Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

RECORRÊNCIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DE PROBLEMAS QUE PODEM SER MODELADOS COM MATERIAL CONCRETO.

Leonardo Oliveira de Pinho

Feira de Santana - Bahia
Julho de 2022

RECORRÊNCIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DE PROBLEMAS QUE PODEM SER MODELADOS COM MATERIAL CONCRETO.

leonardo Oliveira de Pinho

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UEFS como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Araujo Ferreira.

Feira de Santana - Bahia
Julho de 2022

Ficha catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

P723 Pinho, Leonardo Oliveira de

Recorrência: uma abordagem a partir de problemas que podem ser modelados com material concreto / Leonardo Oliveira de Pinho .- Feira de Santana, 2022.

90 f.: il.

Orientador: Maurício Araujo Ferreira

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2022.

1. Recorrência. 2. Progressão aritmética. 3. Resolução de problemas. 3. Contagem. 4. Material concreto. I. Ferreira, Maurício Araújo, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE LEONARDO OLIVEIRA PINHO DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos oito dias do mês de julho de dois mil e vinte e dois, às 14 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com /fha-rbkw-dht, da dissertação apresentada sob o título **"RECORRÊNCIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DE PROBLEMAS QUE PODEM SER MODELADOS COM MATERIAL CONCRETO",** do discente **Leonardo Oliveira Pinho**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Maurício de Araújo Ferreira (Orientador, UEFS), Mirian Silva Santos (IFPA) e Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: aprovado.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 08 de julho de 2022.

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira (Orientador, UEFS)

MIRIAN SILVA SANTOS
Assinado de forma digital por MIRIAN SILVA SANTOS
Dados: 2022.07.30 17:52:27 -03'00'

Prof.ª Ma. Mirian Silva Santos (IFPA)

Fabíola de Oliveira Pedreira

Prof.ª Dra. Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS)

Visto do Coordenador:

À minha família

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado força nos momentos mais difíceis para nunca desistir deste sonho de me tornar Mestre em Matemática, a meu pai Caetano Jose Ferreira de Pinho (In memorian) e minha mãe Antônia Felix de Oliveira por terem se sacrificado durante sua vida para que seus filhos tivessem a possibilidade de estudar e viver melhor, a minhas irmãs Jussara, Jamile, Neildes, Valdelice e Fernanda por terrem sido minhas parceiras nas horas difíceis, a meus irmos Wellington e Gilbernon, por ter me ensinado a ser mais forte, a minha filha Iasmim por ter me ensinado o que é o amar, aos meus avós Corinto (In memorian) e Julia (In memorian), que com seus exemplos de integridade e dignidade me ensinaram lutar por meus objetivos, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Código de Financiamento-001, pelo apoio financeiro e incentivo, a UEFS por acreditar na iniciativa do PROFMAT, ao meu professor Haroldo, por ter me ensinado a organizar melhor as ideias e expressar melhor o pensamento e ao meu orientador Professor Maurício, que me instruiu com conhecimento e momentos de muita aprendizagem, pelas dicas, paciência e apoio que sempre me passou.

"Louvado seja o nome de nosso senhor Jesus Cristo.".

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma proposta para a resolução de alguns problemas de contagem que podem ser modelados através da utilização de material concreto. Para determinar uma expressão matemática que possa servir de modelo matemático para os problemas, utilizamos os conceitos de recorrência linear de primeira e segunda ordem. O método de contagem por recorrência foi escolhido, pois fornece a oportunidade de apresentar os problemas em nível crescente de grau de dificuldade e a incrementação do material concreto pode possibilitar a oportunidade de visualização de aspectos abstratos, assim podendo facilitar o processo de contagem e contribuir para melhorar processo de ensino e aprendizagem. Logo, este material didático pode ser utilizado por professores do segundo ano do ensino médio que queiram utilizar o método de contagem por recorrência e material concreto em suas aulas.
PALAVRAS CHAVE: Resolução de Problemas, Contagem, Recorrência, Material Concreto.

Abstract

In this work we will present a proposal for the resolution of some counting problems that can be modeled through the use of concrete material. To determine a mathematical expression that can serve as a mathematical model for the problems, we use the concepts of first and second order linear recurrence. The recurrence counting method was chosen because it provides the opportunity to present the problems at an increasing level of difficulty and the increment of the concrete material can provide the opportunity to visualize abstract aspects, thus being able to facilitate the counting process and insert students with difficulties in the teaching and learning process. Therefore, this teaching material can be used by second year high school teachers who want to use the recurrence counting method and concrete material in their classes.

KEYWORDS: Problem Solving, Counting, Recurrence, Concrete Material.

Sumário

Introdução

Desde os tempos mais remotos, os seres humanos se deparam com a necessidade de contar para resolver problemas do seu cotidiano, e para resolver tais problemas a humanidade desenvolveu métodos que permite calcular com grande simplicidade a maioria dos problemas. Entretanto, o maior aliado do homem ainda é a sua capacidade de raciocinar e gerar soluções inovadoras.

Nos dias atuais, com o déficit educacional ainda mais acentuado pela pandemia, torna-se mais importante o desenvolvimento e aprimoramento de metodologias que visem atrair a atenção dos alunos, colocá-los como atores principais de construção do conhecimento e que permita desenvolver a maior quantidade de competências e habilidades em um menor intervalo de tempo possível. Então, é evidente a necessidade de propostas que visem exercitar funções cognitivas, desenvolver competências e habilidades e possibilite que os alunos utilizem a matemática para resolver problemas da vida cotidiana.

Neste contexto, uma proposta de uma experiência de resolução de problemas com material concreto, se encaixaria perfeitamente, pois a sua utilização poderá apoiar e aproximar os principais métodos de contagem da realidade cotidiana, e a partir da resolução de cada um dos problemas apresentados neste trabalho, poderemos escolher estrategicamente o material concreto que se adapte a cada necessidade individual que for identificada. Logo, é evidente que tal proposta pode conseguir contribuir para melhorar o processo de ensino aprendizagem e permitir a visualização de aspectos abstratos da matemática, a partir da análise, manipulação e resolução dos problemas com material concreto.

Foi escolhido para tratar aqui nesse trabalho de dissertação de mestrado, o método de contagem por recorrência, pois, isso possibilita presentar os problemas em ordem crescente de complexidade, o que pode contribuir para melhorar a aprendizagem de alunos com níveis distintos de capacidade de raciocínio lógico matemático. Dessa forma, vamos explorar através de alguns problemas o potencial e as vantagens desse método de contagem.

No Capítulo 1, serão apresentados e abordados os conceitos de sequências, recorrências, recorrências lineares de primeira ordem e recorrências homogêneas de segunda ordem, com objetivo de estabelecer leis gerais que possam ser aplicadas em casos particulares dos problemas que sua solução recaiam nos temas abordados.

Iniciaremos o Capítulo 2, com o problema Contando Triângulos, para apresentar o método mais simples de contagem e iniciar a discursão sobre a necessidade de utilizar técnicas que nos permita contar com eficiência. Em seguida, resolveremos o problema Contando com Palitos de Fósforo, com o intuito de apresentar e explorar os conceitos de termos gerais das progressões aritméticas. Logo após, apresentamos e discutimos o problema Contando Estrelas, com o intuito de explorar os conceitos de soma dos termos de progressões aritméticas. Posteriormente, será apresentado, discutido e resolvido o problema Contando Quadrados, com objetivo de apresentar e discutir os conceitos de termo geral e soma dos termos das progressões geométricas. Vamos também analisar e resolver o problema Contando com Cartas de Baralho, com o objetivo de utilizar o princípio indutivo e a partir da análise de casos mais simples, descobrir a fórmula recursiva de primeira ordem e a fórmula posicional que forneça a solução do problema contando com Cartas de Baralho. Para finalizar o Capítulo 2, vamos apresentar e resolver o problema Contando os Coelhos de Fibonacci, com o objetivo de introduzir, analisar e discutir os conceitos de recorrência linear de segunda ordem, como achar sua fórmula recursiva e uma fórmula fechada que forneça seus termos a partir dos dois termos imediatamente anteriores ao termo procurado.

A escrita do Capítulo 3, surge da necessidade de revisitar, exercitar e fixar os temas abordados no capítulo imediatamente anterior. Ele também pode possibilitar a oportunidade do leitor conhecer e ter contato com três jogos historicamente utilizados para desenvolver o intelecto humano, o Jogo de Xadrez, o Jogo do Tangram e o Jogo das Torres de Hanói. Com isso, no Capítulo 3 propomos ao leitor resolver alguns problemas, criados a partir dos jogos matemáticos citados logo acima, por recorrência. O Capítulo 3, vamos inicialmente, apresentar uma pouco da história do jogo de xadrez, em seguida proporemos ao leitor que resolva um problema de construção de seu tabuleiro, que recaí em uma soma dos termos de uma progressão geométrica e um problema de distribuição de oito rainhas no tabuleiro de xadrez de forma que qualquer um delas não esteja em posição de captura em relação a outra rainha. Em seguida apresentamos um pouco da história do Jogo de Tangram, sugerimos ao leitor que tente resolver o problema de construção das sete peças do tangram e apresentamos uma solução. Por fim, vamos apresentar um pouco da história de um famoso jogo, conhecido como jogo das torres de Hanói e em seguida, vamos propor ao leitor com o objetivo de fixar e aprofundar os conceitos de recorrência linear de primeira ordem e de progressões geométricas, que tente resolver o problema do jogo das torres de Hanói e apresentamos uma solução.

Capítulo 1

Recorrência

Neste capítulo será apresentado e abordado os conceitos de sequências, recorrências, recorrências lineares de primeira ordem e recorrências homogêneas de segunda ordem. Com objetivo de estabelecer leis gerais que possam ser aplicadas em casos particulares dos problemas que sua solução recaiam nos temas abordados, também apresentaremos e provaremos alguns teoremas e proposições, a maior parte das demonstrações deste capítulo poderão ser encontrados em [1] , [4] e [2].

1.1 Sequência

Definição 1.1.1. *Chamamos de **sequência infinita** toda função* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa ao número natural* 1 *o número real* x_1*, ao natural* 2 *o real* x_2 *e assim por diante.*

Definição 1.1.2. *Sejam, os conjuntos* $\mathbb{I}_1 = \{1\}$*,* $\mathbb{I}_2 = \{1, 2\}$*,* $\mathbb{I}_3 = \{1, 2, 3\}$*, ...,* $\mathbb{I}_n = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n-1, n\}$*. Então, uma **sequência finita** é toda função* $F : \mathbb{I}_n \to \mathbb{R}$*, que associa o natural* 1 *ao real* x_1*, o natural* 2 *ao real* x_2*, ..., até associar o natural* n *ao real* x_n*.*

Um sequência também pode ser entendida como uma lista ordenada de elementos $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. Caso essa lista contenha uma quantidade finita de elementos, dizemos que a sequência é finita e caso contrário dizemos que a sequência é infinita.

Observação 1.1.1. *A partir da definição, podemos notar que uma sequência fica caracterizada pela propriedade em comum que seus elementos compartilham, pela ordem que cada elemento está acontecendo e pela frequência de seus elementos.*

Exemplo 1.1.1. *Uma sequência pode ser apresentada das sequintes formas:*

- *Uma proposição. Por exemplo: a sequência dos números naturais impares* $S = (1, 3, 5, 7, \ldots)$.
- *Uma expressão matemática que fornece os termos da sequencia em função de sua poisção(fórmula posicional). Por exemplo: a sequência* $S = (2n + 1)$, *com* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- *Uma relação de recorrência. Neste caso, dados os termos iniciais cada termo é encontrado a partir do(s) termo(s) imediatamente(s) anterior(es). Por exemplo: a sequência de primeiro termo* $s_1 = 1$ *e* $s_n = s_{n-1} + 2$, *é dada por* $S = (1, 3, 5, \ldots)$.

Observação 1.1.2. *Algumas vezes surge a necessidade de definir a sequência a partir do zero, isto é,* $S : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$. *Nestes casos o primeiro termo passaria a ser* s_0, *o segundo* s_1 *e assim sucessivamente.*

Definição 1.1.3. *Chamamos de sequência não decrescente, toda sequência* $S = (x_k)$ *com* $k \in \mathbb{N}$ *ou* $k \in \mathbb{I}_n$, *tal que se* $i < j$, *então* $x_i \leq x_j$, *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$ *ou* $i, j \in \mathbb{I}_n$.

Exemplo 1.1.2. *A sequencia* $F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)$ *é não decrescente.*

Definição 1.1.4. *Chamamos de sequência não crescente, toda sequência* $S = (x_k)$ *com* $k \in \mathbb{N}$ *ou* $k \in \mathbb{I}_n$, *tal que se* $i < j$, *então* $x_i \geq x_j$, *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$ *ou* $i, j \in \mathbb{I}_n$.

Exemplo 1.1.3. *A sequencia* $Z = (35, 35, 30, 30, 25, 25, 20, 20)$ *é não crescente.*

Definição 1.1.5. *Chamamos de sequência decrescente, toda sequência* $S = (x_k)$ *com* $k \in \mathbb{N}$ *ou* $k \in \mathbb{I}_n$, *tal que se* $i < j$, *então* $x_i > x_j$, *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$ *ou* $i, j \in \mathbb{I}_n$.

Exemplo 1.1.4. *A sequência* $W = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots)$, *é decrescente.*

Definição 1.1.6. *Chamamos de sequência crescente, toda sequência* $S = (x_k)$ *com* $k \in \mathbb{N}$ *ou* $k \in \mathbb{I}_n$, *tal que se* $i < j$, *então* $x_i < x_j$, *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$ *ou* $i, j \in \mathbb{I}_n$.

Exemplo 1.1.5. *A sequencia* $Y = (1, 3, 7, 15, 31, 63, ...)$ *é crescente.*

1.2 Recorrência

Definição 1.2.1. *Chamamos de recorrência o método que nos permite definir os termos de uma sequência a partir do(s) termo(s) imediatamente(s) anterior(es) ao termo procurado.*

Exemplo 1.2.1. *Vamos analisar alguns exemplos:*

- *Seja* $s_n = 2s_{n-1} + 1$, *com* $s_1 = 1$, *então a sequência é dada por* $S = (1, 3, 7, 15, \ldots)$.

- *A sequência de Fibonacci cujos termos são* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ *é definida recursivamente pela fórmula* $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, *com* $f_1 = 1$ *e* $f_2 = 1$.

- *Considerando a sequência* Z *definida por* $z_{n+2} = z_{n+1} + 2z_n$, *com* $z_1 = 2$ *e* $z_2 = 3$, *então* Z *é igual a* $(2, 3, 7, 13, 27, \ldots)$.

Uma fórmula recursiva define infinitas sequências, porém quando fixamos o(s) primeiro(s) termo(s) essa fórmula recursiva define uma única sequência. Como veremos no exemplo logo abaixo.

Exemplo 1.2.2. *A fórmula recursiva* $s_n = s_{n-1} + 2$, *com* $n \in \mathbb{N}$, *pode representar a sequência dos naturais pares caso* $s_1 = 0$, *a sequência dos números impares casos* $s_1 = 1$, *ou outra sequência que depende do valor de* s_1.

1.3 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Definição 1.3.1. *Uma recorrência de primeira ordem expressa o enésimo termos* s_n *em função do termo imediatamente anterior* s_{n-1}.

Definição 1.3.2. *Uma recorrência é dita linear quando a função que expressa seu termo a partir do anterior for do primeiro grau.*

Definição 1.3.3. *Uma recorrência é dita homogênea quando não possui termos independentes de* s_n.

Exemplo 1.3.1. *As recorrências* $s_{n+1} = 3s_n + n^3$ *é de primeira ordem, linear e não homogênea. Pois* s_{n+1} *está sendo expresso em função de* s_n, *a função que relaciona seus termos é de primeiro grau em* s_n *e possui termo* n^3 *independente de* s_n.

Exemplo 1.3.2. *A recorrência* $s_{n+1} = ns_n$, *é linear de primeira ordem e homogênea. Pois cada termo pode ser expressado a partir do termo imediatamente anterior, a função que relaciona cada termo com o anterior é de primeiro grau e não possui termos independentes de* s_n.

Exemplo 1.3.3. *A recorrência* $s_{n+1} = s_n^3$ *é de primeira ordem , não linear e homogênea. Pois, cada termo pode ser expresso a partir do termo imediatamente anterior, a função que relaciona o termo com o anterior não é de primeiro grau e não possui termo independente de* s_n.

1.3.1 Progressões Aritméticas

Definição 1.3.4. *Uma sequência é uma progressão aritmética (PA) se existir um número real r tal que a recorrência*

$$s_{n+1} = s_n + r. \tag{1.1}$$

seja satisfeita para todo natural n.

Na Definição 1.3.4, chamamos o número real r de razão da PA, observe que a razão r pode ser encontrada fazendo-se a subtração entre dois termos consecutivos $r = s_{n+1} - s_n$. Conhecendo a razão da PA, ela fica totalmente definida quando conhecemos também seu primeiro termo s_1.

As duas Proposições 1.3.1 e 1.3.2, apresentadas logo a seguir, são de suma importância para o estudo das progressões aritméticas; em particular, ensina como obter uma fórmula posicional e como obter a soma dos termos de uma PA.

Proposição 1.3.1. *Se $(s_n)_{n>0}$ com $n \in \mathbb{N}$ é uma PA de razão r, então*

$$s_n = s_1 + (n-1)r. \tag{1.2}$$

PROVA. Seja a sequência $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, com $s_1 \in \mathbb{R}$ e $s_{(n+1)} = s_n + r$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$. Logo , temos

$$\begin{gathered} s_1 = s_1 \\ s_2 = s_1 + r \\ s_3 = s_2 + r \\ s_4 = s_3 + r \\ \vdots \\ s_{n-1} = s_{n-2} + r \\ s_n = s_{n-1} + r. \end{gathered}$$

Adicionando os termos em ambos os membro da igualdade acima, temos que

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = s_1 + (s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}) + (n-1) \cdot r.$$

Portanto, cancelando os termos em comum em ambos os membros da igualdade acima, temos

$$s_n = s_1 + (n-1) \cdot r.$$

Proposição 1.3.2. *Se t_n representa a soma dos n primeiros termos de uma P.A $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ de primeiro termo s_1 e enésimo termo s_n com $n \in \mathbb{N}$, então*

$$t_n = \frac{(s_1 + s_n)n}{2}. \tag{1.3}$$

PROVA. Como t_n representa a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética, temos

$$t_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n.$$

Escrevendo essa soma de traz para frente, segue que

$$t_n = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + \ldots + s_1.$$

Dobrando t_n e ajustando convenientemente os termos, temos

$$2t_n = (s_1 + s_n) + (s_2 + s_{n-1}) + (s_3 + s_{n-2}) + \ldots + (s_{n-1} + s_2) + (s_n + s_1).$$

Observando que, ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta r e a segunda diminui r. Logo, todos os parênteses são iguais a $(s_1 + s_n)$. Como são n parênteses, temos

$$2t_n = (s_1 + s_n)n.$$

Portanto,

$$t_n = n\frac{(s_1 + s_n)}{2}.$$

1.3.2 Progressões Geométricas

Definição 1.3.5. *Uma sequência de números $S = (s_n)_{n>0}$ com s_n diferente de zero e $n \in \mathbb{N}$ é uma progressão geométrica **(PG)**, se existir o real $q \neq 0$, tal que a recorrência*

$$s_{n+1} = s_n q \tag{1.4}$$

seja satisfeita para todo natural $n > 0$.

Assim como nos nossos estudos sobre progressões aritméticas, o real q que aparece na definição de PG é sua razão, que pode ser encontrada fazendo a divisão entre dois termos consecutivos $q = \frac{s_{n+1}}{s_n}$, com s_n diferente de zero. Também como em nossos estudos de progressões aritméticas uma PG só estará completamente definida, se estiver determinado o primeiro termo da PG s_1 e sua razão q.

Os próximos dois resultados mostram duas propriedades de suma importância de uma PG; em particular, ensina como obter uma formula fechada e como obter a soma dos termos de uma PG.

Proposição 1.3.3. *Se $(s_n)_{n>0}$ com $n \in \mathbb{N}$ é uma PG de razão q, então*

$$s_n = s_1 q^{n-1}, \tag{1.5}$$

para $n > 0$.

PROVA. Seja a sequência $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $s_{n+1} = s_n.q$, com $s_1 \in \mathbb{R}$ e diferente de zero, $q \in \mathbb{R}$ e diferente se zero, $n \in \mathbf{N}$, com $n > 0$. Então, segue que

$$\begin{gathered} s_1 = s_1 \\ s_2 = s_1 \cdot q \\ s_3 = s_2 \cdot q \\ \vdots \\ s_{n-1} = s_{n-2} \cdot q \\ s_n = s_{n-1} \cdot q. \end{gathered}$$

Multiplicando os termos em ambos os membros das igualdades acima, temos

$$s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdots s_{n-1} \cdot s_n = s_1 (s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdots s_{n-1}) \cdot q^{n-1}.$$

Portanto, como todos os termos são diferente de zero, cancelando os termos em comum em ambos os membros da igualdade, temos

$$s_n = s_1 \cdot q^{n-1}.$$

Proposição 1.3.4. *Se* $(s_n)_{n>0})$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *é uma PG de razão* q *diferente de zero e* t_n *representa a soma dos seus* n *primeiros termos, então*

$$t_n = s_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.6}$$

PROVA. Como t_n representa a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica, temos

$$t_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por q, segue que

$$qt_n = q(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n)$$

$$qt_n = q(s_1) + q(s_2) + q(s_3) + q(s_4) + \ldots + q(s_{n-1}) + q(s_n)$$

$$qt_n = s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n + s_{n+1}.$$

Logo, como $(q-1)t_n = qt_n - t_n$, temos que

$$(q-1)t_n = (s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n + s_{n+1}) - (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n)$$

Assim, temos

$$(q-1)t_n = (s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n) + s_{n+1} - s_1 - (s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n)$$

Com isso, segue que

$$(q-1)t_n = s_{n+1} - s_1.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $(q-1)$ temos

$$t_n = \frac{s_{n+1} - s_1}{(q-1)}.$$

Portanto, colocando s_1 em evidência

$$t_n = s_1 \frac{q^n - 1}{(q-1)}.$$

1.3.3 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

Definição 1.3.6. *Como foi visto nas Definições 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.3, chamamos de recorrência linear de primeira ordem **homogênea**, toda recorrência, tal que*

$$x_{n+1} = g(n)x_n \tag{1.7}$$

com $g(n)$ função dos naturais nos reais não nula e x_n não nulo.

Exemplo 1.3.4. *Encontre uma fórmula fechada (posicional) para recorrência $x_n = (n-1)\cdot x_{n-1}$, com $x_1 = 1$.*

Solução. Temos

$$x_2 = 1x_1$$

$$x_3 = 2x_2$$

$$x_4 = 3x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = (n-1)x_{n-1}.$$

Logo, multiplicando ambos os membros das igualdades acima, obtemos

$$x_n = (n-1)!x_1$$

. Como $x_1 = 1$, temos $x_n = (n-1)!$.

1.3.4 Recorrências de Primeira Ordem não Homogêneas

Definição 1.3.7. *Chamamos de recorrência linear de primeira ordem **não homogênea**, todas as recorrências que são expressas na forma*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + f(n), \tag{1.8}$$

sendo $g(n)$ e $f(n)$ funções que leva os naturais nos reais e não nulas.

Proposição 1.3.5. *Seja a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$. Se $g(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

PROVA.

Se $g(n) = 1$ e $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$, então $x_{n+1} = x_n + f(n)$, dai

$$x_1 = x_0 + f(0)$$

$$x_2 = x_1 + f(1)$$

$$x_3 = x_2 + f(2)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = x_{n-2} + f(n-2)$$

$$x_n = x_{n-1} + f(n-1).$$

Somando termo a termos nas equações em ambos os membros das igualdades, temos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = (x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1).$$

Cancelando os termos semelhantes em ambos os membros da igualdade, temos o que segue

$$x_n = x_0 + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1).$$

Ou seja,

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Exemplo 1.3.5. *Encontre uma fórmula posicional para recorrência* $x_{n+1} = x_n + 3^n$*, com* $x_0 = 1$.

Solução. Se $x_{n+1} = x_n + 3^n$ e $x_0 = 1$, aplicando a Proposição 1.3.5, temos que

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{n-1}) \\ &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} \\ &= 1\frac{3^n - 1}{3 - 1} \end{aligned}$$

Logo, a solução procurada é a sequência

$$= \frac{3^n - 1}{2}.$$

A Proposição 1.3.5 nos mostra como encontrar uma solução (fórmula posicional), para recorrênias lineares de primeira ordem não homogêneas quando a função $g(x) = 1$, o Teorema 1.3.1 vai nos servir como uma excelente ferramenta para resovermos as recorrencias lineares de primeira ordem não homogêneas, quando $g(x) \neq 0$.

Teorema 1.3.1. *Se a_n é uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot x_n}.$$

Prova. A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$$

em

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Porém, $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois (a_n) é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Portanto, a equação se transforma em,

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n),$$

ou seja

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

Exemplo 1.3.6. *Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1, x_1 = 1$.*

Solução. Primeiro encontraremos uma solução para a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$. Logo, temos que

$$\begin{gathered} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = 2x_3 \\ \vdots \\ x_n = 2x_{n-1}. \end{gathered}$$

Multiplicando os termos em ambos os membros das igualdades acima e cancelando os termos semelhantes em ambos os membros da igualdade, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$, como $x_1 = 1$, então

$x_n = 2^{n-1}$.

Como $x_n = 2^{n-1}$ é uma solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$, com $x_1 = 1$, fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$, obtemos $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$.

$$y_2 = y_1 + 2^{-1}$$

$$y_3 = y_2 + 2^{-2}$$

$$y_4 = y_3 + 2^{-3}$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}.$$

Somando, temos

$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-(n-1)}.$$

$$= y_1 - 2^{1-n} + 1.$$

Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ com $x_1 = 1$, temos $y_1 = 1$ e $y_n = 2 - 2^{1-n}$. Portanto,

$$x_n = 2^n - 1.$$

1.4 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Definição 1.4.1. *Chamamos de recorrência linear de segunda ordem, toda recorrência do tipo*

$$x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n)$$

com $g(n), f(n)$ e $g(n)$ funções que transformam números naturais em números reais e $g(n)$ diferente de zero, pois caso contrário a recorrência seria de primeira ordem.

Exemplo 1.4.1. *A recorrência $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n + n + 3^n$ é linear é de segunda ordem, pois cada termo pode ser encontrado a partir dos dois termos imediatamente anterior ao termo procurado.*

1.4.1 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

Definição 1.4.2. *Uma recorrência linear de segunda ordem* $x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n)$ *é chamada homogênea, quando* $h(n) = 0$, *Ou seja,*

$$x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.4.1. *Trataremos neste trabalho apenas das recorrências lineares de segunda ordem homgêneas com coeficientes constantes, ou seja, as que possuem a forma*

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$$

com $n \in \mathbb{N}$ *e* $b \neq 0$.

Observação 1.4.2. *Para cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma acima, podemos associar uma equação do segundo grau,* $x^2 + ax + b = 0$, *chamada de equação característica. Observe que como* $b \neq 0$, *então 0 não é uma raiz da equação característica.*

Exemplo 1.4.2. *A recorrência* $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$, *tem* $a = -4$ *e* $b = 3$, *dai como visto na Observação (1.4.2) a equação característica é* $x^2 - 4x + 3 = 0$. *As raízes da equação características são* $r_1 = 3$ *e* $r_2 = 1$.

O teorema a presentado logo a seguir mostra que se r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, são raízes da equação característica, então qualquer sequência da forma $d_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores de C_1 e C_2 constantes reais.

Teorema 1.4.1. *Se as raízes de* $x^2 + ax + b = 0$ *são* r_1 *e* r_2, *então* $d_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, *quaisquer que sejam* C_1 *e* C_2 *constantes reais.*

Prova. Substituindo $d_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ e ajustando convenientemente os termos, obtemos,

$$C_1r_1^n(r_1^2 + ar_1 + b) + C_2r_2^n(r_2^2 + ar_2 + b)$$

$$= C_1r_1^n0 + C_2r_2^n0 = 0.$$

Teorema 1.4.2. *Se as raízes de $x^2 + ax + b = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ são da forma $d_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes reais.*

Prova. Seja d_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, vamos determinar as constantes C_1 e C_1 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = d_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = d_2 \end{cases}.$$

Como $r_1 \neq r_2$, com $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$, pois $b \neq 0$, então

$$C_1 = \frac{r_2^2 d_1 - r_2 d_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \ e \ C_2 = \frac{r_1 d_2 - r_1^2 d_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Agora tomando $z_n = d_n - (C_1 r_1^n + C_2 r_2^n)$, temos

$$z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n = (d_{n+2} + ad_{n+1} + bd_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + ar_1 + b) - C_2 r_2^n (r_2^2 + ar_2 + b).$$

Como d_n é uma solução de $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, então $(d_{n+2} + ad_{n+1} + bd_n) = 0$ e como r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + ar + b = 0$, segue que

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + ar_1 + b) = 0, \quad C_2 r_2^n (r_2^2 + ar_2 + b) = 0.$$

Logo,

$$z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n = 0$$

como

$$C_1 r_1 + C_2 r_2 = d_1, \quad C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = d_2,$$

então $z_1 = z_2 = 0$.
Daí, como $z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo natural n, ou seja

$$0 = d_n - (C_1 r_1^n + C_2 r_2^n).$$

Portanto,

$$d_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$

Exemplo 1.4.3. *Encontre uma formula fechada para recorrência $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$, com $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.*

Solução. Como a equação característica é $x^2 - 4x + 3 = 0$ e as raízes da equação características são $r_1 = 3$ e $r_2 = 1$. Dai,

$$x_n = C_1 3^n + C_2 1^n.$$

Vamos utilizar $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, para determinar C_1 e C_2. Daí

$$\begin{cases} 3C_1 + C_2 = 0 \\ 9C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $C_1 = \frac{1}{6}$ e $C_2 = -\frac{1}{2}$. Portanto, $x_n = \frac{3^{n-1}-1}{2}$.

Teorema 1.4.3. *Se as raízes de $x^2 + ax + b = 0$ são $r_1 = r_2 = r$, , então $d_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$ é uma solução da recorrência*

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$$

com C_1 e C_1 constantes reais.

Prova. Como as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ são $r_1 = r_2 = r$, então $2r = -a$. Substituindo $d_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$, na recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, e agrupando convenientemente os termos, obtemos

$$C_1 r^n(r^2 + ar_1 + b) + C_2 nr^n(r^2 + ar_2 + b) + C_2 rr^n(2r + a)$$

$$= C_1 r^n 0 + C_2 nr^n 0 + C_2 rr^n 0 = 0.$$

Teorema 1.4.4. *Se as raízes de $x^2 + ax + b = 0$ são $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ são da forma $d_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$, com C_1 e C_1 constantes reais.*

Prova.

Seja d_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, vamos determinar as constantes C_1 e C_1 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 r = d_1 \\ C_1 r^2 + 2C_2 r^2 = d_2 \end{cases}.$$

Como $r_1 = r_2 = r$, com $r \neq 0$, então

$$C_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \text{ e } C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

Agora tomando

$$z_n = d_n - (C_1 r^n + C_2 n r^n)$$

obtemos

$$z_{n+2}+az_{n+1}+bz_n = (d_{n+2}+ad_{n+1}+bd_n)-C_1r^n(r^2+ar+b)-C_2nr^n(r^2+ar+b)-C_2rr^n(2r+a).$$

Como d_n é uma solução de $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, então

$$(d_{n+2} + ad_{n+1} + bd_n) = 0$$

como r é raíz da equação $r^2 + ar + b = 0$, então

$$C_1 r^n(r^2 + ar + b) = 0 \text{e} C_2 n r^n(r^2 + ar + b) = 0$$

e $2r = -a$, então $C_2 r r^n(2r + a) = 0$. Então $z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n = 0$ e como

$$C_1 r + C_2 r = d_1, \quad C_1 r^2 + 2C_2 r^2 = d_2,$$

então $z_1 = z_2 = 0$. Então, como $z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, logo $z_n = 0$ para todo natural n.
Portanto,

$$0 = d_n - (C_1 r^n + nC_2 r^n)$$

$$d_n = C_1 r^n + C_2 n r^n.$$

Exemplo 1.4.4. *Seja a recorrência $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$, encontre uma fórmula fechada.*

Solução. Como a equação característica é $x^2 - 6x + 9 = 0$, tem raízes $r_1 = r_2 = 3$, concluimos que a solução da recorrência é $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$.

1.4.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Não Homogêneas

Definição 1.4.3. *Chamamos de recorrência linear de segunda ordem não homogênea, toda recorrência que pode ser escrita da seguinte forma*

$$x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n),$$

com n natural, $g(n) \neq 0$ e $h(n) \neq 0$.

O Teorema 1.4.5 a seguir nos fornece um método para resolver algumas recorrências não homogêneas de coeficientes constantes.

Teorema 1.4.5. *Se d_n é uma solução da equação $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = h(n)$, então a substituição $x_n = d_n + y_n$ transforma a equação em*

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0.$$

Prova. Substituindo x_n por $d_n + y_n$ na equação, temos o que segue logo abaixo

$$(d_{n+2} + ad_{n+1} + bd_n) + (y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n) = h(n).$$

Porém, $d_{n+2} + ad_{n+1} + bd_n = h(n)$, pois d_n é solução da equação $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = h(n)$. Portanto, a equação se transforma em

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0.$$

Observação 1.4.3. *De acordo com o Teorema 1.4.5 logo acima, a solução de uma recorrência não homogênea é constituída de duas partes: uma solução qualquer da não homogênea e a solução da homogênea. A solução da homogênea já aprendemos a achar e uma solução da não homogênea procuraremos por tentativa e erro.*

Capítulo 2

Resolvendo Problemas de Contagem por Recorrência

Durante a procura de relações entre certas experiências, os indivíduos descobrem as leis e regras que governam certos fenômenos. Os indivíduos, que trabalham em baixo nível, não serão mais escravos do 'acaso' e 'sorte' quando forem capazes de perceber, identificar e utilizar padrões, para prever o inevitável ou predizer o provável [8]. No Capítulo 1, utilizamos o **raciocínio dedutivo** e construímos um conjunto de definições, teoremas e proposições para gerar regras gerais que podem ser aplicadas às situações particulares. Neste Capítulo 2, vamos partir do sentido oposto e (sempre que for possível) utilizar o **raciocínio indutivo** para encontrar leis matemáticas para resolução dos problemas, a partir de uma quantidade de exemplos específicos.

Nesta perspectiva, os problemas apresentados são de muita utilidade, pois, o processo de sua resolução nos remete a percebermos regularidades e estabelecer relações de primeira e segunda ordem entre elementos consecutivos de sequências. Os problemas são da área da matemática especificada como contagem, e suas soluções utilizarão o método de contagem por recorrência.

O leitor encontrará neste capítulo um conjunto de problemas de contagem e suas soluções apresentadas em ordem crescente de dificuldade. Tentamos estruturar as resoluções dos problemas de forma que não requeiram conhecimento profundo de matemática para sua compreensão, requerendo apenas um pouco de capacidade de organizar o pensamento e um pouco de raciocínio lógico.

2.1 Contando Triângulos

Contar coisas é algo antigo e comum para a humanidade, entretanto, ao longo do tempo, as ideias foram evoluindo e novas técnicas surgiram para auxiliar nas resoluções dos mais diversos problemas de contagem que a humanidade se deparou. A técnica mais simples e utilizada para contar é a contagem casos por casos; como veremos no Problema 2.1.1, apresentado logo abaixo.

Problema 2.1.1. *Neildes resolveu brincar com sua sobrinha Sofia de identificar e contar triângulos equiláteros. Para iniciar a brincadeira, Neildes, forneceu cinco folhas de papel A4, com o desenho de uma malha triangular equilátera de lado três, composta por triângulos equiláteros unitários de lado um, como na Figura 2.1.*

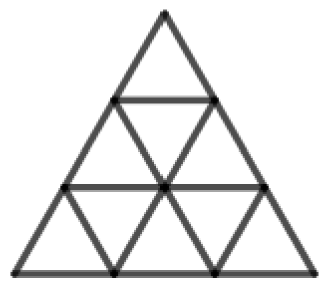

Figura 2.1: Malha triangular de lado medindo 3.

Neildes também forneceu para Sofia uma caixa de lápis com doze cores, e solicitou a Sofia que:

a) pintasse de cores distintas e contasse todos os triângulos equiláteros de lado unitário, como os da Figura 2.2.

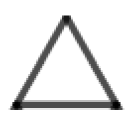

Figura 2.2: Triângulo unitário.

b) pintasse de vermelho e contasse todos os triângulos equiláteros de lado 2 como o da Figura 2.3.

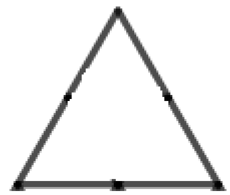

Figura 2.3: Triângulo equilátero de lado medindo 2.

c) pintasse de verde e contasse todos os possíveis triângulos equiláteros de lado 3, como os da Figura 2.4.

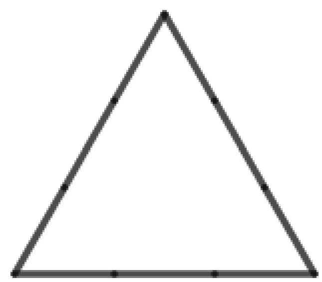

Figura 2.4: Triângulo equilátero de lado 3.

d) determinasse a quantidade de triângulos equiláteros que é possível identificar nessa malha triangular da Figura 2.1.

Solução letra a. Se q_1 representa a quantidade de triângulos de lados unitários, então, colorindo com cores distintas todos os triângulos equiláteros de lados unitários como na Figura 2.5.

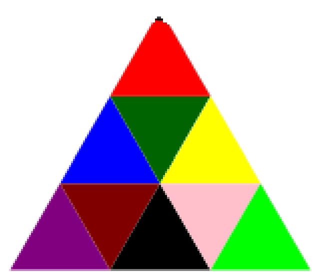

Figura 2.5: Triângulos de lados unitários.

Podemos associar ao triângulo unitário destacado em vermelho, o natural 1, associar ao triângulo unitário destacado em azul, o natural 2, ao triângulo destacado em verde escuro o natural 3, ao triângulo destacado em amarelo o natural 4, ao triângulo destacado em roxo o natural 5, ao triângulo destacado em marrom ,o natural 6, ao triângulo destacado em preto o natural 7, ao triângulo destacado em rosa o natural 8 e ao triângulo destacado em verde claro o natural 9, para perceber que a quantidade de triângulos unitários que podem ser formados nessa malha triangular é $q_1 = 9$.

Solução letra b. Seja q_2 a quantidade de triângulos de lados medindo 2. Então, por exemplo, colorindo os possíveis triângulos de lado 2 com a cor vermelha como nas Figuras 2.6, 2.7 e 2.8.

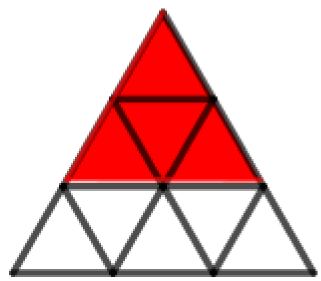

Figura 2.6: Primeiro triângulo de lado dois.

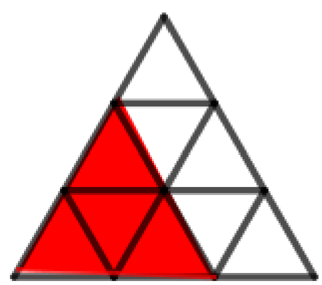

Figura 2.7: Segundo triângulo de lado dois.

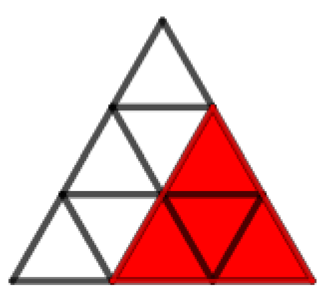

Figura 2.8: Terceiro triângulo de lado dois.

Portanto, podemos contar de um em um e associar ao triângulo da Figura 2.6 ao natural 1, ao triângulo da Figura 2.7, ao natural 2, ao triângulo da Figura 2.8 ao natural 3, para perceber que $q_2 = 3$.

Observação 2.1.1. *Neste caso Sofia precisa de três folhas, para colorir separadamente os três triânguos de lados medindo dois, que são possíveis de formar.*

Solução letra c. Se q_3 representar a quantidade de triângulos com lados medindo 3. Então, colorindo de verde como na Figura 2.9.

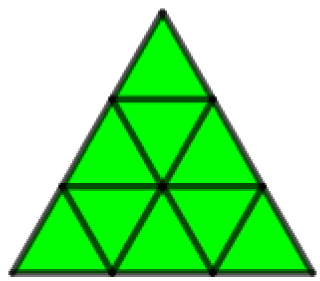

Figura 2.9: Triângulo de lado medindo 3.

Podemos, associar o triângulo de verde ao natural 1, e chegar a conclusão que $q_3 = 1$.

Solução letra d. Para finalizar, precisamos apenas adicionar a quantidade de triângulos de lado 1, com a quantidade de triângulos de lado 2, com a quantidade de triângulos de lado 3. Portanto, temos que, se T_3 representa a quantidade de triângulos procurados então

$$T_3 = q_1 + q_2 + q_3 = 9 + 3 + 1 = 13.$$

Essa técnica nem sempre é eficiente para resolver problemas mais complexos, por esse motivo, nas próximas seções desse capítulo vamos utilizar alguns problemas centrais para explorar o método de contagem por recorrência e desenvolver algumas técnicas para nos auxíliar.

2.2 Contando Palitos de Fósforos

Problema 2.2.1. *Iasmim resolveu construir triângulos utilizando palitos de fósforos, as três primeiras construções estão feitas conforme o modelo apresentado na Figura 2.10 apresentada logo abaixo.*

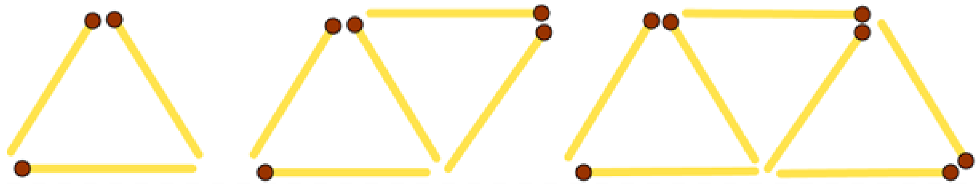

Figura 2.10: Triângulos construídos com palitos de fósforos.

Se Iasmim continuar construindo triângulos com palitos de fósforos seguindo o mesmo padrão de construção das três primeiras figuras, determine:

a) a quantidade de palitos necessários para formar a quarta figura.

b) a quantidade de palítos necessários para formar a vigésima figura.

c) a quantidade de palitos necessários para formar a milésima figura.

d) uma fórmula fechada que forneça a quantidade de palitos necessários para formar qualquer figura que desejarmos, em função de sua posição.

Solução letra a. Vamos inicialmente analisar e contar a quantidade de palitos necessários para foram a construção representada na primeira das três figuras. Seja a_1 a quantidade de palitos necessários para formar a primeira figura, então, como podemos contar na imagem apresentada na Figura 2.11, temos que $a_1 = 3$ palitos.

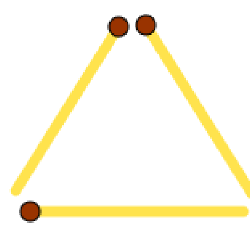

Figura 2.11: Primeira construção.

Vamos analisar e contar a quantidade de palitos que foram utilizados para formar a construção representada na segunda figura. Seja a_2 a quantidade de palitos necessários para formar a construção representada na segunda figura. Então, para formar a construção, precisamos formar a primeira figura e adicionar 2 palitos destacados em vermelho, como podemos perceber na Figura 2.12.

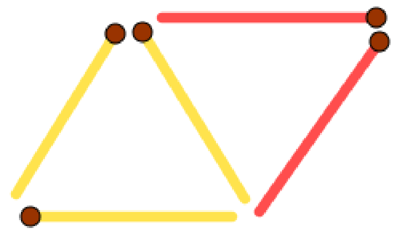

Figura 2.12: Segunda construção.

Logo,

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_2 = 3 + 2 = 5.$$

Agora, vamos analisar a terceira representação da constução de Iasmim e contar a quantidade de palitos que foram utilizados para formar está construção. Seja a_3 a quantidade de palitos da terceira construção. Então, para formar a terceira construção basta formar a segunda construção e adicionar dois palitos (destacados em vermelho), como está representado na Figura 2.13.

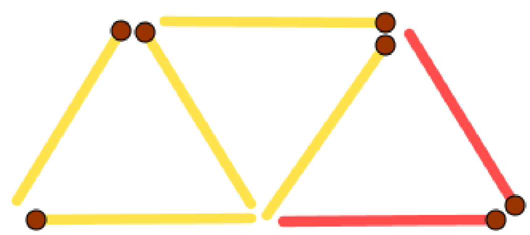

Figura 2.13: Terceira construção.

Portanto,

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_3 = 5 + 2 = 7.$$

Para finalizar, a partir da análise das figuras apresentadas anteriormente, podemos perceber que o padrão para passar de cada figura para a seguinte é adicionar dois palitos como faremos na Figura 2.36.

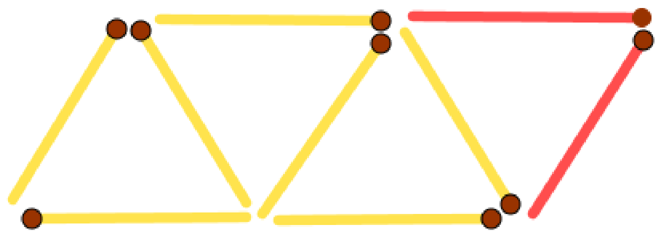

Figura 2.14: Quarta construção.

Portanto, se a_4 representa a quantidade de palitos necessários para formar a quarta construção, então

$$a_4 = a_3 + 2$$

$$a_4 = 7 + 2 = 9.$$

Solução letra b. Analisando um pouco mais, podemos notar que para passar da primeira construção para a segunda precisamos adicionar dois palitos, para passar da primeira construção para a terceira precisamos adicionar dois grupos de dois palitos, para passar da primeira figura para a quarta precisamos adicionar 3 grupos de dois palitos como mostra as Figuras 2.15, 2.16 e 2.17.

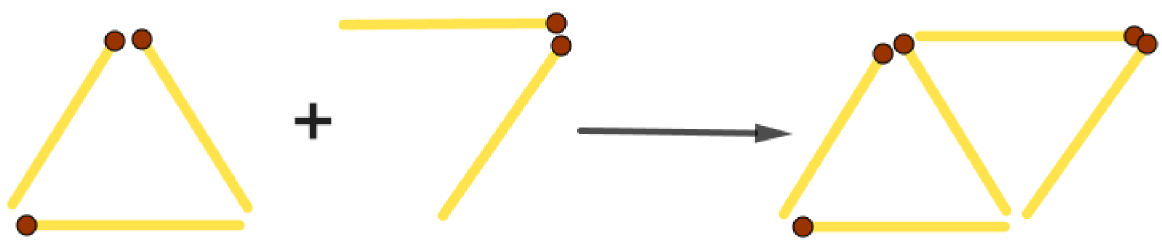

Figura 2.15: Passagem da primeira para segunda construção.

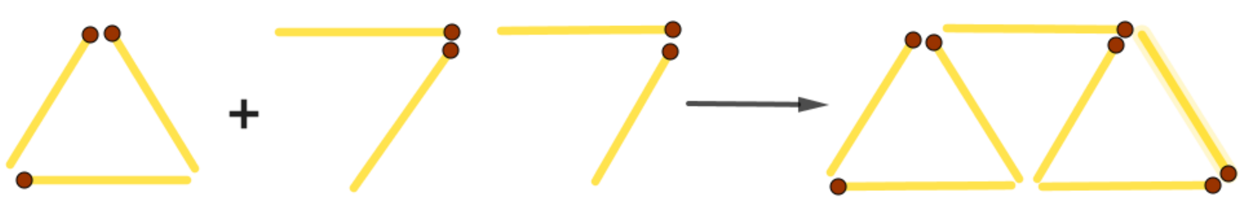

Figura 2.16: Passagem da primeira para terceira construção.

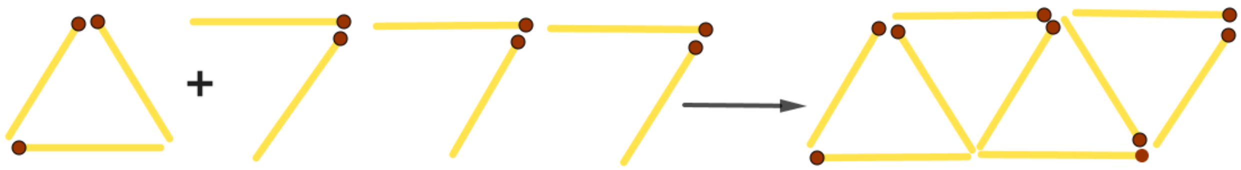

Figura 2.17: passagem da primeira construção para quarta construção.

Então, se a_{20} representa a quantidade de palitos necessários para formar a vigésima construção e o padrão de construção for mantido,para fazer a vigésima construção precisamos da primeira construção e de 19 grupos de 2 palitos, como na Figura 2.18.

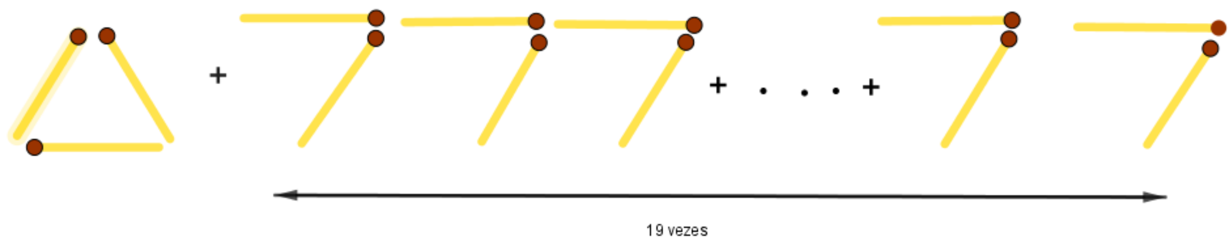

Figura 2.18: Construção da vigésima figura partindo da primeira figura.

Portanto,

$$a_{20} = 3 + 19 \cdot 2$$

$$a_{20} = 3 + 38$$

$$a_{20} = 41.$$

Solução letra c. Agora, se a_{1000} representa a quantidade de palitos necessários para formar a milésima construção, como na Figura 2.19.

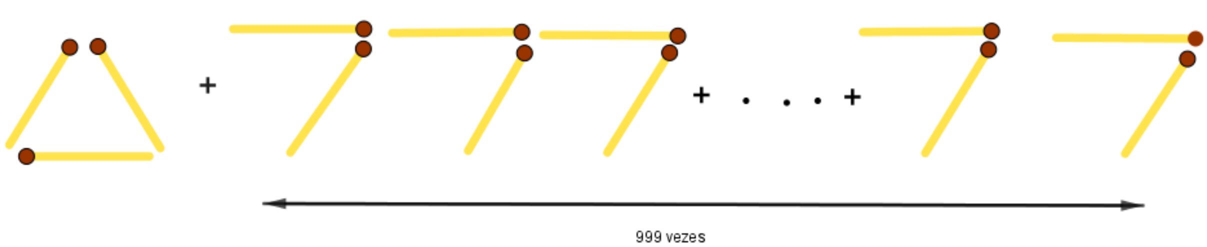

Figura 2.19: Passagem da primeira construção para milésima.

$$a_{1000} = 3 + 999 \cdot 2$$

$$a_{1000} = 3 + 1998$$

$$a_{1000} = 2001.$$

Solução letra d. Então, se a_n representa a quantidade de palitos necessários para formar a enésima construção e o padrão de construção for mantido, temos

$$a_1 = 3$$

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 2$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = 2.$$

Portanto, somando todos os termos em ambos os membros das igualdades acima, temos

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2. \tag{2.1}$$

Observação 2.2.1. *Como visto na Definição 1.3.2, uma sequência é uma progressão aritmética, se cada termo é encontrado a partir do termo imediatamente anterior adicionando-se um valor real constante r chamado de razão. Logo, a sequência da quantidade de palitos necessários para formar as construções dos triângulos com palitos de fósforos montada por Iasmim é uma progressão aritmética de razão $r = 2$ e primeiro termo $a_1 = 3$.*

Observação 2.2.2. *De um modo geral, se a_n representa o enésimo termo de uma progressão aritmética de primeiro termo a_1 e razão r, então $a_n = a_1 + (n-1)r$ como provado na Proposição 1.3.1.*

2.3 Contando Estrelas

Carl Friedrich Gauss, foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos, nasceu em Brunswick em 1777, e morreu em 1855 ainda na Alemanha. Quando Gauss tinha sete anos de idade, seu professor de matemática, mandou que seus alunos somassem todos os números naturais de 01 a 100. Após alguns segundos, o professor foi surpreendido, quando Gauss colocou a resposta escrita sobre a mesa. A resposta estava certa, era 5050. No Problema 2.3.1 apresentado logo a seguir, vamos analisar e descobrir como Gauss encontrou essa resposta tão rapidamente.

Problema 2.3.1. *O garoto Gauss, resolveu montar um painel de Natal com estrelas. Antes de montar o painel Gauss resolveu fazer um desenho para servir de modelo para construção de seu painel. Um desenho de Gauss com a representação das quatro primeiras linhas do painel está apresentado na Figura 2.20.*

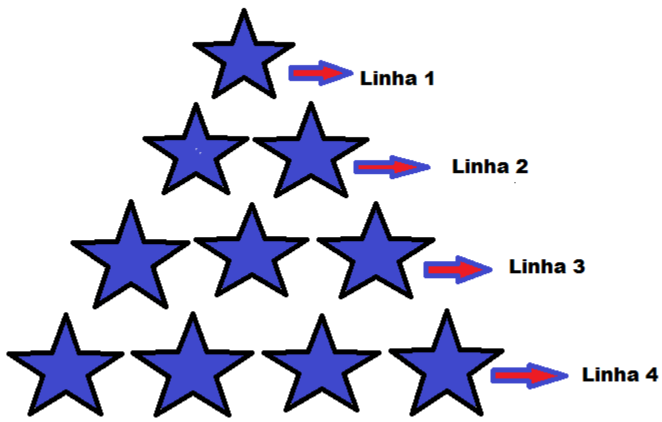

Figura 2.20: Desenho de Gauss das quatro primeiras linhas do painel.

Se Gauss continuar montando as demais linhas do painel, então:

a) quantas estrelas Gauss terá que desenhar para montar a 5º linha de seu desenho?

b) quantas estrelas Gauss terá que desenhar para montar a 100º linha de seu desenho?

c) quantas estrelas Gauss terá que desenhar para representar um painel com 10 linhas?

d) quantas estrelas Gauss terá que desenhar para representar um painel com 100 linhas?

Solução letra a. Inicialmente vamos analisar a quantidade de estrelas necessárias para montar as quatro primeira linhas do painel de Gauss. Seja q_1 a quantidade de estrelas necesárias para montar a primeira linha do painel de Gauss, então destacando a primeira linha como na Figura 2.21, podemos facilmente contar e identificar que $q_1 = 1$.

Seja q_2 a quantidade de estrelas necesárias para montar a segunda linha do painel de Gauss, então, destacando a segunda linha do painel como na Figura 2.22, podemos facilmente

Figura 2.21: Primeira linha do painel de Gauss.

perceber que para formar a segunda linha precisamos formar a primeira linha novamente e adicionar mais uma estrela (destacada em vermelho). Logo,

Figura 2.22: Segunda linha do painel de Gauss.

Logo,

$$q_2 = q_1 + 1$$

$$q_2 = 1 + 1$$

$$q_2 = 2.$$

Agora, seja q_3 a quantidade de estrelas necessárias para montar a terceira linha do painel de Gauss, então, destacando a terceira linha como na Figura 2.23, podemos facilmente perceber que para formar a terceira linha precisamos adicionar mais uma estrela (destacada em vermelho) na quantidade de estrelas existentes na segunda linha do painel.

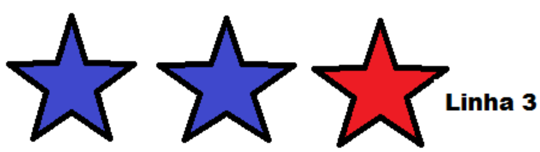

Figura 2.23: Terceira linha do painel de Gauss.

Logo,

$$q_3 = q_2 + 1$$

$$q_3 = 2 + 1$$

$$q_3 = 3.$$

Da mesma forma, seja q_4 a quantidade de estrelas necessárias para montar a quarta linha do painel de Gauss, então, destacando a quarta linha como na Figura 2.24, podemos facilmente perceber que para formar a quarta linha precisamos adicionar mais uma estrela (destacada em vermelho) na quantidade de estrelas existente na terceira linha.

Figura 2.24: Quarta linha do painel de Gauss.

Logo,

$$q_4 = q_3 + 1$$

$$q_4 = 3 + 1$$

$$q_4 = 4.$$

Por fim, se q_5 representa a quantidade de estrelas necessárias para formar a quinta linha do painel de Gauss e se o padrão de construção for mantido.

$$q_5 = q_4 + 1$$

$$q_5 = 4 + 1$$

$$q_5 = 5.$$

Solução letra b. Se q_n representa a quantidade de estrelas necessárias para montar a enésima linha do painel de Gauss, e o padrão de construção for mantido, então

$$q_1 = 1$$

$$q_2 - q_1 = 1$$

$$q_3 - q_2 = 1$$

$$q_4 - q_3 = 1$$

$$q_5 - q_4 = 1$$

$$\dots$$

$$q_n - q_{n-1} = 1.$$

Somando os termos em ambos os membros das igualdades logo acima temos

$$q_n = n.$$

Portanto, em especial

$$q_{100} = 100.$$

Solução letra c. Inicialmente, vamos desenhar uma representação para uma painel com dez linhas de estrelas como na Figura 2.25.

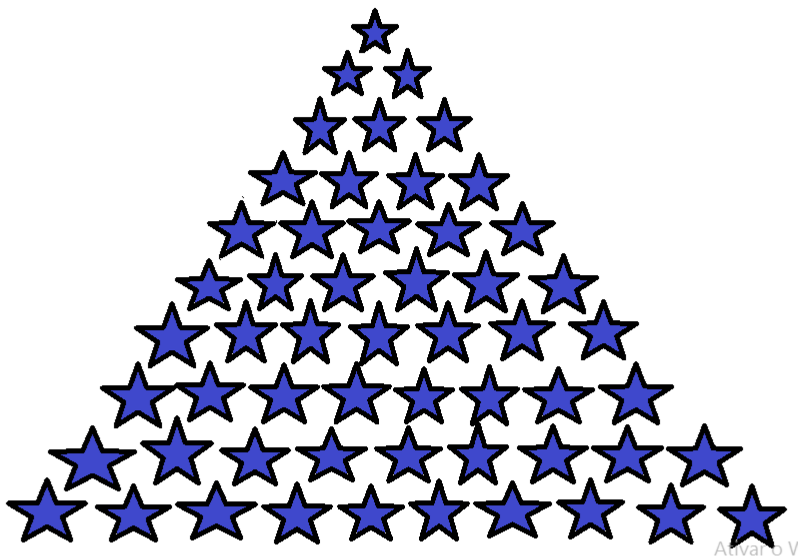

Figura 2.25: Representação de um painel com dez linhas de estrelas.

Agora, vamos adicionar a quantidade de estrelas da primeira e da décima linhas do painel, as estrelas da segunda e da nona linhas do painel, as estrelas da terceira e da oitava linhas do painel, as estrelas da quarta e da sétima linhas do painel e a quantidade de estrelas da quinta e da sexta linhas do painel, como na Figura 2.26.

Figura 2.26: Soma das estrelas das linhas equidistantes dos extremos do painel de dez linhas.

Como tinhamos 10 linhas e juntamos formando 5 duplas, com cada uma das duplas contendo 11 estrelas. Portanto, se E_{10} representa a quantidade de estrelas necessárias para formar o painel de Gauss com 10 linhas de estrelas, logo

$$E_{10} = 5 \cdot 11$$

$$E_{10} = 55.$$

Solução letra d. Se E_{100} represnta a quantidade de estrelas necessárias para Gauss montar um painel com 100 linhas e q_n representa a quantidade de estrelas da enésima linha, daí

$$E_{100} = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{98} + q_{99} + q_{100}$$

$$E_{100} = (q_1 + q_{100}) + (q_2 + q_{99}) + (q_3 + q_{98}) + \cdots + (q_{50} + q_{51}).$$

Utilizando raciocínio análogo ao desenvolvido na resolução da alternativa imediatamente anterior, podemos perceber que

$$(q_1 + q_{100}) = 101$$

$$(q_2 + q_{99}) = 101$$

$$(q_3 + q_{98}) = 101$$

$$\vdots$$

$$(q_{50} + q_{51}) = 101.$$

Como tinhamos 100 linhas e juntamos formando 50 duplas, com cada uma das duplas contendo 101 estrelas, então, se E_{100} representa a quantidade de estrelas necessárias para formar o painel de Gauss com 100 linhas de estrela, portanto

$$E_{100} = 50 \cdot 101$$

$$E_{100} = 5050.$$

Observação 2.3.1. *Baseado na ideia de Gauss, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Pois, se T_n representa a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, com primeiro termo q_1 e enésimo termo q_n, então*

$$T_n = n\frac{(q_1 + q_n)}{2}.$$

Como demonstramos na Proposição 1.3.2.

Observação 2.3.2. *Em especial, se E_n representa a soma dos n primeiros números naturais, então*

$$E_n = n\frac{(n+1)}{2}. \tag{2.2}$$

2.4 Contando Quadrados

Problema 2.4.1. *Heloísa resolveu desenhar quadrados adjacentes em uma folha de papel, de forma que, o lado de cada um dos quadrados fossem desenhados com o dobro do comprimento do lado do quadrado desenhado imediatamente anterior. Um modelo dos cinco primeiros quadrados desenhados por Heloísa, podem ser visto na Figura 2.27 apresentada logo abaixo.*

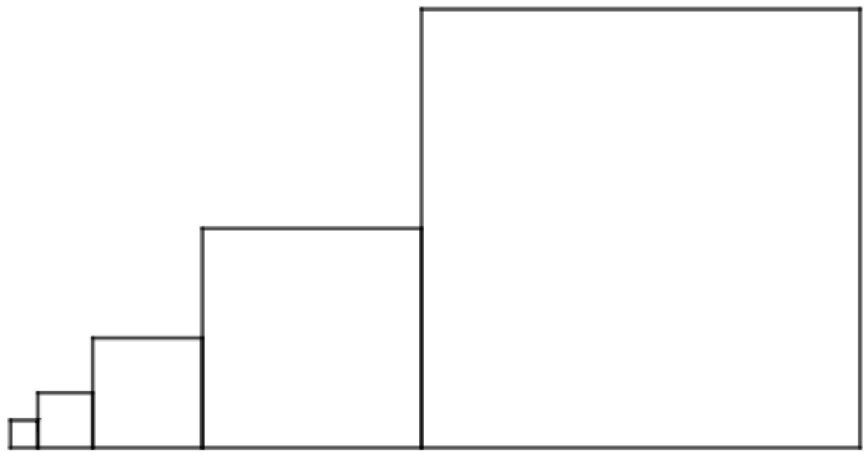

Figura 2.27: Cinco primeiros quadrados desenhados.

Se Heloísa desenhou o quadrado menor com lado 4cm, determine:

a) a área do quinto quadrado desenhado;

b) a área do centésimo quadrado desenhado;

c) a soma das áreas dos 05 primeiros quadrados;

d) a soma das áreas dos 100 primeiros quadrados.

Solução letra a. Inicialmente, vamos adotar o quadrado de 1 centímetro como sendo a área unitária, e dividir o quadrado de lado 4 cm em quadrados unitários, como na Figura 2.28.

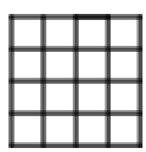

Figura 2.28: Divisão do quadrado de lado 4 em quadrados unitários.

Portanto, se A_1 representa a área do quadrado de lado 4cm, então como dividimos esse quadrado em 16 quadrados Unitários, então

$$A_1 = 16cm^2.$$

Agora vamos comparar o primeiro e o segundo quadrados desenhados como na Figura 2.29.

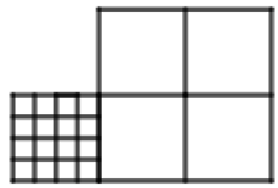

Figura 2.29: Comparação entre o primeiro e o segundo quadrados desenhados.

Logo, através da análise da Figura 2.29, podemos notar que o segundo quadrado desenhado pode ser dividido em quatro quadrados congruentes ao primeiro quadrado desenhado por Heloísa. Portanto, se A_2 representa área do segundo quadrado, logo

$$A_2 = 4 \cdot A_1$$

$$A_2 = 4 \cdot 16$$

$$A_2 = 64cm^2.$$

Comparando o segundo e o terceiro quadrado desenhados por Heloisa, tambem podemos perceber que o terceiro quadrado pode se dividido em quatro quadrados congruentes ao segundo quadrado desenhado, como na Figura 2.30.

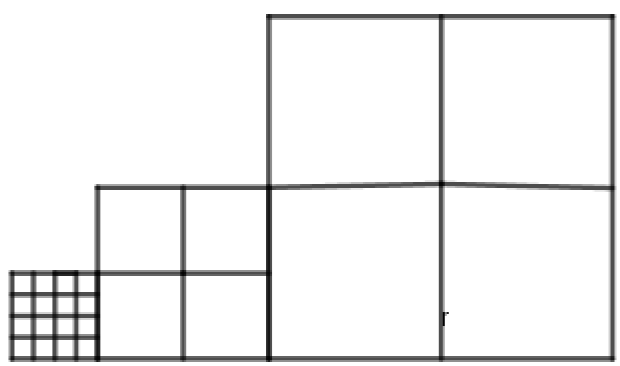

Figura 2.30: Comparação entre os três primeiros quadrados desenhados.

Portanto, se A_3 representa a área do terceiro quadrado desenhado, então

$$A_3 = 4 \cdot A_2$$

$$A_3 = 4 \cdot 64$$

$$A_3 = 256cm^2.$$

Agora comparando o desenho do terceiro e quarto quadrados, podemos notar que o quarto quadrado pode ser devidido em quatro quadrados congruentes ao terceiro quadrado desenhado, como na Figura 2.31.

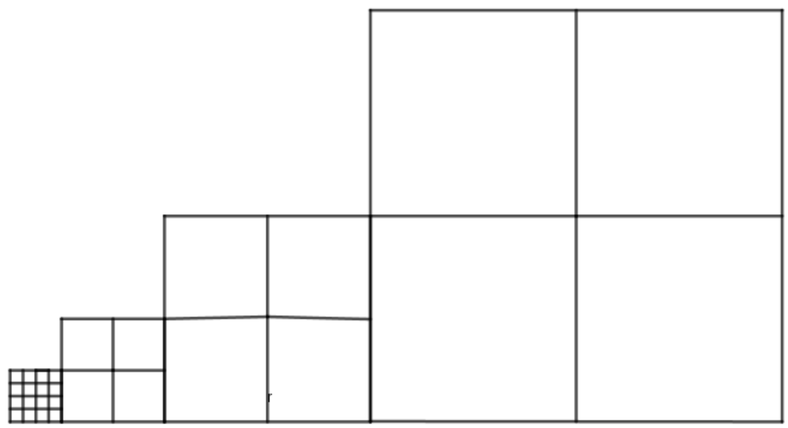

Figura 2.31: Comparação entre as quatro primeiras figuras desenhadas.

Portanto, se A_4 representa área do quarto quadrado desenhado por Heloísa, segue que

$$A_4 = 4 \cdot A_3$$

$$A_4 = 4 \cdot 256$$

$$A_4 = 1024cm^2.$$

Por fim, comparando o quarto e o quinto quadrados desenhados por Heloisa, podemos perceber que a o quinto quadrado pode ser dividido em quatro quadrados congruentes ao quarto quadrado desenhado por Heloisa, como fica evidenciado na Figura 2.32.

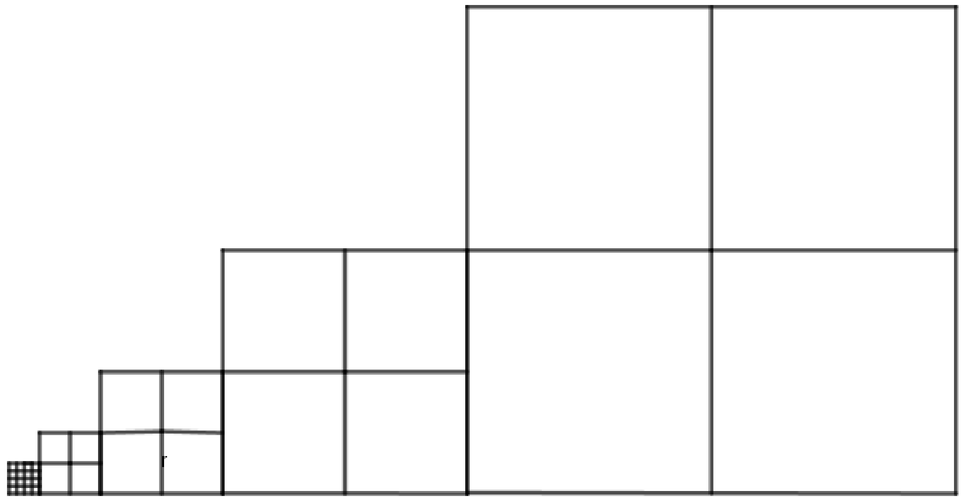

Figura 2.32: Comparação entre as cinco primeiras figuras.

Portanto, se A_5 representa a área do quinto quadrado construido por Heloisa, então

$$A_5 = 4 \cdot A_4$$

$$A_5 = 4 \cdot 1024$$

$$A_5 = 4096cm^2.$$

Solução letra b. Seja A_{100} a área do centésimo quadrado desenhado por Heloísa, segue que

$$\frac{A_2}{A_1} = 4$$

$$\frac{A_3}{A_2} = 4$$

$$\vdots$$

$$\frac{A_{99}}{A_{98}} = 4$$

$$\frac{A_{100}}{A_{99}} = 4.$$

Multiplicando os termos em ambos os membros da igualdade acima e cancelando os fatores em comum, temos

$$\frac{A_{100}}{A_1} = 4^{99}$$

$$A_{100} = A_1 \cdot 4^{99}$$

como $A_1 = 16$, substituindo

$$A_{100} = 16 \cdot 4^{99}.$$

Portanto,

$$A_{100} = 4^{101}\ cm^2.$$

Solução letra c. Seja T_5 a soma das areas dos cinco primeiros quadrados desenhados, então como sabemos que $A_1 = 16$, $A_2 = 64$, $A_3 = 256$, $A_4 = 1024$ e $A_5 = 4096$, então:

$$T_5 = 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096.$$

Portanto,

$$T_5 = 5456\ cm^2.$$

Solução letra d. Seja T_{100} a soma das cem primeiras áreas dos quadrados, então

$$T_{100} = 16 \cdot 4^0 + 16 \cdot 4 + 16 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4^3 + \cdots + 16 \cdot 4^{100}$$

$$T_{100} = 16(4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{100}).$$

Portanto, utilizando a Proposição 1.3.4, temos

$$T_{100} = 16(\frac{4^{101} - 1}{3}).$$

2.5 Contando com Cartas de Baralho

Agora, vamos analisar e resolver um problema em que sua sulução recai em uma recorrência linear de primeira ordem não-homogênea, do tipo $C_{n+1} = C_n + f(n)$, que como vimos no Capitulo 1, são as mais facilmentes resolvidas. O problema a seguir foi adaptado de [3].

Problema 2.5.1. *Um grupo de colegas resolveu construir castelos utilizando cartas de baralho. Para construir os castelos de 1, 2 e 3 andares foram necessárias respectivamente 2, 7 e 15 cartas, como é possivel contar na Figura 2.33, abaixo .*

Figura 2.33: Representação dos castelos construidos respectivamentes com 1,2,3, e 4 andares de cartas de baralho.

Se o padrão de construção dos castelos forem mantido, para determine:

a) a quantidade de cartas necessárias para montar um castelo de quatro andares;

b) a quantidade de cartas necessárias para montar um castelo de cinco andares;

c) a quantidade de cartas necessárias para montar um castelo de duzentos andares

d) a quantidade de cartas necessárias para montar um castelo de n andares, com n natural.

Solução Letra a. Vamos incialmente utilizar a análise da Figura 2.34 apresentado lo, para verificar se o primeiro castelo é realmente construido com duas cartas.

Figura 2.34: Primeiro castelo construído.

Se o leitor sabe contar de um em um, então é muito fácil contar os dois segmentos que estão representando as cartas de baralho. Portanto, se C_1 representa a quantidade de cartas necessárias para formar o primeiro castelo , então

$$C_1 = 2.$$

Agora, vamos através da Figura 2.35 verificar se o segundo castelo construido é formado por sete cartas, Para isso, procuramos uma maneira de partir da primeira construção e obter a segunda construção.

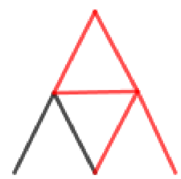

Figura 2.35: Construção do castelo de dois andares a partir do castelo de um andar.

Através da análise do modelo apresentado na Figura 2.35, podemos perceber que a construção do segundo castelo pode ser obtida partindo do primeiro castelo (destacado em preto) e adicionando três cartas na parte superior direita e duas cartas na parte inferior a direita da construção do primeiro castelo (destacado em vermelho). Portanto, se C_2 representa a quantidade de cartas necessárias para formar a segunda construção, então

$$C_2 = C_1 + 3 + 2$$

$$C_2 = C_1 + 5$$

$$C_2 = 2 + 5$$

$$C_2 = 7.$$

Agora, atraves da Figura 2.36 vamos verificar se o segundo castelo construido é formado por quinze cartas. Para isso, procuramos uma maneira de partir da primeira construção e obter a segunda construção.

Figura 2.36: Construção do castelo de três andares partindo da construção do castelo de dois andares.

Desta forma, através da análise do modelo apresentado na Figura 2.36, podemos perceber que a construção do terceiro castelo pode ser obtida partindo do segundo castelo castelo construido (destacado em preto) e adicionando dois grupos de três cartas e um grupo de duas cartas direita (destacado em vermelho). Portanto, se C_3 representa a quantidade de cartas necessárias para formar a terceira construção, então

$$C_3 = C_2 + 2 \cdot 3 + 2$$

$$C_3 = 7 + 2 \cdot 3 + 2$$

$$C_3 = 7 + 6 + 2$$

$$C_3 = 13 + 2$$

$$C_3 = 15.$$

Para finalizar, vamos formar o modelo da construção do castelo de quato andares, partindo da construção do castelo de três andares , como na Figura 2.37.

Figura 2.37: Construção do castelo de quatro andares partindo do castelo de três andares.

Portanto, através da análise do modelo apresentado na Figura 2.37, podemos perceber que a construção do castelo de quatro andares pode ser obtida, partindo do castelo de três andares (destacado em preto) e adicionando 3 grupos de três cartas e duas cartas a direita da construção do castelo de tês andares (destacado em vermelho). Portanto, se C_4 representa a quantidade de cartas necessárias para formar a construção do castelo de quatro andares , então

$$C_4 = C_3 + 3 \cdot 3 + 2$$

$$C_4 = 15 + 3 \cdot 3 + 2$$

$$C_4 = 15 + 9 + 2$$

$$C_4 = 26.$$

Solução letra b. Como na alternativa imediatamente anterior, vamos construir um modelo para representar o castelo de cinco andares partindo da construção do castelo de quatro andares, como na Figura 2.38.

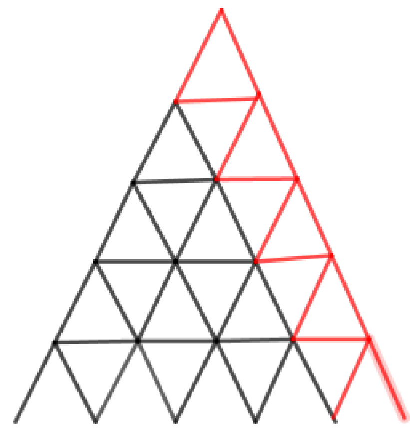

Figura 2.38: representação da construção do castelo de cinco andares partindo do castelo de quatro andares.

Portanto, através da análise do modelo apresentado na Figura 2.38, podemos perceber que a construção do castelo de cinco andares pode ser obtida partindo do castelo de quatro andares (destacado em preto) e adicionando 4 grupos de três cartas e duas cartas a direita da construção do castelo de quatro andares (destacado em vermelho). Portanto, se C_5 representa a quantidade de cartas necessárias para formar a construção do castelo cinco andares , então

$$C_5 = C_4 + 3 \cdot 4 + 2$$

$$C_5 = 26 + 3 \cdot 4 + 2$$

$$C_5 = 26 + 12 + 2$$

$$C_5 = 40.$$

Solução letra c. Seja C_{200} a quantidade de cartas necessárias para montar um castelo de 200 andares, então

$$C_2 = C_1 + 3 \cdot 1 + 2$$

$$C_3 = C_2 + 3 \cdot 2 + 2$$

$$C_4 = C_3 + 3 \cdot 3 + 2$$

$$C_5 = C_4 + 3 \cdot 4 + 2$$

$$\vdots$$

$$C_{199} = C_{198} + 3 \cdot (198) + 2$$

$$C_{200} = C_{199} + 3 \cdot (199) + 2.$$

Adicionando os termos em ambos os membros das igualdade acima e cancelando os termos iguais em ambos os membros das igualdades acima, temos

$$C_{200} = C_1 + 3(1 + 2 + 3 + 4 \cdot +198 + 199) + 2(199)$$

$$C_{200} = 2 + 3(1 + 2 + 3 + 4 \cdot +198 + 199) + 2(199).$$

Utilizando a formula da soma dos termos de uma progressão aritmética apresentada na Proposição 1.3.2, temos

$$C_{200} = 2 + 3(199) \cdot \frac{(1 + 199)}{2} + 398$$

$$C_{200} = 2 + 3(199) \cdot \frac{(200)}{2} + 398$$

$$C_{200} = 3(199) \cdot \frac{(200)}{2} + 400$$

$$C_{200} = 597 \cdot 100 + 400$$

$$C_{200} = 59700 + 400$$

$$C_{200} = 60100.$$

Solução letra d. Para finalizar,se C_n representa a quantidade de cartas necessárias para montar um castelo de n andares, então como

$$C_2 = C_1 + 3 \cdot 1 + 2$$

$$C_3 = C_2 + 3 \cdot 2 + 2$$

$$\vdots$$

$$C_{(n-1)} = C_{(n-2)} + 3 \cdot (n - 2) + 2$$

$$C_n = C_{(n-1)} + 3 \cdot (n - 1) + 2. \tag{2.3}$$

Adicionando os termos em ambos os membros das igualdade acima e cancelando os termos iguais em ambos os membros das igualdades acima, temos

$$C_n = C_1 + 3(1 + 2 + 3 + 4 \cdots + (n-2) + (n-1)) + 2(n-1)$$
$$C_n = 2 + 3(1 + 2 + 3 + 4 \cdots + (n-2) + (n-1)) + 2(n-1).$$

Utilizando a formula da soma dos termosde uma progressão aritmética apresentada na Proposição 1.3, temos

$$C_n = 2 + 3(n-1) \cdot \frac{(1 + (n-1))}{2} + 2n - 2$$
$$C_n = 3(n-1) \cdot \frac{(n)}{2} + 2n$$
$$C_n = \frac{(3n^2 - 3n)}{2} + 2n$$
$$C_n = \frac{(3n^2 - 3n + 4n)}{2}$$

$$C_n = \frac{(3n^2 + n)}{2}. \tag{2.4}$$

2.6 Contando os Coelhos de Fibonacci

Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci(1175-1250), descreveu, no ano de 1202, o crescimento de uma população de coelhos. A sequência de Fibonacci tem aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Também aparece em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste, no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi, ou no desenrolar da samambaia. Outra propiedade dessa sequencia é que ao calcularmos a razão entre o maior e o menor de dois termos sucessivos esse resultado se aproxima de um número irracional conhecido como **Número de Ouro**, que é denotado pela letra grega ϕ, que vale

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398...$$

Quanto maior os termos da sequencia, mais próximo do número de ouro essa razão estará [11].

Problema 2.6.1. *Supondo que os coelhos de Fibonacci tenham vida eterna e que cada casal de coelhos gere um novo casal a partir do segundo mês de vida e que esse casal também gere um novo par, e sucessivamente, de mês em mês, como representado na Figura 2.39.*

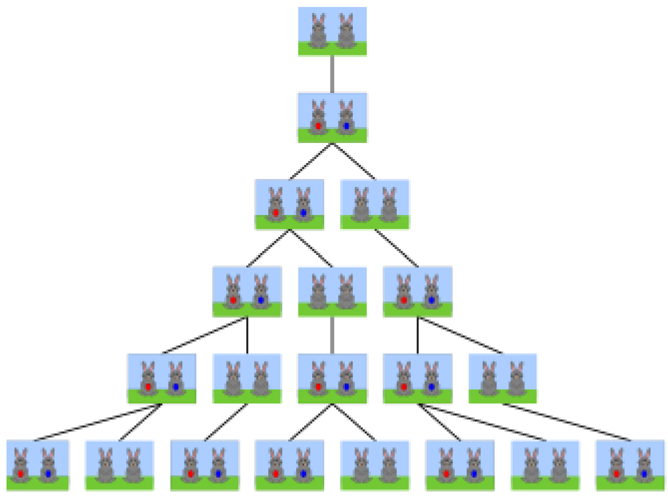

Figura 2.39: Simulação da reprodução dos coelhos de Fibonacci [11].

Se $C_0 = 1$ representa a quantidade de casal de coelhos no instante do nascimento do primeiro casal e $C_1 = 1$ e a quantidade de casais de coelhos um mês após o nascimento do primeiro casal, determine:

a) a quantidade de casais de coelhos cinco meses após o nascimento do primeiro casal;

b) a quantidade de casais de coelhos dez meses após o nascimento do primeiro casal de coelhos;

c) uma fórmula recursiva que forneça a quantidade de casais de coelhos, sabendo da quantidade de casais de coelhos dos dois meses imediatamentes anteriores;

d) uma fórmula fechada que forneça a quantidade de casais no enésimo mês após o nascimento do primeiro casal de coelhos.

Solução letra a. Vamos inicialmente analisar a Figura 2.45, que representa a quantidade de casais de coelhos do instante do nascimento do primeiro casal de coelhos até o quinto mês após o nascimento do primeiro casal de coelhos. Logo, seja C_0 a quantidade de casais de coelhos no instante do nascimento, C_1 a quantidade de casais de coelhos um mês após o nascimento, C_2 a quantidade de casais de coelhos dois meses após o nascimento do primeiro casal, C_3 a quantidade de casais de coelhos três meses após o nascimento do primeiro casal,

C_4 a quantidade de casais de coelhos quatro meses após o nascimento do primeiro casal e C_5 a quantidade de casais de cinco mêses após o nascimento do primeiro casal de coelhos. Vamos primeiro analisar a Figura 2.40.

Figura 2.40: Representação da quantidadede de casais de coelhos no instante do nascimento do primeiro casal.

É facil berceber que

$$C_0 = 1.$$

Agora vamos analisar a Figura 2.41, para identificar a quantidade de casais de coelhos um mês após o nascimento do primeiro casal de coelhos.

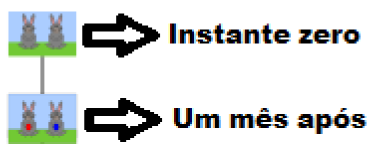

Figura 2.41: Representação da quantidade de casais de coelhos um mês após o nascimento do primeiro casal.

Portanto, podemor perceber na parte suberior da figura um casal de coelhos igual o da Figura 2.40, e na parte inferior da figura surgir uma bolinha vermelha na mão do primeiro coelho do casal e uma bolinha azul na mão do segundo coelhos do casal, para indicar que os coelhos estão fertis. Porém, ainda não reproduziram. Logo,

$$C_1 = 1.$$

Vamos também analisar a Figura 2.42, para descobrir a quantidade de casais de coelhos dois meses após o nascimento do primeiros casal de coelhos.

Figura 2.42: Representação do nascimento de casais de coelhos durante os dois primeiros meses.

Olhando para linha mais inferior do desenho, podemos perceber que aparece um casal de coelhos sendo com uma bolinha vermelha na mão do primeiro coelho do casal e uma bolinha azul na mão do segundo coelhos do casal, para indicar que os coelhos estão em idade fértis. E um casal de coelhos sem nenhum objeto nas mãos, para indicar que acabaram de nascer do casal anterior e ainda não estão fértis . Logo a quantidade de casais de coelhos é um casal que reproduz e um casal que não reproduz, então

$$C_2 = C_0 + C_1$$

$$C_2 = 1 + 1$$

$$C_2 = 2.$$

Agora, vamos analisar a Figura 2.43, para identificar e contar a quantidade de casais de coelhos três meses após o nascimento do primeiro casal de coelhos.

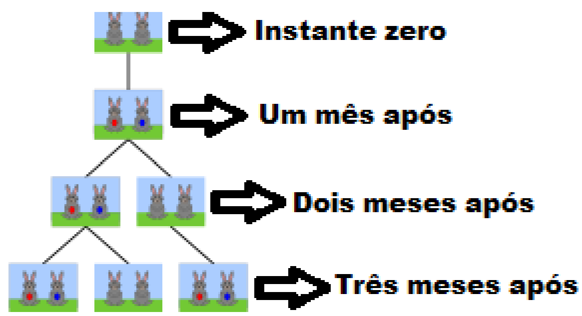

Figura 2.43: Representação da quantidade de casais de coelhos Três mês após o nascimento do primeiro casal.

Portanto, analisando a imagem podemos perceber que juntamos a linha indicada por dois meses após com a linha indicada por um mês após para formara linha indicada por três meses após, Logo

$$C_3 = C_1 + C_2$$

$$C_3 = 1 + 2 =$$

$$C_3 = 3.$$

Agora, vamos analisar a Figura 2.44, para identificar e contar a quantidade de casais de coelhos quatro meses após o nascimento do primeiro casal de coelhos.

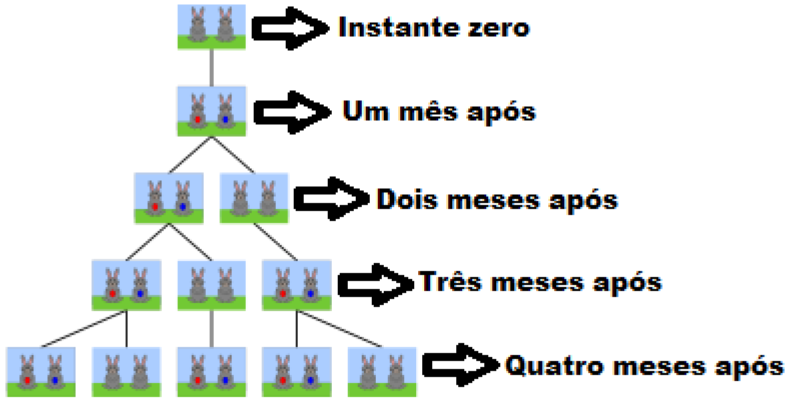

Figura 2.44: Representação da quantidade de casais de coelho durante os quatro primeiros meses após o nascimento do primeiro casal.

Portanto, podemos perceber a linha indicado pela seta por quatro meses após e formada pela junção das duas linhas imediatamentes anteriores, linha indicada por três meses após e linha indicada por dois meses após, como na Figura 2.44. Logo,

$$C_4 = C_2 + C_3 = 2 + 3 = 5.$$

Por fim, vamos analisar a Figura 2.45, para verificar se a quantidade de casais de coelhos cinco meses após o nascimento, vai ser realmente igual a soma das quantidades de casais de coelhos dos dois meses imediatamentes anteriores.

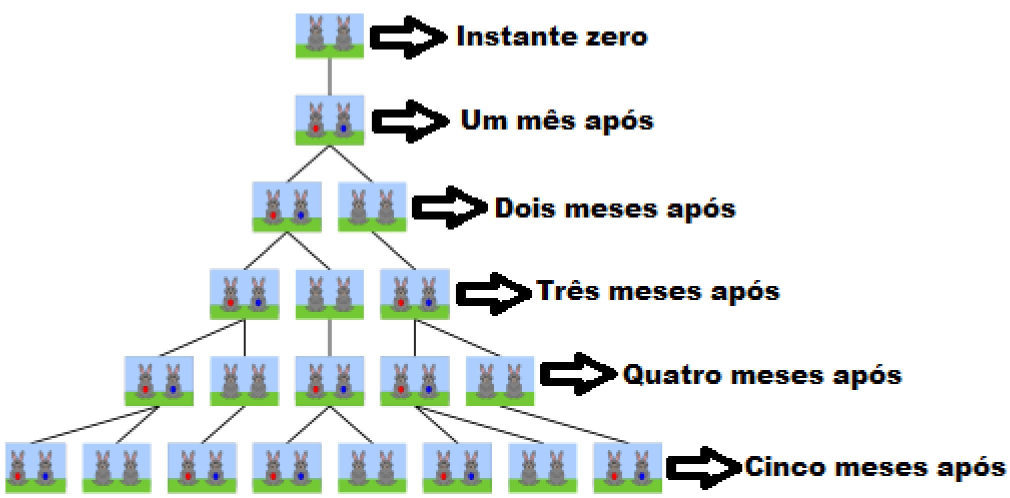

Figura 2.45: Representação do nascimentos dos coelhos de Fibonnaci durante os cinco primeiros meses.

Portanto, a quantidade de casais de coelhos cinco meses após o nascimento do primeiro casal de coelhos é realmente

$$C_5 = C_3 + C_4$$

$$C_5 = 8.$$

Solução letra b. Utilizando raciocínio analogo ao desenvolvido na alternativa imediatamente anteriore, temos

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = C_0 + C_1 = 1 + 1 = 2$$

$$C_3 = C_1 + C_2 = 1 + 2 = 3$$

$$C_4 = C_2 + C_3 = 2 + 3 = 5$$

$$C_5 = C_3 + C_4 = 3 + 5 = 8$$

$$C_6 = C_4 + C_5 = 5 + 8 = 13$$

$$C_7 = C_5 + C_6 = 8 + 13 = 21$$

$$C_8 = C_6 + C_7 = 13 + 21 = 34$$

$$C_9 = C_7 + C_8 = 21 + 34 = 55.$$

Portanto,

$$C_{10} = C_8 + C_9 = 89.$$

Solução da letra c. Como vimos anteriormente, cada termo a partir do terceiro pode ser encontrado somando-se os dois termos imediatamentes anteriores ao termos procurado. Logo, temos que se C_n representa o enesimo termo da sequencia, então

$$C_{n+2} = C_{n+1} + C_n \tag{2.5}$$

Com, $C_0 = 1$ e $C_1 = 1$.

Solução letra d. Como podemos perceber na alternativa imediatamente anterior a formula recurssiva que representa a quantidade de casais de coelhos de Ficonacci em função do tempo a partir do nascimento do primeiro casal é

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Logo, podemo por tentativa e erro testar uma solução do tipo x^n e ver o que acontece. Logo como

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$$

Substituindo o candidato x^n, temos

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

Dividindo por x^{n-2} ambos os membros da igualdade, obtemos a equação característica

$$x^2 = x + 1$$

que tem raizes

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, pelo Teorema 1.4.1, sabemos que

$$C_n = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

é solução da recorrência e $C_0 = 1$ e $C_1 = 1$.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, a_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

$$C_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Portanto,

$$C_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}. \tag{2.6}$$

Capítulo 3

Apresentando Alguns Jogos Matemáticos por Recorrência

Neste capítulo 3, apresentaremos três jogos matemáticos que são utilizados ao longo dos séculos para exercitar o intelecto humano, utilizando o método de recorrência para tal. Iniciaremos apresentando um pouco da história do jogo de Xadrez, aproveitando o processo de construção do tabuleiro para exercitar a aplicação da formula da soma dos termos de uma progressão geométrica. Logo após, vamos apresentar e resolver o problema de distribuir 8 rainhas no tabuleiro e verificar que a resposta é um conjunto, pois a ordem que dispomos cada uma das oito rainha no tabuleiro não é importante. Continuamos apresentando um pouco da história do Tangram e apresentando uma sequência de dobraduras e cortes que levarão a construção das sete peças utilizadas no jogo Chinês. Para finalizar, vamos apresentar um pouco da história do jogo das torres de Hanói, analisaremos o jogo e apresentaremos um processo de resolução por recorrência. Portanto, o capítulo 3 é muito importante, pois nos alerta intuitivamente sobre quais as principais diferenças entre sequências e conjuntos e nos avisa sobre a possibilidade de utilização das sequências e do método de recorrência não apenas para resolver problema de contagem, mas também sua utilização nas construções humanas e nos mais variados eventos que aconteçam com uma regularidade no tempo ou no espaço.

3.1 O Jogo de Xadrez

A invenção do jogo de xadrez já foi atribuída a Chineses, Egípcios, Persas, Árabes e, quem diria, a Aristóteles e ao Rei Salomão. Porém a história não confirma tais lendas. Ao que tudo indica, o xadrez surgiu no norte da Índia, durante os séculos V e VI da era cristã. Nessa época não se chamava xadrez nem tinha a forma que conhecemos hoje. Evoluiu a partir de um jogo indiano chamado chaturanga, em que quatro jogadores moviam suas peças de acordo com o resultado de um dado arremessado. Os movimentos das peças não eram todos iguais aos do xadrez. O chaturanga tornou-se mais popular quando se converteu num jogo para dois adversários. A Pérsia foi provavelmente a primeira nação a conhecê-lo e quando sendo conquistada pelos árabes, estes o levaram juntamente com a expansão do Islamismo, até a Europa. Com o advento da Renascença, o jogo de xadrez sofre as alterações definitivas, transformando-se em um jogo mais ágil. Novos poderes foram dados a algumas peças (dama, bispo, peões), nascendo assim, o xadrez moderno [9].

3.1.1 Construindo o Tabuleiro.

Segundo uma lenda indiana sobre invenção do jogo de Xadrez, o matemático inventor deixou seu senhor, um príncipe indiano, tão feliz que este disse que o matemático poderia pedir o que desejasse, que ele receberia. O matemático pediu apenas um grão de trigo, pela construção da primeira casa do tabuleiro, dois pela invenção da segunda casa, quatro para a terceira, e assim por diante, dobrando a quantidade até chegar na sexagésima quarta casa.O príncipe, inicialmente, se sentiu ofendido com o pedido achando que estava muito aquém das suas capacidades e encarregou seu vizir de calcular a quantidade de grãos que seriam necessários para cumprir com sua promessa. Quando terminou de calcular o vizir comunicou para o príncipe que essa quantidade era $2^{64} - 1 = 18446744073709552000$. Informado disto, o príncipe chamou o matemático, reconheceu que não conseguia pagar o preço e elogiou o matemático, pois a engenhosidade deste pedido o deixou ainda mais admirado do que a invenção do jogo.

Problema 3.1.1. *Valdelice resolveu construir um tabuleiro de xadrez 8 por 8. Inicialmente Valdelice construiu o reticulado como o da Figura 3.1, apresentada logo abaixo.*

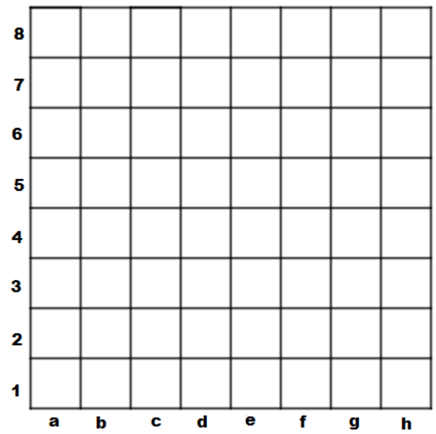

Figura 3.1: Malha reticulada 8 por 8.

Valdelice solicitou a seu filho Guilherme que ele colorisse de pretos a metade das casas do tabuleiro, de modo que casas adjacentes não ficassem coloridas com a mesma cor, como na Figura 3.2.

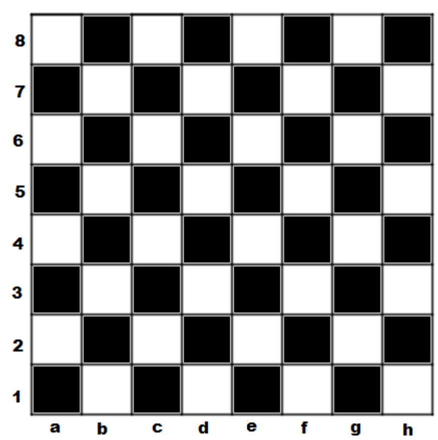

Figura 3.2: Tabuleiro de xadrez 8 por 8.

Valdelice prometeu que pagaria 1 real pela primeira casa pintada, 2 reais pela segunda casa pintada, 4 reais pela terceira casa pintada, e assim sucessivamente. Então,quanto Valdelice terá que pagar pelo serviço se ele for totalmente concluído por Guilherme?

Solução. Seja D_1 a quantidade de dinheiro recebido por Guilherme para construção da primeira casa, sabemos que $D_1 = 1$. Agora seja D_2 a quantidade de dinheiro recebido por Guilherme para construção da segunda casa, então $D_2 = 2$. Seja também D_3 a quantia de dinheiro recebido por Guilherme pela pintura da terceira casa, então $D_3 = 4$. Continuando o processo até D_{32}, temos que

$$D_1 = 1 = 2^0$$

$$D_2 = D_1 \cdot 2 = 2^1$$

$$D_3 = D_2 \cdot 2 = 2^2$$

$$\vdots$$

$$D_{32} = D_{31} \cdot 2 = 2^{31}.$$

Então, a quantidade de dinheiro que Valdelice deve pagar para Guilherme pode ser calculado utilizando a fórmula da soma dos termos da PG, demonstrada na Proposição 1.3.4. Portanto, se S_{32} representa a quantidade total de dinheiro que Guilherme recebeu para pintar as 32 casas pretas do tabuleiro, temos que

$$S_{32} = 1\frac{2^{32} - 1}{2 - 1}$$

$$S_{32} = 2^{32} - 1$$

$$S_{32} = 4294967296 - 1$$

$$S_{32} = 4294967295.$$

3.1.2 Distribuindo Rainhas no Tabuleiro

A Rainha é uma peça maior do jogo de xadrez, representada nos países lusófonos pela letra D nas notações algébricas. É a peça de maior valor relativo do jogo, usualmente valorada entre nove e dez pontos.No chaturanga, antecessor mais antigo do xadrez, o lugar da Rainha era ocupado pelo Firzan ou Firz, equivalente ao vizir ou conselheiro real. Na Europa, durante a Idade Média, a Rainha lentamente substituiu seu antecessor, apesar dos movimentos serem os mesmos, e já no final do século XIII estava presente em todo o continente. No fim do século XV, seu movimento foi ampliado atingindo a regra atual, embora as condições de promoção do peão a uma nova Rainha ainda fossem restritas[10].

Problema 3.1.2. *A Rainha é a peça do jogo de xadrez com maior capacidade de movimentação e de captura, pois, a rainha pode se movimentar por todas as casas da sua coluna, linha ou diagonal, como na figura logo abaixo.*

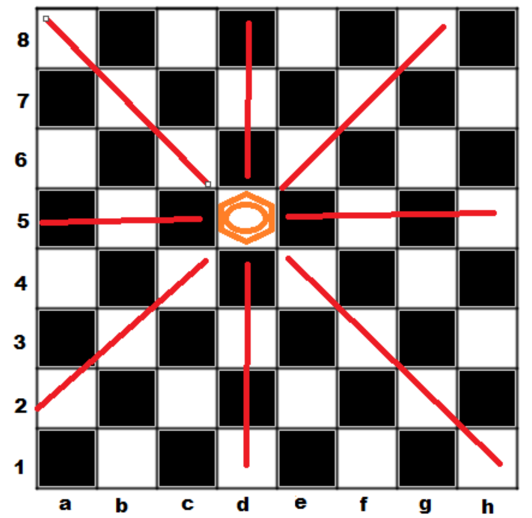

Figura 3.3: Rainha na casa d5 do tabuleiro (em laranja) e sua capacidadede de movimentação (em vermelho).

Mostre uma forma de dispor oito rainhas sobre um tabuleiro de xadrez como o da Figura(3.3), sem que nenhuma rainha esteja em posição de captura em relação a outra rainha.

Solução. Como nossa tarefa é distribuir oito rainhas no tabuleiro de forma que elas não possam se capturar, vamos começas colocando uma rainha na casa **h1**, como na Figura 3.4 abaixo.

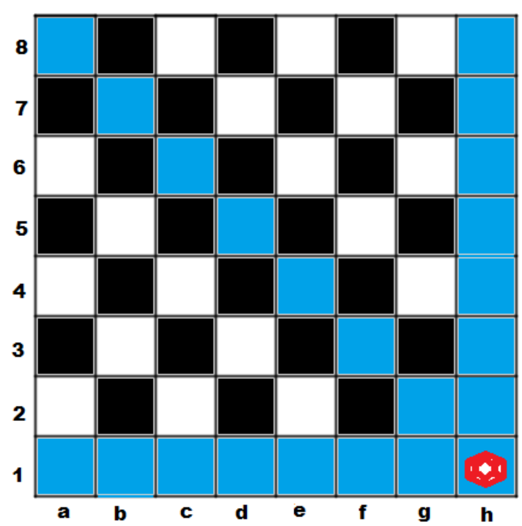

Figura 3.4: Primeira rainha colocada na casa h1 do tabuleiro.

Observe que como a rainha captura na diagonal, na vertical e na horizontal, todas as casas destacadas com a cor azul vão ficar impossibilitadas de receber uma nova rainha.

Vamos colocar a segunda rainha na casa **b2**, como na Figura 3.5 abaixo.

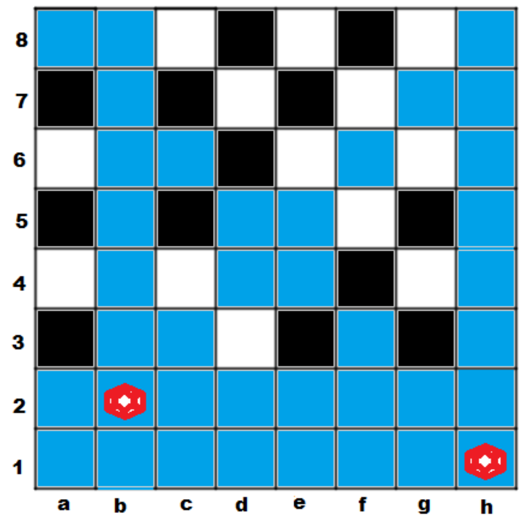

Figura 3.5: Segunda rainha colocada na casa b2.

Observe que como a segunda rainha também captura na diagonal, na vertical e na horizontal, todas as casas destacadas com a cor azul vão ficar impossibilitadas de receber uma nova rainha.

Agora vamos colocar a terceira rainha na casa **d3** do tabuleiro, como na Figura 3.6.

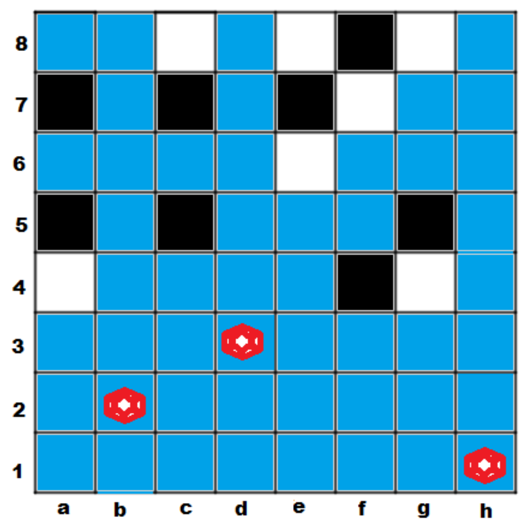

Figura 3.6: Terceira rainha, colocada na casa b3.

Observe que, como a terceira rainha também captura na diagonal, na vertical e na horizontal, todas as casas destacadas com a cor azul vão ficar impossibilitadas de receber uma nova rainha.

Colocando agora a quarta rainha na casa **a4** do tabuleiro como na Figura 3.7.

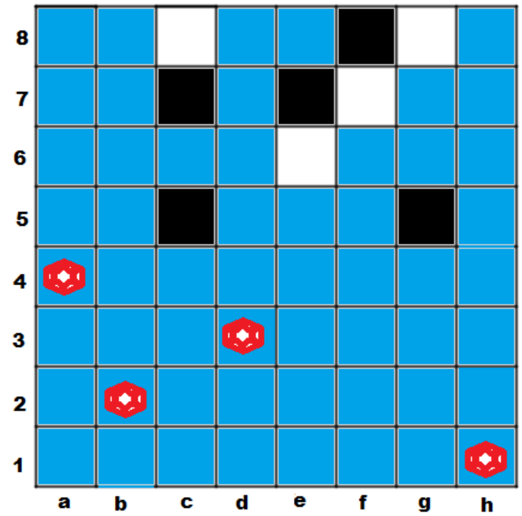

Figura 3.7: Quarta rainha colocada na casa a4.

Colocando a quinta rainha na casa **g5** do tabuleiro como na Figura 3.8.

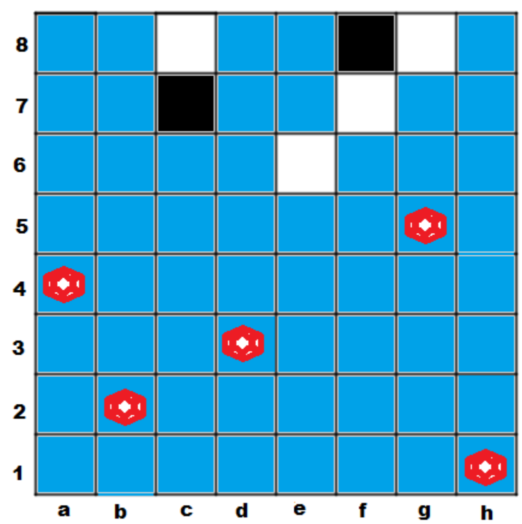

Figura 3.8: Quinta rainha, colocada na casa g5.

Como a rainha captura na vertical, na horizontal e na diagonal, todas as casas destacadas em azul ficarão impossibilitadas de receber uma nova rainha.

Observe que nos resta apenas uma opção na linha 6, que é dispor a sexta rainha na casa **e6**, como na Figura 3.9 abaixo.

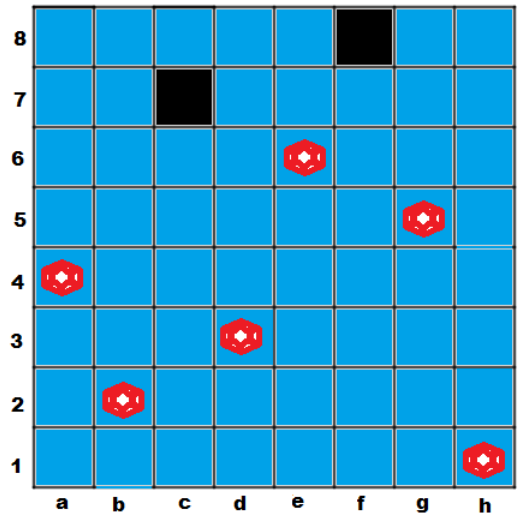

Figura 3.9: Sexta rainha, colocada na casa e6 do tabuleiro.

Agora colocamos a sétima rainha na casa **c7** e como na Figura 3.10.

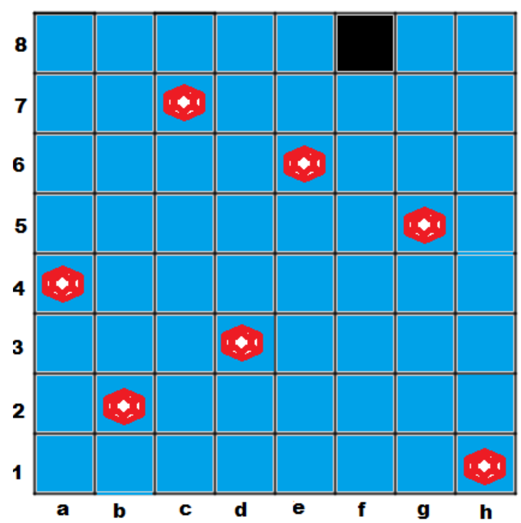

Figura 3.10: Sétima rainha, colocada na casa c7 do tabuleiro.

Por fim, temos apenas que colocar a oitava rainha na casa **f8** do tabuleiro como na Figura 3.11.

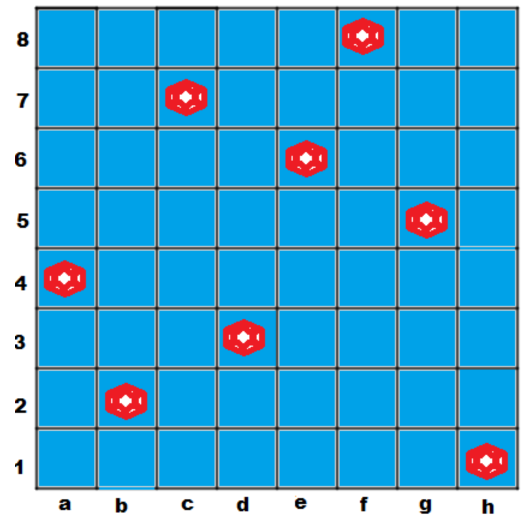

Figura 3.11: Oitava rainha, colocada na casa f8 do tabuleiro.

Portanto, um solução possível é o conjunto, $S = \{h1, b2, d3, a4, g5, e6, c7, f8\}$.

Observação 3.1.1. *Fraz Nauck, uma matemático cego, demonstrou em 1850 que existem exatamente 92 soluções diferentes para esse problema. Contudo, se levarmos em consideração que algumas podem ser obitidas a partir de outras por meio de giros ou simetrias, podemos reduzir o número a 12 soluções basicas [5].*

3.2 O Jogo de Tangram

O Tangram é um quebra-cabeças geométrico chinês formado por 7 peças, chamadas tans: são 2 triângulos grandes, 2 pequenos, 1 médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Utilizando todas essas peças sem sobrepô-las, o objetivo é formar várias figuras. Não se sabe ao certo como surgiu o Tangram, mas acredita-se ter sido inventado na China durante a Dinastia Song e levado para Europa por navios mercantes no início do século XIX, onde se tornou muito popular. Há várias lendas sobre a sua origem e o seu renascimento no mundo dos mortos. Uma lenda diz que uma pedra preciosa se desfez em sete pedaços, e com eles era possível formar várias formas. Outra diz que um imperador deixou um espelho quadrado cair, e este se desfez em 7 pedaços que poderiam ser usados para formar várias figuras,de diversas formas. Segundo algumas, o nome Tangram vem da palavra inglesa tangam, que significado misturas ou desconhecidos. Outros dizem que a palavra vem da dinastia chinesa Tang, ou até do barco cantonês bundumocu, onde mulheres entretinham os marinheiros americanos. Na Ásia o jogo é chamado de 300 placas. Além de facilitar o estudo da geometria, ele desenvolve a criatividade e o raciocínio lógico, que também são fundamentais para o estudo da matemática e da ciência [12].

Problema 3.2.1. *Uma imagem de um quadrado que podemos formar com as sete peças do Tangram será apresentada logo abaixo na Figura (3.12).*

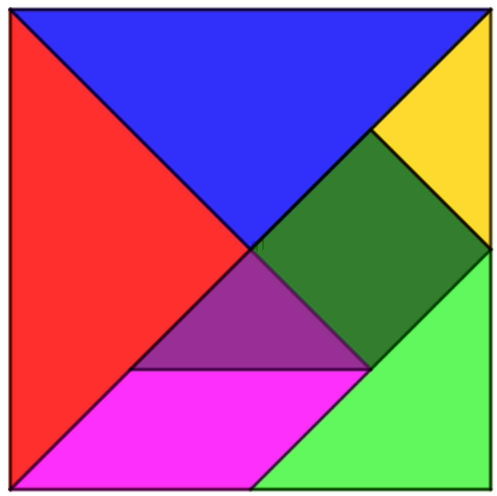

Figura 3.12: Quadrado construído com as sete peças do Tangram.

Se Ananda disponha de uma folha de papel A4, uma régua e uma tesoura. Mostre como Ananda pode construir um modelo para cada um das sete peças do Tangram.

Solução Nossa tarefa é a partir de uma folha retangular ABCD, como na Figura 3.13, encontrar as 7 peças do Tangram. Faremos a construção passo a passo:

Figura 3.13: Representação da folha de papel A4.

1) Observe que não podemos ainda obter as 7 formas geométricas, porém, podemos facilmente obter a forma do quadrado que contém as 7 peças procurada. Para isso, vamos levar o lado DC sobre o lado AB, como na Figura 3.14.

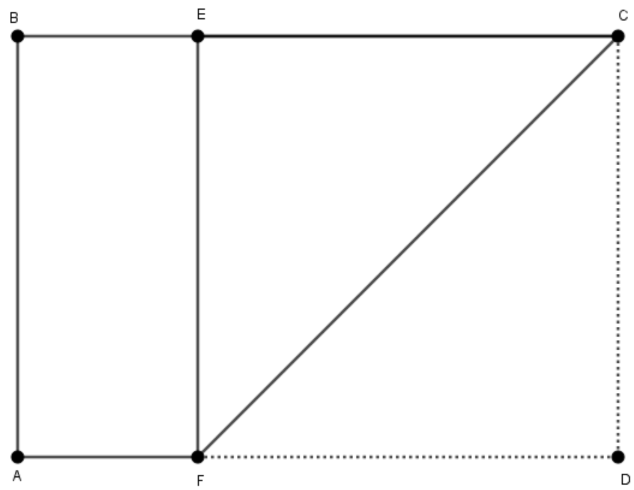

Figura 3.14: Construindo o quadrado a partir do retângulo.

2) Agora, cortamos sobre o segmento de reta EF, obtemos o quadrado CDEF, como na Figura 3.15.

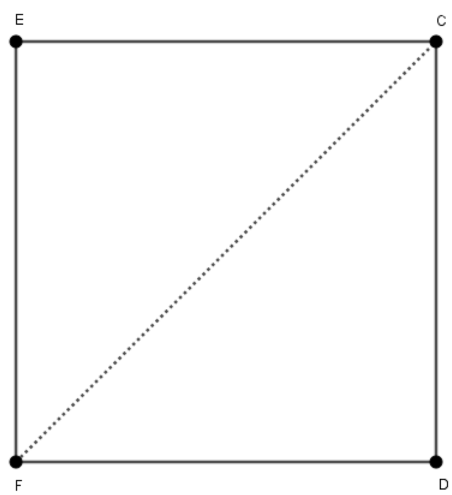

Figura 3.15: Quadrado obtido da folha de papel fornecida.

3) Levando o ponto C sobre o ponto F, como na Figura 3.16, para encontrar o ponto médio da diagonal CF, temos

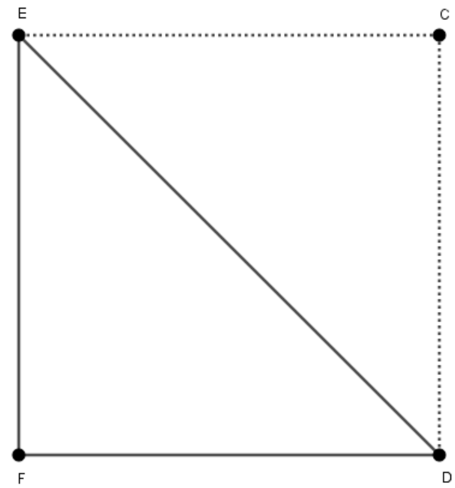

Figura 3.16: Levando o ponto C sobre o ponto F.

4) Agora , vamos desfazer a dobradura e marcar o ponto médio M de CF, como na Figura 3.17.

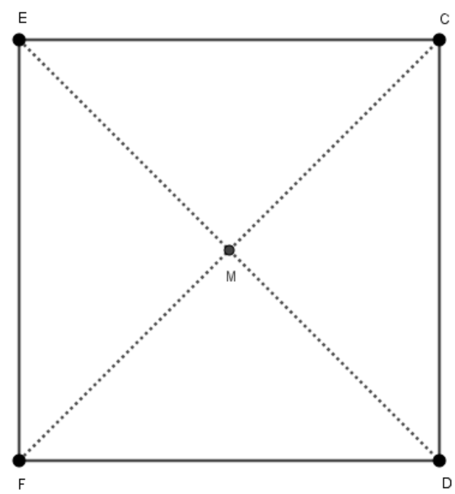

Figura 3.17: Marcando o ponto médio da diagonal CF.

5) Veja que dessa forma já conseguimos encontrar os dois triângulos maiores. Resta apenas recortar os triângulos destacados em azul e vermelho na Figura 3.18.

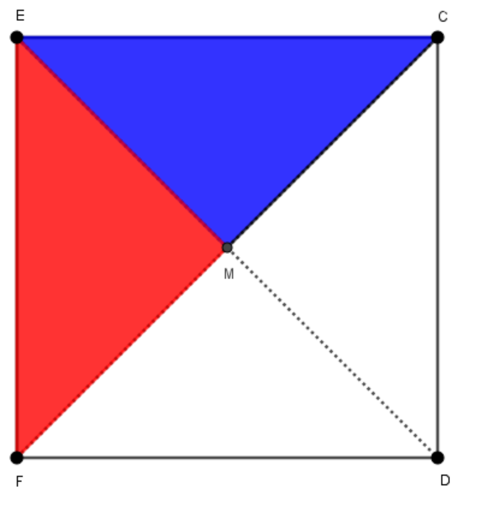

Figura 3.18: Representação dos triângulos maiores.

6) Após recortar os dois triângulos maiores dentre os procurados, obtemos o triângulo CDF, da Figura 3.19.

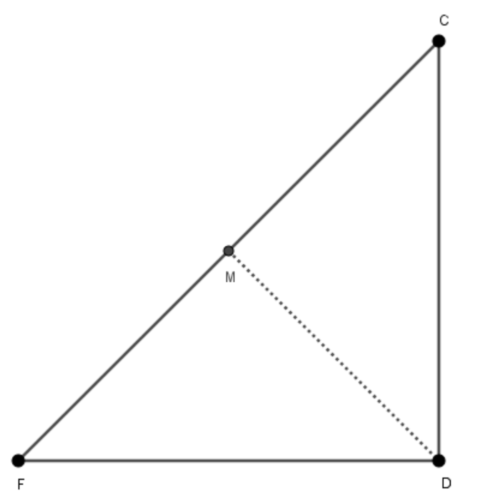

Figura 3.19: Triângulo CDF.

7) Vamos levar o ponto C sobre o ponto M, como na Figura 3.20.

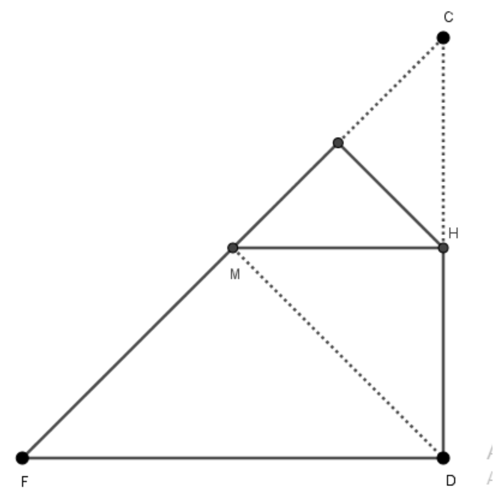

Figura 3.20: Levando o ponto C sobre o ponto M.

8) Desfazendo a dobradura podemos perceber que ficou marcado um dos triângulo menores CGH, como na Figura 3.21.

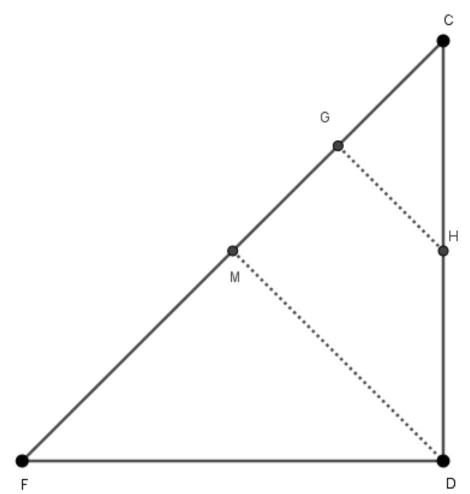

Figura 3.21: Determinação do triângulo CGH.

9) Podemos recortar o triângulo CGH, destacado de amarelo na Figura 3.22 e encontrar um dos triângulos menores procurado.

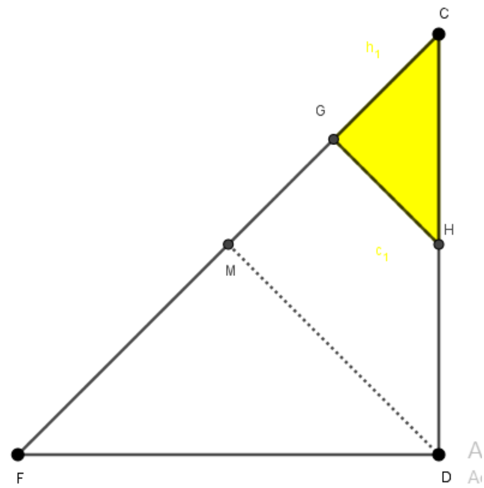

Figura 3.22: Um dos dois triângulos menores procurados.

10) Após recortar o triângulo amarelo, nos restará um papel no formato apresentado na Figura 3.23, logo abaixo.

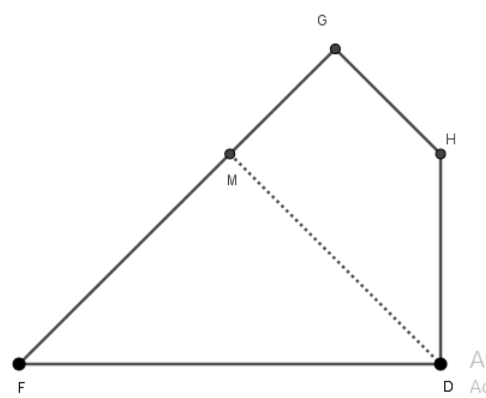

Figura 3.23: Representação da folha de papel após recortar o triângulo CGH.

11) Vamos agora levar o ponto D sobre o ponto M, como na Figura 3.24.

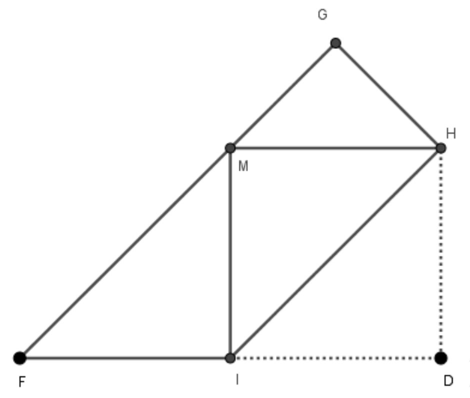

Figura 3.24: Levando o ponto D sobre o ponto M.

12) Desfazendo a dobradura, podemos perceber que ficou determinado o quadrado procurado GHJM e o triângulo médio procurado DHI, como podemos notar na Figura 3.25.

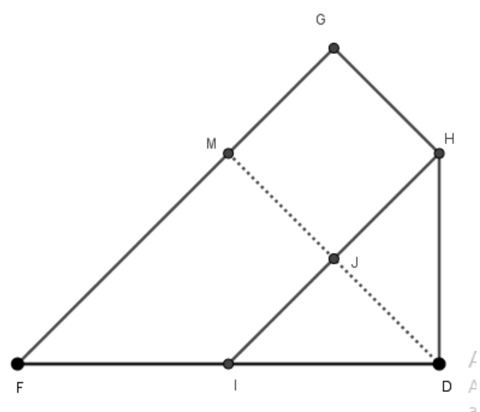

Figura 3.25: Determinação do quadrado GHJM e do triângulo DHI.

13) Vamos recortar o quadrado destacado em verde escuro e o triângulo destacado em verde claro na Figura 3.26, apresentada logo abaixo.

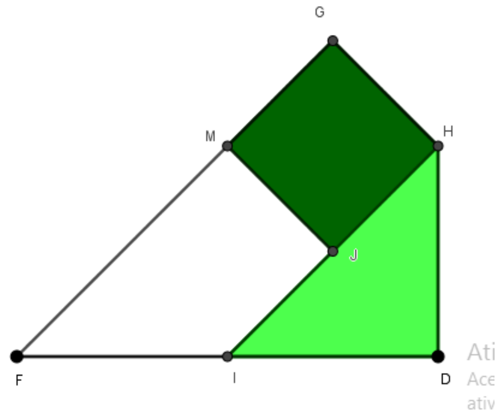

Figura 3.26: O quadrado e o triângulo médio procurados.

14) Após recortar o quadrado e o triângulo médio nos restará um pedaço de papel com o formato apresentado na Figura 3.27.

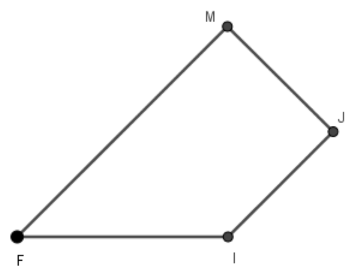

Figura 3.27: Representação do papel após recortar o quadrado e o triângulo médio.

15) Por fim, vamos levar o ponto M sobre o ponto I, como apresentado logo abaixo na Figura 3.28.

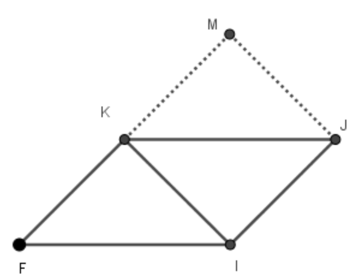

Figura 3.28: Levando o Ponto M sobre O ponto I.

16) Desfazendo a dobradura, podemos notar que a Figura 3.29 pode ser decomposta em um triângulo menor JKM e um paralelogramos FIJK.

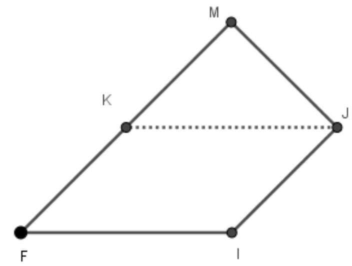

Figura 3.29: Determinação de um triângulo menor e do paralelogramo.

17) Logo, recortando o triângulo destacado em roxo e o paralelogramo destacado em rosa como na Figura 3.30.

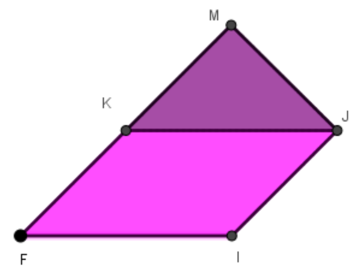

Figura 3.30: Triângulo menor destacado em roxo e paralelogramo destacado em rosa.

Portanto, nossa tarefa esta concluída e agora temos um modelo para construir cada uma das sete peças do Tangram e começar a brincadeira.

3.3 O Jogo das Torres de Hanói

Diz a lenda que na origem dos tempos, em um templo da cidade de Hanói, capital do Vietnã, foram colocados 64 discos perfurados de ouro puro e de diâmetro distintos ao redor de uma das três hastes de diamante em ordem decrescente de tamanho de diâmetro. E muitos sacerdotes moviam os discos seguindo as seguintes condições: os discos devem ser deslocados de uma coluna para outra, sendo que nunca pode ser colocado um disco maior em cima de um disco menor e a cada segundo o sacerdote move somente um disco. Quando os sacerdotes transportassem todos os discos da haste inicial para outra, o mundo se acabaria [6].

Problema 3.3.1. *O jogo da Torre de Hanói tem sido jogado desde o fim do século XIX, e teve inspiração na famosa lenda das torres de Hanói. Ele consiste em transferir os discos da haste que eles estão dispostos inicialmente para uma das duas hastes vazias com o menor número de movimentos possível, mas sob duas condições:*

- *Um único disco pode ser movida de cada vez;*
- *nenhum disco pode ficar debaixo de outro menor.*

Figura 3.31 apresentada a seguir, mostra uma montagem inicial da torre de Hanói para oito discos.

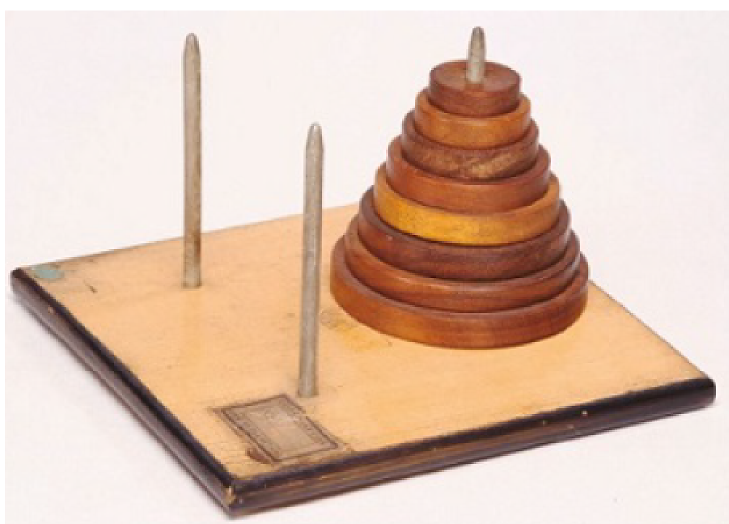

Figura 3.31: Torre de Hanói com oito discos [7]

Determine:

a) a menor quantidade de movimentos necessários para resolver a torre de Hanói de três discos;

b) a menor quantidade de movimentos necessários para resolver a torre de Hanói de seis discos;

c) a menor quantidade de movimentos necessários para resolver a torre de Hanói de 64 discos;

d) uma formula fechada que forneça a menor quantidade de movimentos necessários para resolver a torre de Hanói de n discos, com n natural.

Solução letra a. Vamos iniciar analisando a Figura 3.32, que contém uma representação para o jogo da Torre de Hanói com um disco.

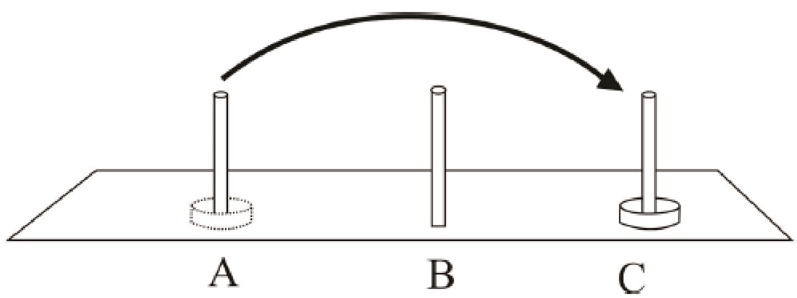

Figura 3.32: Representação do jogo Torre de Hanói para um disco [7].

Como podemos perceber através da análise da Figura 3.32, se o disco estiver por exemplo na haste A, então basta desloca-lo para haste ou B ou para haste C como foi feito. Logo, se T_1 representar a quantidade de movimentos necessários para resolver o jogo com um disco, então

$$T_1 = 1.$$

Agora, vamos analisar a Figura 3.33 que contém uma representação para resolução do jogo da Torre de Hanói dois disco.

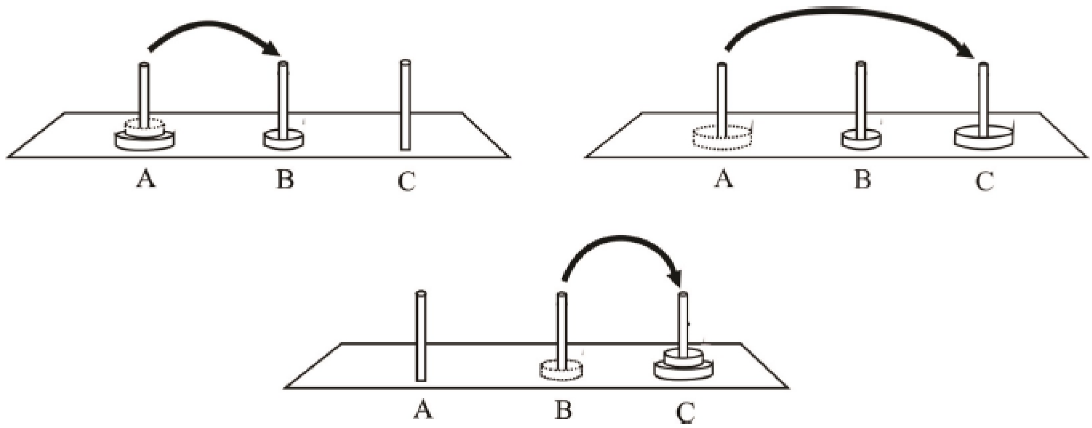

Figura 3.33: Uma representação para resolução do jogo Torre de Hanói com dois discos[7].

Se T_2 representar a quantidade de movimentos necessários para resolver o jogo da Torre de Hanói com dois discos e D_1 e D_2 representam respectivamente o disco de menor diâmetro e o disco de maior diâmetro. Então, se os discos tiverem inicialmentena haste A, podemos deslocar D_1 par a haste B, depois realizar mais um movimento para transferir D_2 para a haste C e por fim transferir D_1 para cima de D_2 na haste C, como na Figura 3.33. Então,

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + 1 + T_1 \\ &= 2T_1 + 1 \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 2 + 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$T_2 = 3.$$

Por fim, vamos analisar a Figura 3.34 que contém uma representação para resolução do jogo da Torre de Hanói três disco.

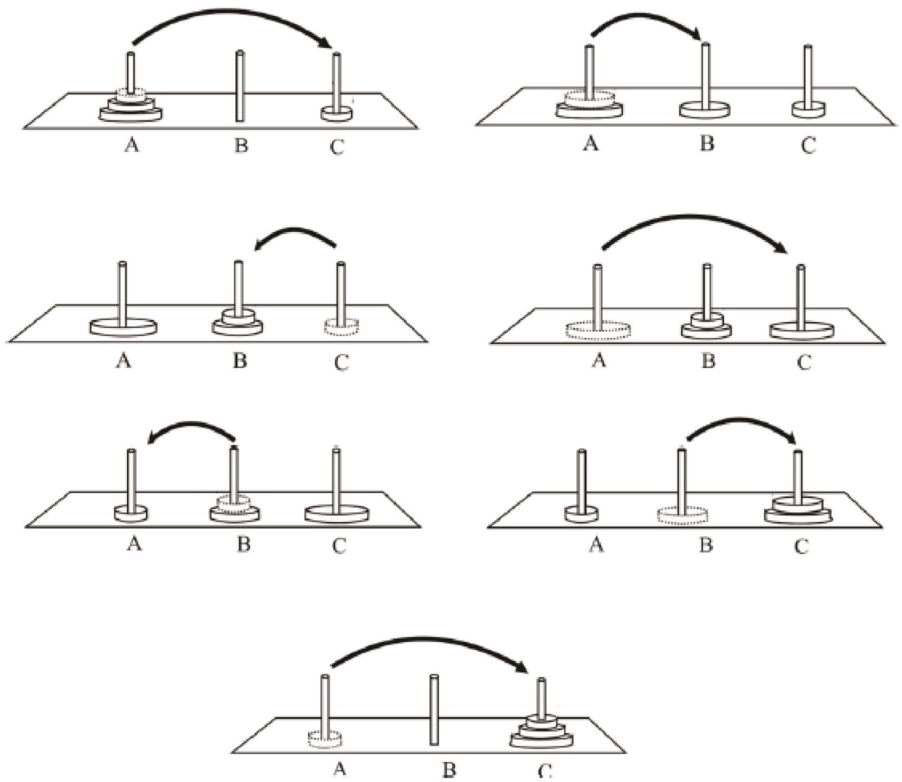

Figura 3.34: Uma representação para resolução do jogo Torre de Hanói com três discos[7].

Se T_3 representar a quantidade de movimentos necessários para resolver o jogo da Torre de Hanói com três discos e D_1, D_2, D_3 representam respectivamente o disco de menor diâmetro e o disco de diâmetro médio e o disco de maior diâmetro. Então, se os discos tiverem inicialmente na haste A, podemos deslocar D_1 par a haste C, depois realizar mais um movimento para transferir D_2 para a haste B e depois transferir D_1 para cima de D_2 na haste B. Depois temos que realizar um movimento para deslocar D_3 para haste B e deslocar novamente uma pilha de dois disco para cima de D_3 na haste C, o que já sabemos fazer com $T_2 = 3$ movimentos. Como na Figura 3.34. Logo,

$$\begin{aligned} T_3 &= T_2 + 1 + T_2 \\ &= 2T_2 + 1 \\ &= 2 \cdot 3 + 1 \\ &= 6 + 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$T_3 = 7.$$

Solução letra b. Sejam T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6 a quantidade de movimentos necessários para resolver o jogo da Torre de Hanói respectivamente com um, dois , três, quatro, cinco e seis discos e D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 e D_6 os discos um , dois, três, quatro, cinco e seis, tal que o diâmetro de D_1 e menor que o diâmetro de D_2, que é menor que o diâmetro de D_3, que é menor que o diâmetro de D_4, que é menor que o diâmetro de D_5, que é menor que o diâmetro de D_6. Então,

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 2^1 + 2^0$$

$$T_3 = 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1) + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$T_4 = 2 \cdot (2^2 + 2^1 + 2^0) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$T_5 = 2 \cdot (2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Logo,

$$D_6 = 2 \cdot (2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Portanto,

$$T_6 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

$$T_6 = 63.$$

Solução letra c. Utilizando raciocínio análogo ao desenvolvido anteriormente, temos

$$T_{64} == 2^{63} + 2^{62} + 2^{61} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Identificando que essas potencias formam uma P.G de primeiro termo $2^0 = 1$ e razão $q = 2$, então utilizando a Proposição 1.3.2, temos

$$T_{64} = 1\frac{2^{64} - 1}{2 - 1}.$$

Portanto,

$$T_{64} = 2^{64} - 1.$$

Solução letra d. Como sabemos que

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 2T_1 + 1$$

$$T_3 = 2T_2 + 1$$

$$\vdots$$

$$T_{n-1} = 2T_{n-2} + 1$$

$$T_N = 2T_{n-1} + 1. \tag{3.1}$$

Multiplicando o primeiro termo da sequência por 2^{n-1}, o segundo termo da sequência por 2^{n-2}, o terceiro termo por 2^{n-3}, assim sucessivamente até multiplicarmos o penúltimo termo da sequência por 2^1 e o ultimo temo por 2^0. Logo,

$$2^{n-1}T_1 = 2^{(n-1)}$$

$$2^{n-2}T_2 = (2^{n-1}) \cdot T_1 + 2^{n-2}$$

$$2^{n-3}T_3 = (2^{n-2}T_2) + 2^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$2^2T_{n-2} = 2^3T_{n-3} + 4$$

$$2^1T_{n-1} = 2^2T_{n-2} + 2$$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

Adicionando todos os termos do primeiro membro e todos os termos do segundo membro da igualdade respectivamente e cancelando os termos em comum, temos

$$T_n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}).$$

Utilizando a formula da soma dos termos da PG, temos

$$T_n = 2^0 \frac{(2^n - 1)}{2 - 1}.$$

Segue que

$$T_n = 2^n - 1. \tag{3.2}$$

Portanto, se $n \in \mathbb{N}$ representa a quantidade de discos e T_n a quantidade de movimentos necessários para transferir os n discos para outra haste, então

$$T_n = 2^n - 1.$$

Para ver algumas variações do jogo Torre de Hanói, o leitor pode consultar [7].

Capítulo 4

Considerações finais

Neste trabalho apresentamos uma proposta de resolução de alguns problemas de contagem, utilizando a técnica de recorrência e escolhendo problemas que pode ser modelados com material concreto. Este trabalho foi construído com intuito de servir de modelo para professores do ensino médio que queiram trabalhar contagem recursivamente, através da análise, modelagem com material concreto e identificação de regularidades. As resoluções apresentadas aqui neste trabalho, não tem o intuito de ser única, nem mesmo a mais bela, pois observações distintas podem ser levadas a identificarem padrões diferentes, porém que resultam na mesma construção.

No Capítulo 1, adotamos definições, demonstramos teoremas e proposições e preparamos bases para sempre que não fosse possível resolver tais problemas pelo processo indutivo nos amparar no processo dedutivo, o que foi de grande validade em algumas ocasiões durante o desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3. Com isso, podemos notar que os dois métodos de raciocínio lógico matemático (indutivo e dedutivo) se complementam e se amparam durante a resolução dos problemas propostos. No Capítulo 2, podemos construir a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética através da análise dos casos mais simples do mesmo problema, o que pode propiciar que os alunos se sintam como construtores de conhecimento e participem mais ativamente do processo de resolução.

Também gostaria de ressaltar que as progressões aritméticas são modelos discretos de funções afins. Portanto, seria uma boa oportunidade para se introduzir o estudos das funções do tipo afins e de suas aplicações como em juros simples. Acredito ainda, que como as progressões geométricas são modelos discretos para as funções do tipo exponenciais, então, logo após a resolução do problema central Contando Quadrados, no Capitulo 2, seria um bom momento de introduzir o estudo das funções exponenciais e suas aplicações como em juros compostos, crescimento bacteriano e populacional. A técnica de resolução de problemas por recorrência nos possibilita criar casos mais simples dos problemas, como no problema da Torre de Hanói (página 71) e o das Cartas de Baralho (página 39), resolver tais casos mais simples, identificar um padrão de resolução e aplicar nos casos mais complexos, porém o maior aliado do homem ainda é sua capacidade de extrapolar limites, imaginar soluções inovadoras e raciocinar. Após a resolução do problema da sequência de Fibonacci, seria um momento ideal para revisar conceitos de equação do segundo grau e se discutir a divina proporção. Já a prática dos jogos introduzidos no Capitulo 3, podem ajudar os alunos a identificar mais facilmente regularidade, propiciar uma maior interação entre os alunos da classe é tornar as aulas de matemática uma pouco mais divertida.

Referências Bibliográficas

[1] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[2] NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**: números reais. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] EMILIANO, R. C. H. **Primeiros Passos em Combinatória**, **Aritmética e Álgebra.** Círculos de Matemática da OBMEP-volume:1. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[4] LIMA, E. L.et al. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 2. SBM, 2006.

[5] TORRES, J. D. S. **Jogos de Matemática e de Raciocínio Lógico**. Petrópolis: Vozes, 2012.

[6] OLIVEIRA, K.; CORCHO A. **Iniciação a Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[7] SANTOS, M. S. **Algumas Variações do Jogo Torre de Hanói**. Feira de Santana: UEFS, 2017.

[8] FREUERSTEIN, R.; HOFFMAN M. B.; MILLER, R. **Instrumental enrichment**: An intervention program for cognitive modifiability. Univ. ParkPress, 1980.

[9] SILVA, W.; TIRADO, A. C. S. **Meu Primeiro Livro de Xadrez**: curso para escolares. Expoente, 1995.

[10]A ENCICLOPÉDIA LIVRE WIKIPEDIA. **Dama (Xadrez)**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Dama(xadrez), 2022.> Acessado em : 30/06/2022.

[11] A ENCICLOPÉDIA LIVRE WIKIPÉDIA. **Sequência de Fibonacci**. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Sequ3AAnciadeFibonacc,2022.> Acessado em: 24/01/2022.

[12] A ENCICLOPÉDIA LIVRE WIKIPÉDIA**.** **Tangram**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tangram,2022.> Acessado em: 26/01/2022.