UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ÍTALO RENAN LACERDA LIMA

NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

FORTALEZA

2022

ÍTALO RENAN LACERDA LIMA

NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo.

FORTALEZA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L711n Lima, Ítalo Renan Lacerda.
Números complexos e equações algébricas / Ítalo Renan Lacerda Lima. – 2022.
56 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo.

1. Números complexos. 2. Equações algébricas. 3. Ensino de matemática. I. Título.
CDD 510

ÍTALO RENAN LACERDA LIMA

NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 20/05/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me dar forças e me guiar nessa caminhada acadêmica na qual pude conquistar o mestrado em matemática.

Aos meus pais, Kelly Cristina e Jonas de Castro Lima, e aos meus irmãos, que sempre me apoiaram em tudo.

À minha namorada, Gabriela Lima Ribeiro, pelo apoio, companheirismo e incentivo para que eu concluísse a dissertação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Ferreira Melo, que me ajudou com materiais e sugestões para a dissertação e pela paciência e disponibilidade para me orientar.

Aos professores Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo e Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro, por ter aceitado o convite de participar da banca e contribuir com a dissertação.

À esta instituição, a UFC, e principalmente, o PROFMAT juntamente com o seu corpo docente e direção que possibilitaram mais esse fim de ciclo na minha vida.

Aos professores da Universidade Estadual do Ceará (Uece) que me ajudaram durante minha graduação, em especial, aos professores Manoel Azevedo, Tiago Caúla e Francisco César Aires.

Aos meus colegas e amigos que fiz no PROFMAT, em especial ao Misael Albuquerque, Matusalém Saraiva. e Shalon Gonçalves e a todos os demais que me ajudaram durante as disciplinas do mestrado.

Ao professor Daniel Mesquita que sempre me ajudou com conselhos que me guiaram por bons caminhos.

A todos os demais que me ajudaram de forma direta ou indiretamente para que esse trabalho pudesse ser concluído.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo mostrar o que são as equações algébricas e os números complexos e como eles podem ajudar no entendimento de alguns problemas do ensino básico e superior. Primeiramente, abordamos os aspectos históricos da origem desse conjunto e como os matemáticos daquela época entraram em conflitos para a sua aceitação. Em um segundo momento, definimos os números complexos e suas propriedades e mostramos as diversas formas que esses números podem assumir, que podem ir desde uma representação algébrica até uma representação matricial. Em seguida, definimos as equações algébricas e mostramos a importância da teoria em torno das equações, com o propósito de estabelecer alicerces para os números complexos. Por fim, o trabalho mostrar algumas aplicações dos números complexos que passam por assunto do ensino médio até o ensino superior.

Palavras-chave: números complexos; equações algébricas; ensino de matemática.

ABSTRACT

The present work aims to show what algebraic equations and complex numbers are and how they can help to understand some problems in basic and higher education. First, we approach the historical aspects of the origin of this set and how mathematicians at that time came into conflict for its acceptance. In a second moment, we define complex numbers and their properties and show the different forms that these numbers can take, which can range from an algebraic representation to a matrix representation. Then, we define algebraic equations and show the importance of theory around equations, with the purpose of laying the foundations for complex numbers. Finally, we finish the work by showing some applications of complex numbers that pass through the subject from high school to higher education.

Keywords: complex numbers; algebraic equations; teaching mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Já faz um tempo que o estudo dos números complexos não está tão presente na grade curricular dos alunos da educação básica. Uma possível justificativa para isso talvez seja o fato de que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) corroborarem com a seguinte ideia:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2002, p.122).

Devido a essa flexibilização, muitas escolas se utilizam desse fato e acabam não abordando esse assunto no ensino médio devido à ausência de questões nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Porém, tratar os Números Complexos como conteúdo flexível da educação básica é deixar de fora toda sua importância histórica e riqueza nas resoluções de problemas práticos do cotidiano.

A primeira vez que os alunos costumam ouvir falar em números complexos é quando o professor começa a introduzir resolução de equações do segundo grau. Pois quando o discriminante da equação é menor que zero, não é possível calcular a raiz quadrada no conjunto dos números reais.

Todavia, a história nos mostra que o seu surgimento se deu pela resolução de equação do terceiro grau, por volta do século XVI com Jerônimo Cardano. Vamos entender um pouco o contexto daquela época.

No século XVI ainda havia muita resistência para aceitar a existência de números negativos como soluções para problemas. Foi como o João Bosco escreveu em Trigonometria Números Complexos:

> Os números complexos começaram a aparecer sistematicamente em Matemática com os Algebristas italianos do século XVI. Quando isso aconteceu, os matemáticos não tinham nem ainda esclarecido os conceitos de números negativos e irracionais. (MORGADO *et al*., 2005, p. 149 e 150).

Assim, fica fácil compreender a dificuldade de se considerar raízes de números negativos como sendo soluções de equações diante de um contexto em que os próprios números negativos ainda eram tidos como problemas.

Por isso, se diz que a construção dos conjuntos numéricos não foi progressiva como é abordado muitas vezes nas escolas para fins didáticos. É nesse contexto do século XVI que os números complexos dão seus primeiros passos.

No livro “Ars Magna” (A Grande Arte) em 1545, Cardano (1501-1576) forneceu um método de resolução de equações do terceiro grau. Cardano conseguiu mostrar que dada a equação do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$ sempre é possível reduzir para uma equação da forma:

$$y^3 + My + N = 0, onde\ M = \left(\frac{b^3}{3} + c\right) e\ N = \frac{2b^3}{27} - \frac{2b^2}{3} - \frac{cb}{3} + d. \qquad \text{(I)}$$

Como o foco nesse primeiro instante é a história dos Números Complexos, deixarei para demonstrar os resultados que se segue no capítulo 4.

Depois de algumas manipulações algébricas, Cardano mostrou que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}} \text{ é solução de (I)}$$

De posse dessa fórmula, Rafael Bombelli (1526-1572), discípulo de Cardano observou que a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ tinha como solução real x = 4. Porém, ao se utilizar a fórmula de Cardano, notou que:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \qquad \text{(II)}$$

Onde tinha-se o problema da raiz quadrada de um número negativo. O que colocava em xeque se a fórmula de seu tutor estava mesmo correta. Porém, em sua obra *L’Algebra Parte Maggiore dell’Arithmetica* (1560), Bombelli propõe uma solução cuja saída é aceitar a existência de raízes quadradas de números negativos.

Utilizando-se da álgebra aplicada em seu tempo, Bombelli assumiu que fosse possível aplicar o mesmo em (II). Então, conseguiu mostrar que

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

Assim, conseguiu chegar em x = 4, validando a fórmula de resolução da equação de terceiro grau, pois

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Mesmo com essa solução que justificava a fórmula de seu tutor, muitos matemáticos da época consideravam essa ideia uma inutilidade acadêmica, como João Bosco descreve:

> Vemos assim que no século XVI os matemáticos começaram a usar os números complexos, aplicando-lhes as regras usuais de cálculo com números reais embora escandalizados e dando declarações veementes de que eles "não existiam", eram "inúteis", etc. (MORGADO *et al.*, 2005, p. 151).

Foi preciso passar três séculos para que os números complexos adquirissem sua importância na Matemática. No século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) forneceu aos números complexos uma interpretação geométrica, o que fez com os números complexos conquistassem seu espaço na matemática.

No capítulo 2, o trabalho trará uma breve explicação dos conceitos e definições dos números complexos, bem como de sua interpretação geométrica e matricial.

No capítulo 3 introduziremos o conceito de equações algébricas e falaremos sobre o importante Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

No capítulo 4 aplicaremos os números complexos para solucionar problemas interessantes cuja solução são os números reais para o ensino médio e ensino superior.

2 NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo faremos uma apresentação mais rigorosa dos números complexos. Serão abordadas algumas representações desse conjunto bem como algumas demonstrações que serão úteis para resolução dos problemas do capítulo 4.

2.1 Forma algébrica

Por definição, um número complexo z é um par ordenado z = (a, b), com a, b números reais que satisfazem as seguintes condições:

1. Adição: $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
2. Produto: $z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2,\ a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$
3. Identidade: $z_1 = z_2 \rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \rightarrow a_1 = a_2\ e\ b_1 = b_2$

Note que pela definição de produto o número z = (0, 1) = i, temos que:

$$i^2 = i \cdot i = z \cdot z = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

Temos que $i^2 = -1$.

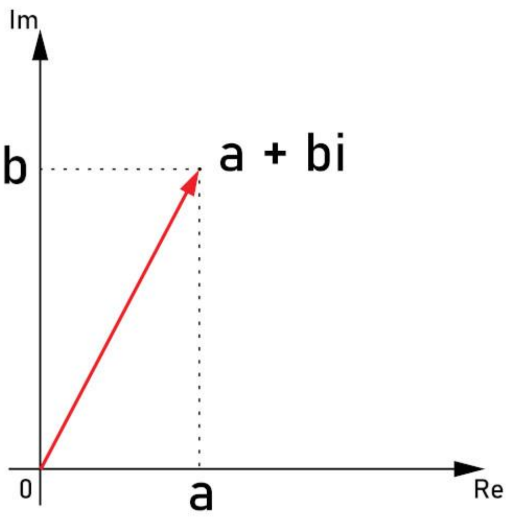
Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos. Temos que a soma e o produto obedecem às seguintes propriedades:

i. Comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
ii. Associatividade: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
iii. Elemento neutro da adição: $(0, 0) + z_1 = z_1, \forall\ z_1\ complexo.$
iv. Elemento neutro multiplicativo: $(1, 0) \cdot z_1 = z_1, \forall\ z_1\ complexo$
v. Existência do simétrico aditivo: se $z_1 = (a, b)$, então o simétrico da adição é representado por $-z_1 = (-a, -b)$. Segue que $z_1 + (-z_1) = 0$ elemento neutro da adição.
vi. Todo elemento dos números complexos diferente de zero possui um simétrico multiplicativo. Se $z_1 = (a, b)$, com $a \neq 0\ e\ b \neq 0$, então o inverso da multiplicativo de z_1 é dado por $z_1^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, donde $z_1 \cdot z_1^{-1} = (1, 0) = 1$ elemento neutro da multiplicação.
vii. Distributividade em relação a soma: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Todas essas propriedades são facilmente verificadas. Basta utilizar a definição de adição e multiplicação dos números complexos, 1 e 2 respectivamente, e observar que todas essas operações já são válidas para o conjunto dos números reais.

Dizemos que o número complexo z é expresso por z = a + bi, onde a e b são números reais e i é chamado de unidade imaginária. O número z pode ser entendido como um par ordenado fixado no sistema de coordenadas no plano. Diz-se que o número z = a + bi é representado por P(a, b).

Figura 1: Representação de z no plano complexo



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/argumento-de-um-numero-complexo.htm

Os pontos da forma (a, 0) = a + 0i = a são os números reais, por isso estão localizados no eixo real (Re). Já os pontos da forma (0, b) = 0 + bi = bi são chamados de números imaginários puros. Por esse motivo dizemos que as coordenadas a, b do número complexo z = a + bi são denominadas parte real e parte imaginária de z, respectivamente.

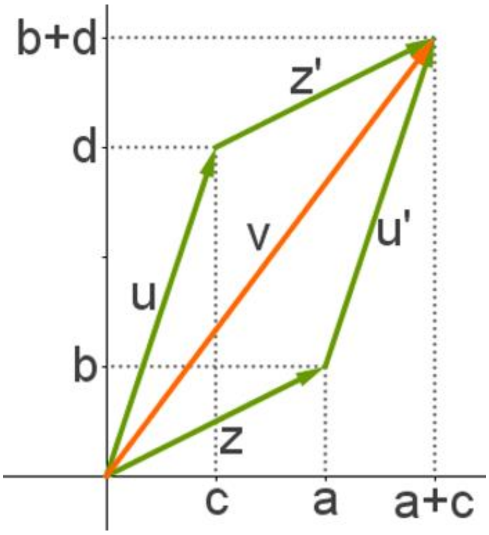
Denota-se Re(z) = a é a parte real de z e Im(z) = b é a parte imaginária de z.

2.1.1 Plano de Argand-Gauss

O plano complexo, denominado de plano de Argand-Gauss, associa todos os números complexos da forma z = a + bi pelos pontos P (a, b) no plano ou pelo vetor Oz. A vantagem de se utilizar tal representação é a facilidade de visualizar os números complexos no plano e a utilização de propriedades já conhecidas na geometria analítica como a regra do paralelogramo para a soma e subtração de vetores.

Dessa forma, sejam z = (a, b) e u = (c, d) dois números complexos associados aos vetores da figura 2, segue pela regra do paralelogramo que z + u = v, onde u’ é o vetor paralelo ao vetor u e z’ é o vetor paralelo ao vetor z:

Figura 2: Regra do paralelogramo para adição

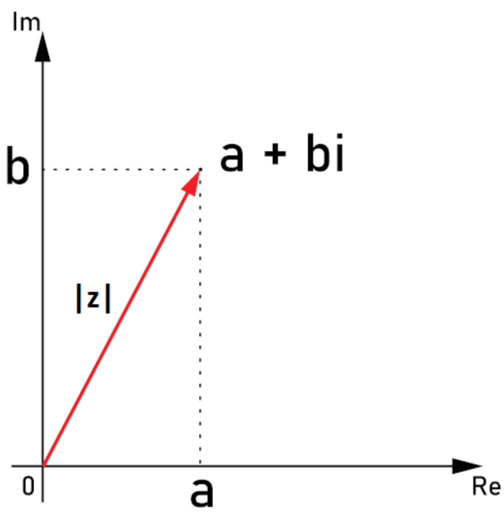


Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/representacao-geometrica-soma-numeros-complexos.htm

De posse dessa representação cartesiana surgem dois conceitos importantes e bastante usados em problemas com números complexos que são: o módulo e o conjugado.

Seja z = (a, b) = a + bi um número complexo, o módulo desse número nada mais é que a distância desse ponto à origem (0, 0). Denota-se |z| para representar o módulo de z.

Figura 3: Representação do número complexo z



Fonte: elaborada pelo o autor. 2021

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura 3, temos que:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Já o conjugado do número complexo z = (a, b) = a + bi é denominado por

$\bar{z}$ = (a, – b) = a – bi.

Segue alguns resultados importantes decorrentes do módulo e conjugado de um número complexo:

a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

De fato, pois se z = a + bi, temos que:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

b) $|z| = |\bar{z}|$

De fato, pois se z = a + bi, segue que:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$$

c) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

Esse resultado é facilmente verificado pois, se z = a + bi, temos que

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = Re(z)$$

d) $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

De fato, pois se z = a + bi, temos que

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{a + bi - a + bi}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = Im(z)$$

e) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

Seja $z_1 = a + bi \; e \; z_2 = c + di$, segue que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = a - bi + c - di =$$

$$= \bar{z_1} + \bar{z_2}$$

f) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$

Seja $z_1 = a + bi \ e \ z_2 = c + di$, segue que

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + b\imath)(c + d\imath)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\imath} = (ac - bd) - (ad + bc)i =$$

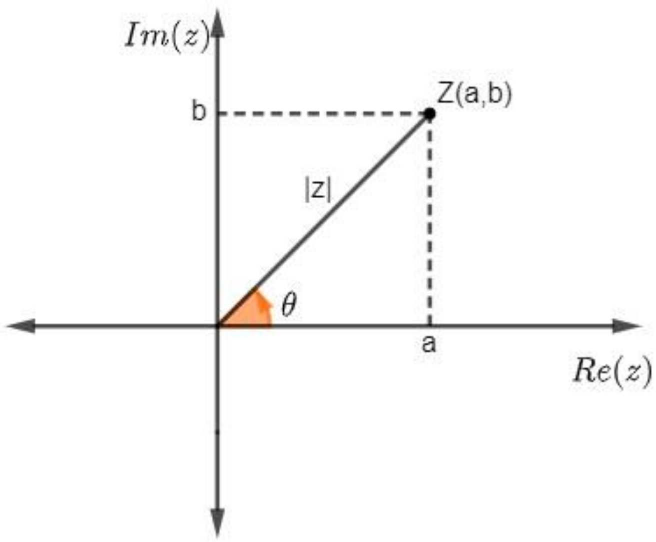
$$(a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

2.2 Representação Polar

Também chamada de representação trigonométrica, essa representação consiste em utilizar elementos da trigonometria e da geometria analítica para representar os números complexos.

Seja um número complexo $z \neq 0$, chama-se argumento de z o ângulo θ formado polo eixo Ox e o vetor Oz, conforme mostrado na figura 4. Vale destacar que os ângulos possuem a mesma ideia da trigonometria, isto é, são orientados positivamente no sentido de percurso oposto ao utilizado nos ponteiros do relógio.

Figura 4: Representação do argumento do número complexo



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/plano-argandgauss.htm

Utilizando as relações trigonométrica em um triângulo retângulo, temos que:

$$z = |z|(cos\theta + isen\theta)$$

Observe que com a representação acima é possível escrever o número complexo z em função de duas variáveis, seu módulo e o argumento. Dizemos que $|z| \ e \ \theta$ são as coordenadas polares de z.

Diante dessa representação polar dos números complexos podemos observar que o produto e o quociente apresentam uma relação interessante. Sejam $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$,onde $\rho_1 = |z_1|$ e $\rho_2 = |z_2|$.

Assim, pode-se concluir que:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2) =$$

$$= \rho_1.\rho_2 \cdot (cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2) =$$

$$= \rho_1.\rho_2 \cdot (\, cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - sen\theta_1 \cdot sen\theta_2 + isen\theta_1 \cdot cos\theta_2 + icos\theta_1 \cdot sen\theta_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow z_1 \cdot z_2 = \rho_1.\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$$

O quociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_2 - isen\theta_2)}{(cos\theta_2 + isen\theta_2)(cos\theta_2 - isen\theta_2)} =$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\, cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 + sen\theta_1 \cdot sen\theta_2 + isen\theta_1 \cdot cos\theta_2 - icos\theta_1 \cdot sen\theta_2)}{cos^2\theta_2 + sen^{2\theta_2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)$$

2.2.1 Fórmula de De Moivre

Podemos ampliar o produto exposto acima para o caso geral em que temos:

$$z_j = \rho_j\left(cos\theta_j + isen\theta_j\right),\ 1 \leq j \leq n \text{ e } \rho_j = |z_j|$$

Tem-se que:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)],\ \forall n \,\epsilon\, N$$

Demonstração

Vamos utilizar o princípio de indução para mostrar tal fato.

i) Caso n =1

De fato, pois

$z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$, representação polar do número complexo.

ii) Vamos supor que para o caso n = k é verdadeiro, isto é

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_k = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)] \qquad \text{(I)}$$

Devemos mostrar que a relação também é válida para o caso n = k + 1. De fato, pois

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_k \cdot z_{k+1} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)] \cdot z_{k+1}$, pela hipótese de indução (I). Como $z_{k+1} = \rho_{k+1}(cos\theta_{k+1} + isen\theta_{k+1})$, segue que

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_k \cdot z_{k+1} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)] \cdot \rho_{k+1}(cos\theta_{k+1} + isen\theta_{k+1}) =$

$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k \cdot \rho_{k+1} \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)] \cdot (cos\theta_{k+1} + isen\theta_{k+1}) =$

$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k \cdot \rho_{k+1} \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) \cdot cos\theta_{k+1} - sen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) \cdot sen\theta_{k+1} + i(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) \cdot sen\theta_{k+1} + sen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) \cdot cos\theta_{k+1}] =$

$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k \cdot \rho_{k+1} \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k + \theta_{k+1}) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k + \theta_{k+1})]$

Portanto, pelo princípio de indução, temos que

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$, $\forall n \in N$ ■

Em caso particular, se $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ e $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n = 1$, temos por De Moivre que:

$$z = (cos\theta + isen\theta)^n = \cos(n\theta) + isen(n\theta)$$

2.2.2 Identidade de Euler

Outra relação interessante que remete a forma polar é a identidade de Euler.

Em um artigo publicado por Leonard Euler, em 1748, temos uma motivação utilizando expansões de séries munido de funções trigonométricas para a seguinte identidade:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

Utilizando as Séries de Taylor, temos que a exponencial é dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por outro lado, temos que o sem(x) e cos(x) são dadas, respectivamente, por

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Fazendo a seguinte substituição $x = i\theta$ na série da exponencial, teremos:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots =$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots)$$

$$= \cos(\theta) + isen(\theta)$$

2.3 Representação Matricial

Outra maneira interessante de representar os números complexos é por meio de matrizes 2x2. Sabemos que um número complexo compreende algumas propriedades como a comutatividade no produto e que, de forma geral, produto de matrizes não se observa tal fato.

Então é necessário definir as matrizes 2x2 de maneira que possamos aplicar os conceitos e propriedades dos números complexos. Seja X uma matriz quadrada 2x2 de coeficientes reais e I a matriz identidade 2x2. Devemos encontrar inicialmente alguma matriz X, tal que:

$$X \cdot X = -I$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde a, b, c e d são coeficientes reais.

Temos que:

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \ \ (1) \\ ab + bd = 0 \ \ (2) \\ ac + cd = 0 \ \ (3) \\ bc + d^2 = -1 \ \ (4) \end{cases}$$

Como $bc + d^2 = -1$, temos que $bc = -1 - d^2$ e pela primeira equação (1) tem-se que:

$a^2 + bc = -1 \rightarrow \ a^2 - 1 - d^2 = -1 \rightarrow a^2 = d^2 \rightarrow |a| = |d|$, isto é, ou a = d ou a = – d.

Seja a = d. Pela equação (2), segue que:

$ab + bd = 0 \rightarrow \ ab + ab = 0 \rightarrow 2ab = 0$, ou a = 0 ou b = 0. Note que se b = 0, pela equação (1) teríamos que:

$a^2 + bc = -1 \rightarrow a^2 + 0 \cdot c = -1 \rightarrow a^2 = \ -1 \rightarrow a = \ \sqrt{-1},$ o que seria um absurdo, pois a é um número real.

Se a = 0, temos por (1) que:

$$bc = -1 \qquad \text{(I)}$$

Como queremos encontrar uma matriz que satisfaça $X \cdot X = -I$, podemos supor que $b = \ -1$ e por (I) segue que $c = 1$. Assim teremos que:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos o candidato para ser o número imaginário na forma de matriz, isto é:

$$i = X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se então representar os números complexos na forma de matriz 2x2 da seguinte maneira:

$aI + bi = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, com a, b números reais e a adição e o produto usuais de matrizes.

Vamos verificar algumas propriedades utilizadas nos números complexos. Seja $aI + bi$ e $cI + di$ “números complexos” na forma de matrizes.

1. Comutatividade da soma:

$$(aI+bi)+(cI+di)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & -b+(-d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c+a & -d+(-b) \\ d+b & c+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=(cI+di)+(aI+bi)$$

2. Comutatividade do produto:

$$(aI+bi)\cdot(cI+di)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ cb+ad & -bd+ac \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ca-db & -da-cb \\ bc+da & -db+ca \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=(cI+di)\cdot(aI+bi)$$

3. Elemento neutro na adição.

$$0=0I+0i=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Elemento neutro no produto.

$$I=1\cdot I+0\cdot i=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Existência do simétrico aditivo.

Se $aI+bi$ um número complexo, então $-aI-bi$ é seu simétrico aditivo, pois

$aI+bi+(-aI-bi)$ = 0 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, elemento neutro aditivo.

6. Para as matrizes não nulas, temos um inverso multiplicativo.

$$(aI+bi)^{-1}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}=\frac{a}{a^2+b^2}I+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Como a soma e o produto de matrizes quadradas são operações associativas e além disso é válido a distributividade do produto em relação à adição, tem-se que todas essas propriedades são válidas para o produto e a adição de números complexos segue que:

$$\{aI+bi:\ a,b\ reais\}$$

É o conjunto dos números complexos na forma matricial.

Note que os números complexos podem ser interpretados de muitas formas e com isso é possível encontrar soluções de muitos problemas.

3 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Para dar continuidade ao nosso trabalho sobre os números complexos é importante tratarmos brevemente sobre as equações algébricas. As equações algébricas são as equações da forma:

$p(x) = 0$, onde p é uma função polinomial.

É muito comum esse tipo de equação aparecer em problemas de matemática. Vejamos um exemplo:

Problema: Qual a altura de uma pirâmide de base quadrada cujo volume mede 108 cm³ e a altura equivale ao dobro do lado da base, menos 3 unidades?

Sabemos que o volume de uma pirâmide é calculado como sendo um terço da área da base vezes a altura. Vamos supor que o lado da base quadrada mede x cm, temos que a altura será 2x – 3. Assim teremos que:

$$\frac{x \cdot x \cdot (2x - 3)}{3} = 108 \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x^2 \cdot (2x - 3) = 324 \rightarrow$$

$$2x^3 - 3x^2 - 324 = 0$$

Observe que encontramos uma equação de grau 3. Até a época do Renascimento não tínhamos um algoritmo ou fórmula para fornecer a resolução de equações de grau superior a dois.

Foi justamente nesse contexto onde se procurava uma forma para encontrar as raízes de uma equação de maneira geral que os números complexos começaram a ser estudados, apesar da resistência de muitos pensadores no início, como já foi descrito no capítulo 2.

Naturalmente, ao resolver um problema, estamos em busca das soluções reais e talvez não faça sentido incluir os números complexos. Mas como vimos anteriormente, alguns problemas passam por números complexos antes de chegar nas soluções com números reais.

Além disso, considerar a existência dos Números Complexos torna mais abrangente a teoria acerca do estudo sobre as equações algébricas, como observado em:

> Mas o principal papel dos números complexos não é computacional e sim estrutural: a consideração das raízes complexas no estudo das equações algébricas permite uma

> teoria muito mais elegante do que a possível considerando apenas as raízes reais. (LIMA *et al.*, 2005, p. 199).

Por esse motivo, faremos uma breve explanação dos polinômios complexos a seguir.

3.1 Polinômios Complexos

Uma função $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ será chamada de função polinomial complexa quando existirem números complexos $a_0, a_1, \dots, a_n$ tais que:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0, \forall\, x \in \mathbb{C}.$$

Dizemos que $a_0, a_1, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinômio e se $a_n \neq 0$ diz-se que o polinômio p tem grau n. Se α é um número complexo e $p(\alpha) = 0$, então α é raiz de p.

Como a intenção do exposto trabalho é mostrar a aplicabilidade dos números complexos em problemas cuja a solução é um número real, nada mais natural em analisarmos os casos em que $a_0, a_1, \dots, a_n$ são coeficientes de números reais, sem com isso, desconsiderar que estamos estudando os polinômios complexos.

Dessa forma, todas as propriedades das funções polinomiais definidas nos conjuntos dos números reais serão válidas para as funções polinomiais complexas com coeficientes reais, sejam elas:

P1: Sejam p e q funções polinomiais complexas com coeficientes reais, temos que o grau da soma p + q será menor ou igual ao grau do maior polinômio entre p e q, se p + q não for um polinômio identicamente nulo.

P2: Sejam p e q funções polinomiais complexas com coeficientes reais, o grau do produto $p \cdot q$ será igual a soma dos graus de p e q.

P3: Sejam p, q e r funções polinomiais complexas com coeficientes reais, se $p = q \cdot r$, dizemos que o polinômio p é divisível por q e r.

É preciso deixar claro as ideias acerca do polinômio identicamente nulo, isto é, p(x) = 0 ∀x real. Dizemos que o polinômio identicamente nulo é caracterizado por:

$$p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$$

Note que para todo e qualquer valor de x, o polinômio acima é igual a zero. O que faz com que esse polinômio não possua um grau. Porém, é conveniente considerarmos que o grau de p(x) = 0 seja $-\infty$.

Pois como explana LIMA (2005, p. 202), essa convenção permite incluir o polinômio identicamente nulo quando estivermos falando de polinômios de grau menor ou igual a n. O que torna o enunciado de alguns teoremas mais simples.

Decorrente de tais propriedade podemos mostrar que, dado uma função polinomial $p(x) = x^n - \alpha^n$ e $q(x) = x - \alpha$, onde $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, temos que p(x) é divisível por q(x). Note que:

$$x^n - \alpha^n = (x-\alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} \ldots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1})$$

O resultado acima nos ajuda a demonstrar o seguinte teorema.

Teorema: Se o número complexo α é raiz de uma função polinomial p, então p(x) é divisível por (x – α).

Demonstração: Seja $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$. Temos que α é raiz de p, isto é:

$p(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + a_{n-2} \cdot \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0$ e além do mais p(x) = p(x) – 0 = p(x) – p(α). Assim, temos que:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 - (a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + a_{n-2} \cdot \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot \alpha + a_0)$$

Observe que a_0 - a_0 = 0 e que podemos fatorar o polinômio acima da seguinte maneira:

$$p(x) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha)$$

Como vimos no resultado anterior, todas as parcelas de p(x) é divisível por x – α, portanto,

$p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$ e ainda podemos escrever p(x) = $(x-\alpha)$·q(x) ■

De maneira recursiva, decorrente do teorema acima, temos que se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas do polinômio p(x) de grau n, então podemos escrever:

$$p(x) = (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot (x-\alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k) \cdot q(x)$$

Tal que, q(x) é uma função polinomial de grau (n – k). A consequência imediata desse resultado é o fato de que p(x) tem no máximo n raízes.

Podemos averiguar que se uma função polinomial p(x) é nula para qualquer que seja o x real, então p(x) é da forma:

$$p(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \cdots + 0 \cdot x + 0$$

De fato, pois se existir um $a_n \neq 0$, teríamos que o grau do polinômio p(x) seria n e como vimos acima. Dessa forma, uma função polinomial de grau n tem no máximo n raízes, o que implica que x estaria limitado a um número restrito de raízes.

Com esse resultado temos que se p e q são funções polinomiais iguais para todo x complexo, então p – q é um polinômio nulo. Desse fato e do que foi mostrado acima, decorre que todos os coeficientes de p – q devem ser nulos. Portanto, se p é igual a q, então os coeficiente de p são iguais aos coeficientes de q.

Para dar prosseguimento ao nosso entendimento, sabe-se que há uma diferença entre os conceitos de polinômios e funções polinomiais. Muitas vezes essa diferença não põe em risco nossa análise, uma vez que podemos estabelecer uma relação entre um polinômio e uma função polinomial, como foi dito em:

> Em outras palavras, duas funções polinomiais só são iguais quando os polinômios a elas associados são iguais. Assim, a uma função polinomial também corresponde um único polinômio. Desse modo, existe uma correspondência bi-unívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que nos permite, sem risco de confusão, nos referirmos indistintamente ao polinômio p ou à função polinomial p. (LIMA *et al*., 2005, p. 203).

Dessa forma, vamos analisar algumas propriedades dos polinômios sem desconsiderar essa correlação com as funções polinomiais.

3.2 Divisão de Polinômios

Como vimos na introdução desse capítulo, muitos são os problemas em matemática cuja solução é uma das raízes de um polinômio dado e sua resolução muitas vezes não é trivial.

Uma das ferramentas mais usadas para encontrar raízes de um polinômio p de grau n é encontrar um segundo polinômio q de grau menor que n, de tal maneira que p seja divisível por q.

Dessa forma, o quociente dessa divisão seria um polinômio s de grau menor que p e, portanto, mais fácil de encontrar as suas raízes.

Note que que se um polinômio p pode ser escrito como $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ e α é raiz de p, então α é raiz de d ou α é raiz de q, pois

$$p(\alpha) = d(\alpha) \cdot q(\alpha) = 0 \rightarrow d(\alpha) = 0 \; ou \; q(\alpha) = 0$$

Note que para falar sobre divisibilidade ou não entre polinômios é preciso primeiro conceituar tal divisão. Porém, basta recorremos ao algoritmo da divisão dos números inteiros:

Definição: Seja um número inteiro dividendo D e um inteiro divisor d, dividir D por d, diferente de zero, consiste em encontrar inteiros q e r (onde $0 \leq r \leq |d| - 1$), chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão, que cumpram D = dq + r.

De maneira análoga, tomando um polinômio complexo D e um polinômio complexo d não identicamente nulo, dividir D(x) por d(x) consiste em encontrarmos polinômios complexos q(x) e r(x), chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão, que obedeçam:

$$grau\ (r) < grau\ (d) \text{ e } D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Assim como no caso dos números inteiros é possível demonstrar que q e r existem e são únicos, com a divisão de polinômios complexos também é possível. Como o trabalho em questão está centrado nos números complexos e equações algébricas, vamos nos ater em demostrar a existência e a unicidade apenas para a divisão de polinômios.

Teorema: O quociente e o resto da divisão do polinômio complexo D pelo polinômio complexo d (não identicamente nulo) existem e são únicos.

Demonstração: Antes de mostrar que o quociente e o resto existem, vamos mostrar a unicidade. Devemos supor que existem $(q_1, r_1) \; e \; (q_2, r_2)$, ambos pares de polinômios, que satisfazem a definição da divisão de D por d. Assim, vamos mostrar que nessas circunstâncias $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Como $(q_1, r_1) \; e \; (q_2, r_2)$ são pares de polinômios que satisfazem a definição da divisão de D por d, podemos escrever:

$$D = d \cdot q_1 + r_1 \text{ e } D = d \cdot q_2 + r_2$$

Como D = D, segue que:

$$d \cdot q_1 + r_1 = d \cdot q_2 + r_2$$

Logo

$$d \cdot (q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \quad (1)$$

Observe que o grau do polinômio $r_2 - r_1$ é menor do que o grau do polinômio de d. Pois, por definição o grau de $r_1 < d\ e\ r_2 < d$, logo o grau da diferença $r_2 - r_1$ continuará menor que o de d. Por outro lado, o grau do polinômio $d \cdot (q_1 - q_2)$ será maior ou igual ao grau do polinômio d.

Portanto, para que possamos ter a igualdade em (1), $q_1 - q_2 = 0$ e $r_2 - r_1 = 0$, caso contrário, teríamos que o grau do polinômio do primeiro membro seria maior que o grau do polinômio do segundo membro. Assim, seque que

$$q_1 = q_2$$

$$r_1 = r_2$$

O que concluiu a unicidade do teorema.

Observe que se D tem grau menor que d, a divisão é instantânea, pois o quociente q = 0 e o resto r = D. De posse disso, para mostrar a existência reduzindo o grau do polinômio D até que esse fique menor que o de d.

Seja m e n, respectivamente, os graus dos polinômios d e D. Como vimos acima, se $m > n$, então q = 0 e r = D, nesse caso a divisão é imediata.

Caso contrário, seja $a_n x^n$ o termo de maior grau de D e $b_m x^m$ o termo de maior grau de d. Seja ainda r_1 um polinômio que obtemos da seguinte maneira:

$$r_1(x) = D(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{m-n} \cdot d(x)$$

Observe que r_1 tem grau no máximo (n – 1) e é chamado de o primeiro resto parcial. Até o momento não sabendo se r_1 dá para dividir por d, mas seja possível ser feita tal divisão, teremos $r_1(x) = q_1(x) \cdot d(x) + r(x)$, onde q_1 e r são, respectivamente o quociente e o resto, como grau r menor que o grau d.

Observe ainda que se r_1 de fato for divisível por d, então D também seria divisível por d, pois:

$$D(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{m-n} \cdot d(x) + r_1(x)$$

$$D(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{m-n} \cdot d(x) + q_1 \cdot d(x) + r(x)$$

$$D(x) = (\frac{a_n}{b_m} x^{m-n} + q_1) \cdot d(x) + r(x)$$

Ou seja, acima vemos que o resto r da divisão de r_1 por d é o mesmo resto da divisão de D por d. Porém, não sabemos ainda se r_1 pode ser dividido por d.

Nosso trabalho se resume a verificar se o primeiro resto parcial r_1 dar para dividir por d. Nesse coso, podemos repedir o processo feito acima, mas agora para o polinômio r_1 em relação ao polinômio d.

Ao fazermos isso, encontraremos um segundo resto parcial r_2 e assim sucessivamente até que encontraremos um r_k que certamente terá um grau menor que d e consequentemente será possível dividi-los, pois o quociente q_k = 0 e r = r_k.

Dessa forma, retornando o caminho que percorremos até chegar em r_k, podemos concluir que cada resto parcial pode ser dividido por d e consequentemente o próprio D.

Portanto, pode ser efetuada a divisão D por d, bastando seguir o algoritmo feito acima e assim concluímos a demonstração do teorema. ∎

De posse da definição de divisão de polinômios, podemos concluir que ao dividir um polinômio D por (x – a), onde a é uma constante real, temos que o resto r dessa divisão será D(a), pois

$$D(x) = (x - a) \cdot q + r$$

Substituindo x = a, segue

$$D(a) = (a - a) \cdot q + r \rightarrow D(a) = r$$

Note que se r(x) = 0, temos que x = a é raiz do polinômio D(a).

Por exemplo, ao dividir $p(x) = x^3 - 5x^2 + 12x + 1$ por $(x - 2)$, pelo que foi mostrado acima, podemos fazer

$$r = p(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 1 = 8 - 20 + 24 + 1 = 13$$

O resultado mostrado acima é também chamado de teorema do resto.

3.3 Teorema Fundamental da Álgebra

Como foi exposto acima em 3.2, se $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \dots, \alpha_k$ são todas as raízes reais distintas de um polinômio p, então podemos escrever p da seguinte maneira:

$$\text{p(x)} = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k) \cdot q(x)$$

Como estamos supondo que $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \dots, \alpha_k$ são as raízes distintas, então q(x) ou terá raízes reais iguais a de p ou não terá raízes reais. Supondo que q tenha raízes reais, podemos escrever p(x) como sendo

$$\text{p(x)} = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m) \cdot q_1(x) \qquad (1)$$

Onde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \dots, \alpha_m$ são todas as raízes reais do polinômio p(x) e $q_1(x)$ é um polinômio que não possui raízes reais. Se tivéssemos analisando os polinômios cuja raízes fazem parte apenas do conjunto dos números reais, então o polinômio escrito acima assumiria a sua forma fatorada final. Porém, como estamos no corpo dos números complexos é plausível assumir que $q_1(x)$ terá alguma raiz complexa e é isso que o Teorema Fundamental da Álgebra diz.

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA): Todo polinômio de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Apesar de o teorema acima ser de extrema importância para a álgebra e, em particular, para o estudo das equações algébricas, vale ressaltar que a sua demonstração perpassa pela ideia de continuidade de funções de polinômios complexos. Em outras palavras, a demonstração exige um conhecimento de análise.

Porém, é possível ter uma ideia de como chegar tal resultado. Elon (2005, p. 230) mostra uma forma interessante em que os alunos do Ensino Médio compreenderam o teorema.

Para isso, consideremos uma função polinomial complexa $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$, tal que $a_0, a_1, \dots, a_n$ são números complexos.

O TFA afirma que todo polinômio de grau maior ou igual a um possui, pelo menos, uma raiz complexa. Isto é, deve-se mostrar que existe z_0 complexo tal que $p(z_0) = 0$, ou simplesmente que há um ponto do plano complexo cuja imagem de p passa pela origem.

Aqui utilizaremos uma noção intuitiva de continuidade e consideraremos as imagens da função p dos círculos do plano complexo cujo centro seja na origem.

Tal continuidade de p (uma curva fechada e contínua) tem-se que sua imagem também é contínua e fechada.

Para o melhor entendimento dos alunos, vamos considerar o círculo de |z| = r (de raio 1) do polinômio:

$$p(z) = z^2 + z + 2$$

Pode-se colocar o polinômio acima na forma polar:

$$p(z) = [r(cos\theta + isen\theta)]^2 + r(cos\theta + isen\theta) + 2$$

Por De Moivre, segue:

$$p(z) = r^2(cos2\theta + isen2\theta) + r(cos\theta + isen\theta) + 2$$

Observe que quando z percorre o círculo todo, temos que θ vai de 0 a 2π, em contra partida, temos que 2θ vai de 0 a 4π. Dessa forma, à medida que z percorre uma volta no círculo de raio r e centro na origem, tem-se que

$z^2 = r^2(cos2\theta + isen2\theta)$ percorre duas voltas com o centro na origem, porém de raio r^2.

Vamos analisar o comportamento de p(z) nos extremos, isto é, nos valores que r está próximo de zero e nos valores grandes de r.

Ora, quando r está próximo de 0, temos que r^2 é bem menor que r e, portanto, o comportamento da função p(z) será moldado em essência por z. Nessa condição, tem-se um círculo de raio 2 com uma leve interferência de z^2.

Por outro lado, à proporção que r vai crescendo, temo que r^2 é bem maior que r e, assim, o comportamento de p(z) passará a ser regido por z^2. Uma forma de visualizar esse fato é se colocarmos r^2 em evidência na função p(z):

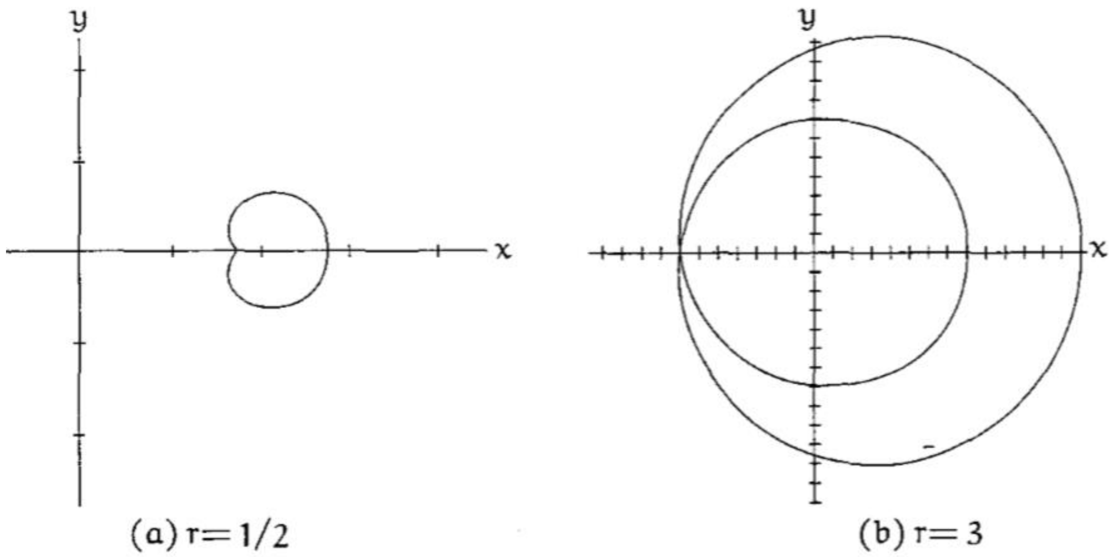
$$p(z) = r^2\left[(cos2\theta + isen2\theta) + \frac{1}{r}(cos\theta + isen\theta) + \frac{2}{r^2}\right]$$

À medida que r fica cada vez maior, as parcelas $\frac{1}{r}(cos\theta + isen\theta)$ e $\frac{2}{r^2}$ tendem a zero.

Dessa forma, teremos eu a trajetória de p(z) será um círculo de raio r² e centro na origem percorrendo duas vezes, recebendo uma leve influência de z.

Para ficar mais claro, consideremos os casos em que r = $\frac{1}{2}$ e r = 3. A imagem abaixo ilustra bem esses dois comportamentos descritos acima.

Figura 5: Comportamento de p(z) para r = $\frac{1}{2}$ e r =3



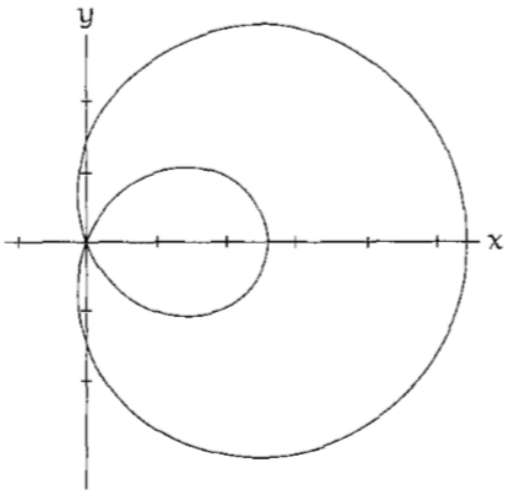
Fonte: Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2005, p. 232).

Observe que para valores de r muito pequenos o gráfico descrito por p(z) é uma curva próxima de 0 + 2i. Note também que a origem fica externa a essa curva. Enquanto que para valores cada vez maiores, a origem fica interna a curva.

Conclusão eu podemos tirar, é que para que a origem passe do interior da curva para o exterior da curva, é necessário que haja um z_0 tal que p(z_0) = 0.

Nesse exemplo específico, tem-se que $z_0 = \sqrt{2}$ e comportamento da curva é dada por:

Figura 6: Comportamento de p(z) para r = $\sqrt{2}$



Fonte: Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2005, p. 233)

Assim, a mesma construção argumentativa pode ser estendida para:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Pois, quando r assume um valor tão próximo de zero tem-se uma curva fechada em torno de a_0 e nesse caso a origem se encontra externa a ela. Porém, quando pega-se valores cada vez maiores de r, tem-se que o comportamento de p(z) dá n voltas em torna da origem.

Assim deve haver um certo r em que a origem pertence a curva, pois essa deve passar do interior da curva para o exterior da curva conforme r diminui. Portanto p(z) = 0 possui pelo menos uma raiz complexa, concluindo a ideia da demonstração do teorema.

Em posse do Teorema Fundamental da Álgebra, podemos mostrar que o polinômio p(x) em (1) pode ser fatorado da seguinte maneira:

p(x) = a$(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$

Onde os α_i, com $1 \leq i \leq n$, são n raízes do polinômios (é possível que haja raízes repetidas), e a é um número real qualquer.

Para mostrar esse fato, vamos voltar ao nosso p(x) em (1):

p(x) = $(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m) \cdot q_1(x)$

Sabemos que $q_1(x)$ não possui raízes reais, mas pelo Teorema Fundamental da Álgebra temos que $q_1(x)$ possui raízes complexas para polinômios de grau maior ou igual a 1. Desta formas podemos escrever p(x) como:

p(x) = a$(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)$, para alguma valor real a.

Note que p(x) tem grau n e para que haja uma igualdade de polinômios o polinômio a$(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)$ tem que ter também grau n. Logo, m = n.

3.4 Raiz complexa de um polinômio de coeficientes reais

Um resultado muito interessante sobre as raízes complexas de um polinômio p(x) de coeficientes reais é que se temos $\alpha_1 = a + bi$, com $b \neq 0$, uma raiz complexa de p(x), então, necessariamente, o conjugado de α_1 também será uma raiz de p(x).

Para demonstrar tal fato, vamos recorrer a algumas propriedades de números complexos abordadas no referente trabalho.

Vimos que se $z_1\ e\ z_2$ são números complexos, temos que o conjugado da soma é a soma dos conjugados e o conjugado do produto é o produto dos conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Em particular, temos:

$$a \cdot (\bar{z})^n = a \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \ldots \cdot \bar{z} = \overline{a \cdot z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z} = (\overline{a \cdot z})^n$$

Onde a é um número real.

Dessa forma, temos que $p(\bar{z}) = \overline{p(z)},\ \forall z \in \mathbb{C}$. Supondo que z = a + bi é uma raiz complexa, não real, de um polinômio de coeficientes constantes, temos que:

$$p(a + bi) = 0$$

Por outro lado,

$$p(a - bi) = p\left(\overline{a + bi}\right) = \overline{p(a + bi)} = \bar{0} = 0$$

Donde, temos que $a - bi$ também é raiz do polinômio.

Porém, poderia ocorrer o caso em que temos uma raiz complexa $a + bi$ e uma raiz complexa com multiplicidade 2 de $a - bi$. Todavia, sendo $a + bi$ e $a - bi$ duas raízes do polinômio p, teríamos que

$p(x) = (x - a + bi)(x - a - bi)q(x) =$

$= (x^2 – 2xa + a^2 + b^2)q(x)$

Note que o produto das formas fatoradas das duas raízes complexas fornece um polinômio de coeficientes reais. Então, se a segunda multiplicidade for raiz de q(x), pelo mesmo motivo exposto acima, teríamos que seu conjugado seria raiz também de q(x).

Esse incrível resultado nos permite assumir que se um polinômio possui um grau ímpar, necessariamente, temos, pelo menos, uma raiz real, pois as raízes complexas sempre veem aos pares.

Assim, por exemplo, se quisermos encontrar as raízes reais da função polinomial de quinto grau abaixo sabendo que uma de suas raízes é 2i, basta considerar o resultado acima.

$$p(x) = x^5 - x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 4$$

Como 2i é raiz do polinômio acima, temos que seu conjugado também é. Com isso, pode-se fatorar o polinômio da seguinte maneira:

$$p(x) = (x - 2i)(x + 2i)q(x)$$

$$p(x) = (x^2 + 4)q(x)$$

Onde q(x) é um polinômio de grau 3. Através da divisão de polinômios de p(x) por (x^2+4), podemos reduzir o grau do polinômio como foi demonstrado nos tópicos acima.

Fazendo a divisão, tem-se:

$$q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Podemos fatorar q(x) da seguinte maneira:

$$q(x) = x^2(x - 1) + (x - 1) =$$

$$= (x - 1)(x^2 + 1)$$

Como queremos encontrar as raízes reais do polinômio p(x), segue que x = 1 é a única raiz real. Pois x = i e x = –i são as outras duas.

Todavia, vale ressaltar que se o polinômio for de coeficientes complexos, o resultado exposto acima são seria necessariamente verdadeiro. Para isso, vejamos um contra exemplo:

Observe que $\alpha_1 = i$ é raiz do seguinte polinômio abaixo:

$$p(x) = ix^3 - 1$$

Pois,

$$p(i) = i \cdot i^3 - 1 =$$

$$= i \cdot (-i) - 1 =$$

$$= -i^2 - 1 =$$

$$-(-1) - 1 = 0$$

Porém, note que $\alpha_2 = -i$ não é raiz:

$$p(-i) = i \cdot (-i)^3 - 1 =$$

$$= i \cdot i - 1 =$$

$$= -1 - 1 = -2$$

Portanto, o resultado demonstrado é apenas válido para os polinômios complexos cujos coeficientes são reais.

Certamente toda essa teoria poderá auxiliar na resolução de equações polinomiais. Principalmente, se almejamos encontrar soluções reais. No próximo capítulo veremos algumas aplicações dos números complexos.

4 APLICAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Nesse capítulo, iremos abordar alguns problemas e aplicações dos números complexos e resolução de equações algébricas que vão do ensino médio até o ensino superior.

4.1 Problema da Ilha do Tesouro

O problema que iremos abordar nesse tópico foi extraído do livro *One Two Three ... Infinity*, que foi publicado em 1947 por George Gamow. Apesar de ser possível resolvê-lo utilizando apenas Geometria Analítica, veremos que a utilização dos Números Complexos torna sua resolução interessante.

Problema:

Um jovem aventureiro encontrou em um pergaminho de seu bisavô a localização de um tesouro escondido em uma ilha deserta. Após explicar como chegar a essa ilha, o pergaminho dava as seguintes instruções:

1) Na costa norte há um prado onde é possível encontrar um único carvalho e um único pinheiro. Lá também será possível ver uma forca onde no passado se enforcavam os traidores. Partindo da forca, caminhe até o carvalho contando os passos. No carvalho, vire à direita 90° graus e depois caminhe o mesmo número de passos. Coloque uma estaca nessa posição.

2) Retorne à forca e caminhe em direção ao pinheiro, contando os passos. No pinheiro, vire à esquerda 90º graus e depois caminhe o mesmo número de passos. Coloque outra estaca nessa posição.

3) O tesouro se encontra na metade do caminho entre as duas estacas.

Como as instruções estavam claras e precisas, o jovem aventureiro alugou um barco e partiu em busca do tesouro. Ele encontrou a ilha, o prado, o carvalho e o pinheiro, mas para sua tristeza, a forca tinha desaparecido. Muito tempo tinha se passado desde que o documento tinha sido escrito e o sol, a chuva e o venho tinham desintegrado a forca, não deixando nenhum vestígio de onde estivesse localizada. O jovem caiu em desespero e começou a cavar aleatoriamente o terreno da ilha, mas seus esforços foram em vão e ele partiu da ilha com as mãos vazias.

Uma história triste e mais triste ainda é o fato que o jovem aventureiro teria encontrado o tesouro se conhecesse um pouco de Matemática, mais especificamente se conhece o uso dos números complexos.

Solução: Ao simularmos o problema acima em um Geogebra colocando a posição da forca em diversas posições distintas, teríamos uma surpresa: a localização do tesoura estaria sempre no mesmo local.

Ou seja, o local em que o tesouro foi escondido, independe da posição original da forca e para mostrar isso vamos utilizar os conceitos de números complexos.

Inicialmente, vamos colocar as coordenadas da forca, do pinheiro e do carvalho em um plano de Argand-Gauss. Seja F = (a, b) as coordenadas da forca, P = (c, d) as coordenadas do pinheiro e C = (e, f) as coordenadas do carvalho e A e B os pontos ondo ficaram as estacas depois de seguido as instruções 1 e 2 do problema. Seja também T o ponto do Tesouro.

Devemos lembrar que um número complexo (a + bi) ao ser multiplicado por i se desloca no plano em 90° graus no sentido anti-horário, mantendo a mesma distância em relação à origem. Desloca 90° para a direita quando é multiplicado por -i.

Fazendo o uso da representação de vetores e pelas condições do problema, podemos encontrar as seguintes relações para as estacadas A e B:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PF} \cdot i \rightarrow A - P = (F - P) \cdot i \rightarrow A = P - Pi + Fi \qquad (1)$$

E

$$\overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CF}\right) \cdot (-i) \rightarrow B - C = (F - C) \cdot (-)i \rightarrow B = C + Ci - Fi \qquad (2)$$

Como o tesoura T fica na metade do caminho entre a estaca A e a estaca B, podemos calcular o ponto médio de A e B, fazendo a soma das igualdades (1) + (2) e dividindo por 2:

$$T = \frac{A + B}{2} = \frac{P - Pi + Fi + C + Ci - Fi}{2}$$

$$T = \frac{A + B}{2} = \frac{P - Pi + C + Ci}{2}$$

Observe que o tesouro T pode ser obtido utilizando apenas as coordenadas do pinheiro P e as coordenadas do carvalho. Então, bastava o jovem aventureiro fixar um determinando ponto na ilha e supor que ali fosse a forca e seguir as instruções do pergaminho que ele iria encontrar o tesouro. Pois a localização T independe das coordenadas da forca.

4.2 Teorema de Brahmagupta

O problema que se segue, apesar de abordar um conteúdo mais para teoria dos números, veremos que a utilização de números complexos torna o problema mais simples.

O problema é conhecido como o Teorema de Brahmagupta.

Problema: Dados dois inteiros m e n, que são somas de dois quadrados de números naturais, mostre que o produto também é uma soma de quadrados.

Solução: Seja a, b, c, d números naturais, temos que

$$m = a^2 + b^2$$

$$n = c^2 + d^2$$

Consideremos os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$.

Observe que

$$m = |z|^2$$

$$n = |w|^2$$

Assim, podemos fazer:

$$m \cdot n = |z|^2 \cdot |w|^2 = |z \cdot w|^2 = |(a + bi)(c + di)|^2 =$$

$$= |ac - bd + (ad + bc)i|^2 =$$

$$= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Portanto, fica demonstrado o problema proposto.

Vejamos um exemplo numérico:

$$(3^2 + 5^2)(2^2 + 4^2) = (6 - 20)^2 + (12 + 10)^2 = 14^2 + 22^2$$

4.3 Equações do 3º grau

Na introdução do trabalho, vimos que Cardano encontrou uma forma de resolver uma equação do terceiro grau. Porém, ficou faltando a demonstração de tal resultado.

Seja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0$ uma equação de grau 3. A ideia inicial é reduzirmos esse polinômio para um outro polinômio de grau 3, mas sem o termo do monômio de grau 2.

Para isso, façamos a seguinte substituição $x = y - m$

$$a(y-m)^3 + b(y-m)^2 + c(y-c) + d = 0$$

$$a(y^3 - 3y^2m + 3ym^2 - m^3) + b(y^2 - 2ym + m^2) + cy - cm + d = 0$$

$$ay^3 - 3ay^2m + 3aym^2 - am^3 + by^2 - 2bym + bm^2 + cy - cm + d = 0$$

$$ay^3 + (-3am + b)y^2 + (3am^2 - 2bm + c)y - am^3 + bm^2 - cm + d = 0 \text{ (I)}$$

Vamos supor que $-3am + b = 0$ para que o coeficiente de y^2 seja zero. Assim,

$$-3am + b = 0 \to m = \frac{b}{3a}$$

Assim, fazendo a substituição $m = \frac{b}{3a}$ em (I), temos:

$$ay^3 + 0y^2 + \left[3a\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - 2b\left(\frac{b}{3a}\right) + c\right]y - a\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - c\left(\frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$ay^3 + \left(3a\frac{b^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y - \frac{ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}\right) = 0$$

Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois lados por a, temos que

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

Fazendo

$$p = \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$q = \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right)$$

Temos a seguinte equação:

$$y^3 + py + q = 0$$

Para encontrar uma solução dessa equação, podemos fazer mais uma substituição

$$y = u + v$$

Substituindo, teremos que:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + u^2v + 3uv^2 + v^3 + up + vp + q = 0$$

$$(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

Fazendo $3uv + p = 0$, temos que

$$uv = -\frac{p}{3} \rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Consequentemente $u^3 + v^3 = -p$.

Vamos imaginar que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $x^2+bx+c = 0$. Seja S a soma das raízes e P, o produto. Temos, pelas explicações acima:

$$S = -p$$

$$P = -\frac{p^3}{27}$$

Pelas relações de Girad, temos que

$$S = -b$$

$$P = c$$

Assim, nossa equação será dada por:

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

A resolução de uma equação do segundo grau é dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo, teremos:

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$x = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Assim temos que u^3 e v^3 tem-se:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como y = u + v, temos que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Perceba que encontramos apenas uma solução de uma equação do terceiro grau. Porém, uma vez encontrada essa raiz, podemos encontrar as outras duas dividindo o polinômio do terceiro grau pelo binômio $(x - \propto)$ onde $\propto$ é a raiz encontrada pela fórmula de Cardano.

Outra forma de encontrar as três raízes é observar que:

$$y = u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v$$

Observe que para $y^3 + py + q = 0$ ao substituir y = u + v e fazer algumas suposições chegamos em:

$u^3 + v^3 = -p$ e $u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}$

Então, podemos encontrar outras combinações de números que quando elevado a 3 dá 1, já que $y = 1 \cdot u + 1 \cdot v$.

Assim, precisamos achar

$$x^3 = 1$$

Mas, note que

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Ou $x_1 = 1$ ou $x^2 + x + 1 = 0$.

Resolvendo essa equação do segundo grau, temos que

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

Observe que se $x_2 = z$, temos que $x_3 = \bar{z}$.

Então podemos escrever que as raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ são:

$$y_1 = u + u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_2 = zu + \bar{z}u = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_3 = \bar{z}u + zu = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

4.4 Cálculo Diferencial e Integral

Podemos encontrar uma aplicação dos números complexos no Cálculo Diferencial e Integral. Porém, antes de mostrar o problema, vamos observar algumas propriedades de integral relativas a funções pares e ímpares em um intervalo simétrico.

Função Par

Definição: Uma função f é considerada par quando f(–x) = f(x), qualquer que seja o valor de x Є D(f).

Exemplo: $f(x) = x^2$ é uma função par. De fato, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Função Ímpar

Definição: Uma função f é considerada ímpar quando f(–x) = – f(x), qualquer que seja o valor de x Є D(f).

Exemplo: $f(x) = x^3$ é considerada ímpar. De fato, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Seja uma função f definida nos números reais. Se f é uma função par, temos que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx\,, tal\ que\ (-a, a) \in \mathbb{R}$$

De fato, pois

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Fazendo a seguinte substituição

$$x = -u$$

$$dx = -du$$

Temos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Como f é par, temos por definição que

$$f(-u) = f(u)$$

Donde

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Segue ainda que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Observe que se fizermos mais uma substituição do tipo:

$$u = x$$

$$du = dx$$

Teremos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Logo

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

■

Seja uma função f definida nos números reais. Se f é uma função ímpar, temos que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, tal\ que\ (-a, a) \in$$

De fato, pois

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} -f(-x)dx = -\int_{-a}^{a} f(-x)dx$$

Façamos a seguinte substituição:

$$-x = u$$

$$-dx = du$$

Assim, se $x = -a$, temos $u = a$ e se $x = a$, segue que $u = -a$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{-a} f(u) - du = \int_{a}^{-a} f(u)du$$

Mudando os limites de integração da última integral, temos que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{-a}^{a} f(u)du$$

Dessa forma, se fizermos u = x, teríamos du = dx e. portanto:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

Assim, temos

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{a} f(u)du = 0 \rightarrow\ 2\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Portanto:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

■

Problema: Esse problema foi tirado da Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária (OBMU) de 2014: Calcule:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^{2014}}{1 - e^x} dx$$

Antes de irmos para solução, vamos analisar se a integral está bem definida para x = 0, pois note que

$$\frac{x^{2014}}{1 - e^x} = \frac{0^{2014}}{1 - e^0} = \frac{0}{0}$$

Observe que se calcularmos o limite dessa função para x tendendo a zero, teremos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{2014}}{1 - e^x}$$

Aplicando a regra de L'Hôpital uma vez, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2014\cdot x^{2013}}{-e^{x}}$$

Note que o problema da indeterminação desaparece, o que mostra que a função é contínua e está bem definida nesse intervalo de – 1 a 1.

Solução: Observe que os limites de integrações são simétricos. Dessa forma, seria interessante descobrir se a função é ímpar ou par para aplicar o que acabamos de demonstrar.

Porém, a função acima não é possível afirmar se é par ou ímpar.

Para solucionar esse problema, iremos fazer a seguinte substituição:

$x = 2i\theta$, onde $i = \sqrt{-1}$

Quando $x = -1$, temos $\theta = -\frac{1}{2i}$ e $x = 1$, temos $\theta = \frac{1}{2i}$

A ideia de se utilizar essa substituição é o fato de querermos utilizar a relação de Euler dos números complexos. Com efeito, temos que

$$dx = 2id\theta$$

Substituindo as variáveis, temos que:

$$\int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}}\frac{(2i\theta)^{2014}}{1-e^{2i\theta}}(2i\cdot d\theta)$$

Donde,

$$\int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}}\frac{(2i\theta)^{2014}}{1-e^{2i\theta}}(2i\cdot d\theta)=\int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}}\frac{2^{2015}\cdot i^{2015}\cdot\theta^{2014}}{1-e^{2i\theta}}d\theta$$

Temos que 2015 dividido por 4 deixa resto 3, portanto

$$i^{2015}=i^{3}=-i$$

Como $2^{2015}\cdot(-i)$ é uma constante, segue:

$$\int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}}\frac{2^{2015}\cdot i^{2015}\cdot\theta^{2014}}{1-e^{2i\theta}}d\theta=-i\cdot 2^{2015}\int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}}\frac{\theta^{2014}}{1-e^{2i\theta}}d\theta$$

Observe que:

$$e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2$$

Pela relação de Euler, temos

$$-i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{1 - e^{2i\theta}} d\theta = -i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{1 - (e^{i\theta})^2} d\theta =$$

$$= -i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{1 - (cos\theta + isen\theta)^2} d\theta =$$

$$= -i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{1 - (cos^2\theta + 2isen\theta cos\theta - sen^2\theta)} d\theta =$$

Pela relação fundamental da trigonometria, temos que $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$

Assim,

$$-i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{1 - (1 - sen^2\theta + 2isen\theta cos\theta - sen^2\theta)} d\theta =$$

$$= -i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{1 - (1 - 2sen^2\theta + 2isen\theta cos\theta)} d\theta =$$

$$= -i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{1 - 1 + 2sen^2\theta - 2isen\theta cos\theta)} d\theta =$$

$$= -i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{2sen\theta(sen\theta - icos\theta)} d\theta$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(sen\theta + icos\theta)$, temos:

$$= -i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{2sen\theta(sen\theta - icos\theta)} \cdot \frac{(sen\theta + icos\theta)}{(sen\theta + icos\theta)} d\theta$$

Segue:

$$-i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot sen\theta + \theta^{2014} \cdot icos\theta}{2sen\theta(sen^2\theta + cos^2\theta)} d\theta$$

Novamente, pela relação fundamental da trigonometria que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

$$-i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot sen\theta + \theta^{2014} \cdot icos\theta}{2sen\theta} d\theta$$

Logo,

$$-i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} (\frac{\theta^{2014} \cdot sen\theta}{2sen\theta} + \frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{2sen\theta}) d\theta =$$

$$-i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot sen\theta}{2sen\theta} d\theta - i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{2sen\theta} d\theta$$

$$-i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014}}{2} d\theta - i \cdot 2^{2015} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{2sen\theta} d\theta =$$

$$= -i \cdot 2^{2014} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \theta^{2014} d\theta - i \cdot 2^{2014} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{sen\theta} d\theta \qquad (I)$$

Vamos resolver cada uma das integrais em (I). Primeiro vamos resolver:

$$= -i \cdot 2^{2014} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \theta^{2014} d\theta$$

Como

$$x = 2i\theta \rightarrow \quad dx = 2id\theta$$

Temos que

$$\theta = \frac{x}{2i}$$

Substituindo, segue

$$-i \cdot 2^{2014} \int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{2i}\right)^{2014} \frac{dx}{2i} = -i \cdot 2^{2014} \int_{-1}^{1} \frac{x^{2014}}{2^{2014} i^{2}} \frac{dx}{2i} =$$

Logo,

$$\frac{-i \cdot 2^{2014}}{-i \cdot 2^{2015}} \int_{-1}^{1} x^{2014} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^{2014} dx = \frac{1^{2015}}{2 \cdot 2015} - \frac{(-1)^{2015}}{2 \cdot 2015}$$

Portanto,

$$= -i \cdot 2^{2014} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \theta^{2014} d\theta = \frac{1}{2015}$$

Agora devemos resolver a segunda integral de (I):

$$-i \cdot 2^{2014} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{sen\theta} d\theta$$

Aqui utilizaremos a ideia de integral das funções ímpares em intervalos simétricos.

Observe que se

$$f(\theta) = \frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{sen\theta}$$

Temos que f é ímpar, pois

$$f(-\theta) = \frac{(-\theta)^{2014} \cdot icos(-\theta)}{sen(-\theta)} = -\frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{sen\theta} = -f(\theta)$$

Concluindo que a função ímpar, por definição.

Portanto, pelo resultado demonstrado acima, temos que

$$-i \cdot 2^{2014} \int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}} \frac{\theta^{2014} \cdot icos\theta}{sen\theta} d\theta = -i \cdot 2^{2014} \cdot 0 = 0$$

Assim, temos que

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx=-i\cdot 2^{2014}\int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}}\theta^{2014}d\theta-i\cdot 2^{2014}\int_{-\frac{1}{2i}}^{\frac{1}{2i}}\frac{\theta^{2014}\cdot icos\theta}{sen\theta}d\theta$$

E

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx=\frac{1}{2015}+0=\frac{1}{2015}$$

Observe que a substituição $x=2i\theta$ fez com que se chegasse na forma algébrica do tipo $a+bi$, com b = 0.

Dessa forma, tem-se que a solução é apenas a parte real.

Outra solução: Outra forma de se resolver esse problema sem utilizar a ideia de números complexos seria considerar a seguinte substituição

$$x=-u$$

$$dx=-du$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx=-\int_{1}^{-1}\frac{(-u)^{2014}}{1-e^{-u}}du$$

Note que

$$-\int_{1}^{-1}\frac{(-u)^{2014}}{1-e^{-u}}du=-\int_{1}^{-1}\frac{u^{2014}}{1-\frac{1}{e^{u}}}du=-\int_{1}^{-1}\frac{u^{2014}}{\frac{e^{u}-1}{e^{u}}}du=$$

$$=-\int_{1}^{-1}\frac{e^{u}u^{2014}}{e^{u}-1}du=\int_{1}^{-1}\frac{e^{u}u^{2014}}{1-e^{u}}du$$

Como x = – u e dx = –du, segue que

$$\int_{1}^{-1}\frac{e^{u}u^{2014}}{1-e^{u}}du=-\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}(-x)^{2014}}{1-e^{-x}}dx=-\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}x^{2014}}{1-e^{-x}}dx$$

Como

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx=-\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}x^{2014}}{1-e^{-x}}dx$$

Logo,

$$2\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx-\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}x^{2014}}{1-e^{-x}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}-\frac{e^{-x}x^{2014}}{1-e^{-x}}\right)dx=\int_{-1}^{1}x^{2014}\cdot\left(\frac{1}{1-e^{x}}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)dx$$

Note que

$$\frac{1}{1-e^{x}}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1-e^{-x}-e^{-x}\cdot(1-e^{x})}{1-e^{-x}-e^{-x}+1}=$$

$$=\frac{1-2e^{-x}+1}{1-2e^{-x}+1}=1$$

Portanto,

$$2\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx=\int_{-1}^{1}x^{2014}dx=\frac{1}{2015}+\frac{1}{2015}=\frac{2}{2015}$$

Donde,

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2014}}{1-e^{x}}dx=\frac{1}{2015}$$

4.5 Fórmula Integral de Cauchy

Problema: Utilize a Fórmula da Integral de Cauchy para mostrar que:

$$I)\ \int_{0}^{2\pi}e^{k\cos t}\cdot sen(ksent)dt=0$$

$$II)\ \int_{0}^{2\pi}e^{k\cos t}\cdot cos(ksent)dt=2\pi$$

Apesar de as integrais acima estarem definidas para os números reais, podemos utilizar o Conjunto dos Números Complexos para solucioná-las.

Solução: Inicialmente, vamos demonstrar que:

$$\int_{C}\frac{e^{kz}}{z}dz=2\pi i \qquad (1)$$

Onde k é uma constante real e $C(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

A integral acima é facilmente resolvida utilizando a Fórmula Integral de Cauchy, que diz o seguinte:

Suponha que tenhamos um caminho C simples e fechado, orientado positivamente e a função f analítica ao longo de C e na região interior de C. Então, dado qualquer ponto z_0 no interior de C, temos que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \qquad z_0 \in R.$$

Para utilizar a Fórmula Integral de Cauchy em (1), note que podemos escrever da seguinte forma:

$$\int_C \frac{e^{kz}}{z} dz = \int_C \frac{e^{kz}}{z - 0} dz$$

Assim, temos que $f(z) = e^{kz}$ é analítica ao longo de C e no interior e $z_0 = 0$. Pela Fórmula Integral de Cauchy, segue que:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{kz}}{z - 0} dz$$

Logo,

$$\int_C \frac{e^{kz}}{z - 0} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot e^{k \cdot 0} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

Agora que já temos o resultado da integral acima, vamos resolvê-la usando a definição de integral complexa.

$$2\pi i \int_C \frac{e^{kz}}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ke^{it}}}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{ke^{it}} dt =$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{k(cost + isent)} dt = i \int_0^{2\pi} e^{kcost + iksent} dt =$$

$$= i\int_{0}^{2\pi} e^{kcost}e^{iksent}dt = i\int_{0}^{2\pi} e^{kcost}[\cos(ksent) + isen(ksent)]dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} [e^{kcost}\cos(ksent) + ie^{kcost}sen(ksent)]dt =$$

$$= i\int_{0}^{2\pi} e^{kcost}\cos(ksent)dt - \int_{0}^{2\pi} e^{kcost}sen(ksent)dt =$$

$$-\int_{0}^{2\pi} e^{kcost}sen(ksent)dt + i\int_{0}^{2\pi} e^{kcost}\cos(ksent)dt = 2\pi i = 0 + 2\pi i$$

Temos, portanto que

$$\int_{0}^{2\pi} e^{k\cos t} \cdot sen(ksent)dt = 0$$

$$\int_{0}^{2\pi} e^{k\cos t} \cdot cos(ksent)dt = 2\pi$$

■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do que foi exposto, pode-se concluir que a abordagem dos Números Complexos e Equações Algébricas são de grande importância para o ensino e aprendizagem na Educação Básica e Superior.

Isso porque, além de complementar o entendimento dos conjuntos numéricos ampliando sua esfera de atuação, também é uma ótima ferramenta para resolver problemas concretos como foi exposto no último capítulo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Salomão Pereira de. **Números complexos para o ensino médio:** uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) - Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Paraíba, 2013.

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy. **Matemática uma nova abordagem.** São Paulo: FTD, 2001. v. 3.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. volume único.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 244 p.

CARMO, M; MORGADO, A.; WAGNER, E.; CARVALHO, J. **Trigonometria números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios e equações. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 6.

IEZZI, Gelson et al. **Números complexos, polinômios e equações algébricas**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 6.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. **A matemática do ensino médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do professor de matemática, v. 3).

LOUZANSKY, Edward; ROUSSEAU, Cecil. **Winning solution**. Washington: National Science Teacher’s Association. 2009.

SOARES, Márcio. **Cálculo em uma variável complexa**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.