ª + 22ª = 52ª prestação, explicitada na Alternativa C.

5.4.9 Enem 2017 – Questão 137

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R\$5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R\$400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1,013^n \times 0,013}{1,013^n - 1}.$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para $\log 1,013$; 2,602 como aproximação para $\log 400$; 2,525 como aproximação para $\log 335$. De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

- A) 12
- B) 14
- C) 15
- D) 16
- E) 17

Solução. Deve-se calcular o valor de n para as condições dadas, considerando-se a limitação da prestação em no máximo R\$400,00.

$$400 = 5000 \times 1,013^n \times 0,013 / (1,013^n - 1)$$

$$400 \times 1,013^n - 400 = 65 \times 1,013^n$$

$$400 \times 1,013^n - 65 \times 1,013^n = 400$$

$$335 \times 1,013^n = 400$$

$$1,013^n = 400/335$$

$$\log 1,013^n = \log 400 - \log 335$$

$$n \times 0,005 = 2,602 - 2,525$$

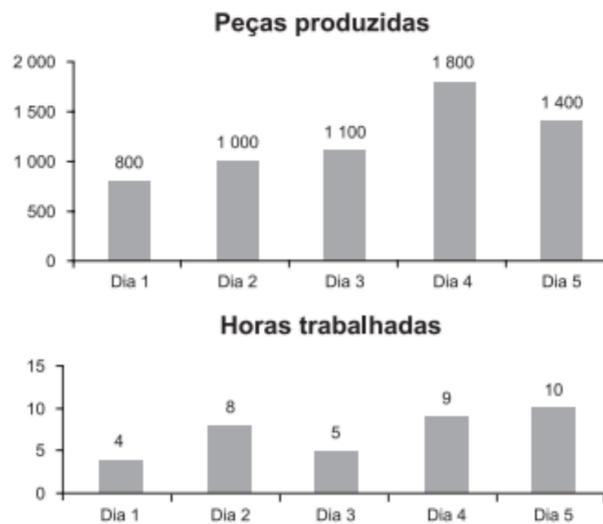
$$n \times 0,005 = 0,077$$

$$n = 15,4$$

Para que a prestação tenha valor máximo de 400,00, o valor de n deve ser maior que 15,4, ou seja, 16 prestações, no mínimo, conforme Alternativa D.

5.4.10 Enem 2020 – Questão 139

Os gráficos representam a produção de peças em uma indústria e as horas trabalhadas dos funcionários no período de cinco dias. Em cada dia, o gerente de produção aplica uma metodologia diferente de trabalho. Seu objetivo é avaliar a metodologia mais eficiente para utilizá-la como modelo nos próximos períodos. Sabe-se que, neste caso, quanto maior for a razão



entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas, maior será a eficiência da metodologia

Em qual dia foi aplicada a metodologia mais eficiente?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Solução. Para que se possa definir a metodologia mais eficiente, deve-se relacionar a quantidade de peças produzidas com as respectivas horas trabalhadas, em cada dia indicado, obtendo-se as seguintes razões:

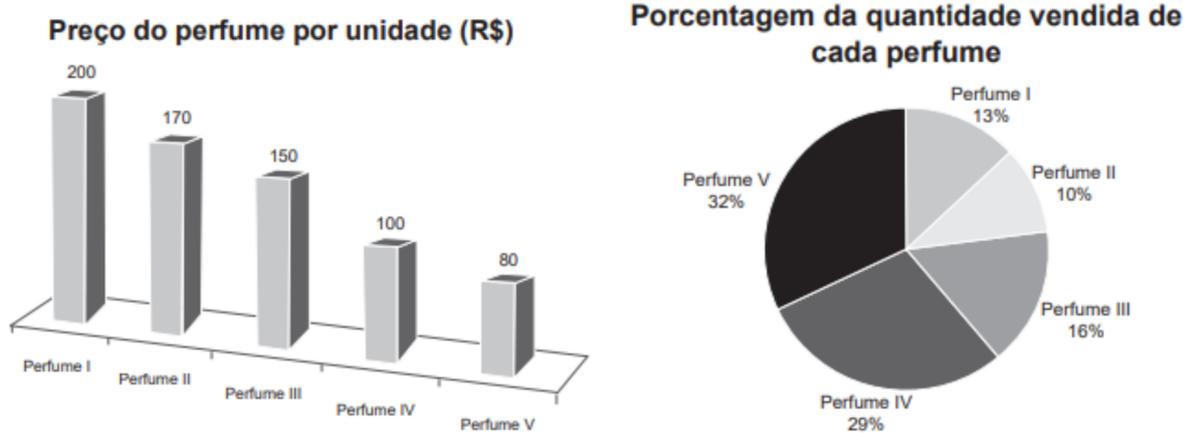
- Dia 1 » $800 \text{ peças}/4 \text{ horas} = 200 \text{ peças/hora}$
- Dia 2 » $1000 \text{ peças}/8 \text{ horas} = 125 \text{ peças/hora}$
- Dia 3 » $1100 \text{ peças}/5 \text{ horas} = 220 \text{ peças/hora}$
- Dia 4 » $1800 \text{ peças}/9 \text{ horas} = 200 \text{ peças/hora}$
- Dia 5 » $1400 \text{ peças}/10 \text{ horas} = 140 \text{ peças/hora}$

Assim, verifica-se que a metodologia mais eficiente ocorre no dia 3 com a produção de 220 peças/hora (Alternativa C).

5.4.11 Enem 2020 – Questão 156

O gerente de uma loja de cosméticos colocou à venda cinco diferentes tipos de perfume, tendo em estoque na loja as mesmas quantidades de cada um deles. O setor de controle de estoque encaminhou ao gerente registros gráficos descrevendo os preços unitários de cada perfume, em real, e a quantidade vendida de cada um deles, em percentual, ocorrida no mês de novembro.

Dados a chegada do final de ano e o aumento das vendas, a gerência pretende aumentar a



quantidade estocada do perfume do tipo que gerou a maior arrecadação em espécie, em real, no mês de novembro. Nessas condições, qual o tipo de perfume que deverá ter maior reposição no estoque?

- A) I
- B) II
- C) III
- D) IV
- E) V

Solução. Como a quantidade em estoque de cada tipo é a mesma, o melhor retorno será obtido pelo perfume que produzir o maior valor do produto do percentual da quantidade vendida pelo preço unitário respectivo.

$$\text{Perfume I: } 0,13 \times 200 = 26$$

$$\text{Perfume II: } 0,10 \times 170 = 17$$

$$\text{Perfume III: } 0,16 \times 150 = 24$$

$$\text{Perfume IV: } 0,29 \times 100 = 29$$

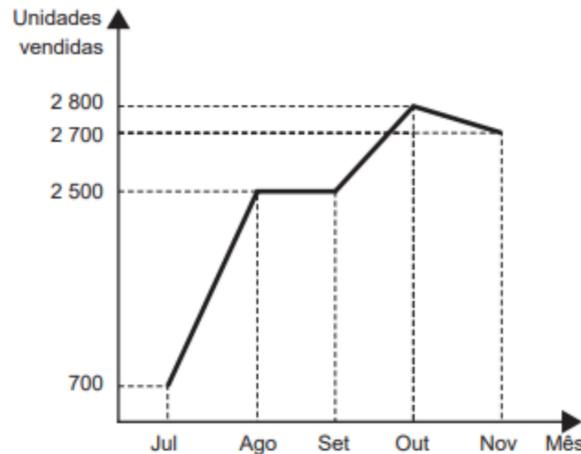
$$\text{Perfume V: } 0,32 \times 80 = 25,6$$

Conclui-se, portanto, que o melhor retorno é do Perfume IV apresentado na Alternativa D.

5.4.12 Enem 2019 – Questão 172

O gráfico a seguir mostra a evolução mensal das vendas de certo produto de julho a novembro de 2011.

Sabe-se que o mês de julho foi o pior momento da empresa em 2011 e que o número de unidades vendidas desse produto em dezembro de 2011 foi igual à média aritmética do número de unidades vendidas nos meses de julho a novembro do mesmo ano. O gerente de vendas disse, em uma reunião da diretoria, que, se essa redução no número de unidades vendidas de novembro para dezembro de 2011 se mantivesse constante nos meses subsequentes, as vendas só voltariam a ficar piores que julho de 2011 apenas no final de 2012. O diretor financeiro rebateu imediatamente esse argumento mostrando que, mantida a tendência, isso aconteceria já em



- A) janeiro.
- B) fevereiro.
- C) março.
- D) abril.
- E) maio.

Solução. O número de unidades vendidas em dezembro/2011 é igual à média aritmética das unidades vendidas entre julho e novembro do mesmo ano, logo:

$$\text{Vendas dezembro/2011} = (700 + 2500 + 2500 + 2800 + 2700)/5 = 2240$$

$$\text{Redução das vendas em dezembro/2011} : 2700 - 2240 = 460$$

Pretende-se em seguida identificar, caso essa redução mensal se mantenha nos meses subsequentes, em qual mês o volume de vendas se tornará inferior ao de julho/2011, com 700 unidades. Para resolver a questão, pode-se considerar uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 2240, volume de vendas em dezembro/2011, e razão negativa de -460 , referente à redução mensal considerada. Assim, em $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$, deve-se identificar o n ésimo termo da progressão que apresenta valor inferior a 700, isto é,

$$2240 + (n - 1) \times (-460) < 700$$

$$-460n + 2240 + 460 < 700$$

$$-460n < 700 - 2700$$

$$-460n < -2000$$

$$460n > 2000$$

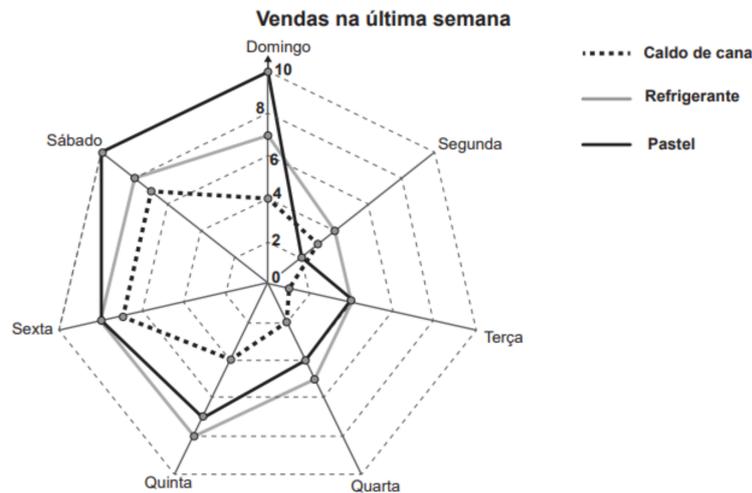
$$n > 4,35\dots$$

$$n \geq 5$$

Como o termo a_1 corresponde ao mês dezembro/2011 e a partir de $n = 5$ o termo desta progressão passa a ter valor inferior a 700, identifica-se rapidamente a correspondência com o mês abril/2012 (Alternativa D).

5.4.13 Enem 2019 – Questão 178

Um comerciante, que vende somente pastel, refrigerante em lata e caldo de cana em copos, fez um levantamento das vendas realizadas durante a semana. O resultado desse levantamento está apresentado no gráfico.



Ele estima que venderá, em cada dia da próxima semana, uma quantidade de refrigerante em lata igual à soma das quantidades de refrigerante em lata e caldo de cana em copos vendidas no respectivo dia da última semana. Quanto aos pastéis, estima vender, a cada dia da próxima semana, uma quantidade igual à quantidade de refrigerante em lata que prevê vender em tal dia. Já para o número de caldo de cana em copos, estima que as vendas diárias serão iguais às da última semana. Segundo essas estimativas, a quantidade a mais de pastéis que esse comerciante deve vender na próxima semana é

- A) 20
- B) 27
- C) 44
- D) 55
- E) 71

Solução. Vendas da Semana 1 de acordo com o gráfico:

Vendas/Semana 1	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb	Dom	Total
Lata de refrigerante	4	4	5	8	8	8	7	44
Caldo de cana	3	1	2	4	7	7	4	28
Pastel	2	4	4	7	8	10	10	45

Para a Semana 2, a previsão é vender latas de refrigerante em quantidade igual à soma das quantidades de latas de refrigerante e de caldos de cana da semana anterior, isto significa, $44 + 28 = 72$ latas de refrigerante. Quanto aos pastéis, está indicada a venda da mesma quantidade de refrigerante em lata no dia respectivo, ou seja, 72 pastéis. Pelo exposto, o acréscimo na venda de pastéis é de $72 - 45 = 27$, correspondente à Alternativa B.

5.4.14 Enem 2016 – Questão 144

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses. Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

- A) I
- B) II
- C) IV
- D) V
- E) VII

Solução. Média aritmética dos lucros nos sete meses:

$$(37 + 33 + 35 + 22 + 30 + 35 + 25)/7 = 217/7 = 31$$

A menor diferença obtida entre esta média e cada um de seus valores componentes é $31 - 30 = 1$, portanto, referente ao mês V indicado na Alternativa D.

5.4.15 Enem 2016 – Questão 146

Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R\$16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R\$40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía. Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento. Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

- A) R\$0,96
- B) R\$1,00
- C) R\$1,40
- D) R\$1,50
- E) R\$1,56

Solução. Tem-se inicialmente 4 caixas de picolés, com 20 unidades cada uma, adquiridas por R\$16,00/caixa e vendidas com um lucro de R\$40,00. Para cobrir o custo de aquisição de 4 caixas \times R\$16,00 = R\$64,00 e um lucro de R\$40,00, a receita total necessária de R\$104,00, dividida pelo total de picolés vendidos ($4 \times 20 = 80$), fornece o preço de venda de cada unidade $104 \div 80 = 1,30$. Admitindo-se um aumento de 20% no lucro inicial, o valor a considerar para o lucro será de $1,2 \times R\$40,00 = R\$48,00$ e a nova receita de venda passará para R\$64,00 + R\$48,00 = R\$112,00. Essa receita exigida para a venda dos mesmos 80 picolés define o novo preço unitário a ser praticado: $R\$112,00 \div 80 = R\$1,40$, cujo valor está expresso na Alternativa C.

5.4.16 Enem 2016 – Questão 157

A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maior
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

- A) 26
- B) 29
- C) 30
- D) 31
- E) 35

Solução. Denominando o lucro mínimo no mês de junho por L , para que a média do lucro mensal do semestre seja, no mínimo, 30 mil de reais, tem-se:

$$(21 + 35 + 21 + 30 + 38 + L)/6 = 30$$

$$145 + L = 180$$

$$L = 180 - 145$$

$$L = 35$$

Este valor apresenta-se na Alternativa E.

5.4.17 Enem 2015 – Questão 152

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t , para $t \geq 1$?

- A) $P(t) = 0,5t^{-1} + 8.000$
- B) $P(t) = 50t^{-1} + 8.000$
- C) $P(t) = 4.000t^{-1} + 8.000$
- D) $P(t) = 8.000 \times (0,5)^{t-1}$
- E) $P(t) = 8.000 \times (1,5)^{t-1}$

Solução. A questão pode ser resolvida utilizando a fórmula geral de progressão geométrica $a_n = a_1 \times q^{n-1}$, em que $a_n = P(t)$; $a_1 = 8000$; $q = 1,5$ (acrécimo de 50% a partir de $t \geq 1$). Substituindo os dados em a_n , obtemos: $P(t) = 8.000 \times (1,5)^{t-1}$. A expressão está colocada na Alternativa E.

5.4.18 Enem 2018 - Questão 148

Uma empresa deseja iniciar uma campanha publicitária divulgando uma promoção para seus possíveis consumidores. Para esse tipo de campanha, os meios mais viáveis são a distribuição de panfletos na rua e anúncios na rádio local. Considera-se que a população alcançada pela distribuição de panfletos seja igual à quantidade de panfletos distribuídos, enquanto a alcançada por um anúncio na rádio seja igual à quantidade de ouvintes desse anúncio. O custo de cada anúncio na rádio é de R\$120,00, e a estimativa é de que seja ouvido por 1.500 pessoas. Já a produção e distribuição dos panfletos custam R\$180,00 cada 1.000 unidades. Considerando que cada pessoa será alcançada por um único desses meios de divulgação, a empresa pretende investir em ambas as mídias. Considere X e Y os valores (em real) gastos em anúncios na rádio e com panfletos, respectivamente. O número de pessoas alcançadas pela campanha será dado pela expressão

$$\text{A) } \frac{50X}{4} + \frac{50Y}{9}$$

$$\text{B) } \frac{50X}{9} + \frac{50Y}{4}$$

$$\text{C) } \frac{4X}{50} + \frac{4Y}{50}$$

$$\text{D) } \frac{50}{4X} + \frac{50}{9Y}$$

$$\text{E) } \frac{50}{9X} + \frac{50Y}{4Y}$$

Solução. Cada anúncio em rádio custa R\$120,00 e atinge 1500 pessoas. Assim, com o gasto total X serão atingidas X (1500 / 120) pessoas. De modo similar, cada milhar de panfletos custa R\$180,00 e alcança 1000 pessoas. Logo, com o gasto total Y serão alcançadas Y (1000 / 180) pessoas. O total de pessoas alcançadas é de:

$$X(1500/120) + Y(1000/180)$$

$$X(150/12) + Y(100/18)$$

$$X(50/4) + Y(50/9)$$

A expressão corresponde àquela presente na Alternativa A.

5.4.19 Enem 2021 - Questão 173

Um lava-rápido oferece dois tipos de lavagem de veículos, lavagem simples, ao preço de R\$20,00, e lavagem completa, ao preço de R\$35,00. Para cobrir as despesas com produtos e funcionários, e não ter prejuízos, o lava-rápido deve ter uma receita diária de, pelo menos, R\$300,00. Para não ter prejuízo, o menor número de lavagens diárias que o lava-rápido deve efetuar é

- A) 6
- B) 8
- C) 9
- D) 15
- E) 20

Solução. O menor número de lavagens deve conter o máximo de lavagens completas, pois darão maior receita.

$$8 \text{ lavagens completas} = 8 \times 35,00 = 280,00$$

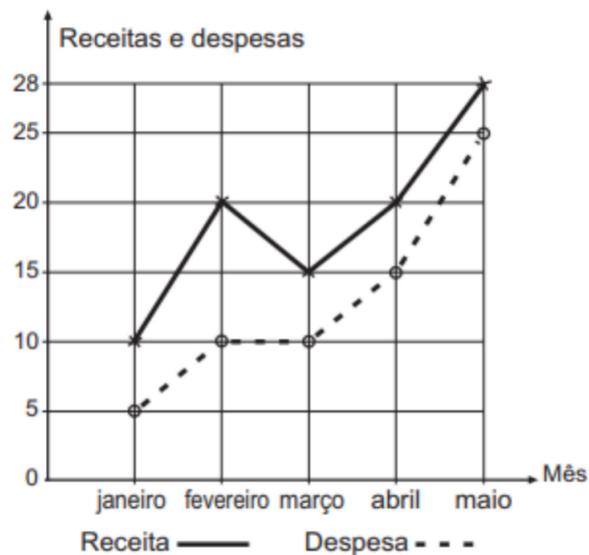
$$9 \text{ lavagens completas} = 9 \times 35,00 = 315,00$$

$$1 \text{ lavagem simples} = 20,00$$

Dessa forma, verifica-se que 8 lavagens completas e 1 simples completam o mínimo de receita que se deseja. Portanto, o menor número de lavagens necessárias é nove, referido na Alternativa C.

5.4.20 Enem 2021 - Questão 149

A receita R de uma empresa ao final de um mês é o dinheiro captado com a venda de mercadorias ou com a prestação de serviços nesse mês, e a despesa D é todo o dinheiro utilizado para pagamento de salários, contas de água e luz, impostos, entre outros. O lucro mensal obtido ao final do mês é a diferença entre a receita e a despesa registradas no mês. O gráfico apresenta as receitas e despesas, em milhão de real, de uma empresa ao final dos cinco primeiros meses de um dado ano.



A previsão para os próximos meses é que o lucro não seja inferior ao maior lucro obtido até o mês de maio. Nessas condições, o lucro mensal para os próximos meses deve ser maior ou igual ao do mês de

- A) janeiro
- B) fevereiro
- C) março
- D) abril
- E) maio

Solução. Os valores da receita e da despesa, mês a mês, podem ser extraídos do gráfico, resultando nos seguintes lucros mensais:

Mês	Receita	-Despesa	=Lucro
Janeiro	10	-5	10 milhões
Fevereiro	20	-10	10 milhões
Março	15	-10	5 milhões
Abril	20	-15	5 milhões
Maio	28	-25	3 milhões

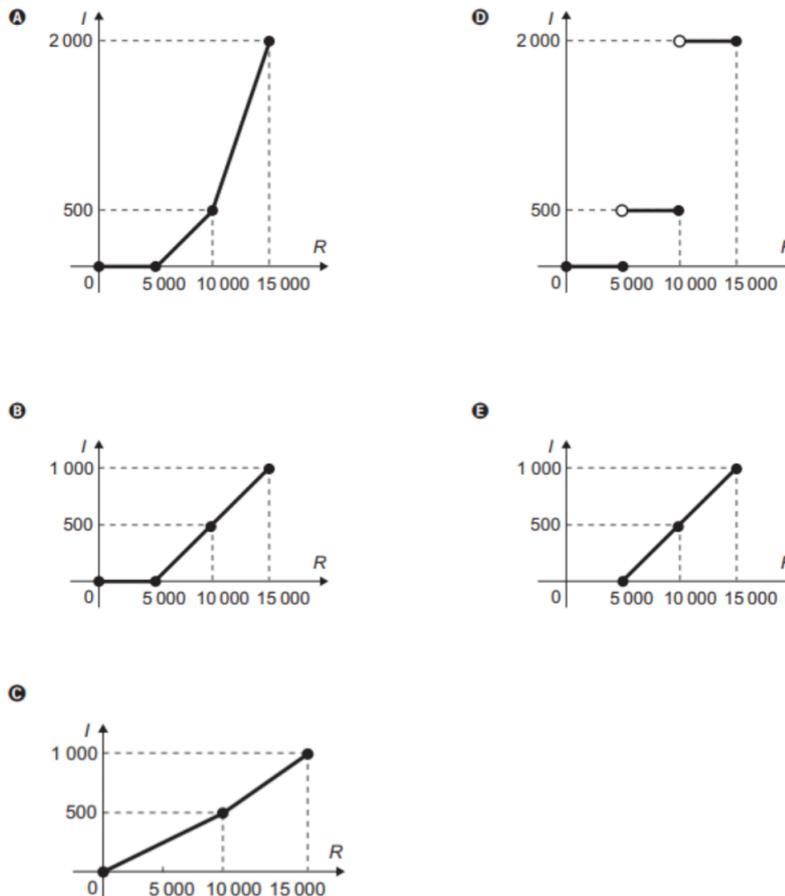
O maior lucro obtido foi no mês de fevereiro, indicado na Alternativa B.

5.4.21 Enem 2021 - Questão 162

O quadro representa a relação entre o preço de um produto (R) e seu respectivo imposto devido (I).

Preço do produto (R)	Imposto devido (I)
$R \leq 5\,000$	Isento
$5\,000 < R \leq 10\,000$	10% de $(R - 5\,000)$
$10\,000 < R \leq 15\,000$	$500 + 30\% \text{ DE } (R - 10\,000)$

O gráfico que melhor representa essa relação é



Solução. Para valores de produtos entre 0 e 5.000, o imposto devido é zero, há isenção.

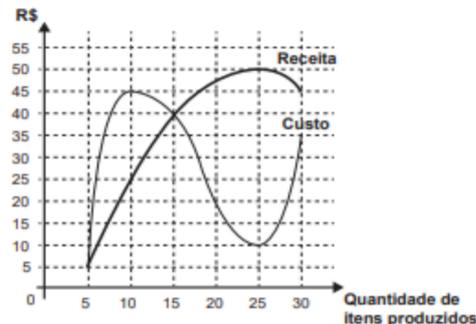
Para produtos com valores maiores que 5.000 e menores ou iguais a 10.000, o imposto é de 10% sobre o valor que exceder 5.000. Desse modo, no limite dos 10.000, o imposto será 10% de $(10.000 - 5.000) = 5000$. Logo $5000 \times 0,10 = 500$.

Para produtos com valores maiores que 10.000 e menores ou iguais a 15.000, o imposto é de 30% sobre o valor que exceder 10.000. Desse modo, no limite dos 15.000, o imposto será $500 + 30\%$ de $(15.000 - 10.000) = 500 + 0,30 \times 5.000 = 500 + 1.500 = 2.000$.

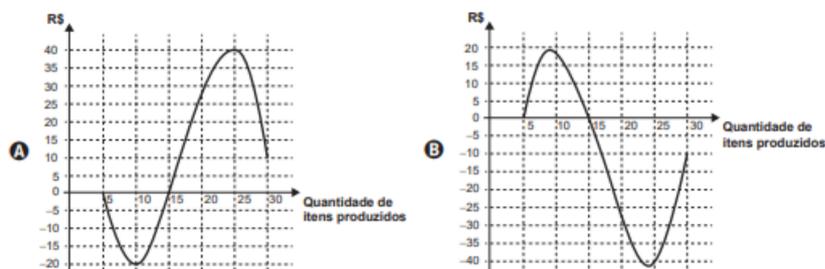
As fórmulas de cálculo para cada faixa são todas referidas a funções lineares, de tal modo que, para produtos entre 0 e 5.000, os valores de imposto são zero, para valores maiores que 5.000 e até 10.000, inclusive, os valores de imposto sequenciam o intervalo imediatamente anterior e crescem até 500 no extremo deste intervalo, e para valores maiores que 10.000 e até 15.000, inclusive, os valores de imposto dão sequência ao intervalo anterior e aumentam até 2.000. A situação assim descrita está presente no gráfico apresentado na Alternativa A.

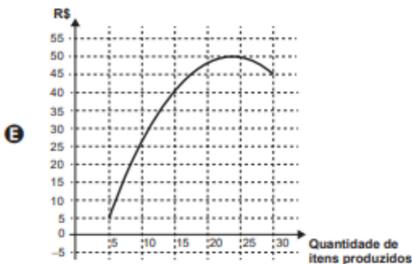
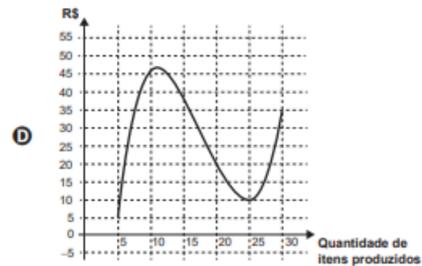
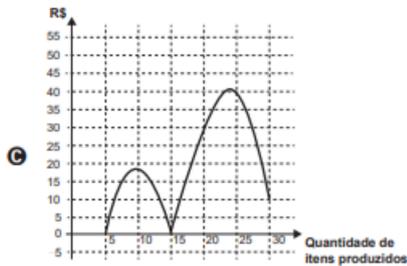
5.4.22 Enem 2020 – Questão 175

Um administrador resolve estudar o lucro de sua empresa e, para isso, traça o gráfico da receita e do custo de produção de seus itens, em real, em função da quantidade de itens produzidos. O gráfico que representa o lucro dessa empresa, em função da quantidade de itens



produzidos, é:





Solução. O gráfico fornece os dados relativos à receita e ao custo para as quantidades entre os valores de 5 a 30 itens produzidos. Para as quantidades de 5 e 15 itens, verifica-se que os valores correspondentes para a receita e para o custo são iguais, implicando uma diferença nula entre receita e custo, ou seja, não há lucro nem prejuízo. Entre as quantidades produzidas entre 5 e 15, os custos são sempre maiores que as receitas e, portanto, as diferenças negativas indicam a ocorrência de prejuízos e não de lucros. Para as quantidades produzidas acima de 15 e até 30 itens, inclusive, as receitas superam os custos e fornecem resultados positivos, isto é, os lucros estão presentes neste intervalo. Na produção de 30 itens, a receita obtida é de R\$45,00 com custo de R\$35,00, resultando num lucro de R\$10,00. O gráfico que corresponde a esses dados é aquele proposto na Alternativa A.

5.4.23 Enem 2019 - Questão 168

Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

- A) $Y = 80X + 920$
- B) $Y = 80X + 1000$
- C) $Y = 80X + 1080$
- D) $Y = 160X + 840$
- E) $Y = 160X + 1000$

Solução. Os gastos semanais para pagar os funcionários da empresa, representados por Y , compreendem $(X - 1)$ diaristas trabalhando 2 dias a R\$80,00/dia e mais o gerente com valor

de R\$1.000,00. Desse modo, a equação que representa o gasto será:

$$Y = (X - 1) \times 2 \times 80 + 1000$$

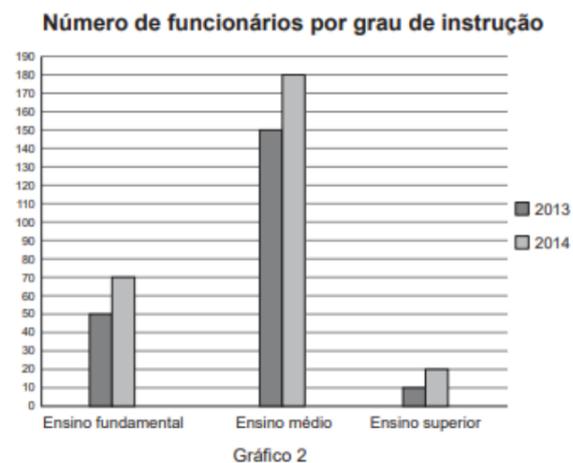
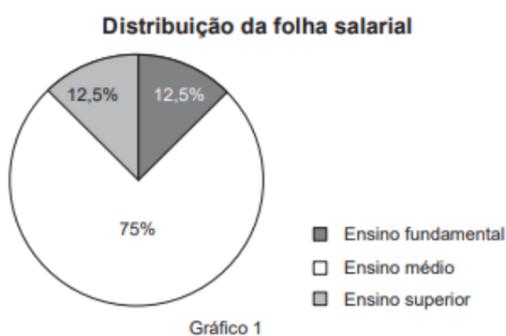
$$Y = 160X - 160 + 1000$$

$$Y = 160X + 840$$

Esta expressão corresponde à Alternativa D.

5.4.24 Enem 2014 – Questão 153

Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R\$ 400.000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.



Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

- A) R\$ 114.285,00
- B) R\$ 130.000,00
- C) R\$ 160.000,00
- D) R\$ 210.000,00
- E) R\$ 213.333,00

Solução. No quadro seguinte, temos,

Funcionários	2013 (A)	% (B)	Folha (C)	Salário (D)=(C)+(A)	2014 (E)	Novos (F)=(E) - (A)	Acréscimo (G)=(D)x(F)
E. Fundamental	50	12,5	50.000,00	1.000,00	70	20	20.000,00
E. Médio	150	75,0	300.000,00	2.000,00	180	30	60.000,00
E. Superior	10	12,5	50.000,00	5.000,00	20	10	50.000,00
	210	100,0	400.000,00		270	60	130.000,00

Coluna A – número de funcionários em 2013 obtidos do Gráfico 2

Coluna B – percentual da folha salarial indicado no Gráfico 1

Coluna C – valores obtidos de cada percentual sobre o total da folha salarial

Coluna D – valor unitário do salário por grau de instrução

Coluna E – número de funcionários em 2014 obtidos do Gráfico 2

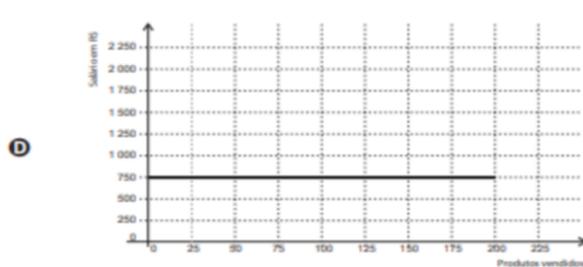
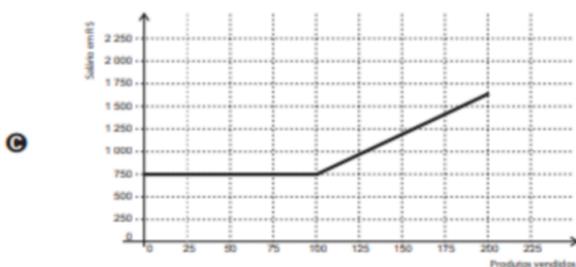
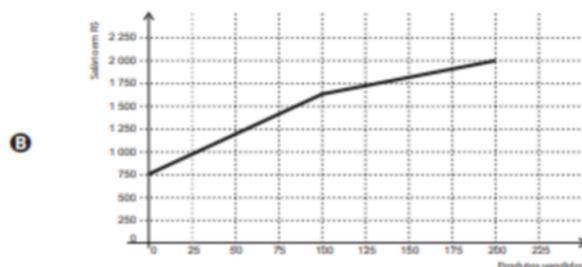
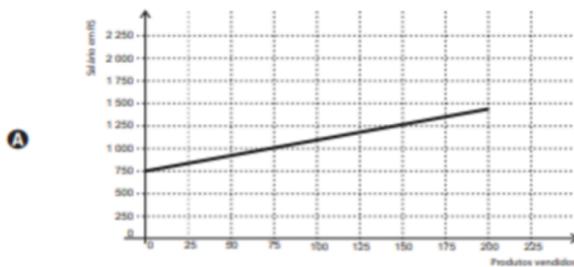
Coluna F – acréscimo de novos funcionários

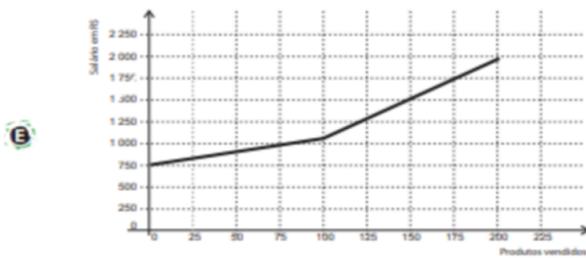
Coluna G – acréscimo da folha salarial

Mantidos os demais custos, para que o lucro mensal se mantenha, a receita deve crescer R\$130.000,00, relativos ao salário dos novos funcionários, apontado na Alternativa B.

5.4.25 Enem 2012 – Questão 156

Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R\$750,00, mais uma comissão de R\$3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R\$9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido. Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é





Solução. Designando os produtos vendidos por x e o salário do vendedor por y , para as vendas realizadas entre 0 e 100 unidades, o gráfico deve apresentar o valor fixo de 750 mais uma comissão de R\$3,00 por unidade vendida. A situação corresponde a uma função linear expressa por $y = 3x + 750$, com valores nos extremos do intervalo $y = 3 \times 0 + 750 = 750$ e $y = 3 \times 100 + 750 = 1.050$. A partir do 101º produto vendido, a comissão passa para R\$9,00 e a função poderá ser definida por $y = 9(x - 100) + 1050 = 9x + 150$, que também representa uma função linear. Na quantidade $x = 200$, apresentada no gráfico, calcula-se $y = 9 \times 200 + 150 = 1800 + 150 = 1950$. O gráfico que apresenta valores compatíveis com esta situação está representado na Alternativa E.

5.4.26 Enem 2016 - Questão 145

O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei nº 8.213/91, que dispõe:

Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoas com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção:

- I. até 200 empregados 2%;
- II. de 201 a 500 empregados..... 3%;
- III. de 501 a 1 000 empregados..... 4%;
- IV. de 1 001 em diante..... 5%.

Constatou-se que a empresa possui 1.200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados. Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no artigo 93. O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é:

- A) 74
- B) 70
- C) 64
- D) 60
- E) 53

Solução. A empresa dispõe de 1.200 empregados, portanto, deve cumprir o percentual mínimo de reabilitados ou com deficiência, habilitados, no patamar de 5%, significando um

mínimo de 60 empregados com o perfil definido. Como a empresa só tem 10 funcionários na condição indicada, todos os novos contratados (X) deverão atender ao requisito:

$$(10 + X)/(1.200 + X) \geq 0,05$$

$$10 + X \geq 60 + 0,05X$$

$$X - 0,05X \geq 60 - 10$$

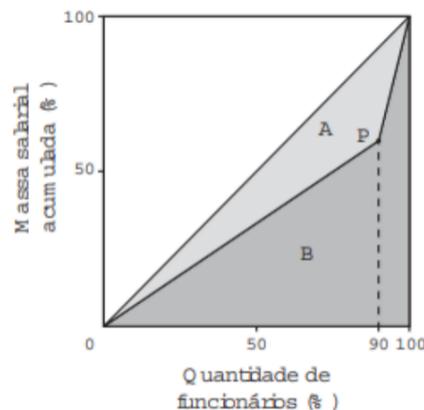
$$0,95X \geq 50$$

$$X \geq 52,63$$

O primeiro valor inteiro maior que o calculado é 53. (Alternativa E)

5.4.27 Enem 2016 – Questão 169

A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10% que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto P, cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura. No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.



O Índice de Gini, que mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão $A/(A+B)$, em que A e B são as medidas das áreas indicadas no gráfico. A empresa tem como meta tornar seu Índice de Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial. Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser

- A) 40%
- B) 20%
- C) 60%

D) 30%

E) 70%

Solução. O Índice de Gini calculado pela razão $A/(A+B) = 0,3$ significa que a relação das áreas A/B corresponde a 0,3/0,7. Pelo gráfico, observa-se que a área A+B compreende um triângulo de base 100 e altura 100. Logo sua área é de $(100 \times 100)/2 = 5000$. Por conseguinte, as áreas A e B são:

$$A = 0,3 \times 5000 = 1500$$

$$B = 0,7 \times 5000 = 3500$$

A área B apresenta-se formada por um triângulo de base 90 (percentual de funcionários) e altura h , no ponto P, e por um trapézio de base menor h , base maior 100 e altura 10. Logo:

$$(90 \times h)/2 + [(h + 100)10] \times 2 = 3500$$

$$45h + 5h = 3500 - 500$$

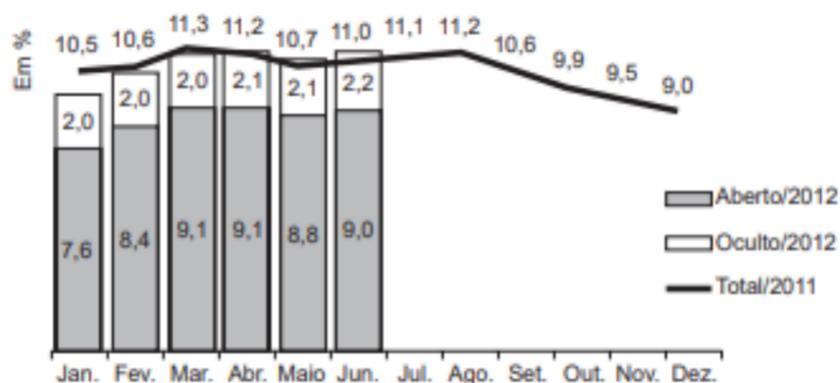
$$50h = 3000$$

$$h = 60$$

No ponto P, portanto, a ordenada corresponde a 60% da massa salarial acumulada relativa aos 90% que recebem os salários menores. Assim, o percentual referente aos 10% que recebem os salários maiores deve ser 40%. (Alternativa A)

5.4.28 Enem 2014 – Questão 136

O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011. Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

- A) 1,1
- B) 3,5
- C) 4,5
- D) 6,8
- E) 7,9

Solução.

Desemprego oculto dez/2012 = $\frac{1}{2}$ desemprego oculto jun/2012

Desemprego oculto dez/2012 = $\frac{1}{2}$ 2,2 = 1,1

Desemprego total dez/2012 = desemprego total dez/2011

Desemprego total dez/2012 = 9

Desemprego aberto dez/2012 = desemp. total dez/2012 - desemp. oculto jun/2012

Desemprego aberto dez/2012 = 9 - 1,1 = 7,9 (Alternativa E)

5.4.29 Enem 2021 - Questão 180

Os diretores de uma escola precisam construir um laboratório para uso dos alunos. Há duas possibilidades:

- (i) um laboratório do tipo A, com capacidade para 100 usuários, a um custo de 180 mil reais e gastos de 60 mil reais por ano para manutenção;
- (ii) um laboratório do tipo B, com capacidade para 80 usuários, a um custo de 120 mil reais e gastos com manutenção de 16 mil reais por ano.

Considera-se que, em qualquer caso, o laboratório implantado será utilizado na totalidade de sua capacidade. A economia da escola, na utilização de um laboratório tipo B, em vez de um laboratório tipo A, num período de quatro anos, por usuário, será de

- A) 1,31 mil reais
- B) 1,90 mil reais
- C) 2,30 mil reais
- D) 2,36 mil reais
- E) 2,95 mil reais

Solução. Para cada tipo de laboratório, devem ser computados os custos relativos à construção e aqueles necessários à manutenção, por um prazo de quatro anos, rateados pelo número respectivo de usuários.

Laboratório A : $(180.000,00 + 4 \times 60.000,00)/100 = 420.000,00/100 = 4.200,00$

Laboratório B : $(120.000,00 + 4 \times 16.000,00)/80 = 184.000,00/80 = 2.300,00$

A diferença entre as alternativas fornece $4.200,00 - 2.300,00 = 1.900,00$, ou 1,90 mil reais, que representa a economia que se obterá com a escolha do laboratório tipo B. O valor corresponde ao relacionado na Alternativa B.

5.4.30 Enem 2019 – Questão 151

Três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R\$1.000.000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial. Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R\$800.000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R\$1.800.000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio. Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

- A) 29,60 e 11,11.
- B) 28,70 e 13,89.
- C) 25,00 e 25,00.
- D) 18,52 e 11,11.
- E) 12,96 e 13,89.

Solução. Uma forma de resolver a questão é encontrar a razão entre o capital investido e o montante obtido com a venda, para cada sócio. O quarto sócio entrou apenas com R\$200.000,00 e sua razão é $200.000,00/1.800.000,00$, ou $2/18$, ou $1/9 = 0,1111... = 11,11\%$. Os outros três sócios têm a mesma participação, pois consideraram o investimento de 1.000.000,00 em partes iguais e depois cada um investiu mais 200.000,00. Desse modo, a porcentagem que cabe aos três é $100\% - 11,11\%$ (do quarto sócio) = $88,89\%$. Essa porcentagem dividida por três, resulta em $29,63\%$. Os valores mais próximos estão na Alternativa A.

5.4.31 Enem 2013 – Questão 160

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

- A) F
- B) G
- C) H
- D) M
- E) P

Solução. Os lucros estão relacionados a períodos distintos de tempo. Logo, é preciso conhecer a relação do lucro na mesma unidade de tempo, no caso, o lucro anual.

$$F \quad 24/3 = 8$$

$$G \quad 24/2 = 12$$

$$H \quad 25/2,5 = 10$$

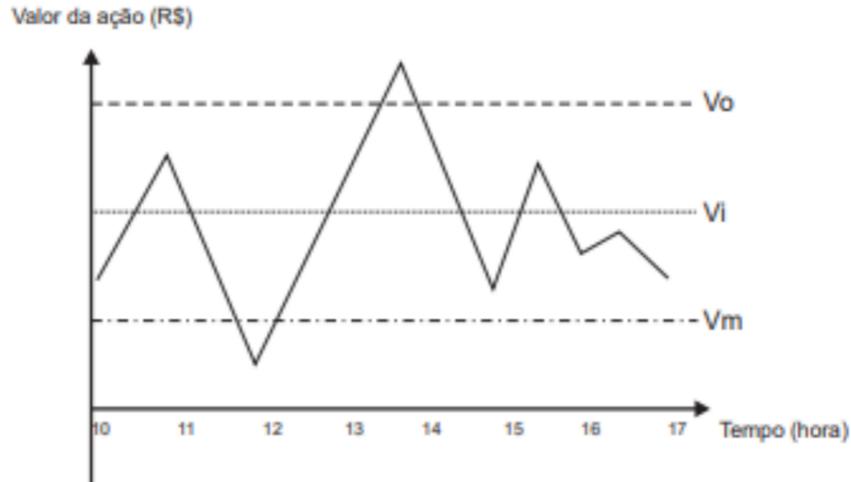
$$M \quad 15/1,5 = 10$$

$$P \quad 9/1,5 = 6$$

O maior lucro médio anual é o da empresa G. (Alternativa B)

5.4.32 Enem 2015 - Questão 136

Um investidor inicia um dia com x ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios: I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal (V_i); II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo (V_m); III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo (V_o). O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



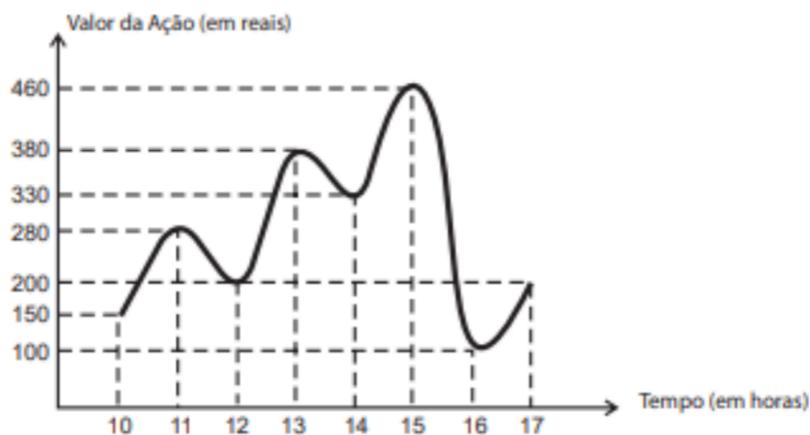
Quantas operações o investidor fez naquele dia?

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7

Solução. Às 10h o investidor dispõe de x ações. Pelo gráfico, entre 10h e 11h, o valor da ação ultrapassa o V_i ; ele vende $x/2$ ações e fica com $x/2$. Entre 11h e 12h, o valor da ação fica abaixo do V_m ; ele compra $x/2$ ações e fica com x . Entre 12h e 13h, o valor da ação ultrapassa novamente o V_i ; ele vende $x/2$ ações e fica com $x/2$. Entre 13h e 14h, o valor da ação ultrapassa o V_o ; ele vende todas as $x/2$ ações que possui e não pode mais realizar operações dos tipos descritos. Fez, portanto, 4 operações nesse dia. (Alternativa B)

5.4.33 Enem 2012 – Questão 162

O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Solução. Valores da ação na hora da compra e venda

Investidor 1	compra 150	venda 460	ganho 310
Investidor 2	compra 150	venda 200	ganho 50
Investidor 3	compra 380	venda 460	ganho 80
Investidor 4	compra 460	venda 100	perda -360
Investidor 5	compra 100	venda 200	ganho 100

Quem fez melhor negócio foi o investidor 1. (Alternativa A)

6 Considerações finais

O fio condutor deste trabalho foi sempre a busca em apresentar uma contribuição efetiva ao jovem que é atraído a empreender, independente das circunstâncias que o motivaram, ampliando suas possibilidades de sucesso por intermédio do conhecimento. A proposta pode atender tanto aqueles que a identificam como oportunidade quanto os que nela ingressam por necessidade, ou ainda, pode apoiar todos aqueles que se profissionalizam em qualquer área e precisem atuar com o lastro de organização empresarial.

Em particular, há bastante expectativa de que seu conteúdo possa contribuir no sentido da aceleração do ingresso e da integração da educação empreendedora no ensino básico. É possível esperar, que o claro propósito dessa diretriz, introduza estímulos para o jovem permanecer mais tempo na escola, reduzindo os atuais índices de evasão, e propicie as habilidades e conhecimentos preliminares que lhe assegurem melhor desempenho profissional, especialmente, para o grande contingente originário das classes de renda mais baixa.

Em termos de política educacional, o Brasil ainda depende de vários avanços no que se refere a inclusão da educação empreendedora como parte integrante do ensino básico formal, quando confrontado com práticas externas. É desejável que se definam com relativa celeridade um conjunto de ações orientadas para esse objetivo, a exemplo de políticas governamentais que fixem critérios para inserção e compatibilidade da proposta nas diretrizes e bases do ensino básico, estratégia consistente de preparação de professores e gestores para a ideia, aproveitamento das experiências criativas já desenvolvidas e em curso com potenciais parceiros, identificação de novas adesões, alocação de recursos necessários, dentre outras.

Alguns avanços também devem ser citados. Em 2015, o Estado de São Paulo, por intermédio da Lei 15.693/2015, criou o Plano Estadual de Educação Empreendedora (PEEE), com o objetivo de inserir a temática do empreendedorismo nas escolas de ensino fundamental, médio e técnico do Estado de São Paulo.¹

Em 30.09.21, foi aprovado pelo Senado Federal o PL 2.944/2021, da senadora Kátia Abreu (PP-TO), que altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) para incluir os temas "empreendedorismo" e "inovação" nos currículos da educação básica e superior. O projeto seguiu para a Câmara dos Deputados e foi apensado ao PL 4.744/2012 onde aguarda apreciação.²

É relevante destacar o papel do Sebrae nesse processo, atuando nacionalmente na condição de agente de capacitação e promotor de desenvolvimento. No que se refere à educação empreendedora, em notícia publicada em 28.12.21, foi implementada ação, pelo Acordo de

¹ Disponível em: <<https://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/lei/2015/lei-15693-03.03.2015.html>> Acesso em 6 jun 2022.

² Disponível em: <<https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2021/09/30/senado-aprova-inclusao-de-emp-reendedorismo-e-inovacao-no-ensino-basico-e-superior>> Acesso em 6 jun 2022.

Cooperação Técnica entre as Secretarias de Educação Básica - SEB e de Educação Profissional e Tecnológica - Setec do Ministério da Educação e o Sebrae, com o objetivo de trabalhar as competências empreendedoras previstas na BNCC. Os principais temas são Cultura Empreendedora, Projeto de Vida e Mundo do Trabalho, importantes para a implementação do Novo Ensino Médio. A meta prevista pretende a capacitação de cerca de 540 mil professores, em três anos 2021/2024, das redes públicas de ensino.³

O portal Sebrae apresenta robusta disponibilidade de informações sobre o tema, destacando-se algumas propostas de abordagem ao longo dos ciclos fundamental e médio do ensino básico.

Finalmente, é admissível considerar que a definição de diretrizes mais amplas para a educação empreendedora no Brasil ainda demandará algum tempo para se consolidar. O objetivo deste trabalho centra-se na identificação de formas de contribuição da Matemática e suas Tecnologias ao processo. Percebe-se numa avaliação preliminar que esse componente curricular contribuirá nos anos iniciais, como tema transversal, ao desenvolvimento da atitude empreendedora. Nos anos finais do ensino básico, deverá integrar com outras conceituações os instrumentos e ferramentas básicos ao domínio do ambiente de negócios. Espera-se que os fundamentos da matéria ora tratados propiciem aos jovens estudantes em geral uma alternativa de incentivo a esse percurso.

³ Disponível em: <<https://www.gov.br/mec/pt-br/aceso-a-informacao/institucional/secretarias/secretaria-de-educacao-basica/programas-e-acoes/programa-educacao-empreendedora>> Acesso em 6 jun 2022.

Referências

- 1 BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília. Ministério da Educação. 2019. Disponível em <basenacionalcomum.mec.gov.br> Acesso em: 22 jan. 2021
- 2 DANTE, L. R. Matemática: contexto & aplicações. 3v. São Paulo: Ática, 2017.
- 3 GITMAN, L. J., MADURA, J. Administração financeira: uma abordagem gerencial. São Paulo: Addison Wesley, 2003, p. 379.
- 4 LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E., MORGADO, A.C. A matemática do ensino médio. 3v. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- 5 MATHIAS, W. F., GOMES, J. M. Matemática financeira. São Paulo. Editora Atlas, 2009.
- 6 MORGADO, A. C., CARVALHO P. C. P. Matemática discreta. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
- 7 PAIVA, M. Matemática. Ensino médio. 3v. São Paulo: Moderna, 2015.
- 8 ROSSETTI, J. P. Introdução à Economia. São Paulo: Atlas, 2003.
- 9 BANCO CENTRAL DO BRASIL. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>> Acesso em 11 mai 2022.
- 10 BANCO CENTRAL DO BRASIL. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicometas>> Acesso em 5 jun 2022.
- 11 CÂMARA DOS DEPUTADOS. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.camara.leg.br/noticias/814382-educadores-alertam-para-aumento-de-evasao-escolar-durante-a-pandemia/>> Acesso em 29 abr 2022.
- 12 DICIONÁRIO ONLINE DE PORTUGUÊS. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br>> Acesso em 30 abr 2022.
- 13 DICIONÁRIO FINANCEIRO. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.dicionariofinanceiro.com>> Acesso em 10 jun 2022.
- 14 GLOBAL ENTREPRENEURSHIP MONITOR. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://gem-2019-2020-global-report-rev-280520-1590656414.pdf>> Acesso em 5 jun 2022.
- 15 MINISTÉRIO DA ECONOMIA. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.gov.br/economia/pt-br/assuntos/noticias/>> Acesso em 5 jun 2022.

- 16 INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA . c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=downloads>> Acesso em 25 mai 2022.
- 17 INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA . c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/indicadores>> Acesso em 25 mai 2022.
- 18 INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb/resultados/>> Acesso em 29 abr 2022.
- 19 INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. c2022. Página inicial. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/censo_escolar/resultados/2020/apresentacao_coletiva.pdf> Acesso em 29 abr 2022.
- 20 INSTITUTO BRASILEIRO DA QUALIDADE E PRODUTIVIDADE. c2022. Página inicial. Disponível em: <ibqp.org.br/wp-content/uploads/2021/02/Empreendedorismo-no-Brasil-GEM-2019.pdf> Acesso em 5 jun 2022.
- 21 MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. c2022. Página inicial. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/busca-geral/211-noticias/218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil>> Acesso em 5 jun 2022.
- 22 SEBRAE. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/o-que-e-e-como-funciona-o-capital-de-giro,a4c8e8da69133410VgnVCM1000003b74010aRCRD>> Acesso em 11 mai 2022.
- 23 SEBRAE. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/seis-dicas-para-um-fluxo-de-caixa-eficaz,12b8bb13a8d6d410VgnVCM1000003b74010aRCRD>> Acesso em 10 mai 2022.
- 24 SENADO FEDERAL. c2022. Página inicial. Disponível em: <<https://www12.senado.leg.br/noticias/>> Acesso em 5 jun 2022.