UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LEONARDO GONDIM DE OLIVEIRA

EXPLORANDO OS FRACTAIS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS HABILIDADES RELACIONADAS AO ENSINO DE ÁLGEBRA NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

FORTALEZA
2022

LEONARDO GONDIM DE OLIVEIRA

EXPLORANDO OS FRACTAIS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS HABILIDADES RELACIONADAS AO ENSINO DE ÁLGEBRA NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48e Oliveira, Leonardo Gondim de.
Explorando os fractais para o desenvolvimento das habilidades relacionadas ao ensino de álgebra no 7º ano do ensino fundamental. / Leonardo Gondim de Oliveira. – 2022.
67 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Álgebra-Estudo e ensino. 2. Fractais. 3. Pensamento algébrico. I. Título.

CDD 510

LEONARDO GONDIM DE OLIVEIRA

EXPLORANDO OS FRACTAIS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS HABILIDADES RELACIONADAS AO ENSINO DE ÁLGEBRA NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 10/06/2022.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)

Dedico este trabalho a Deus que me capacitou, fortaleceu e sustentou.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que permitiu tal realização e a todos que de alguma maneira contribuíram para realização deste sonho.

Em especial a minha esposa, Jemima Cássia dos Anjos Vasconcelos, pelo incentivo e compreensão. Aos professores pelo ensino e dedicação.

Aos colegas de turma pela disposição em ajudar, apoio e incentivo.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcelo Ferreira Melo pela disposição em orientar-me e pela prontidão em ajudar.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A geometria fractal não é apenas um capítulo da matemática, mas um capítulo que ajuda todo homem a ver o mesmo mundo de maneira diferente.”

(Benoît Mandelbrot)

RESUMO

Ante as dificuldades de aprendizagem do conteúdo e da compreensão de conceitos matemáticos e mais especificamente das dificuldades de compreensão da álgebra no sétimo ano do ensino fundamental, buscamos o desenvolvimento de atividades que possibilitem a introdução e aprofundamento de conceitos essenciais a aprendizagem da álgebra e ao desenvolvimento do pensamento algébrico de forma contextualizada, privilegiando os processos de investigação, resolução de problemas e modelagem. Encontramos na beleza e nas características dos fractais, um suporte para o desenvolvimento dessas atividades. Assim, a finalidade deste é sugerir atividades de investigação e resolução de problemas com base na exploração dos fractais Triminó, Curva de Koch e Árvore pitagórica que possibilitem a introdução de conceitos e o desenvolvimento de habilidades relacionadas à unidade temática álgebra em consonância com a BNCC.

Palavras-chave: álgebra-estudo e ensino; fractais; pensamento algébrico.

ABSTRACT

Faced with the difficulties of learning the content and understanding of mathematical concepts and more specifically the difficulties of understanding algebra in the seventh year of elementary school, we seek to develop activities that allow the introduction and deepening of essential concepts for learning algebra and for the development of algebraic thinking in a contextualized way, privileging the processes of investigation, problem solving and modeling. We found in the beauty and characteristics of fractals a support for the development of these activities. Thus, the purpose of this is to suggest investigation and problem solving activities based on the exploration of the Triminó, Koch Curve and Pythagorean Tree fractals that allow the introduction of concepts and the development of skills related to the thematic unit algebra in line with the BNCC.

Keywords: algebra-study and teaching; fractals; algebraic thinking.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diferentes interpretações da álgebra escolar e diferentes funções das letras........ 22

Figura 2 – Esquema das características do pensamento algébrico........ 29

Figura 3 – Exemplo de situação problema onde é possível a manifestação do pensamento algébrico........ 31

Figura 4 – Soma dos k primeiros naturais ímpares consecutivos........ 32

Figura 5 – Exemplo de situação problema onde é possível a manifestação do pensamento algébrico........ 32

Figura 6 – Curva de Koch........ 37

Figura 7 – Curva de Koch depois de várias iterações........ 37

Figura 8 – Três primeiras iterações do fractal Triminó........ 38

Figura 9 – Primeiros níveis do fractal Árvore Pitagórica........ 39

Figura 10 – Quarto nível do fractal Triminó........ 42

Figura 11 – Três primeiros níveis da Árvore Pitagórica........ 46

Figura 12 – Construção do Conjunto de Cantor........ 48

Figura13 – Construção floco de neve de Koch........ 52

Figura14 – Construção do tetraedro de Sierpinski........ 54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Conteúdos, objetos de conhecimento e dimensão da álgebra de acordo com as concepções de Usiskin no 7º ano do ensino fundamental.......................... 23

Tabela 2 – Objetos de conhecimento por ano.. 32

Tabela 3 – Quantidade de quadrados por nível de construção do fractal Triminó.......... 42

Tabela 4 – Auxílio para análise dos termos da sequência (Triminó).............................. 43

Tabela 5 – Auxílio para análise dos termos da sequência (Curva de Koch)................... 44

Tabela 6 – Correspondência entre o nível de construção e a quantidade de segmentos na forma de potência... 45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	14
2	**A ÁLGEBRA NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**	16
2.1	**A Base Nacional Comum Curricular**	16
2.1.1	***A área de matemática no ensino fundamental***	18
2.1.2	***A álgebra nos anos finais do ensino fundamental***	20
2.2	**Nos livros didáticos**	21
2.2.1	***As concepções de álgebra de Usiskin***	21
2.2.2	***Observando os livros didáticos***	22
2.2.3	***Focos do ensino aprendizagem de álgebra***	23
2.2.3.1	*Padrões e regularidades*	24
2.2.3.2	*Incógnitas e variáveis*	24
2.2.3.3	*Equações*	25
3	**A EXPLORAÇÃO DOS PADRÕES E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO**	27
3.1	**O pensamento algébrico**	27
3.2	**Pensamento algébrico e exploração de padrões**	30
4	**FRACTAIS E O ENSINO DE ÁLGEBRA**	35
4.1	**Fractais: ideia e construção**	35
4.1.1	***Ideia***	35
4.1.2	***Construção***	36
4.1.2.1	*Curva de Koch*	36
4.1.2.2	*Fractal Triminó*	38
4.1.2.3	*Árvore Pitagórica*	38
4.2	**Fractais para ensinar álgebra**	39
4.3	**Explorando fractais**	40
4.3.1	***Explorando o fractal Triminó***	41
4.3.2	***Explorando o fractal Curva de Koch***	44
4.3.3	***Explorando o fractal Árvore Pitagórica***	45
5	**FRACTAIS PARA ALÉM DO 7º ANO**	48
5.1	**A expansão ternária do conjunto de Cantor**	48
5.2	**O comprimento da Curva de Koch**	52

5.3	**Área delimitada pelo floco de Koch**...	53
5.4	**O volume do Tetraedro de Sierpinski**..	54
5.5	**Explorando um fractal circular**..	56
5.6	**Dimensão fractal**..	58
6	**CONCLUSÃO**	60
	REFERÊNCIAS	61
	ANEXO A – EXPLORANDO O FRACTAL TRIMINÓ (FRENTE)	63
	ANEXO B – EXPLORANDO O FRACTAL TRIMINÓ (VERSO)	64
	ANEXO C – EXPLORANDO A CURVA DE KOCH (FRENTE)	65
	ANEXO D – EXPLORANDO A CURVA DE KOCH (VERSO)	66
	ANEXO E – EXPLORANDO A ÁRVORE PITAGÓRICA	67

1 INTRODUÇÃO

A exploração dos objetos fractais nos permite, de forma contextualizada, trabalhar diversos objetos de conhecimento e habilidades relacionadas à unidade temática álgebra no ensino fundamental, principalmente pela análise de padrões e regularidades presente nos fractais, podemos trabalhar sequências, escrever fórmulas e fazer generalizações.

Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos ao iniciarem o estudo da álgebra no 7º ano do ensino fundamental, faz-se necessário uma abordagem prática e contextualizada, através da investigação e da resolução de problemas para que os discentes percebam a álgebra como um conhecimento significativo e facilitador e não como um conjunto de regras e procedimentos sem aplicabilidade e significado.

Visando o desenvolvimento das competências específicas de matemática para o ensino fundamental e das habilidades relacionadas à unidade temática álgebra no ensino fundamental propomos nesse trabalho, atividades de investigação e resolução de problemas que possibilitam introduzir e discutir conceitos essenciais ao desenvolvimento do pensamento algébrico e a aprendizagem da álgebra, de forma contextualizada.

Para o desenvolvimento de algumas atividades, propomos o uso de malhas quadriculadas e triangulares, no entanto, de acordo com o material disponível, o uso de material manipulativo pode ser uma ótima alternativa para construção de alguns fractais. Adiantamos que as atividades propostas podem ser ampliadas, adaptadas e estendidas à exploração de outros fractais.

Diante da necessidade de uma fundamentação teórica, iniciamos o trabalho trazendo uma visão geral da álgebra no ensino fundamental, especialmente no sétimo ano. Para tanto, buscamos apresentar um panorama da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma vez que todo material educacional para educação básica produzido no país deve estar alinhado a esse documento. Além disso, fizemos a análise de vários livros didáticos utilizados nessa etapa de ensino, pontuando os principais conteúdos e os focos de aprendizagem.

Na sequência do trabalho tratamos sobre o pensamento algébrico, cujo desenvolvimento é a finalidade da unidade temática álgebra no ensino fundamental. Apesar de não oferecermos uma definição cabal, buscamos caracterizá-lo através da visão de alguns pesquisadores do ensino de álgebra. Nesta parte da dissertação discutimos também a importância da exploração de padrões e regularidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No capítulo 4, após expormos a ideia e o modo de construção dos fractais explorados neste, defendemos o seu uso no ensino de álgebra e apresentamos algumas atividades para exploração dos fractais Triminó, Curva de Koch e Árvore pitagórica, além de tecermos comentários de cunho didático-pedagógico alinhadas a nossas leituras e experiência docente.

Por fim, apresentaremos situações que nos possibilitarão visualizar a diversidade de conteúdos matemáticos envolvida na exploração dos fractais.

Buscando o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito investigativo e a percepção da matemática como um conhecimento que possibilita compreender e atuar no mundo é que propomos o presente trabalho, na expectativa de que o mesmo contribua para a aprendizagem dos alunos e consequentemente para melhoria do ensino.

2 A ÁLGEBRA NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nesse capítulo traremos uma visão geral sobre a unidade temática álgebra no 7º ano do ensino fundamental. Fazendo uma análise dessa etapa do processo de ensino aprendizagem da matemática de acordo com o observado na BNCC, nos livros didáticos, nos principais tópicos de aprendizagem e nas dificuldades observadas nos educandos.

2.1 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento norteador dos currículos dos sistemas e redes de ensino, público ou particular, em todo o país e também das propostas pedagógicas das instituições escolares. Definindo um conjunto de conhecimentos, competências e habilidades essenciais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes durante a educação básica. O objetivo principal é a isonomia, a redução das desigualdades no ensino nacional, pois busca garantir que os estudantes, independentemente da região onde moram tenham as mesmas oportunidades de aprendizagem.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 8)

> Nesse sentido, espera-se que a BNCC ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental.

Além de buscar a redução das desigualdades nas oportunidades de aprendizagem, o documento busca assegurar o desenvolvimento de conhecimentos, competências e habilidades essenciais definidas para cada etapa da escolaridade básica; nortear a construção de currículos das redes de ensino, orientar a elaboração das propostas pedagógicas das unidades escolares, orientar as matrizes de referência das avaliações externas e "[...] contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação." (BRASIL, 2017, p. 8).

A BNCC estabelece um conjunto de aprendizagens essenciais que devem ser assegurados. Essas, devem afluir para garantir aos alunos o desenvolvimento de competências gerais que “[...] inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da LDB. (BRASIL, 2017, p. 8). Mas, antes de vislumbrarmos essas competências, faz-se necessário entender o que é competência e segundo a BNCC “[..] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.” (BRASIL, 2017, p. 8).

Observemos as competências gerais definidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017, p. 9-10).

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
>
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
>
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
>
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
>
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
>
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
>
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
>
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

2.1.1 A área de matemática no Ensino Fundamental.

A BNCC enfatiza que a matemática é essencial para todos os estudantes da Educação Básica tanto pela imensa aplicabilidade como pelas suas potencialidades de formar cidadãos críticos e cônscios de seu papel na sociedade. Para tanto, a matemática não de ater-se somente à contagem, medições de objetos, grandezas e técnicas de cálculos, mas também ao estudo de fenômenos de caráter aleatório.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 265).

> A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.

A Base Nacional Comum Curricular reconhece a matemática como uma ciência hipotético-dedutiva, isto é, construída sobre um sistema de axiomas e postulados que servem como base para demonstrações. No entanto, destaca a importância do papel heurístico, sendo a experimentação de fundamental importância para construção do conhecimento matemático.

A articulação dos diversos campos da matemática é tida como um meio para garantir que os alunos sejam capazes de relacionar situações vivenciadas no mundo real a representações que por sua vez devem ser associadas a uma atividade matemática, fazendo induções e conjecturas.

Observemos que a matemática deve ser trabalhada de forma ampla e utilizando as mais variadas situações, hipotéticas ou não, na expectativa que os educandos "[...] desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações.” (BRASIL, 2017, p. 265).

O documento destaca o comprometimento que essa área no ensino fundamental deve com o desenvolvimento do letramento matemático que, ele o define “[...] como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2017, p. 266).

A BNCC apresenta a resolução de problemas, a investigação, o desenvolvimento de projetos e a modelagem matemática simultaneamente como objeto e estratégia de aprendizagem ao longo de toda essa etapa de ensino.

Segundo o documento (BRASIL, 2017, p. 266)

> Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

A seguir estão listadas as competências específicas para esta área no ensino fundamental definidas pela BNCC (BRASIL, 2017, p. 267).

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
>
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
>
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
>
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
>
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
>
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

2.1.2 A álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental.

A álgebra nos anos finais do ensino fundamental, deve ser além da mera resolução de equações ou do cálculo do valor numérico de expressões algébricas. A álgebra, como unidade temática na BNCC, objetiva o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para tanto, a BNCC sugere:

> Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 270).

De acordo o a BNCC, "[...] essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações." (BRASIL, 2017, p. 270).

Nos anos finais do ensino fundamental os estudos relacionados a essa unidade temática devem retomar, aprofundar e ampliar o que foi trabalhado na etapa anterior.

> Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. (BRASIL, 2017, p. 270-271).

Outro aspecto da BNCC em relação à Álgebra e também as demais unidades temáticas (Números, Geometria e Probabilidade e estatística) é o desenvolvimento do pensamento computacional, pois os alunos necessitam traduzir uma situação em outras linguagens.

Para o desenvolvimento desse pensamento computacional, os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de modelagem, também o uso de algoritmos, fluxogramas e atividades que busquem a identificação de padrões para o estabelecimento de generalizações durantes as aulas são essenciais.

2.2 Nos livros didáticos

Antes de tratarmos diretamente sobre a unidade temática álgebra nos livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental é importante entendermos as concepções de álgebra de Usiskin, uma vez que esta concepção está presente e é adotada pela grande maioria, senão todos, os livros didáticos de matemática do nosso país.

2.2.1 As concepções de álgebra de Usiskin

Com uma abordagem do conhecimento algébrico com vistas ao uso da variável e suas funções na educação básica, as concepções de Usiskin, popularizados pelo livro As ideias da álgebra, organizado por Arthur F. Coxford e Albert P. Shulte (1995), apresentam o conhecimento algébrico, do ponto de vista do uso de variáveis, classificado em quatro concepções:

a) Álgebra como aritmética generalizada: adota-se a Álgebra numa perspectiva que tem como principal característica a generalização de propriedades aritméticas. Assim, utiliza-se a linguagem algébrica para representar propriedades dos números.

b) Álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas: esta engloba a compreensão de procedimentos adotados na resolução de problemas ligados a álgebra. Nessa visão, cuja ênfase é a resolução de problemas, as letras simbolizam incógnitas.

c) Álgebra como estudo das relações entre grandezas: Nessa concepção “[...] as variáveis variam.” (USISKIN, 1995, p. 15). Aqui é explorada a relação entre grandezas e as ideias de variável dependente e independente.

d) Álgebra como estudo das estruturas: nessa concepção, trazendo para o contexto da educação básica, temos a equivalência entre expressões e a simplificação como foco.

As concepções propostas por Zalman Usiskin são facilmente percebidas nos livros didáticos usados no Brasil e na BNCC, uma vez que a BNCC é a base para formulação do material didático.

Observemos o esquema a seguir:

Figura 1 – Diferentes interpretações da Álgebra escolar e diferentes funções das letras.

Fonte: Brasil (1998, p. 116)

2.2.2 Observando os livros didáticos.

Apesar de nos anos anteriores vivenciarem situações de aprendizagem onde o pensamento algébrico estava implícito, os alunos não trabalharam diretamente com as ideias e a linguagem algébrica. Nessa etapa o aluno tem contato direto com a álgebra e a unidade do livro didático dedicada a esse estudo é o primeiro trabalho sistematizado com as ideias e a linguagem algébrica.

No geral, os livros didáticos utilizados no 7º ano do ensino fundamental, ao tratarem da unidade temática Álgebra, abordam os conteúdos: sequências, expressões algébricas e resolução de equações. Na sequência, apresentamos uma tabela relacionando cada um desses conteúdos, com objetos de conhecimento, habilidades e dimensão da Álgebra de acordo com as concepções de Usiskin.

Tabela 1 - Conteúdos, objetos de conhecimento, habilidades e dimensão da Álgebra de acordo com as concepções de Usiskin no 7º ano do EF.

CONTEÚDO	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE	DIMENSÃO DA ÁLGEBRA
Sequências	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.	Álgebra como aritmética generalizada.
Expressões algébricas	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.	Álgebra como estudo das estruturas.
Resolução de equações	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.	Álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas.

Fonte: elaborada pelo autor.

2.2.3 Focos do ensino aprendizagem de álgebra

Ao analisarmos a BNCC, no que diz respeito a unidade temática Álgebra no 7º ano ensino fundamental, percebemos que as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos giram em torno dos seguintes tópicos: padrões e regularidades, incógnitas e variáveis, e equações.

Consequentemente, o processo de ensino aprendizagem deve focar-se nesses tópicos. A seguir, trataremos da relevância de cada um desses tópicos para a aprendizagem da álgebra e para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.2.3.1 Padrões e regularidades

O estudo de padrões e regularidades é defendido pela BNCC como dimensão imprescindível ao trabalho com a álgebra desde os anos iniciais do ensino fundamental, pois é necessário ao desenvolvimento do pensamento algébrico. De acordo com esse documento, "[...] é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas." (BNCC, 2017, p. 270). Além disso, nos anos finais os alunos devem investigar regularidades.

Estudar padrões e regularidades é uma atividade matemática rica e abrangente. Por exemplo: pode-se investigar relações entre quantidades (variáveis) num padrão, generalizar padrões através do uso variáveis, compreender o conceito de função.

Nos livros didáticos, percebemos vários exercícios e problemas que partem da observação e análise de padrões em sequências figurais ou numéricas e buscam estabelecer uma generalização de uma propriedade, a compreensão do conceito de variável, a conexão entre a linguagem materna e a linguagem algébrica, a compreensão do conceito de recursividade.

2.2.3.2 Incógnitas e variáveis.

Umas das grandes dificuldades encontradas pelos alunos ao estudar álgebra é o aparecimento das letras dentro de um novo contexto, trazendo um novo significado e desempenhando um novo papel: o de incógnita ou variável. Como incógnita, a letra assume um valor específico mas desconhecido. Como variável, a letra é vista como uma representação de um conjunto de valores.

Compreender esses conceitos é essencial para a aprendizagem da álgebra. É a primeira habilidade relacionada a unidade temática álgebra no 7º ano do ensino fundamental.

Nos anos finais do ensino fundamental, é necessário que "[...] os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação." (BNCC, p. 271).

A correta compreensão dos conceitos de variável e incógnita é crucial para a aprendizagem da álgebra, tanto no aspecto estrutural como na resolução de problemas.

2.2.3.3 Equações

As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2017, p. 271)

As equações devem ser usadas como ferramentas para resolver problemas. No 7º ano do ensino fundamental os alunos começam a trabalhar com equação, especificamente as do 1º grau, e a sua resolução por meio das propriedades da igualdade. “O conceito de equação exige a compreensão de vários aspectos tais como o significado do sinal de igual e do número desconhecido.” (BRANCO, 2008, p.21)

Para compreender o conceito de equação o aluno deve compreender o conceito de incógnita e o significado de equivalência no sinal de igual. Equivalência entre os lados esquerdo e direito da equação, para que assim possa usar as propriedades da igualdade em busca da solução da equação.

> O desenvolvimento de um trabalho com os alunos que promova a inclusão de várias operações em ambos os lados do sinal de igual constitui uma base para uma futura construção do significado de equação algébrica com múltiplas operações em ambos os membros. (BRANCO, 2008, p.21)

Apesar de reforçarmos a resolução de equações por meio das propriedades da igualdade é importante valorizarmos as diversas estratégias que muitas vezes são apresentadas pelos alunos e sugerirmos outras abordagens.

Segundo BRANCO (2008, p.22)

> Kieran (2006) refere três abordagens à resolução de equações, no início do estudo da Álgebra: (i) abordagem intuitiva, que inclui a estratégia relativa às propriedades dos números, a estratégia de contagem e a estratégia cover-up; (ii) abordagem de substituição por tentativa-erro, e (iii) abordagem formal.

Na abordagem por meio da contagem ou por meio das propriedades dos números, os alunos usam o conhecimento que têm sobre operações e usam contagens para descobrir o valor desconhecido. Na estratégia cover-up, os alunos resolvem a equação “andando para trás”. Na abordagem de substituição por tentativa-erro consiste na substituição da incógnita por diversos valores, procurando o que torna a expressão uma proposição verdadeira. Já na abordagem formal os alunos podem resolver as equações por meio da transposição ou realização da mesma operação em ambos os membros da equação.

O modelo da balança, baseado na estratégia de realização da mesma operação em ambos os membros da equação e nas propriedades da igualdade, é comum nos livros didáticos e didaticamente viável, pois é um modelo que usa uma ideia concreta diante de uma expressão simbólica.

3 A EXPLORAÇÃO DOS PADRÕES E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Neste capítulo concentramos nossos esforços em busca de uma compreensão sobre o que é pensamento algébrico, apesar de não podermos defini-lo, veremos que é possível caracterizá-lo.

Também, em busca do cumprimento do objetivo deste trabalho, reforçaremos a importância da exploração de padrões e regularidades para o desenvolvimento desse pensamento e para uma aprendizagem significativa da álgebra.

3.1 O pensamento algébrico

Para muitos, a finalidade do estudo da álgebra no ensino fundamental é a resolução de equações e a operacionalização de termos algébricos. Isso se deve ao fato da experiência escolar e do ensino de álgebra estarem focados na resolução de equações, nas operações com monômios e polinômios, onde a álgebra era apresentada de forma descontextualizada.

Lins e Gimenes complementam: “[...] a atividade algébrica é descrita como “fazer ou usar álgebra”. A versão mais banal dessa posição é a que descreve a atividade algébrica como “calcular com letras”.” (LINS & GIMENES, 1997, p.90).

De fato, ao tratar a álgebra de forma mecânica e desvinculada de significados, o aluno depara-se com um conjunto de símbolos, muitas vezes sem sentido, e operações sem nexo, tornando a álgebra algo de difícil compreensão e aparentemente desnecessária.

Vemos então a necessidade de trabalhar a álgebra de forma significativa, e isso só será possível se o ensino de matemática, no que concerne à unidade temática álgebra, focar-se no desenvolvimento do pensamento algébrico. Araújo (2008) corrobora com essa ideia quando afirma:

> Entendemos que o pensamento algébrico está presente não apenas quando se trabalha na álgebra formal, mas em diversos campos do conhecimento manifestados por diversas linguagens, como a aritmética, a geométrica ou mesmo a natural. É necessária uma imersão em atividades algébricas, que propiciem a construção do pensamento algébrico. (ARAÚJO, 2008, p.338).

Nessa perspectiva, Sessa (2009) afirma:

> Quando pensamos em álgebra, concebemos sua aprendizagem como um conjunto de práticas associadas a um campo de problemas constituídos a partir de conceitos de

> suas propriedades. Práticas que são inscritas – e escritas – em determinada linguagem simbólica, com leis específicas que regem a configuração de um conjunto de técnicas. Todos esses elementos complexos – problemas, objetos, propriedades, linguagem simbólica, leis de conservação das expressões, técnicas de resolução etc. – entram na tessitura do trabalho algébrico. (SESSA, 2009, p. 7).

De acordo com a BNCC, A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BNCC, 2017, p. 270)

Desenvolver o pensamento algébrico está além de resolver equações ou calcular usando letras, o uso do pensamento algébrico deve anteceder o uso da linguagem algébrica.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10)

> A perspectiva sobre a Álgebra e o pensamento algébrica acima apresentada reforça a ideia de que este tema não se reduz ao trabalho com o simbolismo formal. Pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas a uma das suas facetas.

Não temos uma definição final sobre o conceito de pensamento algébrico, aliás, "[...] não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente." (LINS E GIMENEZ, 1997, p. 89). No entanto, é possível caracterizá-lo.

Para tanto, apoiamo-nos nas concepções de Fiorentini, Miorim e Miguel, quando consideram:

> "[...] a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com os que variam, a tentativa de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização como elementos caracterizadores do pensamento algébrico." (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 87).

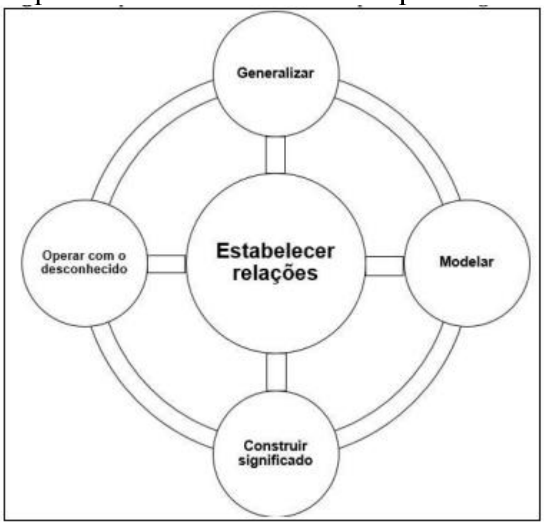
Essa caracterização do pensamento algébrico favorece a ideia de que o mesmo deve ser construído em todo processo de ensino aprendizagem da matemática, desde os anos iniciais do ensino fundamental, de forma contextualizada e interdisciplinar.

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 88)

> O modo como buscamos caracterizar o pensamento algébrico nos leva, por tanto, a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento.

Almeida e Câmara, em busca de uma definição para pensamento algébrico, propõem que "[...] o pensar algebricamente é revelado por meio de cinco características, a saber: "estabelecer relações"; "generalizar"; "modelar"; "operar com o desconhecido"; e "construir significado". Além disso, sustentamos que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras. Portanto, defendemos que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais." (ALMEIDA E CÂMARA, 2017, p. 53). Os autores nos oferecem o seguinte esquema:

Figura 2 – Esquema das características do pensamento algébrico



Fonte: Almeida e Câmara (2017, p. 54)

Os mesmos reforçam:

> "[...] que apesar de apresentar no texto em uma ordem as quatro características subjacentes à central, isso não significa que elas sejam reveladas pelo sujeito nessa ordem, muito pelo contrário, acreditamos que elas surgem e se desenvolve de forma concomitante, e que o desenvolvimento de uma dessas características leva, consequentemente, ao desenvolvimento das outras." (ALMEIDA E CÂMARA, 2017, p. 58).

Para desenvolver esse pensamento "[...] é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados." (BRASIL, 2017, p. 270). Essa construção não deve estar associada a uma etapa isolada do ensino fundamental, mas "[...] é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade." (BRASIL, 2017, p. 270). Ainda, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 89) reforçam:

> No nosso ponto de vista, a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações-problema. Esse trabalho deve ser realizado de forma a garantir o exercício daqueles elementos caracterizadores do pensamento algébrico destacados anteriormente.

Nas séries iniciais do 1º grau, o objetivo fundamental a que se deve visar é o desenvolvimento da capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações problemas, através do processo de generalização. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 89).

Ponte, Branco e Matos (2009) ressaltam que "[...] aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas a uma das suas facetas." (PONTE, BRANCO E MATOS, 2009, p.10).

Em suma, o pensamento algébrico deve ser construído durante toda a escola básica, para isso devemos ver a álgebra para além das equações, dos símbolos, do cálculo com letra. Introduzindo situações diversas, desde os anos iniciais do ensino fundamental, que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

3.2 Pensamento algébrico e exploração de padrões

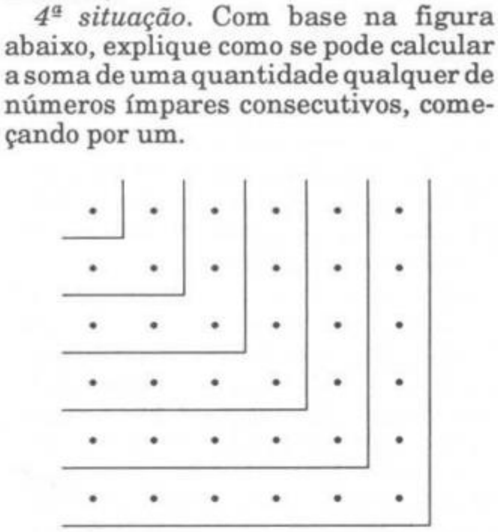
O objetivo da Álgebra no ensino fundamental é o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo que "[...] no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de padrões e regularidades" (PONTE, 2006, p.12).

Dentre as atividades que podem ser usadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico destacamos a exploração de padrões, pois por meio dessa exploração podemos exercitar vários elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Nesse sentido, Borralho e Barbosa reforçam que:

> A exploração de padrões permite o desenvolvimento do pensamento algébrico ou, mais especificamente, o sentido do símbolo, ao proporcionar que os alunos utilizem diferentes representações, identifiquem e generalizem relações, analisem os seus significados e tomem consciência da importância da verificação de dados. (BORRALHO; BARBOSA, 2009, p.11)

Fiorentini, Miorim e Miguel apresentam situações onde acreditam ser possível a manifestação do pensamento algébrico. Dentre elas:

Figura 3 – Exemplo de situação problema onde é possível a manifestação do pensamento algébrico.



Fonte: Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 86).

Observemos que:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$\vdots$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Vamos verificar esse resultado por indução. Já vimos que para $n = 1$ o resultado é verdadeiro.

Suponhamos que seja válido para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

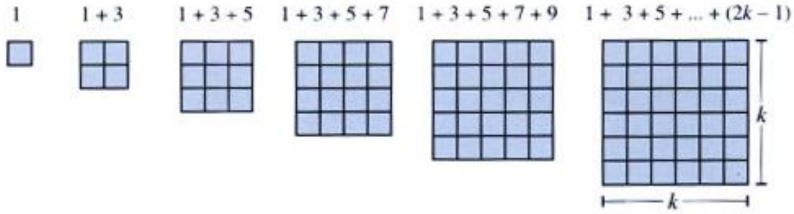
Daí,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Portanto, para todo número natural n, n^2 pode ser escrito como a soma dos n primeiros ímpares consecutivos.

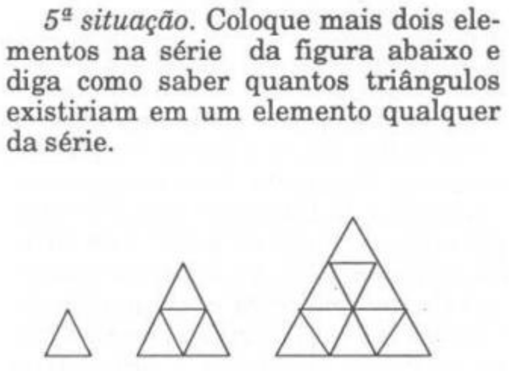
Esse fato pode ser visualizado através da sequência figural.

Figura 4 – Soma dos k primeiros naturais ímpares consecutivos.



Fonte: www.rpm.org.br/cdrpm/58/8.htm

Figura 5 – Exemplo de situação problema onde é possível a manifestação do pensamento algébrico.



5ª situação. Coloque mais dois elementos na série da figura abaixo e diga como saber quantos triângulos existiriam em um elemento qualquer da série.

Fonte: Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 86).

De acordo com a análise desses autores, “a resolução satisfatória da quarta e quinta situações depende da percepção de uma regularidade por trás da série de padrões geométricos.” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 88).

A própria BNCC, que preconiza o desenvolvimento do pensamento algébrico como objetivo da unidade temática álgebra, em seus objetos de conhecimento relacionados a essa unidade temática traz:

Tabela 2 – Objetos de conhecimento por ano

ANO	OBJETO DE CONHECIMENTO
1º	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.
2º	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas. Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na

	sequência.
3º	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.
4º	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural. Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.

Fonte: elaborado pelo autor.

Todos os objetos de conhecimentos ligados à unidade temática álgebra do 1º ao 4º ano do ensino fundamental estão ligados diretamente à exploração de padrões e regularidades. Nesses anos, embora a finalidade não seja o tratamento algébrico desses padrões, o objetivo é o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Concordamos com Vale, Palhares, Cabrita e Borralho ao afirmarem:

> Quando apelamos aos padrões no ensino da matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências. O estudo de padrões vai de encontro a este aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões. (VALE; PALHARES; CABRITA; BORRALHO, 2007, p. 5)

Esses autores também destacam:

> Outro aspecto importante ligado aos padrões é a resolução de problemas, uma vez que a descoberta de um padrão é uma poderosa estratégia de resolução de problemas. Podemos dizer que a resolução de problemas que recorra ao trabalho investigativo é um modo promissor de exploração da álgebra, sobretudo se se utilizarem problemas significativos para os alunos onde o uso da álgebra seja relevante. (VALE; PALHARES; CABRITA; BORRALHO, 2007, p. 7)

A exploração de padrões e regularidades além de desenvolver o pensamento algébrico, essencial a compreensão dos conceitos e da linguagem algébrica, colaboram no desenvolvimento da capacidade de abstração.

> O reconhecimento de regularidades em Matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da Álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração. (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA,1999, p.111).

Tanto os pesquisadores destacados acima, quanto a BNCC, no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico convergem para o entendimento de que o reconhecimento, análise e generalização de padrões são essenciais a construção do pensamento algébrico.

4 FRACTAIS E O ENSINO DE ÁLGEBRA

Neste, traremos a ideia de fractal com base na autossimilaridade e descreveremos o processo recursivo de construção dos fractais Curva de Koch, Triminó e árvore pitagórica, pois serão utilizados para explorar os conceitos e habilidades ligadas a álgebra no 7º ano do ensino fundamental. Além disso, sugeriremos atividades com esses fractais e comentários de cunho didático-pedagógicos para auxílio do professor. Lembramos que essas atividades podem ser modificadas de acordo as especificidades de cada turma e para ampliação do trabalho, as explorações sugeridas podem ser adaptadas para outros fractais.

4.1 Fractais: ideia e construção

O termo fractal vem do latim fractus que significa quebrar, fracionar, fragmentar e foi criado, em 1975, pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot considerado o pai da geometria fractal.

O termo fração, parte de um todo, do qual o termo fractal é oriundo nos ajuda a ter uma ideia do que é um fractal, uma vez que não dispomos de uma definição geral, no entanto, podemos defini-lo por meio de uma de suas mais importantes características: a autossimilaridade ou autossemelhança.

De acordo com Barbosa

> "[...] o conceito de fractal ainda tem muito a desejar, principalmente no caso de se requerer uma definição formal, que caiba ao ser e só ao ser. Entretanto, essa dificuldade não deve ser obstáculo na educação, à qual pode simplesmente convir uma conceituação simples e de fácil compreensão e entendimento. Bastará considerarmos a autossimilaridade." (BARBOSA, 2005, p. 19).

4.1.1 Ideia

Os fractais são figuras geométricas em que cada parte se assemelha a figura original. Isto é, ao dividirmos o objeto fractal em partes, observaremos que cada uma das partes obtidas é semelhante a figura original, mais precisamente, cada uma das partes representará uma redução da figura original. Para ser mais claro, se tomarmos partes progressivamente menores de um fractal e a ampliarmos até um tamanho desejável observaremos na parte ampliada a figura original. Assim, um fractal é uma figura geométrica em que cada parte é uma cópia do todo. Essas formas geométricas, independentemente da escala, repetem sua estrutura.

Essas características nos traz a beleza dessas formas, como afirmou Mandelbrot (2003, p. 71), “A razão pela qual os fractais são mais especiais do que outras formas mais gerais da matemática é serem caracterizados pelas chamadas simetrias invariantes relativamente à dilatação e/ou contração.”

De maneira geral, as partes que compõem os fractais permanecem iguais a medida que ampliamos a figura, ou seja, cada parte que constitui a figura é uma cópia reduzida da figura original. Isso se deve ao fato de que os fractais são constituídos por partes geradas por homotetia, isto é, por transformações geométricas que preservam a forma da figura original apesar de, não necessariamente, preservar a tamanho. Por essa razão, dizemos que os fractais possuem autossimilaridade e como asseverou Mandelbrot, “[...] a estrutura de cada peça encerra a chave para a totalidade da estrutura. Autossimilaridade nos permite obter réplicas menores da figura, dada sua ampliação ou divisão.” (MANDELBROT, 2003, p.72).

Para clarearmos a ideia de fractal como figuras autossimilares descreveremos por meio de um processo recursivo a construção de alguns fractais que são de grande importância para construção desse trabalho. Como afirmou o pai dos fractais:

> Os fractais são uma família de formas geométricas, e eu acredito que para se poderem compreender as formas geométricas precisamos de as ver. Tem sido muitas vezes esquecido que a geometria precisa de ter uma componente visual, e penso que em muitos casos esta omissão se tem revelado perigosa. (MANDELBROT, 2003, p.63).

4.1.2 Construção

Os fractais podem ser gerados de diferentes maneiras. Desde processos recursivos, a partir da divisão de um segmento de reta em partes iguais até a utilização de softwares que construirão fractais a partir de uma equação matemática.

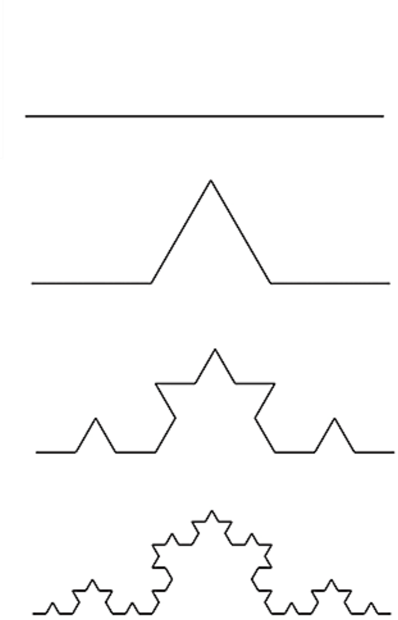
Apesar de serem objetos riquíssimos em detalhes e muitas vezes difíceis de descrever podem ser facilmente construídos. No presente trabalho, visto que tratamos com fractais elementares, adotaremos processos recursivos.

4.1.2.1 Curva de Koch

Criado pelo matemático sueco Helge von Koch, foi um dos primeiros a serem descritos. Sua construção se inicia a partir de um segmento de reta.

A operação básica de construção consiste em dividir um dado segmento de reta em três segmentos de igual comprimento, e em substituir seguidamente o terço central por um triângulo equilátero sem a sua base. O processo continua realizando-se as operações descritas acima nos quatro segmentos remanescentes.

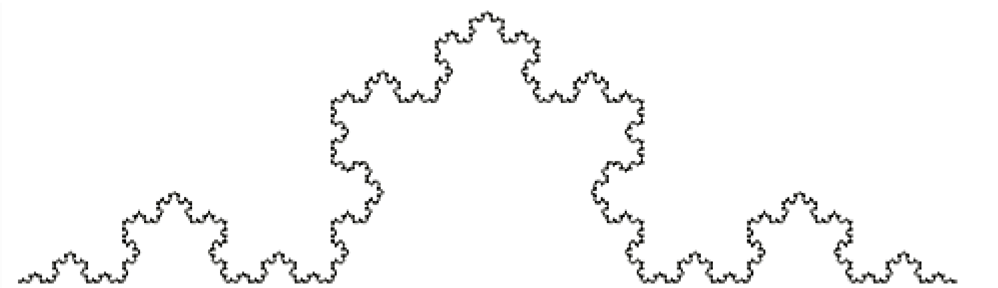
Figura 6 – Curva Koch



Fonte:https://www.researchgate.net/The iterative construction of the Koch curve with a Df (Adaptada)[acesso: Jan, 2022]

A figura abaixo mostra a curva de Koch numa fase de construção mais avançada.

Figura 7 - Curva de Koch depois de várias iterações.



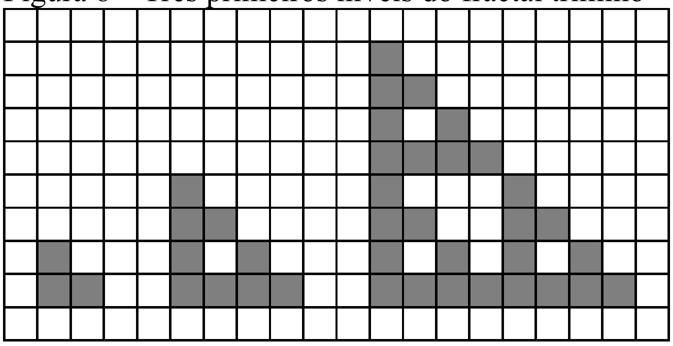
Fonte:https://www.researchgate.net/The iterative construction of the Koch curve with a Df (Adaptada)[acesso: Jan, 2022]

Segue que a curva de Koch é outra curva gerada fazendo cópias de cópias. É claro que da construção resulta a autossemelhança, bastando, por exemplo, escolher numa determinada fase um segmento a ser substituído e observar que ele gerará a seguir uma curva semelhante à curva completa de Koch; a escala de redução adotada será dada por uma potência de 1/3 (BARBOSA, 2005, p.39). A cada nova iteração, o comprimento de cada um dos segmentos que compõem a curva é 1/3 da medida do segmento que o original, ou seja, após n iterações, cada segmento terá $1/3^n$ do comprimento do segmento original.

4.1.2.2 Fractal triminó

Para a construção do fractal triminó, deve-se pegar três quadradinhos e fazer a conexão em forma de L (triminó não reto), este será o primeiro nível desse fractal. Para obter um fractal de nível 2, devemos substituir cada quadrado por um triminó L, obtendo 3 figuras semelhantes as do nível 1. Repete-se o processo de construção nível 2 para obter o nível 3. A obtenção dos próximos níveis será de modo análogo.

Figura 8 – Três primeiros níveis do fractal triminó



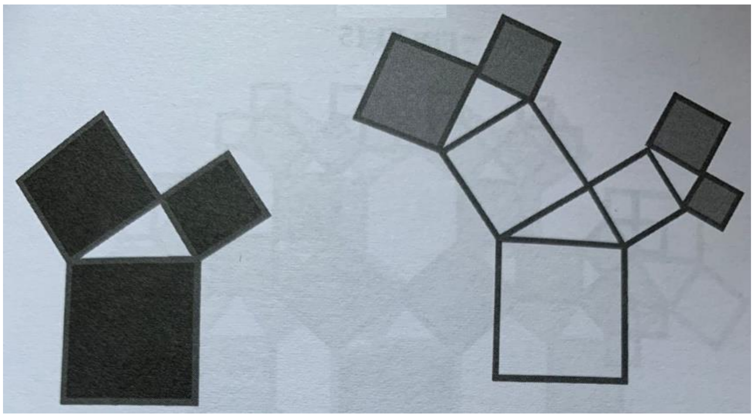
Fonte: elaborado pelo autor.

4.1.2.3 Árvore Pitagórica

A Árvore Pitagórica é construída por meio da interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras.

Inicialmente construa um quadrado e sobre o lado de cima deste, construa um triângulo retângulo de modo que a hipotenusa coincida com o lado superior do quadrado. Na sequência, sobre os catetos, construa quadrados cujos lados tenham a mesma medida do cateto que lhe é suporte. Este será o primeiro nível desse fractal. Repita esse procedimento sobre os dois quadrados e obtenha o nível 2 do fractal. A obtenção dos próximos níveis será de modo análogo.

Figura 9 – Primeiros níveis do fractal Árvore Pitagórica



Fonte: Barbosa (2005, p.63)

4.2 Fractais para ensinar álgebra

Barbosa (2005) ao defender o uso de fractais em sala de aula fala sobre a possibilidades de conexão com várias ciências (interdisciplinaridade), da beleza dos fractais e da sensação de surpresa e isso desperta a curiosidade.

De acordo com Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2007, p. 5), "Os alunos devem começar a aprendizagem da álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões."

Nessa perspectiva propomos introduzir a álgebra no 7º ano do ensino fundamental por meio da exploração dos fractais. Os fractais são belos, aguçam a curiosidade, estão presentes à nossa volta e por meio deles podemos observar padrões, regularidades, fazer generalizações, exercitar e desenvolver o pensamento algébrico. Através da exploração desses objetos incríveis podemos trabalhar conceitos fundamentais para a aprendizagem de álgebra.

É essencial aos alunos aprenderem Álgebra, desenvolverem o seu pensamento algébrico, perceberem o significado dos símbolos.

Perceber o conceito de variável é crucial para o estudo da álgebra; um dos grandes problemas do esforço que os alunos fazem para compreender e trabalhar em álgebra, resulta da sua limitada interpretação do termo variável (NCTM, 1991, p.122).

Observando fractais e analisando sua construção podemos trazer o conceito de variável de forma contextualizada, de uma forma em que o símbolo tenha um significado para o aluno.

Através da autossemelhança dos fractais, podemos fazer generalização e consequentemente produzir fórmulas para contar sequências e abordar equivalência de expressões algébricas, como afirma Sessa:

> Apresentando a generalização como caminho possível de introdução à álgebra, consideramos a serventia dessa ferramenta tanto para expressar a generalidade como para fornecer um mecanismo de validação de conjecturas baseado em regras de transformação das expressões (pensamos nas letras que simbolizam números gerais ou genéricos). (SESSA, 2009, p. 58)

Nessa exploração da geometria fractal ao trabalharmos as sequências e fórmulas, podemos trazer a ideia de incógnita e resolver equações do 1º grau.

Os fractais são um veículo poderoso, uma ferramenta didática viável para a introdução e amadurecimento de conceitos algébricos e para o desenvolvimento de habilidades a serem trabalhados no 7º ano do ensino fundamental. Os conceitos trazidos nessa etapa de ensino são basilares e sem eles a aprendizagem da álgebra será prejudicada.

4.3 Explorando fractais

As atividades propostas neste trabalho exploram mais de um conceito ao passo que articulam mais de uma habilidade vinculada a unidade temática Álgebra. Destacamos que essas atividades foram pensadas como introdutoras de conceitos, portanto sugerimos que essas explorações antecedem a formalização e apresentação sistemática dos conceitos e da linguagem algébrica. O intuito destas é que através da investigação, da resolução de problemas e da contextualização os conceitos que serão posteriormente expostos ganhem significado para o aluno e que ele perceba a álgebra como algo significativo.

Em cada fase da exploração faremos, no que entendemos relevante, comentários de cunho didático-pedagógicos fundamentados na experiência discente, na Base Nacional Comum Curricular e nos relatos e estudos de pesquisadores do ensino de álgebra no ensino fundamental.

Nas atividades seguintes procuramos utilizar a linguagem algébrica como forma de generalizar padrões e como instrumento facilitador na representação e resolução de problemas. Desse modo, as atividades são iniciadas com base em problemas e os objetivos buscados perpassam pela observação de padrões e a exploração de regularidades em sequências figurais e numéricas e pela generalização dos mesmos.

Como o foco da dissertação é a introdução da álgebra no ensino fundamental, direcionamos nossa atenção para o desenvolvimento das habilidades previstas pela BNCC para o 7º ano do ensino fundamental. Etapa em que os alunos começam a ter contato direto com a linguagem algébrica. No entanto, as atividades em questão podem ser adequadas e utilizadas em outras etapas do ensino.

Reiteramos que uma mesma atividade pode e deve ser utilizada para o desenvolvimento de várias habilidades. No entanto, por questões didáticas, procuraremos diversificar os fractais explorados, reconhecendo que para sedimentação dos conceitos necessários à aprendizagem da álgebra precisamos de várias explorações.

4.3.1 Explorando o fractal Triminó

Essa atividade busca explorar os conceitos de incógnita, variável, expressão algébrica e equivalência de expressões algébricas, visando desenvolver as habilidades:

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes

A exploração do fractal triminó se dará por meio da construção e da resolução de alguns problemas. Como segue:

A) Construa os três primeiros níveis do fractal triminó.

B) Para construir o nível 4 desse fractal, quantos quadradinhos teríamos que pintar?

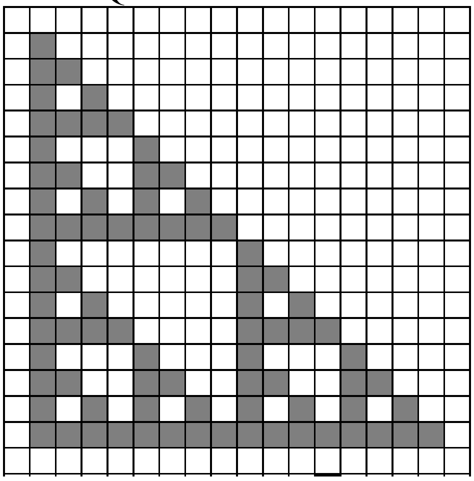
C) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quadradinhos que serão pintados em um nível n qualquer.

D) Para construir o nível 10 desse fractal, quantos quadradinhos teríamos que pintar?

No item (A) sugerimos o uso de uma malha quadriculada para que os alunos possam construir o fractal triminó. Essa construção é muito importante, a partir da mesma o aluno poderá observar características dos fractais, entender os processos de construção dos mesmos.

No item (B) os alunos provavelmente desenharão na malha quadriculada.

Figura 10 – Quarto nível do fractal triminó.



Fonte: elaborado pelo autor.

Mesmo sendo uma estratégia válida é interessante incentivá-los a buscar padrões numéricos, a partir da observação da sequência gerada pela quantidade de quadradinhos pintados em cada nível. Essas observações o auxiliaram na resolução do item (C). Esperamos que nesse item, solução venha por meios aritméticos fundamentados na observação da sequência que representa o total de quadrados utilizados em cada nível.

Tabela 3 – Quantidade de quadrados por nível de construção do fractal triminó.

Nível de construção do fractal	Número de quadradinhos
1	3
2	9
3	27
4	81

Fonte: elaborado pelo autor.

É possível que os alunos percebam a relação de recorrência a partir do segundo termo da sequência, em que cada termo, a partir do segundo, é o triplo do termo anterior. Essa conclusão é muito importante, a partir da mesma, podemos introduzir o conceito de expressões algébricas, através da representação matemática de expressões dadas em linguagem usual.

Por exemplo: se chamarmos de x o número que é o 14º termo dessa sequência. Como o 14º termo não foi calculado, ele é um termo desconhecido. É importante questionar os alunos se x é fixo ou variável e fazer alusão a quantidade de valores que x pode representar. Nessa situação x representa um único valor ou pode representar vários? Que número x representa? Essas questões, apesar de simples e até repetitivas, são fundamentais para exploração e compreensão e distinção dos conceitos de incógnita e variável.

Como podemos representar o 15º termo?

Como cada termo, a partir do segundo, é o triplo do termo anterior, podemos representar o 15º termo pelo triplo do 14º termo, isto é, 3x.

E como poderíamos representar o 16º termo?

Resposta esperada: $3(3x) = 9x$. Podemos explicar aos alunos que 3x e 9x são expressões algébricas e conceituá-las. Além disso, temos uma situação oportuna para começarmos trabalhar a equivalência entre expressões com base na igualdade $3(3x) = 9x$.

Será que é possível construir uma fórmula que nos permita descobrir um termo da sequência somente pela posição que ele ocupa?

Essa pergunta motivará os alunos a investigar novamente a sequência 3, 9, 27, … . Para ajudá-los nessa etapa, podemos sugerir o preenchimento de uma tabela como a seguinte:

Tabela 4 – Auxílio para análise dos termos da sequência (Triminó).

Nível	**Termo**	**Decomposição**	**Potência**
1			
2			
3			
4			
...			
n			

Fonte: elaborado pelo autor.

Uma figura que ocupe a posição n (n-ésimo termo) terá quantos fatores em sua decomposição? A partir daí, podemos indagar: Nesse caso, n representa o que? Representa um único valor ou pode representar vários? Podemos então introduzir o conceito de variável.

Será que é possível escrever uma fórmula?

Os alunos já devem ter percebido que n representa a posição e apoiados na observação e análise da sequência e da tabela concluírem que 3n corresponde ao número de quadradinhos pintados no nível n de construção do fractal triminó.

O item (D) deve ser respondido com base na fórmula encontrada anteriormente.

4.3.2 Explorando o fractal Curva de Koch

Essa atividade busca explorar os conceitos de sequência recorrente e termo geral de uma sequência, visando desenvolver as habilidades:

(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

A exploração da curva de Koch se dará por meio da construção e da resolução de alguns problemas. Como segue:

A) Desenhe os três primeiros níveis do fractal curva de Koch.

B) Escreva uma sequência a partir da quantidade de segmentos usados em cada figura.

C) Escreva uma fórmula para encontrar um termo qualquer da sequência a partir do anterior.

D) Escreva uma fórmula para encontrar qualquer termo da sequência a partir do nível de construção.

A construção do fractal é importante para que o aluno compreenda a recursividade presente na geometria fractal. Sugerimos o uso de uma malha triangular (constituída de triângulos equiláteros) para facilitar a construção das figuras.

O processo de construção do fractal é importante para que o aluno perceba o processo de repetição presente em cada etapa da construção do objeto fractal. Com base neste exercício podemos trazer o conceito de recursividade presente nos fractais e devemos salientar que estas são construídas usando o conceito de recursividade.

No item (B), escrever uma sequência é algo que os alunos já estão familiarizados. Para o item (C), devemos solicitar aos alunos que preencham uma tabela como a seguinte:

Tabela 5 - Auxílio para análise dos termos da sequência (Curva de Koch).

Nível de construção	**Quantidade de segmentos**
1	
2	
3	

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao analisar a tabela, devemos perguntar aos discentes sobre quais regularidades eles observam nas colunas da tabela. Inicialmente eles devem perceber que, a partir do segundo termo, cada termo é o quádruplo do termo anterior. Baseado nessa observação, devemos introduzir o conceito de sequência recorrente e reforçar a ideia de recursividade.

Outra regularidade que eles devem perceber é a correspondência:

Tabela 6 – Correspondência entre o nível de construção e a quantidade de segmentos na forma de potência.

Nível de construção	Quantidade de segmentos
1	**$1 = 4^0$**
2	**$4 = 4^1$**
3	**$16 = 4^2$**

Fonte: elaborado pelo autor.

Essa observação é necessária para o item (D) da exploração. Portanto, devemos verificar se o aluno percebeu esse fato. Com base nisso, podemos questionar sobre como podemos representar a quantidade de segmentos de uma figura qualquer (figura de número n) de acordo com o nível de construção ou número da figura. Essa discussão possibilita falar de maneira contextualizada sobre a fórmula do termo geral de uma sequência, pois cada termo da sequência depende do valor de n, nesse caso n é o número da figura e é representado por um número natural.

Observe que nessa exploração temos a oportunidade de trazer conceitos trabalhados na atividade anterior. No entanto, não o fizemos para evitar repetições, mas salientamos a importância e a necessidade de reforçarmos os conceitos já trabalhados para que os alunos percebam as ligações entre os conteúdos trabalhados.

4.3.3 Explorando o fractal Árvore Pitagórica

Essa atividade busca explorar a resolução de equações polinomiais do 1º grau, visando desenvolver a habilidade:

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

A exploração da Árvore Pitagórica se dará por meio da análise da sequência figural e da resolução de alguns problemas. Como segue:

Propõe-se a seguinte sucessão de figuras:

Figura 11 – Três primeiros níveis da Árvore Pitagórica

Fonte: elaborado pelo autor.

A) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quadradinhos que serão pintados em um nível n qualquer.

B) Sabendo que a 11ª figura da sequência apresenta 1023 triângulos retângulos. Quantos triângulos retângulos temos a 10ª figura da sequência?

Inicialmente podemos recordar conceitos já vistos na exploração anterior. Sugerimos até a adequação da exploração para incluir algumas das questões discutidas nas atividades anteriores. Não o fizemos para evitar repetições. Assim, nos ateremos aos questionamentos diretamente ligados ao trabalho com equações do 1º grau.

Aqui o objetivo é levar o aluno a usar informações conhecidas e encontrar a quantidade de triângulos retângulos temos a 10ª figura da sequência sem usar diretamente a fórmula, nesse caso a fórmula servirá como instrumento de validação.

Devemos estimular os docentes a resolver a equação $1023 = 2a + 1$ e isso por meio das propriedades da igualdade, objeto de conhecimento já estudados no 6º do ensino fundamental. Provavelmente já desenvolveram a habilidade (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

Esse tipo de problema nos permite introduzir o conceito de equação polinomial do 1º grau com uma incógnita, que é objeto de conhecimento dessa etapa do ensino fundamental, e estimular o desenvolvimento da habilidade EF07MA18.

Vale salientar que embora a resolução fazendo uso das propriedades da igualdade seja o objetivo, outros meios de resolução apresentados pelos alunos não devem ser desprezados. Um exemplo disso, é a resolução por tentativa e erro, onde o aluno não faz uso das propriedades da igualdade, mas ao substituir a incógnita por um valor qualquer, está calculando o valor numérico de uma expressão algébrica. Portanto, as estratégias adotadas pelos educandos devem ser valorizadas e encaminhadas para uma aprendizagem integral da álgebra.

É importante explicar aos alunos por que 511 é a solução da equação 1023 = 2a + 1. Compreender o que é a solução de uma equação é fundamental para o aluno que está iniciando o aprendizado de álgebra. Também devemos estimulá-los a realizar a verificação da solução. E ainda, discutir sobre a solução no sentido de refletir sobre quais números a equação poderia ter como solução, trazendo a ideia de conjunto universo, pois dependendo deste a equação pode ou não ter solução. A equação em questão não pode ter como solução um número negativo, ou um número fracionário. A natureza do problema ajudará o aluno a perceber esse fato, no entanto, é necessário que o professor faça questionamentos neste sentido.

5 FRACTAIS PARA ALÉM DO 7º ANO

Nesse capítulo traremos algumas situações que nos possibilitarão visualizar a diversidade de conteúdos matemáticos envolvida na exploração dos fractais. Faremos isso através da caracterização do conjunto de Cantor por meio de uma base ternária, da análise do comprimento da curva de curva de Koch, da área do floco de neve de Koch, do volume do tetraedro de Sierpinski, da análise de um fractal circular e da dimensão fractal.

5.1 A expansão ternária do conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor é um fractal simples. Podemos construí-lo do seguinte modo:

1) Tomar um segmento de reta;
2) Dividir o segmento de reta em três partes iguais e eliminar a parte central;
3) Repetir o passo 2 em cada novo segmento de reta.

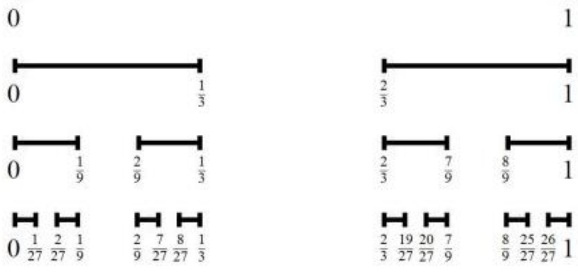
Esse fractal é autossimilar, observemos que cada novo segmento é uma cópia reduzida no fator 1/3 em relação ao segmento que o originou.

O conjunto de Cantor K é o que resta do intervalo [0, 1] após as seguintes operações:

- Retira-se o terço médio correspondente ao intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
- Retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ obtendo-se o conjunto $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.
- Retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes e repete-se o processo indefinidamente.

O conjunto K dos pontos que não foram retirados é o conjunto de Cantor.

Figura 12 - Construção do Conjunto de Cantor



Fonte: Moura (2017, p. 2)

Como saber se um dado ponto pertence ao conjunto de Cantor?

Vamos caracterizar o conjunto K de Cantor por meio de uma expansão ternária. Essa expansão é escrita por $0, a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$, onde $a_k = 0, 1 \; ou \; 2$.

Essa expansão representa o número para o qual a série $a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ converge.

Nosso objetivo é mostrar que o conjunto de Cantor é um conjunto de números reais no intervalo [0, 1] que admite expansão ternária $0, a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$, onde a_k é 0 ou 2. No entanto, antes mostraremos outros resultados que nos ajudaram a provar o descrito acima.

(i) A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ converge para um número no intervalo [0, 1].

Prova:

De fato, temos

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \leq \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 1$$

(ii) (Recíproca) Todo número no intervalo [0, 1] admite pelo menos uma expansão ternária.

Prova:

Tomemos $x \in [0, 1)$, observe que colocamos $x \neq 1$ para evitar o caso $x = 1 = (0{,}222 \ldots)_3$.

Seja a_1o maior inteiro tal que $\frac{a_1}{3} \leq x$. Como $0 \leq x < 1$, temos $0 \leq a_1 \leq 2$ e consequentemente:

$$0 \leq x - \frac{a_1}{3} < \frac{1}{3}$$

Agora, seja a_2 o maior inteiro. Então,

$$\frac{a_2}{3^2} \leq x - \frac{a_1}{3}$$

Como $0 \leq x - \frac{a_1}{3} < \frac{1}{3}$, temos $0 \leq a_2 \leq 2$ e

$$0 \leq x - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{3^2} < \frac{1}{3^2}$$

Repetindo esse processo e observando a recursividade, em certo momento teremos um a_n como maior inteiro com

$$0 \leq x - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{3^2} - \cdots - \frac{a_n}{3^n} < \frac{1}{3^n}$$

Isto é,

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} < \frac{1}{3^n} \text{ , } com \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x \text{ e } 0 \leq a_n \leq 2$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}$ é uma aproximação de x, temos

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

Assim, a expansão ternária de $x \in [0,1)$ é $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$.

(iii) Todo número $a \in K$ admite uma única expansão ternária, $0, a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$, onde a_k é 0 ou 2.

Suponhamos que $a = 0, a_1 a_2 \cdots a_k \cdots = 0, b_1 b_2 \cdots b_k \cdots = b$. Daí,

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} = b$$

Suponhamos que k seja a primeira posição onde $a_k \neq b_k$ com $a_k > b_k$. Daí,

$$\sum_{k=1}^{k-1} \frac{a_n}{3^n} + \frac{a_k}{3^k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j}}{3^{k+j}} = \sum_{k=1}^{k-1} \frac{b_n}{3^n} + \frac{b_k}{3^k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{k+j}}{3^{k+j}}$$

$$a_k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j}}{3^j} = b_k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{k+j}}{3^j}$$

$$a_k - b_k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j}}{3^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{k+j}}{3^j}$$

Como $a_k, b_k \in \{0,1,2\}$, temos $a_k - b_k = 1$ ou $a_k - b_k = 2$, pois $a_k \neq b_k$. Além disso,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{k+j}}{3^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = 1$$

Assim,

$$a_k - b_k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j}}{3^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{k+j}}{3^j} \leq 1$$

Como $a_k - b_k = 1$, para que a igualdade seja satisfeita é necessário que $a_{k+j} = 0$ e $b_{k+j} = 2$.

Essa característica dos números que fazem parte desse conjunto está relacionada a maneira como o conjunto de Cantor foi construído. Observemos que ao retirarmos o intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, com exceção do número $\frac{1}{3} = (0,1)_3$, excluímos os números $x \in [0,1]$ cuja representação ternária tem $x_1 = 1$. Na etapa seguinte, excluímos os intervalos $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, isto é, os números cujas representações ternárias são da forma $0{,}01x_3x_{4\ldots}$ ou $0{,}21x_3x_{4\ldots}$, com exceção dos números $\frac{1}{9} = (0{,}01)_3$ e $\frac{7}{9} = (0{,}21)_3$. Na terceira etapa, excluímos os intervalos $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$ e $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$, ou seja, os números cujas representações ternárias são da forma $0{,}001x_4x_{5\ldots}$, $0{,}021x_4x_{5\ldots}$, $0{,}201x_4x_{5\ldots}$ e $0{,}221x_4x_{5\ldots}$, com exceção dos números $\frac{1}{27} = (0{,}001)_3$, $\frac{7}{27} = (0{,}021)_3$, $\frac{19}{27} = (0{,}201)_3$ e $\frac{25}{27} = (0{,}221)_3$.

Nas etapas seguintes ocorre algo similar. Notemos que as exceções, em qualquer etapa, serão números na base 3 que contêm um único algarismo 1 como algarismo significativo final e poderá ser substituído por algarismos 2. Por exemplo: $0{,}1 = 0{,}0222\ldots$, $0{,}01 = 0{,}00222\ldots$, $0{,}21 = 0{,}20222\ldots$.

Será que $\frac{20}{81} \in K$?

Observemos que

$$\frac{20}{81} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4}$$

Assim, $\frac{20}{81} = (0{,}0202)_3$ pertence ao conjunto K de Cantor.

Já o número $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} = (0{,}12)_3$ não pertence ao conjunto de Cantor.

De fato,

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} < \frac{5}{9} < \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Note que $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ foi o primeiro intervalo excluído de $[0{,}1]$.

5.2 O comprimento da Curva de Koch

O processo de construção do fractal já foi descrito. Analisemos então o comprimento da curva de Koch.

NÍVEL	NÚMERO DE SEGMENTOS	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO	COMPRIMENTO TOTAL DA CURVA
0	1	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	16	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9}$
3	64	$\frac{1}{27}$	$\frac{64}{27}$
...	...	...	...
n	4^n	$\frac{1}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Observe que o comprimento total da curva no n-ésimo nível de construção é

$$C_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Provaremos essa afirmação por indução finita.

No nível 0, temos $C_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$.

Suponhamos, por hipótese, que $C_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k, k > 0$

Observemos que em cada nível de construção, um segmento é substituído por 4 novos segmentos e cada um destes medindo um terço do comprimento do segmento que o originou. De modo que em um determinado nível o comprimento total da curva é quatro terços do comprimento do nível anterior. Assim, se no nível k o comprimento total da curva for C_k, no nível $k + 1$ o comprimento total será $\frac{4}{3}C_k$. Logo,

$$C_{k+1} = \frac{4}{3}C_k = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1}$$

Como queríamos provar.

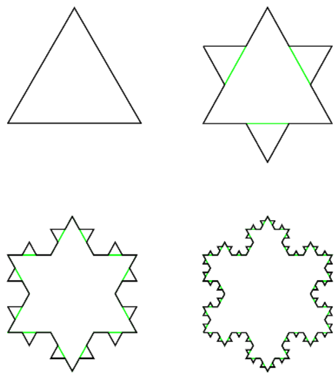
Além disso, notemos que:

- $\lim_{n\to\infty} 4^n = \infty$, ou seja, o número de segmentos tende para o infinito.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$, ou seja, o comprimento de cada segmento tende para zero.
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$, ou seja, o comprimento total da curva tende para o infinito.

5.3 Área delimitada pelo floco de Koch

O floco de neve de Koch tem seu processo de construção iniciado por um triângulo equilátero de lado l e em cada lado do triângulo aplicamos o processo empregado na construção da curva de Koch.

Figura 13 - Construção floco de neve de Koch



Fonte: www.gratispng.com/png-ep30eq/

Analisemos a área delimitada pelo fractal em cada nível de construção

NÍVEL	QUANTIDADE DE NOVOS TRIÂNGULOS
1	3
2	12
3	48
...	...
n	$3 \cdot 4^{n-1}$

Inicialmente temos um triângulo equilátero de lado l cuja área é dada por

$$A = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

A cada nível de construção são inseridos novos triângulos, de modo que no n-ésimo nível serão inseridos $3 \cdot 4^{n-1}$ novos triângulos e cada um com lados medindo $\left(\frac{1}{3^n}\right) l$, pois cada novo lado é um terço do comprimento do lado anterior, e área $A_n = \left(\frac{l}{3^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Observemos que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$.

No entanto, a área delimitada pelo floco de neve de Koch será dada por

$$A_t = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} A_n$$

$$A_t = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 3l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n}} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Mas, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$ é a soma infinita da progressão geométrica de razão $q = \frac{4}{9}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{4}{9}$. Como $-1 < q < 1$, o somatório converge para $\frac{a_1}{1-q}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

E a área delimita pelo floco de neve de Koch é

$$A_t = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5}\right)$$

$$A_t = \frac{2l^2\sqrt{3}}{5}$$

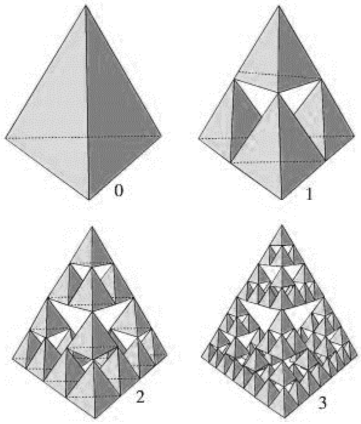
5.4 O volume do Tetraedro de Sierpinski

Esse tetraedro é construído a partir de um tetraedro sólido. Inicialmente, ligamos os pontos médios de cada aresta, formando 12 segmentos de reta e obtendo seis tetraedros menores e congruentes. Retirando o octaedro central obtemos o primeiro nível do fractal que consiste em quatro tetraedros semelhantes. Aplicando o mesmo processo em cada um dos quatro tetraedros restantes obteremos o segundo nível de construção do fractal.

Note que a cada nível de construção a quantidade de tetraedros será o quádruplo da quantidade do nível anterior e a medida da aresta será a metade da medida da aresta dos tetraedros do nível anterior.

Assim, no nível de construção n do fractal, teremos 4^n tetraedros com arestas medindo $\frac{1}{2^n}$ da aresta do tetraedro inicial.

Figura 14 – Construção do tetraedro de Sierpinski



Fonte: personales.unican.es/alvareze/estalmat/Fractales/page_18.htm

A área da superfície deste fractal se mantém inalterada a cada nível de construção. No nível 0 de construção a área é dada por $l^2\sqrt{3}$, onde l é a aresta do tetraedro. Já no nível 1, a área da superfície é o quádruplo da área da superfície do tetraedro de aresta $\frac{1}{2}l$. Assim, no nível 1, a área da superfície é $4 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \sqrt{3} = l^2\sqrt{3}$. Observemos que a cada nível do tetraedro são removidos 4 triângulos de cada face do tetraedro, cada um com $\frac{1}{4}$ da área da face do tetraedro anterior e são acrescidos 4 triângulos cuja área é $\frac{1}{4}$ da área de uma face do tetraedro anterior.

Analisemos agora o volume V_n do tetraedro.

NÍVEL (n)	**VOLUME (V_n)**
0	V_o
1	$V_1 = \frac{1}{2}V_0$
2	$V_2 = \frac{1}{2}V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V_0$
...	
n	$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0$

Após infinitas iterações o volume do tetraedro será dado por

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 = V_0 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Note que enquanto a área da superfície se mantém inalterada a cada iteração, o volume tende a zero.

5.5 Explorando um fractal circular

Observemos o seguinte enunciado:

(UFPA-2005 Modificada) A Figura 2 abaixo é comumente reconhecida como um "fractal" (onde pequenas partes são cópias reduzidas do todo) e é constituída por uma infinidade de círculos de raios cada vez menores. Sua construção é dada a seguir. A partir de um triângulo equilátero ABC, cujo lado tem comprimento L, considere a circunferência nele inscrita.

A reta paralela ao lado $\overline{BC}$ e tangente à circunferência inscrita intersecta o lado $\overline{AB}$ no ponto D e o lado $\overline{AC}$ no ponto E, formando um novo triângulo equilátero ADE.

Fazendo construções equivalentes para os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ determinamos dois novos triângulos equiláteros BFG e CHI.

Para cada um dos triângulos ADE, BFG e CHI, repetimos o processo acima, obtendo três novas circunferências inscritas e nove triângulos menores.

Esse processo pode ser repetido indefinidamente, gerando círculos cada vez menores e formando a Figura 2.

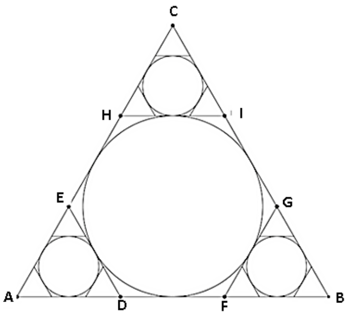


Figura 1

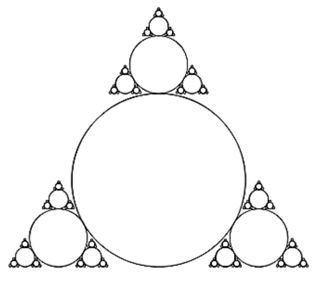


Figura 2

Sejam $r_0, r_1, \dots, r_n$, $n \in \mathbb{N}$ os raios das circunferências correspondentes as etapas $0, 1, \dots, n$, respectivamente. E sejam $h_0, h_1, \dots, h_n$, $n \in \mathbb{N}$ as alturas correspondentes aos triângulos equiláteros nas etapas $0, 1, \dots, n$, respectivamente.

Assim,

$$r_0 = \frac{1}{3} h_0$$

$$r_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} h_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 h_0$$

$$r_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} h_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 h_0$$

De modo que

$$r_n = \frac{1}{3^{n+1}} h_0$$

E sejam $A_0, A_1, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$ as áreas delimitadas pelas circunferências de raio $r_0, r_1, \dots, r_n$, respectivamente. Assim,

$$A_0 = \pi r_0^2 = \pi \left(\frac{1}{3} h_0\right)^2 = \frac{\pi h_0^2}{3^2}$$

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 h_0\right)^2 = \frac{\pi h_0^2}{3^4}$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 h_0\right)^2 = \frac{\pi h_0^2}{3^6}$$

De modo que

$$A_n = \pi r_n^2 = \pi \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} h_0\right)^2 = \frac{\pi h_0^2}{3^{2(n+1)}}$$

Sejam $C_0, C_1, \dots, C_n$, $n \in \mathbb{N}$ a quantidade de circunferências de mesmo raio, correspondentes as etapas $0, 1, \dots, n$, respectivamente. Assim,

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 3$$

$$C_3 = 3^2$$

$$\vdots$$

$$C_n = 3^n$$

A área total S_n delimitada pelas circunferências de mesmo raio é dada por

$$S_n = C_n \cdot A_n$$

$$S_n = 3^n \cdot \frac{\pi h_0^2}{3^{2(n+1)}}$$

$$S_n = \frac{\pi h_0^2}{3^{n+2}}$$

A área total delimitada pelas circunferências, visto que as etapas são infinitas, é dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{\pi h_0^2}{3^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ corresponde ao somatório dos termos da progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 1, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{\pi h_0^2}{3^2}\frac{3}{2} = \frac{\pi h_0^2}{6}$$

Mas, $h_0^2 = \frac{3}{4}L^2$. Desse modo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{\pi L^2}{8}$$

5.6 Dimensão fractal

Os objetos fractais têm autossimilaridade em várias escalas. Pequenas partes de um objeto contêm cópias reduzidas do todo.

Consideremos um objeto a ser subdividido em n cópias de si mesmo na escala k, sua dimensão D satisfaz

$$n = \left(\frac{1}{k}\right)^D$$

Para compreendermos melhor essa afirmação, vamos analisar algumas figuras geométricas que possuem autossimilaridade.

Um segmento de reta tem dimensão 1. Se dividirmos o segmento em 2 partes iguais, obteremos 2 cópias reduzidas da figura original, cada uma com razão de semelhança $\frac{1}{2}$. Observemos que $2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$.

Um quadrado tem dimensão 2. Se dividirmos os lados do mesmo em 3 partes iguais, obteremos 9 cópias reduzidas do quadrado original, cada uma com razão de semelhança $\frac{1}{3}$. Observemos que $9 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^2$.

Um cubo tem dimensão 3. Se dividirmos as arestas do cubo em duas partes iguais, obteremos 8 cópias reduzidas do cubo original, cada uma com razão de semelhança $\frac{1}{2}$. Observemos que $9 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^3$.

Vejamos que cada uma das situações citadas satisfaz a

$$n = \left(\frac{1}{k}\right)^D$$

A partir disso, podemos calcular a dimensão de objetos com autossimilaridade estrita, isto é, objetos que suas cópias são sempre idênticas e obtidas através do mesmo fator de redução. Os fractais utilizados neste trabalho têm autossimilaridade estrita.

$$n = \left(\frac{1}{k}\right)^D$$

$$\ln n = \ln \frac{1}{k^D}$$

$$\ln n = \ln 1 - \ln k^D$$

$$\ln n = -D \ln k$$

$$D = -\frac{\ln n}{\ln k}$$

A título de exemplo, vamos calcular a dimensão fractal do conjunto de Cantor, da Curva de Koch e do tetraedro de Sierpinski através desse método.

O primeiro nível do conjunto de cantor possui duas cópias reduzidas de escala $\frac{1}{3}$, então

$$D = -\frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$$

A dimensão fractal do conjunto de Cantor está entre 0 e 1.

A curva de Koch, no primeiro nível, tem 4 cópias com escala $\frac{1}{3}$. Nesse caso,

$$D = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26$$

Isto é, a dimensão fractal da curva de Koch está entre 1 e 2.

O tetraedro de Sierpinski, no primeiro nível, tem 4 cópias de escala $\frac{1}{2}$. Assim,

$$D = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$$

A dimensão fractal do tetraedro de Sierpinski é 2.

6 CONCLUSÃO

Fundamentado na leitura de artigos e livros sobre fractais e ensino de álgebra e na experiência docente buscamos, através da investigação, da resolução de problemas, da contextualização, na aprendizagem significativa e alinhados a BNCC, introduzir conceitos e desenvolver habilidades relacionadas à unidade temática álgebra, próprias para o 7º ano do ensino fundamental, por meio da exploração dos fractais Triminó, Curva de Koch e Árvore pitagórica. Atividades envolvendo esses objetos são pedagogicamente riquíssimas e didaticamente envolventes, da sua beleza e suas características. Sendo ótimas para introdução, desenvolvimento e exercício de conceitos matemáticos, não apenas relacionados à álgebra.

A BNCC trata os processos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem como formas privilegiadas da atividade matemática. Temos na exploração dos fractais oportunidade de trabalhar com todos esses processos e possibilitar aos alunos fazer matemática, compreender conceitos e aprender de forma significativa.

As atividades sugeridas neste trabalho, apesar de curtas, permitem umas várias discussões relacionadas à álgebra e a ligação com outras unidades temáticas na área de matemática. Salientamos a importância dessas discussões e o resgate desses conceitos provenientes de outras unidades temáticas para a aprendizagem efetiva.

Esse trabalho busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da matemática, mais especificamente da aprendizagem da álgebra. Trabalhamos na perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico, do favorecimento do raciocínio lógico e crítico, estimulando a investigação, a resolução de problemas e na busca de uma atividade matemática rica em descobertas e prazerosa.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. **A Matemática na educação básica.** Lisboa: Ministério da Educação,1999.

ALMEIDA, Jadilson Ramos; CÂMARA, Marcelo Santos. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paraense de Educação Matemática**, Paraná, v. 6, n. 10, p. 34-60, 2017. Disponível em: http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/1124. Acesso em: 14 jan. 2022.

ARAUJO, Elizabeth Adorno de. Ensino de álgebra e formação de professores. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331- 346, 2008. Disponível em: revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/1740/1130. Acesso em: 05 fev. 2022.

BARBOSA, Ruy Madson. **Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BORRALHO, António; BARBOSA, Elsa. **Pensamento algébrico e exploração de padrões**. 2009. Trabalho apresentado no Encontro Nacional de Professores de Matemática, 25., 2009, Viana do Castelo.

BRANCO, Neusa Cristina Vicente. **O estudo de padrões e regularidades no Desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuições para Repensar...a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78-91, 2016. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384. Acesso em: 29 jan. 2022.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MANDELBROT, Benoît. Fractais. In: FAUSTO, Rui, FIOLHAIS; Carlos; QUEIRÓ, João Filipe (org.). **Fronteiras da Ciência**: desenvolvimentos recentes, desafios futuros. Coimbra: Gradiva, 2003. p. 63-88.

MOURA, Elis Coimbra de; SANTOS, Elisa Regina dos. Conjunto de Cantor: um conjunto não enumerável com medida de Lebesgue zero. Conjunto de Cantor: um conjunto não enumerável com medida de Lebesgue zero. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. *In*: **COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA**. 31., 2017. Rio de Janeiro, 30 jul. 2017 a 05 ago. 2017. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/07/31CBM-PECMoura.pdf. Acesso em: 05 mai. 2022.

NCTM. **Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar**. Lisboa: APM/IIE, 1991.

OLIVEIRA, Marcos Aurélio Tomaz de. A geometria do conjunto de Cantor, do tapete de Sierpinski e da esponja de Menger. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

PONTE, João Pedro da. Números e álgebra no currículo escolar. *In*: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Org.). **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC. 2009. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf. Acesso em: 14 jan. 2022.

SESSA, Carmen. **Iniciação ao estudo didático da álgebra**: origens e perspectivas. São Paulo: SM, 2009.

Usiskin, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Tradução de Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALE, Isabel; PALHARES, Pedro; CABRITA, Isabel; BORRALHO, António. Os padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *In*: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Org.). **Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2007. p. 193-212.

ANEXO A – EXPLORANDO O FRACTAL TRIMINÓ (FRENTE)

Construção do fractal Triminó.

1) Nível 1: Pinte três quadradinhos de modo a obter um L (triminó).
2) Nível 2: Faça um novo desenho, substituindo cada quadradinho do nível anterior por um triminó L.
3) Nível 3: Faça um novo desenho, substituindo cada quadradinho do nível anterior por um triminó L.
4) Repita o procedimento para obter outros níveis.

Exploração:

A) Construa os três primeiros níveis do fractal triminó.

B) Para construir o nível 4 desse fractal, quantos quadradinhos teríamos que pintar?

ANEXO B – EXPLORANDO O FRACTAL TRIMINÓ (VERSO)

C) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quadradinhos que serão pintados em um nível n qualquer.

Nível	Termo	Decomposição	Potência
1			
2			
3			
4			
...			
n			

D) Para construir o nível 10 desse fractal, quantos quadradinhos teríamos que pintar?

ANEXO C – EXPLORANDO A CURVA DE KOCH (FRENTE)

Construção da Curva de Koch:

1) Sobre a malha triangular, desenhe um segmento medindo 9 u.c.

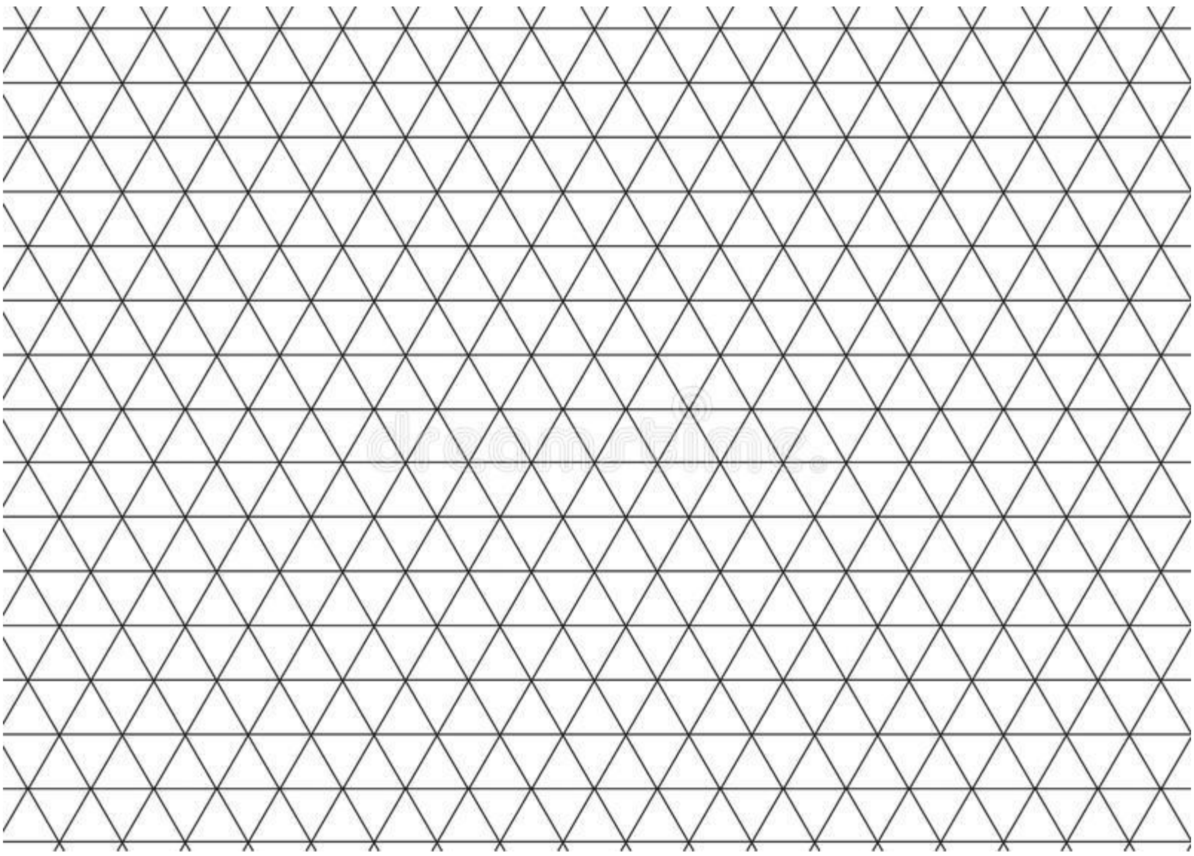
2) Divida esse segmento em três partes iguais.

3) Sobre a parte central, construa um triângulo equilátero e, em seguida, apague a parte central.

4) Repita o procedimento em cada uma das partes.

Exploração:

A) Desenhe os três primeiros níveis do fractal curva de Koch.



B) Escreva uma sequência a partir da quantidade de segmentos usados em cada figura.

ANEXO D – EXPLORANDO A CURVA DE KOCH (VERSO)

Use a tabela para analisar os termos da sequência obtida.

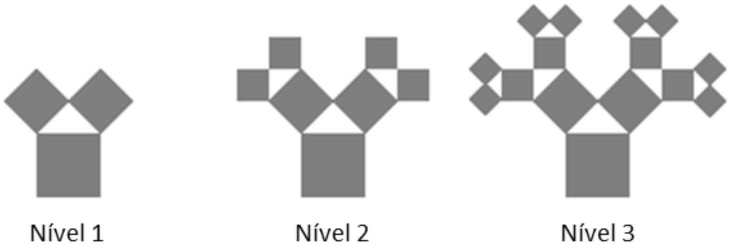
Nível de construção	**Quantidade de segmentos**
1	
2	
3	
4	
...	
n	

C) Escreva uma fórmula para encontrar um termo qualquer da sequência a partir do anterior.

D) Escreva uma fórmula para encontrar qualquer termo da sequência a partir do nível de construção.

ANEXO E – EXPLORANDO A ÁRVORE PITAGÓRICA

Observe a sequência figural:



A) Escreva uma fórmula para calcular a quantidade de quadradinhos que serão pintados em um nível n qualquer.

B) Sabendo que a 11ª figura da sequência apresenta 1023 triângulos retângulos. Quantos triângulos retângulos temos a 10ª figura da sequência?