Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Produto Educacional

Uso do *GeoGebra* no Ensino de Probabilidade Aplicável ao Ensino Básico

Adelmo Araujo Dias
Maurício de Araujo Ferreira

Feira de Santana

Dezembro de 2024

Introdução

O presente produto educacional é resultado do trabalho desenvolvido em uma dissertação de mestrado do PROFMAT. Este estudo versou sobre a utilização do recursos tecnológico Geogebra para o ensino da probabilidade no Ensino Básico e teve o intuito de estimular a aprendizagem e atrair o interesse dos estudantes quanto a essa temática.

O ensino da Matemática, na atualidade, requer cada vez mais instrumentos que auxiliem no processo de aprendizagem no ensino básico (fundamental e médio), fazendo-se necessária uma transformação na prática docente, proporcionando assim, um entendimento mais acessível aos estudantes. Sendo assim, uma possibilidade nesse processo é a utilização de atividades criativas tecnológicas que facilitem o ensino.

O ensino com ferramentas que auxiliem o processo de aprendizagem, como o *GeoGebra* por exemplo, podem ser utilizados como instrumentos que visem a uma melhor compreensão dos assuntos, devido ao uso de facilitadores no ensino. Desse modo, a educação empírica é dita aquela a qual se aprende através da prática, da observação e não da teoria, por meio dos processos de compartilhamento de experiências relativas a ações coletivas cotidianas (GOHN, 2006).

Ademais, o emprego de ferramentas digitais representa uma relevante estratégia no processo de aprendizagem, uma vez que facilita a promoção de um conhecimento mais atrativo, de forma mais agradável, além de apresentar maior qualidade, permitindo que o jovem desenvolva certas competências, como a atenção e a memorização.

O recurso facilitador da aprendizagem relacionado à probabilidade é o software livre *GeoGebra*, o qual permite a vinculação de conteúdos matemáticos que comprova a interação, a criação, a manipulação, além do armazenamento dispensado por objetos como régua e compasso, permitindo assim, que as construções geométricas se tornem mais amorosas e mais precisas (SILVA, 2016).

O uso do *GeoGebra* como Ferramenta Facilitadora no Ensino de Probabilidade na

Matemática, funcionará como uma espécie de material pedagógico, onde será informado o passo a passo de como os estudantes do Ensino Básico devem usar esse software para resolver alguns problemas de probabilidade. Usaremos comandos manuais para procurar *variáveis discretas* em pouca quantidade e comandos automáticos para o programa calcular aquelas variáveis quantidades elevadas, pro exemplo, encontrar o total de números múltiplos de 3 de 1 a 500.

Capítulo 1

Uso do *GeoGebra* como Ferramenta Facilitadora no Ensino de Probabilidade na Matemática

Criado por Markus Hohen Warter em 2001, o aplicativo *GeoGebra* apresenta inúmeras vantagens para as aulas de Matemática. Esse instrumento funciona em todos os níveis escolares e de maneira gratuita, sendo este dividido em dimensões onde se relacionam por meio de representação geométrica e álgebra, contendo várias ferramentas que permitem o auxílio nas construções de gráficos, equações e coordenadas (GOMES; OLIVEIRA; DOMINGOS, 2013), e que pode ser também aplicado ao estudo de probabilidade, como vermos adiante.

Na visão de Silva (2016), *GeoGebra* compreende um dispositivo pedagógico passível de se aproximar a conteúdos matemáticos a aprendizagem significativa, corroborando assim, na interação, criação e manipulação, além do armazenamento dispensando de objeto como régua e compasso, por exemplo, estimulando assim, que as construções geométricas se tornem mais complacentes e de excelente visualização.

A criação do software *GeoGebra* vem sendo bastante usado para a educação em matemática nas escolas, principalmente nos estudos da geometria, cálculo e álgebra.

De acordo com o Manual de Ajuda do *GeoGebra* este importante instrumento didático se apresenta de forma dinâmica, no qual podem sofrer automaticamente transformações que possibilitarão à solução de problemas por meio de métodos metodológicos (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2009).

Devido ao avanço dos recursos tecnológicos, é cada vez mais frequente tal método nos processos interligados entre o ensino e aprendizagem nas áreas de exatas, em especial de probabilidade também.

Neste capítulo, resolveremos também questões do capítulo anterior. Entretanto, agora utilizaremos utilizaremos acepção de probabilidade clássica para resolver os problemas.

$$P = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}.$$

Aplicaremos o programa *GeoGebra* como ferramenta inovadora e digital no processo de ensinagem do assunto de probabilidade e verificar os cálculos feitos usando a conceituação acima. Dessa maneira, segue agora algumas questões que resolveremos empregando a ferramenta *GeoGebra* para elucidar o assunto probabilidade nas séries do ensino básico. Utilizaremos a versão *GeoGebra Clássico 5.0* do programa para criar as imagens.

1.1 Uso do *GeoGebra* na Resolução de Questões de Probabilidade

Resolveremos as próximas questões deste capítulo e do capítulo seguinte, usando o software *GeoGebra* e o aplicativo de celular Dice - Teazel Ltd. Para facilitar o entendimento das soluções dos quesitos, é interessante seguir os comandos fornecidos, empregando a linguagem de programação. No próximo capítulo, faremos a simulação de uma moeda ou dado, quando os mesmos forem arremessados um grande números de vezes, e veremos como ficarão as as frequências relativas dos eventos unitários associados a esses experimentos, e o que acontece com as chances de ocorrências desses eventos, quando tais lançamentos se tornarem ainda cada vez maior, aplicando o programa computacional citado. Já uso app, será feita para fazer reprodução de moedas lançadas 10 ou 50 vezes, processo um pouco demorado, mas que não precisaremos ter moedas em mãos para fazer estas simulações, e além do mais, é uma metodologia motivacional para vermos como pode fazer correlações com os conceitos de probabilidade frequentista.

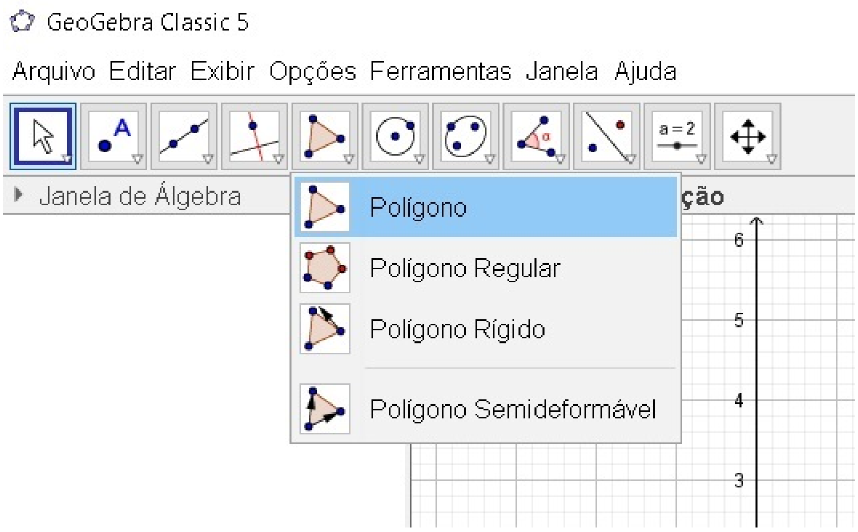
Para isso, vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 1.1. Em uma sala de aula, um professor colocou sobre uma mesa cartões numerados de 1 a 20, e os embaralhou. Em seguida, ele pediu que um aluno, de olhos vendados, retira-se um e somente um cartão. Qual a probabilidade de escolher esse cartão com número par?

Solução

1. Crie um retângulo no *GeoGebra*, utilizando a ferramenta *Polígono*, como mostra a Figura 1.1.

Figura 1.1: Criando o polígono



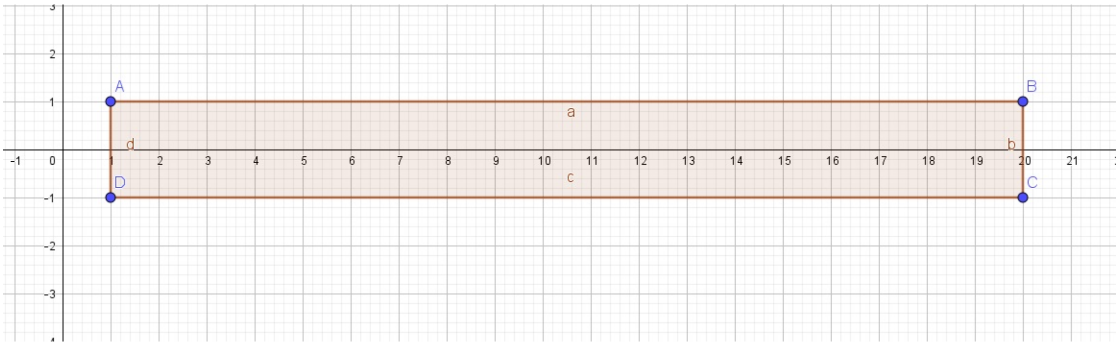
Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

2. Clique nas coordenadas: $(1, 1), (20, 1), (20, -1)$ e $(1, -1)$ respectivamente, e retorne ao ponto (1, 1) para formar o retângulo, conforme representado na Figura 1.2. E clique no ícone *Mover*, onde tem o símbolo de uma seta, para desativar a ferramenta *Polígono*.

3. Clique na bolinha dos pontos exibidos na *Janela de Álgebra*: A, B, C, D e E para ocultá-los. E, para ocultar os rótulos dos seguimentos de retas do retângulo: "a, b, c"e "d", clique com o botão direito em cima deles, no ambiente da *Janela de Álgebra*, e clique em *Exibir Rótulo*, conforme a Figura 1.3.

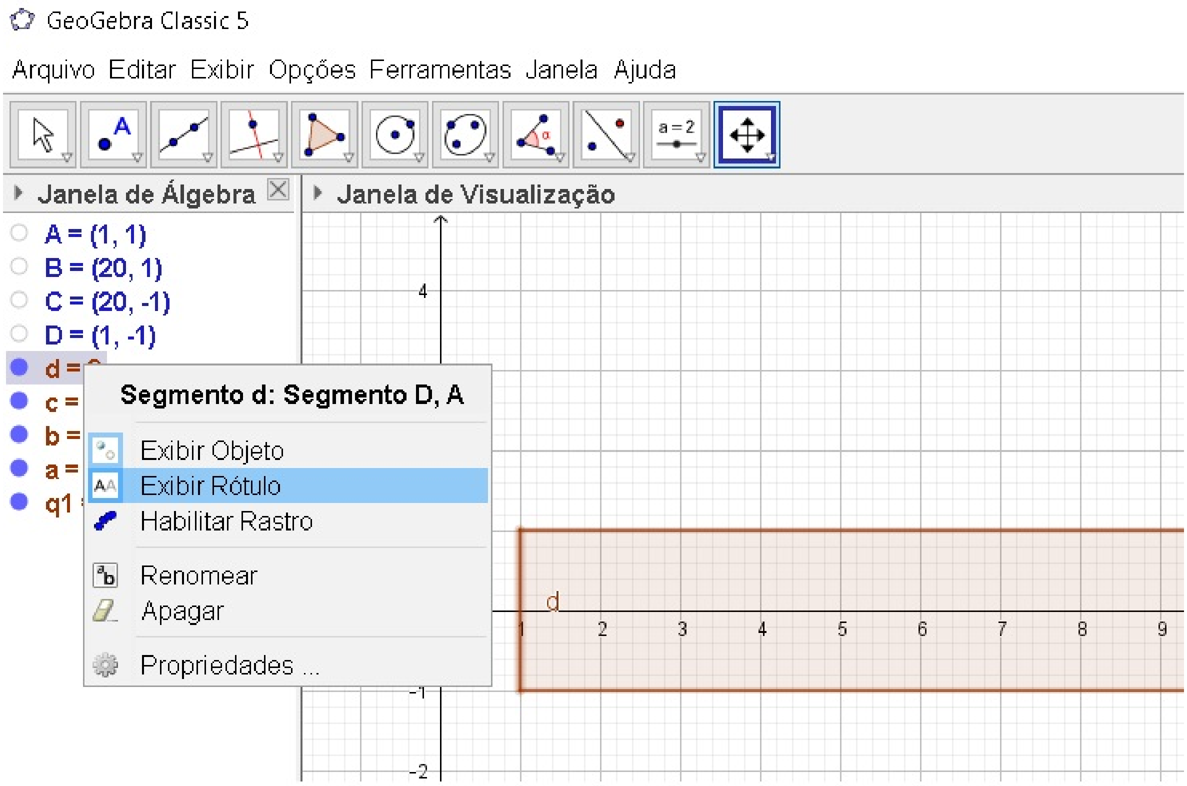
4. Clique na ferramenta *ponto*, conforme Figura 1.4.

Figura 1.2: Criando o retângulo



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.3: Ocultando pontos e rótulos



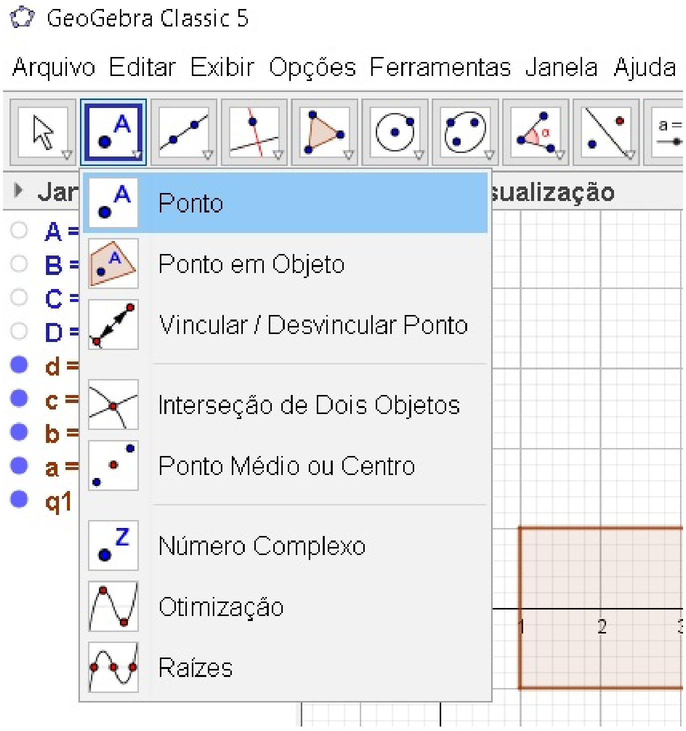
Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

5. E marque os números pares no eixo OX, como apresentado na Figura 1.5.

Assim, é fácil observar a probabilidade, pois o aluno terá a percepção que dentre os 20 números que constam no retângulo, no eixo horizontal, 10 deles foram identificados como pares, ou seja, metade da quantidade daqueles 20 números. Para concluir o exercício, o aluno pode calcular a probabilidade como sendo 10 chances em 20.

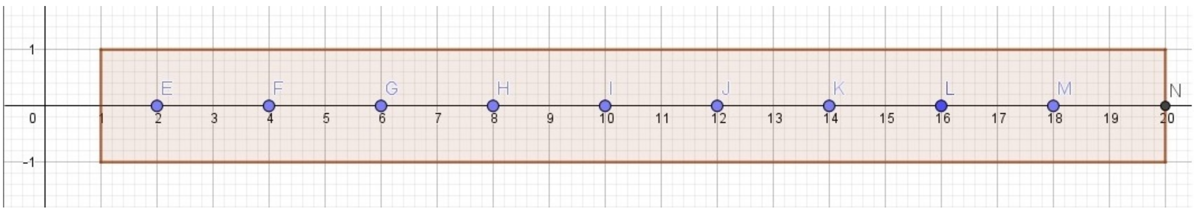
Logo, a probabilidade (P) será

Figura 1.4: Ponto



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.5: Marcando os pontos pares



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

$$P = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Fizemos um detalhamento de passos, e enumerando-os um após o outro, para facilitar o entendimento da questão, fazendo o uso da construção da mesma através do programa *GeoGebra*, a fim também do leitor se acostumar inicialmente com os botões e ícones do programa. Nos exemplos subsequentes, seremos mais breves nos pormenores e imaginado que o usuário do recursos computacionais já tenha se familiarizado com pelo menos algumas instruções do software.

Exemplo 1.2. Numa urna contém 25 bolas numeradas de 1 a 25. Uma bola é retirada ao acaso. Determine a probabilidade dessa bola vir com um número

a) par.

b) múltiplo de 3.

c) par e múltiplo de 3, ao mesmo tempo.

d) par ou múltiplo de 3.

e) nem par nem múltiplo de 3.

Solução:

a) Para criar uma lista com 25 pontos, numerados de 1 a 25, sobre o eixo horizontal, abra o *GeoGebra* e no campo *Entrada*, localizado na parte inferior do programa, digite a palavra *Sequência* e escolha a opção seguinte.

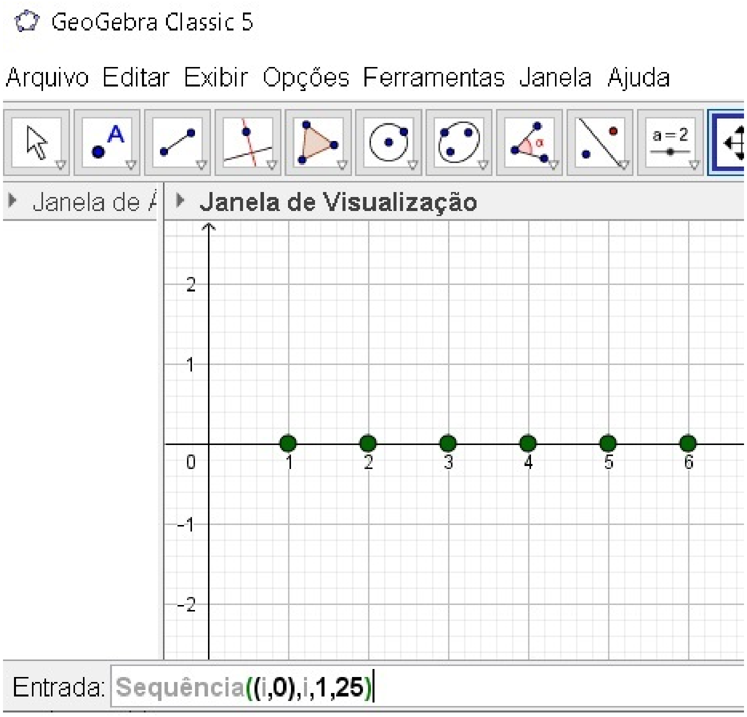
Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

Substitua os campos <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial> e <Valor Final> por $(i, 0)$, i, 1 e 25, que representam pares ordenados sobre o eixo horizontal OX, na variável i, valor inicial é o par ordenado $(1, 0)$ e valor final é o par ordenado $(25, 0)$ respectivamente do programa. O comando *Sequência* permite repetir uma ou mais operações e/ou comandos precisam que seus parâmetros numéricos se modifiquem. Seria uma recorrência. Na linguagem do *Geogebra*, uma possível recorrência é a sintaxe anterior: Sequência (parâmetro 1, parâmetro 2, parâmetro 3, parâmetro 4). Note que estes parâmetros devem estar numa ordem com características apropriadas para funcionar no código fonte do programa. Assim, retomando o que foi dito, o parâmetro 1 é comando ou comandos aninhados que desejamos que sejam recorrentes executados, o parâmetro 2 é variável usada na expressão e o que deve ser declarada para que o comando sequência possa fazer as substituições pelos valores que serão informados, e por fim o parâmetro 3 e parâmetro 4 representam a quantidade de vezes que a expressão será repetida e executada com valor inicial e valor final, sendo esses dois últimos, valores a serem substituídos nas variáveis declaradas. Segue como ficará o comando após as substituições.

▷ Sequência((i,0),i,1,25).

Confirme ou pressione a tecla *Enter*, de acordo a Figura 1.6.

Figura 1.6: Sequência de Pontos de 1 a 25



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

A fim de evitar o uso repetitivo do comando confirmar ou *Enter* no campo *Entrada*, fica subtendido, a partir de agora, que quando digitar algum comando nesse ambiente, deve-se sempre ratificá-lo na tecla anterior.

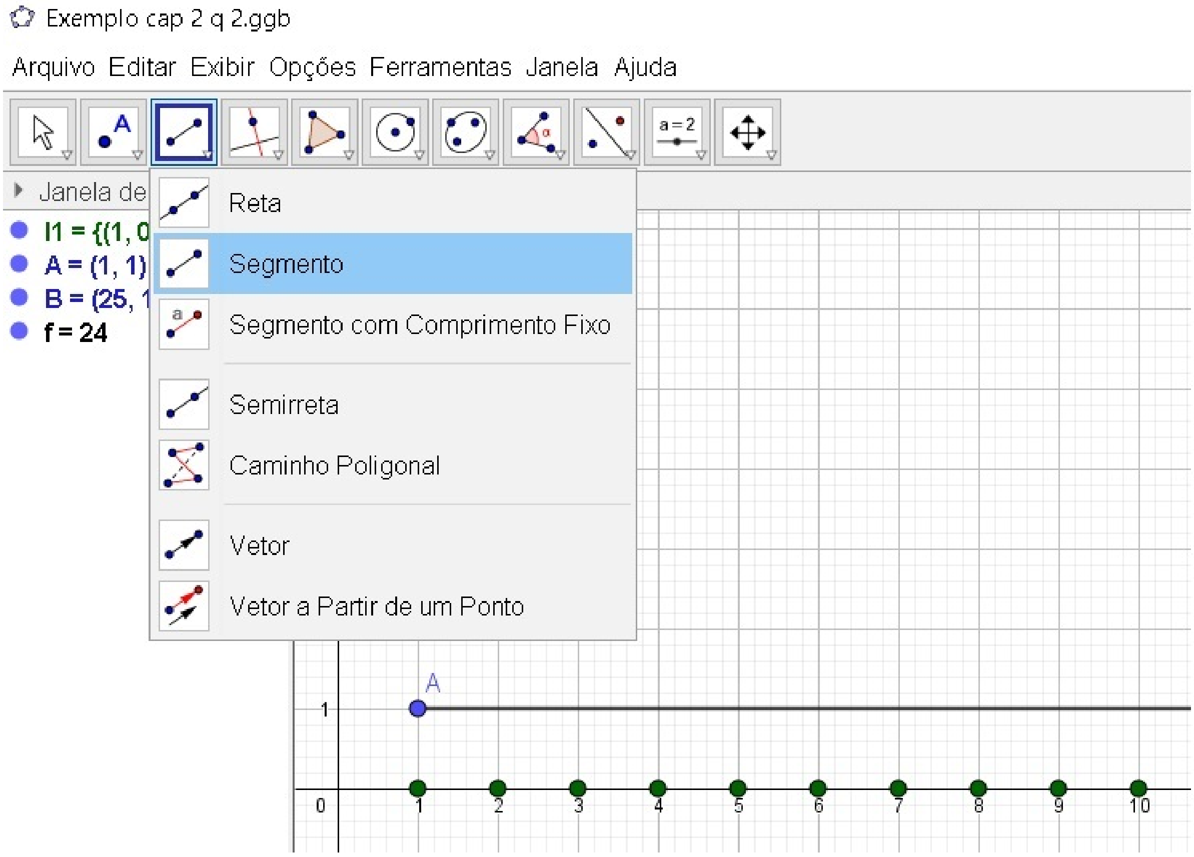
Os pares ordenados de coordenadas $(i, 0)$, com $1 \leq i \leq 25$ e i natural, serão expressados para os estudantes como se fossem os números: $1, 2, 3, 4, ..., 25$ sobre o eixo OX do *GeoGebra*.

Vá no ícone *Reta*, na opção *Seguimento de Reta*, para fazer o segmento de reta $\overline{AB}$, clicando no posto $(1, 1)$ e no ponto $(25, 1)$. Oculte esses pontos extremos do segmento de reta, clicando nas bolinhas de cada ponto na *Janela de Álgebra*, criando o seguimento *f*. Conforme apresentado na Figura 1.7.

Marque perpendicularmente, aos números pares da sequência original, novos pontos sobre o segmento *f*. Nesse momento, o estudante observará que foram marcados 12 novos pontos sobre o segmento criado, de acordo a Figura 1.8.

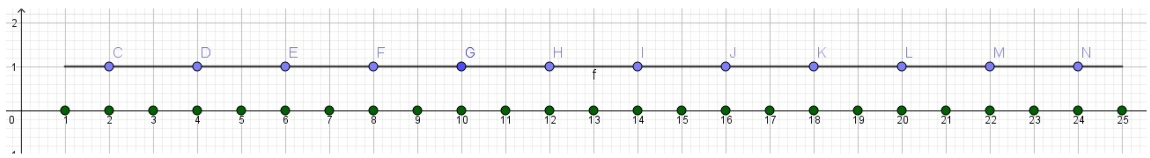
Os pares ordenados de coordenadas $(i, 1)$, serão representandos para os estudantes

Figura 1.7: Criando segmento de reta



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.8: Números Pares



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

como se fossem os números pares maiores que 1 e menores que 25: $2, 4, 6, ..., 24$ sobre o segmento f criado.

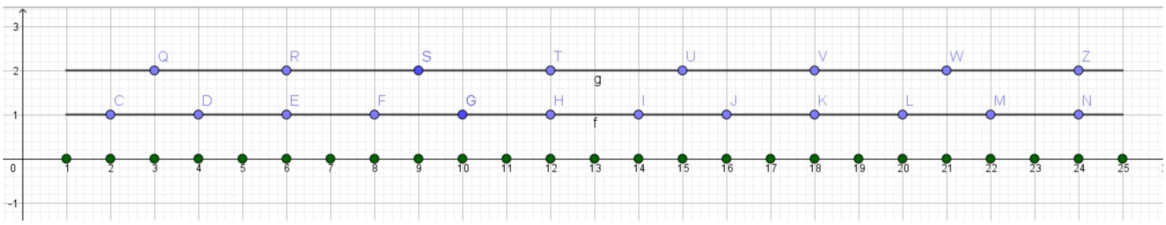
Considerando uma situação hipotética, que o segmento f fosse sobreposto sobre o eixo horizontal fazendo-se coincidir abscissas pares iguais, o estudante notará que tem-se 12 pontos novos num total de 25. Sendo assim, a probabilidade procurada é

$$P(F) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}} = \frac{12}{25}. \qquad \square$$

Para simplificar a linguagem nas próximas alíneas, faremos uma "equivalência" entre 'a probabilidade procurada' e 'a fração do número de elementos de pares ordenados de cada novo segmento em relação a todos os elementos do semieixo horizontal OX do *GeoGebra*'.

b) De modo análogo ao item a), crie um novo segmento - g - paralelo ao eixo horizontal, abrangendo os pares ordenados $(1, 2)$ e $(25, 2)$, clicando na ferramenta *Segmento de Reta*. Oculte os pontos extremos desse segmento, e marque novos pontos múltiplos de três, em g, correspondentes aos múltiplos de 3 do eixo horizontal. Como mostra a Figura 1.9.

Figura 1.9: Múltiplos de 3



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

De modo idêntico à alínea anterior, pares ordenados de coordenadas $(i, 2)$, serão representandos para os estudantes como se fossem os números múltiplos 3 maiores que 1 e menores que 25: $3, 6, 9, ..., 24$ sobre o segmento g criado.

Considerando uma situação hipotética, que o segmento g fosse sobreposto sobre o eixo horizontal fazendo-se coincidir abscissas pares iguais, o estudante notará que tem-se 8 pontos novos num total de 25.

Sendo assim, o aluno deve observar que os pontos que representam os múltiplos de 3, no segmento g, são 8 num total de 25 pontos do eixo horizontal, fazendo assim a correlação entre fração e probabilidade. A probabilidade procurada é

$$P(G) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}} = \frac{8}{25}. \qquad \square$$

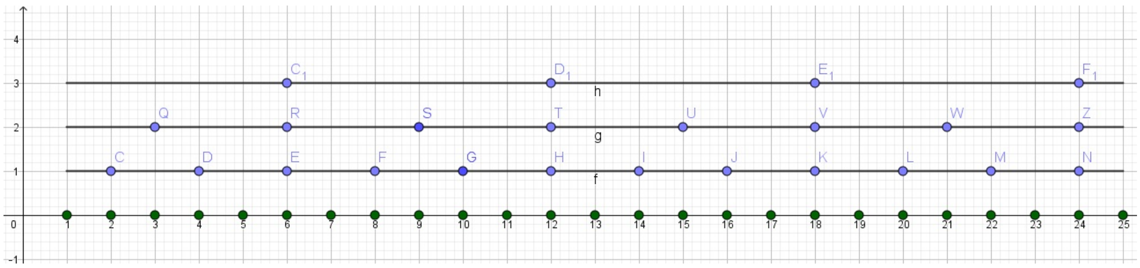
c) De modo análogo aos item anteriores, crie um novo segmento - h - paralelo ao eixo horizontal, abrangendo os pares ordenados $(1, 3)$ e $(25, 3)$, clicando na ferramenta *Segmento de Reta*. Oculte os pontos extremos desse segmento, e marque novos pontos que representam os números pares e múltiplos de 3 ao mesmo tempo. Como mostra a

Figura 1.10.

De modo idêntico às alíneas anteriores, pares ordenados de coordenadas $(i, 3)$, serão representandos para os estudantes como se fossem os números múltiplos de 6 maiores que 1 e menores que 25: $6, 12, 18$ e 24 sobre o segmento h criado.

Considerando esta situação, que o segmento h fosse sobreposto sobre o eixo horizontal fazendo-se coincidir abscissas pares iguais, o estudante notará que tem-se 4 pontos novos num total de 25.

Figura 1.10: Números pares e múltiplos de 3 ao mesmo tempo



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Logo, a probabilidade é

$$P(H) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}} = \frac{4}{25}. \qquad \square$$

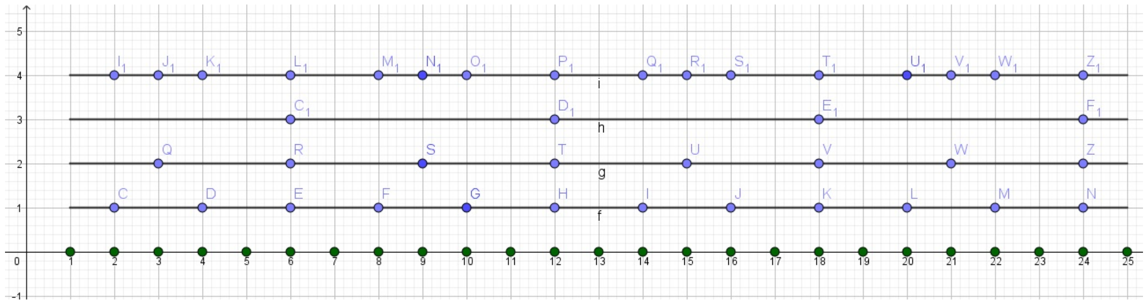
d) De modo idêntico ao item anterior, crie um novo segmento e nomeie-o - *i1* - paralelo ao eixo horizontal, abrangendo os pares ordenados $(1, 4)$ e $(25, 4)$, clicando na ferramenta *Segmento de Reta*. Oculte os pontos extremos desse segmento, e marque novos pontos que representam os números pares ou múltiplos de 3, em *i1*, correspondentes aos números pares ou múltiplos de 3 do eixo horizontal. Como mostra a Figura 1.11.

Os pares ordenados de coordenadas $(i, 4)$, serão representandos para os estudantes como se fossem os números pares ou múltiplos de 3 maiores que 1 e menores que 25 sobre o segmento *i1* criado.

Se fosse sobrepor *i1* sobre o eixo horizontal, veríamos que tem-se 16 pontos que representam números pares ou múltiplos de 3, num total de 25. Logo, a probabilidade é

$$P(I) = \frac{16}{25}. \qquad \square$$

Figura 1.11: Números pares ou múltiplos de 3



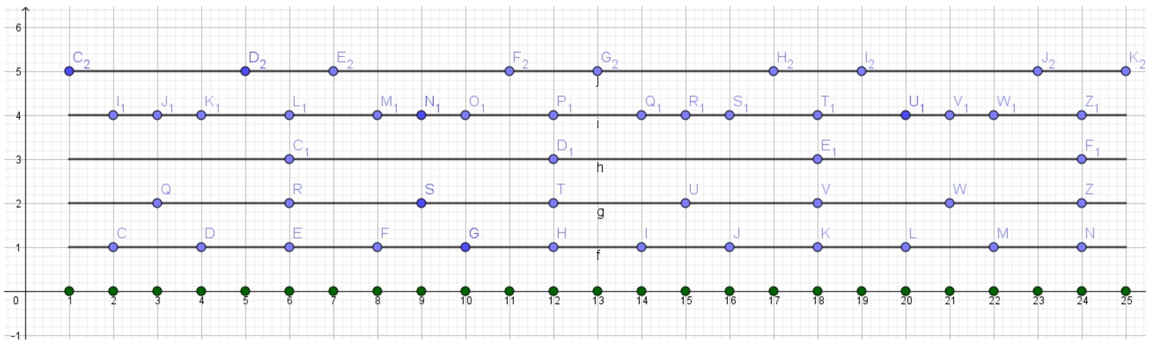
Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

e) Crie por fim um novo segmento - j - paralelo ao eixo horizontal, abrangendo os pares ordenados $(1, 5)$ e $(25, 5)$, clicando na ferramenta *Segmento de Reta*. Oculte os pontos extremos desse segmento, e marque novos pontos que representam os números que não são pares nem múltiplos de 3, em j, correspondentes aos números que não são pares nem múltiplos de 3 do eixo horizontal, como mostra a Figura 1.12.

Os pares ordenados de coordenadas $(i, 5)$, serão representandos para os estudantes como se fossem os números que não são pares nem múltiplos de 3 dentre os 25 bolas em questão, sobre o segmento j criado.

Considerando esta situação, que o segmento j fosse sobreposto sobre o eixo horizontal fazendo-se coincidir abscissas pares iguais, o estudante notará que tem-se 9 pontos novos num total de 25.

Figura 1.12: Números não pares e não múltiplos de 3



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Se fosse sobrepor j sobre o eixo horizontal, veríamos que tem-se 9 pontos que representam números que não são pares nem múltiplos de 3, num total de 25. Logo, a probabilidade é

$$P(J) = \frac{9}{25}. \qquad \square$$

Observação 1.1. Pode-se notar que os itens e) e d) se complementam, pois os somatórios das probabilidades de ambos é igual a 1 inteiro, ou em outras palavras

$$\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1.$$

Veja que nos dois exemplos anteriores, os espaços amostrais são finitos e com um número pequeno de elementos (20 ou 25 elementos). Nesse caso, foi proposital usar o *GeoGebra* como ferramenta tecnológica e facilitadora no processo de aprendizagem de probabilidade, e também usar a escrita matemática, tática para incentivar o raciocínio lógico-matemático, provocando a visão crítica em relação aos conteúdos mencionados, pois nesses exemplos, os alunos deveriam ter a noção do que representa cada elemento, descriminando-os um a um e por último contando-os para informar o resultado da probabilidade desejada.

No entanto, poderíamos usar estritamente os recursos do *GeoGebra*, sem o estudante precisar contar os objetos nem fazer anotações em seu caderno, desde que fôssemos trabalhar com conjuntos amostrais finitos e com grande número de elementos, por exemplo, com 500 elementos, sendo inviável ao aluno do Ensino Fundamental, descriminá-los um a um, pois provavelmente eles precisariam do conhecimento de Progressão Aritmética, assunto não abordado nessa etapa de ensino.

Ademais, faremos agora a questão anterior com um espaço amostral, com grande número de elementos, por exemplo, 500 elementos, usando apenas os recursos do *GeoGebra*.

Sendo assim, teremos uma urna com bolas enumeradas de 1 a 500. Então o aluno vai no campo *Entrada* e digite o comando abaixo.

▷ Sequência((i, 0), i, 1, 500).

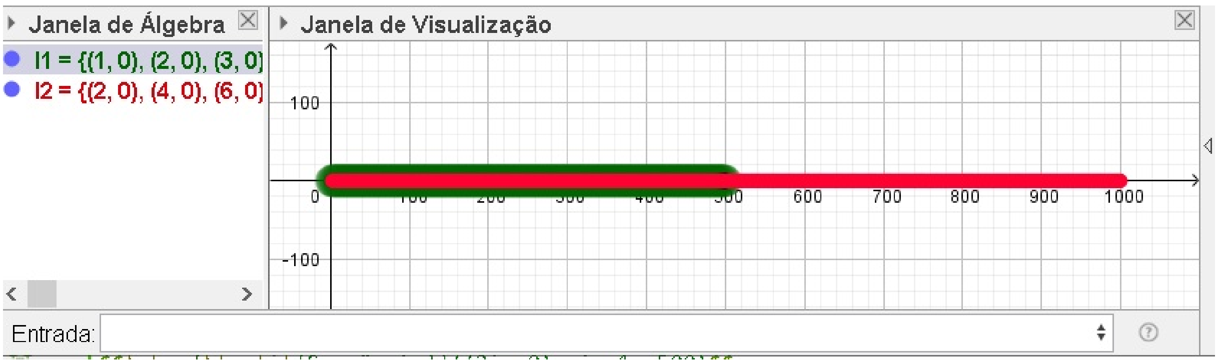
Logo em seguida aparecerá uma lista *l1*, na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização*, com 500 pontos sobre o eixo horizontal que representam as bolas enumeradas de 1 a 500 no eixo horizontal OX do programa.

Uma observação importantíssima, para escolher as bolas que representam números pares de 1 a 500, o aluno não saberá quantos desta bolas tem números pares nessa urna, então sem perda de generalidade, poderemos usar o comando anterior, fazendo uma adequação para obter os tais números pares usando o limite $< valorfinal >$ maior ou igual a 500, pois a nova lista, que é de números pares, com certeza abrangerá todos os números pares pertencentes a lista anterior. Assim o aluno pode digitar *Sequência*$((2i, 0), i, 1, 500)$.

E, aparecerá a nova lista *l2* de pontos sobre o semi-eixo horizontal com coordenadas da forma $(2i, 0)$ e abscissas num total de 500 destes pontos. O *GeoGebra* computará desde o ponto $(2, 0)$ até o ponto $(1000, 0)$. Esta lista *l2* ultrapassará o posicionamento do último par ordenado em relação à lista *l1*. Enquanto o derradeiro ponto daquela lista é $(500, 0)$, o ponto terminal desta lista é $(500, 0)$. Mas poderemos observar todos os pontos que *l1* e *l2* têm em comum através da interseção destas listas que veremos mais adiante.

Depois de ter criado a lista *l2* altere a cor dos elementos da mesma, clicando com botão direito em cima da dela e depois em propriedades. Nesse momento, aparecerá uma a janela onde deve-se clicar na aba *Cor* e escolher uma das cores disponíveis, por exemplo, vermelho, a fim de destacar os pontos pares criados, como mostra a Figura 1.13. Com o propósito de evitar uma janela carregada de objetos, ocultaremos a lista *l2*.

Figura 1.13: Números Pares de 1 a 1000



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Faça agora a intersecção de *l1* com *l2* para obter a nova lista *l3* com números pares de 1 a 500. Para isso, use o comando a seguir.

InterseçãoDeListas(<Lista>, <Lista>).

Esse comando no *GeoGebra*, como o próprio nome diz, já é intuitivo. Ter-se-a então a interseção dos pontos entre duas lista em questão. Desse modo, substitua o comando acima pelo comando abaixo.

▷ *InterseçãoDeListas(l1, l2).*

Após criar a lista, mude o estilo do ponto para X e a cor para vermelha, por exemplo. De modo análogo, faremos agora uma lista de números múltiplos 3. Digite no campo *Entrada*, o seguinte.

▷ *Sequência*$((3i, 0), i, 1, 500)$.

Aparecerá a lista *l4*, e oculte-a. Faça a intersecção de *l1* com *l4* para aparecer os múltiplos de 3, de 1 a 500, na nova lista, notada por *l5*, após altere a cor para azul, o estilo do ponto para ▲ e o tamanho do ponto para 9, por exemplo. Digite o comando a seguir *InterseçãoDeListas(l1, l4).*

Faça a intersecção de *l3* com *l5* para aparecer os pares e múltiplos de 3 ao mesmo tempo, de 1 a 500, na nova lista, notada por *l6*, que representa os múltiplos de 6 menores que 500. Após altere a cor para amarelo, o estilo do ponto para ♦ e o tamanho do ponto para 9, por exemplo. Digite o comando *InterseçãoDeListas(l3, l5).*

Para descobrir os pares ou múltiplos de 3, faça a união de *l3* com *l5* a fim de aparecer estes números, num intervalo fechado de 1 a 500. Tal lista, será representada por *l7*, após altere a cor para lilás, o estilo do ponto para $+$ e o tamanho do ponto para 9, por exemplo. Para conseguir tais pontos, digite o comando no *GeoGebra.*

União(<Lista>, <Lista>).

Este comando no GeoGebra, como o próprio nome diz, já é intuitivo. Ter-se-a então a união dos pontos entre duas lista em questão. Logo em seguida, substitua o comando acima por

▷ União(l3, l5).

Note que nestas sucessivas operações, não conseguiremos destacar as listas feitas anteriormente, pois uma já começa a sobrepor a outra. A fim de evitar dupla interpretação, ao responder a probabilidade de cada item anterior, ocultaremos o excesso de listas e deixaremos evidente apenas o objeto que desejaremos.

Por fim, para descobrir os números que não são pares nem múltiplos de 3, basta encontrar o excesso de números que existem entre as listas *l1* e *l7.* Para descobrir essa sobra, resta fazer a subtração destas duas listas nessa ordem, usando o comando que veremos a seguir, e tendo a consciência que barra invertida (\) representa a subtração desses dois termos e a nova lista será indicada por *l8*, após altere o estilo do ponto para "$\circ$"e altere o tamanho do ponto para 9. E digite o comando

$\triangleright$ l1 \ l7.

Resumindo, então cada lista fica notada assim:

1. *l1* é o número de bolas da urna de 1 a 500;

2. *l3* são os números pares da urna de 1 a 500;

3. *l5* são os números múltiplos de 3 da urna de 1 a 500;

4. *l6* são os números pares e múltiplos de 3 da urna de 1 a 500;

5. *l7* são os números pares ou múltiplos de 3 da urna de 1 a 500;

6. *l8* são os números que não são pares nem múltiplos de 3 da urna de 1 a 500.

Feitas as considerações anteriores, vamos agora descobrir o número de elementos de cada lista, usando a instrução *Comprimento* do *GeoGebra*. Para isso, use o comando a seguir.

Comprimento(<Objeto>).

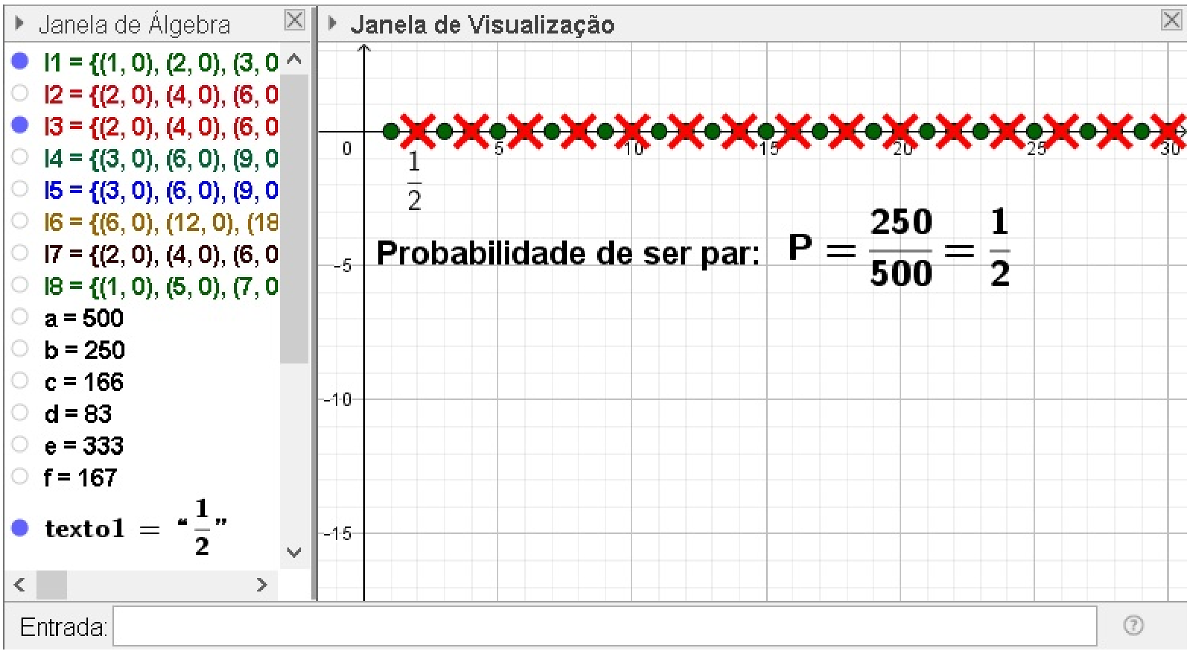
No lugar do termo $< Objeto >$ substitua-o sucessivas vezes por: *l1*, *l3*, *l5*, *l6*, *l7* e *l8*, a fim de obter o número de termos de cada lista, notadas por: $a = 500$, $b = 250$, $c = 166$, $d = 83$, $e = 333$ e $f = 167$, respectivamente. Em particular, melhorando o entendimento, ao digitar no campo *Entrada* do *GeoGebra*, *Comprimento(l1)*, teremos o valor da quantidade de elementos da lista *l1*, notado por $a = 500$.

Sendo assim, fica fácil informar a probabilidade pedida em cada alínea da questão anterior. Para tal cálculo, basta dividir cada letra b, c, d, e e f por a, e informaremos na Janela de Álgebra cada informação ocultando alguns termos como veremos a seguir.

a) Probabilidade de ser par. Veja Figura 1.14.

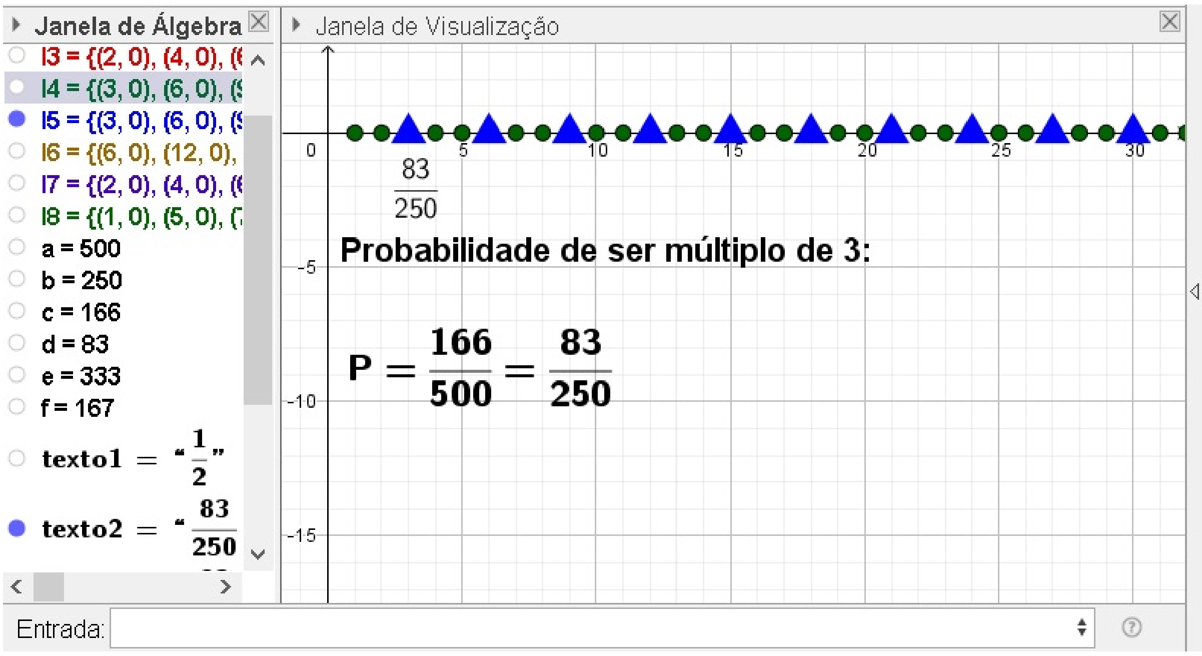
b) Probabilidade de ser múltiplo de 3. Veja Figura 1.15

Figura 1.14: Probabilidade de Números Pares



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.15: Probabilidade de Números Múltiplos de 3



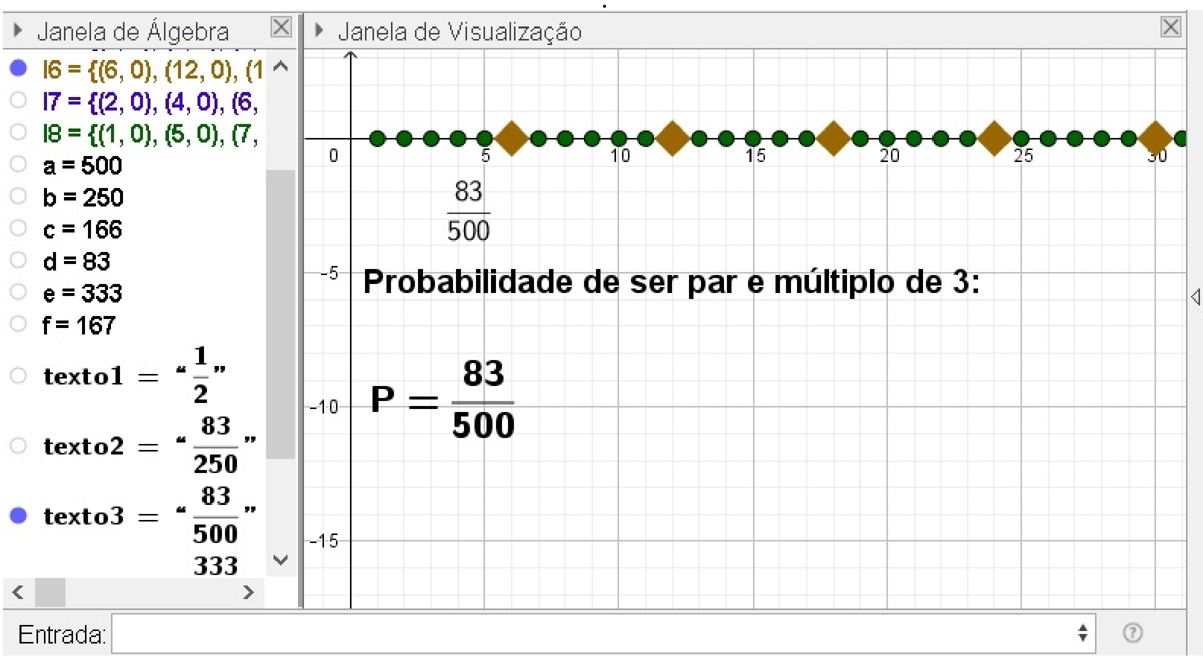
Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

c) Probabilidade de ser múltiplo de 3 e par. Veja Figura 1.16

d) Probabilidade de ser par ou múltiplo de 3. Veja Figura 1.17

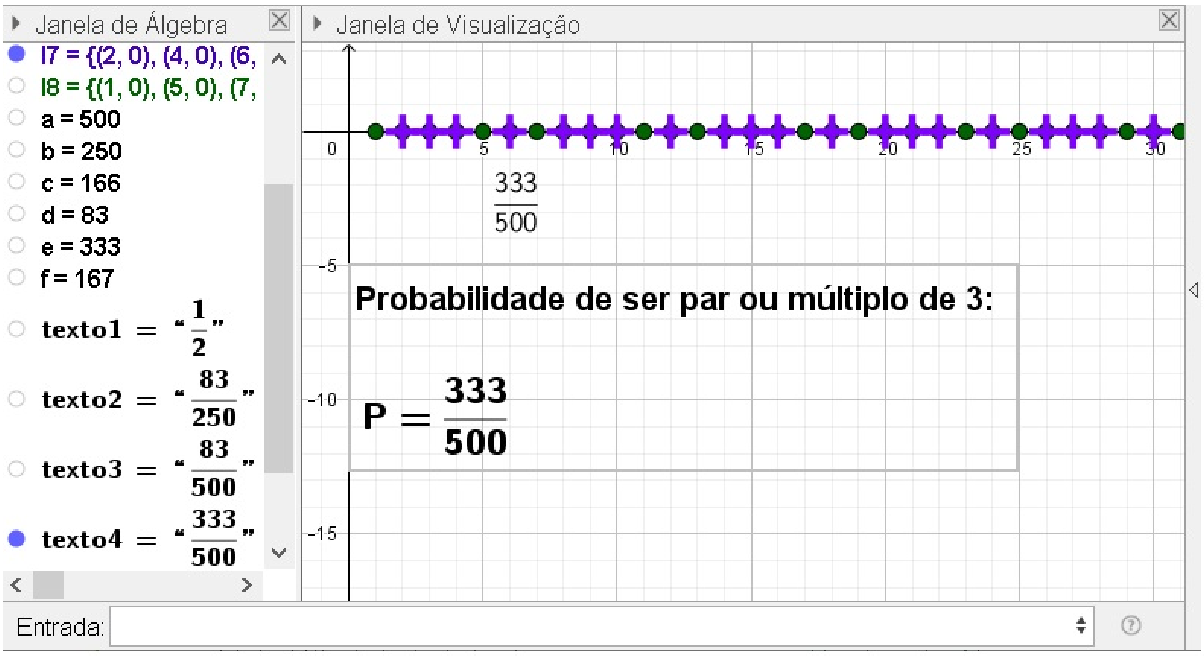
e) Probabilidade de não ser par nem múltiplo de 3. Veja Figura 1.18

Figura 1.16: Probabilidade de Números Pares e Múltiplos de 3



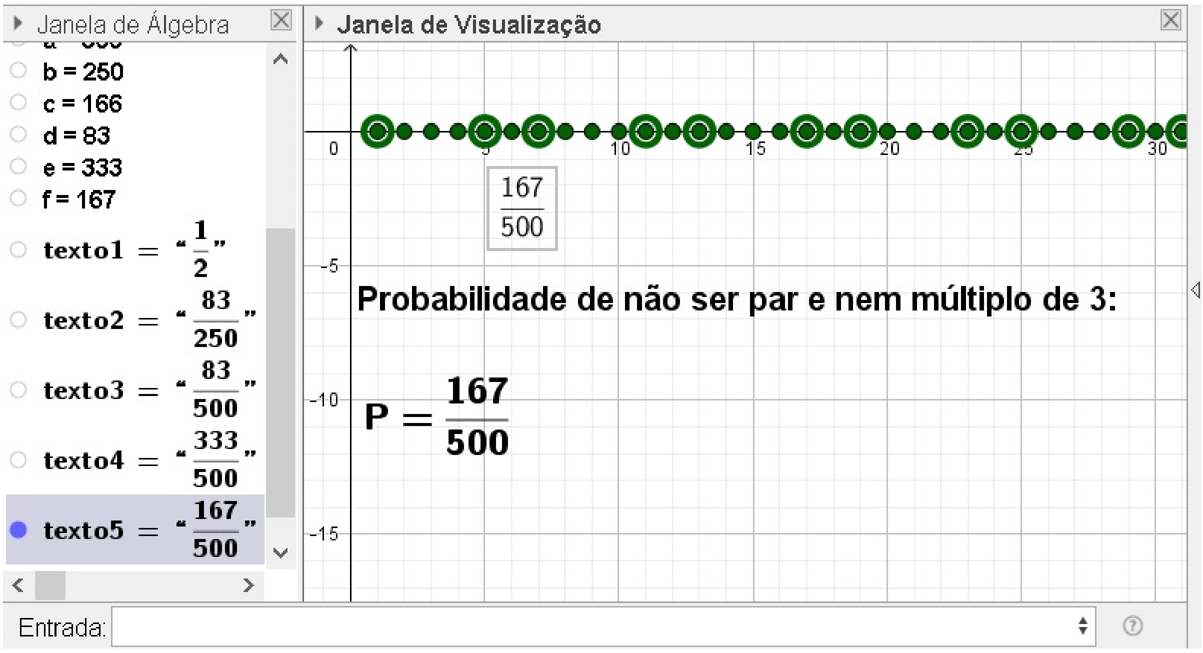
Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.17: Probabilidade de Números Pares ou Múltiplos de 3



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.18: Probabilidade de Não Ser Números Pares e Nem Múltiplos de 3



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Exemplo 1.3. (Nível Fundamental - FGV - 2014 - Prefeitura de Osasco - SP - Inspetor de alunos) O coordenador da escola pediu ao inspetor Alberto que arrumasse, no pátio da escola, os alunos de certa turma em forma de retângulo, formando 5 filas de 8 alunos cada uma. Nessa arrumação, um aluno é chamado de "central" se ele possui algum aluno à frente, atrás, à direita e à esquerda dele.

O coordenador sorteou, ao acaso, um aluno dessa turma. A probabilidade de que ele seja um aluno central é de:

a) 45%.

b) 48%.

c) 50%.

d) 55%.

e) 60%.

Solução:

Nesse tipo de questão, pensaremos em um retângulo de 4×7 que representará o espaço amostral de 40 pontos, assinalados num plano cartesiano. Então usaremos o comando *Sequência* duas vezes , só que um aninhados entre si, como se fosse uma ideia de composição de funções. Assim, aproveitaremos a instrução anterior - *Sequencia* com seus quatros parâmetros bem definidos a seguir.

Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

E no local *<Expressão>*, substituiremos o mesmo comando anterior novamente. Ficando por fim a instrução final dada seguinte.

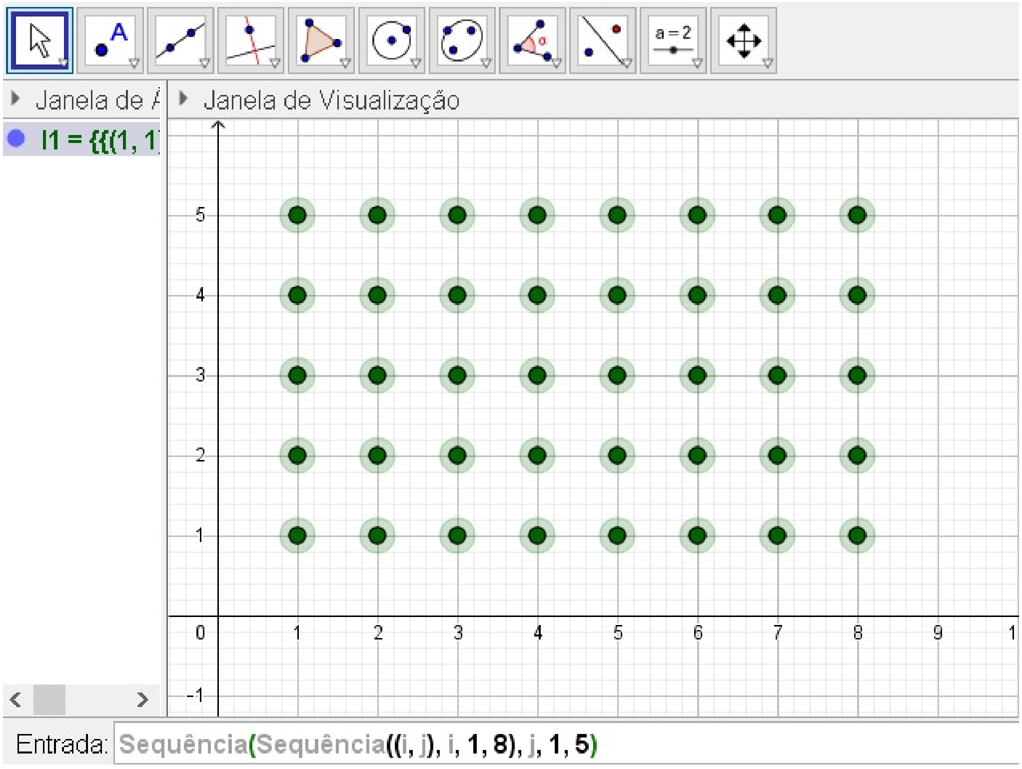
Sequência(Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

Para isso, usaremos o comando abaixo, no campo *Entrada*, criando a lista, *l1*

▷ Sequência(Sequência((i, j), i, 1, 8), j, 1, 5).

Sendo (i, j), coordenadas do plano em que i representa os valores nas abscissas x, com $1 \leq i \leq 8$ e j representa os valores nas ordenadas y, com $1 \leq j \leq 5$, conforme Figura 1.19.

Figura 1.19: Retângulo de Pontos I

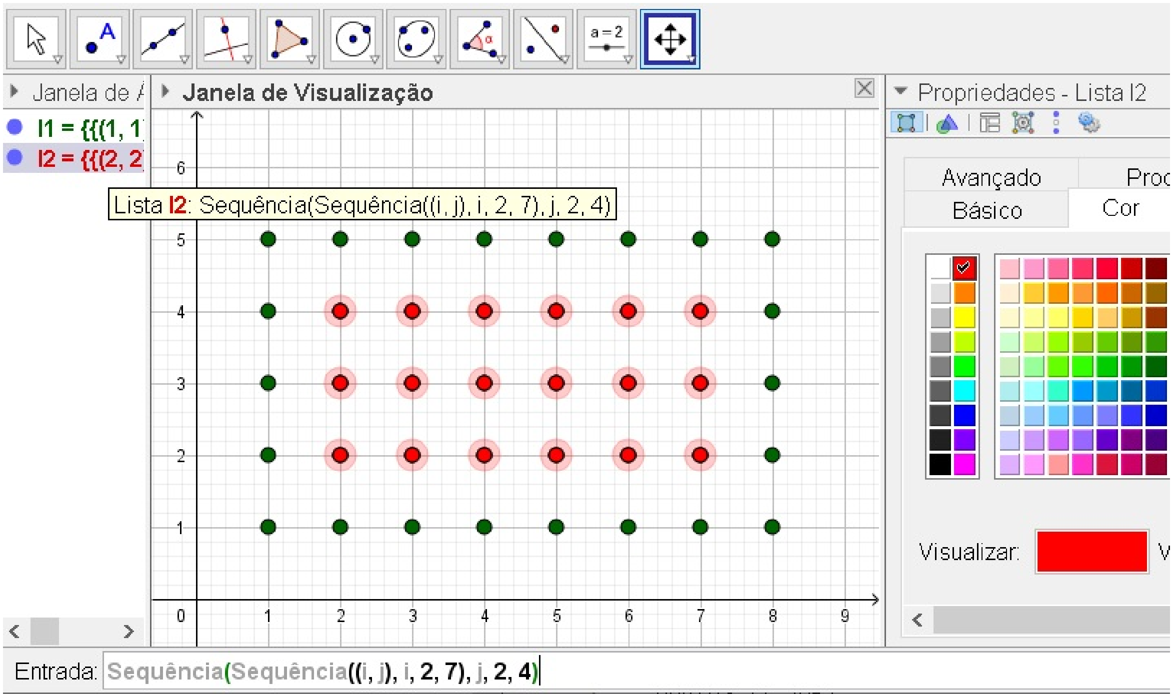


Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Para construir o evento desejado, ou seja, escolher um aluno que é considerado "central", ele não poderá estar em nenhum dos vértices e em nenhum dos lados do retângulo original, ou ainda, esse aluno deverá estar entre um dos alunos que esteja no "corpo central" do retângulo primário. Para isso, pensaremos agora em um outro retângulo de 18 pontos, menor, de dimensões 2×5 limitado entre as coordenadas: $(2, 2)$ $(7, 2)$, $(7, 4)$ e $(2, 4)$. Usaremos o comando Sequência(Sequência((i, j), i, 2, 7), j, 2, 4), criando a lista *l2* para tal fim. De acordo com a Figura 1.20.

Após criar a nova lista *l2*, é interessante alterar a cor dos pontos, para distinguir dos pontos dessa lista em relação a lista anterior. Para isso, clique com o botão direito do mouse em cima da lista *l2*, na *Janela de Álgebra*, e clica em *propriedades*. Nesse momento, será aberto uma janela no canto direito, com várias abas de configuração para os pontos desta lista. Clique na aba *Cor* e selecione a cor desejada para mudar a cor dos pontos, por exemplo, a vermelha.

Figura 1.20: Retângulo de Pontos II



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Sendo assim, fica fácil para o leitor visualizar o espaço amostral com 40 pontos e o evento desejado, com 18. Dessa forma, a probabilidade é

$$P = \frac{Quero}{Tudo} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0,45 = 45\%. \qquad \square$$

Uma outra forma de fazer esta questão, usando totalmente os recursos do *GeoGebra* como foi feito, e além disso também, encontrar a probabilidade desejada de modo automático empregando os comandos computacionais do programa, sem necessidade de calcula-lá manualmente, conforme fizemos anteriormente contando o total de pontos favoráveis e possíveis, é proceder do modo a seguir.

Forneça as instruções corretas para o *GeoGebra* para ele ler e interpretar total de elementos, pares ordenados - (i, j) de cada uma das listas $l1$ e $l2$. Para fazer isso, usaremos o comando

Comprimento(<Objeto>)

e no lugar de *<Objeto>*, substitua por $l1$, ficando o comando *comprimento (l1)*, e será computado todos os pares da forma $(1, j)$, com j natural e $1 \leq j \leq 5$, como isso, teremos na tela do software o valor 5, que representa o total de pares ordenados da 1a coluna da mesma lista. Mas que o código não é o suficiente para ter o total de pontos de forma automática da lista $l1$. Pois este comando *comprimento ($l1$)*, no programa, fornecerá apenas os pontos da 1a coluna de tal lista. Para calcular o total de coordenadas dessa listagem, empregaremos a ideia de comandos aninhados - comandos inseridos em outro comando - e que o *GeoGebra* traduz muito bem. Para isso, daremos outro suporte lógico para computar os todos pares da forma (i, j) dessa lista $l1$. Para conseguir tal procedimento, usaremos a instrução concatenar, que significar juntar todos as coordenadas da vertical ou horizontal de $l1$.

Assim, aproveitando as lista *l1* e *l2* ja criadas anteriormente, usaremos agora um comando para contar os elementos dessas listas. Para isso, vá no campo *Entrada*, e digite

▷ Comprimento(Concatenar(l1))

para contar os elementos da lista *l1*, que será representado por $a = 40$. Para contar os elementos da lista *l2*, utilizaremos essa mesma ideia, com $Comprimento(Concatenar(l2))$, assim, será retornado na *Janela de Álgebra* como $b = 18$. Então para calcular a probabilidade, basta o aluno digitar o comando

▷ FraçãoEmTexto(b/a).

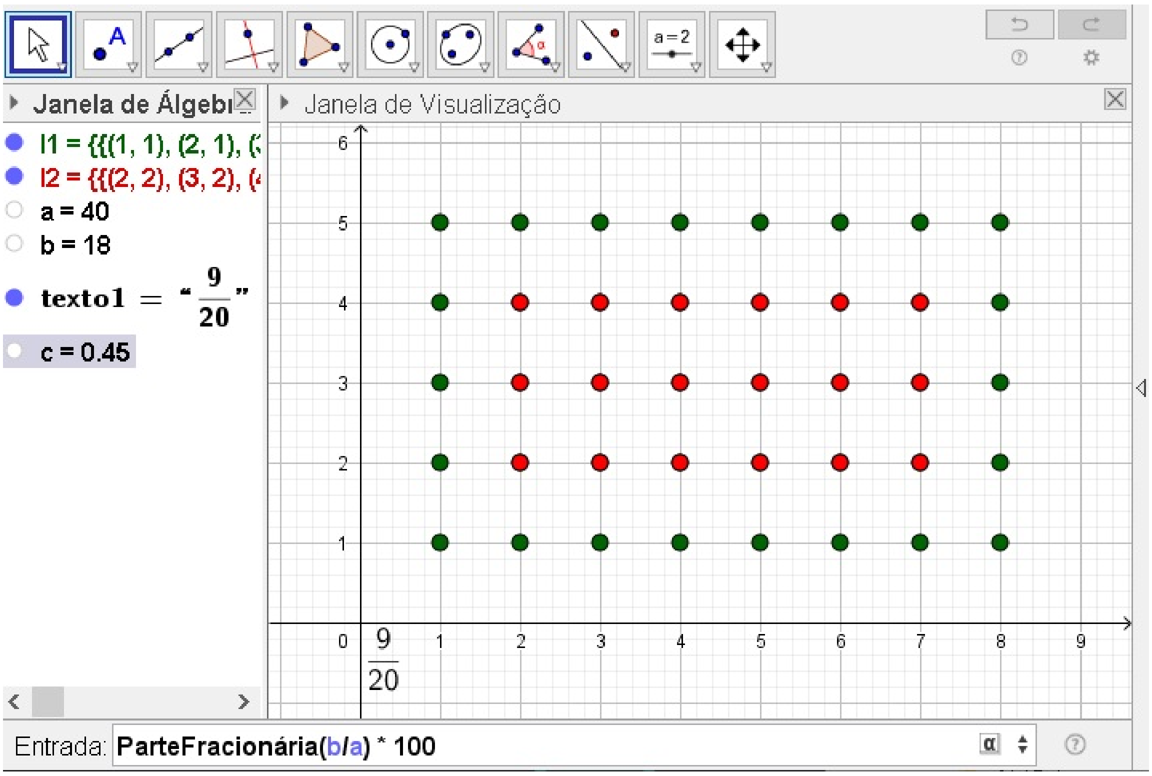
E aparecerá na *Janela de Álgebra*, a fração $\frac{9}{20}$, notado por *texto1*, que corresponde a fração simplificada de $\frac{18}{40}$, cujo resultado, representa a probabilidade procurada. Para finalizar, o aluno pode obter o resultado da fração acima em porcentagem, aplicando o comando

▷ ParteFracionária(b/a) * 100.

E terá retorno na *Janela de Álgebra*, o valor de $c = 45$, que representa 45%. Como mostra a Figura 1.21.

Note que nessa questão, o retângulo original de 40 pontos foi criado, pensando nas medidas unitárias de 4×7. E pode gerar confusão na mente do leitor, em achar que o retângulo deveria ter as medidas unitárias de 5×8 para se ter um total de 40 pontos, que é um ledo engano. Na verdade, os pontos da horizontal e da vertical, não são contados

Figura 1.21: Probabilidade de um Aluno "Central"



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

a partir de uma unidade da malha quadriculada do *GeoGebra*, mas sim, são contados a partir de algum vértice do retângulo. De modo igual, acontece para o retângulo menor (aluno central), em que as medidas unitárias são de 2×5, e não, de 3×6, para se ter 18 pontos, como o leitor poderia imaginar.

Exemplo 1.4. (INEP - 2012 - Enem - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

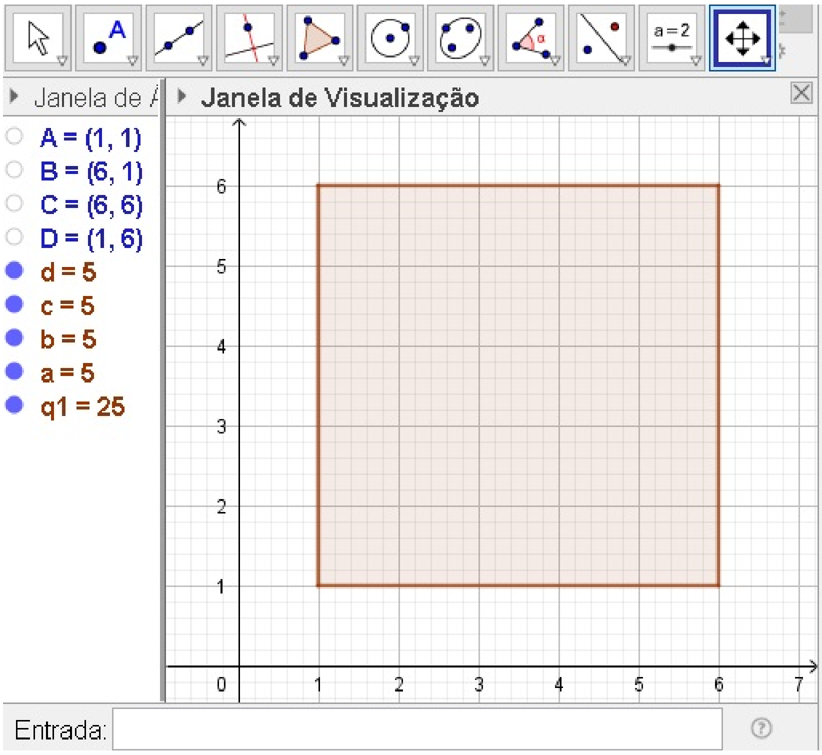
e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Solução:

Admita o lançamento de dois dados representado no plano cartesiano do *GeoGebra*. Sendo que o semi-eixo $\overrightarrow{OX}$ simboliza o lançamento do primeiro dado, numerado de 1 a 6 e o semi-eixo $\overrightarrow{OY}$ simboliza o lançamento do segundo dado, também numerado de 1 a 6, sendo a origem do plano cartesiano representado pelo ponto $O = (0, 0)$. Considere cada par ordenado do plano (a, b), em que a representa um dos números da face superior dado no semi-eixo $\overrightarrow{OX}$, e b representa um dos números da face superior dado no semi-eixo $\overrightarrow{OY}$, com: $1 \leq a \leq 6$; $1 \leq b \leq 6$; $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$. Assuma ainda, o espaço amostral de 36 pares ordenados que representa a soma dessas faces superiores do lançamento desses dois dados.

Feita todas essas considerações, abra o *GeoGebra*, vá na no ícone polígono, crie um quadrado englobando os pontos $(1, 1), (1, 6), (6, 6)$ e $(6, 1)$ e não esqueça de fechar o polígono clicando novamente em $(1, 1)$. Depois oculte os pontos dos vértices desse polígono, e oculte os rótulos dos segmentos de reta, consoante Figura 1.22.

Figura 1.22: Espaço Amostral - Lançamento de Dois Dados



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Em seguida, o estudante deve criar os pontos que correspondem a soma das faces superiores do lançamento de dois dados, sendo:

i. Paulo, com soma igual a 4, clicando pares ordenados: $(3,1),(2,2)$ e $(1,3)$, caracterizando E, F e G, respectivamente;

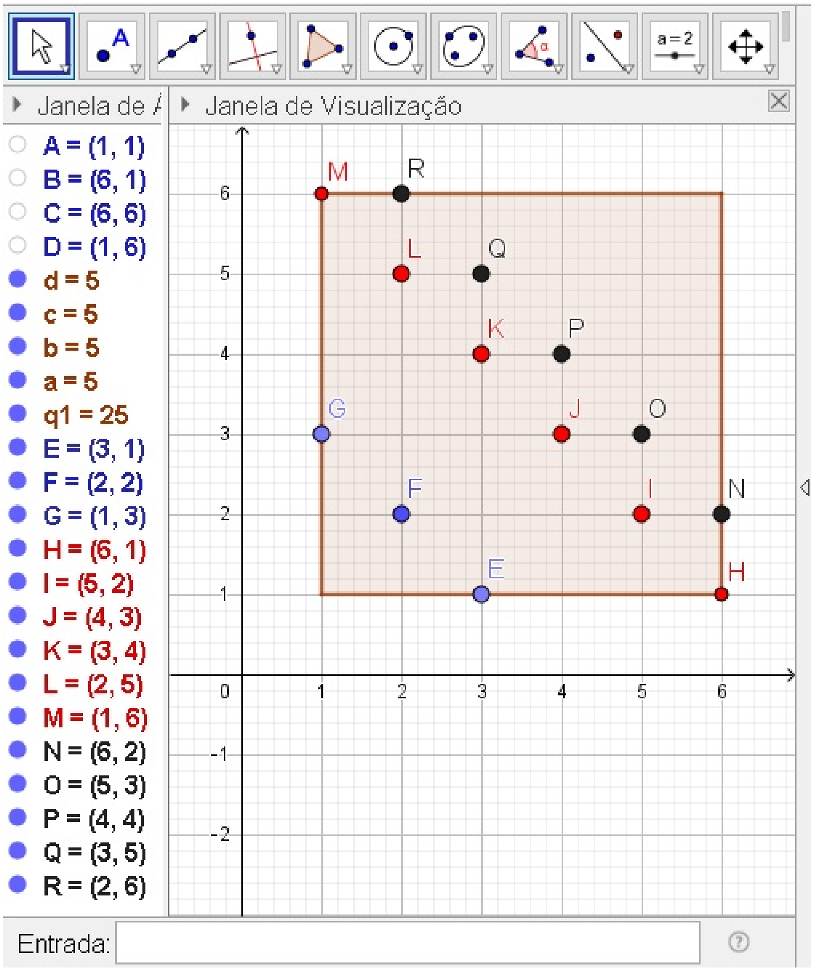
ii. José, com soma igual a 7, clicando pares ordenados: $(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5)$ e $(1,6)$, caracterizando H, I, J, K, L e M, respectivamente;

iii. Antônio, com soma igual a 8, clicando pares ordenados: $(6,2),(5,3),(4,4),(3,5)$e $(2,6)$, caracterizando N, O, P, Q e R, respectivamente.

Depois de criar os pontos, para melhor distingui-los na visualização do *GeoGebra*, é interessante trabalhar com cores diferentes para cada jogador, deixando por exemplo, cor azul para os pontos do jogador Paulo, cor vermelha, para José e cor preta, para Antônio, de acordo com a Figura 1.23

Desse modo, calculando as probabilidades da soma das faces superiores do lançamento dos dados de cada pessoa, são dadas por:

Figura 1.23: Soma das Faces Superiores de Dois Dados



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

$$P(J) = \frac{6}{36},\ P(P) = \frac{3}{36} \text{ e } P(A) = \frac{5}{36}.$$

Portanto $P(J) > P(A) > P(P)$. Logo a alternativa correta é a que corresponde a alínea d). □

Também poderemos fazer essa questão usando apenas recurso do *GeoGebra* sem necessidade do aluno contar ou marcar os pontos do espaço amostral um a um, nem dos eventos desejados. Para isso, faremos os passos a seguir:

i. Crie uma sequência de pontos que forma o polígono de 6×6 citado e será notado por *l1*. Para isso, digite no campo de *Entrada* o comando a baixo.

▷ Concatenar(Sequência(Sequência((i,j),i,1,6),j,1,6)).

ii. Para criar uma lista de pontos em que a soma das coordenadas seja igual a 4, ou em outras palavras, a soma das faces superiores do lançamento de dois dados seja 4, o aluno deve procurar no campo de *Entrada* e digitar a seguinte instrução.

ManterSe(<Condição>, <Variável>, <Lista>), e digitar ou substituir por

▷ ManterSe(x(k) + y(k) == 4, k, l1).

E confirma para aparecer a lista de pontos (*l2*) na *Janela de Álgebra* e *Janela de Visualização*. O comando *ManterSe* funciona da seguinte forma, ter-se-á uma lista, no nosso caso,a lista $l1$, e ele, o comando, vai testar os elementos dessa lista, e nós vamos estabelecer uma condição. Se o objeto de estudo atender a condição pensada, o comando permanecerá os elementos de $l1$ na nova lista ($l2$), senão, ele retirará os demais elementos da lista anterior. Por exemplo, suponha que se tivermos uma lista de elementos $L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ e que desejemos apenas os elementos pares dessa lista L, então iremos em *ManterSe* e pedir o resto da divisão de k por 2 for igual a 0, na variável k da lista L, o comando manterá numa nova lista apenas os elementos divisíveis por 2, senão ele retirará os demais elementos de L na nova lista criada. Na nossa situação descrita, tínhamos a lista $l1$ e queríamos uma nova lista $l2$ com elementos que atendesse uma condição descrita, de que os elementos, ou faces superiores nos lançamentos dos dados, tivessem soma igual a 4. Ao aplicarmos *ManterSe*, os elementos de $l1$ aparecerão em $l2$, senão tivessem tal soma 4, as demais somas diferentes de 4 seriam retiradas da lista $l2$. Outros situações semelhantes nesta questão, usaremos o comando principal *ManterSe*, para soma das faces superiores ou ser 7 ou ser 8 também, criando por conseguinte os objetos $l3$ e $l4$ respectivamente.

Note que ao digitar o comando = duas vezes sem espaço, aparecerá automaticamente o símbolo de igual com uma interrogação sobre ele. No entanto, se introduzir o comando de = única vez, no centro, onde tem <Condição>, o programa não computa tal instrução. Pois já é sintaxe interna do *GeoGebra*, e comando *ManterSe* constará como um argumento inválido. Por isso, é importante que o símbolo = seja digitado duplamente consecutivo sem espaçamento.

iii. De modo análogo, crie as lista (*l3 e l4*) para mostrar os pontos em que a soma das coordenadas é igual a 7 e igual a 8. Para isso, o aluno deve digitar os comandos:

▷ ManterSe(x(k) + y(k) == 7, k, l1) e ManterSe(x(k) + y(k) == 8, k, l1).

Basta para esses casos, pegar o comando que a soma das coordenadas é igual a 4 e substituir esse número por 7 e também por 8, a fim de se obter a soma das coordenadas igual a esses valores.

iv. Depois disso, o estudante pode alterar o estilo e cor das listas *l2*, *l3* e *l4*, indo nas propriedades delas, na aba *Cor*, para altera a cor, e também na aba *Estilo*, para alterar o *tamanho do ponto* puxando a seta para número 9 e alterar o *estilo do ponto* selecionando um dos formatos disponíveis. Isso facilitará a visualização na *Janela de Visualização*.

v. Com o intuito de finalizar a questão, e verificar qual evento tem maior número de elementos, e calcular também a probabilidade, o estudante deve usar a ferramenta do *GeoGebra* que conte os elementos de cada lista. Para tanto, ele deve procurar no campo *Entrada* o comando *Comprimento(lista)*, e substitui-lo 4 vezes por *Comprimento(l1)*, *Comprimento(l2)*, *Comprimento(l3)* e *Comprimento(l4)*. Ao confirmar, obter-se-a na *Janela de Álgebra*, os valores: $a = 36$, $b = 3$, $c = 6$ e $d = 5$, que representam a quantidade de elementos das listas *l1*, *l2*, *l3* e *l4* respectivamente, conforme representado na Figura 1.24.

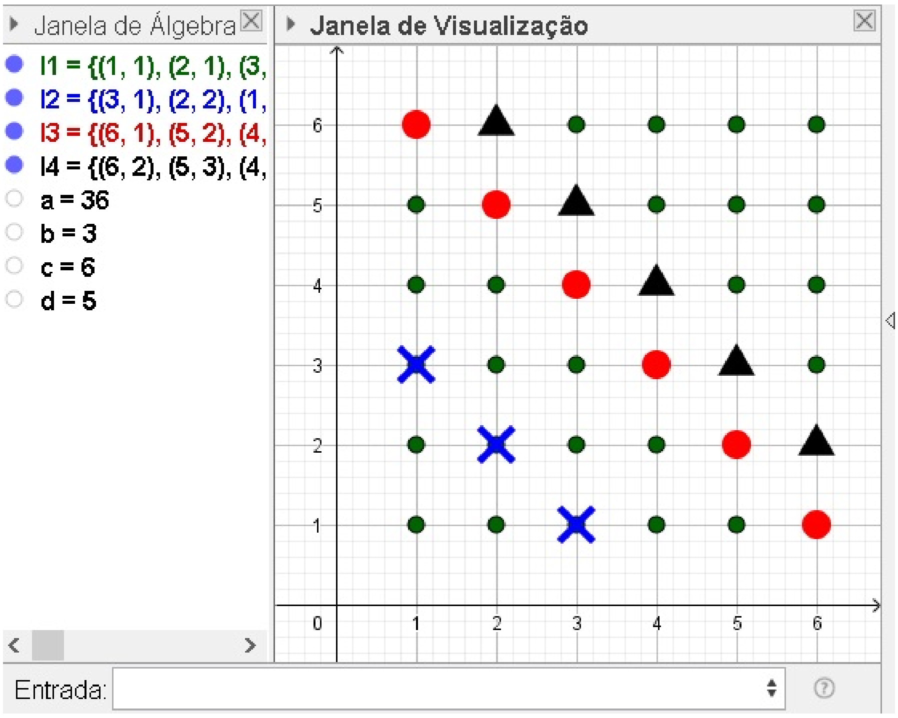
Nesse caso, nota-se que o conjunto que tem maior quantidade de elementos é o *l3*, como mostra a letra $c = 6$ e calculando a respectiva probabilidade que representa a soma das faces superiores de José que é dada por 6 elementos num total de 36, ou seja, probabilidade igual a

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \qquad \square$$

Empregando mesma concepção do exemplo anterior, poderemos aplicar comandos para que a soma das faces dos dados seja menor ou igual a 6 e também o produto delas seja igual a 12. Para isso, consideraremos a lista *l1* de 6×6 feita anteriormente, e utilizando os comandos:

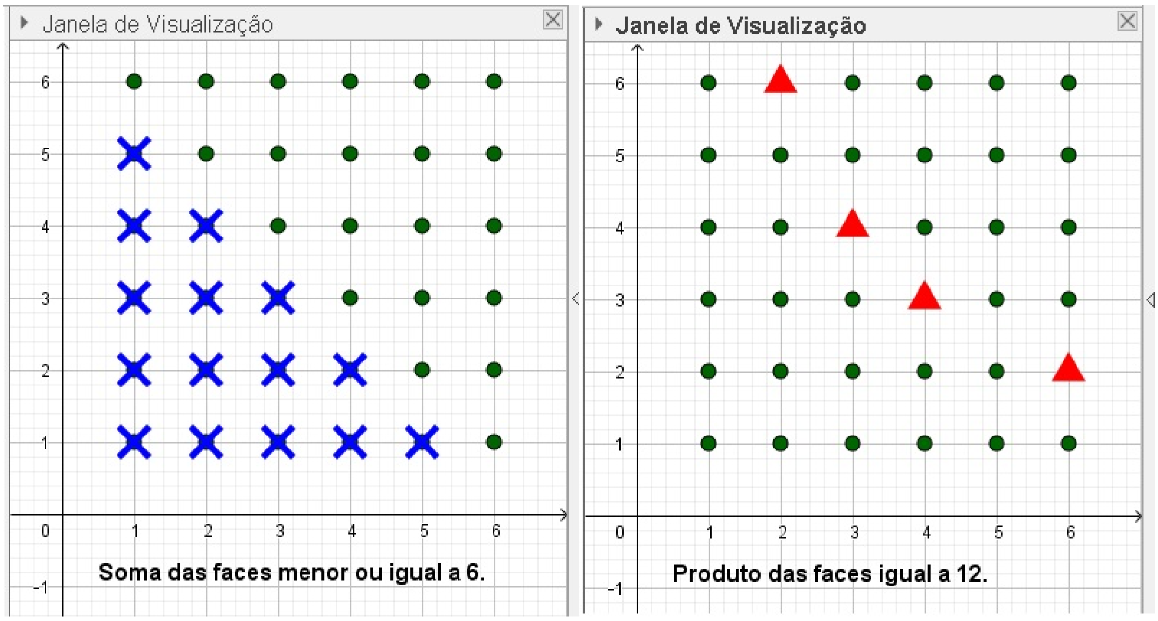
▷ ManterSe(x(k) + y(k) < = 6, k, l1) e ManterSe(x(k)*y(k) == 12, k, l1).

Figura 1.24: Soma das Faces Superiores pelo *GeoGebra*



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.25: Soma e Produto das Faces



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Para se obter o resultado desejado, como mostra a Figura 1.25.

Essas aplicações podem ser feitas em qualquer tipo de dado poliédrico regular: tetraédrico, cúbico, octaédrico, dodecaédrico e icosaédrico.

Exemplo 1.5. (CESGRANRIO - 2012 - Petrobras - Todos os Cargos - Grupo D - Nível Médio II - ADAPTADA) Um dado comum (6 faces), não viciado, teve três de suas faces pintadas de verde, duas pintadas de amarelo e uma, de preto.

Lançando-se esse dado duas vezes, qual a probabilidade de que a face voltada para cima seja preto em pelo menos um dos lançamentos?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{5}{18}$

d) $\frac{11}{36}$

e) $\frac{7}{36}$

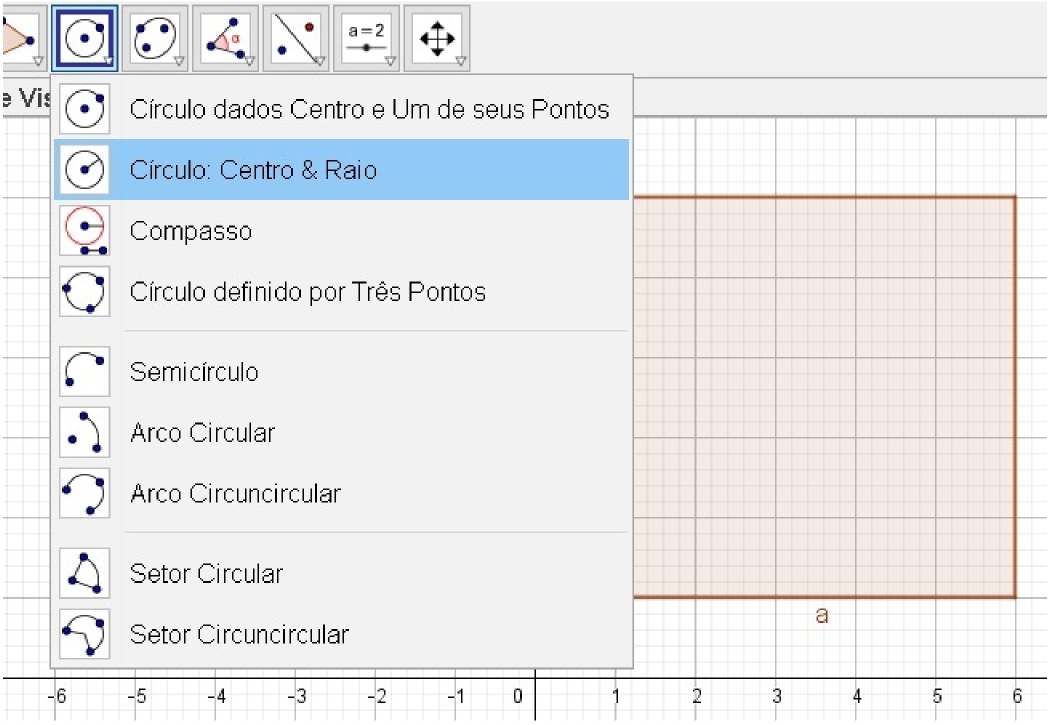
Solução:

Observando o mesmo espaço amostral da questão anterior, em que ter-se-á um polígono que abrange os pontos $(1,1),(6,1),(6,6)$ e $(1,6)$, e também os pares ordenados do seu interior com coordenadas inteiras. No lugar de cada valor das coordenadas: da abscissa e da ordenada, faremos substituições desses valores por circunferências coloridas que representarão as cores das faces do dado em cada um dos dois lançamentos, tanto no semi-eixo $\overrightarrow{OX}$, quanto no semi-eixo $\overrightarrow{OY}$.

Para criar circunferências com centro em local desejado e raio fixo, deveremos clicar na ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* e na opção *Círculo: Centro & Raio*. Depois disso clica na abscissa $(1,0)$, por exemplo, para criar a circunferência de centro nesse ponto e aparecerá uma nova janela pedindo que informe o tamanho do raio, que aqui consideraremos um raio pequeno, de tamanho 0,3, em todos os casos afim de não sobrepor um círculo sobre outro, conforme Figuras 1.26 e 1.27.

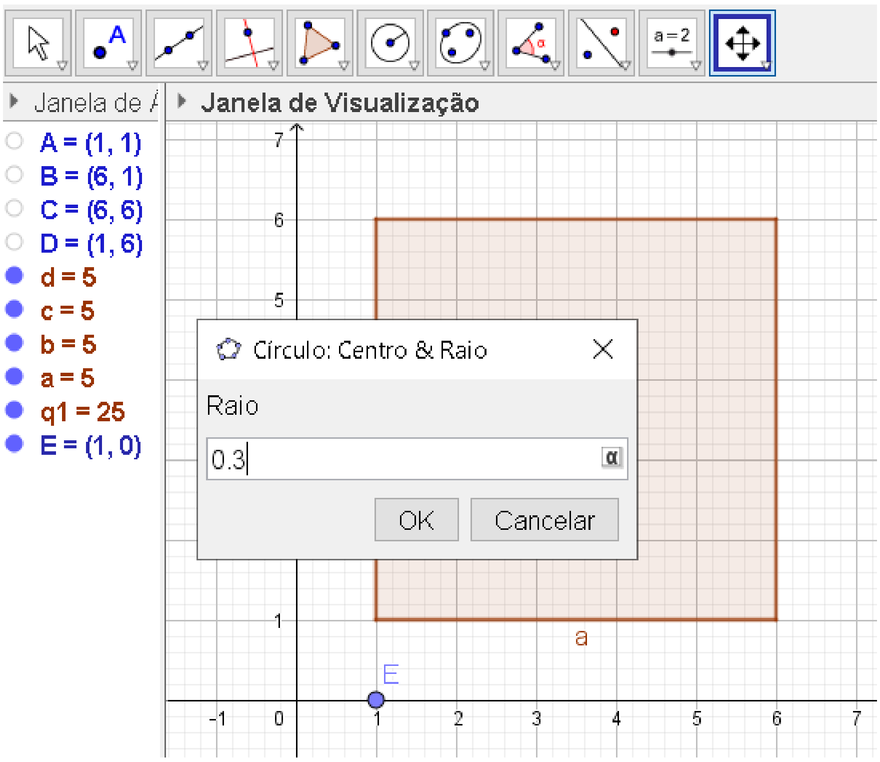
Para fazer cada circunferência, e com a ferramente *Círculo: Centro & Raio* ativada, clicaremos nas coordenadas $(i,0)$ e $(0,j))$ com $1 \leq i,j \leq 6$ e também, atribuindo raio 0,3 em cada uma dessas circunferências. Oculte os centros de cada circunferência. Em seguida, mude as cores das mesmas, que representarão as face do dado em cada um dos dois lançamentos. Para isso, clique com o botão direito em cima da equação de cada circunferência, vá na opção *Propriedades* e na aba *Cor*, e altere as cores conforme pede a

Figura 1.26: Criando Dado Colorido I



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

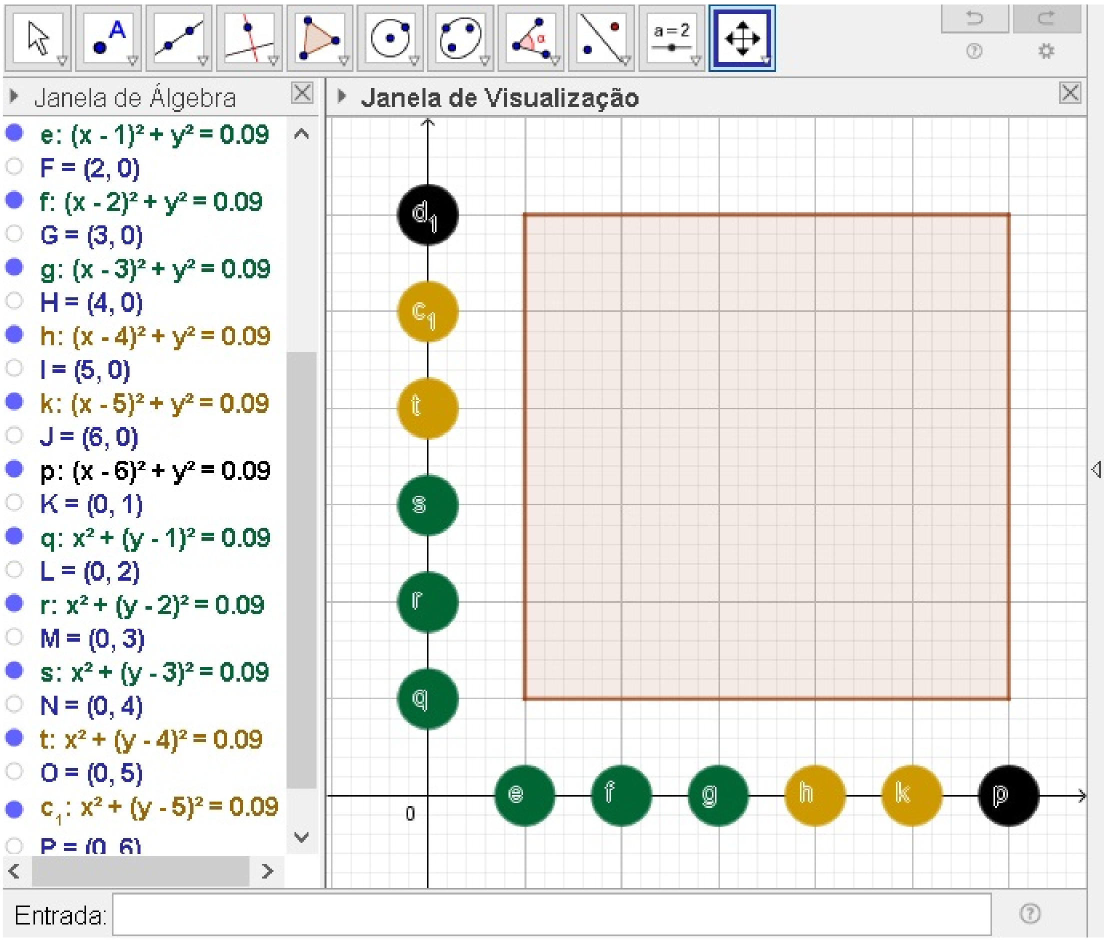
Figura 1.27: Criando Dado Colorido II



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

questão: 3 verdes, 2 amarelas e 1 preta, para cada lançamento do dado, como mostra a Figura 1.28.

Figura 1.28: Dado Colorido I

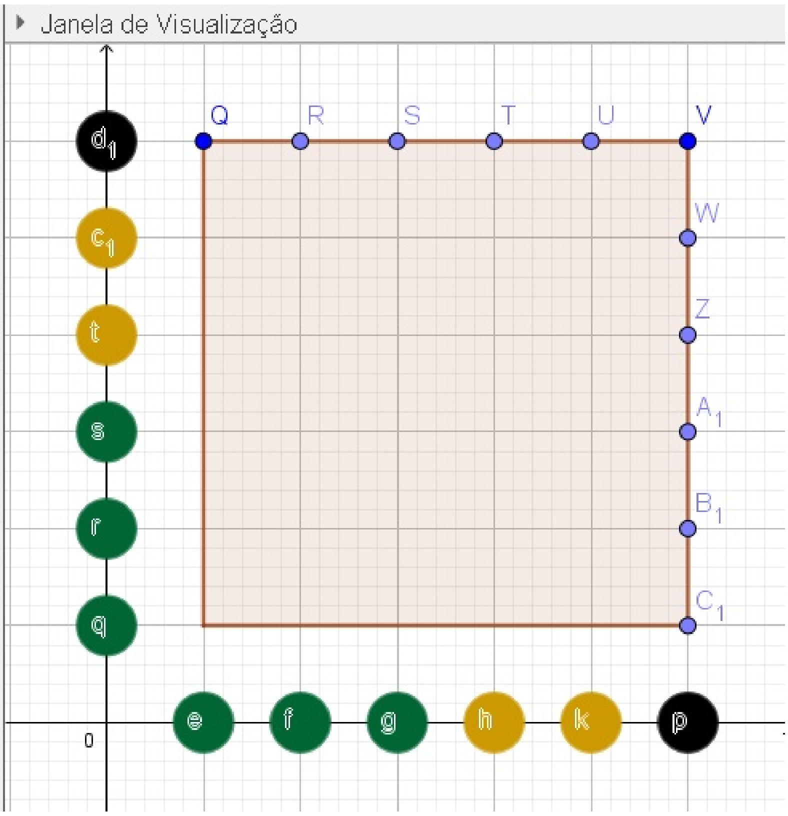


Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

A fim de obter o evento desejado da questão, que é obter pelo menos uma cor preta em cada um dos lançamentos, o estudante deve observar no eixo horizontal e no eixo vertical, onde têm as cores pretas nos dois lançamentos (semi-eixo vertical e semi-eixo horizontal), e fazer o cruzamento desses pares de cores e marcar os pontos, onde prevalecerá no mínimo, uma cor preta, ou seja, o evento desejado são os pontos cujas coordenadas são $(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2)$ e $(6, 1)$. Essas novas coordenadas serão marcadas justamente na linha superior de cima e na parte lateral direita do espaço amostral (do retângulo em questão), consoante à Figura 1.29.

Dessa forma, encontramos 11 coordenadas com pelo menos uma cor preta dentre as 36 coordenadas do espaço amostral de um dado, quando lançado duas vezes. Assim, a probabilidade procurada é

Figura 1.29: Dado Colorido II



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

$$P = \frac{11}{36}.$$ □

Respondendo assim a pergunta, o que corresponde a alternativa do *item d*.

Faremos agora, um exemplo em que o espaço amostral representa o lançamento de dois dados honestos de seis faces cada, idêntico às questões anteriores, onde o aluno pode procurar o evento desejado clicando nos pontos um a um para formar tal conjunto. Mas, como esse procedimento já foi feito antes, usaremos agora a técnica de resolver esse item apenas usando os recursos do *GeoGebra*, a fim de se tornar algo diferente do que já foi visto.

Esta questão se diferencia um pouco mais do Exemplo 1.4, pois nele há intersecção entre os eventos parciais, algo que no exemplo citado não tinha.

Exemplo 1.6. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos distinguíveis, um amarelo e o outro vermelho, determine a probabilidade de obter os seguintes eventos:

a) a soma das faces superiores ser um número par ou a soma ser um número múltiplo de 3.

b) a soma das faces superiores não ser um número par nem ser um número múltiplo de 3;

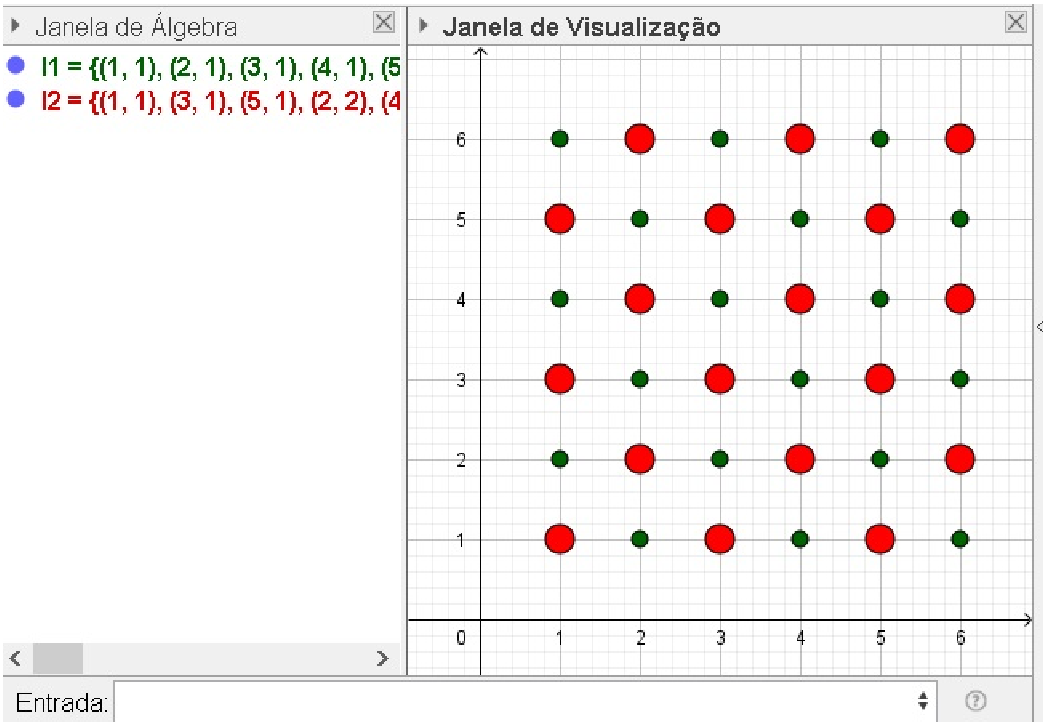
Solução:

a) Uma forma de resolver este item é usar modo manual, ou seja, o estudante pode clicar em coordenadas após coordenadas para encontrar o evento desejado em questão como fizemos no Exemplo 1.4 . Nesse sentido, é simplesmente pensar como foi feito no Exemplo 1.4, em que tivemos um polígono, quadrado englobando os pontos $(1,1),(1,6),(6,6)$ e $(6,1)$ e não esquecer de fechar o polígono clicando novamente em $(1,1)$. Depois ocultar os pontos dos vértices desse polígono, e ocultar também os rótulos dos segmentos de reta, consoante Figura 1.22 anteriormente mencionada. Neste modelo de resolução manual, o discente já tem em mente a noção do espaço amostral são os 36 pontos que representam a soma das faces superiores dois dados perfeitos distinguíveis, um amarelo e o outro vermelho, lançados simultaneamente, esse conjuntos universo é idêntico ao espaço amostral Ω que consta no Exemplo **??**.

Assim sendo, o estudante clicará no pontos que pretende a fim de querer o evento desejado, que neste caso, o evento é a soma das faces superiores dos dados ser um número par ou a soma ser um número múltiplo de três. Nesse sentido, ele verá que tem 24 coordenadas no total de 36 pares ordenados. E as 24 coordenadas são justamente os pontos da união dos conjuntos A (evento cujo soma das faces superiores são números pares) e B (evento cujo soma das faces superiores são números múltiplos de três) expressos a seguir.

$A =$ {*(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)*}, conforme veremos mais adiante na Figura 1.30, as coordenadas assinaladas com pontos maiores. E o conjunto $B =$ {*(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)*}, conforme veremos mais a frente na Figura 1.31, as coordenadas assinaladas com "X". Assim, fazendo a união de A com B, e alertando aos estudantes para não fazer dupla contagem dos pares ordenados repetidos, temos que $A \cup B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (3,6), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,3), (5,4), (5,5), (6,2), (6,3), (6,4), (6,6)\}$, com 24 elementos.

Figura 1.30: Lançamento de Dois Dados - Soma Par



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

b) Já para resolver este item, o estudante poderá verificar que existem $36 - 24 = 12$ pares ordenados em que a soma das faces superiores dos dois dados lançados, não seja um número par nem ser um número múltiplo de três, dentre 36 pares ordenados no total, conforme mostra na Figura 1.31.

Afim de diversificar a metodologia de ensino, tem-se também o processo de resolução desta questão, que pode ser feita de forma automática usando o *GeoGebra*. Para isso, use o comando aninhado a seguir que já foi explicado anteriormente.

▷ Concatenar(Sequência(Sequência((i,j),i,1,6),j,1,6)).

Esse comando representará o espaço amostral de 36 pontos, no sistema de coordenadas cartesianas, em que cada par ordenado configura as faces voltadas para cima no lançamento de dois dados. Aqui neste exemplo, aproveitaremos esta instrução para representar o espaço amostral em questão, e notaremos por *l1*.

Um número é considerado par, ou múltiplo de 2, quando na divisão por dois o resto é 0. Da mesma forma, o número é considerado múltiplo de 3, quando na divisão por 3 o resto é 0.

Procuraremos agora, o evento que simboliza a soma par das faces superiores dos dois dados ao serem lançados. Para isso, use o comando a seguir e substitua-o pelo próximo comando seguinte, respectivamente.

ManterSe(Resto(<Número Dividendo>, <Número Divisor>), <Variável>, <Lista>)

▷ ManterSe(Resto(x(k) + y(k), 2) == 0, k, l1).

Uma nova lista aparecerá na *Janela de Álgebra* e será notada por *l2*. Nota-se ainda, que a soma de $x(k)+y(k)$ traduz um número múltiplo de dois, na variável (k), e, é óbvio que na divisão por dois o resto é zero, como mostra a instrução anterior. Além do mais, *ManterSe* significa manter esses números da lista (*l1*) criada anteriormente.

Depois altere a cor, o estilo e o tamanho dos pontos da lista (*l2*). Como mostra a Figura 1.30.

Agora crie uma lista (*l3*) dos números múltiplos de 3, seguindo a mesma ideia como foi criada os múltiplos de 2, no processo anterior. Use o comando

▷ ManterSe(Resto(x(k) + y(k), 3) == 0, k, l1).

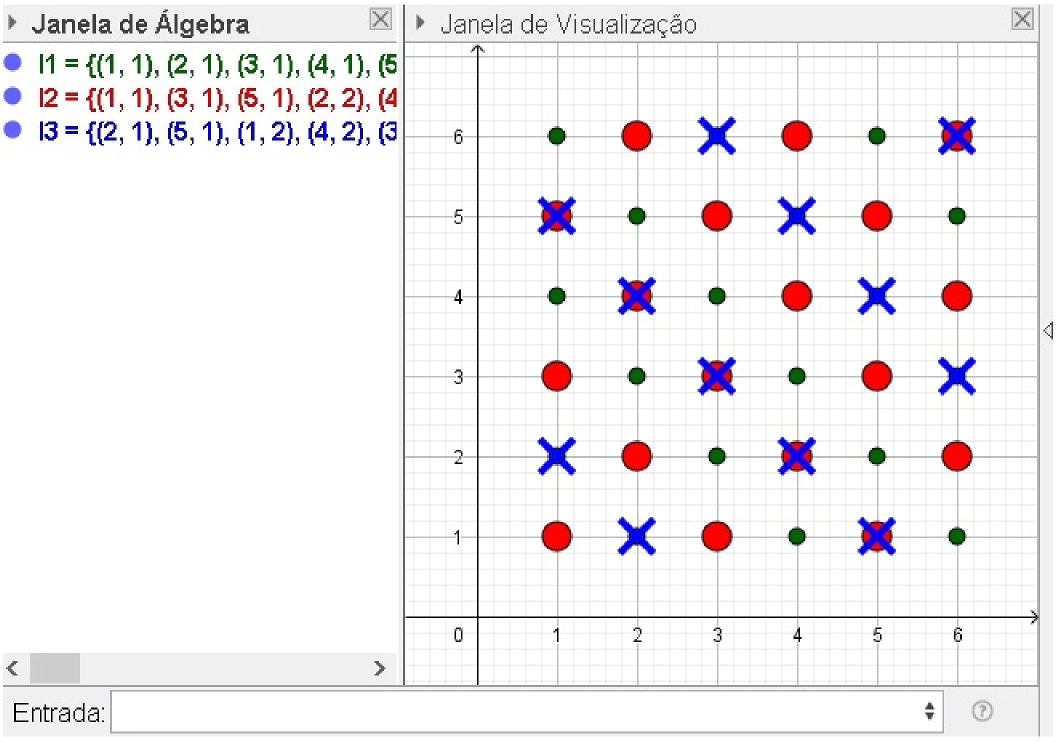
Aparecerá tais pontos na *Janela de Visualização*, mude a cor, o estilo e tamanho para melhor visualização. Nesse momento, o aluno observará que existem pontos com dupla marcação. Estes pontos representam números cuja a soma das faces, são ao mesmo tempo, pares e múltiplos de 3. E não podem ser contados duas vezes no evento desejado. Como mostra a Figura 1.31.

Para definir o evento desejado desse item, será necessário fazer a união das lista *l2* e *l3*, notada por *l4*, utilizando o comando abaixo

▷ União(l2, l3).

Após fazer isso, oculte as lista *l2* e *l3*, e mude a cor, o estilo e o tamanho da lista *l4*. Use os comandos:

Figura 1.31: Lançamento de Dois Dados - Soma Múltipla de 3



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

▷ Comprimento(l1) e Comprimento(l4)

para determinar a quantidade de elementos das listas *l1* e *l4*, notados por $a = 36$ e $b = 24$, respectivamente. E para determinar a probabilidade use o comando

▷ FraçãoEmTexto(b/a),

notado por *Texto 1*.

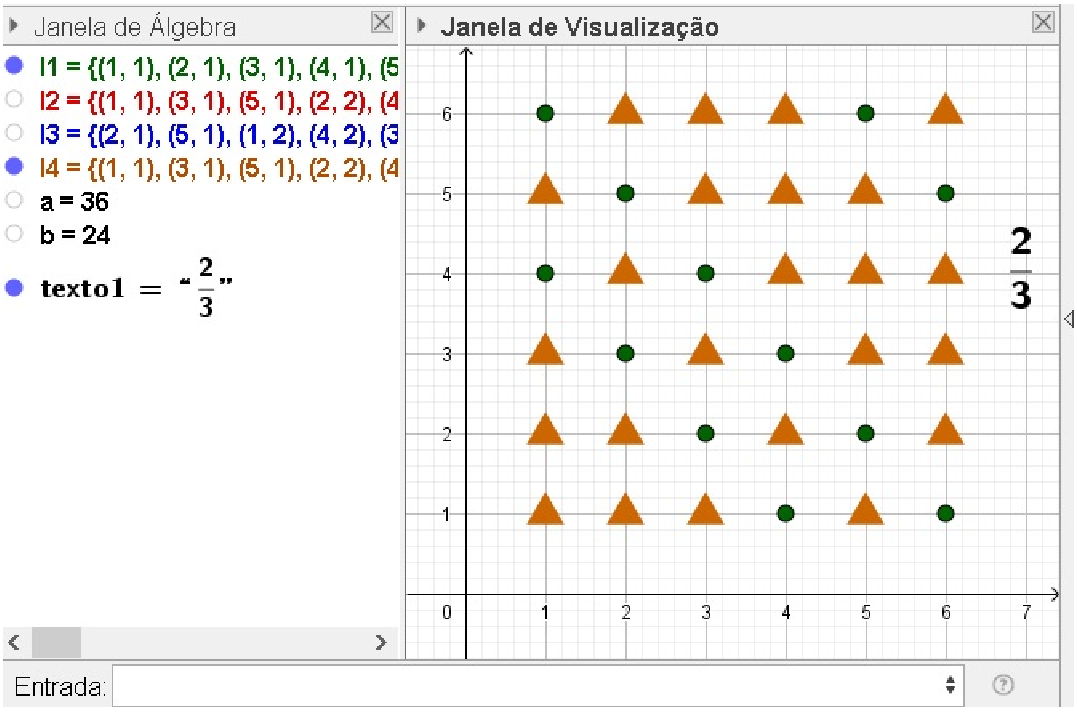
Em que $\frac{b}{a}$ é a fração simplificada de $\frac{24}{36}$, sendo b o número de casos favoráveis e a o espaço amostral. Vide Figura 1.32.

□

b) Para que a soma das faces não seja um número par nem um número múltiplo de três, deveremos visualizar os pontos do espaço amostral que não estão na união do item anterior. Assim, basta fazer a subtração do espaço amostral (*l1*) e da lista (*l4*), nessa ordem, usando o comando

▷ l1 \ l4.

Figura 1.32: Lançamento de Dois Dados - Soma Par ou Múltipla de 3



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

E aparecerá uma nova lista ($l5$), que representa tais números. Mude sua cor, o estilo e tamanho. Oculte também a lista $l4$ e aplique o comando Comprimento($l5$), para descobrir o número de elementos da lista $l5$, que será notado por $c = 12$.

Para determinar a probabilidade use o comando

▷ FraçãoEmTexto(c/a),

notado por *Texto 2*.

Em que $\frac{c}{a}$ é a fração simplificada de $\frac{12}{36}$, sendo c o número de casos favoráveis e a o espaço amostral. Vide Figura 1.33.

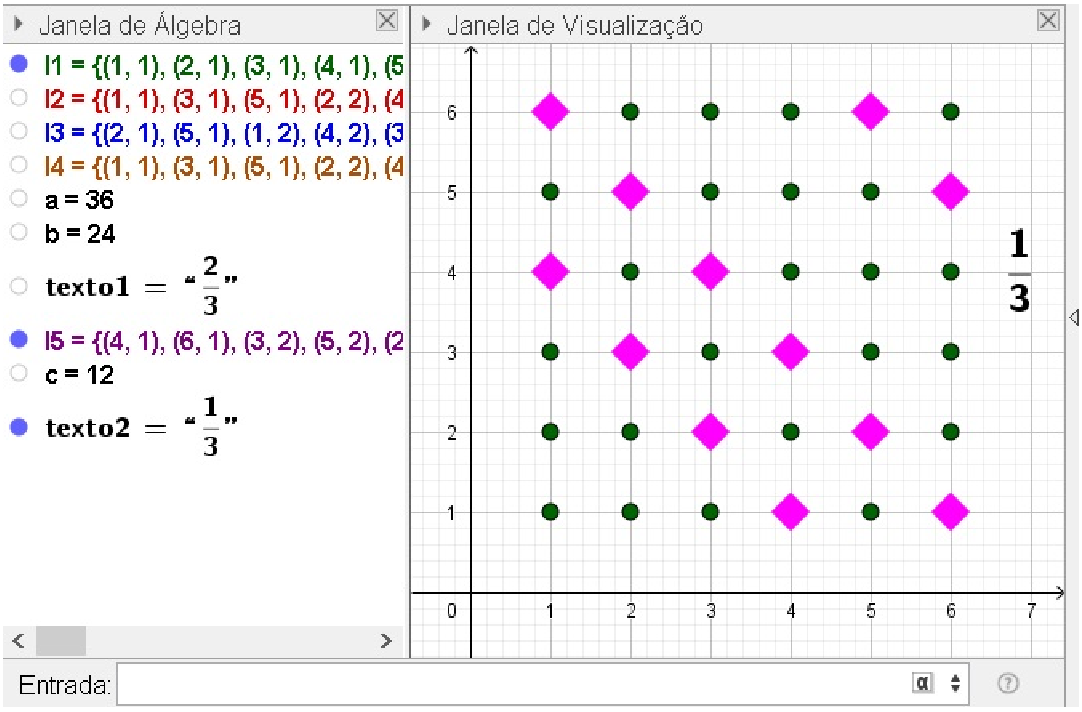
□

Exemplo 1.7. Lançando três dados: um vermelho, um verde e outro azul, cada um com seis faces enumeradas de 1 a 6. Determine a probabilidade da soma das faces superiores ser um número menor ou igual a cinco.

Solução:

Considere o sistema de coordenadas tridimensional ortogonal, no $\mathbb{R}^3$, em que o conjunto de todos os ternos ordenados, (x, y, z), com x, y e z naturais positivos e menores

Figura 1.33: Lançamento de Dois Dados - Soma Não Ser Par e Nem Múltipla de 3



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

ou igual 6, simboliza o lançamento de três dados. O dado vermelho é representado pelo semi-eixo das *abscissas* $\overrightarrow{OX}$, o dado verde representando pelo semi-eixo das *ordenadas* $\overrightarrow{OY}$ e o dado azul representando pelo semi-eixo das *cotas* $\overrightarrow{OZ}$. Vale ressaltar, que no lançamento de três dados, o espaço amostral tem 216 elementos, já que $6 \times 6 \times 6 = 216$.

Então, o estudante deve abrir o *GeoGebra* clicar em *Exibir* e depois em *Janela de Visualização 3D*. Em seguida, pode fechar a *Janela de Visualização* original e digitar as sequências de comandos no campo *Entrada* algumas vezes, dados pelos passos enumerados e seguir:

i) *Concatenar(<Lista de Listas>);*

ii) *Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).*

No interior do passo i), em <*Lista de Listas*>, procura o comando ii), e confirma para o mesmo ficar aninhado ao comando anterior. No valor <*Expressão*> de ii), substitui novamente pelo comando i). Depois, mais uma vez, no local onde se encontra, <*Lista de Listas*>, procura o comando ii) e o confirma novamente. E por fim, parece processo enfadonho, mas no local onde consta <*Expressão*>, deve-se substituir pelo passo ii), ainda mais uma vez. Ficando por fim, o comando a seguir.

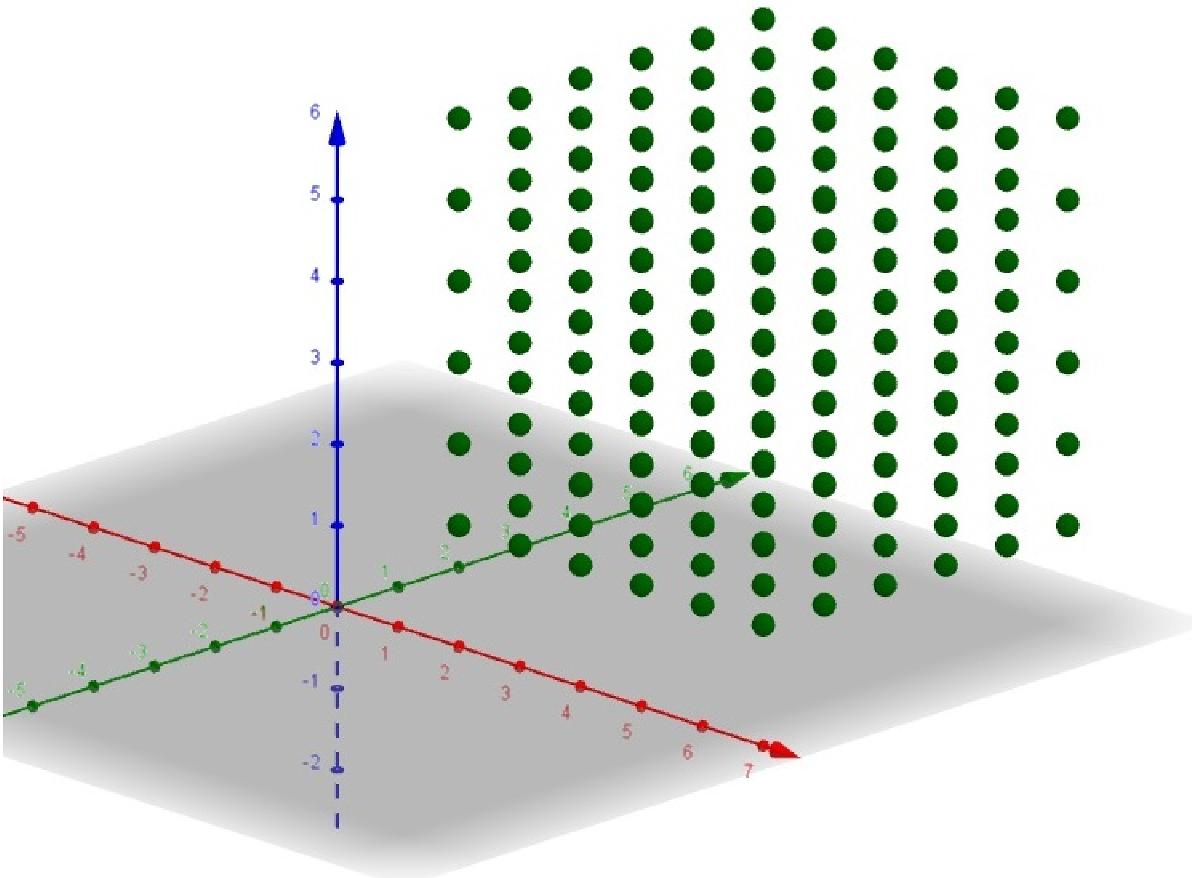
Concatenar(Sequência(Concatenar(Sequência(Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)).

Em suma, este último comando deve ser substituído ou pode ser digitado inicialmente no campo *Entrada* o seguinte.

▷ Concatenar(Sequência(Concatenar(Sequência(Sequência((i,j,k),i,1,6),j,1,6)),k,1,6)).

Logo em seguida, aparecerá um espaço amostral que representa o lançamento de três dados cúbicos, conforme a Figura 1.34.

Figura 1.34: Lançamento de três Dados em 3D



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Antes de criar o evento desejado, o estudante deve obrigatoriamente usar um comando para definir a quantidade de elementos do espaço amostral. Para isso, deve escrever o seguinte *Comprimento(<Lista>)*, que pode ser substituído por *Comprimento(l1)*, e por conseguinte, notado por $a = 216$, que representa o tal de pontos desta lista.

Criado o valor de "a", agora o discente deve construir o evento pedido na questão, ou seja, coordenadas em que a soma delas seja menor ou igual a 5, ou ainda, $x+y+z \leq 5$.

Desse modo, use a sucessão de comandos discriminada a seguir

RemoverIndefinidos(<Lista>) para excluir os elementos que não fazem parte do evento desejado. Neste caso, excluir os elementos no lançamento dos três dados, tenha soma maior que 5 nas faces superiores voltadas para coma. E substitua *<Lista>* por

Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

Substitua *<Expressão>* por *Se(<Condição>, <Então>)*, afim de escolher apenas as ternas de faces superiores que satisfaçam a condição dada, a soma das faces no lançamento dos três dados ser maior ou igual a 5. E obtém-se o comando

RemoverIndefinidos(Sequência(Se(<Condição>, <Então>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)).

Por fim, substitua ou escreva o comando

▷ RemoverIndefinidos(Sequência(Se(x(l1(n))+y(l1(n))+z(l1(n))<=5,l1(n)),n,1,a)).

E aparecerá o evento pedido com 10 ternos, cuja a soma das coordenadas é menor ou igual a 5, como mostra a Figura 1.35.

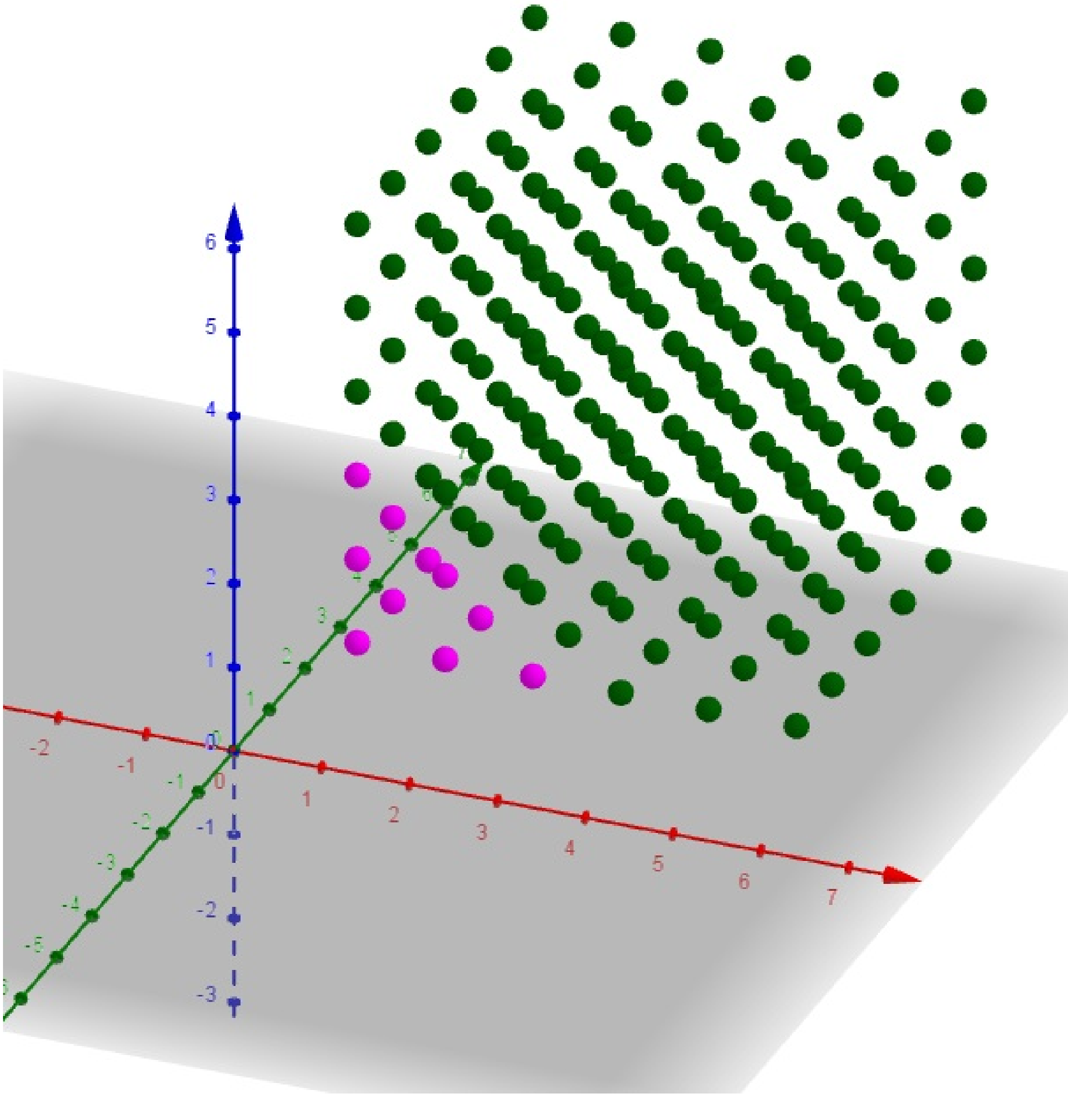
Para calcular a probabilidade, usa-se a mesma ideia para contar os elementos desse novo conjunto como foi feito no conjunto anterior. Basta digitar

▷ Comprimento(l2).

E esse novo valor será notado por $b = 10$ na *Janela de Álgebra*. Logo a probabilidade (P) é igual a 10 ternos desejados num total de 216. Que pode ser escrita assim

$$P = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}. \qquad \square$$

Figura 1.35: Soma das Faces Menor ou Igual a 5



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Exemplo 1.8. (CETRO - 2014 - FUNDAÇÃO CASA - Agente Administrativo/Agente de Apoio Administrativo) Um dado não viciado foi lançado por 3 vezes e anotado o resultado. A probabilidade de que, em todos os lançamentos, o número anotado seja menor que 5 é de:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{8}{27}$

c) $\frac{1}{54}$

d) $\frac{16}{27}$

e) $\frac{12}{33}$

Solução:

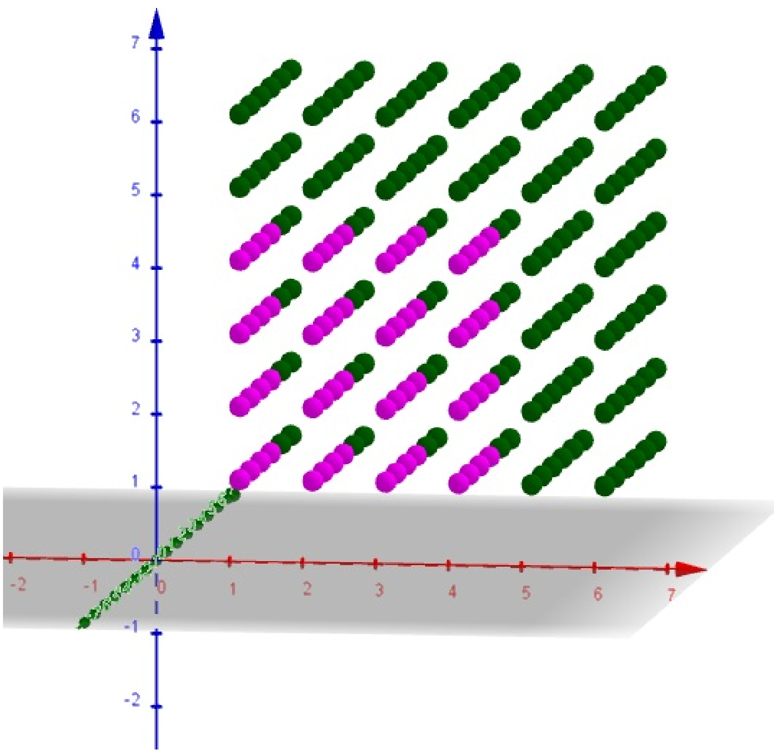
Considere a Figura 1.34 que representa o espaço amostral de um dado quando laçado 3 vezes com 216 ternos coordenados.

Para encontrar o evento pedido, use o mesmo comando que fizemos para determinar o espaço amostral na questão anterior, mas ao invés de digitar valor final 6 para cada coordenada, digitaremos valor 4, como mostra o comando a seguir.

▷ Concatenar(Sequência(Concatenar(Sequência(Sequência((i,j,k),i,1,4),j,1,4)),k, 1,4)).

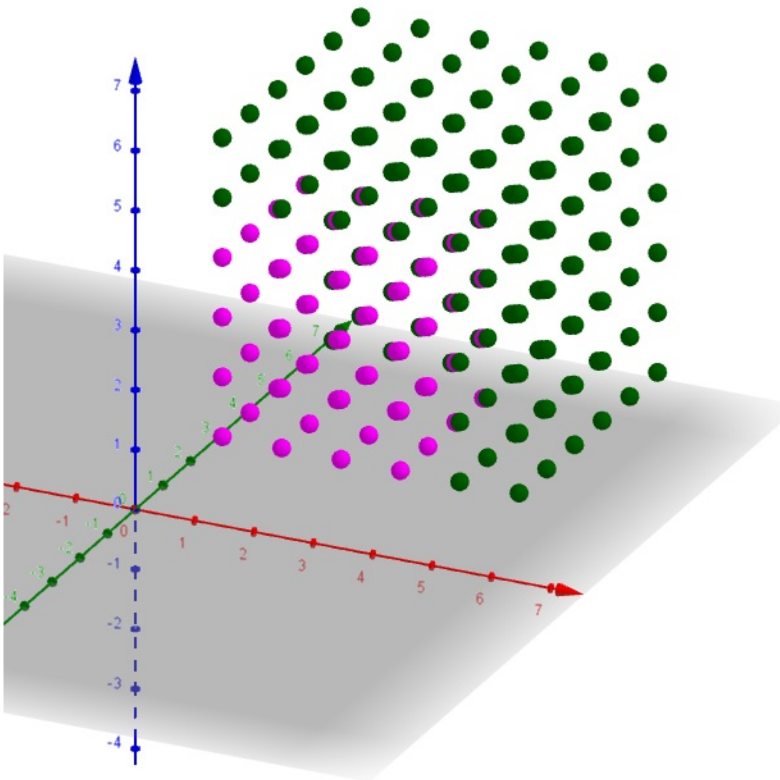
Nesse momento, aparecerá um cubo menor formado por um conjunto de ternos, cujas coordenadas de números naturais, que variam de 1 até 4, inserido no cubo original maior. Para melhor visualização, o aluno pode alternar a cor desse novo conjunto de pontos, vide Figura 1.36 e 1.37. Como o cubo têm medidas $4 \times 4 \times 4$, é de se imaginar que essa figura geométrica tem um total de 64 pontos, quantidade que confirmaremos com o comando *Comprimento (<Lista>)*.

Figura 1.37: Cubo com Coordenadas Menores que 5 II



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Figura 1.36: Cubo com Coordenadas Menores que 5 I



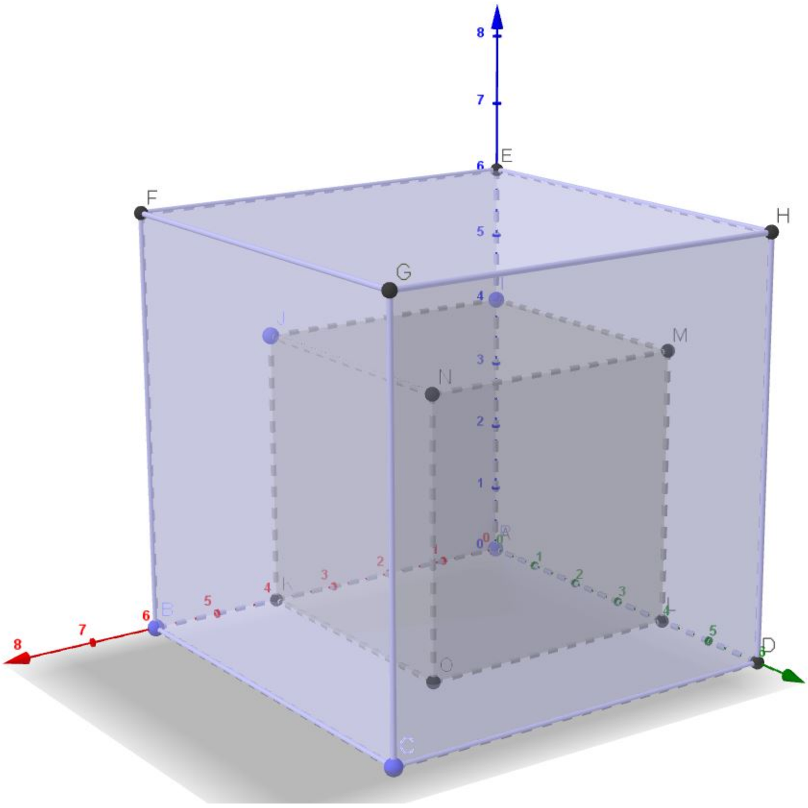
Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Para calcular a probabilidade, digite no campo *Entrada*: *Comprimento(l1)* e *Comprimento(l2)*, e confirma. Após isso, aparecerão na *Janela de Álgebra*, os valores de $a = 216$ e $b = 64$ que representam os números de ternos coordenados do cubo maior e do cubo menor respectivamente. Sendo assim, a probabilidade procurada é

$$P = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}. \qquad \square$$

Melhorando o entendimento do exemplo mencionado, veja a Figura 1.38. O cubo de aresta 6 representa todas as faces de um dado quando lançado três vezes, em que o espaço amostral tem $6 \times 6 \times 6 = 216$ ternos coordenados na forma (x, y, z), com x, y e z variando de 1 até 6.

Figura 1.38: Dois Cubos - *GeoGebra*



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Já o cubo de aresta 4 representa todas as faces de um dado quando lançado três vezes, em que o evento desejado tem $4\times, 4\times 4 = 64$ ternos ordenados na forma (x', y', z'), com x', y' e z' variando de 1 até 4.

Então a probabilidade procurada é

$$P = \frac{64}{216}. \qquad \square$$

No exemplo seguinte veremos o uso do *GeoGebra* com o objetivo de ilustrar a Lei dos Grandes Números e Probabilidade Frequentista. Com esse programa, não faremos demostrações matemáticas, e sim utilizaremos a programação de seus recursos para melhor visibilidade e convencimento do assunto abordado aos alunos do Ensino Básico. Também mostraremos o passo-a-passo de como construir os comandos utilizados no *GeoGebra*. No entanto, esse procedimento não é aplicável para alunos de tal grau de escolaridade. As instruções fornecidas servem para o professor montar os comandos no *GeoGebra* e disponibilizar tal conhecimento aos discentes como ferramenta inovadoras e atenuantes no processo de ensino e aprendizagem deles.

Esta subsecção tratará do uso do *GeoGebra* como se fosse uma "máquina arremessadora de uma moeda", em condições idênticas de arremessos, a fim de mostrar para o aluno, que quanto maior o número de vezes, que tal moeda é lançada, mais perto chega da probabilidade de se obter uma face desejada nesses lançamentos, com eventos equiprováveis, ou seja, eventos em que cada face da moeda tem a mesma chance de ocorrer. Comparando tal resultado com a definição clássica de probabilidade *(P)*, dada pela razão do "número de casos favoráveis"sobre o "número de casos possíveis".

O quociente mencionado anteriormente representa a frequência relativa de cada uma das faces da moeda nos sucessivos lançamentos, e essa razão se aproxima cada vez mais de uma reta constante, $y = \dfrac{1}{2} = 0,5$, que representa justamente a probabilidade de sair uma das faces da moeda ao ser jogada, à medida que os arremessos desse objeto sejam feitos inúmeras vezes ou feitos em um grande número de vezes.

Mostraremos nessa etapa, o passo a passo de como construir no *GeoGebra*, o lançamento de uma moeda n vezes. Esse processo não é interessante mostrar aos alunos a realização em sala de aula, pois nessa etapa de ensino, requer diversos comandos e, sua aplicabilidade pode não se tornar tão eficiente quanto esperado. O professor tendo noção de como construir esses lançamentos, pode levá-lo para o ambiente escolar e fazer a manipulação do valor de n a fim de simular as frequências relativas de ocorrência de cada evento: obter cada face da moeda nos consecutivos lançamentos.

Exemplo 1.9. Mostre no *GeoGebra*, que ao lançarmos uma moeda honesta 10 mil vezes, a probabilidade de ocorrer uma das faces, cara ou coroa, é igual a 0,5.

Construção:

No GeoGebra, abra a uma segunda janela de visualização clicando no menu *Exibir* e em *Janela de Vizualização 2.* Ajuste o tamanho dessa última janela como melhor for conveniente.

Na segunda janela de visualização crie um controle deslizante, n, clicando no ícone Controle Deslizante. Digite no campo Nome: n,no intervalo de variação informe 1 para o valor mínimo e 10000 para o valor máximo, e no incremento 1. Na aba *Animação*, selecione a opção *Crescente* e pressione *OK*.

Vamos criar agora um comando que representa as faces da moeda. Como esse objeto tem-se as faces coroa e cora, simbolizaremos 1 para o primeiro resultado e 2, para o segundo, respectivamente.

Assim, digitaremos no campo *Entrada*

FacesDaMoeda = Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>). Substitua os termos destacados a fim de obter o comando

▷ FacesDaMoeda = Sequência(i, i, 1, 2).

Criaremos também um comando para representar os 10 mil arremessos da moeda, para isso no campo *Entrada* digite o comando:

DezMilArremessos = Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

No termo <Expressão>, substitua-o por NúmeroAleatório(<Mínimo (Inteiro)>, <Máximo (Inteiro)>). Por conseguinte, o comando deverá ser escrito

▷ DezMilArremessos = Sequência(NúmeroAleatório(1, 2), i, i, 1, n).

A fim de melhorar o entendimento, o estuante pode mover o controle deslizante e deixá-lo em 5500, por exemplo. Nesse momento, a lista de *DezMilArremessos* formará um conjunto com 5500 elementos com os números 1 e 2 apenas.

Depois disso, criaremos uma lista de frequência absoluta, que consta a quantidade de vezes que os resultados 1 e 2, apareceram na lista dos n arremessos da moeda, e que poderemos, em particular, notar por *FreqAbs.*

Então, digite as instruções a seguir

FreqAbs = Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

No termo <Expressão>, substitua-o por *ContarSe(<Condição>, <Lista>).*

Por conseguinte, o comando deverá ser escrito

▷ FreqAbs = Sequência(ContarSe(x==i, DezMilArremessos), i, 1, 2).

De modo análogo, criaremos a lista de frequência relativa que é o quociente de cada valor numérico da frequência absoluta pelo número n, total de arremessos da moeda. E que notaremos por *FreqRel*. Esses resultados serão expressos em decimal, compreendido de 0 até 1.

FreqRel = Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>).

Em <Expressão>, substitua-o por *Elemento(<Lista>, <Posição do Elemento>).* Por conseguinte, o comando deverá ser escrito

▷ FreqRel = Sequência(Elemento(FreqAbs, i) / n, i, 1, 2).

Visualize a frequência relativa com maior número de casas decimais clicando em: *Opções*, *Arredondamento* e *3 Casas Decimais*. E se quisermos transformar esses resultados em porcentagem, basta no interior do comando que foi criado multiplicar *Elemento(FreqAbs, i) / n* por 100, ficando

▷ FreqRelPorCento = Sequência(Elemento(FreqAbs, i) / n * 100, i, 1, 2).

Em seguida, faça o diagrama de barras usando o comando

DiagramaDeBarras(<Lista de Dados>, <Lista de Frequencias>, <Largura das Barras>). E substitua-o por

▷ DiagramaDeBarras(FacesDaMoeda, FreqRel, 0.4).

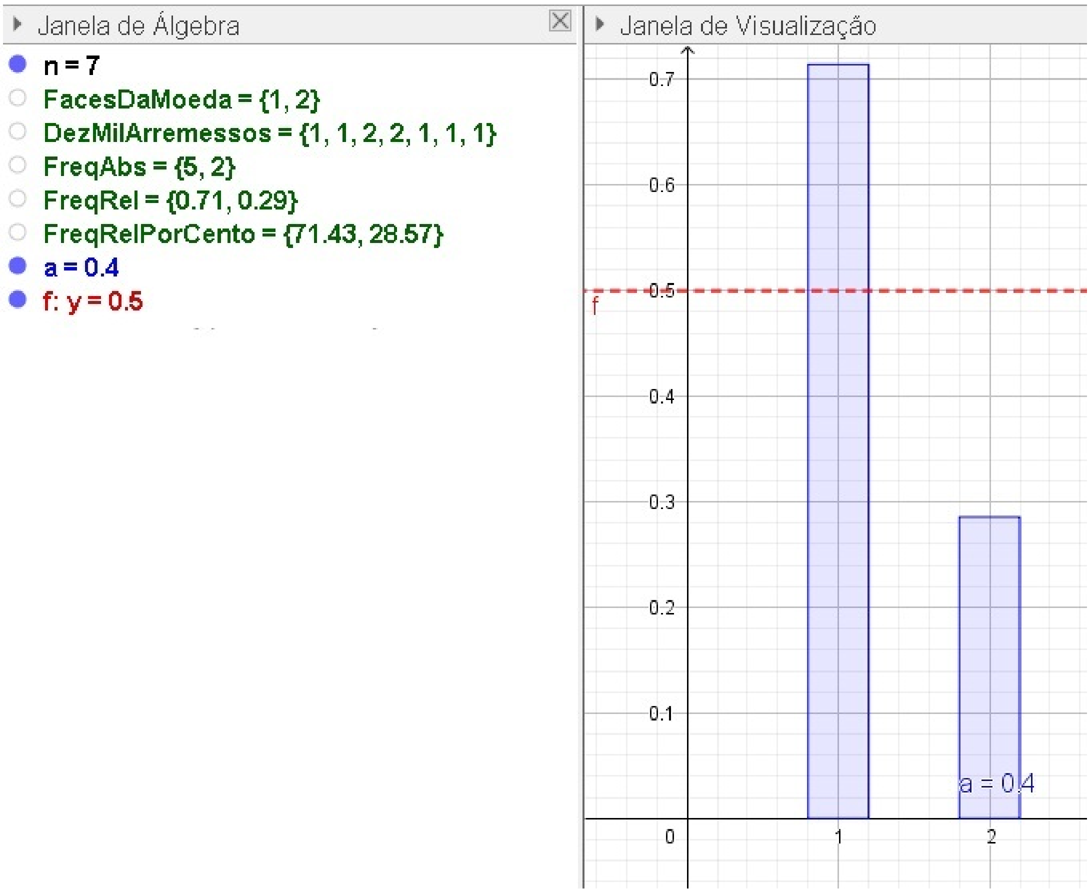
Após criar o gráfico de barras, é necessário ajustar a escala de visualização dos eixos X e Y, a fim de melhorar a demostração de tal diagrama. Para isso, vá na *Janela de Visualização* original, clicando nela com botão esquerdo do mouse para selecioná-la e em seguida, com botão direito na própria janela, para abrir as configurações da mesma, clique na engrenagem e em seguida, na aba *Básico* informar os valores de: 5, -0.2 e 0.9, nos campos, *x Máx*, *y Min* e *y Máx*, respectivamente.

Crie no campo de *Entrada*, a reta constante $y = 1/2$ digitando este mesmo comando. Nesse momento, aparecerá uma reta f paralela ao eixo horizontal e passando por 0,5 no eixo vertical. Altere a cor e o estilo se desejar. Caso essa reta apareça na Janela de Visualização 2, o estudante pode ir em configurações da reta f, depois na aba *Avançado*, e no campo *Localização*, marcar a Janela de Visualização original.

O diagrama criado na *Janela de Visualização*, apresenta duas barras com os números 1 e 2, no eixo horizontal, que representam os valores de *coroa* e *cara* respectivamente. E no eixo vertical aparecera a frequência relativa dessas faces quando a moeda é lançada n vezes.

Note que ao usarmos o controle deslizante de n, e fazendo-o aproximar de 10 mil, o gráfico de barras de cada frequência relativa, que aparece cara ou coroa, se aproxima cada vez mais da probabilidade de sair um desses resultados ao arremessarmos uma moeda, o que configura a Lei dos Grandes Números, teorema que estabelece a realização de uma experiência ininterruptas vezes, ou ainda, teoria que explica que quanto mais tentativas forem realizadas num experimento, maior é a probabilidade dos resultados analisados que irá se aproximar da probabilidade real. Caso contrário, se fizermos o valor de n se aproximar cada vez mais de 1, a frequência relativa se afasta cada vez mais da probabilidade que representa o valor de 0,5 no lançamento de uma moeda para sair cara ou coroa. Conforme mostra a Figura 1.39.

Figura 1.39: Lançamentos de uma Moeda Dez Mil Vezes - Parte I



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Para ilustrar mais as informações fornecidas, poderemos criar duas tabelas: uma de frequência absoluta e a outra de frequência relativa dos n lançamentos da moeda. Para isso, use os comandos

TabelaDeFrequências(<Lista de Dados Brutos>, <Fator de Escala (opcional)>).
E substitua por

▷ TabelaDeFrequências(DezMilArremessos).

E desconsidere <Fator de Escala (opcional)>, assim está criada a Frequência absoluta dos valores das fases cara ou coroa.

Logo em seguida, crie a tabela de frequência relativa utilizando o mesmo comando anterior e substitua por

▷ TabelaDeFrequências(DezMilArremessos, 1 / n).

Vamos ajustar as tabelas de frequência na *Janela de Visualização 2*, a fim de que possamos sobrepor uma na outra e melhorar a visualização ao mudar o valor de n no controle deslizante. Para isso, mude as cores de fundo das tabelas criadas como *Texto 1* e *Texto 2*. Vá na *Janela de Álgebra*, clique com botão direito em cada um deles, em seguida *Propriedades* e na aba *Cor*, marque a opção *Cor de Fundo* e escolha a cor desejada. Para sobrepor uma tabela à outra, vá na aba *Avançado* da tabela *Texto 1* e informe no campo *Camada* e opção 1. Ajuste a tabela *Texto 1*, na *Janela de Visualização 2*, para sobrepor a coluna *Valor* na tabela *Texto 2*.

Poderemos também incrementar na animação imagens que representam as faces da moeda cara ou coroa. Essas ilustrações vão variar dentre os lançamentos da moeda, para isso, bastar mudar o valor de n no controle deslizante. Importante que as figuras já estejam gravadas em uma pasta de seu interesse, e em formato *.png*. Assim, siga os comandos.

Crie três pontos A, B e C formando um "L"na janela de visualização 2 para ajustar o tamanho da figura, ali a ser inserida.

Clique no ícone *Controle Deslizante*, na opção *Inserir Imagem*, selecione a imagem "Coroa"na pasta onde foi salva e confirme. Após, a imagem que você selecionou vai aparecer em algum lugar da *Janela de Visualização 2* no *GeoGebra*. Selecione-a, e com o botão direito do mouse, vá nas propriedades da mesma, clique na aba *Posição* e informe no *Canto 1*, *Canto 2* e *Canto 4*, os pontos B, C e A respectivamente. Na aba *Avançado*, no campo *Condição para Exibir Objeto(s)*, digite o comando

▷ Elemento(DezMilArremessos, n) == 1.

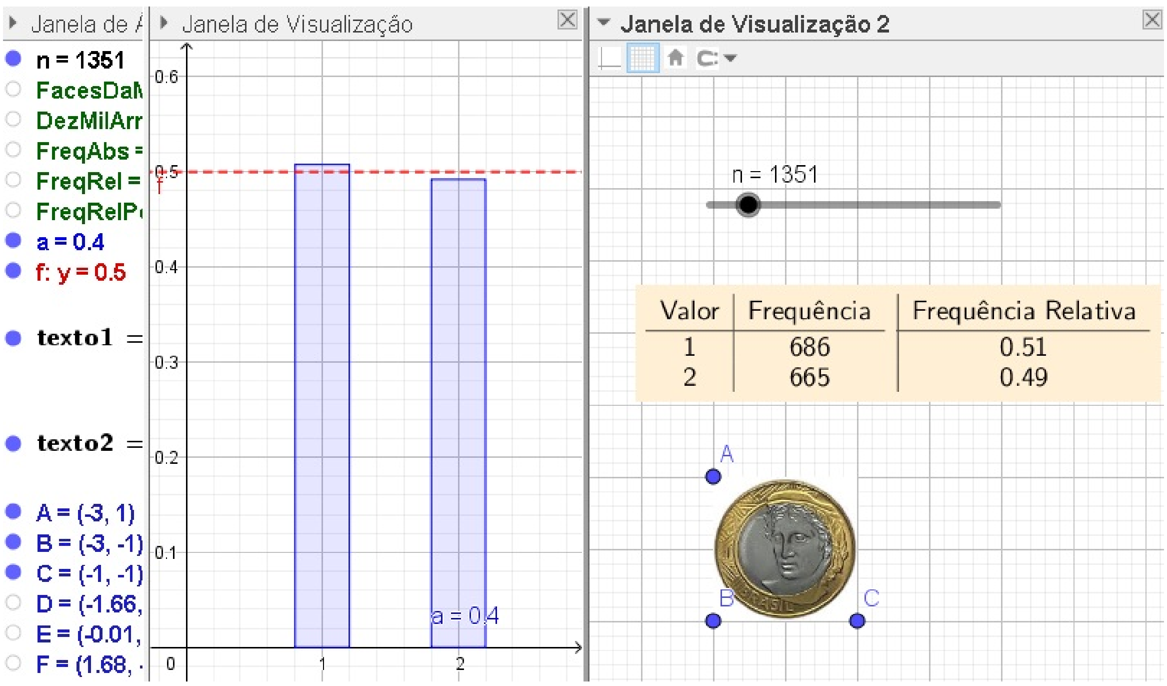
Para o programa entender que quando n for igual a 1, será exibida a imagem *coroa*. Oculte o(s) ponto(s) criado(s), ao inserir a figura, na *Janela de Álgebra*, a fim de evitar excesso de informações.

Processo análogo, para o programa entender que quando n for igual a 2, e que deverá ser exibida a imagem *cara*, faça os mesmos procedimentos anteriores. Vá no ícone *Controle Deslizante*, na opção *Inserir Imagem*, selecione a imagem "Cara"na pasta onde foi salva e confirme. Nesse momento, selecione essa nova imagem, vá em propriedades e faça os *Cantos* 1, 2 e 4 tornar ser B, C e A nesta ordem. E também vá na aba *Avançado*, digitando:

Elemento(DezMilArremessos, n) == 1

Oculte o(s) novos(s) ponto(s) criado(s). Como mostra a Figura 1.40. Agora é só animar o *Controle Deslizante* (n) e observar os resultados nas tabelas de frequências expressas e também o diagrama de barras, simulando assim os diversos lançamentos de uma moeda.

Figura 1.40: Lançamentos de uma Moeda Dez Mil Vezes - Parte II



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

O *Controle Deslizante* (n) também pode ser animado manualmente, usando as teclas de direção no teclado, ou poder ir em propriedades de n, na aba *Básico*, no campo

Valor e digite um número desejado para o mesmo.

Faremos nesse momento, a simulação do lançamento de um dado honesto de 6 faces, com as mesmas chances de sair cada uma das faces, quando for lançado até 100 mil vezes. Veremos que quanto maior for o número de arremessos sucessíveis acontecerem, maior serão as chances de atingir um valor fixo (constante), que representa a probabilidade de sair uma das faces voltada para cima desse dado, que nesse caso, representará $\frac{1}{6} = 0,16667$, aproximadamente 16,67%.

Para isso, faremos processo idêntico a questão anterior, usando os mesmos comandos com alguns ajustes de informação. Como no item passado, fizemos tal procedimento de forma detalhada, então agora faremos de forma mais rápida, seguindo os passos feitos. Então, vamos refazer o Exemplo 1.9 agora, se lançarmos um dado honesto 100.000 vezes, e verificar que se aumentarmos a quantidade de lançamentos para um experimento aleatório, a frequência relativa de um certo evento, coincidirá cada vez com a probabilidade de ocorrência de tal evento.

Considere a questão a seguir.

Exemplo 1.10. Mostre no *GeoGebra*, que ao lançarmos um dado honesto 100 mil vezes, a probabilidade de ocorrer uma das faces, é igual a $\frac{1}{6}$ ou $0,16667$.

Construção:

Abra o *GeoGebra*, vá em *Exibir* e selecione a *Janela de Visualização 2*, ajustando-a na tela do seu computador. Crie o seletor (*Controle Deslizante*) n, fazendo variar de 1 a 100 mil, com animação crescente e incremento, 1. No campo *Entrada*, digite os comandos:

FacesDoDado = Sequência(i, i, 1, 6)

CemMilArremessos = Sequência(NúmeroAleatório(1, 6), i, 1, n)

FreqAbs = Sequência(ContarSe(x == i, CemMilArremessos), i, 1, 6)

FreqRel = Sequência(Elemento(FreqAbs, i) / n, i, 1, 6)

*FreqRelPorCento = Sequência(Elemento(FreqAbs,i)/n*100, i, 1, 6)*

Veja como ficou estes comandos na Figura 1.41. Vá em *Opções*, *Arredondamento* e 3 *Casas Decimais*. Também varie o valor de n para 501, por exemplo.

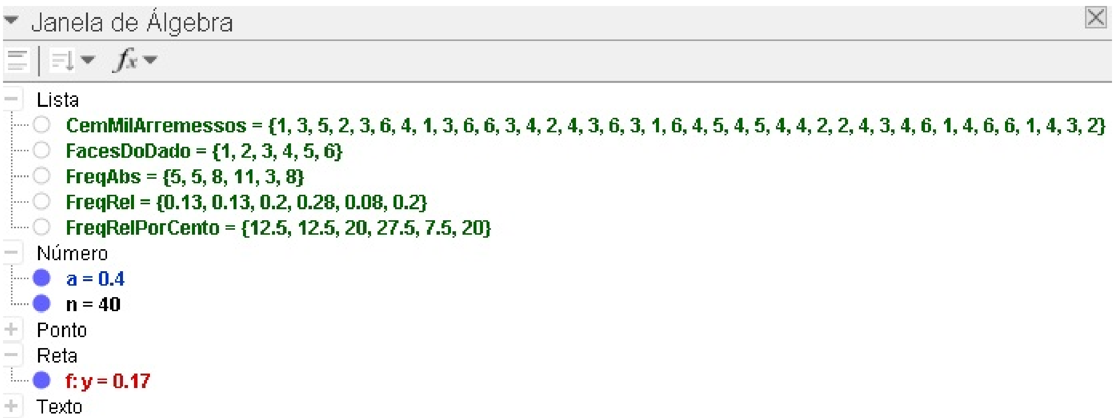
Construa o diagrama de barras, usando o comando

DiagramaDeBarras(FacesDoDado, FreqRel, 0.4).

Após criar o gráfico de barras, é necessário ajustar a escala de visualização dos eixos x e y, a fim de melhorar a demostração de tal diagrama. Para isso, vá na *Janela de Visualização* original, clicando nela com botão esquerdo do mouse para selecioná-la e em seguida, com botão direito na própria janela, para abrir as configurações da mesma, clique na engrenagem e em seguida, na aba *Básico* informar os valores de: -0.3, 9, -0.2 e 0.3, nos campos, x *Min*, x *Máx*, y *Min* e y *Máx*, respectivamente. E se preferir ainda, pode mudar a cor de tal gráfico.

Crie a reta constante, $y = 1/6$, alterando a cor e estilo se preferir.

Figura 1.41: Arremessos de um Dado 100 Mil Vezes - Parte I



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Depois disso, faremos as tabelas das frequências absolutas e relativas, na J*anela de Visualização 2*, usando os respectivos comandos:

TabelaDeFrequências(CemMilArremessos) e

TabelaDeFrequências(CemMilArremessos, 1 / n).

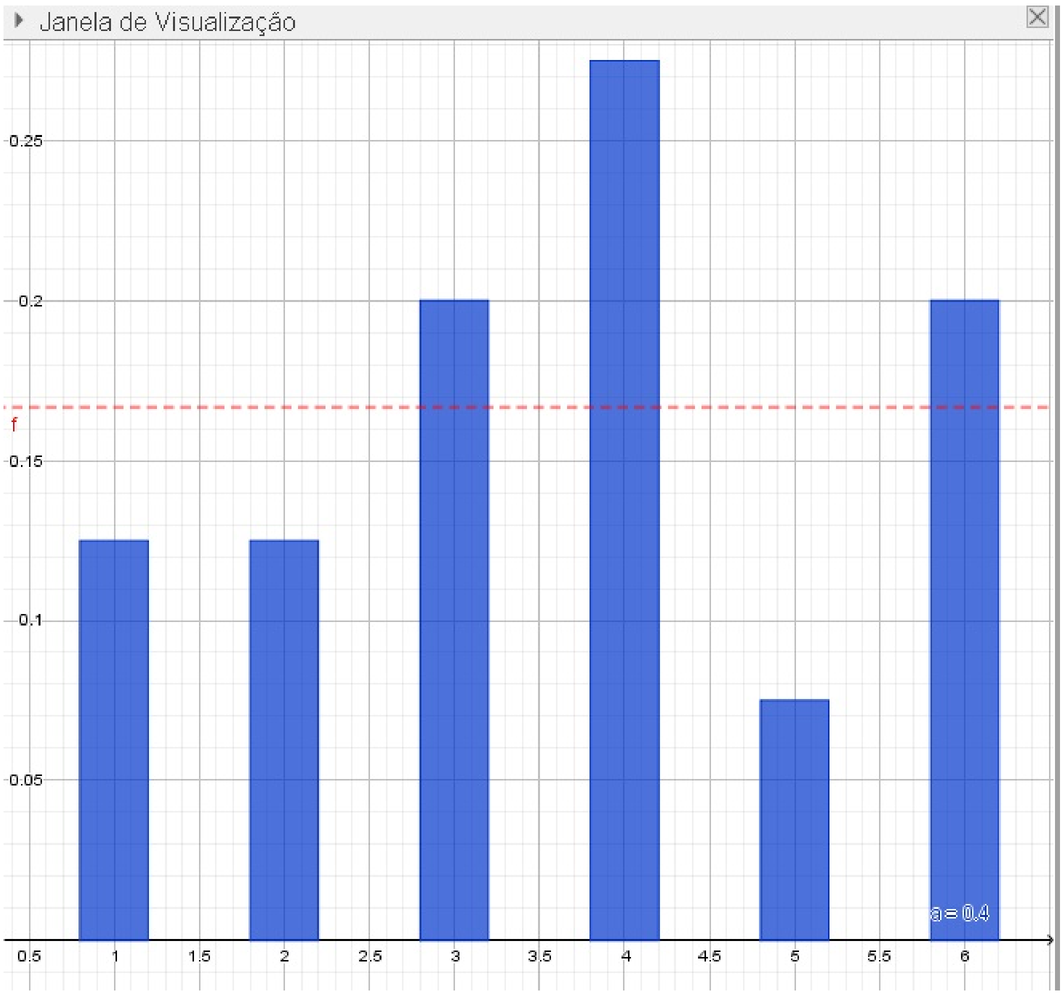
Não esqueça de mudar as cores de fundo das mesmas, e de sobrepor a tabela

Texto 1 sobre a coluna Valor da tabela *Texto 2*. Caso as tabelas apareçam na *Janela de Visualização* original, vá em *Propriedades*, aba *Avançado* e no campo *Localização* marque a opção *Janela de Visualização 2* e desmarque a outra janela. Arraste as tabelas para uma posição conveniente. Veja esse todo procedimento na Figura 1.42.

Insira as figuras que representam as faces dos dados numeradas de 1 a 6, que já devem estar previamente salvas em seu computador com formato *png*.

Vamos recordar como inserir a primeira figura, face 1 do dado, e as outras imagens devem ser introduzidas de igual modo.

Figura 1.42: Arremessos de um Dado 100 Mil Vezes - Parte II



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Crie três pontos A, B e C formando um "L"na *Janela de Visualização 2* para ajustar o tamanho da figura, ali a ser inserida.

Clique no ícone *Controle Deslizante*, na opção *Inserir Imagem*, selecione a imagem que representa a primeira face do dado, na pasta onde foi salva e confirme. Após, a imagem que você selecionou vai aparecer em algum lugar da *Janela de Visualização 2* no *GeoGebra*. Selecione-a, e com o botão direito do mouse, vá nas propriedades da mesma, clique na aba *Posição* e informe no *Canto 1*, *Canto 2* e *Canto 4*, os pontos B, C e A respectivamente. Na aba *Avançado*, no campo *Condição para Exibir Objeto(s)*, digite o comando

Elemento(CemMilArremessos, n) == 1.

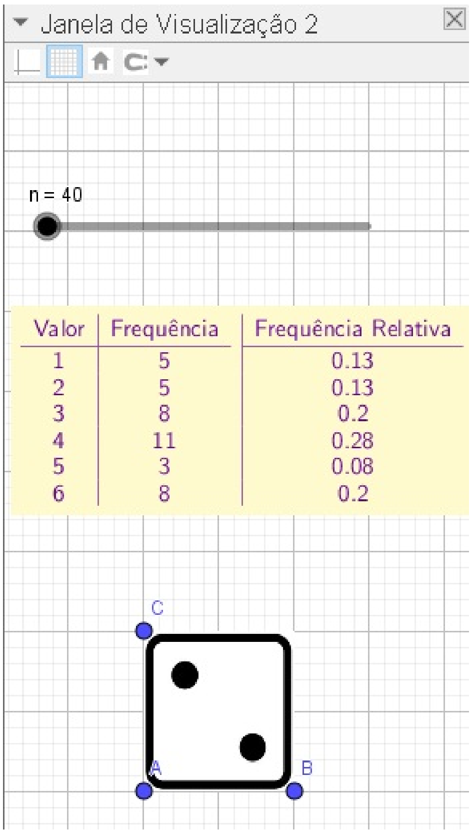
Para o programa entender que quando n for igual a 1, será exibida a imagem que representa a face 1 do dado. Oculte o(s) ponto(s) criado(s), ao inserir a figura, na *Janela de Álgebra*, a fim de evitar excesso de informações.

Faça o mesmo procedimento com as imagens que configuram as demais faces do dado, lembrando que para cada uma delas, quando for digitar o comando
Elemento(CemMilArremessos, n) == i.

Com i variando de 2 a 6, no campo *Condição para Exibir Objeto(s)*, deve ser alterado ao valor de i, conforme a respectiva face do dado representada na Figura 1.43.

Está terminada a simulação, conforme podemos verificar nas Figuras 1.41, 1.42 e 1.43. Brinque com o controle deslizante e observe os resultados apresentados nas tabelas, nas imagens que representam as faces do dado e no diagrama e barras. Divirta-se.

Figura 1.43: Arremessos de um Dado 100 Mil Vezes - Parte III



Fonte: Imagem do autor - Recurso do *GeoGebra*

Referências Bibliográficas

[1] COUTINHO, C. Q. S. Introduction aux situations aléatoires dês le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabrigéomètre II. Tese de doutorado. Grenoble I: Iniversité Joseph Fourier. 2001.

[2] COUTINHO, C. Q. S. Probabilidade Geométrica: um contexto para a modelização e a simulação em situações aleatórias com Cabri. Caxambu. MG. ANPED, GT19, 2002.

[3] DANTAS, C. A. B. Probabilidade: Um Curso Introdutório. 2a. ed. 1a reimpressão. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2004. 24-19 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=jWXgniqYngMC&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 20, Maio de 2020.

[4] DANTE, L. R. Matemática: Contextos & Aplicações. 2. ed. v. 2. São Paulo: Ática, 2013. 448 p.

[5] DANTE, L. R. Projeto Teláris: matemática: ensino fundamental 2. 2. ed. v. 1-4. São Paulo: Ática, 2015 - 6° ao 9° ano.

[6] FARIAS, A. M. L.; LAURENCEL, L. C. Probabilidade. UFF, Instituto de Matemática. 2007.

[7] FERREIRA, P. M. Estatística e Probabilidade. Fortaleza: UAB/IFCE. 2012.

[8] FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. São Paulo: Atlas. 2006.

[9] GOHN, M. G. Educação não-formal, participação da sociedade civil e estruturas colegiadas nas escolas. Ensaio: avaliação de políticas públicas educacionais, v. 14, n. 50, p. 27-38, 2006.

[10] GUILLÉN, Eliseo Aguilar. Simulaciòn de 100 Lanzamientos Al Aire de Dos DADOS. Site: Eliseo Aguilar Guillén. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=PN8KrBLZkIY>. Acesso em: 22, Junho de 2019.

[11] HAZZAN, S. Fundamentos da Matemática 5. São Paulo: Atual. 1977.

[12] IEZZI, G.; et al. Matemática Ciência e Aplicações. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

[13] IEZZI, G. et al. Fundamentos de Matemática Elementar. 3. ed. São Paulo: Editora Atual, 1977. 149 p.

[14] LARSON, R.; FARBER, B. Estatística Aplicada. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.

[15] LASERNA, Rafael Pérez.Simulación de múltiples lanzamientos de un dado con GeoGebra. Site: Rafael Pérez Laserna. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=YDqhxOBibXM>. Acesso em: 20, Junho de 2019.

[16] MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. Noções de Probabilidade e Estatística. 6 ed. São Paulo: EDUSP, 2005.

[17] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 294 p. (Coleção PROFMAT; 12).

[18] SILVA, I. A. Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito. 2002. 174 p. Dissertação – Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

[19] SILVA, G. M. Um estudo sobre o uso do *GeoGebra* na aprendizagem de geometria analítica no ensino médio (2016). Disponível em:

<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8870/DissGMS.pdf?sequence =1&isAllowed=y>. Acesso em: 07, Fevereiro de 2020.

[20] TOTOHASINA, A. Méthode implicative en analyse de données et aplication à l'analyse de Conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle. [S.1.]. 1992. Tese (Doutorado) – Université de Rennes 1.

[21] VIALI, L. Apostila IV: Probabilidade. UFRGS, Instituto de Matemática. 2020. Disponível em:

<http://www.mat.ufrgs.br/ viali/sociais/mat02214/material/apostilas/PROSociais.pdf>. Acesso em: 09, Julho de 2020.

[22] VIRGILLITO, S. B. Estatística Aplicada. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

Bibliografia Recomendada

[23] ARAUJO, Erisvandro Américo. Probabilidade Geométrica no Ensino Médio: Uma Experiência Usando o *GeoGebra*. Campina Grande, 2017. 59 p.

[24] BALDINI, L. A. F. Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o Desenvolvimento Profissional de Professores e futuros Professores de Matemática na utilização de Software *GeoGebra*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

[25] BRASIL. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 11, Fevereiro de 2020.

[26] CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. Anais da X Seminário Nacional de História da Matemática. São Paulo: SBHMAT, 2013.

[27] CAVALCANTE, J. L.; ANDRADE, V. L. V. X.; RÉGNIER, J. O Conceito de probabilidade na formação docente: uma reflexão apoiada pela análise estatística implicativa. Vidya, v.36, n.2, p.441-455, 2016.

[28] GOMESL, M. F.; OLIVEIRA, A. M. B.; QUEIROZ, N. D. S. O *GeoGebra* Como Ferramenta de Suporte no Processo de Ensino – Aprendizagem Envolvendo Conceitos e Cálculos de Aréa de Figuras Planas. 7ª Jornada Acadêmica 2013. Santa Helena de Goiás, p. 1-5. Nov, 2013.

[29] GONÇALVES, P. G. F. Memes e educação matemática: Um olhar para as redes sociais digitais (2016). Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5825_2391_ID.pdf>. Acesso em: 11, Fevereiro de 2020.

[30] HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. Ajuda *GeoGebra*: manual Oficial da Versão 3.2. 2009. Disponível em:

<http://www.*GeoGebra*.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 11, Fevereiro de 2020.

[31] HORTA, N. B. O Meme Como Linguagem Da Internet: Uma Perspectiva Semiótica. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Comunicação da Universidade de Brasília. 2015.

[32] JEFFREY, R. Subjective probability. Cambridge University Press. First published, British Library, 2004.

[33] LEAL, F. S. O Meme na Sala de Aula: Novas práticas para a formação leitora. Dissertação de Mestrado Profissional em Letras da Universidade Estadual de Feira de Santana. 2019.

[34] LIMA, C. F. S.; SANTANA, L. E. S.; SILVA, J. J. S.; ROCHA, C. A. O uso da história da probabilidade como recurso metodológico em uma aula para o ensino médio (2016). Disponível em:

<http://www.editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD3_SA16_ID814_30102016130732.pdf>. Acesso em: 11, Fevereiro de 2020.

[35] LEDOUX, P.; GONÇALVES, T. O. Da informalidade do saber matemático cultural ao saber formal escolar: elementos de uma cognição matemática (2018). Disponível em:

<http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/viewFile/147/129>. Acesso em: 26, Janeiro de 2019.

[36] LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística (2005). Disponível em:

<https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Acesso em: 07, Fevereiro de 2020.

[37] MACÊDO, D. F.; AVELAR, A. M. F.; ALVES, S. S. N.; NASCIMENTO, M. C.; LINS, A. F. A importância da utilização do aplicativo *GeoGebra* em aulas de Matemática: experiência vivenciada em uma escola da educação básica (2017). Disponível em:

<https://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID1431_13102017222630.pdf>. Acesso em: 07, Fevereiro de 2020.

[38] MARCHETTI, J. M.; KLAUS, V. L. C. A. Software *GeoGebra*: Um recurso interativo e dinâmico para o ensino de geometria plana (2014). Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unioeste_mat_artigo_josiane_mazzurana.pdf>. Acesso em: 12, Fevereiro de 2020.

[39] MELO, T. B.; REIS, J. C. Relações Históricas entre Jogos de Azar e a Probabilidade (2011). Disponível em:

<https://xiii.ciaemredumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/584/93>. Acesso em: 12, Fevereiro de 2020.

[40] MORALES, A.; GREGORIA, M. Teoria Subjetiva de La Probabilidad: Fundamentos, Evolucion Y Determinacion de Probabilidades. Tesis Doctoral – Departamento de Estadistica Y Metodos de Decision, Facultad de Ciencias Economicas Y Empresariales:Universidad Complutense de Madrid, 1985.

[41] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. Matemática Ensino Médio. v. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[42] SILA, J. C.C. Tópicos de história do pensamento probabilístico: uma abordagem em três episódios (2013). Disponível em:

<http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1332_889_ID.pdf>. Acesso em: 11, Fevereiro de 2020.

[43] SILVA, J. J. Filosofias da matemática. São Paulo: Ed. da UNESP, p.239, 2007.

[44] SOUSA, J. G.; LIMA, I. C.O Uso dos memes como ferramenta de ensinoaprendizagem: Uma proposta de metodológica (2018). Disponível em:

<https://doity.com.br/media/doity/submissoes/artigoc9749c47e6217b7e6f2f6260d5ec 5561022e0ff5-arquivo.pdf>. Acesso em: 11, Fevereiro de 2020.

[45] SOUZA, F. S. Ensino de probabilidade e estatística por meio da análise exploratória de dados e resolução de problemas. Revista Internacional de Educação Superior. v.5, p.1-20, 2018.

[46] VIALÍ, L. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, n. 16, pág. 143-153, 2008.

[47] WALDMANN, G. T.; SILVA, G. C.; SANTOS JR, G. O ensino de probabilidade e estatística e as tendências em educação matemática: uma análise em dissertações e teses–Brasil. Revista ESPACIOS, v. 38, n. 35, p. 4-15, 2017.