Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA MINIMIZAÇÃO DAS DIFICULDADES INERENTES À ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

KATIÚCIA COSTA ALVES SILVA

Feira de Santana

2022

Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

KATIÚCIA COSTA ALVES SILVA

PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA MINIMIZAÇÃO DAS DIFICULDADES INERENTES À ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Profª. Drª. Fabíola de Oliveira Pedreira

Feira de Santana

2022

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Silva, Katiúcia Costa Alves
S58p Proposta pedagógica para minimização das dificuldades inerentes à abordagem da análise combinatória / Katiúcia Costa Alves Silva. - 2022.
107f. : Il.

Orientadora: Fabíola de Oliveira Pedreira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022.

1. Proposta pedagógica. 2. Matemática. 3. Análise combinatória. I. Pedreira, Fabíola de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 519.1(07)

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB-5/695

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Katiúcia Costa Alves Silva do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos quatro dias do mês de julho de dois mil e vinte e dois, às 10 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com /ara-mwpo-suz, da dissertação apresentada sob o título **"PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA MINIMIZAÇÃO DAS DIFICULDADES INERENTES À ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA"**, da discente **Katiúcia Costa Alves Silva**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS), Mariana Tavares de Aguiar (UFBA) e Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADA.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.
Feira de Santana, 04 de julho de 2022.

Fabíola de Oliveira Pedreira
Prof.ª Dra. Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS)

Mariana Tavares
Prof.ª Dra. Mariana Tavares de Aguiar (UFBA)

Darlan Ferreira de Oliveira
Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Visto do Coordenador:

Abstract

The general goal of this work is to develop a pedagogical proposal for the high school mathematics teacher to minimize the difficulties of understanding, analysis, comprehension, and resolutions related to the content of combinatorics. To this end, bibliographic research was carried out that subsidized the field work to collect the difficulties presented by undergraduate students of Mathematics about the resolution of Combinatorial Analysis questions. From this, it was possible to develop a didactic sequence to minimize these difficulties. The studies showed the deficiencies in the teaching-learning of Combinatorial Analysis, revealing the need to tread a new path, at the academic level, for the preparation of future mathematics teachers, to design improvement courses for those who already teach this subject, and to give among these professionals the willingness to keep continuous periods of study and research.

Keywords: Pedagogical Proposal; Mathematics; Combinatorial Analysis.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo geral elaborar uma proposta pedagógica de ensino para o professor de Matemática do Ensino Médio que minimize as dificuldades de entendimento, análise, compreensão e resoluções relacionados ao conteúdo de combinatória. Para tanto, foi realizada pesquisa bibliográfica que subsidiou a ida à campo para a coleta das dificuldades apresentadas por alunos de graduação em Matemática no que diz respeito à resolução de questões de Análise Combinatória. A partir disso, foi possível desenvolver uma sequência didática para a minimização dessas dificuldades. Os estudos realizados evidenciaram as deficiências do ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, revelando a necessidade de se trilhar um novo caminho, à nível acadêmico, para preparação dos futuros professores de Matemática, traçar cursos de aperfeiçoamento para aqueles que já regem aulas dessa disciplina e disseminar entre tais profissionais a disposição pela manutenção continuada de períodos de estudos e pesquisas.

Palavras-chave: Proposta Pedagógica; Matemática; Análise Combinatória.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao meu Pai celestial, que, com certeza, me carregou no colo e continuará carregando para me proteger e fortalecer nos momentos de desalento e para celebrar nos momentos de contentamento.

Ao meu esposo, João Guilherme, pela parceria, apoio, torcida e acolhimento nesta etapa intensa e exaustiva da minha vida.

À minha filha, Thuane, amor da minha vida, fonte inesgotável de afeto, otimismo, encorajamento e estímulo para que eu esteja sempre buscando evoluir e superar os meus limites.

À minha Vó Izabel, por ter me doado tanto de sua força e persistência, à minha Mãe, Célia; meu irmão, Gustavo, e todos os meus familiares, em especial às minhas tias e minhas priminhas, por todo pensamento positivo. À minha turma do Profmat, por todo incentivo, carinho, parceria, risadas, almoços, dias de estudo, cafezinhos e, principalmente, por toda amizade compartilhada, vocês são incríveis e fizeram essa empreitada ser muito mais prazerosa e solene.

Aos meus amigos e amigas, que por muitas vezes foram colo, que ouviram lamúrias e comemoraram cada êxito, que oraram para que meus passos fossem iluminados. Em especial, a minha amiga Camila, você foi instrumento de Deus nessa caminhada, aos grupos: “As Convidadas”, o “Quarteto” e “3 mais 1”, amo vocês.

Por fim, a todos os professores que foram meus mestres. Especialmente, a minha orientadora, professora Doutora Fabíola de Oliveira Pedreira, que além de ser um exemplo de profissional é um ser humano notável, obrigado pela compreensão, por acreditar no meu potencial e por ter sido tão generosa comigo, compartilhando seu conhecimento, experiência e amizade.

Dedico este trabalho às pessoas que me fazem ser capaz de evoluir, que são imprescindíveis para o meu viver: minha filha, esposo, mãe, vó, familiares, amigos, colegas professores e alunos.

"Mas é preciso ter força, é preciso ter raça, é preciso ter gana sempre!"
Milton Nascimento

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Gráficos

INTRODUÇÃO

A Matemática guarda na sua história uma trajetória responsável e imprescindível na evolução humana. Sempre atual, é uma ciência de grande importância para a sociedade, para a formação cognitiva e humana do indivíduo. Apresenta-se na educação básica, desde a educação infantil até o ensino médio, como uma área de conhecimento de grande relevância, capaz de desenvolver nos estudantes competências e habilidades para a formação de cidadãos atuantes, argumentativos e socialmente competentes.

No processo de ensino e aprendizagem da Matemática, entre muitos atores, dois são principais: o educando e o educador. Nessa perspectiva, ensinar e aprender Matemática dependem do conhecimento técnico, da habilidade e metodologias do professor, assim como, do desejo, dedicação e desenvolvimento do educando. Entretanto, dentre todos os conteúdos necessários para o alcance das competências e habilidades elencadas na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e ratificadas com a implementação do Novo Ensino Médio, nenhum é tão discutido entre os pares, pela sua dificuldade, para o docente e para o discente, quanto o ensino da Análise Combinatória.

Nesse contexto, a Análise Combinatória envolve raciocínio importante e representa um campo de imensas potencialidades, como analisar, investigar, refletir, ponderar hipóteses, testar, argumentar, generalizar e validar. A vivência como professora de ensino médio, permitiu à pesquisadora ouvir relatos de colegas acerca da dificuldade de abordar esse conteúdo. Percebeu-se que é uma atitude comum entre os profissionais deixar o conteúdo de combinatória como último no planejamento do ano letivo, na esperança que o mesmo não possa ser estudado pela ausência de tempo.

Esse cenário motivou os estudos a respeito desse tema, gerando a questão norteadora da pesquisa: Como minimizar as dificuldades de compreensão, análise e resoluções de questões relacionadas à análise combinatória? Determinou-se como objetivo geral elaborar uma proposta pedagógica de ensino para o professor de Matemática do Ensino Médio que minimize as dificuldades de entendimento, análise, compreensão e resoluções relacionados ao conteúdo de combinatória. Como objetivos específicos, tem-se: apresentar as definições dos princípios, bem como suas estratégias que envolvem as resoluções dos problemas de contagem; identificar quais os fatores que contribuem para essa situação; desenvolver uma proposta pedagógica que minimize as dificuldades no ensino-aprendizagem da análise combinatória.

O estudo aqui desenvolvido justifica-se devido à existência de dificuldades enfrentadas pelos alunos e por professores no ensino-aprendizagem da Análise Combinatória no que diz respeito à distinção dos tipos de agrupamentos, seja arranjo simples ou com repetição, permutação, combinação. Nesse sentido, Morgado et al. (1991, p.1) afirmam que: "De maneira mais geral podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.". Ainda nessa perspectiva, os PCN+ (BRASIL, 2002) afirmam que o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento matemático que decide sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para possibilitar a contagem de casos possíveis. Sendo assim, professores não devem estar presos às expressões matemáticas de determinados agrupamentos dos problemas de contagem. Até porque o que fica evidente é que o excesso de formalismo não contribui significativamente para o ensino e para a real aprendizagem.

É fato que as experiências vividas e testemunhadas são indicadores que norteiam esse trabalho. A falta de compreensão do que realmente está sendo contado nos problemas de combinatória, assim como, a aplicação direta de fórmulas prontas, em problemas padronizados, parecem ser fatores decisivos para a não eficiência nos processos de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Com o objetivo de tornar mais claro e tangível esse conteúdo, serão abordados problemas de diferentes níveis de complexidade, tratando-os de forma investigativa, reflexiva, passível de testes e quando possível generalização. Entende-se que a generalização é uma possibilidade da resolução do problema por meio da aplicação direta de alguma fórmula.

Ainda é importante relatar que o conteúdo de Análise Combinatória deve ser trabalhado desde o fundamental, séries finais, até as séries do Ensino Médio, de acordo com o que é estabelecido pela BNCC. E que todas essas dificuldades se acentuaram ainda mais no período pandêmico, o qual ainda é vivenciado. A necessidade da utilização de um ensino remoto tornou ainda mais complexa a tarefa de desenvolver as competências e habilidades da área de Matemática e, em especial, às concernentes ao ensino de Análise Combinatória. Professores e alunos tiveram que desenvolver um patamar de autonomia na aprendizagem nunca exigido.

Nessa perspectiva, no primeiro capítulo desta dissertação, será feita uma abordagem sobre os problemas de contagem, fundamentando o entendimento e a resolução deles, primordialmente, nos Princípios: Aditivo e Multiplicativo, este, último, também tratado como Princípio Fundamental da Contagem e o Princípio da Inclusão e Exclusão. Vale ressaltar que a abordagem que aqui será dada à Análise Combinatória não abandonará o rigor matemático, mas terá como objetivo facilitar o entendimento, a compreensão e apreensão desse conteúdo pelo professor, de maneira que proporcione tranquilidade e atrativos na ministração de suas aulas e, consequentemente, melhor aprendizagem dos educandos. Nesse sentido, de acordo com Sturm (1999, p.3), "o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações problemas".

No Capítulo 2, serão abordados os tipos de agrupamentos estudados na educação básica da Análise Combinatória. Pautando a apresentação, definição e entendimentos das características dos agrupamentos por meio da resolução de problemas. Nesse capítulo, serão apresentadas as estratégias de resolução dos problemas de contagem, utilizando, primordialmente, os Princípios relatados no Capítulo 1.

O Capítulo 3 apresenta e analisa os questionários aplicados com alunos do 7º e do 8º semestre, da graduação de Matemática de uma Universidade baiana. A proposta inicial era aplicação de um questionário também com professores do Ensino Médio da rede estadual, entretanto, as tentativas de aplicação não foram exitosas, por falta de adesão deles. O questionário foi elaborado e aplicado com o propósito de detectar as principais complicações no ensinar e no aprender a Análise Combinatória.

Por fim, no Capítulo 4, será apresentada uma proposta de sequência didática, para ser executada no Ensino Médio. Nela será assumida a real tentativa de ser apresentada muito mais que um conglomerado de situações problemas para serem resolvidas. Trata-se, portanto, de uma orientação clara e prática para o alcance da autonomia do educador e do educando no ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, além de ser uma sequência atrativa, na qual o estudante é atuante em todo o processo. Dessa maneira, é uma preocupação procedente que a sequência didática utilize matérias acessíveis a fim de torná-la o mais aplicável e efetiva na realidade da sala de aula da educação básica.

Capítulo 1

PRINCÍPIOS PARA RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS DE CONTAGEM

Neste capítulo, serão apresentadas algumas definições importantes para o entendimento das resoluções dos problemas de contagem, o Princípio Aditivo, o Princípio Multiplicativo (Princípio Fundamental da Contagem) e o Princípio da Inclusão e Exclusão (P.I.E.), por meio da teoria dos conjuntos. No entanto, como o propósito é facilitar o entendimento e a resolução dos problemas de contagem, cada definição estará relacionada a pelo menos um problema.

1.1 PRINCÍPIO ADITIVO

Enuncia-se de modo bem simples o Princípio Aditivo:

Definição 1.1.1. *Se dois conjuntos disjuntos, A e B, $(A \cap B = \Phi)$, possuem, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.*

Observa-se nos exemplos que seguem como o Princípio Aditivo é aplicado em problemas de contagem.

Exemplo 1.1.1. *Num evento da universidade o participante podia escolher, num turno, uma palestra ou um minicurso. Sabendo que havia 4 palestras e 5 minicursos disponíveis e que o participante só pode assistir a um, quantas são escolhas distintas que o participante pode fazer?*

Nota-se que inicialmente a escolha pode ser feita por uma palestra ou um minicurso. É como se tivéssemos dois conjuntos disjuntos:

$$A = \{x | x \text{ é uma palestra}\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

$$B = \{y | y \text{ é um minicurso}\} = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$$

Daí,

$$A \cup B = \{x | x \text{ é uma palestra ou um minicurso}\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 5 = 9$$

Tem-se, então que o participante pode ter 9 escolhas diferentes. É importante que fique clara a relação entre o conectivo "ou" com o Princípio Aditivo. Parece uma informação insignificante, mas diferenciar o princípio de que melhor se aplica de acordo com o conectivo que é utilizado no problema é uma estratégia importante na interpretação dos problemas.

Exemplo 1.1.2. *Numa lanchonete há 7 tipos de sanduíche e 4 tipos de salgados. Sabendo que uma cliente só pode comprar um sanduíche ou um salgado, de quantos modos diferentes essa cliente pode comprar seu lanche?*

Tem-se nesse exemplo situação semelhante do Exemplo 1.1.1. É necessário escolher entre os 7 sanduíches ou os 4 salgados, logo:

$$D = \{z | z \text{ é uma sanduíche}\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$$

$$E = \{w | w \text{ é um salgado}\} = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$$

Daí,

$$D \cup E = \{z | z \text{ é uma sanduíche ou um salgado}\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, G_1, G_2, G_3, G_4\}$$

$$n(D \cup E) = n(D) + n(E) = 7 + 4 = 11$$

Nesse exemplo a cliente pode fazer sua escolha de 11 modos diferentes.

Exemplo 1.1.3. *Considere 3 vogais distintas e 5 consoantes, também distintas. De quantos modos podemos escolher uma letra entre essas vogais e essas consoantes?*

É perceptível que nesse exemplo está implícito o uso do Princípio Aditivo, pois, resumidamente, é necessário escolher entre as 3 vogais ou entre as 5 consoantes. Sendo assim, o número de modos de escolher uma letra entre às dadas é 8, pois:

possibilidades de escolha de uma vogal ou de escolha de uma consoante

$$3 + 5 = 8$$

O Princípio Aditivo pode ser estendido:

Definição 1.1.2. *Se A_1,A_2,A_3,...,A_n são conjuntos disjuntos 2 a 2, e se o conjunto A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.*

1.2 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Tomando como referência a linguagem dos conjuntos, define-se, inicialmente o Princípio Multiplicativo:

Definição 1.2.1. *Se A é um conjunto com p elementos e B é um conjunto com q elementos, então o conjunto AXB (A cartesiano B) formado pelos pares ordenados (a,b), tais que $a \in A$ e $b \in B$, tem cardinalidade $p \cdot q$.*

Será utilizado para representar a cardinalidade de um conjunto, o símbolo #.

Acompanhem agora a utilização do Princípio Multiplicativo na resolução de alguns problemas. Vale ressaltar que os problemas que seguem são, propositalmente, semelhantes aos exemplos utilizados na seção 1.1.

Observem com atenção a mudança do conectivo "ou" para o conectivo "e", e a importância dessa mudança na interpretação do problema.

Exemplo 1.2.1. *Num evento da universidade o participante deve escolher, num turno, uma palestra e um minicurso. Sabendo que havia 4 palestras e 5 minicursos disponíveis e que os horários das palestras eram na primeira parte do turno e os horários dos minicursos na segunda parte do turno, de quantos modos pode ser feita essa programação?*

Nesse caso para se fazer a programação solicitada é necessário escolher uma palestra e um minicurso, esta ordem será fixa, visto que há uma restrição de horários, dentro do turno. Pode-se, então, utilizar o Princípio Multiplicativo na linguagem de conjuntos:

$$A = \{x|x \text{ é uma palestra}\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

$$B = \{y|y \text{ é um minicurso}\} = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$$

Daí,

$$AXB = \{(x,y)|\text{x é uma palestra e y é um minicurso}\} =$$
$$=$$
$$\{(P_1,M_1),(P_1,M_2),(P_1,M_3),(P_1,M_4),(P_1,M_5),(P_2,M_1),...,(P_4,M_4),(P_4,M_5),\}$$
$$\#(AXB) = 4 \cdot 5 = 20$$

Assim, tem-se que o número de programações distintas que podem ser realizadas por um participante deste evento, no referido turno, é dado por 20. Atenção, mais uma vez, que para este problema foi feita uma escolha "e" outra escolha, relacionando o conectivo "e" ao produto do número de possibilidades.

O Princípio Multiplicativo será de grande valia na resolução de problemas de contagem, por esse motivo, é necessário e pertinente, já enunciarmos o mesmo, adaptado aos problemas de contagem, mas, ainda de maneira clara e que corrobora com a linguagem dos conjuntos.

Definição 1.2.2. *Se uma escolha A pode ocorrer de m maneiras distintas e, se, para cada umas dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, uma outra escolha B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer a escolha A seguida da escolha B é dada por $m \cdot n$.*

Retornando ao Exemplo 1.2.1, deve-se escolher uma palestra seguida da escolha de um minicurso. Nesse caso, existem 4 modos de escolher a palestra e 5 modos de escolher o minicurso, logo:

$$\textit{maneiras de escolher uma palestra} \cdot \textit{maneiras de escolher um minicurso}$$

$$= 4 \cdot 5 = 20$$

É primordial que seja constatada a relação entre o conectivo "e" e o Princípio Multiplicativo. Além disso, é importante destacar que se tomou como referência a escolha A seguida da escolha B, visto que a definição está em consonância com o que foi definido para AXB. Pode-se questionar, mas, se fosse a escolha B seguida da escolha A? Seria encontrado o mesmo número de modos. Mas, se a ordem nesse caso resultasse em uma nova programação, seria necessário descrever também, pois, seriam novas possibilidades de programações. Mais adiante esse tema, será abordado de forma mais profunda, seguem os exemplos.

Exemplo 1.2.2. *Numa lanchonete há 7 tipos de sanduíche e 4 tipos de salgados. Sabendo que uma cliente vai comprar um sanduíche e um salgado, de quantos modos diferentes essa cliente pode comprar seu lanche?*

Mais uma vez o exemplo é semelhante ao já utilizado para o Princípio Aditivo. Porém, neste, o cliente escolherá um sanduíche **e** um salgado, logo, existe claramente a relação entre as escolhas feita pelo conectivo "e", que evidência, pelas definições já apresentadas e exemplificadas, a utilização do Princípio Multiplicativo. Logo:

$$\textit{maneiras de escolher um sanduíche} \cdot \textit{maneiras de escolher um salgado}$$

$$= 7 \cdot 4 = 28$$

Exemplo 1.2.3. *Considere 3 vogais distintas e 5 consoantes, também distintas. De quantos modos podemos formar um anagrama com duas letras distintas, dentre as disponíveis? E quantos são os anagramas com três letras distintas sendo 1 vogal e 2 consoantes?*

Neste exemplo, aparentemente simples, que de fato dependerá apenas dos princípios já enunciados, atenção para diferentes resoluções.

1ª Resolução: Como formar um anagrama com 2 letras distintas, tem que escolher a 1ª letra e escolher a 2ª letra. De acordo com o enunciado, todas as vogais são distintas e todas as consoantes também, tem-se um total de 8 letras que podem ser escolhidas, lembrando que após escolher a primeira letra, esta não poderá mais ser escolhida. Suponha que se tenha as seguintes letras disponíveis: $\{A, E, I, B, C, D, F, G\}$. É necessário observar que nessa situação é contabilizado como anagramas diferentes as seguintes escolhas, por exemplo: AE e EA, pois a mudança de ordem dos elementos gera um agrupamento (anagrama) diferente.

$$\textit{maneiras de escolher a 1}^{\underline{a}}\textit{ letra} \cdot \textit{maneiras de escolher a 2}^{\underline{a}}\textit{ letra}$$

$$= 8 \cdot 7 = 56$$

Contabilizando um total de 56 anagramas possíveis.

2ª Resolução: Utilizando V para representar uma vogal e C para representar uma consoante, podemos separar em casos. Os anagramas podem ser da seguinte forma:

$$V \ e \ V \quad ou \quad C \ e \ C \quad ou \ V \ e \ C \quad ou \ C \ e \ V$$

Nota-se que as letras são distintas, então uma vogal escolhida não pode ser novamente escolhida. O mesmo ocorre no caso de consoante e consoante, em que se porta o conectivo "e" utilizamos o Princípio Multiplicativo e no caso do conectivo "ou" utilizamos o Princípio Aditivo. Daí:

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 6 + 20 + 15 + 15 = 56$$

Esse exemplo é importante, pois apresenta de forma clara, quando o problema pode ser feito de um modo geral ou separado em casos. Dependendo da restrição dada, alguns problemas devem ser separados em casos, é o que ocorre na segunda pergunta.

No segundo questionamento, é preciso determinar o número de anagramas com 3 letras distintas sendo que são 2 consoantes e 1 vogal. O problema consiste em escolher uma vogal entre as 3 possíveis e escolher 2 consoantes entre as 5 possíveis, mas, nesse caso, a posição de ser vogal ou consoante altera o anagrama. Para entender melhor, suponha que as letras sejam $\{A, E, I, B, C, D, F, G\}$, o anagrama ABF é diferente do anagrama BAF, mesmo utilizando as mesmas letras, a mudança de ordem dá origem a um novo agrupamento. Desse modo, é interessante separar em casos:

$$V \ e \ C \ e \ C \quad ou \quad C \ e \ V \ e \ C \quad ou \quad C \ e \ C \ e \ V$$

$$3 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 + 60 + 60 = 180$$

Nesse caso, pode ser formado 180 anagramas com a restrição solicitada. Esta é mais uma resolução que a estratégia de dividir o problema em casos e utilizar o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo ao mesmo tempo é eficiente e segura. O mesmo ocorrerá em problemas com mais restrições e consequentemente maior complexidade.

Exemplo 1.2.4. *Um professor mostrou a um de seus alunos 5 livros diferentes de matemática, 6 livros diferentes de física e 8 livros distintos de química. E pediu que ele escolhesse: a) 2 livros quaisquer; b) 2 livros de componentes curriculares diferentes. De quantos modos o aluno pode fazer as escolhas?*

Para encontrar as soluções, é preciso notar que as solicitações feitas nas letras a) e b) são diferentes, pois na letra b) tem a restrição de que os livros sejam de componentes curriculares diferentes. Na resolução da letra a) o aluno precisa escolher um livro e escolher outro livro. De modo análogo ao feito na 1ª resolução do Exemplo

1.2.3, pode-se considerar que se têm 19 livros, distintos, que podem ser escolhidos, desse modo:

maneiras de escolher o 1º livro e maneiras de escolher o 2º livro

$$19 \cdot 18 = 342$$

Mas, esse modo de resolução não se aplica para este exemplo, é necessário observar se não está sendo contabilizado uma mesma escolha mais de uma vez, para dirimir essa dúvida, basta fazer uma escolha e analisar se a alteração da ordem de escolha altera a opção. Por exemplo:

escolher o livro 1 de Matemática e escolher o livro 2 de Química seria o mesmo que *escolher o livro 2 de Química e escolher o livro 1 de Matemática.*

Logo, não são 342 modos de escolher dois livros quaisquer entre os livros listados. Esse problema reafirma a necessidade de testar os agrupamentos e observar se a mudança de ordem gera ou não um novo agrupamento. Assim como no Exemplo 1.2.3, consegue-se resolver a letra a) estabelecendo as possibilidades de escolha dos dois livros. Considere M como escolha a de um livro de matemática; F como a escolha de um livro de física; e, Q como a escolha de um livro de química e que nos casos das escolhas dos livros da mesma disciplina está sendo contabilizada a ordem de escolha dos livros, ou seja, a escolha M_1 e M_2 (livro de matemática 1 e livro de matemática 2) é diferente da escolha M_2 e M_1. Daí:

$$M \; e \; M \quad ou \quad M \; e \; F \quad ou \quad M \; e \; Q \quad ou \quad F \; e \; F \; ou \quad F \; e \; Q \; ou \quad Q \; e \; Q$$

$$\frac{5 \cdot 4}{\underbrace{2}_{\substack{\text{é dividido por 2}\\ \text{para não}\\ \text{contabilizar uma mesma}\\ \text{escolha duas vezes}}}} + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + \frac{6 \cdot 5}{\underbrace{2}_{\substack{\text{é dividido por 2}\\ \text{para não}\\ \text{contabilizar uma mesma}\\ \text{escolha duas vezes}}}} + 6 \cdot 8 + \frac{8 \cdot 7}{\underbrace{2}_{\substack{\text{é dividido por 2}\\ \text{para não}\\ \text{contabilizar uma mesma}\\ \text{escolha duas vezes}}}}$$

$$= 10 + 30 + 40 + 15 + 48 + 28 = 171$$

Desse modo, temos 171 modos distintos de escolher dois livros quaisquer entre os listados.

Na resolução da letra a) já evidenciamos o que foi solicitado na letra b), determinar de quantos modos o aluno pode escolher dois livros de componentes curriculares diferentes. Ainda considerando M como escolha de um livro de matemática; F como escolha de um livro de física; e, Q como escolha de um livro de química, serviria para a reposta os seguintes casos:

$$M \; e \; F \quad ou \quad M \; e \; Q \quad ou \quad F \; e \; Q$$

$$5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 30 + 40 + 48 = 118$$

O aluno pode escolher dois livros, sendo de componentes curriculares diferentes de 118 modos.

Exemplo 1.2.5. *Quantos são os números que podemos formar utilizando todos os algarismos: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5?*

Note que para resolver esse problema de contagem teríamos que fazer 9 escolhas: o algarismo da casa das unidades, os algarismos a casa das dezenas, o algarismo da casa das centenas e assim sucessivamente, até utilizar os 9 algarismos, mas, observe que a simples utilização do Princípio Multiplicativo nos faria contabilizar um mesmo número mais de uma vez. Caso não tenha conseguido entender observe: Os algarismos dados são: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5 (os 1's foram diferenciados pela cor, para percebemos melhor que a troca de um por outro não muda o número). Possibilidade 1 de número: 111111235. Possibilidade 2 de número: 111111235.

Note que houve uma troca de 1's na posição dezena de milhar e unidade de milhão, mas, o número formado é o mesmo. Para resolver esse problema precisamos observar que o que altera o número escolhido é a posição ocupada pelos algarismos 2, 3 e 5 entre os 1's. Como temos que usar todos os algarismos colocaremos os 1's e destacaremos os espaços que os algarismos 2, 3 e 5 podem ocupar:

_1_1_1_1_1_1_

Suponhamos que vamos escolher primeiro o espaço para o algarismo 2, temos 7 possibilidades, escolhendo uma delas, teríamos:

_1_2_1_1_1_1_1_

Observe que ao escolhermos o espaço para o primeiro algarismo teremos um espaço a mais para a escolha do espaço do segundo algarismo. Suponhamos a escolha do espaço para o algarismo 3:

_1_2_1_3_1_1_1_1_

De modo análogo, ganhamos mais um espaço para escolher a posição do terceiro algarismo, desse modo, o total de números pode ser determinando por:

escolher o espaço para o 2 e escolher para o 3 e escolher o espaço para o 5

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

Sendo assim é possível escrever 504 números diferentes, utilizando todos os algarismos fornecidos.

Assim como ocorreu com o Princípio Aditivo que foi possível estender a definição, também podemos estender o Princípio Multiplicativo.

Definição 1.2.3. *Se o conjunto A_i tem cardinalidade m_i para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então o produto cartesiano $A_1 X A_2 X A_3 X \cdots X A_n = \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) | a_i \in A_i$, para $i = 1, 2, ..., n\}$ tem cardinalidade $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_n$.*

Estendendo a definição e utilizando uma linguagem mais conveniente para os problemas de contagem temos:

Definição 1.2.4. *Se uma escolha A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então essas n escolhas podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ maneiras diferentes.*

Para solidificar o entendimento e aplicação dos Princípios Aditivo e Multiplicativo apresentados na resolução de problemas de combinatória, façamos mais um exemplo, mas, não esqueçam, precisamos estar atentos as condições dadas na situação e ao que está sendo solicitado.

Exemplo 1.2.6. *Em um grupo tem-se 10 moças e 8 rapazes, onde 5 deles (3 moças e 2 rapazes) são irmãos e os restantes não possuem parentesco. Quantos são os casamentos possíveis entre moças e rapazes desse grupo?*

Para resolver esse problema de contagem devemos estar atentos ao fato de irmãos não poder se casar, então, vamos separar as escolhas em casos. O casamento poderá ocorrer entre as moças que são irmãs e entre os rapazes não irmãos ou entre as moças não irmãs e os rapazes, para facilitar usaremos as notações:

- M - *maneiras de escolher uma moça que tem irmão*
- $\tilde{M}$ - *maneiras de escolher uma moça que não tem irmão*
- H - *maneiras de escolher um rapaz que tem irmã*
- $\tilde{H}$ - *maneiras de escolher um rapaz que não tem irmã*

Daí temos:

$$M \text{ e } \tilde{H} \quad \text{ou} \quad \tilde{M} \text{ e } (\tilde{H} + H)$$

$$3 \cdot 6 + 7 \cdot 8 = 18 + 56 = 74$$

É possível a realização de 74 casamentos entre moças e rapazes.

1.3 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO (PIE)

O PIE nos apresenta a possibilidade de obtermos o número total de elementos na união de um número finito de conjuntos, determinar a cardinalidade da união de dois ou mais conjuntos. Nesse contexto, será apresentada e aplicada a relação matemática que o representa. É salutar que o Princípio da Inclusão e da Exclusão, na prática, evita contabilizar um agrupamento mais de uma vez, ou seja repetidamente, é por meio dele, também, que alguns problemas de contagem que podem ser resolvidos na análise de muitos casos o que pode tornar a resolução confusa e extensa pode ser simplificada pela exclusão dos casos desfavoráveis, ou seja, pela exclusão do total de casos possíveis, daqueles que não são solicitados no problema. Vejamos, então o PIE.

O número de elementos na união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ é dado por:

$$\begin{gathered} n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + \\ +(-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \end{gathered} \tag{1.1}$$

Como destacamos um dos objetivos deste trabalho é sabermos de que forma o PIE se aplica na resolução de problemas de contagem. Para tanto, analisaremos mais alguns exemplos que esclarecem sua aplicação.

Exemplo 1.3.1. *Quantos são os anagramas da palavra FELIZ, que possui a letra Z na primeira posição ou letra E na segunda posição?*

A resolução deste problema pode ocorrer com o auxílio do PIE, tomemos os seguintes conjuntos:

- *A – O conjunto dos anagramas que possuem a letra Z na 1ª posição.*

Pelo Princípio Multiplicativo podemos fixar o Z na primeira posição e escolher as letras para as 4 posições restantes, ou seja,

escolher a 2ª letra e escolher a 3ª letra e escolher a 4ª letra e escolher a 5ª letra

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Logo $n(A) = 24$.

- *B – O conjunto dos anagramas que possuem a letra E na 2ª posição.*

Analogamente ao fixar o E na 2ª posição temos a mesma situação do conjunto A, donde concluímos que $n(B) = 24$.

- *$A \cap B$ – É o conjunto dos anagramas que possuem ao mesmo tempo, a letra Z na 1ª posição e a letra E na 2ª posição. Teríamos desse modo duas letras fixas e 3 letras para serem escolhidas para as três posições restantes. Pelo Princípio Multiplicativo podemos afirmar que teríamos* $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *anagramas nesse conjunto.*

Desse modo, $n(A \cap B) = 6$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B) = 24 + 24 - 6 = 42$$

Exemplo 1.3.2. *Com relação aos anagramas da palavra IMPORTUNAS quantos modos podemos escolher um anagrama que não termine com a letra A?*

Nesse exemplo podemos determinar o total de anagramas e excluir aqueles que terminam com a letra A. Para formar um anagrama precisamos escolher as letras que ocupam cada posição e nesse caso não temos leras repetidas. Então o total de anagramas pelo Princípio Multiplicativo é dado pelo produto do número de possibilidades da escolha de uma letra em cada posição. Ou seja:

$$\begin{gathered}\text{maneiras de escolher a } 1^{\underline{a}} \text{ letra} = 10\\ \text{maneiras de escolher a } 2^{\underline{a}} \text{ letra} = 9\\ \text{maneiras de escolher a } 3^{\underline{a}} \text{ letra} = 8\\ \vdots\\ \text{maneiras de escolher a } 9^{\underline{a}} \text{ letra} = 2\\ \text{maneiras de escolher a } 10^{\underline{a}} \text{ letra} = 1\end{gathered}$$

O total de anagramas é dado por: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Vamos retirar desse total aqueles anagramas que têm a letra A fixa na décima posição, desse modo temos apenas 9 escolhas para serem feitas, da 1ª letra até a 9ª letra. Logo, o número de anagramas que terminam com a letra A pode obtido pelo produto: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Pelo PIE, o número de anagramas que não terminam com a letra A é:

$$\begin{gathered}10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =\\ = 3.628.800 - 362.880 =\\ 3.265.920\end{gathered}$$

Caso não fosse utilizado o PIE neste problema poderíamos começar a escolha pela restrição, ou seja, escolhendo a letra que ocuparia a 10ª posição. Observe:

$$\begin{gathered}\text{maneiras de escolher a } 10^{\text{a}} \text{ letra} = 9(\text{excluindo a letra A})\\ \text{maneiras de escolher a } 1^{\text{a}} \text{ letra} = 9((\text{excluindo a } 10^{\text{a}} \text{ letra e incluindo A}))\\ \text{maneiras de escolher a } 2^{\text{a}} \text{ letra} = 8\\ \vdots\\ \text{maneiras de escolher a } 8^{\text{a}} \text{ letra} = 2\\ \text{maneiras de escolher a } 9^{\text{a}} \text{ letra} = 1\end{gathered}$$

Determinando $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.265.920$.

O Exemplo 1.3.3 pode ser denominado como um clássico na educação básica, além de tornar-se mais simples quando utilizado o PIE, exige que tenhamos atenção na formação dos agrupamentos.

Exemplo 1.3.3. *Dez pessoas, entre elas Gilberto e Laura, pretendem formar uma comissão com quatro membros escolhidos entre os dez. Quantas comissões são possíveis se Gilberto e Laura podem ou não comparecer, mas nunca juntos na mesma comissão?*

Primeiro vamos observar qual a restrição dada, ou seja, qual o tipo de comissão que serviria e o tipo de comissão que não serviria. Seja L a notação para a presença de Laura na comissão e $\tilde{L}$ para a ausência de Laura e G, para a presença de Gilberto e $\tilde{G}$ para a ausência de Gilberto na comissão. Teríamos os seguintes casos:

- Comissões que servem:

  L *e* $\tilde{G}$ *e mais* 3 *pessoas ou* $\tilde{L}$ *e* G *e mais* 3 *pessoas ou* 4 *pessoas* $\tilde{L}$ *e* $\tilde{G}$

- Comissões que não servem:

  L *e* G *e mais* 2 *pessoas*

Notem que se determinamos o total de comissões possíveis e excluir desse total aquelas que não servem, restará todas as que servem para o problema. E desse modo faríamos apenas dois casos de comissões. Por outro lado, podemos determinar os 3 casos de comissões que servem. Para esse problema a diferença de resolução e demanda de cálculo parece sutil, mas, em outras situações o procedimento da exclusão simplifica significativamente a solução.

1ª Resolução: Vamos resolver primeiro utilizando a estratégia da exclusão, para tanto vamos determinar o total de comissões possíveis sem nenhuma restrição. Precisamos escolher 4 pessoas entre as 10 disponíveis. Pelo Princípio Multiplicativo teríamos:

$$\begin{gathered}\text{modos de escolher a } 1^{\text{a}} \text{ pessoa} \cdot \text{modos de escolher a } 2^{\text{a}} \text{ pessoa} \cdot \cdots\\ \cdot \text{modos de escolher a } 4^{\text{a}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040\end{gathered}$$

Mas, assim como no exemplo 1.2.4, nesse produto estamos contabilizando um mesmo agrupamento repetidamente. Para o melhor entendimento, suponhamos que o grupo de pessoas é dado por: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, L$ e G, escolhidas aleatoriamente as pessoas na seguinte ordem: P_1, P_2, P_4 e P_5 estamos contabilizando que se essas mesmas pessoas fossem escolhidas em outra ordem, por exemplo, P_1, P_5, P_4 e P_2 seria um outro agrupamento, outra comissão, o que não é verídico. Sendo assim, para cada comissão escolhida estamos contabilizando-a 24 vezes, que o número de modos que podemos organizar essa comissão com 4 pessoas.

Para não contabilizarmos um mesmo agrupamento essas 24 vezes, vamos pegar o valor encontrado utilizando o Princípio Multiplicativo e dividir por 24, assim, encontraremos o total de comissões, sem restrições, possíveis:

$$\text{Total de comissões} = \frac{5040}{24} = 210$$

Agora vamos determinar o caso de comissões que não serve:

$$L \ \ e \ G \ \ e \ mais \ 2 \ pessoas$$

Como Laura e Gilberto estão fixos, serão escolhidas 2 pessoas entre as 8 disponíveis. Vamos utilizar o Princípio Multiplicativo e assim como fizemos no cálculo do total de comissões vamos descontar os agrupamentos que contamos repetidamente.

$$\text{modos de escolher a } 1^{\underline{a}} \text{ pessoa} \cdot \text{modos de escolher a } 2^{\underline{a}} \text{ pessoa} = 8 \cdot 7 = 56$$

Como cada agrupamento de 2 pessoas será repetido 2 vezes, dividiremos o total por este valor. Daí temos:

$$\text{Comissões L e G e mais 2 pessoas} = \frac{56}{24} = 28$$

Logo o número de comissões que não têm Laura e Gilberto juntos é dada por: $210 - 28 = 182$.

$2^{\underline{a}}$ Resolução: Para a segunda resolução vamos determinar o número de comissões dos 3 casos das comissões que servem.

$$L \ \ e \ \tilde{G} \ \ e \ mais \ 3 \ pessoas \ ou \ \tilde{L} \ \ e \ G \ \ e \ mais \ 3 \ pessoas \ ou \ 4 \ pessoas \ \tilde{L} \ \ e \ \tilde{G}$$

O cálculo do número de comissões de cada caso acima será feito de modo análogo ao feito nas comissões da $1^{\underline{a}}$ Resolução. O cálculo do número de comissões do caso L e $\tilde{G}$ e mais 3 pessoas é dado por:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$$

Pois, nesse agrupamento temos Laura fixa e precisam ser escolhidas 3 pessoas entre as 8 pessoas disponíveis (8 disponíveis, pois Laura já está fixa e Gilberto não pode ser escolhido) e o agrupamento pelo Princípio Multiplicativo é contabilizado 6 vezes.

Analogamente também temos 56 comissões do caso $\tilde{L}$ e G e mais 3 pessoas

As comissões do caso 4 pessoas $\tilde{L}$ e $\tilde{G}$ será feita pela escolha de 4 pessoas dentre as 8 disponíveis, visto que está sendo excluído a participação de Laura e Gilberto, nesse caso, cada agrupamento escolhido será contabilizado 24 vezes. Daí temos:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} = \frac{1680}{24} = 70$$

Desse modo, concluímos:

L e $\tilde{G}$ e mais 3 pessoas ou $\tilde{L}$ e G e mais 3 pessoas ou 4 pessoas $\tilde{L}$ e $\tilde{G}$

$$56 + 56 + 70 = 182$$

Como na 1ª resolução, é possível formar 182 comissões sem a presença de Laura e Gilberto ao mesmo tempo.

Neste capítulo buscamos evidenciar que os principais problemas de contagem trabalhados na educação básica podem ser analisados e solucionados sem a aplicação de nenhumas das conhecidas fórmulas de combinatória. O Princípio Aditivo, o Princípio Multiplicativo e o Princípio da Inclusão e Exclusão, aliados a uma interpretação reflexiva, a testagem de possibilidades, a verificação da importância da ordem de disposição dos elementos são os aspectos indispensáveis para o entendimento e o desenvolvimento das soluções dos problemas de contagem. Ressaltando que esse processo privilegia o desdobramento de competências e habilidades importantes para a educação básica.

Entretanto, não é simples apagar e ou esquecer o estudo da Análise Combinatória por meio da identificação dos agrupamentos e da aplicação das fórmulas, nem seria esse um caminho coerente, afinal, o estudo de padrões e as generalizações são imperiosos no estudo da Matemática. Além disso, existe uma inclinação explícita nos livros didáticos pelo estudo da Análise Combinatória por meio dos agrupamentos e da aplicação de fórmulas, fato que permeia a prática pedagógica e de estudo dos professores. Consequentemente é inevitável reservar um capítulo para tratar dos arranjos, combinações e permutações, objetivando relacionar o uso das fórmulas a uma escolha e não a uma obrigatoriedade, continuará sendo prioridade a demonstração da utilização dos princípios já citados na resolução dos problemas.

Capítulo 2

TIPOS DE AGRUPAMENTOS

A Análise Combinatória é o ramo da matemática discreta que, como já sabemos, se dedica ao estudo dos mais diversos problemas de contagem. Nessa trajetória, historicamente, alguns padrões de problemas acabam por ser evidenciados, assim como suas estratégias de resolução. Abordaremos, aqui, os agrupamentos que são estudados na educação básica, assim como as expressões matemáticas que encaminham as soluções. Não obstante, este capítulo tem como principal objetivo relacionar as fórmulas de Análise Combinatória que habitam nos livros didáticos, nos quadros e nas práticas pedagógicas, aos princípios, reflexões, estratégias de testagem e verificação, abordados no Capítulo 1. Sobre isso:

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a sua solução. Se a aprendizagem desses conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas (MORGADO, 1991, p. 3).

Nas situações de contagem, de um modo geral, aparecem duas atitudes, "principais" e intuitivas: que é trocar (misturar, permutar) elementos de posição e de escolher elementos. Em geral esses serão os aspectos que caracterizaram os diferentes tipos de agrupamentos. Para tanto, primeiro vamos entender e definir o que é o fatorial de um número natural.

Sabemos que para simplificar sucessivos produtos de termos de uma sequência podemos usar o $\prod$ (produtório), como, por exemplo:

- $\prod_{i=1}^{n} x^i$ que representa o produto da variável x elevada a i, para i variando de 1 a n. Ou seja, é o mesmo que: $x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \cdots \cdot x^n$.

Para representar $\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n$ utilizamos o fatorial de n, representado por $n!$. E define-se:

Definição 2.0.1. *O fatorial de um número natural n, denotado por $n!$ É definido como o produto*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

2.1 PERMUTAÇÃO SIMPLES

Vamos observar os exemplos que seguem, nos quais, utilizaremos o Princípio Multiplicativo para a resolução.

Exemplo 2.1.1. *Quantos números de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?*

Notem que temos 5 posições para escolher os 5 algarismos que não podem se repetir. Desse modo, para formar os números precisamos escolher um algarismo para a 1ª posição, e escolher um algarismo para a 2ª posição, e escolher um algarismo para a 3ª posição e assim sucessivamente.

Para melhorar a organização das soluções, a partir deste exemplo, o número de possibilidades de cada escolha ficará abaixo da escolha indicada e esta será representada apenas por um símbolo.

$1^{\underline{a}}P$ – escolher o algarismo da primeira posição (dezena de milhar)

$2^{\underline{a}}P$ – escolher o algarismo da segunda posição (unidade de milhar)

$3^{\underline{a}}P$ – escolher o algarismo da terceira posição (centena)

$4^{\underline{a}}P$ – escolher o algarismo da quarta posição (dezena)

$5^{\underline{a}}P$ – escolher o algarismo da quinta posição (unidade)

$$\underbrace{1^{\underline{a}}P}_{5} \text{ e } \underbrace{2^{\underline{a}}P}_{4} \text{ e } \underbrace{3^{\underline{a}}P}_{3} \text{ e } \underbrace{2^{\underline{a}}P}_{2} \text{ e } \underbrace{1^{\underline{a}}P}_{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Deixemos explícito que o resultado do produtório da solução podia ser representado por meio do fatorial de 5:

$$\underbrace{1^{\underline{a}}P}_{5} \text{ e } \underbrace{2^{\underline{a}}P}_{4} \text{ e } \underbrace{3^{\underline{a}}P}_{3} \text{ e } \underbrace{2^{\underline{a}}P}_{2} \text{ e } \underbrace{1^{\underline{a}}P}_{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

Sendo assim, seria possível escrevermos 120 números diferentes, formados por algarismos distintos, utilizando todos os algarismos dados.

Resolvemos o problema utilizando o Princípio Multiplicativo e que a troca (permuta) de algarismos de lugar implica na formação de um número diferente e que nesse exemplo utilizamos todos os elementos dados (obrigatoriamente utilizamos os 5 algarismos na formação de cada número).

Exemplo 2.1.2. *Em uma sala há 13 pessoas. De quantas maneiras podemos organizar essas pessoas em uma fila?*

Esse exemplo se apresenta com o mesmo padrão do anterior, de fato, o que temos que fazer é escolher uma pessoa para cada um dos 13 lugares na fila. Todos os elementos (pessoas) serão utilizados na formação da fila, e eles são todos distintos. Para escolha do $1^{\underline{o}}$lugar ($1^{\underline{o}}L$) temos 13 maneiras, para escolha do $2^{\underline{o}}$lugar ($2^{\underline{o}}L$) temos 12 possibilidades e assim sucessivamente. Resolvendo então:

$$\underbrace{1^{\underline{a}}L}_{13} \text{ e } \underbrace{2^{\underline{a}}L}_{12} \text{ e } \underbrace{3^{\underline{a}}L}_{11} \text{ e } \underbrace{4^{\underline{a}}L}_{10} \text{ e } \underbrace{5^{\underline{a}}L}_{9} \text{ e } \underbrace{6^{\underline{a}}L}_{8} \text{ e } \underbrace{7^{\underline{a}}L}_{7} \text{ e}$$

$$\underbrace{8^{\underline{a}}L}_{6} \text{ e } \underbrace{9^{\underline{a}}L}_{5} \text{ e } \underbrace{10^{\underline{a}}L}_{4} \text{ e } \underbrace{11^{\underline{a}}L}_{3} \text{ e } \underbrace{12^{\underline{a}}L}_{2} \text{ e } \underbrace{13^{\underline{a}}L}_{1}$$

$$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13! = 6227020800$$

Assim como no exemplo 2.1.1 o problema evidencia a reorganização dos elementos, a permuta de todos os 13 elementos distintos, que pode ser representado pelo 13!

Exemplo 2.1.3. *Considere os anagramas da palavra VESTIBULAR. Quantos anagramas apresentam as letras V, T e R juntas?*

Sabemos que anagramas são as palavras obtidas pela troca de ordem das letras de uma palavra, nesse caso temos uma condição (restrição aos anagramas) as letras V, T e R devem estar juntas, mas, o problema não define a ordem dessas letras. Então vamos tratar essas três letras como um combo, pois, se uma trocar de lugar com outra letra diferente dessas três, as outras duas tem que acompanha-la. Desse modo ao invés de termos 10 letras (V, E, S, T, I, B, U, L, A, R) teremos 7 letras (E, S, I, B, U, L, A) e um combo de leras (VTR).

Reescrevendo o problema desse modo, temos 8 posições que devem ser ocupadas por 7 letras e o combo de letras, mas, não podemos esquecer que as letras V, T e R, poderão trocar de lugar entre si, como por exemplo: AVTRESIBULA é um anagrama possível e AVRTESIBULA é outro anagrama possível. Desse modo, precisamos contabilizar as permutas entre essas 3 letras que compõem o combo.

De acordo com os exemplos anteriores podemos concluir:

permutação de 7 letras e o combo (VTR,E,S,I,B,U,L,A) e permutação de 3 letras(V,T,R)

$$8! \cdot 3! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320 \cdot 6 = 241920$$

É possível formar 241 920 anagramas da palavra VESTIBULAR que possuem as letras V, T e R juntas. Quantos anagramas começam e terminam em vogal?

Notem que nesse exemplo também temos uma condição, ou seja, precisamos garantir que a primeira letra e a última do anagrama sejam vogais e as outras poderão ocupar as 8 outras posições. Como já fizemos anteriormente vamos dividir em casos:

- Fixando A e E:

$$A \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}_{8!} E \text{ ou } E \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}_{8!} A \rightarrow 8! + 8! = 2 \cdot 8! = 2! \cdot 8! = 80640$$

OU

- Fixando A e I:

$$A \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}_{8!} I \text{ ou } I \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}_{8!} A \rightarrow 8! + 8! = 2 \cdot 8! = 2! \cdot 8! = 80640$$

OU

- Fixando A e U, analogamente, também teremos 80 640 anagramas

OU

- Fixando E e I, analogamente, também teremos 80 640 anagramas

OU

- Fixando E e U, analogamente, também teremos 80 640 anagramas

OU

- Fixando I e U, analogamente, também teremos 80 640 anagramas

Logo pelo princípio aditivo:

$$80640 + 80640 + 80640 + 80640 + 80640 + 80640 = 483840$$

É possível formar 483 840 anagramas da palavra VESTIBULAR que começam e terminam por vogal.

Vamos responder esse mesmo item sem especificar todos os casos, utilizando apenas o princípio multiplicativo. Consideremos:

- V – escolha da vogal inicial
- $\bar{V}$ - escolha da vogal final

$$\underbrace{V}_{3} \text{ e } \underbrace{\text{troca livre das 8 letras restantes}}_{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=8!} \text{ e } \underbrace{\bar{V}}_{2} \to 3 \cdot 8! \cdot 2 = 6 \cdot 8! = 483840$$

Os exemplos apresentados trazem um padrão que ocorre recorrentemente em problemas de contagem, que é a permutação dos n elementos distintos de um grupo, onde, como percebemos, a mudança da ordem dos elementos acarreta o surgimento de um novo agrupamento. Esse tipo de problema de contagem recebe o nome de Permutação Simples, o qual podemos melhor definir:

Definição 2.1.1. *Se temos n elementos distintos, então o número de agrupamentos que podemos obter com todos esses n elementos recebem o nome de permutações simples e é dado por*

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

2.2 PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

É que neste agrupamento, denominado de Permutação com Repetição, a seção 2.1 servirá como um pré-requisito, afinal, pela própria nomenclatura continuaremos a trocar aleatoriamente elementos de lugar, ou seja, escolher posições para todos os elementos do agrupamento. Analogamente o número de permutações com repetições é dado pelo número total de permutas (trocas de posição) dos n elementos, entretanto, nesse caso os elementos podem ser repetidos. É importante salientar que continuaremos utilizando o Princípio Multiplicativo.

Como já sabemos, o número de permutações de n elementos distintos, pelo Princípio Multiplicativo, pode ser descrito, resumidamente por n!. O que precisamos entender, agora, é o que ocorre com essa quantidade de permutações, já que temos elementos repetidos. Para tanto, vale retomar a estratégia que utilizamos nos Exemplos 1.1.2 e 1.1.3.

Exemplo 2.2.1. *Quantos são os anagramas da palavra AFF? Para resolver esse problema podemos escrever todos os anagramas, e para uma melhor compreensão vamos representar os elementos que se repetem, as letras F's, como cores distintas, mas, não esqueçam que continuam representando a letra F. Os elementos a serem permutados são: A, F, F*

$$\underbrace{AFF \qquad \cancel{AFF}}_{\textit{São agrupamentos iguais}} \; \underbrace{FAF \qquad \cancel{FAF}}_{\textit{São agrupamentos iguais}} \; \underbrace{FFA \qquad \cancel{FFA}}_{\textit{São agrupamentos iguais}}$$

Observem que a permutação dos 3 elementos, dada por 3!, contabiliza agrupamentos repetidos, que precisam ser descontados, nesse caso são dois elementos repetidos do total de três elementos. Resultam nesse exemplo 3 anagramas válidos. Estamos contabilizando cada agrupamento 2 vezes, quantidade que está diretamente relacionada a quantidade de letras que se repetem.

Exemplo 2.2.2. *Quantos são os anagramas da palavra OLHO? Vamos seguir o mesmo procedimento utilizado no Exemplo 2.2.1, escrevendo todos os agrupamentos e "diferenciando" os elementos repetidos por cores. Os elementos são:* H, L, O, O

$HLOO$	$\cancel{HLOO}$	$HOLO$	$HOOL$	$\cancel{HOLO}$	$\cancel{HOOL}$
$LHOO$	$\cancel{LHOO}$	$LOHO$	$LOOH$	$\cancel{LOHO}$	$\cancel{LOOH}$
$OHLO$	$OHOL$	$OLHO$	$OLOH$	$OOHL$	$OOLH$
$\cancel{OHLO}$	$\cancel{OHOL}$	$\cancel{OLHO}$	$\cancel{OLOH}$	$\cancel{OOHL}$	$\cancel{OOLH}$

Nesse exemplo temos a permutação de 4 elementos, dos quais, dois são repetidos. Notem que o total de permutações são 24, mas, como o elemento O aprece duas vezes, precisamos descontar os agrupamentos repetidos, resultando em 12 anagramas possíveis, novamente contabilizamos 2 vezes um mesmo agrupamento, pois são 2 os elementos repetidos.

Nesses dois exemplos, estamos buscando entender de que modo podemos determinar quantos agrupamentos precisam ser descontados, ou seja, quantos agrupamentos são contabilizados repetidamente.

Exemplo 2.2.3. *Quantos são os anagramas da palavra PAPA? Como nos exemplos anteriores vamos destacar os elementos e "diferenciar" os repetidos por cores. Os elementos a serem permutados são:* A, A, P, P.

$AAPP$	$\cancel{AAPP}$	$APAP$	$APPA$	$\cancel{APAP}$	$\cancel{APPA}$
$\cancel{AAPP}$	$\cancel{AAPP}$	$\cancel{APAP}$	$\cancel{APPA}$	$\cancel{APAP}$	$\cancel{APPA}$
$PAAP$	$PAPA$	$\cancel{PAAP}$	$\cancel{PAPA}$	$PPAA$	$\cancel{PPAA}$
$\cancel{PAAP}$	$\cancel{PAPA}$	$\cancel{PAAP}$	$\cancel{PAPA}$	$\cancel{PPAA}$	$\cancel{PPAA}$

Nesse problema de contagem o número de anagramas possíveis são 6. Observe que o número total de elementos nos Exemplos 2.2.2 e 2.2.3 são iguais, mas, o número de anagramas não é, pois, o número de repetições interfere na contagem repetida de anagramas.

O número α_1 de vezes que um elemento se repete, determina $\alpha_1!$, anagramas repetidos, pois, a troca de lugar desses elementos não resulta em um novo agrupamento, sendo necessário dividir o total de agrupamentos encontrados por $\alpha_1!$.

Sendo assim, como na palavra PAPA, letra A se repete duas vezes, temos $\alpha_1 = 2$; e, a letra P, também, se repete duas vezes, temos $\alpha_2 = 2$. O total de anagramas seria dado por $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$, descontando os agrupamentos repetidos.

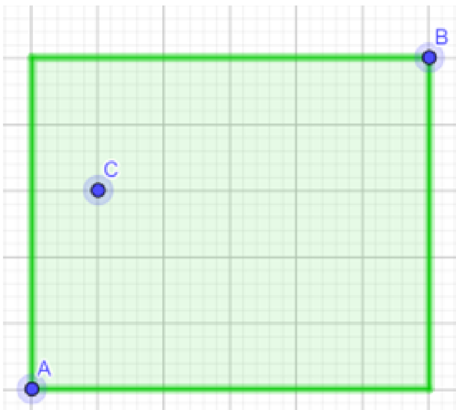
Definição 2.2.1. *Dados n elementos, dos quais, n_1 se repetem α_1 vezes, n_2 se repetem α_2 vezes, n_3 aparece α_3 vezes, ..., n_k são iguais a α_k, sendo $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$, o número de permutações possíveis desses elementos é dado por:*

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \cdots \cdot \alpha_k!}$$

Ponderemos sobre mais algumas situações, rotineiramente, encontradas em exercícios dos livros didáticos.

Exemplo 2.2.4. *Na malha quadriculada abaixo está representado um esquema de parte das ruas de um bairro de uma cidade planejada. Cada linha representa uma rua, e cada quadrado, um quarteirão. Considere área delimitada pelo retângulo verde, os pontos em destaque e que o deslocamento só pode ocorrer em duas direções, para o norte ou para o leste.*

Figura 2.1: Malha quadriculada representando ruas de um bairro.



a) Qual a quantidade de caminhos diferentes que podem ser feitos do ponto A ao ponto B?

Como o movimento só pode ocorrer para o norte (N) ou para o leste (L), saindo do ponto A até o ponto B, precisam ocorrer seis movimentos para o leste e cinco movimentos para o norte, o que faremos é permutar esses elementos considerando suas repetições.

Temos um total de 11 elementos, são eles: $L, L, L, L, L, L, N, N, N, N, N$; como notamos o L se repete 6 vezes e o N se repete 5 vezes. Daí,

$$P_{11}^{6,5} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

É possível fazer 462 caminhos diferentes do ponto A ao ponto B.

b) De quantos modos é possível ir do ponto A ao ponto B, passando por C?

Nesse problema precisamos garantir que o caminho passe pelo ponto C, então ele será dividido em duas partes, de A para C que terá os elementos: L, N, N, N; e de C para B, com os elementos: L, L, L, L, L, N, N.

número de caminhos de A até C e número de caminhos de C até B

$$P_4^{1,3} \cdot P_7^{5,2} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 84$$

Resultando em 84 caminhos possíveis, como solicitado.

Exemplo 2.2.5. *Dada a equação $x + y + z = 13$, quantas são as soluções naturais possíveis?*

Como a equação considera apenas soluções naturais, e assim, como trabalhamos na educação básica, incluindo o zero, o que realmente precisamos fazer nesse exemplo é organizar os objetos e seus separadores, ou seja, a soma dos valores, naturais, de x,y e z contabilizam 13 objetos e o símbolo da soma funciona como um separador das quantidades desses objetos. Vamos pensar na equação $x + y + z = 13$ da seguinte forma:

$$\underbrace{\star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star + +}_{\text{Temos um total de 15 elementos, 13 "estrelas" que são os objetos e 2 separadores,os símbolos da adição}}$$

Para entender melhor como a troca desses elementos resultaria em diferentes soluções, escreveremos algumas:

$$\begin{aligned} S_1 &= \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star \star + + = (13, 0, 0) \\ S_2 &= \star \star + \star \star \star \star \star \star \star + \star \star \star \star = (2, 7, 4) \\ S_3 &= \star + \star \star \star \star \star \star \star \star \star + \star \star \star = (1, 9, 3) \end{aligned}$$

O número total de soluções será dado por:

$$P_{15}^{13,2} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = 105$$

Seria possível determinar 105 soluções naturais diferentes para a equação. No agrupamento da seção 2.1 e neste, a ordem dos elementos é importante. Ou seja, a simples troca de posição de dois ou mais elementos gera um novo agrupamento.

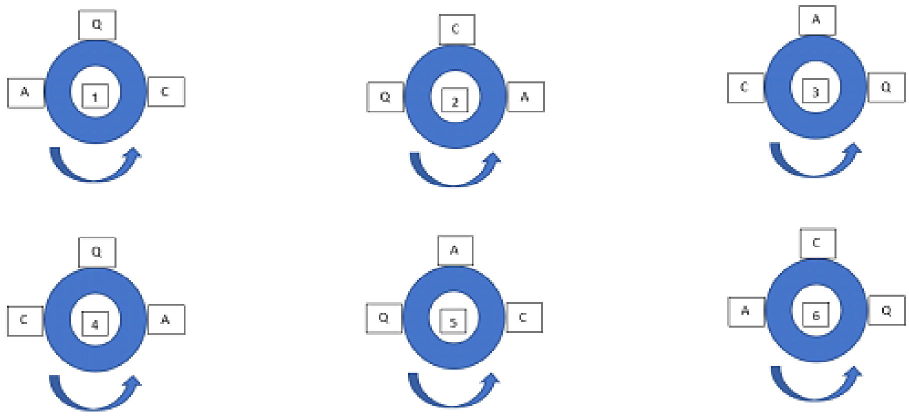
2.3 PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Há uma situação um pouco diferente relacionada à permutação conhecida como permutação circular. Vamos imaginar uma situação para melhor entendermos.

Exemplo 2.3.1. *As amigas Queila, Adriana e Camila irão sentar-se junto a uma mesa circular com 3 lugares. De quantas maneiras diferentes isso poderá ocorrer?*

Se pensarmos na permutação simples de 3 elementos, teremos 3! possibilidades, mas, vejamos o que ocorre:

Figura 2.2: Possibilidades para permutação circular.



As disposições indicadas por 1, 2 e 3 coincidem entre si, considerando a rotação indicada pela seta na imagem. O mesmo ocorre com as disposições indicadas por 4, 5 e 6. Temos, dessa forma, apenas 2 modos distintos de sentar essas 3 amigas em uma mesa circular.

Enquanto nas permutações simples importam os lugares que os elementos ocupam, nas permutações circulares de n elementos, que indicaremos por PC_n, interessa a posição relativa dos elementos entre si. Voltando ao Exemplo 2.3.1, nas três primeiras posições Queila precede Adriana, que precede Camila, que precede Queila. O que indica que a posição relativa entre as três amigas nas três primeiras posições é a mesma. Analogamente, nas últimas posições, Queila precede Camila, que precede Adriana, que por sua vez precede Queila.

Exemplo 2.3.2. *Considerando 5 crianças brincando de roda, qual o número total de permutações circulares entre essas crianças?*

Como, na permutação circular, o que vai interessar é a posição relativa entre os elementos, nossa observação deve estar atenta a quem está do lado de quem. Assim duas permutações circulares serão iguais, quando em ambas, cada criança permanece com as mesmas crianças na sua vizinhança, tanto à direita, quanto a esquerda. Vamos representar cada criança pelas letras A, B, C, D e E, observem que as duas imagens baixo representam uma mesma permutação.

Figura 2.3: Posição relativa na permutação circular.

Observando, na Figura 2.3, o sentido indicado pela seta a partir da criança A, temos que A precede B, que antecede C, que antecede D, que antecede E, que por sua vez antecede A. Nesse caso que temos 5 elementos, o total de permutação seria dado por 5!. Entretanto, em círculo, para cada uma dessa permutações, cada criança ocupará 5 posições locais diferentes do círculo, mas, com a mesma vizinhança, isso ocorrera para todas as crianças. Ou seja, cada permutação circular corresponderá a cinco permutações simples, desse modo o total de permutações circulares, possível, para essas 5 crianças pode ser dado por:

$$PC_5 = \frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5-1)!$$

Definição 2.3.1. *o número total de permutações circulares de n elementos distintos é determinado por:*

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo 2.3.3. *Numa reunião do colegiado, oito pessoas irão sentar-se ao redor de uma mesa redonda, entre elas o diretor e o vice-diretor. De quantas maneiras diferentes essas 8 pessoas podem sentar-se ao redor da mesa?*

Nesse item precisamos determinar o número de permutações circulares de 8 elementos, ou seja,

$$PC_8 = (8-1)! = 7! = 5040$$

Os oito participantes podem sentar-se à mesa de 5040 modos distintos.

a) De quantas maneiras distintas essas oito pessoas podem sentar-se ao redor da mesa de modo que o diretor e o vice-diretor fiquem lado a lado?

Para resolver esse problema vamos usar o mesmo artifício já utilizado no Exemplo 2.1.3. Consideremos o diretor e o vice-diretor que devem ficar sempre juntos com um combo, dessa forma, nos resta 7 elementos que poderão permutar de forma circular e não esqueçamos que o diretor e o vice podem permutar entre si, donde,

$$PC_7 \cdot P_2 = (7-1)! \cdot 2! = 6! \cdot 2! = 1440$$

Atendendo a restrição imposta no problema seriam possíveis 1440 permutações.

2.4 ARRANJO SIMPLES

Assim como feito anteriormente, para melhor conceber os problemas que virão nesta seção, que pela circunstância é um novo agrupamento, vamos analisar e resolver alguns exemplos utilizando os princípios que já foram apresentados, sempre observando as particularidades de cada problema.

Exemplo 2.4.1. *Considerando os algarismos* $1, 2, 3, 4$ *e* 5*. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?*

Note que neste problema, diferente do que ocorria nos exemplos de permutação, não utilizamos os "n" elementos, precisamos escolher uma quantidade "p" dentre os elementos disponíveis. Note ainda que número de possibilidades a cada escolha diminui uma unidade em relação a escolha anterior feita, pois, os algarismos são distintos. Consideremos:

- *maneiras de escolher o algarismo da centena - C*
- *maneiras de escolher o algarismo da dezena - D*
- *maneiras de escolher o algarismo da unidade - U*

Neste caso, pelo princípio multiplicativo temos:

$$\underbrace{\underline{C}}_{5} \text{ e } \underbrace{\underline{D}}_{4} \text{ e } \underbrace{\underline{U}}_{3}$$
$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

É possível formar 60 números atendendo as condições dadas. É importante evidenciar que, nesse problema, dos $n = 5$ elementos dados, escolhemos $p = 3$ e que, claramente, a ordem, a posição, que os elementos se encontram diferenciam os agrupamentos (números formados). Ou seja, utilizando os mesmos algarismos $1, 2$ e 3, formamos seis números diferentes, permutando esses três elementos: 123 (cento e vinte e três), 132 (cento e trinta e dois), 213 (duzentos e treze), 231 (duzentos e trinta e um), 312 (trezentos e doze) e 321 (trezentos e vinte e um).

Observe que se tivéssemos que utilizar os 5 elementos disponíveis, sem repeti-los, teríamos: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, entretanto, para esse problema estaríamos escolhendo 2 posições a mais, pois, dos 5 elementos disponíveis tínhamos que escolher 3. Essas duas posições e suas permutações precisariam ser descontadas do total, ficando então: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$. E como sabemos que $n = 5$ e $p = 3$, podemos reescrever o cálculo realizado da seguinte forma: $\frac{n!}{(n-p)!}$

Exemplo 2.4.2. *Seis jogadores de futebol, concorrem a um dos títulos de 1º, 2º ou 3º melhor jogador do Campeonato Brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos? De modo análogo ao que fizemos no exemplo anterior, neste problema, dentre os 6 elementos disponíveis, 3 serão escolhidos e a ordem de escolha é importante, pois ser o 1º lugar não é equivalente a ser o 2º ou o 3º. Desse modo temos:*

- *número de maneiras de escolher o 1º lugar = 6*
- *número de maneiras de escolher o 2º lugar = 5*, visto que aquele jogador que já foi escolhido em 1º lugar não pode ocupar duas posições.
- *número de maneiras de escolher o 3º lugar = 4*, os jogadores escolhidos anteriormente não entram como possibilidade para essa escolha.

Donde concluímos pelo Princípio Multiplicativo:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

A escolha pode ocorrer de 120 modos diferentes.

Observe que se pensarmos de maneira análoga ao que foi exposto no Exemplo 2.3.1 e tomássemos os conhecimentos que temos no uso dos n elementos disponíveis, teríamos que descontar os $(n-p)$ elementos escolhidos a mais e suas permutações. Ou seja, teríamos também, que o número das diferentes escolhas pode ser dado por $\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Sendo assim, se tivermos n elementos distintos para escolher p elementos, de modo que a ordem de escolha altera o agrupamento, um mesmo elemento não possa ocupar mais de uma posição, ou seja, não pode ser escolhido mais de uma vez e que a quantidade de elementos escolhidos seja menor que o total de elementos disponíveis, pois se usarmos todos os elementos recaímos numa permutação simples, para a primeira escolha temos n possibilidades; para a segunda escolha, temos $(n-1)$ possibilidades; para a terceira escolha, temos $(n-2)$ possibilidades e assim sucessivamente, até que para a "p-ésima" escolha teremos $[n-(p-1)]$ possibilidades, logo o número de modos de escolher p elementos distintos entre n elementos distintos é dado por: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(p-1)]$. Podemos reescrever então:

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1} =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1) =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(p-1)]$$

É salutar reconhecemos que se evidencia, de fato, um padrão de agrupamento que é reconhecido como Arranjo Simples, que pode ser definido da seguinte forma:

Definição 2.4.1. *Dados n elementos distintos, chama-se arranjo simples toda sequência formada por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos, com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p < n$, sendo o caso de $p = n$ uma permutação simples, representamos por*

$$A_{n,p} \text{ (lê-se arranjo de ''n''elementos escolhidos ''p''a ''p'').}$$

Esse total de sequências pode ser encontrada, como intuitivamente apresentado nos exemplos desta seção, pela fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2.5 ARRANJO COM REPETIÇÃO

O nome do agrupamento já nos dá indícios que deve haver alguma semelhança com o Arranjo Simples e de fato há. Ao analisar os exemplos que seguirão notaremos que neste tipo de agrupamento também fazemos uma escolha de elementos, porém, um mesmo elemento pode ser escolhido repetidamente, ou seja, um mesmo elemento pode ocupar diferentes posições nas sequencias que serão formadas. Consequentemente o Princípio Multiplicativo continua sendo a base para a resolução dos problemas.

Exemplo 2.5.1. *Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números de 3 algarismos podemos formar?*

Propositalmente esse exemplo é muito semelhante ao Exemplo 2.3.1, diferenciando-se pelo fato de que, neste, não é solicitado que os algarismos sejam distintos, mas, continuamos precisando escolher três elementos do total disponível. Logo,utilizando o Princípio Multiplicativo temos:

- *escolher o algarismo da centena*
- *escolher o algarismo da dezena*
- *escolher o algarismo da unidade*

Para cada uma dessas escolhas temos 5 possibilidades (qualquer um dos cinco algarismos disponíveis), visto que o número formado pode ter algarismos repetidos. Segue então que a quantidade de números que podem ser formados é dada por:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

Observe que nesse exemplo o total de elementos "n" que pode ser escolhido é 5 e o número "p" de elementos que temos que escolher é 3. Vale ressaltar ainda, que a ordem que os elementos ocupam no agrupamento formado, diferencia um agrupamento do outro, ou seja, escolhendo os algarismos 3, 3 e 1 podemos formar os números: 133 (cento e trinta e três); 313 (trezentos e treze) e 331 (trezentos e trinta e um).

Atente para o fato que o total de agrupamentos encontrados pode ser representado por n^p, pois para cada posição que temos que fazer a escolha teremos os "n" elementos passiveis de serem escolhidos. De modo simplório e redundante, parece taxativo o nome dado a esse agrupamento, Arranjo com Repetição.

Exemplo 2.5.2. *Dados os algarismos 1, 2, 3, 4 e 7 quantos números de 6 algarismos podemos formar?*

Note que nesse exemplo, pelo fato de não haver restrição com relação a repetição de um algarismo a quantidade de elementos que deve ser escolhida supera a quantidade de elementos dado, mas, a posição dos elementos continua sendo decisiva para diferenciar um número de outro. Para escolha de cada algarismo temos 5 possibilidades. Posemos afirmar, que a quantidade de números que pode ser formada é dada por: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$, onde 5 é n, a quantidade de elementos que temos para escolha e o 6 é p, quantidade de escolhas temos que fazer.

Desse modo, podemos definir mais um tipo de agrupamento para os problemas de contagem, os arranjos com repetição.

Definição 2.5.1. *Dados n elementos distintos, chamamos de arranjo com repetição toda sequência formada pela escolha de p elementos, com $p \in \mathbb{N}^*$ entre os n dados, representamos por*

$$AR_{n,p} \text{ (arranjo com repetição de "n"elementos escolhidos "p"a "p").}$$

O número de arranjos com repetição possíveis pode ser representado por:

$$AR_{n,p} = n^p$$

Ainda no panorama dos problemas denominados de Arranjo com Repetição, vale destacar mais dois exemplos, que, frequentemente, são objetos de estudos nas salas de aula da educação básica, principalmente, no segmento do Ensino Médio.

Exemplo 2.5.3. *Uma fechadura tradicional funciona à base de pequenos pinos que, se corretamente alinhados, permitem girar o tambor que aciona a tranca. Os vales e picos na chave correspondente servem exatamente para deslocar esses pinos para a posição correta. Se um modelo específico de fechadura usa 4 pinos, e cada pino pode assumir 6 posições distintas, qual o número de trancas diferentes desse modelo?*

Temos mais uma situação de contagem que o principal a ser feito é uma escolha. Neste caso, novamente pelo Princípio Multiplicativo, determinaremos quantas são as possibilidades de posição de cada pino, lembrando que o problema não faz nenhuma restrição, ou seja, uma posição pode ser escolhida mais de uma vez, um elemento pode se repetir. Desse modo,

$$\underbrace{\textit{posições do 1º pino}}_{6} \text{ e } \underbrace{\textit{do 2º pino}}_{6} \text{ e } \underbrace{\textit{do 3º pino}}_{6} \text{ e } \underbrace{\textit{do 4º pino}}_{6}$$
$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$$

Podemos apresentar a solução utilizando a fórmula para Arranjo com Repetição, teríamos:

$$AR_{n,p} = n^p \rightarrow AR_{6,4} = 6^4 = 1296$$

Desse modo, essa fechadura possui 1296 trancas diferentes.

Exemplo 2.5.4. *Uma adaptação do Teorema do Macaco afirma que um macaco digitando aleatoriamente num teclado de computador, mais cedo ou mais tarde, escreverá a obra "Os Sertões" de Euclides da Cunha. Imagine que um macaco digite sequências aleatórias de 3 letras em um teclado que tem apenas as seguintes letras: S, E, R, T, O. Qual o número máximo de tentativas distintas que esse macaco teria que digitar para escrever a palavra "SER"?*

Assim como nos outros exemplos desta seção, a cada letra digitada o macaco fará uma escolha, entre as 5 letras disponíveis, e não há restrição em repetir a letra, para determinar o máximo de tentativas precisamos calcular todos os modos possíveis de digitar 3 letras, ou seja, todos os Arranjos com repetição de 5 elementos, escolhidos 3 a 3, logo:

$$AR_{5,3} = 5^3 = 125$$

O número máximo de tentativas seria 125.

2.6 COMBINAÇÃO SIMPLES

As combinações são os últimos tipos de agrupamentos que abordaremos neste trabalho, visto que tomamos como base a Análise Combinatória estudada na educação básica, referenciada na Base Nacional Comum. É interessante já pensarmos que os problemas de contagem que podem ser classificados como combinações se diferem dos arranjos e das permutações, primordialmente, pelo fato de que a ordem dos elementos não gera um novo agrupamento, ou seja, a troca de elementos de posição é indiferente. Mas, ainda assim, como todos os outros problemas abordados, eles podem ser resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem.

Retomando o Exemplo 1.3.3 poderá ser percebido que a exposição desta seção já foi parcialmente introduzida e que os problemas de Combinação Simples, já podem ser solucionados, mesmo sem a definição e a aplicação da fórmula estabelecida. Encontraremos estratégias de resolução análoga nos problemas que seguem.

Exemplo 2.6.1. *Cada uma das 6 equipes que disputam um campeonato de handebol enfrenta cada uma das demais uma única vez. Quantos jogos compõem esse campeonato?*

Observe que precisamos determinar o total de jogos que ocorrerá nesse campeonato, para ocorrer um jogo de handebol é necessário a escolha de duas equipes, sendo assim, teríamos que escolher a 1ª equipe e escolher a 2ª equipe, de acordo com o Princípio Multiplicativo o número de jogos será dado por:

$$\underbrace{6}_{\text{possibilidades de escolher a 1ª equipe}} \cdot \underbrace{5}_{\text{possibilidades de escolher a 2ª equipe}} = 30$$

Entretanto, ao fazermos esse cálculo estamos considerando que temos os seguintes jogos: (consideremos as seis equipes como: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6)

$$\begin{array}{ccccc}
E_1 \text{ e } E_2 & E_1 \text{ e } E_3 & E_1 \text{ e } E_4 & E_1 \text{ e } E_5 & E_1 \text{ e } E_6 \\
E_2 \text{ e } E_1 & E_2 \text{ e } E_3 & E_2 \text{ e } E_4 & E_2 \text{ e } E_5 & E_2 \text{ e } E_6 \\
E_3 \text{ e } E_1 & E_3 \text{ e } E_2 & E_3 \text{ e } E_4 & E_3 \text{ e } E_5 & E_3 \text{ e } E_6 \\
E_4 \text{ e } E_1 & E_4 \text{ e } E_2 & E_4 \text{ e } E_3 & E_4 \text{ e } E_5 & E_4 \text{ e } E_6 \\
E_5 \text{ e } E_1 & E_5 \text{ e } E_2 & E_5 \text{ e } E_3 & E_5 \text{ e } E_4 & E_5 \text{ e } E_6 \\
E_6 \text{ e } E_1 & E_6 \text{ e } E_2 & E_6 \text{ e } E_3 & E_6 \text{ e } E_4 & E_6 \text{ e } E_5
\end{array}$$

Observe que, desse modo, estamos considerando que a posição dos elementos difere o agrupamento, ou seja, o jogo E_1 e E_2 é diferente do jogo E_2 e E_1, o que para este problema não é verdade. Estamos contabilizando um mesmo agrupamento (2!), pois é o número de permutações que pode ser feito nesse agrupamento, logo esse valor precisa ser desconsiderado para todas as escolhas. Note quantos seriam os agrupamentos contabilizados indevidamente.

Figura 2.4: Agrupamentos contabilizados.

E_1 *e* E_2	E_1 *e* E_3	E_1 *e* E_4	E_1 *e* E_5	E_1 *e* E_6
E_2 *e* E_1	E_2 *e* E_3	E_2 *e* E_4	E_2 *e* E_5	E_2 *e* E_6
E_3 *e* E_1	E_3 *e* E_2	E_3 *e* E_4	E_3 *e* E_5	E_3 *e* E_6
E_4 *e* E_1	E_4 *e* E_2	E_4 *e* E_3	E_4 *e* E_5	E_4 *e* E_6
E_5 *e* E_1	E_5 *e* E_2	E_5 *e* E_3	E_5 *e* E_4	E_5 *e* E_6
E_6 *e* E_1	E_6 *e* E_2	E_6 *e* E_3	E_6 *e* E_4	E_6 *e* E_5

O real número de jogos possíveis seria dado por: $\frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. E vale ressaltar que o problema disponibiliza 6 elementos, que será o nosso "n" e precisamos escolher 2, a quantidade de elementos que deve ser escolhido representaremos por "p", assim como fizemos na Seção 2.4. Retomando o que já sabemos, se ao invés de escolher, apenas, 2 elementos, tivéssemos que organizar os seis elementos, teríamos 6! modos. Mas, estaríamos escolhendo 4 elementos a mais e com eles formaríamos 4! agrupamentos que não servem, ou seja, repetidos. Além dos 2! agrupamentos que também contaríamos a mais, desse modo, a expressão que determina o total de jogos possíveis, também, pode ser descrita do seguinte modo: $\frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6!}{2!\cdot(6-4)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 3\cdot 5 = 15$

É fato que a resolução da questão consiste na aplicação do Princípio Multiplicativo e na interpretação indispensável sobre a ordem ser importante ou não para gerar um novo agrupamento, pois, os agrupamentos contabilizados repetidas vezes, no Princípio Fundamental da Contagem precisam ser desconsiderados. Mas, é importante relacionar a estratégia utilizada com aquelas conhecidas de outros agrupamentos, para que as fórmulas tenham de fato um significado ou sejam ressignificadas e a sua utilização seja apenas uma escolha.

Exemplo 2.6.2. *Uma professora precisa escolher entre 5 alunos, 3 para representar a escola numa competição de matemática. De quantos modos essa escolha pode ser feita?*

Mais uma vez o problema se apresenta na necessidade de escolhermos 3 elementos num total de 5 possíveis, pelo Princípio Multiplicativo determinaríamos:

$$\underbrace{5}_{\substack{\text{possibilidades de escolha}\\ \text{do 1º aluno}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{possibilidades de escolha}\\ \text{do 2º aluno}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{possibilidades de escolha}\\ \text{do 3º aluno}}} = 60$$

Entretanto, assim como ocorreu no Exemplo 2.6.1 estaríamos contabilizando um mesmo agrupamento mais de uma vez, pois, desse modo estamos considerando que a ordem define diferentes agrupamentos, o que não é verdade. Evidenciamos que se cada agrupamento será formado por 3 elementos, estaríamos contabilizando cada um (3!) vezes, pois, é o número de permutações possíveis. Para entendermos melhor vamos representar esses alunos como: A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5.

Então os 60 agrupamentos que encontraríamos seria:

$$\begin{array}{cccccc}
A_1A_2A_3 & A_1A_3A_2 & A_2A_1A_3 & A_2A_3A_1 & A_3A_1A_2 & A_3A_2A_1\\
A_1A_2A_4 & A_1A_4A_2 & A_2A_1A_4 & A_2A_4A_1 & A_4A_1A_2 & A_4A_2A_1\\
A_1A_2A_5 & A_1A_5A_2 & A_2A_1A_5 & A_2A_5A_1 & A_5A_1A_2 & A_5A_2A_1\\
A_2A_3A_4 & A_2A_4A_3 & A_3A_2A_4 & A_3A_4A_2 & A_4A_2A_3 & A_4A_3A_2\\
A_2A_3A_5 & A_2A_5A_3 & A_3A_2A_5 & A_3A_5A_2 & A_5A_2A_3 & A_5A_3A_2\\
A_3A_4A_5 & A_3A_5A_4 & A_4A_3A_5 & A_4A_5A_3 & A_5A_3A_4 & A_5A_4A_3\\
A_1A_3A_4 & A_1A_4A_3 & A_3A_1A_4 & A_3A_4A_1 & A_4A_1A_3 & A_4A_3A_1\\
A_1A_3A_5 & A_1A_5A_3 & A_3A_1A_5 & A_3A_5A_1 & A_5A_1A_3 & A_5A_3A_1\\
A_1A_4A_5 & A_1A_5A_4 & A_4A_1A_5 & A_4A_5A_1 & A_5A_1A_4 & A_5A_4A_1\\
A_2A_4A_5 & A_2A_5A_4 & A_4A_2A_5 & A_4A_5A_2 & A_5A_2A_4 & A_5A_4A_2
\end{array}$$

Em cada linha temos o total de permutações de um mesmo agrupamento, como dito anteriormente, cada um deles está sendo contabilizado repetidamente 3! vezes. Logo o real número de agrupamentos que podemos formar será dado por:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Se partíssemos da ideia de que permutaríamos todos os elementos dados teríamos 5! permutações, mas, estaríamos utilizando 2 elementos a mais que o solicitado e teríamos 2! permutações contabilizadas repetidamente desses elementos que não deveriam ser escolhidos. Podemos reescrever a expressão que determina o número de agrupamentos possíveis por:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Em ambos os exemplos percebemos que a determinação das Combinações Simples pode ocorrer de $\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ modos. Para darmos continuidade e harmonia ao que já este relatado nesse trabalho, define-se:

Definição 2.6.1. *A Combinação de Simples de n elementos escolhidos p a p, onde $n \geq 1$ e $p \leq n$ e p é um número natural, são todas as escolhas, não ordenadas, de p desses n elementos. As Combinações são representadas por:*

$C_{n,p}$ (lê-se combinação de "n"elementos escolhidos "p"a "p").

Esse total de escolhas pode ser encontrada, como intuitivamente apresentado nos exemplos desta seção, pela fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Para visualizarmos melhor a caracterização das Combinações Simples, realizaremos mais dois exemplos que também são considerados de notório saber nos processos de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória.

Exemplo 2.6.3. *Um grupo de 15 voluntários participará de um estudo a respeito da COVID-19. Desse grupo, 5 receberão uma medicação experimental contra COVID-19, 5 receberão uma medicação existente no mercado farmacêutico e o restante formará o grupo de controle e receberá um placebo. De quantas maneiras distintas podem ser formados os 3 grupos?*

Nessa situação, é necessário perceber que precisam ser escolhidos 3 grupos e que a ordem de escolha dos voluntários não gera um novo agrupamento. Ou seja, representemos os voluntários pelos elementos:

$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}$ e V_{15}; se fosse escolhido o grupo com os seguintes voluntários: $V_1V_2V_3V_4V_5$, nessa ordem ou em outra ordem, por exemplo $V_2V_3V_5V_1V_4$, o grupo de voluntários é o mesmo. Desse modo temos que fazer as seguintes escolhas que podem ser obtidas pela Combinação Simples:

$$\underbrace{\substack{\text{escolher 5 voluntários}\\ \text{do grupo da medicação e}\\ \text{experimental}}}_{C_{15,5}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\substack{\text{escolher 5 voluntários}\\ \text{do grupo da medicação}\\ \text{existente}}}_{\substack{C_{10,5}\\ \text{(a escolha é feita de 5 em 10,}\\ \text{pois, 5 voluntários já foram}\\ \text{escolhidos para o primeiro grupo)}}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\substack{\text{escolher 5 voluntários}\\ \text{do grupo de}\\ \text{controle}}}_{\substack{\text{1 (só tem uma opção,}\\ \text{pois restam apenas}\\ \text{5 voluntários}}}$$

$$\frac{15!}{(15-5)!\cdot 5!}\cdot\frac{10!}{(10-5)!\cdot 5!}\cdot 1=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=756.756$$

Exemplo 2.6.4. *Sorteando-se simultaneamente 5 cartas de um baralho comum com 52 cartas, o número de maneiras distintas de se retirar o rei de ouros e exatamente dois valetes de qualquer naipe é:*

Para resolver esse problema é necessário perceber que temos que escolher 5 cartas num total de 52 e que a ordem de escolha das cartas não importa, além disso, precisamos atender as restrições impostas na situação. Desse modo, temos:

$$\underbrace{\substack{\text{escolher o}\\ \text{rei de ouros}}}_{\substack{1\\ \text{(só existe uma possibilidade,}\\ \text{pois, só existe 1 rei de ouros}\\ \text{no baralho de 52 cartas)}}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\substack{\text{escolher}\\ \text{2 valetes}}}_{\substack{C_{4,2}\\ \text{(o número de possibilidades}\\ \text{pode ser determinado pela}\\ \text{combinação simples de 4 cartas}\\ \text{tomadas a 2, pois temos}\\ \text{4 valetes no baralho)}}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\substack{\text{escolher 2}\\ \text{cartas quaisquer}\\ \text{entre as restantes}}}_{C_{49,2}}$$

$$1\cdot\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}\cdot\frac{49!}{(49-2)!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot 2}\cdot\frac{49\cdot 48\cdot \cancel{47!}}{\cancel{47!}\cdot 2}=7056$$

Sendo assim o sorteio das 5 cartas atendendo as restrições poderia ocorrer de 7056 modos distintos.

Nos Exemplos 2.6.3 e 2.6.4 foi priorizado a fórmula para o cálculo das Combinações Simples, mas, guardemos que no início da seção os problemas foram solucionados sem a necessidade do uso da fórmula. É esse arbítrio do professor e do aluno da educação básica que é necessário ser cultivado.

Dentre os agrupamentos estudados ainda é necessário abordar a Combinação com Repetição, também, conhecido como Combinação Completa. Assim como ocorreu nos Arranjos Simples e com Repetição, o nome dado ao agrupamento já sugere a relação com outros já explanados neste capítulo.

2.7 COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO OU COMBINAÇÃO COMPLETA

Corroborando ao que estudamos na Seção 2.5 analisaremos alguns padrões de problemas de contagem em que a ordem de posição dos elementos não importa e que alguma escolha será feita, logo é um tipo de Combinação. Entretanto, neste agrupamento os elementos podem ser repetidos, ou seja, escolhidos mais de uma vez. Para os problemas que seguem recorreremos fortemente, também, a Seção 2.2 e em especial ao Exemplo 2.2.5.

Exemplo 2.7.1. *Em um estabelecimento comercial é vendido 4 sabores de suco: uva, laranja, maracujá e manga. De quantos modos um cliente pode comprar: a) 3 sucos; b) 7 sucos.*

Para a resolução de ambas situações não há restrição com relação ao sabor dos sucos, ou seja, podem ser comprados todos os sucos de um mesmo sabor, ou dois sabores e no caso da letra a) até 3 sabores diferentes. Para a letra b) podemos afirmar com certeza que haverá repetição de sabores, pois, deve ser escolhido 7 sucos e só são disponibilizados 4 sabores. Entretanto, o que não podemos deixar de entender é que as escolhas dos sabores podem se repetir.

Para uma melhor compreensão, consideremos:

- x = *quantidade escolhida de sucos sabor uva*
- y = *quantidade escolhida de sucos sabor laranja*
- z = *quantidade escolhida de sucos sabor maracujá*
- w = *quantidade escolhida de sucos sabor manga*
- questão disponibiliza n=4 sabores (para o item a)
- a questão solicita a escolha de p=3 (para o item a)
- a questão solicita a escolha de p=7 (para o item b)

De fato, podemos afirmar que para a letra a), podemos montar a seguinte equação linear de soluções inteiras e não negativas:

$$x + y + z + w = 3$$

Como já abordado no Exemplo 2.2.5, as equações lineares de soluções inteiras e não negativas podem ser resolvidas utilizando uma Permutação com Repetição. Nesse caso representaríamos a equação:

$$\underbrace{\star + \star + \star +}_{\substack{\text{temos as 3 estrelas que representa o total da equação e} \\ \text{os 3 separadores das quantidades, representados pelo símbolo da adição} \\ \text{ao todo são 6 elementos que irão permutar}}}$$

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 20$$

Desse modo os 3 sucos poderiam ser comprados de 20 modos diferentes. À procura de estabelecermos o conhecimento da Combinação com Repetição a partir dos conhecimentos já discutidos, analisemos:

$$P_m^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ \cdots \ \cdot \alpha_k!}$$

Como $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k = m \to \alpha_1 = m - (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k)$ e seja a constante $\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k = p$. Observe ainda, que esse total de elementos m utilizados na Permutação com repetição é dado por $(n + p - 1)$, em que n representa o número de elementos possíveis para escolha (no Exemplo 2.7.1 seria os quatro sabores de suco) e p representa a quantidade de escolhas que deve ser feita (no Exemplo 2.7.1 na letra seria 3) daí temos:

$$P_m^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ \cdots \ \cdot \alpha_k!} = \frac{(n+p-1)!}{(n+p-1-p)! \cdot p!} =$$

$$= \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! \cdot p!} = C_{(n+p-1),p} = CR_{n,p}$$

A Combinação com Repetição pode ser resolvida por meio de uma Permutação com Repetição e utilizando a fórmula da Combinação Simples, mas, precisamos respeitas as restrições e adequações feitas em cada caso. Vamos observar, desse modo como podemos obter a solução do item b):

1ª Resolução: Nessa situação precisamos escolher 7 sucos tendo disponíveis 4 sabores. Utilizando a estratégia da equação linear temos:

$$x + y + z + w = 7$$

Donde, $m = n + p - 1 = 4 + 7 - 1 = 10$, como verificado na representação:

$$\underbrace{\star\ \star\ \star\ \star\ \star\ \star\ \star + ++}_{\substack{\text{ao todo são 10 elementos, 7 estrelas que representam o total da equação e} \\ \text{3 separadores, representados elos símbolos da adição}}}$$

$$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Logo, para a escolha de 7 sucos existem 120 modos deles serem escolhidos.

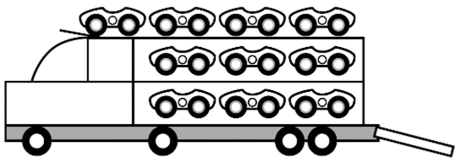
2ª Resolução: Como já sabemos que devemos escolher elementos, a ordem não é importante e os elementos podem se repetir, de acordo com os dados temos:

$$CR_{n,p} = C_{(n+p-1),p} = C_{(4+7-1),7} = C_{10,7} = \frac{10!}{(10-7)! \cdot 7!} = 120$$

É relevante destacar que as Combinações com Repetição não são abordadas nos livros didáticos comumente utilizados na Educação básica. Mas, é indiscutível a sua importância para a resolução de inúmeros problemas de contagem.

Nos exemplos desta seção será aplicado o uso da fórmula apresentada para Combinação com Repetição. Entende-se que refazer o processo das Seções 2.2 e 2.5 seria pouco significativo para a construção do conhecimento e repetitivo.

Exemplo 2.7.2. *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*



Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio.

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

1ª Resolução: Nesta situação temos disponíveis 4 cores para pintar 10 carrinhos, porém, é necessário atenção com a restrição dada, pois, sempre deve haver pelo menos 1 carrinho pintado com cada uma das quatro cores, ou seja, tem que ter: 1 carrinho amarelo, 1 carrinho branco, 1 carrinho laranja e 1 carrinho verde. Como a questão esclarece que mudança de posição dos carrinhos não gera um novo brinquedo, a ordem não é importante, de fato, é um problema de Combinação com Repetição.

Fixando os 4 carrinhos que devem ser pintados cada um de uma cor, restam escolher as cores para pintar os 6 carrinhos restantes, logo:

$$CR_{4,6} = C_{(4+6-1),6} = C_{9,6} = \frac{9!}{(9-6)! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 84$$

É possível produzir 84 modelos distintos do brinquedo. Esta não é uma maneira única de resolução para este problema.

2ª Resolução: Se considerarmos;

- x = *quantidade de carrinhos da cor amarela*
- y = *quantidade de carrinhos da cor branca*
- z = *quantidade de carrinhos da cor laranja*
- w = *quantidade de carrinhos da cor verde*

Como a restrição garante que 4 carrinhos já têm cores fixas, então restam 6 para serem pintados, daí temos:

$$x + y + z + w = 6$$

$$\underbrace{\star\star\star\star\star\star+++}_{P_9^{6,3}}$$

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$$

Não é interesse deste capítulo estimular ou desestimular o uso das fórmulas específicas dos agrupamentos. Mas, como já relatado, anteriormente, dar significado às fórmulas a partir do uso, principalmente, do Prinncípio Multiplicativo e de fato relacionar a natureza e a característica dos problemas com a escolha da melhor metodologia de resolução. Em consonância com a Competência Específica 3 da BNCC: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Visando mapear, da melhor forma possível, as reais dificuldades ou lacunas que os professores da educação básica podem ou não conviver durante os processos de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória é que o próximo capítulo versará sobre a construção, aplicação e análise dos questionários aplicados.

Capítulo 3

QUESTIONÁRIO: CONSTRUÇÃO, APLICAÇÃO E ANÁLISE

Este capítulo é o mais revelador deste trabalho, desde o início da construção desse estudo final do curso, a principal motivação sempre foi identificar quais fatores podem dificultar ou inviabilizar o ensinar da Análise Combinatória. Para tanto, a aplicação de um questionário, totalmente anônimo, mostrou-se como um procedimento possível e eficaz, pois, teríamos informações coletadas dos atores principais desse processo, os professores de Matemática atuantes na educação básica e estudantes concluintes do curso de Licenciatura em Matemática, muitos já atuando como professores regentes de salas de aula.

Entretanto, já no início do processo, surgiu o primeiro problema, a não adesão dos professores da educação básica. O primeiro contato e solicitação para responder ao questionário foi feito por e-mail, com o envio de 120 e-mails para professores. Desses e-mails, 52 foram de respostas negativas e o restante não foram respondidos, fato que inicialmente inviabilizou a aplicação do questionário nesse grupo de profissionais. Ainda assim, foi feita uma segunda tentativa para atingir esse público, dessa vez, o contato foi feito com coordenadores pedagógicos de 5 escolas públicas estaduais solicitando a socialização da proposta com os professores de suas respectivas escolas. A amostra nessa segunda tentativa já estava reduzida a 23 professores, mas, desafortunadamente, mesmo acompanhada de justificativas admissíveis, as 5 respostas finais foram negativas. Desse modo, não foi possível empregar a proposta inicial.

Diante da situação, o foco principal passou a ser a aplicação do questionário com alunos da graduação do Curso de Licenciatura em Matemática, preferencialmente, com alunos concluintes, dos 2 últimos semestres e que já haviam cursado os estágios curriculares e que na sua maioria já atuam em sala de aula, esse público foi mais receptivo e colaborativo. Ainda assim, a amostra de 24 estudantes do 7º e 8º semestres, não foi a projetada, mas, era o possível, diante de turmas com índices cada vez maiores de desistência e com semestres inacabados. As seções que darão continuidade a este trabalho versarão sobre a confecção do questionário. Falaremos qual foi o objetivo, como foi feita a escolha das questões, o modo que foi aplicado, e por fim, a análise das respostas, etapa que apresentou mais dificuldade do que era prevista.

3.1 ELABORAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Como não houve aplicação do questionário aos professores efetivos da educação básica, abdicaremos de relatar sobre a construção do questionário que seria aplicado a esse público. A primeira decisão a ser tomada foi a divisão do questionário aplicado aos estudantes universitários em duas partes, bem definidas. A primeira composta por 10 questões discursivas de vasta aplicação e abordagem nas salas de aula do Ensino Médio, as questões utilizadas foram adaptadas de outras já conhecidas e divulgadas ou foram exatamente iguais; a segunda parte, composta por 5 questões, estas de cunho pessoal, ou seja, de opinião sobre determinados aspectos que são de grande relevância para o ensino de Matemática, no geral, e em particular para o ensino da Análise Combinatória.

A escolha das questões, genuinamente sobre problemas de contagem, se pautou, primordialmente, naquelas que atendem plenamente ou parcialmente a habilidade especifica da área de Matemática e suas Tecnologias: *(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.* Habilidade, esta, que deve ser desenvolvida nos alunos do Ensino Médio da educação básica, segundo a BNCC (etapa do ensino médio). Outro aspecto ponderado na escolha foi a necessidade de análise das restrições em cada questão. Obviamente, a solução correta é o objetivo final, mas, a percepção das restrições e das adaptações estratégicas necessárias são imprescindíveis, além de evidências de conhecimentos prévios, visto que esse olhar cuidadoso e clínico se reflete na prática pedagógica.

As 10 primeiras questões, foram intencionalmente discursivas, contrariando um pouco a tendência educacional de questões de múltipla escolha, mas, em consonância com a meta de valorizar toda e qualquer forma de resolução apresentada, completa ou incompleta; e na tentativa explicita de evitar que o respondente de algum modo fosse influenciado a seguir uma estratégia especifica por causa das alternativas.

A delimitação do tempo não foi tarefa fácil, muitos fatores precisavam ser ponderados, entretanto, ficou claro para os participantes que se a questão não fosse respondida por falta de tempo isso deveria ser explicitado no espaço destinado à resolução. Foi previamente estabelecido um tempo de 60 min para a resolução da primeira parte do questionário, a segunda parte o tempo foi livre, tendo em vista que as respostas eram próprias de cada um.

As questões da segunda parte do questionário foram elaboradas para resultar numa anamnese sobre as experiencias e sentimentos dos estudantes da graduação com relação ao conteúdo de Análise Combinatória, visto que o PCN (EM) evidência como objetivo do ensino da Matemática: promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, P.42). Não existe impessoalidade no processo de ensino e aprendizagem, logo, a perspectiva do educador no processo de ensino é de grande relevância, principalmente, no atual cenário educacional, em que o educador é cada dia mais um incentivador, mediador da busca da aprendizagem pelos estudantes.

3.2 APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Aplicação do questionário ocorreu para alunos de duas turmas diferentes, alunos do 7º semestre e alunos do 8º semestre, do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual da Bahia, também foi aplicado em dias distintos, devido a viabilidade de aplicação em horários de aulas cedidos por dois professores, os quais, vale ressaltar demonstraram muito interesse pelos resultados. O primeiro dia de aplicação foi com os alunos do 7º semestre, responderam ao questionário, neste dia, 14 graduandos; no segundo dia, 10 concluintes do curso responderam ao questionário.

Ambos os grupos já sabiam do que se tratava, pois, o professor colaborador, já havia conversado com eles sobre o questionário e o fato da participação ser voluntária, vale ressaltar que faltaram 4 alunos no primeiro dia e 2 alunos no segundo. No primeiro momento foi explanado para os participantes mais detalhes sobre o trabalho, a justificativa, os objetivos, ressaltado o anonimato das respostas e explicado todo o procedimento para a resolução. O que não era esperado, mas, ocorreu em ambos os dias foi ao final das explicações gerais uma chuva de colocações aflitas sobre a Análise Combinatória. Muitos, antes mesmo de ver as questões, começaram a verbalizar sobre suas frustrações, insatisfações e inseguranças com relação aos processos de aprendizagem e ensino de combinatória. Todavia, foi colocado para os integrantes que essas falas teriam seu espaço na segunda parte do questionário e que assim eles o fizessem.

É salutar o relato de que no tempo destinado ao processo de resolução das questões as queixas não cessaram, muitos verbalizavam as suas variadas dificuldades. Ao final do período de aplicação, integrantes de ambos os grupos, explicitaram o desejo de saber os resultados dos questionários e solicitaram as resoluções das questões, que, prontamente, foram disponibilizadas. Esses momentos de aplicação, de certa forma, já revelavam parte do que ocorreria na análise dos questionários. De fato, assim como posto, por hipótese e vivências, no início deste trabalho, as dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem da Análise Combinatória sucedem. A expectativa é que as respostas sejam fontes para identificar ou confirmar os fatores que contribuem para este panorama.

3.3 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Como o questionário foi aplicado em um grupo do 7º semestre, que chamaremos de grupo 01, e outro do 8º semestre, que chamaremos de grupo 02, um fato, inovador, tornou esses grupos um pouco mais distintos e isto foi exposto pelos próprios participantes. Os alunos do 7º semestre tiveram, no período da graduação, o estudo da Análise Combinatória feito de modo remoto, logo no início da implementação das aulas remotas, no período pandêmico; já o outro grupo fez a disciplina no modo presencial. Esse fato proporcionou uma mudança de estratégia no tratamento dos dados a serem apresentados, para uma melhor compreensão da realidade, os dados serão apresentados por grupo e quando necessário tratados no geral.

3.3.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

Vamos analisar quantitativamente e, se possível, qualitativamente o resultado obtido em cada uma das 10 primeiras questões, por grupo. Para isso utilizaremos as seguintes siglas com seus respectivos significados:

B – Respostas totalmente em branco

PRCF – Respostas parciais com uso de fórmula, considera-se a tentativa, mesmo que não apresente coerência, como uma resposta parcial.

PRSF – Respostas parciais sem uso de fórmula.

CCF – Resposta completa com uso de fórmula.

CSF – Resposta completa sem uso de fórmula.

Apresentaremos as questões e as possíveis resoluções e expectativas traçadas para as resoluções, assim como a análise da resposta de alguns questionários.

Na questão 01, é apresentado o enunciado da questão e uma possível estratégia de resolução: Quantos números naturais pares de três algarismos distintos podemos formar usando apenas os algarismos 0,2, 4, 5, 7 e 9?

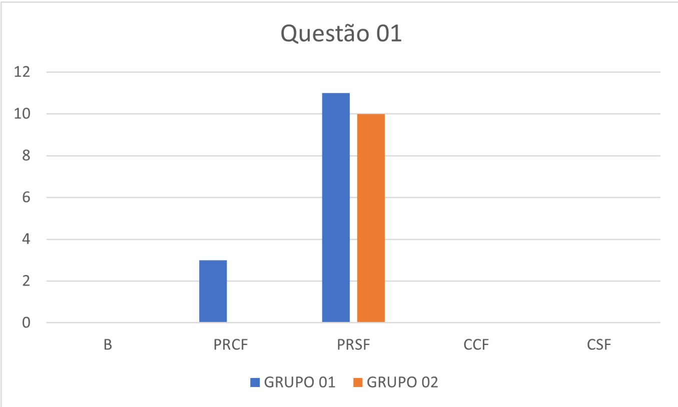
Figura 3.1: Resolução prévia da questão 01.

Como o número deve ser par e formado por 3 algarismos que não podem se repetir vamos dividir em três casos, fixando os algarismos pares na posição da unidade e escolhendo os algarismos da centena e da dezena. Pelo Princípio Multiplicativo e aditivo temos:

$$\underbrace{5}_{\substack{excluímos\\ apenas\ o\\ algarismo\ 0}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{excluindo\\ o\ 0\ e\ o\\ alagarismo\ da\\ centena}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{fixando\\ o\ 0}} \underbrace{+}_{ou} \underbrace{4}_{\substack{excluindo\ o\\ 0\ e\ o\ 2}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{excluindo\\ o\ algarismo\ da\\ centena\ e\ o\ 2}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{fixando\\ o\ algarismo\\ 2}} \underbrace{+}_{ou} \underbrace{4}_{\substack{excluindo\ o\\ 0\ e\ o\ 4}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{excluindo\\ o\ algarismo\ da\\ centena\ e\ o\ 4}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{fixando\\ o\ algarismo\\ 4}} = 20 + 16 + 16 = 52$$

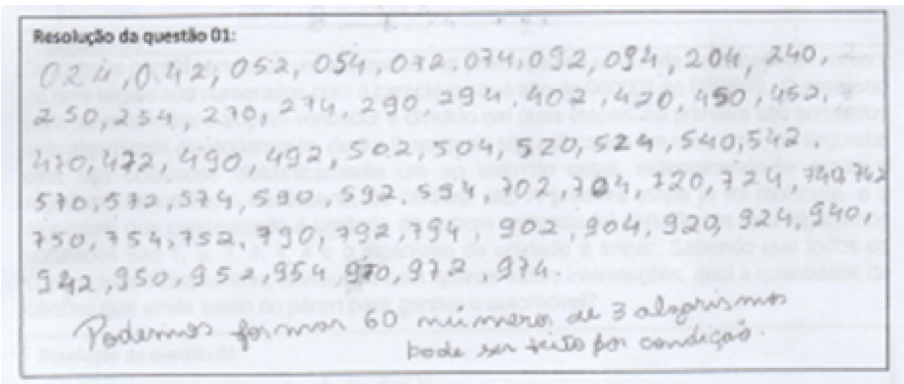
Esta questão tinha como objetivo principal evidenciar o uso do Princípio Multiplicativo, do Princípio Aditivo e a interpretação com relação a restrição sobre a posição do algarismo zero. O gráfico 1 compara a resolução entre os dois grupos e evidência que não tivemos resposta correta em nenhum dos dois, mas, também, nenhuma questão em branco.

Gráfico 1: Resolução da questão 01 entre dois grupos.



Dentre as questões parcialmente respondidas quatro estratégias de resolução foram mais recorrentes, vamos observá-las:

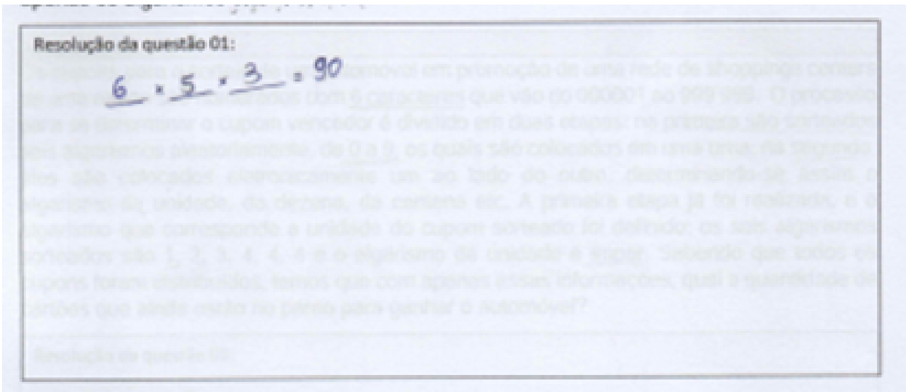
Figura 3.2: Resolução 1 da questão 01.



Essa estratégia de resolução que é a enumeração de todas as possibilidades, ocorreu em 4 respostas do Grupo 01, em todas elas, a estratégia falha quando os respondentes admitem como números formados por três algarismos aqueles que possuem o zero na posição da centena. Ou seja, foram contabilizados 8 números não válidos para o solicitado no problema.

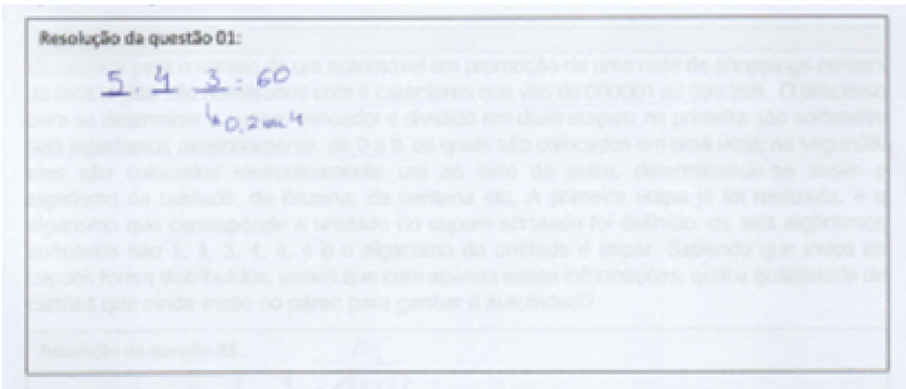
Esse modo de resolução nos deixa uma dúvida, será que se o número de possibilidades fosse maior, essa estratégia também seria utilizada? Percebemos nessas resoluções uma inconsistência no conhecimento do Princípio Multiplicativo e sua aplicação.

Figura 3.3: Resolução 2 da questão 01.



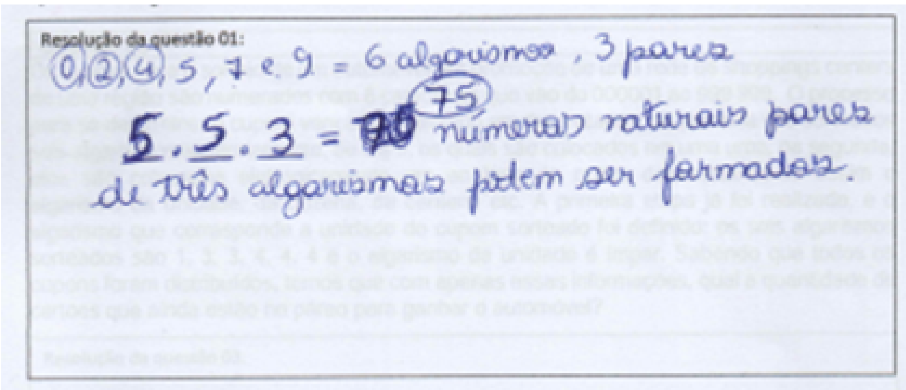
Nessa estratégia de resolução que apareceu em dois questionários do grupo 01 e quatro questionários do grupo 02, fica manifesto a aplicação do Princípio Multiplicativo e a tentativa de cumprir a restrição do número ser par, quando é exposto apenas três possibilidades para o algarismo da unidade. Mas, o caso particular do algarismo zero é desconsiderado, além disso o algarismo utilizado na posição da unidade, do modo, como foi calculado pode ser repetido nas outras posições. Há duas dificuldades explicitas aqui: analisar o zero e restringir o número de possibilidades na posição da centena.

Figura 3.4: Resolução 3 da questão 01.



Esse modo de resolução foi a mais recorrente, em ambos os grupos. Notem que é muito parecida com a estratégia anterior, onde é nítido o uso do Princípio Multiplicativo, mas, a dificuldade, mais uma vez, está em relação a interpretação de como o algarismo zero pode se posicionar. Infelizmente, ficou claro nessa primeira questão uma dificuldade de interpretação.

Figura 3.5: Resolução 4 da questão 01.



Resolução da questão 01:

0, 2, 4, 5, 7 e 9 = 6 algarismos, 3 pares

5 . 5 . 3 = 75 números naturais pares de três algarismos podem ser formados.

Esta estratégia de resolução também é pautada no Princípio Multiplicativo, mas, nota-se a dificuldade em garantir que todos os algarismos são distintos. Nesse modelo, não é possível garantir se as 5 possibilidades apresentadas para a posição da centena é excluindo o 0 ou o algarismo utilizado na unidade, que também pode ser o zero. Há uma divergência entre o que é solicitado no enunciado e o que é entendido e desenvolvido.

Para a questão 02, assim, como ocorreu na questão 01, o objetivo principal era o uso do Princípio Multiplicativo e Aditivo, dividindo a situação nos casos possíveis, além da percepção da importância da ordem dos elementos. Era uma questão que pode gerar confusão, com relação a ser tratada como uma Combinação Simples. Além disso, como é possível a resolução com o uso da Fórmula da Permutação ou do Arranjo Simples, buscamos evidenciar se esses agrupamentos são reconhecidos e utilizados.

A questão 02 estava assim descrita: (FGV- SP / 2020) As bandeiras dos cinco países do Mercosul serão hasteadas em dois postes, um verde e um amarelo. As cinco bandeiras devem ser hasteadas e cada poste deve ter pelo menos uma bandeira. Constituem situações diferentes de hasteamento a troca de ordem das bandeiras em um mesmo poste e a troca das cores dos mastros associadas a cada configuração. Qual o total de configurações possíveis de hasteamentos na condição descrita?

Figura 3.6: Bandeiras da questão 02.

Apresenta-se a expectativa de resolução.

Figura 3.7: Resolução prévia da questão 02.

Como o enunciado exige que em cada poste haja pelo menos uma bandeira e a disposição nos postes, assim como entre eles, altera os agrupamentos, suponhamos os seguintes casos e pelo Princípio Multiplicativo e Aditivo, relacionaremos com os agrupamentos:

$$\underbrace{(1\ bandeira\ no\ poste\ verde)\ e\ (4\ bandeiras\ no\ poste\ amarelo)}_{\substack{\acute{e}\ an\acute{a}logo\ a\ 1\ bandeira\ no\ poste\ amarelo\ e\ 4\ no\ poste\ verde \\ ent\tilde{a}o\ multiplicamos\ por\ 2}}$$

$$\rightarrow 2 \cdot \underbrace{(5)}_{A_{5,1}} \cdot \underbrace{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}_{P_4}$$

$$ou$$

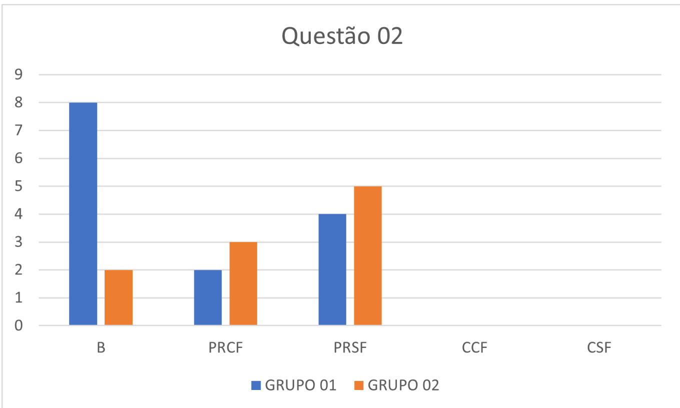
$$\underbrace{(2\ bandeiras\ no\ poste\ verde\ e\ 3\ bandeiras\ no\ poste\ amarelo)}_{\substack{\acute{e}\ an\acute{a}logo\ a\ 2\ bandeiras\ no\ poste\ amareloe\ 3\ no\ poste\ verde \\ novamnete\ multiplicamos\ por\ 2}}$$

$$\rightarrow 2 \cdot \underbrace{(5 \cdot 4)}_{A_{5,2}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 2 \cdot 1)}_{P_3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 480$$

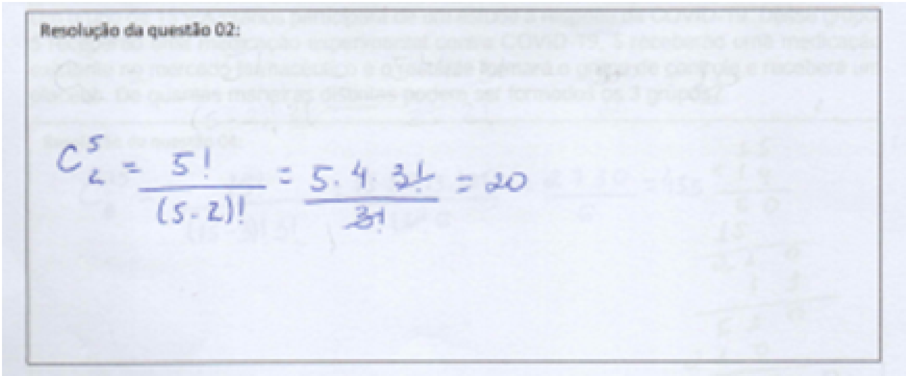
Assim como ocorreu na questão 01, a questão 02 também não foi totalmente respondida em nenhum questionário e como é possível vislumbrar no gráfico 02 tivemos um índice significativo de questões em branco, entre os dois grupos, ao todo foram 10 questões entregues em branco. Entretanto, o percentual em relação ao grupo 01 é maior, aproximadamente 57% dos participantes do grupo 01 entregaram essa questão em branco e vale ressaltar que desses 87, 5% sinalizaram no espaço para resolução não terem conseguido entender o enunciado.

Gráfico 2: Resolução da questão 02 entre dois grupos.



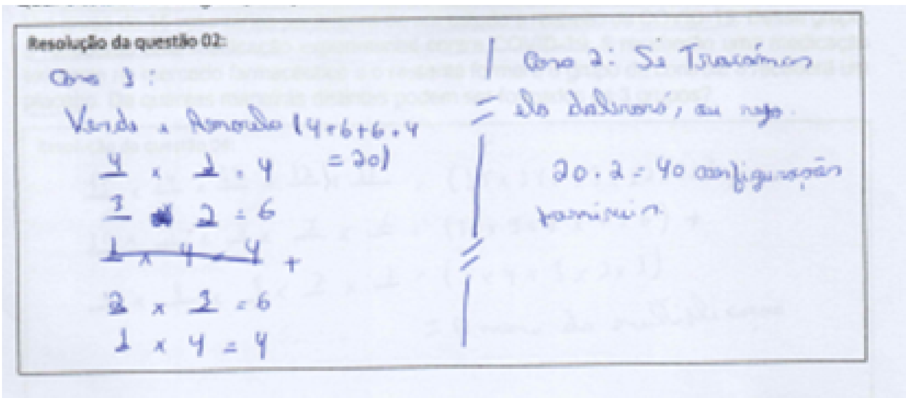
Dentre as respostas parciais, três se destacaram por sua recorrência, desse modo, vamos analisá-las.

Figura 3.8: Resolução 1 da questão 02.



A resolução explicitada acima, ou semelhante a esta, surgiu em metade das questões parcialmente respondidas. O participante apresenta o agrupamento da Combinação Simples, como estratégia de resolução, mas, além de apresentar atrito na própria aplicação da fórmula, que não está coerente com o que está proposto, também não interpreta os diferentes casos possíveis para cada poste. Vale ressaltar que o enunciado é muito claro com relação a importância da ordem das bandeiras. Mesmo sendo uma tentativa de resolução com uso de uma fórmula, acaba por realçar a dificuldade de interpretação e o desconhecimento das fórmulas referentes aos tipos de agrupamentos dos problemas de contagem.

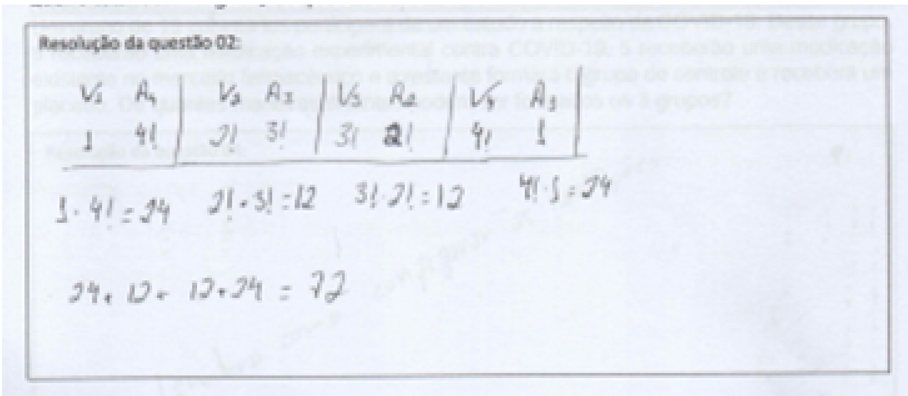
Figura 3.9: Resolução 2 da questão 02.



Esse modelo de resolução evidencia o Princípio Multiplicativo e Aditivo, ao mesmo tempo, que mostra, mais uma vez, uma dificuldade em responder o que é solicitado. Pois, considera-se a diferença entre os postes, mas, não a escolha inicial de quais bandeiras ficarão em cada poste. Cerca de 21% das questões respondidas, parcialmente, apresentaram modelo igual ou muito similar a este.

No próximo tipo de resolução teremos estratégia semelhante, mas, a ideia da permutação das bandeiras em cada poste já é alcançada, observemos.

Figura 3.10: Resolução 3 da questão 02.



Este modelo de resolução revela que aquele que respondeu galgou um patamar a mais de interpretação da questão, note que é utilizada a Permutação Simples, para ordenar as bandeiras em cada poste, também já fica evidente a separação dos casos possíveis, entretanto, a natureza de escolha do problema não foi considerada. Assim, como na resolução anterior, não é considerado a possibilidade de escolha das bandeiras para o primeiro poste, seja ele verde ou amarelo.

Ao final da análise desta questão a fragilidade da percepção da característica de ser um problema de escolha em que a ordem é indispensável é notória, assim como ocorreu na Questão 01.

A questão 03 é um problema de contagem que envolve elementos repetidos, o objetivo deste problema é perceber o uso do Princípio Multiplicativo, de modo que seja necessário estar atento a contagem de um mesmo agrupamento mais de uma vez, ou seja, esses agrupamentos contados repetidas vezes devem ser excluídos. É verificar se há o uso e o entendimento da fórmula da Permutação com Repetição. É, também, mais um problema que é necessário estar atento restrição imposta.

Os cupons para o sorteio de um automóvel em promoção de uma rede de shoppings centers de uma região são numerados com 6 caracteres que vão do 000001 ao 999 999. O processo para se determinar o cupom vencedor é dividido em duas etapas: na primeira são sorteados seis algarismos aleatoriamente, de 0 a 9, os quais são colocados em uma urna; na segunda, eles são colocados eletronicamente um ao lado do outro, determinando-se assim o algarismo da unidade, da dezena, da centena etc. A primeira etapa já foi realizada, e o algarismo que corresponde a unidade do cupom sorteado foi definido: os seis algarismos sorteados são 1, 3, 3, 4, 4, 4 e o algarismo da unidade é ímpar. Sabendo que todos os cupons foram distribuídos, temos que com apenas essas informações, qual a quantidade de cartões que ainda estão no páreo para ganhar o automóvel?

Figura 3.11: Resolução prévia da questão 03.

Resolução da questão 03:

Para confeccionar os números dos cupons precisamos utilizar 6 algarismos entre os seis disponíveis: 1, 3, 3, 4, 4 e 4; e de acordo com o enunciado o algarismo da unidade é ímpar, vamos separar nos casos possíveis:

$$\underbrace{\textit{números com 1 na unidade}}_{\substack{\textit{fixando um 1 na unidade restam 5 algarismos,} \\ \textit{entre eles dois algarismos 3 e três alagarismos 4}}} \quad ou \quad \underbrace{\textit{números com 3 na unidade}}_{\substack{\textit{fixando um 3 na unidade restam 5 algarismos,} \\ \textit{entre eles o 4 se repete 3 vezes}}}$$

Pelo Princípio Multiplicativo contabilizaremos cada número repetidamente, daí

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 2!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 10 + 20 = 30$$

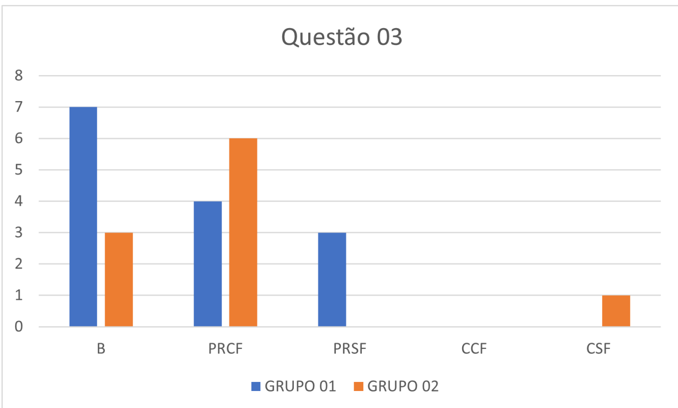
Utilizando a Permutação Simples:

$$\underbrace{\underbrace{\textit{números com 1 na unidade}}_{\substack{\textit{fixando um 1 na unidade restam 5 algarismos,} \\ \textit{entre eles dois algarismos 3 e três algarismos 4}}}}_{P_5^{2,3}} \quad ou \quad \underbrace{\underbrace{\textit{números com 3 na unidade}}_{\substack{\textit{fixando um 3 na unidade restam 5 algarismos,} \\ \textit{entre eles o se repete 3 vezes}}}}_{P_5^{3}}$$

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{3!} = 30$$

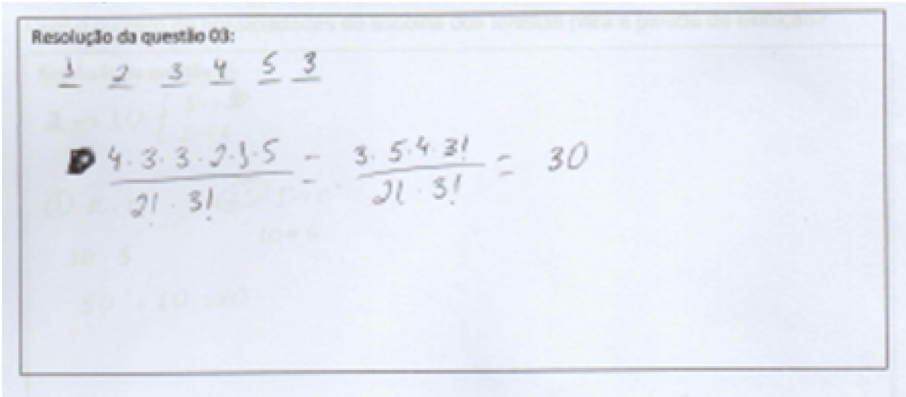
A observação inicial do gráfico da Questão 03, já nos mostra que em um questionário a resposta está correta, e que, aparentemente, não foi utilizado aplicação direta de fórmula. Aproximadamente 42% dos 24 questionários foram entregues com a questão em branco, é um índice que causa desconforto, visto que o problema não reproduz situações com alto nível de complexidade, mas leva ao desenvolvimento do raciocínio combinatório de permutar.

Gráfico 3: Resolução da questão 03 entre dois grupos.



Vamos analisar a única resolutiva que determinou o número certo de agrupamentos para esta questão.

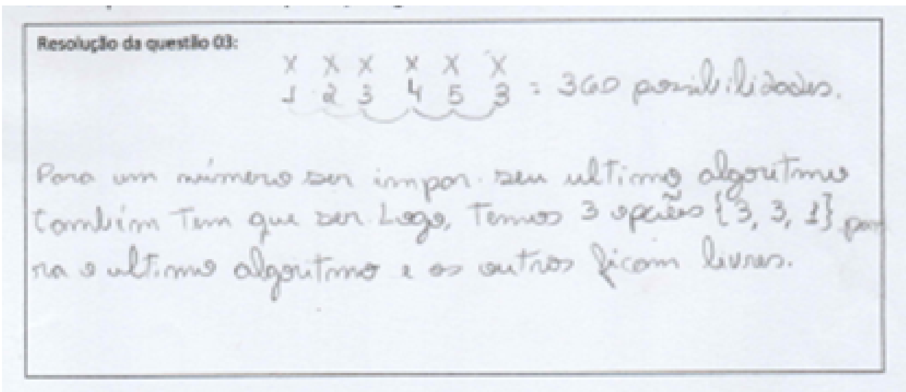
Figura 3.12: Resolução 01 da questão 03.



É perceptível que o participante não divide a situação em casos, mas, está ciente de que só são possíveis 3 escolhas para o algarismo da unidade, e que as permutações de elementos repetidos geram um mesmo agrupamento, por isso a divisão por 2! e 3!. A resolução é coerente e utiliza, de fato, o que buscamos identificar nesse questionário, há a aplicação do Princípio Multiplicativo com adaptação às restrições dadas na questão, verificamos a implementação de um raciocínio combinatório mais elaborado. Mas, vale ressaltar que no universo de 24 respostas, apenas esta apresenta esse nível de desenvolvimento.

Dentre as resoluções parciais a mais frequente será apresentada a seguir.

Figura 3.13: Resolução 02 da questão 03.

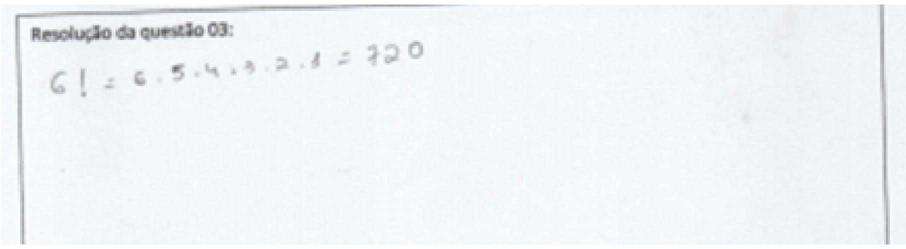


Note que nessa resolução, a dificuldade está na percepção de que os elementos repetidos, geram agrupamentos idênticos que são contabilizados repetidamente quando utilizamos o Princípio Multiplicativo. Evidencia como nas questões anteriores uma fragilidade de interpretação, entendimento da natureza dos problemas de Permutação com Repetição.

As questões que foram respondidas e que aparentemente utilizaram alguma fórmula, ou melhor, tentam utilizar o conhecimento prévio sobre Permutação, também desconsideram os elementos repetidos e a restrição do algarismo na posição da unidade não é atendida. Desse modo, as dificuldades de interpretação e desenvolvimento de um raciocínio combinatório ficam mais realçadas.

Verifica-se que na resolução abaixo, o agrupamento que foi utilizado como estratégia de resolução foi a Permutação Simples.

Figura 3.14: Resolução 03 da questão 03.



Esta resolução deixa clara o cálculo da Permutação Simples de 6 elementos, sem nenhuma preocupação com a restrição ou com o fato de entre os 6 elementos haver elementos repetidos. Em todas as resoluções parciais notamos dificuldades com relação ao pensamento combinatório.

Na Questão 04 os objetivos principais eram: a percepção que o problema tem como característica a escolha, pois, precisam ser escolhidos 5 voluntários para cada um dos 3 grupos distintos; que mesmo sendo um problema de escolha não haverá elementos repetidos e que a ordem das escolhas dos elementos não gera um novo agrupamento. Essa situação pode ser solucionada com o uso da Combinação Simples. Entretanto, como já evidenciado no Capítulo 03, a sua resolução independe da aplicação direta de fórmula. Novamente a aplicação do Princípio Multiplicativo com a análise inerente ao problema é suficiente, vejamos.

(UCB DF/2021) Um grupo de 15 voluntários participará de um estudo a respeito da COVID-19. Desse grupo, 5 receberão uma medicação experimental contra COVID-19, 5 receberão uma medicação existente no mercado farmacêutico e o restante formará o grupo de controle e receberá um placebo. De quantas maneiras distintas podem ser formados os 3 grupos? Observação: precisamos escolher 5 voluntários para o grupo de medicação experimental, depois, 5 voluntários para o grupo da medicação existente e os 5 restantes ficarão no grupo do placebo.

Figura 3.15: Resolução prévia da questão 04.

Resolução da questão 04:

E não podemos esquecer que a ordem de escolha dos voluntários não altera o agrupamento, desse modo pelo Princípio Multiplicativo temos:

$$\underbrace{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!}}_{\substack{\text{determinando o número de} \\ \text{escolhas dos 5 voluntários} \\ \text{do 1º grupo e dividimos pelo} \\ \text{número de vezes que contabilizamos} \\ \text{o mesmo agrupamento,pois a ordem} \\ \text{não importa.}}} \cdot \underbrace{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!}}_{\substack{\text{determinando o número de} \\ \text{escolhas dos 5 voluntários do 2º grupo,} \\ \text{dentre os 10 quesobraram,após a escolha do} \\ \text{1º grupo. E analogamente dividimos} \\ \text{por 5!que é o número de vezes que} \\ \text{cada agrupamento sera contado} \\ \text{repetidamente.}}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{como restam} \\ \text{5 voluntários} \\ \text{só temos 1} \\ \text{escolh}}}$$

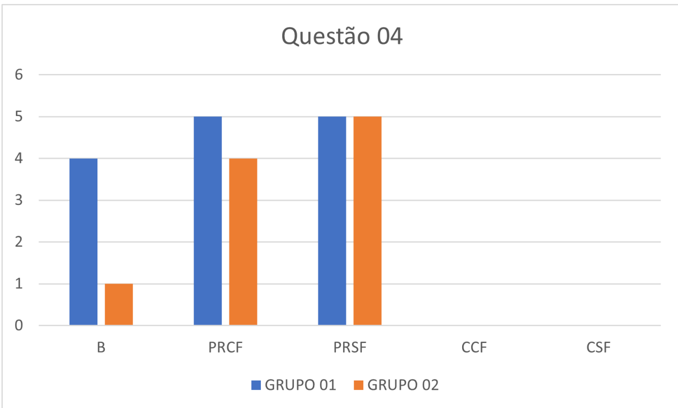
$$3003 \cdot 252 \cdot 1 = 756.756$$

Poderia ser aplicado para essa questão a Combinação Simples, observe:

$$C_{15,5} \cdot C_{10,5} \cdot C_{5,5} = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} \cdot \frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} \cdot 1 = 756.756$$

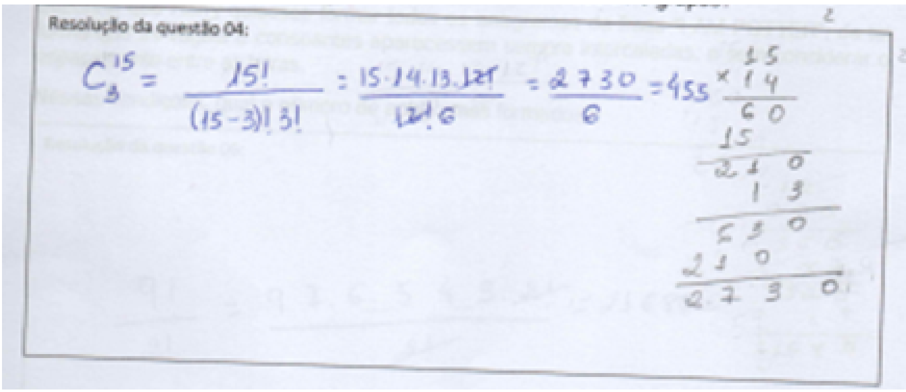
Na análise de resolução desta questão, dentre as 19, parcialmente respondidas, tivemos três modelos de resolução apresentados, diferente das demais questões, que apresentavam grande variação de tentativas. De acordo com o gráfico da Questão 04, aproximadamente 79% responderam parcialmente à Questão 04.

Gráfico 4: Resolução da questão 04 entre dois grupos.



Vamos analisar as resoluções que foram apresentadas.

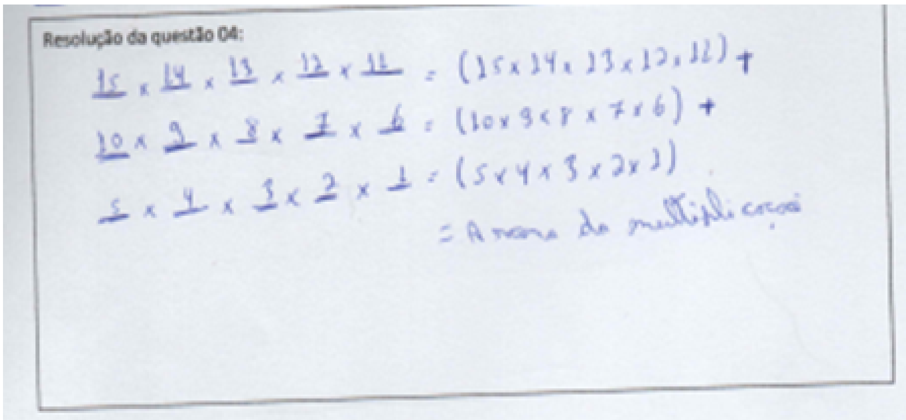
Figura 3.16: Resolução 01 da questão 04.



Esta resolução foi a mais recorrente, a sua análise perpassa por dois fatores importantes. O fato de os participantes terem recorrido ao agrupamento da Combinação Simples sinaliza que é provável que a natureza de escolha e que a não importância da ordem, possam ter sido percebidos, entretanto, o fato de escolherem 3 elementos nos 15, aponta para um grave erro de interpretação e de entendimento sobre o que, de fato, teria que ser escolhido. Do modo como a resolução está posta, é como se estivessem sendo escolhidos 3 grupos entre 15 grupos possíveis, e não é isso que ocorre no problema.

No próximo modelo de resolução a ordem é considerada, por isso, os agrupamentos são contabilizados repetidas vezes.

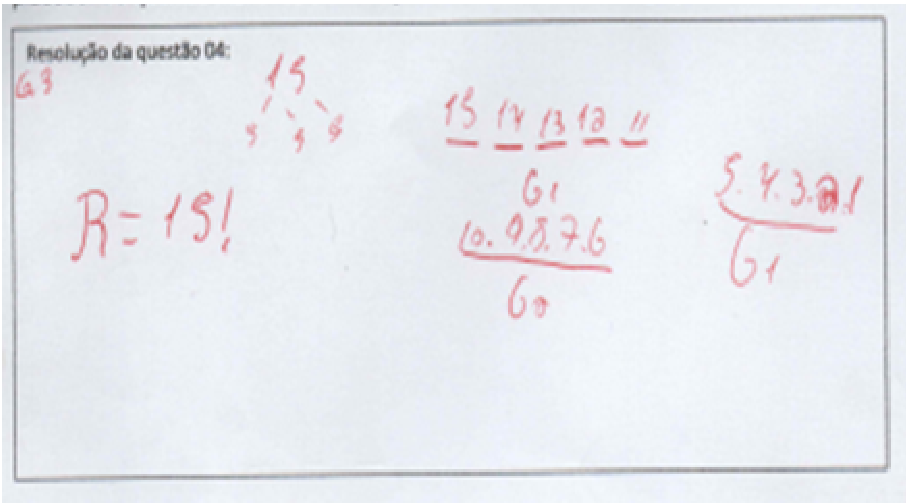
Figura 3.17: Resolução 02 da questão 04.



Neste modelo de resolução, que apareceu em dois questionários, a natureza da escolha foi claramente compreendida, entretanto, continuamos a observar a falha em considerar a ordem importante e a troca de princípio, ou seja, onde também era Princípio Multiplicativo foi aplicado Princípio Aditivo. Pois, devem ser escolhidos os voluntários do 1º grupo e do 2º grupo e do 3º grupo. Na resolução a interpretação dada é: escolher os voluntários do 1º grupo ou do 2º grupo ou do 3º grupo.

No próximo modelo de resolução temos uma análise muito similar à que acabamos de observar, porém, nesta não houve dificuldade de interpretação entre aplicação do Princípio Multiplicativo ou Aditivo, aqui permanece a não observância de que a ordem de escolha não gera um novo agrupamento.

Figura 3.18: Resolução 03 da questão 04.



O modelo de resolução apresentado acima só foi observado entra as respostas do Grupo 02. Como a ordem é considerada importante na resolução, foi resolvida a Permutação simples dos 15 voluntários.

Ao final da investigação das 4 primeiras questões, um fator está ficando cada vez mais evidente, as respostas que mais se aproximam de estratégia de resolução coerente e conveniente estão no grupo 02, os alunos que estão concluindo o curso de Licenciatura em Matemática.

A Questão 05, objetiva o uso de raciocínio análogo ao utilizado na Questão 04, além de propiciar a possibilidade da aplicação do Princípio da Inclusão e Exclusão como parte da estratégia de resolução.

(ENEM 2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

Figura 3.19: Resolução prévia da questão 05.

Resolução da questão 05:

Ao todo são 10 tenistas, dos quais, 4 são canhotos e 6 são destros, como a questão não quer uma partida entre canhotos, podemos determinar o total de partidas possíveis e excluir aquelas realizadas apenas com canhotos. Percebamos que ao montar uma partida estamos escolhendo dois tenistas (uma dupla) entre os disponíveis e a ordem também não é importante, ou seja, não altera a partida.

Desse modo, temos:

$$\underbrace{\frac{10\cdot 9}{2!}}_{\substack{\textit{possibilidade de escolher}\\ \textit{quaisquer dois tenistas}\\ \textit{entre os 10 disponiveis e para}\\ \textit{não contabilizar uma mesma dupla}\\ \textit{repetidamente, dividimos pelo 2!}}} - \underbrace{\frac{4\cdot 3}{2!}}_{\substack{\textit{possibilidades de escolher duplas}\\ \textit{de canhotos,que são aquelas que não servem.}\\ \textit{Analogamente,dividimos por 2!, pois cada dupla}\\ \textit{será contada repetida 2! vezes}}}$$

$$45 - 6 = 39$$

Com a aplicação direta da fórmula de Combinação Simples:

$$C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10!}{(10-2)!\cdot 2!} - \frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!} = 45 - 6 = 39$$

A questão também pode ser respondida sem o processo de exclusão, dividindo nos casos possíveis para as duplas:

$$\underbrace{4\cdot 6}_{\substack{\textit{escolher 1 canhoto}\\ \textit{e 1 destro}\\ \textit{Atenção,nesta opção não temos}\\ \textit{como contar a mesma dupla}\\ \textit{repetidamente}}} \underbrace{+}_{\textit{ou}} \underbrace{\frac{6\cdot 5}{2!}}_{\substack{\textit{escolher 2 destros,}\\ \textit{nesse caso contamos cada}\\ \textit{uma das duplas 2!vezes}\\ \textit{por isso dividimos}}} = 24 + 15 = 39$$

A resolução que apresentaremos a seguir foi a mais recorrente nas respostas, parciais apresentadas. Assim como evidenciado anteriormente, recorre a falha de não analisar se a ordem é importante na formação dos agrupamentos solicitados.

Figura 3.20: Resolução 01 da questão 05.

Resolução da questão 05:

I - Todos destros: 6 • 5 = 30 possibilidades.

II - Misto:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{canhotos}}}{4} \cdot 6 \longrightarrow \text{destros} = 24\ p.$$

Logo, 54 possibilidades

Note que a falha nesta resolução está exatamente em não descontar dentre as duplas formadas apenas por destros as que foram contabilizadas com repetição, mais uma vez, a análise da ordem dos elementos foi negligenciada na resolutiva.

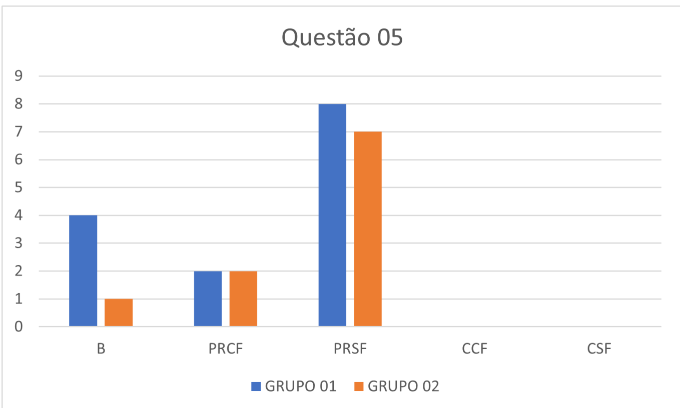
Para esta Questão 05, apenas dois modelos foram mais recorrentes, é válido explicar que muitas soluções não apresentavam nenhum nexo com o que de fato foi solicitado. Observemos a segunda resolução.

Figura 3.21: Resolução 02 da questão 05.

Nesta estratégia fica claramente explicito a possibilidade de escolha de um mesmo tenista duas vezes, não formando uma dupla, no caso de ser destro, ou seja, seria possível escolher o D_1 (destro 1) e novamente ele no segundo grupo, além de ser contabilizada repetidamente duplas formadas por destros. A análise dos casos possíveis para depois a generalização, quando viável, é uma habilidade necessária para o desenvolvimento das estratégias em combinatória e este caminho não foi utilizado nessa resolução.

É interessante explicitar que das questões parcialmente respondidas sem o uso de fórmula, a estratégia apresentada acima foi utilizada em 40% delas. E de acordo com o gráfico da Questão 05, não se observa nenhuma resposta totalmente correta.

Gráfico 5: Resolução da questão 05 entre dois grupos.



Na Questão 06 a finalidade, mais uma vez, era de trabalhar um problema que tem como característica a organização de todos os elementos possíveis, observando a existência de elementos repetidos e atendendo a uma restrição.

(ENEM 2020) Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT". Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras. Nessas condições, qual o número de anagramas formados?

Figura 3.22: Resolução prévia da questão 06.

Resolução da questão 06:

O que é necessário fazer nesta questão é delimitar as posições onde podem ficar as consoantes e as vogais, pois, o enunciado exige que elas fiquem intercaladas. Desse modo, como são 5 consoantes e 4 vogais os anagramas começarão por consoante, caso contrário, ficarão duas consoantes juntas. Sabemos que a ordem é importante, ou seja, a troca de lugar de duas letras gera um novo anagrama, estejamos atentos que temos duas consoantes repetidas. Sendo assim, pelo Princípio Multiplicativo temos:

$$\frac{\underbrace{5}_{\substack{escolha\ da\\ 1^a\ consoante\ (C)}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{escolha\ da\\ 1^a\ vogal\ (V)}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{escolha\\ da\ 2^a\ C}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{escolha\\ da\ 2^a\ V}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{escolha\\ da\ 3^a\ C}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{escolha\\ da\ 3^a\ V}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{escolha\\ da\ 4^a\ C}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{escolha\\ da\ 4^a\ V}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{escolha\\ da\ 5^a\ C}}}{\underbrace{2!}_{\substack{temos\ o\ T\ se\ repetindo,\ \ logo\ a\ troca\ de\ T\ com\ T\ não\ gera\\ novo\ anagrama}}}$$

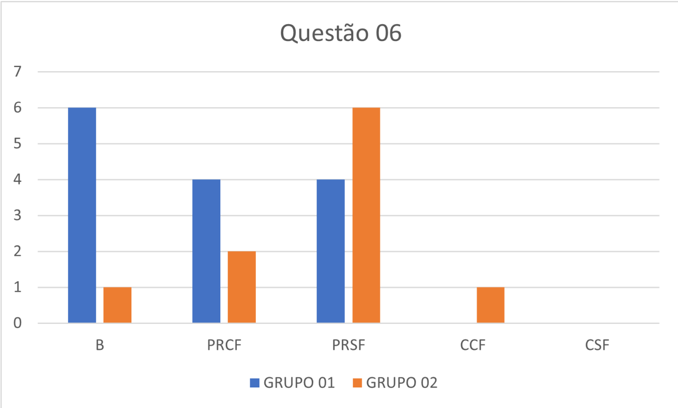
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{2!} = 1440.$$

Do mesmo modo, fixando as posições das consoantes e vogais para garantir que estariam intercaladas pode-se aplicar a Permutação Simples entre as vogais e a Permutação com Repetição entre as consoantes.

$$\underbrace{P_4}_{\substack{permutação\ simples\\ das\ 4\ vogais}} \cdot \underbrace{P_5^2}_{\substack{permutação\ com\ repetição\\ das\ 5\ consantes\ com\ T\ repetido\ 2\ vezes}} = 4! \cdot \frac{5!}{2!} = 1440$$

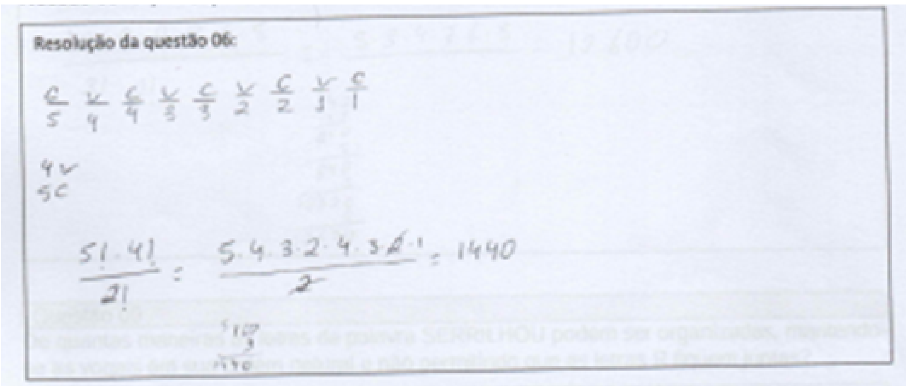
Antes de analisarmos alguns modelos de resolução, para esta questão faz-se necessário observar o cenário geral de sua aplicação, através do Gráfico 6.

Gráfico 6: Resolução da questão 06 entre dois grupos.



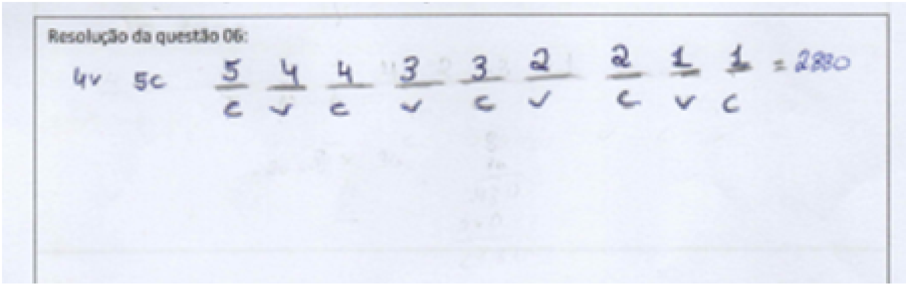
Assim como ocorreu na Questão 03, neste problema também tivemos uma resolução, dentre as 24, que foi completamente correta, é importante ressaltar que novamente ela foi respondida por algum integrante do grupo 02. Além de analisarmos a resposta correta, analisaremos duas outras resoluções que foram recorrentes em ambos os grupos.

Figura 3.23: Resolução 01 da questão 06.



A resolução se mostra exatamente como prevista em uma das resoluções, neste caso, utilizando o Princípio Multiplicativo, mas, também sinalizando para a percepção da Permutação Simples e da Permutação com Repetição. De fato, entre todas as questões corretamente respondidas, que foram poucas, esta demonstra o desenvolvimento de todas as habilidades esperadas, desde o cumprimento da restrição, até a percepção das possibilidades de estratégias de resolução. O raciocínio combinatório fica claro e objetivo.

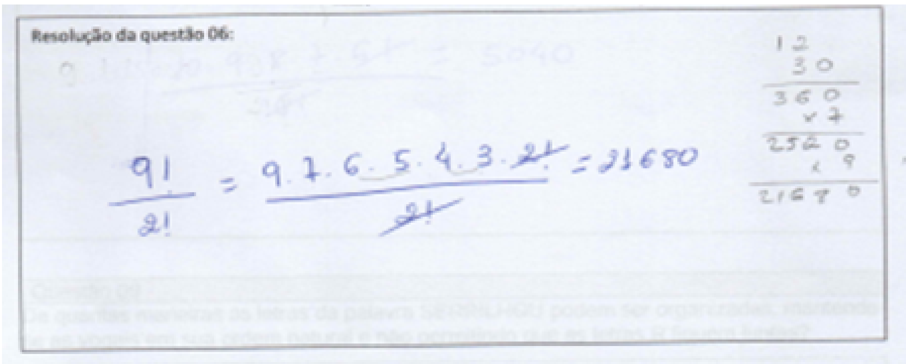
Figura 3.24: Resolução 02 da questão 06.



Esta estratégia de resolução prioriza notoriamente o Princípio Multiplicativo inclusive ao atendimento da restrição dada, entretanto, mais uma vez a ausência da análise de existir elementos repetidos ocorre. Todavia, como este método apareceu em um número considerável de resoluções, verifica-se que existe um conhecimento, mesmo que não abrangente, para todos as possibilidades, com relação ao uso do Princípio Fundamental da Contagem.

Na próxima estratégia de resolução esbarramos, novamente, na não observância da restrição específica dada na questão.

Figura 3.25: Resolução 03 da questão 06.



Nesse contexto de resolução os participantes utilizaram a Permutação com Repetição, a exigência de consoantes e vogais intercaladas não foi levada em consideração, mas se atentou que do total de 9 letras que seriam permutadas, duas se repetem. Percebe-se que o desenvolvimento do cálculo não está correto, o resultado seria 181.400, um número muito maior que o determinado e que o resultado real da questão.

A Questão 07 tem como finalidade observar a percepção de um problema cuja característica principal é a escolha, os elementos podem se repetir e a ordem dos elementos não é importante. É possível a utilização da Combinação com Repetição, logo, tentamos evidenciar com essa questão se a fórmula é aplicada. Observemos o problema e as possíveis resoluções esperadas.

Um artesão produziu 5 peças idênticas e dispõe de 4 cores para pintá-las, entretanto, cada peça só pode ser pintada com uma única cor. De quantas maneiras distintas esse artesão pode pintar essas 5 peças?

Figura 3.26: Resolução prévia da questão 07.

Resolução da questão 07:

Note que nesse problema temos 4 cores disponíveis e precisamos escolher 5, de modo que, pode ser escolhida uma única cor, duas cores, três cores ou as quatro cores. Pode haver repetição de cores (para esse problema com certeza haverá), é importante ponderarmos também que a ordem de escolha das cores não altera o agrupamento. Desse modo, podemos representar essa situação por meio de uma equação linear, para isso, consideremos:

x – peças pintadas com a cor 1; y – peças pintadas com a cor 2; z – peças pintadas com a cor 3; w – peças pintadas com a cor 4

Daí podemos afirmar que: $x + y + z + w = 5$

Para resolver essa equação podemos representá-la da seguinte forma:

$$\underbrace{*****+++}_{\substack{\text{vamos orgnizar todas as sequencias possíveis} \\ \text{observando que } * \text{ se repete 5 vezes e} \\ + \text{ se repete 3vezes}}} \rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 3!} = 56$$

É equivalente a utilizar a Permutação com Repetição:

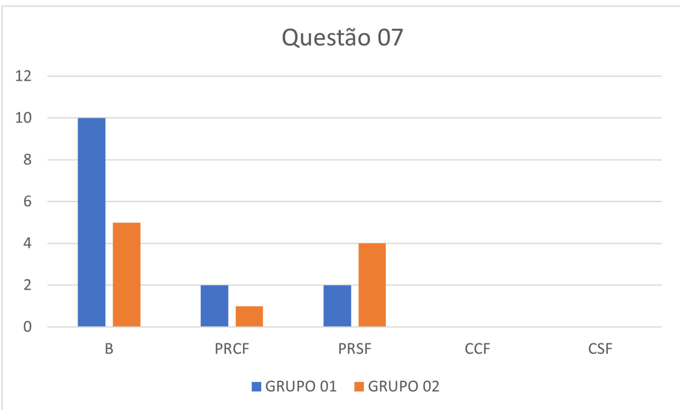
$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

O problema podia ser resolvido com a aplicação direta da Combinação com Repetição:

$$CR_{4,5} = C_{(4+5-1),5} = C_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = 56$$

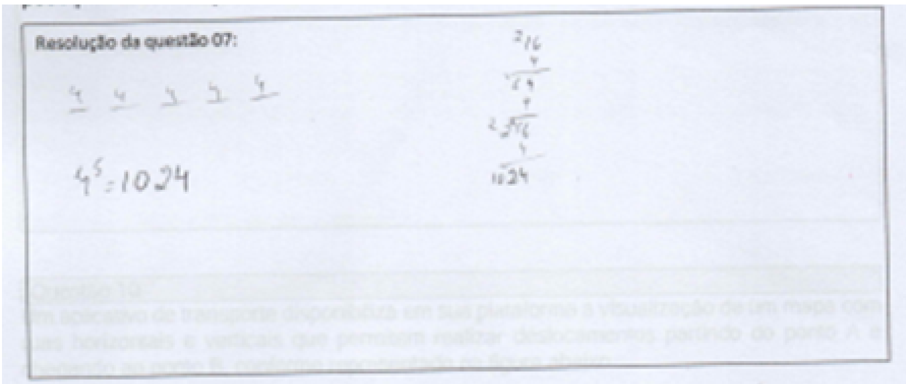
Observa-se os dados gerais referente a resolução da Questão 07, no Gráfico 7.

Gráfico 7: Resolução da questão 07 entre dois grupos.



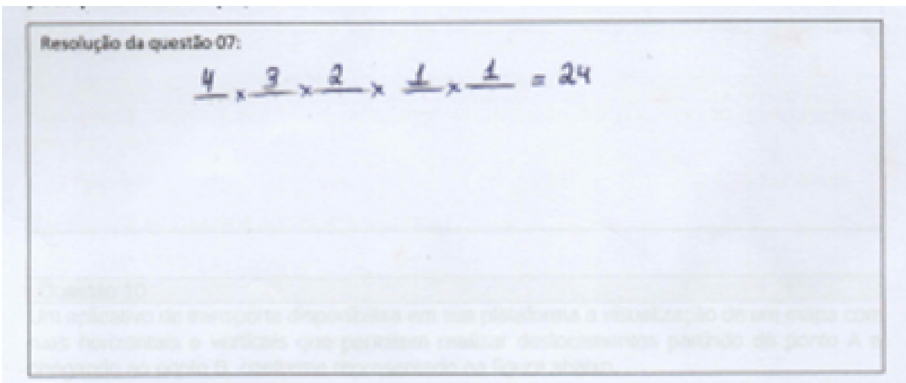
Dentre as questões já analisadas esta é a que apresenta maior índice de respostas em branco, aproximadamente 58% do total de questionários aplicados. É importante salientar que em nenhuma dessas respostas em branco está apontado o motivo falta de tempo para a não resolução. Avaliando as 9 respostas parciais que foram dadas, todas abordam duas estratégias. Analisemos essas soluções.

Figura 3.27: Resolução 01 da questão 07.



É possível verificar que nesse modo de resolução foi percebido que os elementos podem se repetir, porém, mais uma vez a análise sobre a importância da ordem de escolha não foi feita, então, foi aplicado o Princípio Fundamental da Contagem sem ponderar sobre os agrupamentos contados repetidamente. Não é possível perceber a aplicação direta ou proposital do agrupamento do Arranjo com Repetição, mas, implicitamente foi a interpretação dada.

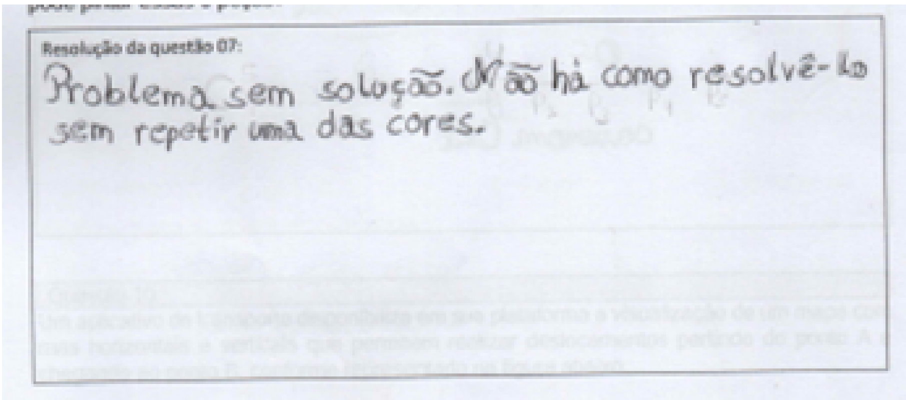
Figura 3.28: Resolução 02 da questão 07.



Nesta tentativa de resolução, o que é aplicado prioritariamente é o Princípio Multiplicativo, todavia, não é considerada a repetição dos elementos. A estratégia não atende de modo algum o que o problema evidencia. Demonstra, novamente, a dificuldade em interpretar e atender ao que é solicitado explicitamente no enunciado.

Ainda sobre as resoluções da Questão 07, chamou atenção uma observação feita em um dos questionários, é interessante o compartilhamento e análise deste fato. Mesmo não sendo uma resolução da questão será aqui denominada com Resolução 03 da Questão 07.

Figura 3.29: Resolução 03 da questão 07.


Resolução da questão 07:

Problema sem solução. Não há como resolvê-lo sem repetir uma das cores.

Foi observado que haveria repetição dos elementos, mas, essa característica, na concepção da pessoa, inviabiliza a resolução da questão. Não há uma conjectura de tipos de agrupamentos, a classificação de insolúvel é clara e objetiva.

Os problemas de contagem classificados como Arranjo Simples ou Combinação Simples são os mais evidenciados na abordagem da Análise Combinatória, nos livros didáticos e questões de provas oficiais. Esses agrupamentos restringem, que o número de elementos escolhidos deve ser igual ou menor que o número de elementos disponíveis, como apresentado nas Seções 2.3 e 2.5, pode ser isto que sustenta tal afirmação feita.

Na análise das Questões 08, 09 e 10, o número de respostas em branco foi aumentando, em algumas delas a falta de tempo foi apontada como motivo para a não resolução, apresentaremos a proporção em cada uma delas.

Nesta questão mais uma vez gostaríamos de evidenciar a aplicação do Princípio Multiplicativo, com a ponderação das restrições impostas. Era interesse também verificar se seria feita uma relação com a Permutação com Repetição. Vamos conhecer o problema e as possíveis estratégias de resolução.

(AFA – 2018) Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco. Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra tão somente pela cor dos carros, qual o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as dez vagas?

Figura 3.30: Resolução prévia da questão 08.

Resolução da questão 08:

Para resolver este problema precisamos escolher como ficará cada uma das 10 vagas disponíveis, com um carro preto, um carro vermelho, um carro branco ou vazia. Mas, note que teremos elementos repetidos nessa escolha, pois são: 3 carros pretos, 2 vermelhos, 1 carro branco e 4 lugares vazios. Daí temos:

$$\frac{\underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\textit{escolha da situação de cada vaga}}}{\underbrace{4!}_{\substack{\textit{os agrupamentos que} \\ \textit{contamos repetidamente} \\ \textit{quando trocamos os lugares vagos} \\ \textit{entre si}}} \cdot \underbrace{3!}_{\substack{\textit{os agrupamentos que} \\ \textit{contamos repetidamente} \\ \textit{quando trocamos os carros pretos} \\ \textit{de lugar entre si}}} \cdot \underbrace{2!}_{\substack{\textit{os agrupamentos que} \\ \textit{contamos repetidamente} \\ \textit{quando trocamos os carros} \\ \textit{vemelhos de lugar entre si}}}}$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 12.600$$

Poderia ser aplicada a Permutação com Repetição diretamente, seja:

P – carro preto

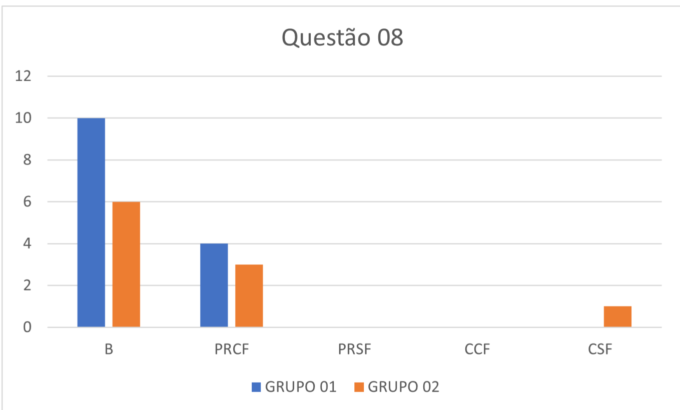
V – carro vermelho

B – carro branco

$\emptyset$ -vago

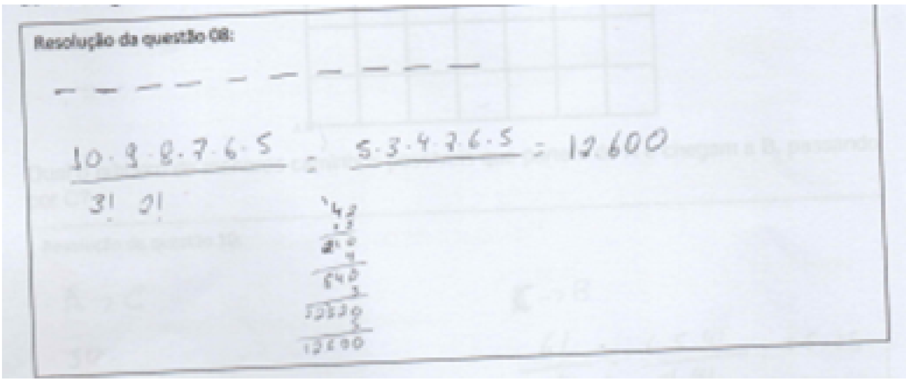
Como podemos observar no Gráfico 8, que mostra os dados referente a resolução da Questão 08; 62,5% das respostas estavam em branco, dessas, 33% apontaram falta de tempo como motivo para a não resolução. Observe que assim como ocorreu nas Questões 03 e 06, aqui também temos uma resposta completa e correta.

Gráfico 8: Resolução da questão 08 entre dois grupos.



Exceto a resolução correta, todas as outras tentativas de resolução seguiram uma trilha de procedimentos muito similar, inclusive com abordagem equivocada ao mesmo tipo de agrupamento, a Combinação Simples. Vejamos algumas dessas respostas.

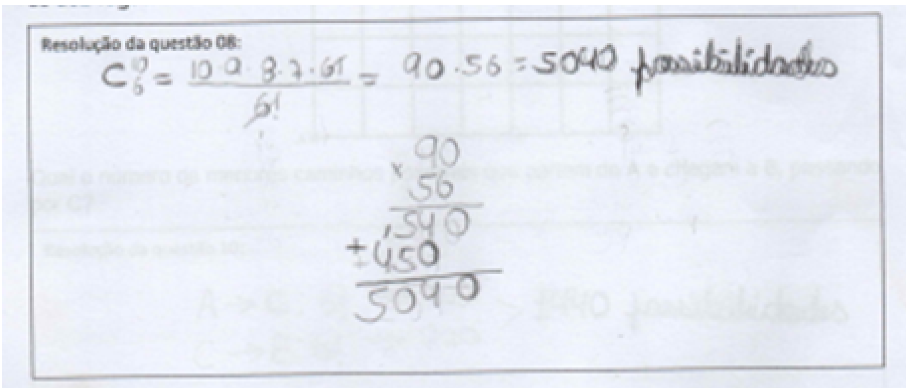
Figura 3.31: Resolução 01 da questão 08.



Nesta resolução não fica evidente a aplicação da Permutação com Repetição, mas, o uso do Princípio Multiplicativo de acordo com as restrições dadas, e é notória a percepção que a ordem é importante para a situação. Aparentemente, não é feita a escolha das vagas que ficarão vazias, pois, após escolher a posição para os 6 carros, necessariamente sobrarão os 4 espaços vazio quaisquer.Portanto ele só considera com elementos repetidos os 3 carros pretos e os dois carros vermelhos, por isso a divisão pelos termos 3! e 2!.

Assim como ocorreu nas outras respostas corretas, é perceptível o desenvolvimento do raciocino combinatório independe do reconhecimento ou aplicação de uma fórmula específica de algum agrupamento padronizado.

Figura 3.32: Resolução 02 da questão 08.



Nesta resolução, é possível entender a priorização da escolha do espaço para os 6 carros, mas, a ordem de escolha não foi ponderada. Fica difícil afirmar diante do registro o que pode ter sido ponderado em relação aos lugares vagos. Contudo, nos deparamos com mais uma resolução que evidencia falhas de interpretação em relação a importância da ordem e a possibilidade de trabalhar com elementos repetidos.

É necessário relatar que a escolha desta questão para fazer parte do questionário ocorreu com a expectativa de que se o desenvolvimento das respostas fosse progressivo e correto, esta, serviria para aumentar o nível de complexidade, para verificar a utilização de diferentes estratégias numa mesma questão. Ou ainda, o uso de diferentes modelos de agrupamentos com suas fórmulas. Mas, como até aqui não foram verificadas a aplicação de estratégias coerentes e eficazes, em muitas respostas, que resultassem na razoável resolução das questões, os dados obtidos na resolução dessa questão foram previsíveis e reflexo das outras questões.

De quantas maneiras as letras da palavra SERRILHOU podem ser organizadas, mantendo-se as vogais em sua ordem natural e não permitindo que as letras R fiquem juntas?

Figura 3.33: Resolução prévia da questão 09

Resolução da questão 09:

A resolução desta questão exige duas etapas: garantir que as vogais E, I, O, U mantenham-se em sua ordem natural; não permitir que as letras RR fiquem juntas. Utilizaremos nesta resolução o Princípio da Exclusão e Inclusão, determinaremos o total de anagramas possíveis com as vogais em ordem natural depois excluiremos desse total aqueles que as letras RR estão juntas. Como a palavra SERRILHOU possui 9 letras, é como se tivéssemos 9 espaços para serem preenchidos, escolheremos primeiro os espaços das vogais e depois das consoantes:

$$\frac{\underbrace{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}_{\substack{\textit{escolha do lugar da 1ª vogal,}\\ \textit{da 2ª vogal, da 3ª vogal}\\ \textit{e da 4ª vogal}}}}{\underbrace{4!}_{\substack{\textit{como a ordem não é importante, pois}\\ \textit{as vogais tem uma ordem fixa, a natural}\\ \textit{então dividimos pelas 4! vezes que cada agrupamento}\\ \textit{será contado repetidamente.}}}} \; e \; \frac{\underbrace{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\substack{\textit{dentre as 5 posições restantes}\\ \textit{escolhemos o lugar da 1ª consoante,}\\ \textit{da 2ª consoante e assim sucessivamente}}}}{\underbrace{2!}_{\substack{\textit{como temos duas consoantes repetidas}\\ \textit{dividimos por 2!}}}} =$$

$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2!} = 126\cdot 60 = 7.560$$

Esses 7.560 anagramas são todos os anagramas que possuem as vogais em ordem natural, mas, ainda não restringimos que as letras R fiquem juntas. Trataremos as letras RR como se fossem uma só, passamos a ter 8 letras, ou seja, 8 espaços, que serão ocupados por 4 vogais em ordem natural e 4 consoantes distintas. De modo análogo ao que fizemos para determinar o total de anagramas, pelo Princípio Multiplicativo temos:

$$\frac{\underbrace{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}_{\substack{\textit{escolha do lugar da 1ª vogal,}\\ \textit{da 2ª vogal, da 3ª vogal}\\ \textit{e da 4ª vogal}}}}{\underbrace{4!}_{\substack{\textit{como a ordem não é importante, pois}\\ \textit{as vogais tem uma ordem fixa, a natural}\\ \textit{então dividimos pelas 4! vezes que cada agrupamento}\\ \textit{será contado repetidamente.}}}} \; e \; \underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\substack{\textit{dentre as 4 posições restantes}\\ \textit{escolhemos o lugar da 1ª consoante,}\\ \textit{da 2ª consoante e assim sucessivamente}}} =$$

$$= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 70\cdot 24 = 1.680$$

Daí temos,

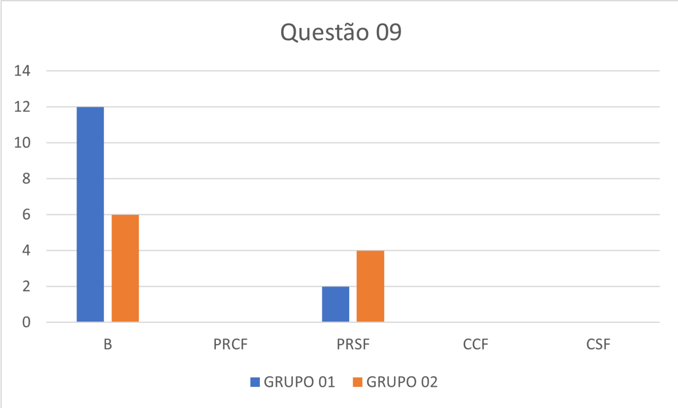
$$\underbrace{7.560}_{\substack{\textit{anagramas da palavra}\\ \textit{SERRILHOU}\\ \textit{com as vogais em ordem natural}}} - \underbrace{1680}_{\substack{\textit{anagramas da palavra}\\ \textit{SERRILHOU}\\ \textit{com as vogais em ordem natural}\\ \textit{e com}\\ \textit{as letras RR juntas}}} = \underbrace{5.880}_{\substack{\textit{anagramas da palavra}\\ \textit{SERRILHOU}\\ \textit{com as vogais em ordem natural}\\ \textit{e as letras RR separadas}}}$$

A resolução podia ser feita aplicando diretamente as fórmulas:

$$C_{9,4}\cdot P_5^2 - C_{8,4}\cdot P_4 = \frac{9!}{(9-4)!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!} - \frac{8!}{(8-4)!\cdot 4!}\cdot 4! = 126\cdot 60 - 70\cdot 24 = 5.880$$

Segue os dados da Questão 09

Gráfico 9: Resolução da questão 09 entre dois grupos.



Verifica-se que 75% das respostas a Questão 09 foram entregues em branco, percebemos que de fato, como já diagnosticado, nas oito questões anteriores, não há um aprofundamento no raciocínio combinatório e nem mesmo os conhecimentos primitivos necessários para o enfrentamento dos problemas de contagem.

Os 25% dos participantes que responderam, parcialmente ao problema, utilizaram prioritariamente o Princípio Multiplicativo, mas, sem uma análise mais profunda da natureza do agrupamento e das restrições envolvidas. Como pode ser visto nas imagens a seguir.

Figura 3.34: Resolução 01 da questão 09

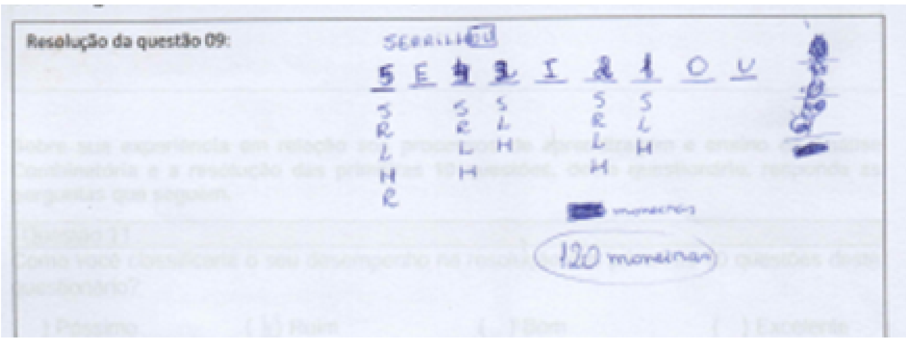
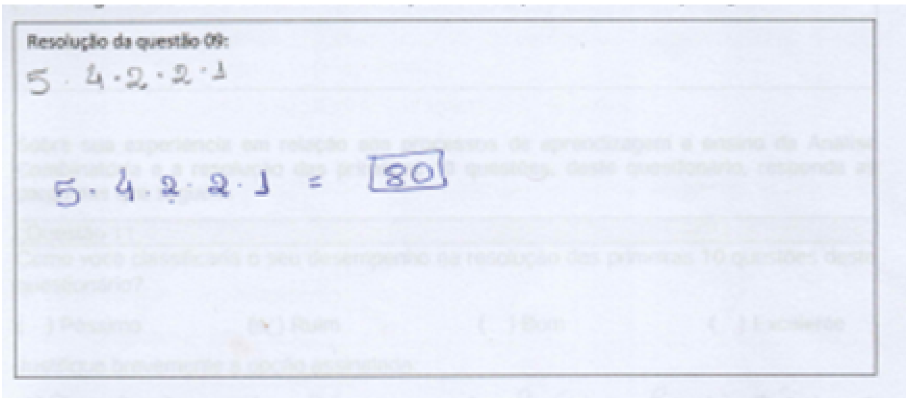


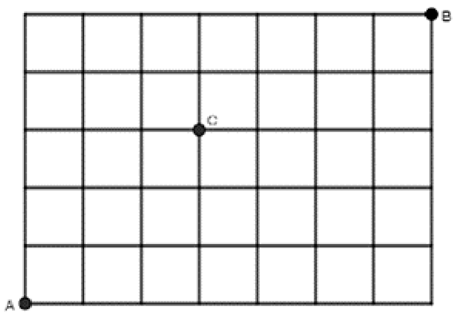
Figura 3.35: Resolução 02 da questão 09



Como já relatado as tentativas de resolução demonstram uma tentativa de aplicação do Princípio Multiplicativo, mas, reforçam o que já foi explicitado nas outras questões, com relação a dificuldade de interpretação, atendimento às restrições e absorção do que de fato é o Princípio Multiplicativo.

O objetivo desta Questão 10 era identificar se os participantes conheciam ou reconheciam uma aplicação do raciocínio combinatório num modelo específico de questão, nesse caso, o modelo escolhido é corriqueiramente abordado nas fontes que tratam de Análise Combinatória, inclusive, é análogo ao Exemplo 2.2.4.

Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



Qual o número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C?

Figura 3.36: Resolução prévia da questão 10

Resolução da questão 10:

Para determinar o menor número de caminhos possíveis, os movimentos só serão para a direita ou para cima. Desse modo dividiremos o caminho de A até C e de C até B. Notem que de A até C necessariamente serão feitos 3 movimentos para a direita e 3 movimentos para cima, totalizando 6 movimentos; e, de C até B, serão feitos 4 movimentos para a direita e 2 para cima, totalizando 6 movimentos. Os movimentos no mesmo sentido são elementos repetidos, daí temos:

$$\frac{\underbrace{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}_{\substack{\textit{escolha do 1º movimento e}\\ \textit{escolha do 2º movimentos e}\\ \textit{escolha do 3º movimnetoe e}\\ \textit{assim sucessivamente}}}}{\underbrace{3!\cdot3!}_{\substack{\textit{pois contamos 3! os agrupamnetos que trocam}\\ \textit{o movimento para direita de ordem}\\ e\\ \textit{3! vezes os movimentos para cima}}}}\ e\ \frac{\underbrace{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}_{\substack{\textit{escolha do 1º movimento e}\\ \textit{escolha do 2º movimentos e}\\ \textit{escolha do 3º movimnetoe e}\\ \textit{assim sucessivamente}}}}{\underbrace{4!\cdot3!}_{\substack{\textit{pois contamos 4! os agrupamnetos que trocam}\\ \textit{o movimento para direita de ordem}\\ e\\ \textit{3! vezes os movimentos para cima}}}} =$$

$$= \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3!\cdot3!}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4!\cdot3!} = 20\cdot15 = 300$$

Utilizando a Permutação com Repetição e considerando $D\ (movimento\ para\ direita)$ e $C\ (movimento\ para\ cima)$ poderíamos apresentar a resolução da seguinte forma:

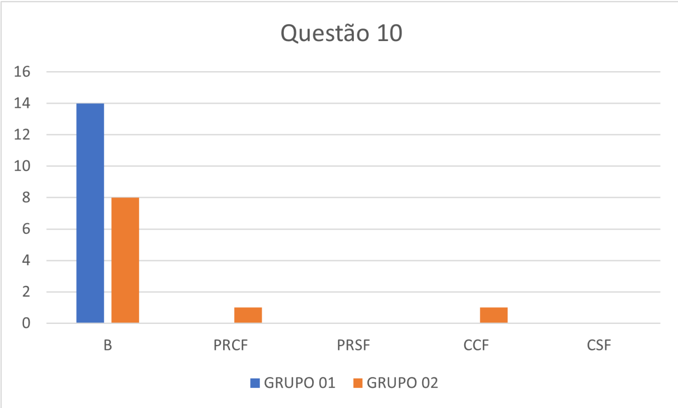
$$\underbrace{DDDCCC}_{\substack{\textit{caminhos de A até C}\\ \textit{Vamos permutar a ordem}\\ \textit{desses movimentos que tem repetição}}} \quad e \quad \underbrace{DDDDCC}_{\substack{\textit{caminhos de C até B,}\\ \textit{também vamos permutar a ordem}\\ \textit{desses movimentos que tem repetição}}}$$

$$P_6^{3,3}\cdot P_6^{4,2} = \frac{6!}{3!\cdot3!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot2!} = 20\cdot15 = 300$$

Na análise do Gráfico 10, percebemos que esta foi a questão que teve maior índice de respostas em branco, claro que é importante ponderar que por ser a ultima o fator tempo e o fator cansaço podem ter contribuído para esse índice mais elevado.

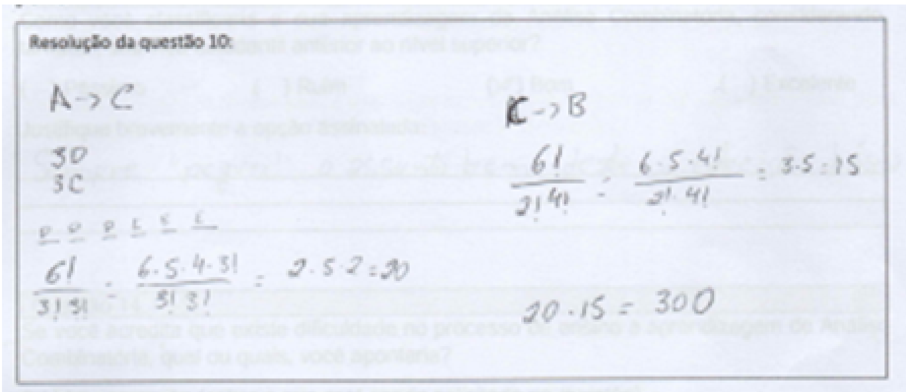
Aproximadamente 92% das pessoas que responderam ao questionário não responderam a Questão 10. É interessante destacar que 100% dos questionários respondidos pelo grupo 01 apresentaram essa questão em branco. Apenas, 4 respostas traziam a justificativa explícita de falta de tempo para a realização da solução do problema. Essa foi umas das quatro questões foram respondidas.

Gráfico 10: Resolução da questão 10 entre dois grupos.



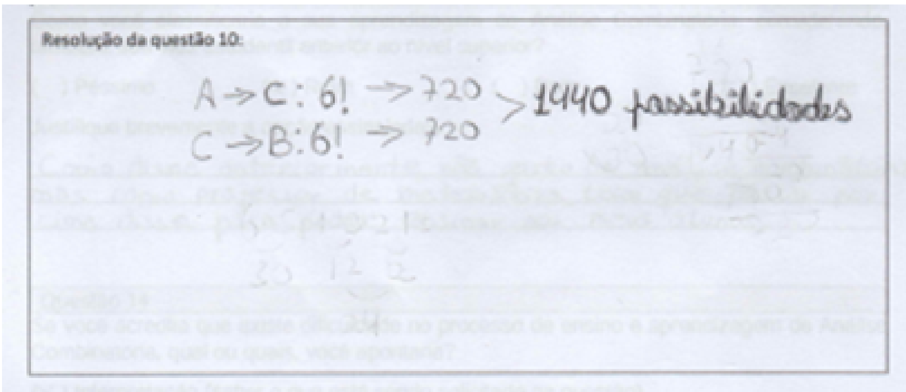
Como pode ser visto a seguir, na resposta correta foi utilizada a Permutação com Repetição, o modo de organização da resolução, indica que o modelo de questões era conhecido do participante. Foi utilizada exatamente umas das estratégias de resolução esperadas para essa questão, demonstrando que o participante manipula com coerência e fundamentação o Princípio Multiplicativo associado a Permutação com Repetição.

Figura 3.37: Resolução 01 da questão 10



Na outra tentativa de resolução notamos que o participante relacionou o modelo de questão ao agrupamento da Permutação, o que indica que também houve um reconhecimento do modelo de questão, entretanto, mais uma vez, há uma dificuldade em atuar quando existem elementos repetidos. De fato, é como se não houvesse a percepção que existe elementos repetidos nesse agrupamento.

Figura 3.38: Resolução 02 da questão 10



Ao final da exposição dos dados referentes aos questionários é possível afirmar que as dificuldades com relação a Análise Combinatória para esses alunos da graduação existem, é real. Alguns números identificados intensificam, claramente, a necessidade de mais estudos e ações voltadas para os processos de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória.

Dentre as 240 questões que foram aplicadas, apenas 4, de fato, foram solucionadas satisfatoriamente, ou seja, menos de 2% das questões. E acrescentemos uma informação preponderante para esta análise, todas as questões respondidas corretamente foram de um mesmo participante, ou seja, apenas 1 entre 24 participantes conseguiu responder alguma questão corretamente, menos de 5% da amostra.

Que fique evidente também, que foi notável uma diferença entre os questionários respondidos pelo grupo 01 e pelo grupo 02. Por exemplo do total de questões em branco quase 69% foram do grupo 01 e das questões corretamente respondidas, 100% foram do grupo 02. Isso pode estar ligado ao fato da disciplina de combinatória para o grupo 01 ter sido feita remotamente, devido a Pandemia de Covid-19, já o grupo 02 estou a disciplina presencialmente, anterior ao período pandêmico.

É entendível que cada questionário respondido por uma pessoa tem suas características próprias e apresenta outros indicadores, mas, é necessário reunir os gerais para que possamos traçar um perfil. Nesse sentido, as análises já feitas em cada questão indicam que o Princípio Multiplicativo, na sua definição é algo reconhecido, mas, a sua aplicação adaptada, pertinente para cada questão quase não foi identificada, tão pouco a associação com o Princípio Aditivo e o Princípio da Inclusão e Exclusão. Além dessa altercação, outras foram recorrentes e podem ser destacadas:

- Incompatibilidade na interpretação das questões;
- Falta de análise dos elementos disponíveis para a formação dos agrupamentos, se eram repetidos e se podiam se repetir;
- Falha na acuidade para entender a natureza do problema, se era de escolha, de troca de posição ou a mistura dos dois;

- Incompreensão das particularidades para o uso do Princípio Multiplicativo;
- Desconhecimento dos tipos de agrupamentos e suas respectivas fórmulas.

O que seria imprescindível nesse momento seria identificar quais são também as percepções destes futuros professores de Matemática, se também apontam para essas mesmas dificuldades que foram identificadas e quais causas contribuem para este cenário. Desse modo, vamos analisar a segunda parte do questionário, que como já explicado anteriormente, são questões que atentam para a opinião, as vivências e experiências dos participantes em relação a Análise Combinatória.

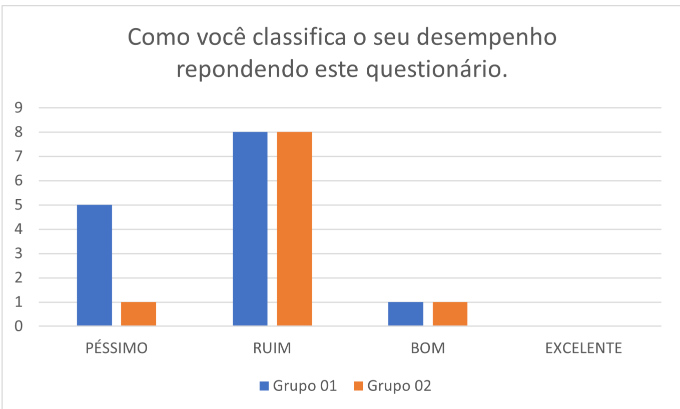
Para uma melhor compreensão trataremos as respostas por meio de gráficos e depois discorreremos sobre elas. Todas as questões apresentavam opções de escolha para a resposta, mas também um espaço reservado para breves explicações ou justificativas se fosse desejo do participante.

A primeira questão, cujos dados estão apresentados no Gráfico 11, visa identificar qual foi a percepção dos participantes, na resolução do questionário. Quase 92% classificaram como ruim ou péssimo, fazendo uma comparação com os dados encontrados na primeira parte, percebemos que há consonância nas informações.

Entre os questionários que apresentaram resposta ruim ou péssimo, as justificativas mais citadas foram: "ter dificuldade em Análise Combinatória"; "dificuldade de interpretar as questões", "ter feito a disciplina no curso de forma remota" e "não lembrar das fórmulas tradicionais".

Reflitamos que nas justificativas da primeira questão, aparecem informações que corroboram com a análise feita da primeira parte do questionário.

Gráfico 11: Resolução da questão 11 entre dois grupos.

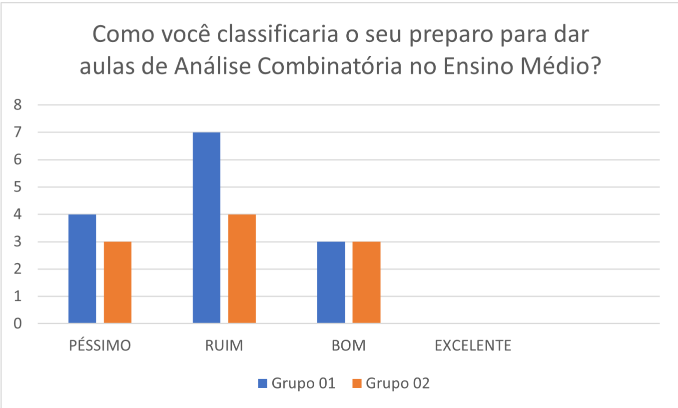


Na segunda questão o objetivo é saber como os futuros professores classificam o preparo individual, para trabalhar Análise Combinatória no Ensino Médio. De fato, sabemos que para ministrar uma aula o professor passa por um processo prévio de preparação e estudos, que viabiliza melhores condições para a ministração das aulas.

O questionamento era exatamente identificar a qualidade desse processo, a intenção era identificar o nível que esse professor acredita que poderia se preparar.

O gráfico da Gráfico 12, explicita que 75% classificou como "ruim" ou "péssimo", as justificativas apontadas foram muito semelhantes às da questão anterior. Mas entre os 25% que responderam acreditar que o seu preparo está "bom", apresentam, principalmente, as seguintes justificativas: "estudando e planejando com tempo posso entender o assunto" e "basta estudar que estarei preparado". Essas justificativas chamam atenção porque evidenciam um fator importante e que ainda não foi abordado nesse trabalho que é a necessidade de estudar tanto no processo de ensino, como no de estudo, seja professor ou estudante.

Gráfico 12: Resolução da questão 12 entre dois grupos.

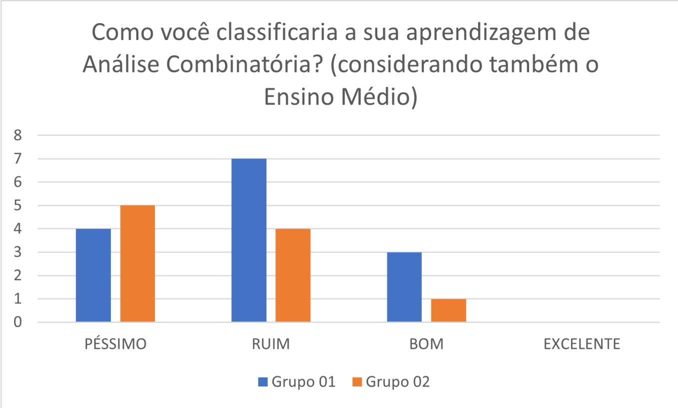


A terceira questão deseja dar subsídios sobre a aprendizagem da Análise Combinatória, como estudantes, do período na universidade e na educação básica também. Ao verificar os resultados apresentados no Gráfico 13, é perceptível que não há grandes mudanças de cenário, aproximadamente 83% dos licenciandos, classificam como "ruim" ou "péssimo" a aprendizagem. Dados que continuam a corroborar com as inferências já feitas.

Dentre as justificativas que podem melhorar o entendimento desse índice são dadas: "nunca estudei análise Combinatória na escola"; "o ensino remoto foi péssimo e não lembro da época da escola", "a disciplina de Análise Combinatória no curso não ajuda a entender" e "mesmo fazendo a disciplina não consegui aprender muita coisa". Novamente o ensino remoto foi citado e como foi relatado ainda na Introdução deste trabalho, nem sempre, a Análise Combinatória é estudada na educação básica, mesmo com as orientações legais da BNCC.

A maior parte das questões que apresentaram justificativa relacionaram a aprendizagem com a disciplina cursada na graduação, entretanto, as colocações feitas foram evasivas, apenas relacionam ao não entendimento, mas, não explicitam as possíveis causas.

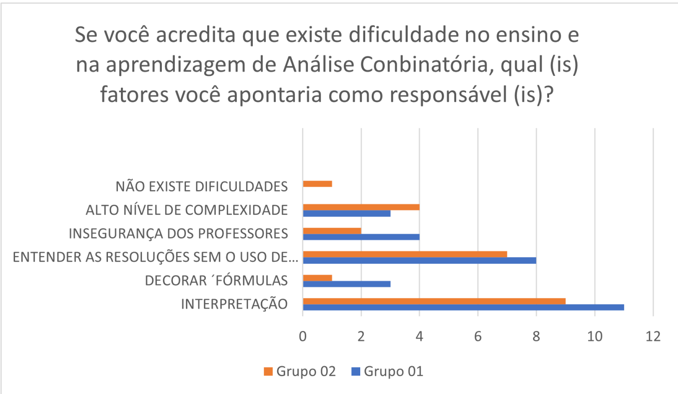
Gráfico 13: Resolução da questão 13 entre dois grupos.



A quarta questão, inevitavelmente, busca enumerar as causas que que podem favorecer ao surgimento das dificuldades com a Análise Combinatória, vale ressaltar que nesta questão, o espaço discursivo servia para acrescentar outro fator, diferente daqueles dados como opção, porém não foi preenchido em nenhum questionário.

Analisemos as repostas de acordo com o Gráfico 14.

Gráfico 14: Resolução da questão 14 entre dois grupos.

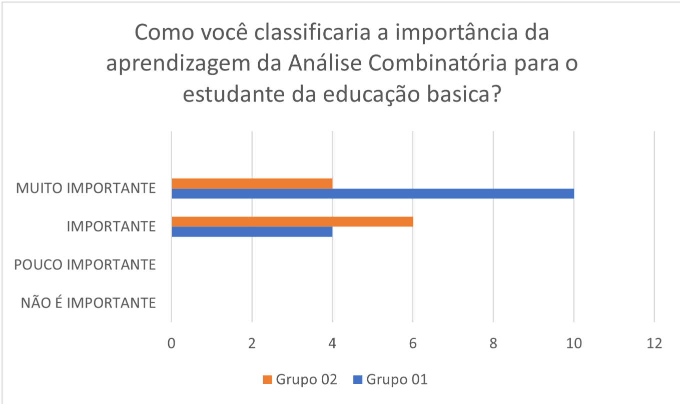


Os fatores mais apontados foram: a interpretação das questões, com, aproximadamente 83% de indicação e entender as resoluções sem o uso de fórmulas, apontado com $62,5\%$ dos participantes. Todavia, todos os fatores foram escolhidos. Menos de 5% das pessoas acreditam não haver dificuldades com relação ao ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória, dado que é semelhante ao número de participantes que acertaram pelo menos uma resposta na primeira parte do questionário.

Esses dados, de certa formam, comprovam parte das inferências que foram elencadas após a análise da primeira parte do questionário.

O último questionamento refere-se à percepção desses professores sobre a importância ou não do estudo da Análise Combinatória na educação básica, foi unânime a resposta em considerar o estudo desse conteúdo “importante” ou “muito importante” para os estudantes, de acordo com o Gráfico 15. Dentre as justificativas apresentadas se destacam por serem citadas maior número de vezes: “é importante porque e cada vez mais cobrados em exames vestibulares, Enem e OBMEP”, “muito importante” porque pode ser aplicado no dia a dia” e “é importante porque ajuda a formar cidadãos mais críticos”.

Gráfico 15: Resolução da questão 15 entre dois grupos.



Podemos concluir que o ato de ensinar não é desvinculado do ato de aprender, ou seja, se formamos professores que apresentam dificuldades na aprendizagem da Análise Combinatória eles apresentarão as mesmas ou outras dificuldades em ensinar. Detectados alguns fatores que contribuem para este cenário associado as experiencias nas salas de aula, é que será proposto no Capítulo 4, uma sequência didática para o estudo da Análise Combinatória no ensino Médio.

Capítulo 4

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo é apresentada uma proposta de sequência didática (SD), ou seja, um conjunto de atividades interligadas, planejadas, para ensinar o conteúdo Análise Combinatória.

> Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados. Toda teorização se dá em condições ideais, e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente (D'AMBROSIO, 2012, p. 13).

Tendo em vista essa perspectiva, entre a aplicação da sequência e a obtenção do êxito, da aprendizagem dos estudantes, outros fatores são decisivos, e do mesmo modo que podem impulsionar o processo de ensino e aprendizagem também podem atravancar. Entre eles estão: os conhecimentos prévios, a intencionalidade de aprender dos estudantes, a autonomia e o contrato didático que rege a sala de aula, ou seja, como estão estabelecidas as relações entre docente, discente e o saber escolar de acordo com ZABALA, 1998.

É importante buscar desenvolver em sala de aula a prerrogativa da cooperação entre estudantes e entre estudantes e professor, resultando em uma rica troca de informações, saberes e conjecturas que culminam na construção e apreensão do conhecimento que carrega em si significado para os discentes. E é nesse contexto que segue a SD para o ensino de Análise Combinatória.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Público-alvo: estudantes do 2º ou 3º ano do ensino médio.

Tema: Análise Combinatória

Objetivos:

- Reconhecer os problemas de contagem no cotidiano;
- Fomentar argumentos pautados na matemática sobre situações vivenciadas no dia a dia.
- Resolver problemas de contagem aplicando o Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo e o Princípio da Inclusão e Exclusão.
- Interpretar problemas de contagem;
- Investigar, analisar, testar, verificar e generalizar os agrupamentos conhecidos da Análise Combinatória (Arranjos, Permutações e Combinações)

Tempo estimado: 15 aulas

1º Momento: 2 aulas

A turma deve ser dividida em grupos de no máximo 5 estudantes, de modo que tenha um número par de grupos. Distribua entre os grupos reportagens que tratem sobre o tema "senhas" e folhas de ofício. Segue exemplo de uma reportagem que pode ser utilizada.

Figura 4.1: Sugestão de reportagem

Fonte: `https://g1.globo.com`

Após a leitura da reportagem em grupo, deve ser levantada a discussão sobre o uso das senhas no nosso cotidiano, para isso, algumas perguntas podem ser realizadas, como:

- Para que você usa senha?
- Você usa a mesma senha para diferentes lugares? Por quê?
- Já teve algum dado seu divulgado? Conhece alguém que já tenha passado por isso?

Os alunos atuais estão inundados de histórias e informações, muitas não confiáveis, mas, este é um momento para que haja bastante troca e os estudantes possam se sentir parte da aula. A partir das falas dos estudantes o professor conduzirá a discussão, cuidando para que informações errôneas ou falsas não fiquem no debate e acrescentado e reafirmando informações relevantes sobre o tema.

Após esse momento será proposta a seguinte atividade, para ser realizada nos grupos:

- Situação 01: Podendo utilizar os seguintes caracteres: 1, 2, 3, 4 e #; estabeleça uma senha para o seu grupo com 5 caracteres distintos.

Necessário deixar claro que as senhas são confidenciais para os integrantes dos grupos, não devem ser divulgadas entre os grupos e que como deve ter sido discutido após a reportagem devem ser evitadas senhas sequenciadas. Eles devem utilizar uma das folhas de ofício para registrar de forma legível a senha do seu grupo e guardar.

Depois de estabelecida a senha, será solicitado que aos pares de grupos, um grupo tente descobrir a senha do outro, estabeleça um tempo para essa tentativa, pode ser de 5 a 10 minutos. Para ficar organizado, cada grupo deve eleger um porta-voz, este aluno deve ir até o outro grupo, com senha a escrita em uma folha de ofício, os alunos devem ir registrando as senhas como, 1ª tentativa, 2ª tentativa, 3ª tentativa e assim por diante, até que descubram a senha ou acabem o tempo.

O resultado desse primeiro momento pode ser diverso, pode haver grupos que tenha sua senha descoberta, como também pode ocorrer de nenhum grupo ter sua senha decifrada. Após esse período o professor deve dar continuidade, deve ser solicitado que os alunos compartilhem com toda a turma sobre as dificuldades que tiveram e as estratégias que utilizaram para tentar descobrir as senhas. É provável que as estratégias e dificuldades sejam muito parecidas e que já surja a aplicação do Princípio Multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem), mesmo que eles não saibam do que se trata.

Após esse momento de compartilhamento deve ser lançada para a turma a segunda situação.

- Situação 02: Podendo utilizar os seguintes caracteres: 1, 2, 3, 4 e #; estabeleça uma senha para o seu grupo com 5 caracteres.

Mais uma vez esse questionamento deve gerar discussão e conflitos, o que é muito bom para a construção do conhecimento, pois, o objetivo é que eles notem que a retirada da palavra “distintos” pode gerar senhas com características diferentes das primeiras. O professor deve questionar aos grupos qual a mudança, o que mudou de uma situação para outra e solicitar que os grupos tentem determinar o número máximo de senhas é possível formar nas duas situações, caso esse número ainda não tenha sido explicitado. Mais, uma vez as estratégias, dificuldades e conflitos devem ser compartilhados.

Ao final dessas etapas deve ser apresentado aos alunos, de fato qual o conteúdo que já estão estudando, que é a Análise Combinatória, explicar do que se trata, e se o professor julgar necessário relatar um pouco de sua história. Deve ser formalizada a definição do Princípio Multiplicativo e relacioná-la as conjecturas e falas explanadas pelos alunos, destacando e evidenciando nas situações trabalhadas: a relação importante da ordem dos elementos com a aplicação direta do princípio; a possibilidade da aplicação com elementos repetidos e com elementos distintos.

Além do Princípio Multiplicativo, pode ser formalizado nesse momento, também, a definição de fatorial, calculando alguns fatoriais simples. O objetivo não é já começar a utilizar, mas mostrar para o aluno que o fatorial é um modo simplificado de representar uma operação.

Para melhor compreensão da definição do princípio outros exemplos devem ser lançados para que os alunos respondam em casa. Segue sugestão de dois exemplos:

Exemplo: Quantas senhas de 4 caracteres distintos podemos formar utilizando as letras minúsculas do alfabeto?

Exemplo: Suponha que certa cidade exija que as bicicletas tenham placas, assim como os automóveis, se as placas tiverem o seguinte modelo, 2 letras maiúsculas seguidas de três algarismos, qual o número máximo de bicicletas que essa cidade pode ter?

Com o intuito de promover a compreensão da natureza dos problemas de contagem, deve sempre ser solicitado aos alunos, a partir desses exemplos, que antes da resolução de quaisquer problemas de combinatória seja explicitado, o que chamaremos de Perguntas Interpretativas Básicas (PIB):

- O problema envolve elementos repetidos?
- A ordem dos elementos é importante? (se necessário faça um teste, escolha uma possibilidade resposta para o problema, troque os elementos de lugar e observe se muda a resposta para o que está sendo solicitado)
- Ao resolver o problema escolhemos alguns elementos ou utilizamos, obrigatoriamente, todos os elementos disponíveis?

2º Momento: 2 aulas

Esta aula deve começar com a retomada dos exemplos que foram solicitados para serem resolvidos em casa, é interessante solicitar que alguns alunos, apresentem no quadro as suas resoluções, independentemente de estarem corretas ou não. Eles devem explicar as estratégias, os caminhos que utilizaram, nesse instante a intervenção do professor validando procedimentos ou explicando os erros, é essencial. Não pode ser esquecido, também, a necessidade de ser explicitado nos problemas as PIB's.

Após as verificações dos exemplos, os alunos devem novamente se sentar em grupos, os mesmos do 1º momento, preferencialmente. Solicite aos alunos, eles tentem solucionar a Situação 03.

- Situação 03: De quantos modos é possível que o professor escolha dois grupos entre os que estão na sala para serem presenteados com uma caixa de bombons?

Aparecer a caixa de bombons no problema pode gerar um pouco de alvoroço, mas, também serve para novamente chamar a atenção. Determine um tempo para a tentativa de resolução do problema, no máximo 10 minutos, peça para que registrem de modo legível, suas respostas.

Ao final do período é provável que alguns grupos apresentem alguma solução e outros não, mas, peça para que compartilhem as suas estratégias. É esperado que as resoluções utilizem o Princípio Multiplicativo, mas, o professor deve instigar que os alunos respondam as PIB's, o objetivo é que eles percebam que, nesse problema, a ordem dos elementos não é importante, mostre a eles quantos e quais agrupamentos foram contabilizados repetidamente e o que deve ser feito para sanar essa contagem repetida. Este é um momento essencial, da sequência, propiciar aos alunos entenderem que a aplicação do Princípio Multiplicativo é universal, mas, pode sofrer adaptações dependendo do que for solicitado.

Para a acomodação dos conhecimentos, o professor deve ler e interpretar toda a Situação 03, respondendo as PIB's, destacando os agrupamentos repetidos, evidenciando a estratégia utilizada para descontar essas repetições e utilizando se possível a escrita com o fatorial. Quando for percebido que de fato houve acomodação dos conhecimentos serão apresentadas aos alunos as Situações 04 e 05, que devem ser discutidas, ainda em grupo.

- Situação 04: De quantos modos posso escolher 10 alunos dessa sala para serem presenteados com um livro?
- Situação 05: Depois de escolhidos os 10 alunos da Situação 04, de quantas formas distintas posso organizá-los em uma fila para entregar os livros?

O objetivo dessas situações é que a partir das PIB's eles diferenciem os problemas, quanto a natureza de escolha e de troca de lugar, quanto a importância da ordem e quanto à possibilidade ou não de ter elementos repetidos. Novamente deve ser determinado um tempo máximo de 10 minutos e as resoluções devem ser compartilhadas. Ao final das explanações dos alunos, o professor deve repetir o ritual de reler, interpretar, validar ou retificar as colocações dos estudantes, reafirmar a utilização do Princípio Multiplicativo e sistematizar a resolução das situações.

Com o objetivo de avançar um pouco mais no raciocínio combinatório será proposta mais duas situações, nelas, queremos introduzir o Princípio Aditivo, reforçar a interpretação das restrições e da possibilidade de elementos repetidos.

- Situação 06: Ana recebeu de sua professora 5 cartões, em cada cartão está escrito um algarismo, sendo: 2, 3, 5, 6 e 7. A professora quer saber quantos códigos de números pares formados por 3 algarismos Ana pode formar, escolhendo um cartão de cada vez?
- Situação 07: Anagrama é quando é formada uma nova palavra trocando a posição das letras de uma palavra, as novas palavras podem ter sentido ou não. Sejam as palavras: AMIGO e RESPEITO, encontre:
  a) O total de anagramas da palavra AMIGO
  b) O total de anagramas da palavra RESPEITO
  c) O total de anagramas de ambas as palavras que começam com vogal

d) O total de anagramas da palavra RESPEITO com os dois E juntos.

A resolução dessas situações demandará tempo e com certeza suscitará muitas dúvidas, e é provável que esse período se prolongue até o final da aula, caso isso ocorra os alunos devem tentar concluir em casa, pois, elas serão retomadas logo no início do 3º momento da SD.

Aos professores é importante lembrar que esta SD não priorizou a apresentação dos agrupamentos, o que se deseja desenvolver nos estudantes é, de fato, um raciocínio combinatório elaborado e produtivo, no que tange, a interpretação dos problemas capacidade de resolvê-los.

3º Momento: 1 aula

Este terceiro momento tem o objetivo primordial, retomar as Situações 05 e 06. O professor ouvindo o compartilhamento dos alunos deverá, como feito em todas as outras situações, ler, interpretar, responder as PIB's e nesse caso introduzir a aplicação do Princípio Aditivo, ao separar a resolução das situações em casos possíveis, atendendo as restrições, e unidos pelo conectivo "ou". É muito provável que apareçam resoluções aplicando as fórmulas dos agrupamentos, aconselho que peça para que os estudantes mantenham as suas resoluções registradas e registrem também o modo de resolução feito. Mais adiante, na SD, serão formalizados os agrupamentos e suas fórmulas relacionando com as situações já utilizadas.

Para solidificar a aplicação do Princípio Aditivo proponha mais dois exemplos, para ser respondido. Segue uma sugestão, que já evidencia uma restrição recorrente.

Exemplo: Quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos: 0,1,2,4,5,7 e 8?

Exemplo: Entre os anagramas da palavra CADERNO, quantos são os que começam por consoante e terminam em vogal?

4º Momento: 1 aula

É sabido que ficaram alguns exemplos do 3º Momento desta SD, mas, você explicará que retornará a eles em breve. Para este quarto momento será necessário que o professor tenha um baralho comum de 52 cartas para cada um dos grupos que tem em sala. É comum os alunos não conhecerem as cartas e os naipes do baralho, nas situações que serão trabalhadas netas aula eles terão a oportunidade de reconhecer e trocar informações com os colegas.

Novamente, o professor solicitará que eles se sentem nos grupos e distribuirá um baralho para cada grupo, deixe que eles explorem o baralho, principalmente aqueles que não conhecem. Enquanto eles manipulam o baralho o professor pode fazer perguntas, do tipo:

- Quantas são as cartas:
- As cartas têm alguma característica em comum? Qual?

- Como você dividiria ou organizaria essas cartas em grupos com a mesmas quantidades de cartas?
- Você sabe se as cartas têm nomes? Quais são?

Após esse período de reconhecimento e manipulação do baralho, que não deve ultrapassar 10 minutos, poderá ser lançada as Situação 08 e 09 para serem analisadas e respondidas pelos grupos. Nessas situações, dentre a solidificação de tudo que já foi formalizado nos outros momentos, será apresentado como estratégia a aplicação do Princípio da Inclusão e Exclusão.

- Situação 08: No pôquer, cada jogador recebe 5 cartas, com as quais forma jogadas. Uma dessas jogadas é o *full hand*, que é constituído de um par (2 números iguais ou duas letras iguais) e uma trinca (3 números iguais ou 3 letras iguais), por exemplo:

Figura 4.2: Cartas de jogo.

  a) De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de ases e uma trinca de 3?

  b) De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de ases?

  c) De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand?*

- Situação 09: Gustavo e Kleide fazem parte de um grupo de 10 pessoas, das quais 7 serão escolhidas para formar um júri em que todos os jurados terão funções idênticas. Do total de júris que podem ser formados:

  a) Quantos incluem Gustavo e Kleide?

  b) Quantos não incluem Gustavo nem Kleide?

  c) Quantos incluem Kleide e não incluem Gustavo?

É necessário que o professor estipule o tempo para esse momento de resolução e que não exceda o período de 20 minutos, durante as discussões nos grupos o professor não só pode, como deve participar, dirimir as dúvidas, indicar caminhos, possíveis estratégias, para que estudantes alcancem as soluções ou se aproximem o máximo possível delas.

Após a análise e estudo de mais essas duas situações é necessário atualizar as PIB's, acrescentado mais dois questionamentos importantes. Condiremos a partir desse momento as Perguntas Interpretativas Básicas as seguintes:

- O problema envolve elementos repetidos?

- A ordem dos elementos é importante? (se necessário faça um teste, escolha uma possibilidade resposta para o problema, troque os elementos de lugar e observe se muda a resposta para o que está sendo solicitado)
- Ao resolver o problema escolhemos alguns elementos ou utilizamos, obrigatoriamente, todos os elementos disponíveis?
- É viável dividir as possibilidades em casos?
- Excluir possibilidades do total não é mais simples para determinar o que é solicitado?

Ao final dessa aula deve ser solicitado que cada grupo pesquise a definição e a fórmula correspondente para cada um dos agrupamentos: Permutação Simples, Permutação com Repetição, Arranjo Simples, Arranjo com Repetição, Combinação Simples e Combinação com Repetição. O professor pode definir qual agrupamento para cada grupo, caso não haja grupos suficientes, um mesmo grupo pode ficar com dois agrupamentos e se houver mais grupos que o número de agrupamentos, o agrupamento pode ser pesquisado por mais de um grupo, a critério do professor.

5º Momento: 3 aulas (não precisam ser geminadas)

De novo para dar continuidade a SD os alunos estarão em grupo. Para este momento será necessária uma cartolina para cada grupo e todas as situações utilizadas nessa sequência devem estar organizadas em uma lista única para ser distribuída uma por aluno. Além deste material será necessário entregar em cada grupo: 4 retângulos idênticos e 6 círculos idênticos, feitos em folha de ofício, e 5 lápis de cor de cores diferentes. Esse material ajudará para a análise da décima e última situação.

Feita a distribuição dos materiais nos grupos, o professor avisará que será utilizado primeiro os retângulos, círculos e lápis de cor. E solicitará que seja explorada e solucionada a Situação 10.

- Situação 10: Tendo disponível as 5 cores de lápis de cor que receberam, de quantos modos é possível colorir:
  a) Os 6 círculos?
  b) Os 4 retângulos?

A intenção explícita da Situação 10 é que fique claro para os alunos que a natureza do problema é de escolha, mas que os elementos (as cores) podem ser repetidos e a ordem não altera a resposta, ou seja, não gera um novo agrupamento.

O professor deve como já evidenciado anteriormente, circular nos grupos, intermediar as discussões e diminuir os conflitos encontrados na interpretação. Para essa situação 15 minutos de investigação são suficientes. A partir das falas dos estudantes o professor irá esquematizar a resolução, priorizando as conclusões coerentes, utilizando, de novo, o Princípio Multiplicativo como estratégia principal de resolução.

Após esse momento, as 10 situações problemas já terão sido trabalhadas em sala é chegada a hora de explanar sobre os modelos de agrupamentos. O professor pedirá aos alunos que cada grupo escreva na cartolina a definição e a fórmula correspondente, as cartolinas devem ser expostas em uma parede visível da sala. Os estudantes devem ler todas as definições, observar todas as fórmulas, principalmente aquelas que não foram pesquisadas pelo seu grupo.

Em seguida o professor pedirá que os alunos peguem a lista que consta todas as situações e abordará novamente uma por uma, nessa etapa da SD o professor relembrará de forma objetiva como a situação já havia sido solucionada e pedirá para que os alunos apontem se há algum agrupamento que possa ser utilizado, independentemente se os alunos indicarem corretamente o professor fara a relação da situação com o respectivo agrupamento. Relacionado: o Arranjo Simples às Situações 01 e 06; o Arranjo com Repetição à Situação 02; a Permutação Simples às Situações 01, 05 e 07; a Permutação com Repetição à Situação 07; a Combinação Simples às Situações 03,04, 08 e 09 e a Combinação com Repetição à Situação 10.

As questões devem ser novamente respondidas utilizando as fórmulas evidenciando sempre para os estudantes que o uso das fórmulas não exclui as interpretações em relação, principalmente, as restrições de cada situação. Assim como foi feito com as situações os exemplos também devem ser novamente analisados e respondidos na perspectiva do uso das fórmulas dos agrupamentos. Neste dia deve ser entregue para os estudantes levarem para casa uma lista de exercícios e deve ser explicado que o uso ou não das fórmulas é facultativo, eles devem decidir pela metodologia que mais se sentirem seguros e adaptados e não podem esquecer que a leitura e as PIB's são partes integrantes e indispensáveis da solução de qualquer problema de combinatória.

Sugestão de exercícios para a confecção da lista de exercícios.

Exercício 01 – Com os algarismos 1, 3, 4, 6 e 8, determine quantos números naturais podem ser formados de modo que:

a) Eles sejam ímpares de 4 algarismos

b) Eles sejam ímpares de 4 algarismos distintos

Exercício 02 – Com relação à palavra IMAGENS, calcule:

a) O número total de anagramas.

b) O número total de anagramas que tem as vogais juntas.

c) O número total de anagramas que tem as vogais juntas e em ordem alfabética.

d) O número total de anagramas que tem as vogais em ordem alfabética.

Exercício 03 - Em um restaurante, o cliente deve montar seu prato escolhendo um tipo de grelhado, entre carne, frango ou peixe, e dois ingredientes de salada, entre alface, tomate, pepino e cenoura. A sobremesa também compõe o prato e é sempre uma salada de frutas, exceto se o cliente escolher alface entre os ingredientes de salada. Nesse caso, para a sobremesa, ele pode escolher entre salada de frutas ou sorvete. Qual o número de diferentes pratos que podem ser montados?

Exercício 04 – Considerando os anagramas da palavra CALCULADORA:

a) Quantos são?

b) Quantos tem as consoantes juntas?

Exercício 05 – No estacionamento de um comércio, com 7 vagas há 3 carros vermelhos, 2 azuis e 2 verdes.

Se levarmos em consideração apenas a cor dos carros,

a) De quantos modos esses carros podem estra distribuídos nesse estacionamento? Sabendo que cada vaga é numerada.

b) De quantos modos esses carros podem estar distribuídos nesse estacionamento, de modo que os carros de mesma cor estejam sempre lado a lado?

Exercício 06 – Cinco rapazes e cinco moças desejam tirar uma fotografia ocupando os 5 degraus de uma escada sendo que em cada degrau permanecerá um rapaz e uma moça. Quantas fotografias diferentes podem ser tiradas?

Exercício 07 – Na escola onde Riva estuda, 12 equipes distintas disputam 04 vagas para uma competição interescolar, sendo que Riva participa de uma das equipes.

a) De quantos modos diferentes essas 04 vagas podem ser preenchidas?

b) De quantos modos diferentes essas quatro vagas podem ser preenchidas, se uma das equipes é a que Riva participa?

Exercício 08 – Em um plano foram marcados 7 pontos, 3 a 3, não colineares. Qual o número total de retas distintas que podem ser determinados com esses 7 pontos?

Exercício 09 – Em um hospital trabalham 9 médicos e 12 enfermeiros. Uma comissão de dois médicos e 3 enfermeiros deve ser formada. Sabendo que existem 2 médicos que não se relacionam bem e não podem fazer parte da mesma comissão, calcule o número total de comissões que podem ser formadas?

Exercício 10 – Cinco amigos decidiram fazer uma viagem em 1 carro com 5 lugares. De quantos modos diferentes eles podem se acomodar nos 5 lugares do carro se apenas 3 sabem dirigir?

Exercício 11 – Em 1 empresa com 400 funcionários, 10 mulheres e 320 homens se candidataram para formar 1 comissão de 5 pessoas. Quantas comissões distintas podem ser formadas com pelo menos 1 mulher?

Exercício 12 – (ENEM 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado. De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59

b) 60

c) 118

d) 119

e) 120

Exercício 13 – (PUC) A papelaria Rei do Caderno decidiu fazer doações de estojos para os alunos da escola municipal do bairro no qual está localizada. Cada estojo deve ter 5 itens distintos, os quais serão selecionados entre 8 tipos de canetas e 6 tipos de lápis. Cada estojo deve con¬ter pelo menos uma caneta e pelo menos um lápis. Quantos estojos diferentes poderão ser montados?

a) 2 020

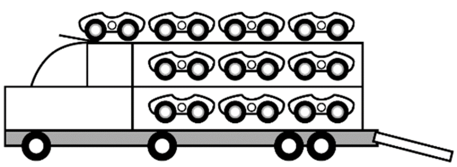
b) 1 990

c) 1 960

d) 1 940

Exercício 14 - Ana, Beatriz e Carina são médicas intensivistas. Diana, Elisa, Fernanda, Gabriela, Helena, Inês e Júlia são enfermeiras da unidade de terapia intensiva (UTI). No sábado, haverá plantão de duas médicas intensivistas e quatro enfermeiras nessa UTI. No domingo, o plantão será feito pela médica intensivista que não fez plantão no sábado e por cinco enfermeiras, sendo que três delas não fizeram plantão no sábado. Qual o total de combinações diferentes que esse cronograma de trabalho do fim de semana permite?

Exercício 15 – (ENEM – ADAPTADA) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

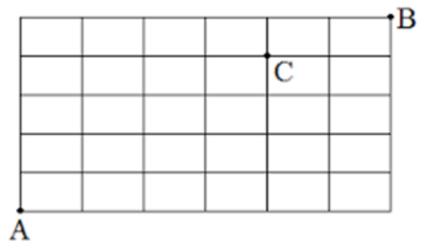
Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

Exercício 16 – Se um carrinho de sorvete oferece aos clientes 4 sabores diferentes de sorvete, de quantos modos uma pessoa pode comprar.

a) 3 sorvetes

b) 8 sorvetes

Exercício 17 - Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é

6º Momento: 2 aulas

Essa etapa da SD tem como objetivo trabalhar todas as questões da lista de exercícios, é imprescindível, o professor, com a participação dos estudantes, sistematizar as resoluções com todas as estratégias possíveis, aplicando e não aplicando as fórmulas. É necessário propiciar aos alunos autonomia, inclusive para decidir sobre a estratégia a ser utilizada. Sempre que for possível é interessante relacionar a questão a outras já solucionadas que sigam caminhos semelhantes.

Utilizando a metodologia da aula invertida, o final deste momento deverá ser solicitado aos grupos que façam uma pesquisa, incluindo resolução de questões e estudem para que no próximo encontro apresentem sobre a Permutação Circular, ou seja, os problemas de contagem que os elementos são dispostos no formato circular. A orientação para a aula invertida deve ser entregue por escrito, não é necessário um grande nível de exigência na apresentação dos estudantes, essa metodologia é mais uma estratégia para pôr o aluno como protagonista e tornar a aula mais dinâmica.

7º Momento: 2 aulas

Como já anunciado na etapa anterior este momento começa com a apresentação dos grupos sobre o que entenderam sobre a Permutação Circular, sempre que for necessário o professor deve intervir na fala dos estudantes, principalmente para não permitir que alguma informação incoerente seja consolidada. Dependendo da quantidade de grupos este momento deve exigir de 40 a 50 minutos, pois serão abordados alguns exemplos também.

Após a explanação dos alunos, o professor deverá sistematizar o agrupamento com a Permutação Circular e explorar as noções primitivas de combinatória que resultaram na fórmula respectiva desse agrupamento. É provável que os exemplos trazidos pelos estudantes sejam suficientes para essa abordagem, mas, se não for possível ser feito em sala, é interessante que o professor proponha, pelo menos, dois exemplos para que os alunos explorem um pouco mais. Desse modo, segue sugestão de exemplos.

> Exemplo: Para uma reunião em uma empresa, dez pessoas irão sentar-se ao redor de uma mesa redonda, entre elas o diretor e o vice-diretor. Calcule:
>
> a) De quantas maneiras distintas essas dez pessoas podem sentar-se ao redor da mesa.
>
> b) De quantas maneiras distintas essas dez pessoas podem sentar-se ao redor da mesa de modo que o diretor e o vice-diretor fiquem lado a lado.

8º Momento: 2 aulas

Esta é a última etapa da proposta de sequência didática, por isso, é um momento dedicado a avaliação. Mas, deve ficar claro que não é avaliação dos estudantes, é um momento de avaliação de toda a sequência e de sua eficiência. Para tanto, o professor deverá reservar 20 minutos finais deste momento para ouvir a avaliação dos alunos, eles devem ser encorajados a falar o que acharam das atividades, quais dificuldades enfrentaram, como se sentem em relação ao conteúdo.

Para a atividade de verificação os estudantes deverão trabalhar nos seus grupos. O professor distribuirá em cada grupo 6 folhas de ofício ou de monobloco e solicitará que cada grupo elabore 3 problemas de contagem, um problema em cada folha com suas respectivas soluções. Esse processo de criação não pode sofrer influência do professor, logo, este deve evitar interferir ao máximo. Nas outras três folhas o grupo explicitará uma questão em cada uma, sem resolução. Esse processo de criação deve ocorrer em no máximo 30 minutos.

As folhas que os grupos colocaram os problemas e as respostas devem ser recolhidas pelo professor. As outras olhas que constam apenas as perguntas devem ser trocadas entre os grupos, de modo, é claro, que um grupo não possa ficar com sua própria criação. Nesta ocasião o professor também precisa evitar interferências, as construções das estratégias de respostas devem ser de responsabilidade apenas dos grupos, deve ser estipulado um tempo, por volta de 40 a 50 minutos. Passado o tempo delimitado as folhas também devem ser recolhidas pelo professor e ele dará início a avaliação oral da turma sobre toda a sequência didática.

Finalmente este material recolhido pelo professor e os relatos dos alunos servirão para uma avaliação da SD, em cada turma. É neste instante que o professor refletirá sobre a retomada de algum ponto específico, sobre a necessidade de mais exercícios, sobre a flexibilização em relação aos tempos determinados para cada etapa, se existe disparidade entre estudantes da turma e é claro se houve uma significativa aprendizagem da Análise Combinatória.

Vale ressaltar que o término da sequência didática não delimita o fim dos estudos em uma turma de um conteúdo, é apenas uma parte do processo que é concluída para que o professor possa ter subsídios e segurança no planejamento dos próximos, que podem, inclusive, continuar abordando o mesmo conteúdo.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A BNCC propõe que a Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, ampliem e detalhem as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências rotineiras dos estudantes. Nesse sentido, o raciocínio combinatório deve ser estimulado e trabalhado em todas as etapas da educação básica, essa condição pode ser um fator determinante para melhores resultados no ensino e na aprendizagem da Análise Combinatória.

É saudável para a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio combinatório que os aprendizes construam seu conhecimento através da experimentação de possibilidades e da resolução de problemas. O livro didático é um instrumento de extrema relevância e quando bem utilizado pode ser um alavancador de bons resultados. Mas, o aprofundamento do pensar combinatório dificilmente será alcançado com a simples apresentação de fórmulas e aplicação em exercícios limitados. Nessa perspectiva, o ensino deste conteúdo, na educação básica, não pode ficar subordinado às metodologias e sistematizações, sempre similares de alguns livros didáticos, é necessário que os atores das salas de aula, estudantes e professores, sejam também pesquisadores e construtores de conhecimento e não apenas repetidores.

Ao final deste trabalho, os estudos aqui realizados evidenciam que o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória de fato apresentam deficiências, mas, que o transparecer delas não é algo negativo. Pelo contrário, é um gatilho necessário para que se possa através de pesquisas, debates, discussões e estudos, construir novas e melhores estratégias. Também é um caminho para se repensar, à nível acadêmico, como está a preparação dos futuros professores de Matemática, traçar cursos de aperfeiçoamento para aqueles que já regem aulas dessa disciplina e disseminar entre tais profissionais a disposição pela manutenção continuada de períodos de estudos e pesquisas.

Ratifica-se a eleição do estudo e do ensino da Análise Combinatória por meio da investigação e resolução de problemas. Problemas estes que tem como principal instrumento didático-pedagógico a utilização do Princípio Multiplicativo e a interpretação, inicialmente, individualizada de cada problema, da associação aos Princípios Aditivo e da Inclusão e Exclusão. A formalização dos agrupamentos deve ser uma consequência, quando o nível de conhecimento já está pronto para as generalizações. É possível que acertos e desacertos continuem a fazer arte do ensinar e do aprender, entretanto há que se apreciar e vivenciar novos moldes para o ensino da Análise Combinatória.

Referências

BRASIL. Ministério da educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretária de Educação Media e Tecnologia. Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

FERREIRA, Francinária Parente. Análise combinatória no ensino médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campus Juazeiro - BA, 2013.

FRANCO, Tertuliano. Princípios de Combinatória e Probabilidade. 1. Ed. Rio de Janeiro: Impa, 2020.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no Ensino Médio: a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica. Dissertação de mestrado. Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MACHADO, Nilson José; D'AMBROSIO, Ubiratan. Ensino de Matemática. 1. Ed. São Paulo: Summus Editorial, 2014.

MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta. Coleção PROFMAT. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; FERNANDES, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Impa, 1991.

SANTOS, José Plínio O.; ESTRADA, Eduardo Luís. Problemas Resolvidos de Combinatória. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2018.

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. Introdução à Análise Combinatória. Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

SILVEIRA, Adriano Alves da; ASSIS, Jorge de Lima. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória e Probabilidade via resolução, exploração e proposição de problemas. 1. Ed. Paraná: Appris editora, 2021.

SIMÕES-PEREIRA, J.M.S. Introdução à Matemática Combinatória. 1. Ed. Editora Interciência, 2013.

TREVIZAN, Wanessa Aparecida; BROLEZZI, Antônio Carlos. Como ensinar Análise Combinatória. 1. Ed. São Paulo: Editora LF (Livraria da Física), 2016.

VASCONCELOS, Cleiton Batist; ROCHA, Manoel Américo. Matemática Análise Combinatória e Probabilidade. 3. Ed. Ceará: Editora Universidade Estadual do Ceará, 2019.
ZABALA, A. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Artmed 1998.