UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

KATIANE SOUZA DE OLIVEIRA

PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GNU OCTAVE E O GEOGEBRA

CURITIBA

2023

KATIANE SOUZA DE OLIVEIRA

PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS COM O GNU OCTAVE E O GEOGEBRA

Activity proposals to solve arithmetic, algebraical, and geometric problems with Gnu Octave and GeoGebra

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/32891>.
Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós
Coorientadora: Profa. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA

2023

Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.

Paulo Freire (1921 − 1997): educador e filósofo brasileiro.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho atividades com o GNU Octave e o GeoGebra abordando problemas cuja solução está associada a problemas presentes em contos de duas obras de Malba Tahan: “O homem que calculava” e “Matemática divertida e curiosa”. Para cada atividade, descrevemos brevemente uma sequência didática que poderá nortear a ação do professor de matemática da Educação Básica. Essas sequências abordam problemas de aplicação de conteúdos, tais como funções, áreas, volumes e seções cônicas, que já tenham sido trabalhados em sala de aula.

Palavras-chave: divisibilidade; realce de imagens; duplicação do cubo; seções cônicas; releitura de imagens.

ABSTRACT

In this work, we present activities with GNU Octave and GeoGebra addressing problems whose solution is associated with tales from Malba Tahan: “The man who counted” and “Amusing and curious mathematics”. For each activity, we briefly describe a didactic sequence that can guide the action of the Basic Education mathematics teacher. These sequences address problems of applying content, such as functions, areas, volumes, and conic sections, that have already been worked on in the classroom.

Keywords: divisibility; image enhancement; cube duplication; conic sections; rereading images.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
MON	Museu Oscar Niemeyer
RCEMP	Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná
SPRING	Sistema de Processamento de Informações Georeferenciadas

SUMÁRIO

1 ATIVIDADES DIDÁTICAS COM O GNU OCTAVE

1.1 ATIVIDADE 1.1: LANCHE COM AMIGOS

1.1 Nível: Ensino Fundamental II.

1.2 Ano: 7º.

1.3 Número de aulas: 5 (50 minutos cada).

1.4 Competências específicas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018):

- ◇ Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- ◇ Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

1.5 Habilidades específicas na BNCC:
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora;
(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor;
(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

1.6 Conteúdos abordados: critérios de divisibilidade; valor numérico.

1.7 Objetivos:

- ◇ Calcular quocientes e restos;
- ◇ Aplicar o critério de divisibilidade por 3;
- ◇ Identificar as variáveis do problema, atribuindo valores numéricos às mesmas;
- ◇ Criar um script no GNU Octave para resolver o Problema 1.1;
- ◇ Generalizar o Problema 1.1, explorando outros critérios de divisibilidade.

1.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

1.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; generalização do Problema 1.1.

Figura 1.1 – Amigos confraternizando

Fonte: Shutterstock (2023, n.p).

O Problema 1.1, que aborda divisibilidade, e as Questões 1.1 a 1.2 regem a Atividade 1.1.

Problema 1.1. *Mabel, Marise e Junior são amigos e combinaram de se encontrar na Confeitaria Aroma e Sabor para tomar um café no domingo à tarde – Figura 1.1. Após muita conversa e nostalgia, pediram a conta. O valor total da despesa foi igual a* R\$ 136,00. *Marise propôs o seguinte: dividir a conta em três partes iguais, considerando válido apenas o quociente natural; caso não fosse possível, somar ao total da conta o menor valor possível até obter uma divisão exata. Além disso, sugeriu que o valor extra fosse doado para a "caixinha" (recipiente onde estão as gorjetas; é repartida entre os atendentes do dia após o expediente).*

Questão 1.1. *Qual é o valor que cada amigo deverá pagar segundo a proposta de Marise?*

Questão 1.2. *Qual será o valor extra direcionado à "caixinha"?*

Solução (Problema 1.1)**.** *Temos que o valor total da despesa dos três amigos foi de* R\$ 136,00. *Assim, usando congruências, podemos escrever* $136 \equiv 1 \bmod 3$*, ou seja, o resto da divisão de* 136 *por* 3 *resulta em* 1.

Para que a divisão resulte em um quociente natural, o total da despesa deve ser um número divisível por 3*. Como o resto da divisão de* 136 *por* 3 *é igual a* 1*, basta somarmos* 2 *ao resto* 1*, uma vez que devemos considerar o menor valor possível a ser somado. Logo, o total da conta passa a ser* R\$ 138,00*, e cada um dos três amigos deve pagar* R\$ 46,00*. O valor destinado à "caixinha" será de* R\$ 2,00*, exatamente o valor adicionado para tornar a divisão por* 3 *exata.*

Para configurar o script no GNU Octave, devemos considerar as seguintes variáveis:

- ◇ a*: corresponde ao valor total da despesa, ou seja, o dividendo;*
- ◇ b*: refere-se ao número de amigos que repartiram a despesa na confeitaria, isto é, o divisor;*
- ◇ c*: o valor da "caixinha", isto é, o valor a ser somado ao total da despesa para que o quociente seja um número natural;*
- ◇ $resto$*: refere-se ao resto da divisão de* a *por* b*;*
- ◇ $valor\,individual$*: o valor a ser pago por cada integrante do grupo de amigos.*

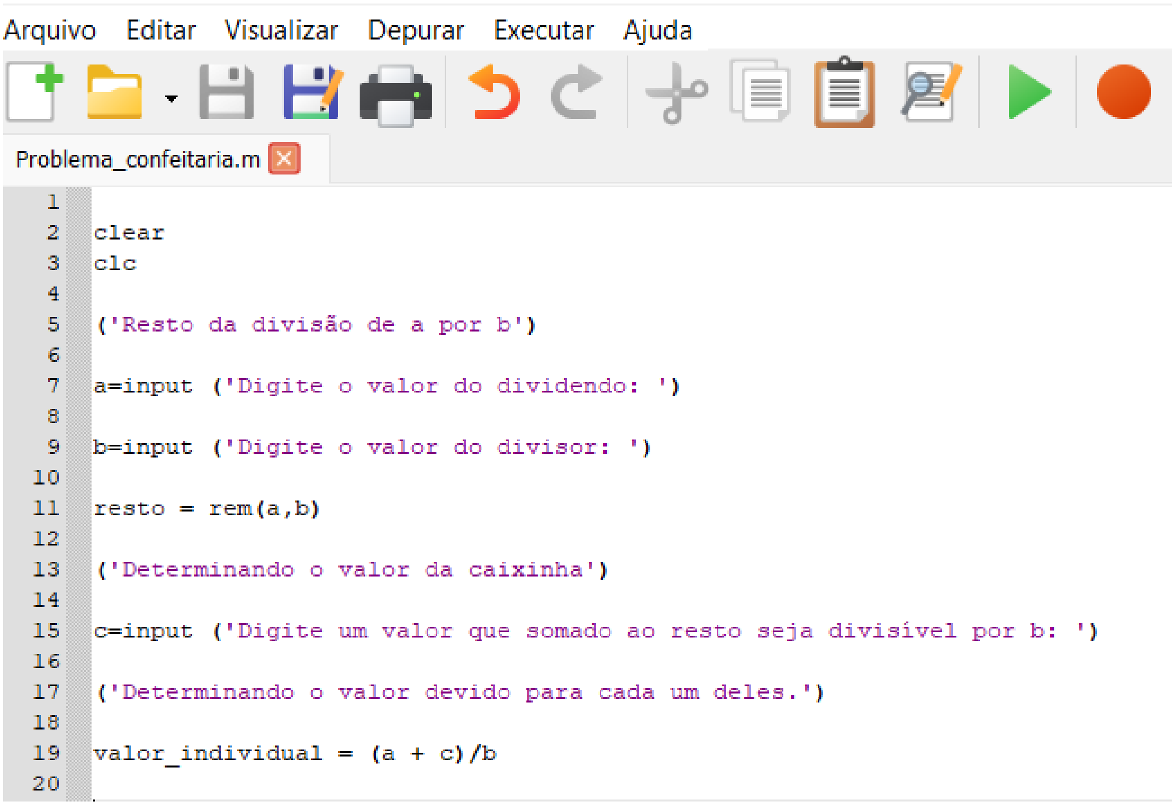
As variáveis a, b e c são dados de entrada, isto é, fornecidos pelo usuário; as variáveis $resto$ e $valor\ individual$ são dados de saída, ou seja, calculados pelo GNU Octave. Ao elaborar um script no GNU Octave, é importante:

1. *incluir textos curtos que direcionem o raciocínio. Os textos podem ser escritos entre parênteses e aspas simples, como, por exemplo, (‘Resto da divisão de* 136 *por* 3*’);*

2. *usar os comandos “clear” e “clc” no início do script – Figura 1.2. Estes comandos realizam a limpeza dos dados do ambiente de trabalho e da janela de comandos, respectivamente.*

Uma das funções pré-definidas no GNU Octave é ***rem(a,b)****. Esta função permite determinar o resto da divisão de a por b. A Figura 1.2 ilustra um script que pode ser usado na solução do Problema 1.1.*

Figura 1.2 – Script no GNU Octave para solucionar o Problema 1.1



Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Clicando em executar, temos que fornecer na Janela de Comandos os valores de a, b e c – Figura 1.3.

A Figura 1.4 ilustra a solução do Problema 1.1, destacando o valor da “caixinha” c e o $valor\ individual$ a ser pago por cada um dos três amigos.

Figura 1.3 – Janela de Comandos no GNU Octave para inserção dos valores das variáveis: (a) a; (b) b; (c) c

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: |
```

(a)

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: 136
a = 136.00
Digite o valor do divisor:
```

(b)

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: 136
a = 136.00
Digite o valor do divisor: 3
b = 3.00
resto = 1.00
ans = Determinando o valor da caixinha
Digite um valor que somado ao resto seja divisível por b:
```

(c)

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

Figura 1.4 – Solução do Problema 1.1 via GNU Octave

```
Janela de Comandos
ans = Resto da divisão de a por b
Digite o valor do dividendo: 136
a = 136.00
Digite o valor do divisor: 3
b = 3.00
resto = 1.00
ans = Determinando o valor da caixinha
Digite um valor que somado ao resto seja divisível por b: 2
c = 2.00
ans = Determinando o valor devido para cada um deles.
valor_individual = 46.00
>>
```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Observação 1.1. *O script ilustrado na Figura 1.2 permite generalizar o Problema 1.1. Desta maneira, o professor de matemática pode empregá-lo na Educação Básica para explorar outros critérios de divisibilidade.*

1.2 ATIVIDADE 1.2: REALÇANDO IMAGENS

De acordo com Gonzalez e Woods (2000, p. 4): "O termo *imagem monocromática* refere-se à função bidimensional de intensidade da luz $f(x, y)$, onde x e y denotam as coordenadas espaciais e o valor de f em qualquer ponto (x, y) é proporcional ao brilho (ou *níveis de cinza*) da imagem naquele ponto".

Ainda, segundo os mesmos autores:

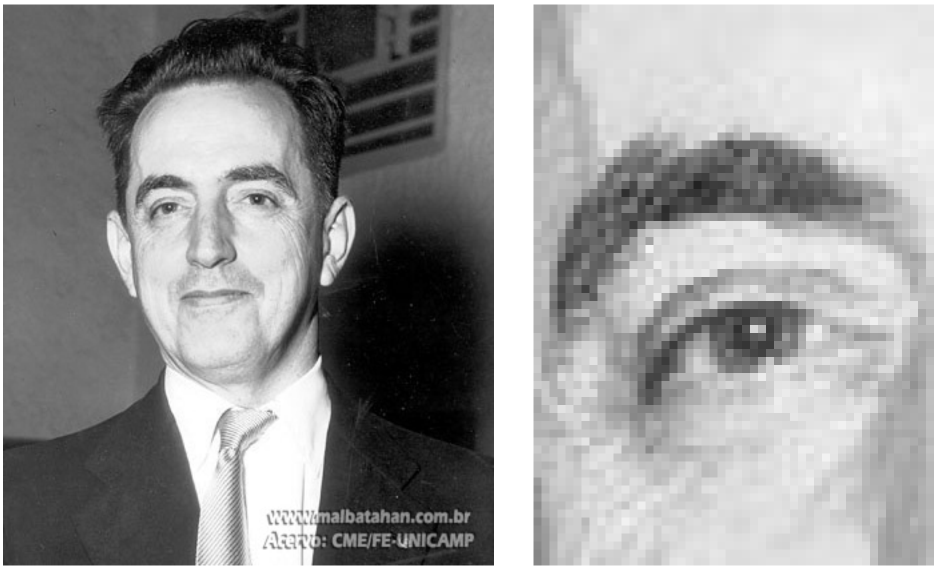
> $[\cdots]$ Uma imagem *digital* é uma imagem $f(x, y)$ discretizada tanto em coor-

> denadas espaciais quanto em brilho. Uma imagerm digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices de linhas e de colunas identificam um ponto na imagem, e o correspondente valor do elemento da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto. Os elementos dessa matriz digital são chamados de *elementos da imagem, elementos da figura, "pixels" ou "pels"*, estes dois últimos, abreviações de "picture elements" (elementos de figura) (Gonzalez; Woods, 2000, p. 4-5).

O termo "pixel" originou-se da união de duas palavras da língua inglesa: *picture* e *element*, isto é, imagem e elemento. Desse modo, podemos dizer que os pixels são os elementos que compõem uma imagem digital (Wolffenbüttel, 2006).

Segundo Wolffenbüttel (2006, n.p): " Um pixel é a menor unidade que consegue conter uma informação individual de cor. Portanto, quanto mais pixels tiver uma imagem, melhor definição ela terá". Podemos observar os pixels que compõem uma imagem quando a ampliamos. Na ampliação, a imagem perde nitidez e os pixels aparecem no formato de pequenos quadrados, como ilustra a Figura 1.5.

Figura 1.5 – (a) Fotografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza; (b) recorte ampliado da fotografia do Professor Júlio Cesar de Mello e Souza



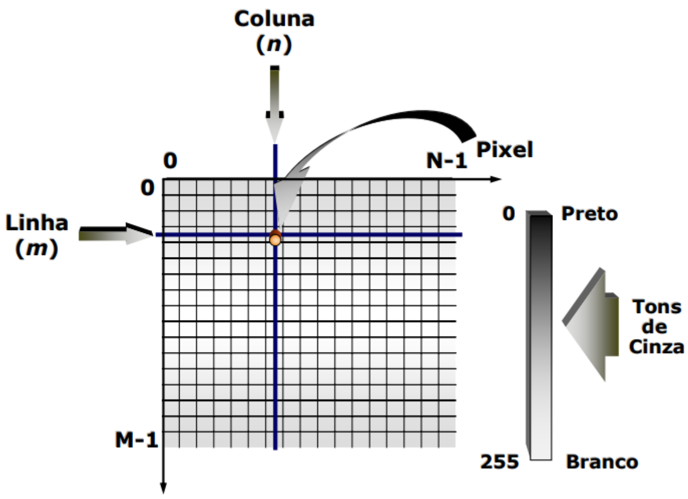
(a) (b)

Fonte: Pereira, Salles, Pereira (2017, n.p).

Queiroz e Gomes (2001, p. 8) mencionam que: "Cada ponto na grade bidimensional que representa a imagem digital é denominado elemento de imagem ou pixel". A Figura 1.6 ilustra a notação matricial de uma imagem bidimensional, usada na localização de um pixel no arranjo de pixels.

Na Figura 1.6, o índice m denota a posição da linha na qual o pixel se encontra, enquanto o índice n denota a posição da coluna. Se a imagem digital contiver M linhas e N colunas, então $m = 0, \ldots, M-1$ e $n = 0, \ldots, N-1$. O sentido de leitura (varredura) é da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Figura 1.6 – Representação de uma imagem digital bidimensional



Fonte: Queiroz e Gomes (2001, p. 8).

Segundo Queiroz e Gomes (2001, p. 15): “O realce de contraste visa o melhoramento da qualidade das imagens sob o ponto de vista subjetivo do olho humano, sendo usualmente empregada como uma etapa de pré-processamento em aplicações de reconhecimento de padrões”. Ainda quanto ao realce de contraste:

> O contraste entre dois alvos de uma cena pode ser definido como a razão entre os seus níveis de cinza médios. Fundamentada neste conceito, a manipulação do contraste dos objetos presentes em uma imagem digital consiste em um remapeamento radiométrico de cada pixel da imagem, a fim de aumentar a discriminação visual entre eles. Embora a escolha do mapeamento adequado seja, em princípio, essencialmente empírica, uma análise prévia do histograma da imagem se afigura, em muitos casos, bastante útil (Queiroz; Gomes, 2001, p. 15).

O objetivo da técnica “realce de contraste” é aumentar a qualidade das imagens, ou seja, deixá-las mais nítidas sob os critérios subjetivos do olho humano.

> A escolha do mapeamento direto adequado é, em geral, essencialmente empírica. Entretanto, um exame prévio do histograma da imagem pode ser útil. O histograma de uma imagem descreve a distribuição estatística dos níveis de cinza em termos do número de amostras ("pixels") com cada nível. A distribuição pode também ser dada em termos da percentagem do número total de "pixels"na imagem. Pode ser estabelecida uma analogia entre o histograma de uma imagem e a função densidade de probabilidade, que é um modelo matemático da distribuição de tons de cinza de uma classe de imagens (SPRING/INPE, 2006, n.p).

Catarina (2023) define *histograma de uma imagem* como sendo um gráfico que representa visualmente a distribuição das intensidades ou cores dos pixels de uma imagem. Mais especificamente, conforme definem Queiroz e Gomes (2001), o histograma de uma imagem traduz a distribuição estatística dos seus níveis de cinza.

> O eixo horizontal começa com uma cor preta pura no lado esquerdo do histograma, passa por sombreados, tons médios e realces, até chegar ao branco mais

brilhoso no lado direito. O eixo vertical representa a frequência ou a intensidade de cada tom, com picos de alta frequência e vales nos níveis inferiores (Tryforos, 2023, n.p).

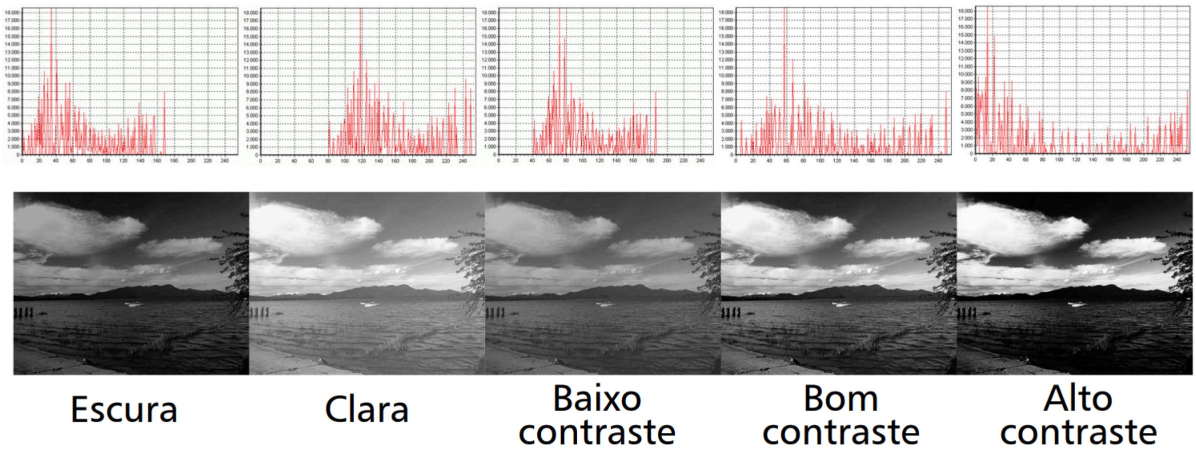
Deste modo, considere uma imagem digital $f(x, y)$ composta por M linhas e N colunas. O histograma $H_f(C)$ da imagem é definido pela igualdade:

$$H_f(C) = \frac{n_C}{MN},$$

onde n_C corresponde ao número de vezes em que o nível de cinza C aparece na imagem (Queiroz; Gomes, 2001).

Ao observar o histograma, podemos estimar o nível médio de contraste e o brilho (imagem clara ou escura) de uma imagem. Na Figura 1.7 temos exemplos de histogramas com manipulação de contraste e o brilho.

Figura 1.7 – Exemplos de histograma com manipulação de contraste e o brilho



Fonte: Catarina (2023, n.p).

Podemos analisar a nitidez de uma imagem através da comparação desta com seu histograma. Assim, considerando no histograma o eixo horizontal (tons de cinza) variando de 0 (preto) a 255 (branco), e o eixo vertical (frequência) variando de 0 a 18000, temos os casos ilustrados na Figura 1.7.

1. **Imagem escura:** reflete no histograma uma maior incidência de tons escuros próximos de zero (preto) com incidência de cinza nas proximidades de 170, e maior frequência de picos f no intervalo $20 \leq f \leq 40$, aproximadamente.

2. **Imagem clara:** reflete no histograma uma maior incidência de tons claros próximos de 255 (branco) com incidência de cinza nas proximidades de 80, e maior frequência de picos f no intervalo $90 \leq f \leq 140$, aproximadamente.

3. **Imagem baixo contraste:** reflete no histograma os níveis de cinza C e maior frequência f nos intervalos aproximados $40 \leq C \leq 190$ e $60 \leq f \leq 90$, respectivamente.

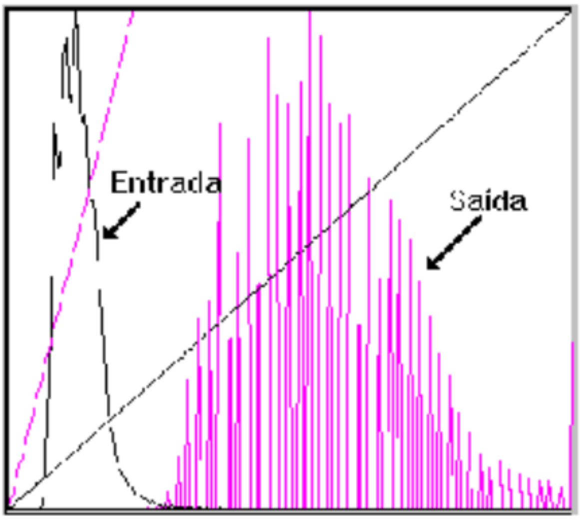
4. **Imagem bom contraste:** neste caso, há maior distribuição dos níveis de cinza em praticamente todo o intervalo $0 \leq C \leq 255$. Já a frequência de picos f varia com maior intensidade no intervalo $50 \leq f \leq 70$.

5. **Imagem alto contraste:** neste caso, também há distribuição dos níveis de cinza em praticamente todo o intervalo $0 \leq C \leq 255$. Porém, a frequência de picos f varia com maior intensidade mais próximo de zero, trazendo um escurecimento da imagem.

Menezes e Almeida (2012, p. 107) ressaltam que: "há duas classes de algoritmos de expansão de histograma que são as mais empregadas: lineares e não lineares". Segundo o Sistema de Processamento de Informações Georeferenciadas (SPRING) (2006, n.p):

> O aumento de contraste por uma transformação linear é a forma mais simples das opções. A função de transferência é uma reta e apenas dois parâmetros são controlados: a inclinação da reta e o ponto de interseção com o eixo X (Figura 1.8). A inclinação controla a quantidade de aumento de contraste e o ponto de interseção com o eixo X controla a intensidade média da imagem final.

Figura 1.8 – Histograma da função de transferência



Fonte: SPRING/INPE (2006, n.p).

A função de mapeamento linear é dada por:

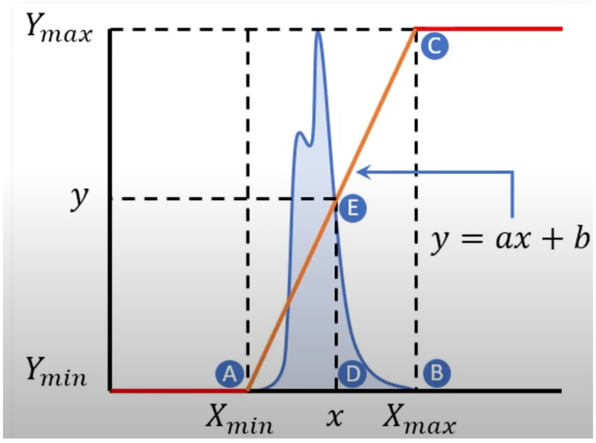
$$Y = AX + B,$$

onde Y representa o novo valor de nível de cinza, X refere-se ao valor original de nível de cinza, A corresponde à inclinação da reta e B é o fator de incremento, definido pelos limites mínimo e máximo fornecidos pelo usuário (SPRING/INPE, 2006).

No histograma da função linear representado na Figura 1.9, os triângulos retângulos ABC e ADE são semelhantes pelo caso AA (ângulo$-$ângulo). Aplicando as razões de semelhança aos dois triângulos, obtemos a função de realce linear sem saturação:

$$\frac{Y_{max} - Y_{min}}{X_{max} - X_{min}} = \frac{y - Y_{min}}{x - X_{min}};$$
$$y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{X_{max} - X_{min}}(x - X_{min}) + Y_{min}. \tag{1.1}$$

Figura 1.9 – Histograma da função linear



Fonte: Statella (2022b, n.p).

Após este breve embasamento teórico, propomos uma atividade sobre o realce de imagem. O Problema 1.2, que aborda matrizes e a função afim, e a Questão 1.3 direcionam a Atividade 1.2.

2.1 Nível: Ensino Médio.

2.2 Série: 1ª.

2.3 Número de aulas: 6 (50 minutos cada).

2.4 Competências específicas no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná - RCEMP (Paraná, 2021):

- ◇ Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral;
- ◇ Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

2.5 Habilidades específicas no RCEMP:
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão);
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática;
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa/box-plot, de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

2.6 Conteúdos abordados: processamento de imagens digitais; matrizes; função afim.

2.7 Objetivos:

- ⋄ Identificar os coeficientes angular e linear da função afim na função de mapeamento linear do constrate de imagem;
- ⋄ Usar o GNU Octave para solucionar o Problema 1.2.

2.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

2.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; aplicação da técnica para realçar outras imagens.

Problema 1.2. *Uma colunista da Revista Alpha foi designada para realizar uma breve homenagem ao ilustre professor Júlio Cesar de Mello e Souza. A foto selecionada pela família do professor corresponde à Figura 1.10, que deverá ser usada na matéria. A colunista pretende realçar a imagem em pontos específicos, como por exemplo, na parte mais clara aplicar uma quantidade menor de realce e na parte mais escura usar uma intensidade maior.*

Questão 1.3. *Como realçar o contraste da Figura 1.10 com o auxílio do GNU Octave?*

Solução (Problema 1.2)**.** *Primeiramente, verificamos se o pacote **"image"** está carregado no GNU Octave usando o comando **pkg list**. Em caso negativo, devemos acessar o link*

<https://gnu-octave.github.io/packages/>,

*baixar o pacote **"image"**, digitar o comando **pkg install (nome do arquivo)**, teclar enter e aguardar.*

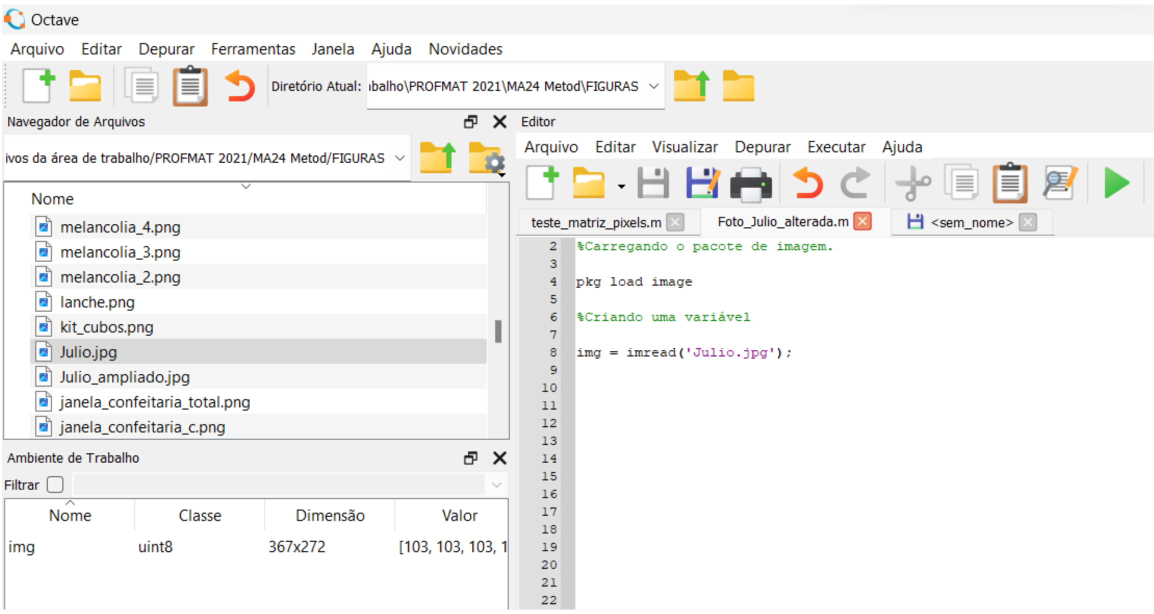
Figura 1.10 – Professor Júlio Cesar de Mello e Souza

Fonte: Pereira, Salles, Pereira (2017, n.p).

Agora estamos aptos a criar um script no GNU Octave para alterar a cor da Figura 1.10. Aconselhamos a começar o script usando os comandos ***clear all***, ***close all*** *e* ***clc*** *para, respectivamente, limpar as variáveis, fechar as imagens excedentes e limpar a janela de comandos, facilitando assim a visualização de todo o processo de criação do script (Statella, 2022a).*

Na área de script, digitamos o comando ***pkg load image*** *para informar ao GNU Octave que usaremos o pacote de imagem. Em seguida, criamos uma variável chamada* ***img*** *usando a função* ***imread****, e digitamos* ***img = imread('Julio.jpg');****, considerando que "Julio.jpg" é o nome do arquivo referente à Figura 1.10. Após, salvamos e executamos para que o GNU Octave reconheça a variável — Figura 1.11 (Statella, 2022a).*

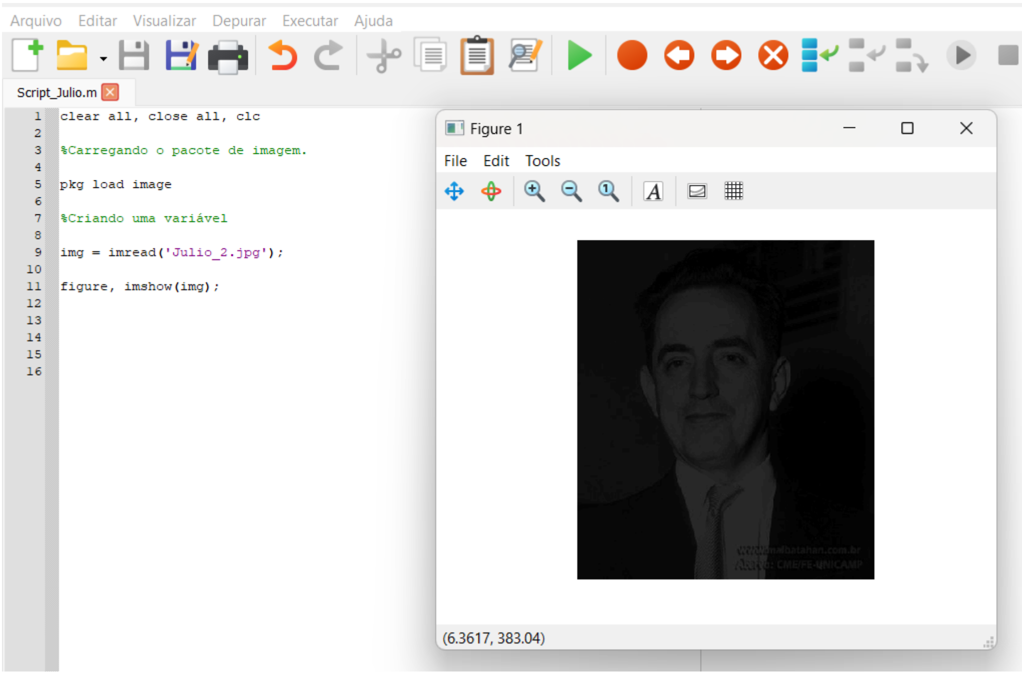
Figura 1.11 – Script no GNU Octave: carregando o pacote de imagem e criando uma variável



Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A Figura 1.11 ilustra, no canto inferior esquerdo, que o GNU Octave criou a variável *img. Usamos o símbolo de porcentagem "%" antes das menções que não queremos que sejam lidas pelo GNU Octave. Para visualizar a Figura 1.11, utilizamos os comandos **figure** e **imshow**. É importante ressaltar que o GNU Octave permite que digitemos vários comandos em uma mesma linha, bastando que os separemos por vírgula (Statella, 2022a). A Figura 1.12 ilustra a visualização da Figura 1.10 no GNU Octave.*

Figura 1.12 – Script no GNU Octave: visualizando a imagem da Figura 1.10



Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

*Digitando o comando **whos img** na janela de comandos do GNU Octave, obtemos informações sobre a imagem atrelada à variável "img" (Statella, 2022a) – Figura 1.13.*

Figura 1.13 – Visualizando informações da Figura 1.10 no GNU Octave

```
Janela de Comandos
>> whos img
Variables visible from the current scope:

variables in scope: top scope

  Attr    Name        Size                     Bytes  Class
  ====    ====        ====                     =====  =====
          img       420x368                   154560  uint8

Total is 154560 elements using 154560 bytes
```

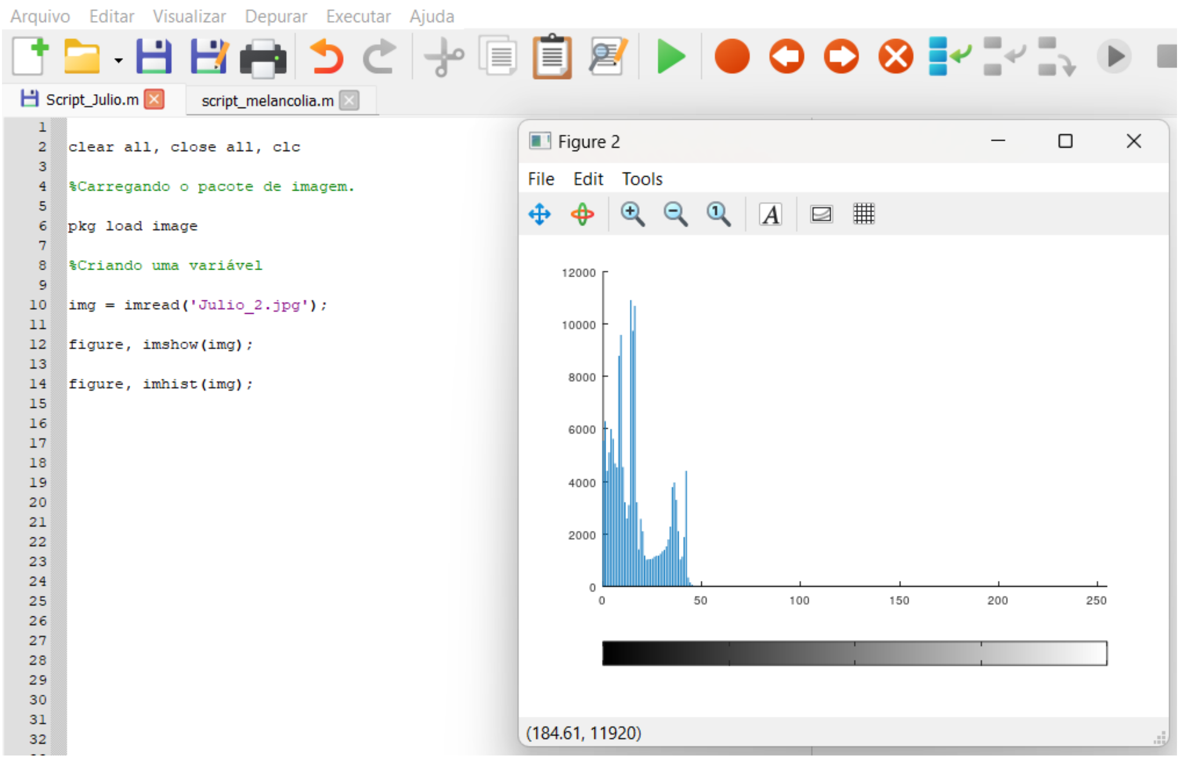
Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A Figura 1.13 ilustra informações da imagem presente na Figura 1.10, tais como nome da variável, tamanho, bytes e classe. A imagem da Figura 1.10 é representada por uma matriz 420×368*, isto é, uma matriz de* 420 *linhas e* 368 *colunas.*

A memória de um computador é uma sequência de bytes, sendo que cada byte é uma sequência de 8 bits (dígitos binários). Desta forma, "toda sequência de s *bytes — ou seja,* $8s$ *bits — representa um número natural no intervalo fechado* $\left[0, \ldots, 2^{8s} - 1\right]$*. Se* $s = 1$*, por exemplo, o intervalo vai de* 0 *a* $(2^8 - 1)$*, isto é, de* 0 *a* 255*" (Feofiloff, 2019, n.p). Na Figura 1.13, a classe da imagem na Figura 1.10 é* ***uint8****. Isto significa que a matriz que representa a imagem é composta por números inteiros positivos de* 8 *bits, ou seja, os tons de cinza variam de* 0 *a* 255*, onde* 0 *(*Y_{min}*) representa a cor preta e* 255 *(*Y_{max}*) a cor branca (Statella, 2022a).*

Além das informações que caracterizam a imagem da Figura 1.10, podemos gerar no GNU Octave o histograma da imagem. Para tanto, digitamos no script os comandos ***figure*** *e* ***imhist(img)*** *– Figura 1.14.*

Figura 1.14 – Histograma da imagem na Figura 1.10



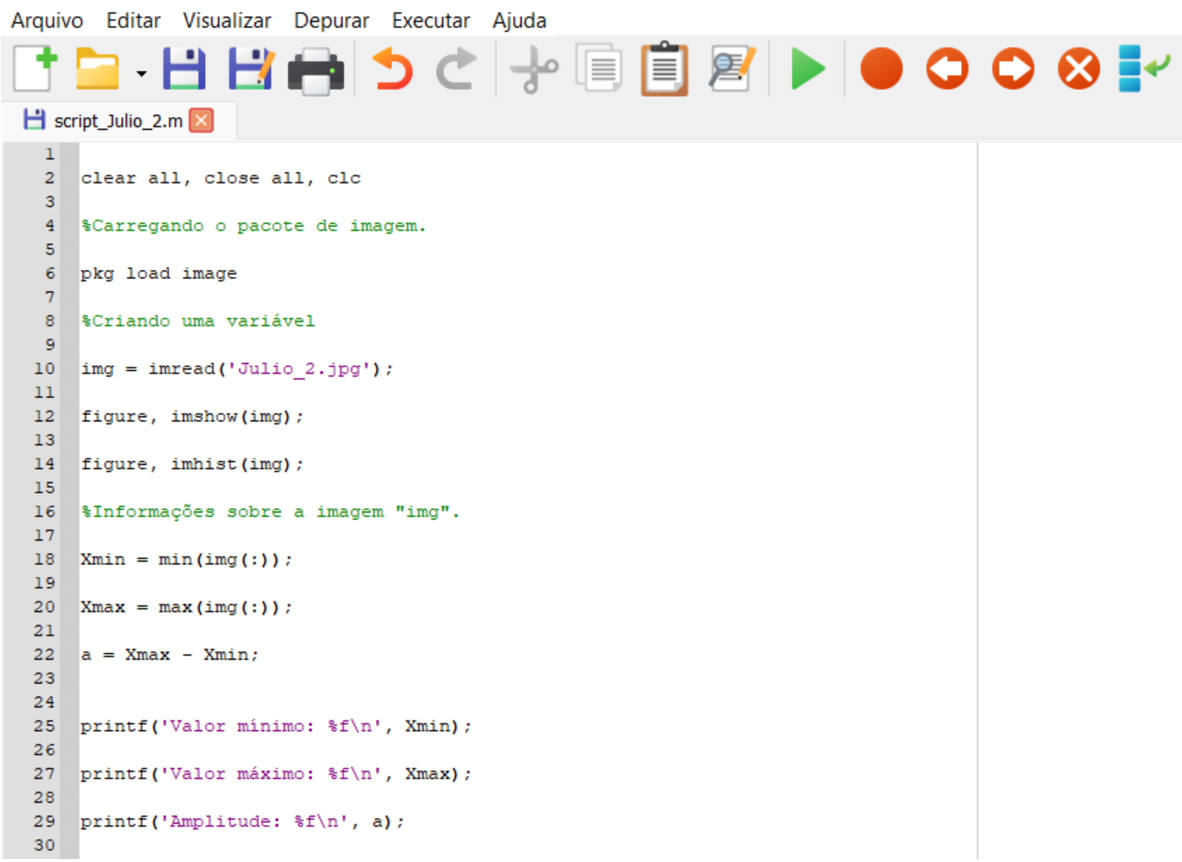
Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

No histograma presente na Figura 1.14, os picos de frequência estão concentrados à esquerda, indicando que há maior frequência de tons escuros na imagem da Figura 1.10. Para realçar esta imagem, precisamos determinar a função de realce linear sem saturação (1.1)*. As funções do GNU Octave descritas a seguir calculam os valores para estabelecer* (1.1)*.*

- ◇ ***min(variável(l,c))****: retorna o valor mínimo* X_{min} *da imagem em uma escala de* 0 *a* 255*.*
- ◇ ***max(variável(l,c))****: retorna o valor máximo* X_{max} *da imagem em uma escala de* 0 *a* 255*.*
- ◇ ***amplitude****: retorna a diferença entre os valores máximo e mínimo.*

*Para visualizar os valores retornados pelas funções descritas anteriormente, usamos a instrução **printf (template, variável)** e $\%f$ para retornar o valor real das variáveis com precisão simples. Além disso, é válido acrescentar após $\%f$ o comando "$\backslash n$" para forçar uma mudança de linha (Octave, 2013). A Figura 1.15 ilustra o script atualizado com as funções e instruções de visualização de dados, enquanto a Figura 1.16 mostra a janela de comandos exibindo os dados retornados pelo GNU Octave.*

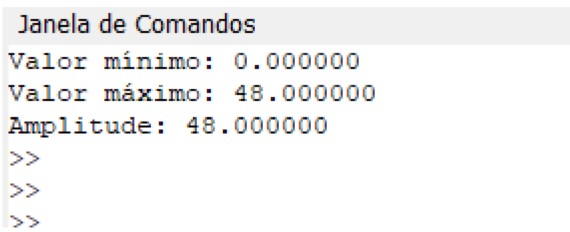
Figura 1.15 – Script no GNU Octave para realce da imagem na Figura 1.10




```
clear all, close all, clc

%Carregando o pacote de imagem.

pkg load image

%Criando uma variável

img = imread('Julio_2.jpg');

figure, imshow(img);

figure, imhist(img);

%Informações sobre a imagem "img".

Xmin = min(img(:));

Xmax = max(img(:));

a = Xmax - Xmin;


printf('Valor mínimo: %f\n', Xmin);

printf('Valor máximo: %f\n', Xmax);

printf('Amplitude: %f\n', a);
```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Figura 1.16 – Dados retornados pelo GNU Octave segundo o script para realce da imagem na Figura 1.10




```
Valor mínimo: 0.000000
Valor máximo: 48.000000
Amplitude: 48.000000
>>
>>
>>
```

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Ainda, é interessante criarmos dados de entrada para Y_{min} e Y_{max}, estes variando de 0 a 255, que representarão os novos valores de contraste da imagem. Assim, com os valores retornados pelo GNU Octave, podemos utilizar a função (1.1) *no script para aplicar o realce* *linear sem saturação à imagem. Porém, devemos antes transformar a variável "img" de uint8 para double, criando a variável y. Em seguida, convertemos y de double para uint8. Incluindo estes novos comandos, temos o script completo para o realce linear sem saturação – Figura 1.17.*

Figura 1.17 – Realce linear sem saturação no GNU Octave: (a) script completo; (b)–(c) janela de comandos para inserção dos valores de Y_{max} e Y_{min}

Arquivo Editar Visualizar Depurar Executar Ajuda

script_Julio_2.m

```
clear all, close all, clc

%Carregando o pacote de imagem.

pkg load image

%Criando uma variável

img = imread('Julio_2.jpg');

figure, imshow(img);

figure, imhist(img);

%Informações sobre a imagem "img".

Xmin = min(img(:));

Xmax = max(img(:));

a = Xmax - Xmin;


printf('Valor mínimo: %f\n', Xmin);

printf('Valor máximo: %f\n', Xmax);

printf('Amplitude: %f\n', a);


%Aplicando realce linear sem saturação.

Ymax = input ('Digite o valor de Ymax:');
Ymin = input ('Digite o valor de Ymin:');

x = double(img);
b= (Ymax-Ymin)/a;
y = b*(x-Xmin)+Ymin;
y = uint8(y);
figure, imshow(y);
figure, imhist(y);
```

(a)

Janela de Comandos

```
Valor mínimo: 0.000000
Valor máximo: 48.000000
Amplitude: 48.000000
Digite o valor de Ymax:
```

(b)

Janela de Comandos

```
Valor mínimo: 0.000000
Valor máximo: 48.000000
Amplitude: 48.000000
Digite o valor de Ymax:235
Digite o valor de Ymin:10
>>
```

(c)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

A Figura 1.17(c) mostra que adotamos $Y_{max} = 235$ *e* $Y_{min} = 10$. *Incluindo estes valores no script, obtemos a imagem realçada e seu respectivo histograma* – *Figura 1.18.*

Figura 1.18 – Imagem do professor Júlio Cesar de Mello e Souza: (a) realçada no GNU Octave; (b) histograma do realce

(a) (b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Finalmente, podemos comparar as imagens original e realçada – *Figura 1.19.*

Figura 1.19 – Imagem do professor Júlio Cesar de Mello e Souza: (a) imagem inicial sem realce; (b) imagem após realce linear sem saturação

(a) (b)

Fonte: (a) Pereira, Salles e Pereira (2017, n.p); (b) a autora com o GNU Octave (2023).

Observação 1.2. *O script ilustrado na Figura 1.17 permite realçar outras figuras. O professor de matemática da Educação Básica também pode adaptá-lo para explorar outras estratégias de realce de imagens.*

1.3 ATIVIDADE 1.3: DUPLICANDO E TRIPLICANDO CUBOS

3.1 Nível: Ensino Médio.

3.2 Série: 1ª.

3.3 Número de aulas: 3 (50 minutos cada).

3.4 Competência específica no RCEMP: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

3.5 Habilidades específicas no RCEMP:
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais;
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

3.6 Conteúdos abordados: área total e volume do cubo.

3.7 Objetivos:

- ◇ Calcular a área total e o volume de um cubo;
- ◇ Calcular a medida da aresta do cubo em função da medida do volume;
- ◇ Comparar desigualdades, estimar mínimos e máximos e impor restrições;
- ◇ Programar um script no GNU Octave para solucionar o Problema 1.3.

3.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

3.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; estabelecer outra relação entre os volumes dos cubos.

O Problema 1.3, que aborda a duplicação do cubo, e as Questões 1.4 e 1.5 guiam a Atividade 1.3.

Figura 1.20 – Kit com três cubos de pelúcia

Fonte: Adaptado de AliExpress (2022, n.p).

Problema 1.3. *Maria Luísa gerencia uma pequena fábrica de cubos de pelúcia, que são vendidos em kits. A Figura 1.20 ilustra um kit com três cubos.*

Cada kit contém três cubos de tamanhos diferentes: o cubo menor tem volume V, o cubo médio tem volume $2V$ (é o dobro do menor) e o cubo maior tem volume $3V$ (é o triplo do menor).
A fábrica de Maria Luísa confecciona cubos de pelúcia com diversas medidas para a aresta, desde que o comprimento mínimo seja de $5\,cm$ e o máximo de $60\,cm$. A medida da aresta do cubo menor deve ser um número natural.
Considerando que Maria Luísa não possui espaço físico para grandes estoques, apenas para o material de giro, ela depende de uma estimativa da demanda para comprar somente o material necessário à confecção dos cubos de pelúcia. Como está no início das atividades, não tem capital suficiente para investir em tecnologia.
A amiga Luciana, professora de Matemática, prontificou-se a ajudá-la criando no GNU Octave, um software gratuito, um programa que estima quantos metros quadrados de pelúcia e quantos quilogramas de enchimento são necessários para a confecção de um kit de cubos.

Questão 1.4. *Quantos metros quadrados de pelúcia e quantos quilogramas de enchimento são necessários para a confecção de um kit de cubos definida a aresta do cubo menor? Para o enchimento, consideremos que $1\,kg$ de fibra siliconada tem volume aproximado de $42.875\,cm^3$.*

Questão 1.5. *Qual é o valor máximo v_{max} para a medida da aresta do cubo menor de tal maneira que a aresta do cubo maior não exceda $60\,cm$?*

Solução (Problema 1.3)**.** *Sabemos que volume V e área total At do cubo são dados, respectivamente, por $V = a^3$ e $At = 6.Af$, onde $Af = a^2$ é a área da face e a é a medida da aresta do cubo. Para criar o script no GNU Octave, consideramos as notações a seguir.*

- ◇ *c_1, c_2 e c_3 representam, respectivamente, o cubo menor, o cubo médio e o cubo maior.*
- ◇ *a_1, a_2 e a_3 são as medidas, em centímetros, das arestas de c_1, c_2 e c_3, respectivamente.*
- ◇ *V_1, V_2 e V_3 representam, respectivamente, o volume de c_1, c_2 e c_3, em centímetros cúbicos.*
- ◇ *kg_1, kg_2 e kg_3 representam a quantidade de enchimento, em quilogramas, de c_1, c_2 e c_3, respectivamente.*

- ◇ At_{c_1}, At_{c_2} e At_{c_3} *representam, respectivamente, a área total das faces de* c_1, c_2 e c_3, *em metros quadrados.*

- ◇ T_{kg} *é a quantidade de enchimento do kit, em quilogramas.*

- ◇ T_A *é quantidade de pelúcia do kit, em metros quadrados.*

O volume do cubo menor é igual a $V_1 = a_1^3$, *sendo* $a_1 \geq 5\,cm$ *um dado de entrada. Do enunciado do Problema 1.3, temos que* $V_2 = 2V_1$ e $V_3 = 3V_1$. *Assim, podemos calcular* a_2 e a_3 *a partir de* V_2 e V_3, *respectivamente, ou seja:*

$$a_2 = \sqrt[3]{V_2};$$
$$a_3 = \sqrt[3]{V_3} \leq 60\,cm.$$

Com o valor de a_1 *podemos determinar* V_1 e At_{c_1}. *Para calcular* kg_1, *consideramos que* $1\,kg$ *de enchimento de fibra siliconada possui volume aproximado de* $42.875\,cm^3$. *Logo,* $kg_1 = \dfrac{V_1}{42845}$.

Os valores das variáveis atreladas à c_2 e c_3 *são calculados de forma análoga. Os totais referentes às quantidades de enchimento e de pelúcia são dados, respectivamente, pelas somas:*

$$T_{kg} = kg_1 + kg_2 + kg_3;$$
$$T_A = At_{c_1} + At_{c_2} + At_{c_3}.$$

No GNU Octave, é comum usarmos os comandos ***clear*** *e* ***clc*** *no início do script. Estes comandos realizam a limpeza dos dados do ambiente de trabalho e da janela de comandos, respectivamente, e não devem ser utilizados caso criemos scripts distintos para* c_1, c_2, c_3 *e somas totais. Empregamos ainda os seguintes comandos:*

- ***format bank****: exibe um formato de ponto fixo com dois dígitos à direita da vírgula decimal;*

- ***input****; cria a entrada para o valor de* a_1;

- ***round****: retorna o número inteiro mais próximo de* a_1, *cumprindo a restrição imposta no Problema 1.3.*

Podemos organizar as variáveis no script incluindo textos entre parênteses e aspas simples, como por exemplo, ('Cubo menor = c_1*'). A Figura 1.21 ilustra o script no GNU Octave para determinar as quantidades de pelúcia e de enchimento necessárias à confecção de um kit de cubos.*

Clicando no botão ***executar****, o GNU Octave solicita o valor de* a_1, *único dado de entrada – Figura 1.22. Uma vez fornecido esse dado, todos os outros valores são calculados. A Figura 1.23 ilustra a solução do Problema 1.3 para* $a_1 = 20\,cm$.

Figura 1.21 – Script referente às variáveis atreladas a: (a) c_1; (b) c_2; (c) c_3 e totais

```
clear
clc
format bank
('Cubo menor = c_1')

('Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)')

a_1=input ('Digite a aresta do cubo: ')
round(a_1)

('Volume de c_1' )

V_1 = (a_1^3)

('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1')

kg_1 = V_1/(42875)

('Área total de c_1 em metros quadrados')

At_c_1 = 6*[(a_1)^2]/10000
```

(a)

```


('Cubo médio = c_2')

('Volume de c_2' )

V_2 = 2*V_1

('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2')

kg_2 = V_2/(42875)

('Aresta de c_2')

a_2 = cbrt(V_2)

('Área total de c_2 em metros quadrados')

At_c_2 = 6*[(a_2)^2]/10000

```

(b)

```

('Cubo maior = c_3')

('Volume de c_3' )

V_3 = 3*V_1

('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3')

kg_3 = V_3/(42875)

('Aresta de c_3')

a_3 = cbrt(V_3)

('Área total de c_3 em metros quadrados')

At_c_3 = 6*[(a_3)^2]/10000


('TOTAL do Kit')

T_kg = kg_1 + kg_2 + kg_3

T_A = At_c_1 + At_c_2 + At_c_3

```

(c)

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

Figura 1.22 – Dado de entrada após a execução do script

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: |
```

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

O valor máximo v_{max} *para a aresta do cubo menor, de modo que a aresta do cubo maior não exceda* $60\,cm$*, pode ser estimado por tentativas, uma vez que o script da Figura 1.21 possibilita calcular as arestas dos cubos de volumes* $2V$ *e* $3V$ *a partir da aresta do cubo menor.*

Figura 1.23 – Dados calculados atribuindo-se $a_1 = 20\,cm$

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 20
a_1 = 20.00
ans = 20.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 8000.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 0.19
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 0.24
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 16000.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 0.37
ans = Aresta de c_2
a_2 = 25.20
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 0.38
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 24000.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 0.56
ans = Aresta de c_3
a_3 = 28.84
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 0.50
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 1.12
T_A = 1.12
>> |
```

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

Deste modo, constatamos que $v_{max} = 41\,cm$ − *Figura 1.24.*

Figura 1.24 – Estimativas para v_{max}: (a) $a_1 = 41\,cm$; (b) $a_1 = 42\,cm$

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 41
a_1 = 41.00
ans = 41.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 68921.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 1.61
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 1.01
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 137842.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 3.21
ans = Aresta de c_2
a_2 = 51.66
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 1.60
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 206763.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 4.82
ans = Aresta de c_3
a_3 = 59.13
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 2.10
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 9.64
T_A = 4.71
>>
```

(a)

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 42
a_1 = 42.00
ans = 42.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 74088.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 1.73
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 1.06
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 148176.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 3.46
ans = Aresta de c_2
a_2 = 52.92
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 1.68
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 222264.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 5.18
ans = Aresta de c_3
a_3 = 60.57
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 2.20
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 10.37
T_A = 4.94
>>
```

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

*A partir da estimativa $a_1 = v_{max} = 41\,cm$, podemos impor restrições usando os comandos **if** (se), **elseif** (senão), **else** (outro) e **endif** (fim). Com a incorporação das restrições, organizamos um novo script, ilustrado na Figura 1.25. Atribuindo para a_1 valores abaixo ou acima daqueles estabelecidos nas restrições, o programa devolve, respectivamente, as mensagens "Este valor está abaixo do permitido" e "Este valor está acima do permitido" – Figura 1.26.*

Figura 1.25 – Script contendo as restrições para o tamanho das arestas dos cubos do kit

```
clear
clc
format bank
('Cubo menor = c_1')
('Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)')
a_1=input ("Digite a aresta do cubo: ")
if (a_1 < 5)
   disp("Este valor está abaixo do permitido.");
elseif (a_1 > 41 )
   disp("Este valor está acima do permitido. ");
else
round(a_1)
('Volume de c_1' )
V_1 = (a_1^3)
('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1')
kg_1 = V_1/(42875)
('Área total de c_1 em metros quadrados')
At_c_1 = 6*[(a_1)^2]/10000
('Cubo médio = c_2')
('Volume de c_2' )
V_2 = 2*V_1
('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2')
kg_2 = V_2/(42875)
('Aresta de c_2')
a_2 = cbrt(V_2)
('Área total de c_2 em metros quadrados')
At_c_2 = 6*[(a_2)^2]/10000
('Cubo maior = c_3')
('Volume de c_3' )
V_3 = 3*V_1
('Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3')
kg_3 = V_3/(42875)
('Aresta de c_3')
a_3 = cbrt(V_3)
('Área total de c_3 em metros quadrados')
At_c_3 = 6*[(a_3)^2]/10000
('TOTAL do Kit')
T_kg = kg_1 + kg_2 + kg_3
T_A = At_c_1 + At_c_2 + At_c_3
endif
```

Fonte: A autora com GNU Octave (2023).

Figura 1.26 – Mensagens retornadas pelo GNU Octave para valores de a_1 que violem as restrições: (a) $a_1 < 5\,cm$; (b) $a_1 > 41\,cm$

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 1.5
Este valor está abaixo do permitido.
>>
```

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: -1
Este valor está abaixo do permitido.
>>
```

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 4.6
Este valor está abaixo do permitido.
```

(a)

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 41.4
Este valor está acima do permitido.
>>
```

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 41.5
Este valor está acima do permitido.
>>
```

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 60
Este valor está acima do permitido.
>>
```

(b)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Incorporadas as restrições, a Figura 1.27 ilustra a execução do script para alguns valores de a_1.

Por fim, o modelo de script organizado para solucionar o Problema 1.3 possibilita que Maria Luísa estime, com rapidez e precisão, a quantidade dos materiais necessários à confecção dos kits de cubos, melhorando desta maneira a logística de sua empresa.

Figura 1.27 – Execução do script para: (a) $a_1 = 5\,cm$; (b) $a_1 = 41\,cm$; (c) $a_1 = 25\,cm$

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 5
a_1 = 5.00
ans = 5.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 125.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 0.00
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 0.01
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 250.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 0.01
ans = Aresta de c_2
a_2 = 6.30
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 0.02
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 375.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 0.01
ans = Aresta de c_3
a_3 = 7.21
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 0.03
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 0.02
T_A = 0.07
>>
```

(a)

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 41
a_1 = 41.00
ans = 41.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 68921.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 1.61
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 1.01
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 137842.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 3.21
ans = Aresta de c_2
a_2 = 51.66
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 1.60
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 206763.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 4.82
ans = Aresta de c_3
a_3 = 59.13
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 2.10
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 9.64
T_A = 4.71
>>
```

(b)

```
Janela de Comandos
ans = Cubo menor = c_1
ans = Aresta de c_1 (medida de comprimento cm)
Digite a aresta do cubo: 25
a_1 = 25.00
ans = 25.00
ans = Volume de c_1
V_1 = 15625.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_1
kg_1 = 0.36
ans = Área total de c_1 em metros quadrados
At_c_1 = 0.38
ans = Cubo médio = c_2
ans = Volume de c_2
V_2 = 31250.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_2
kg_2 = 0.73
ans = Aresta de c_2
a_2 = 31.50
ans = Área total de c_2 em metros quadrados
At_c_2 = 0.60
ans = Cubo maior = c_3
ans = Volume de c_3
V_3 = 46875.00
ans = Quantidade em kilogramas de enchimento de c_3
kg_3 = 1.09
ans = Aresta de c_3
a_3 = 36.06
ans = Área total de c_3 em metros quadrados
At_c_3 = 0.78
ans = TOTAL do Kit
T_kg = 2.19
T_A = 1.75
>>
```

(c)

Fonte: A autora com o GNU Octave (2023).

Observação 1.3. *O professor de matemática da Educação Básica pode adaptar o script da Figura 1.25 para explorar outras relações entre os volumes dos cubos.*

2 ATIVIDADES DIDÁTICAS COM O GEOGEBRA

2.1 ATIVIDADE 2.1: DIVISIBILIDADE E FUNÇÕES

1.1 Nível: Ensino Fundamental II.

1.2 Ano: 9ª.

1.3 Número de aulas: 4 (50 minutos cada).

1.4 Competências específicas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018):

- ◇ Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho;

- ◇ Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;

- ◇ Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

1.5 Habilidades específicas na BNCC:
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora;
(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor;
(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita;
(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

1.6 Conteúdos abordados: divisibilidade; função do primeiro grau; função constante.

1.7 Objetivos:

- ◇ Construir no GeoGebra duas funções constantes para interpretar geometricamente o Problema 2.1;
- ◇ Analisar a interseção das funções constantes com outras três funções criadas a partir do Problema 2.1;
- ◇ Concluir que as interseções correspondem à solução do Problema 2.1.

1.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

1.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; estabelecer relações semelhantes usando outras funções.

O Problema 2.1, que aborda divisibilidade e funções, e a Questão 2.1 conduzem a Atividade 2.1.

Problema 2.1. *Beremiz e seu amigo Bagdali presenciam uma acalorada discussão entre três irmão quando seguiam viagem para Bagdá. O debate diz respeito à divisão de 35 camelos deixados como herança aos três irmãos, obedecendo as seguintes razões:* $\frac{1}{2}$ *para o mais velho;* $\frac{1}{3}$ *para o irmão do meio;* $\frac{1}{9}$ *para o mais novo. O impasse ocorre quando os irmãos tentam fazer a partilha conforme a vontade do falecido pai, mas os valores resultam em números decimais. Desse modo, eles não conseguem chegar a um resultado que favoreça os três. Acrescentando um camelo à partilha (pertencente ao seu amigo Bagdali), Beremiz finda o impasse, devolve o camelo do amigo, lucra um camelo para si e favorece cada um dos irmãos na partilha (Tahan, 2008b, p. 21-23).*

Questão 2.1. *Represente no GeoGebra o Problema 2.1 usando funções e indique a solução natural dada por Beremiz. Mostre outras possíveis soluções naturais.*

Solução. *Para interpretar geometricamente a solução do Problema 2.1 no GeoGebra, iniciemos recordando os conceitos de função afim e de função constante – Definições 2.1, 2.2 e Definição 2.3 (Lima, 2014).*

Definição 2.1. *Dados os conjuntos X e Y, uma função* $f : X \to Y$ *(lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento* $x \in X$ *um elemento* $y = f(x) \in Y$ *(leia-se "y igual a f de* x*").*

Definição 2.2. *Denomina-se função afim a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *da forma* $f(x) = ax + b$*, com* $x, a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a, b \neq 0$*. Quando* $b = 0$*, a função* $f(x) = ax$ *é denominada função linear.*

Definição 2.3. *Denomina-se função constante a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *da forma* $f(x) = b$*, com* $b \in \mathbb{R}$*.*

Para a interpretação geométrica do Problema 2.1, construímos no GeoGebra as seguintes funções constantes:

- $\mathbf{g(x) = 35}$, *que representa a quantidade de camelos deixada como herança aos três filhos;*
- $\mathbf{f(x) = 35 + b}$, *que representa a quantidade de camelos deixada como herança aos três filhos com o acréscimo de b camelos.*

Além das duas funções, também determinamos os pontos que representam a quantia de camelos atribuída a cada um dos três irmãos em função da quantidade de camelos considerada na partilha.

◇ *O ponto $A = (x_A, y_A)$ refere-se à parte da herança que compete ao irmão mais novo: x_A representa a quantidade de camelos que cabe a esse irmão e y_A representa o total de camelos que está sendo considerado na partilha.*

◇ *O ponto $B = (x_B, y_B)$ refere-se à parte da herança que compete ao irmão do meio: x_B representa a quantidade de camelos que cabe a esse irmão e y_B representa o total de camelos que está sendo considerado na partilha.*

◇ *O ponto $C = (x_C, y_C)$ refere-se à parte da herança que compete ao irmão mais velho: x_C representa a quantidade de camelos que cabe a esse irmão e y_C representa o total de camelos que está sendo considerado na partilha.*

No GeoGebra, os pontos A, B e C aparecem, respectivamente, na interseção da reta que representa a função $f(x)$ com as retas que representam as seguintes funções lineares:

- $\mathbf{h(x)}$, *que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $O(0,0)$;*
- $\mathbf{r(x)}$, *que passa pelos pontos $B(x_B, y_B)$ e $O(0,0)$;*
- $\mathbf{s(x)}$, *que passa pelos pontos $C(x_C, y_C)$ e $O(0,0)$.*

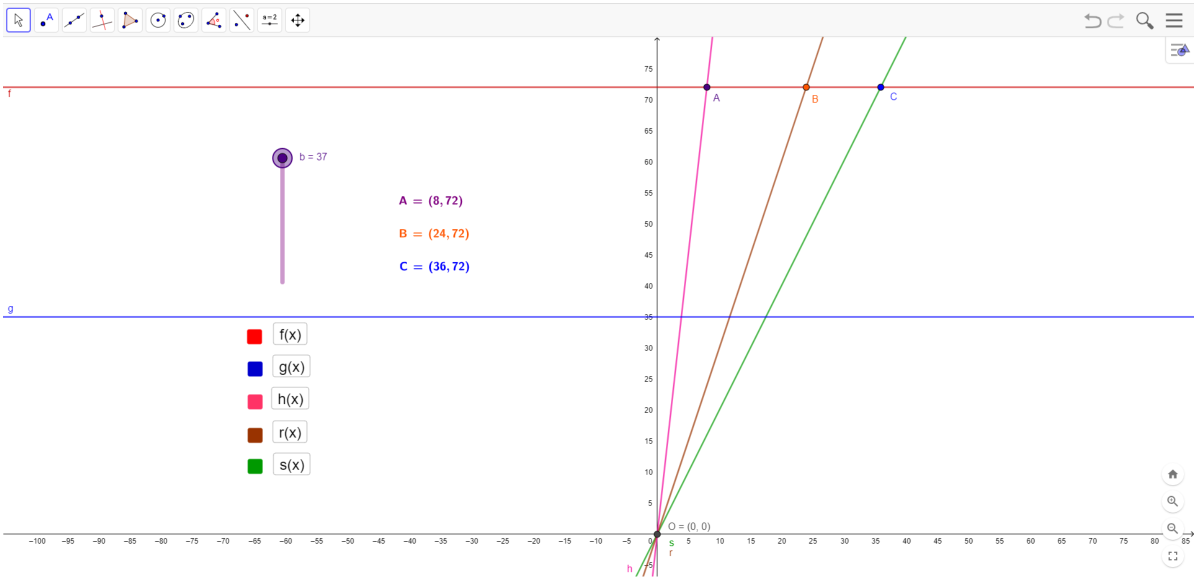
A Figura 2.1 ilustra a construção das funções no GeoGebra. Quando $b = 0$, temos que as funções $f(x)$ e $g(x)$ são coincidentes.

No GeoGebra, podemos manipular o controle deslizante b, com $0 \leq b \leq 37$, de maneira que a função $\mathbf{f(x) = y = 35 + b}$, que representa a quantidade de camelos deixada como herança aos filhos com o acréscimo de b camelos, e os pontos A, B e C (parte superior esquerda da Figura 2.1) sejam visualizados de forma dinâmica. A construção pode ser acessada através do link

<https://www.geogebra.org/classic/dnfhuv3f>.

Ao mover o controle deslizante b no GeoGebra, é importante observarmos as soluções naturais, assim como a melhor solução para o Problema 2.1. Exemplificando:

Figura 2.1 – Interpretação geométrica do Problema 2.1 no GeoGebra: as funções $f(x)$ (vermelho), $g(x)$ (azul), $h(x)$ (rosa), $r(x)$ (marron) e $s(x)$ (verde)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

- ⋆ *para* $b = 1$*, temos que* $A = (4, 36)$*,* $B = (12, 36)$ *e* $C = (18, 36)$*;*
- ⋆ *para* $b = 19$*, temos que* $A = (6, 54)$*,* $B = (18, 54)$ *e* $C = (27, 54)$*;*
- ⋆ *para* $b = 37$*, temos que* $A = (8, 72)$*,* $B = (24, 72)$ *e* $C = (36, 72)$*.*

2.2 ATIVIDADE 2.2: A DUPLICAÇÃO DO CUBO

Para Eves (2011, p. 135) “há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco”.

Diante desse fato, o rei Minos ordenou que o túmulo do seu filho Glauco fosse duplicado. Para tanto, por influência do poeta, o rei acreditou que bastaria duplicar as dimensões do túmulo, isto é, comprimento, largura e altura.

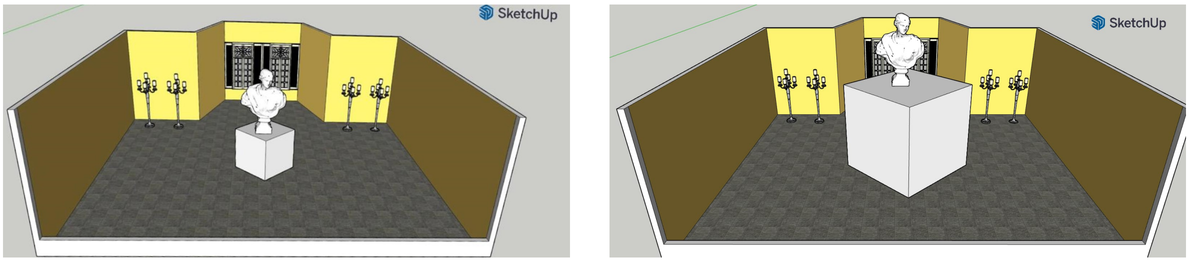
> Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma. Nenhum progresso parece ter havido quanto à solução até que, algum tempo mais tarde, Hipócrates descobriu sua famosa redução [...] (Eves, 2011, p. 135).

Após o dilema do rei Minos, a duplicação do cubo voltaria à tona com a construção do altar para o deus grego Apolo, considerado patrono da música e da arte, com poderes sobre a morte. Em seu templo, construído na ilha grega Delos, Apolo (ou deus do Sol) era venerado por aqueles(as) que desejavam suas previsões. A duplicação do altar de Apolo é relatada no Problema 2.2 segundo Contador (2012).

Problema 2.2. *Quando uma peste assolou Atenas, dizimando cerca de um quarto de sua população, inclusive fazendo Péricles uma de suas vítimas, os habitantes, desesperados, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo havia um altar em forma de cubo e, em troca do fim da peste, a divindade fez um pedido: erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará.*

A Figura 2.2 mostra um esboço do altar de Apolo e a duplicação proposta no Problema 2.2.

Figura 2.2 – Esboço: (a) do altar de Apolo; (b) do altar de Apolo duplicado



(a) (b)

Fonte: Parodi com SketchUp (2022, n.p).

Segundo Domingues (1998), Hipócrates de Quio (c. 440 a.C.) reduziu o problema da duplicação do cubo às médias proporcionais x e y aos segmentos de comprimento k e $2k$, ou seja:

$$\frac{k}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2k}. \tag{2.1}$$

Da proporção (2.1), segue que:

$$x^2 = ky \Rightarrow y = \frac{x^2}{k}; \tag{2.2}$$

$$y^2 = 2kx; \tag{2.3}$$

$$xy = 2k^2. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.2) em (2.4), obtemos que:

$$x^3 = 2k^3;$$

$$x = \sqrt[3]{2}\,k. \tag{2.5}$$

Na relação (2.5), x é a medida da aresta do cubo duplicado enquanto que k é a medida da aresta do cubo original.

Após Hipócrates, outros matemáticos também tentaram solucionar o problema da duplicação do cubo.

> Dessas, uma das mais antigas, e certamente uma das mais notáveis, na forma de uma solução por geometria superior, foi dada por Arquitas (c. 400 a.C.). Sua solução consiste em achar um ponto de intersecção de um cilindro circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cone circular reto! Essa solução lança alguma luz sobre a extensão pouco comum que a geometria deve ter atingido naqueles tempos remotos. A solução de Eudoxo (c. 370 a.C.) se perdeu. Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as secções cônicas para esse propósito. Atribui-se a Eratóstenes (c. 230 a.C.) uma solução posterior usando dispositivos mecânicos e outra, por volta da mesma época, a Nicomedes. Uma solução ainda posterior foi oferecida por Apolônio (c. 225 a.C.). Dioclés (c. 180 a.C.) inventou uma curva chamada cissoide com o mesmo objetivo. E, obviamente, descobriram-se modernamente muitas soluções mediante curvas planas superiores (Eves, 2011, p. 135).

O matemático Menaecmo (c. 350 a.C.), discípulo de Eudoxo, amigo de Platão (427 – 347 a.C.) e membro da Academia de Platão, "[...] fez a descoberta dessas curvas ($x^2 = ky$, $y^2 = 2kx$ e $xy = 2k^2$) por volta de 360 a.C. e mostrou que a interseção delas daria as médias requeridas no problema, ainda que não construídas com régua e compasso" (Delgado; Frensel; Crissaff, 2017, p. 146). De acordo com Eves (2011), são duas as contribuições de Menaecmo à solução do problema da duplicação do cubo.

1^a Emprega-se duas parábolas, com vértices comuns e eixos perpendiculares, tais que o *latus rectum* (lado reto)[1] de uma é o dobro do *latus rectum* da outra. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (2.2) e (2.3), ou seja, $x^2 = ky$ e $y^2 = 2kx$, derivadas da proporção (2.1) de Hipócrates.

2^a Considera-se a interseção entre uma parábola e uma hipérbole equilátera que tem como assíntotas o eixo da parábola e a tangente a esta que passa pelo vértice. Esta construção pode ser efetuada com o auxílio das equações (2.2) e (2.4), ou seja, $x^2 = ky$ e $xy = 2k^2$, derivadas da proporção (2.1) de Hipócrates.

Utilizamos as duas estratégias de Menaecmo para interpretar geometricamente a duplicação do cubo com o GeoGebra (2022a).

2.2.1 USANDO DUAS PARÁBOLAS

2.1.1 Nível: Ensino Médio.

2.1.2 Série: 1ª.

2.1.3 Número de aulas: 3 (50 minutos cada).

2.1.4 Competência específica no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná - RCEMP (Paraná, 2021): Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos

[1] O *latus rectum* de uma cônica é definido como sendo a corda focal, ou segmento de reta que passa por um dos focos da cônica e tem extremidades pertencentes à mesma, cujo comprimento é mínimo. Pode-se demonstrar que, em coordenadas cartesianas, o comprimento do *latus rectum* é dado por $\frac{2b^2}{a}$.

para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2.1.5 Habilidades específicas no RCEMP:
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de primeiro ou segundo graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais;
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de segundo grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

2.1.6 Conteúdos abordados: volume do cubo; duplicação do cubo; cônicas (parábola).

2.1.7 Objetivos:

- ◇ Construir no GeoGebra duas parábolas derivadas da proporção (2.1) de Hipócrates;
- ◇ Determinar o *latus rectum* das duas parábolas e verificar se o *latus rectum* de uma é o dobro da outra;
- ◇ Destacar a interseção das duas parábolas e baixar uma perpendicular em relação ao eixo x;
- ◇ Determinar as arestas do cubo inicial e do cubo duplicado.

2.1.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

2.1.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade.

O Problema 2.3, que aborda a duplicação do cubo, e a Questão 2.2 regem a primeira parte da Atividade 2.2.

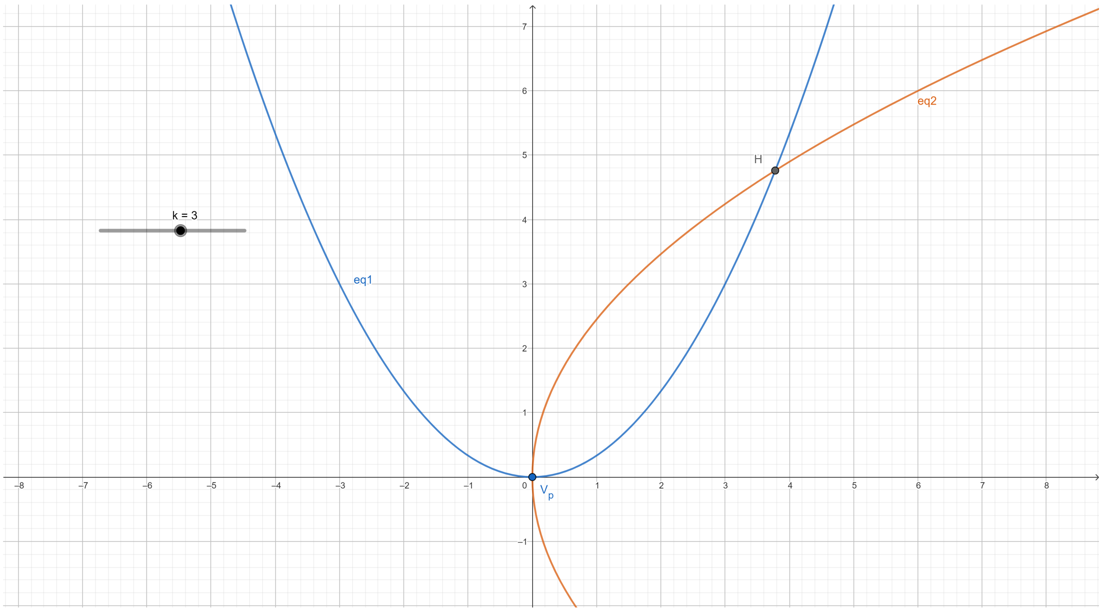
Problema 2.3. *Dado um cubo de aresta k, determine a medida x da aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo de aresta k.*

O problema da duplicação do cubo (Problema 2.2), enuncia a necessidade de duplicar o altar de Apolo em troca do fim da peste em Atenas. Muitos matemáticos ficaram intrigados com esse problema, pois não havia solução por meio de régua e compasso. O matemático Menaecmo fez duas contribuições importantes à solução desse problema.

Questão 2.2. *Utilize a primeira contribuição de Menaecmo para determinar a aresta correspondente ao cubo de volume duplicado.*

Solução. *Iniciamos inserindo as equações* (2.2) *(*$x^2 = ky$*) e* (2.3) *(*$y^2 = 2kx$*) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra. A Figura 2.3 ilustra as duas parábolas correspondentes a essas equações.*

Figura 2.3 – Parábolas $x^2 = ky$ (azul) e $y^2 = 2kx$ (laranja), com $k = 3$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Na primeira estratégia para a duplicação do cubo, Menaecmo refere-se a duas parábolas com vértices comuns e eixos perpendiculares, tais que o latus rectum de uma é o dobro do latus rectum da outra. Segundo Coxeter (1969, p. 116): "A corda $\overline{LL'}$ *passando pelo foco, paralela à diretriz, é chamada latus rectum; seu comprimento é denotado por* $2l$*, de modo que* $l = \overline{OL} = e\overline{LH}$*"[2], onde* $e = 1$ *é a excentricidade[3] da parábola – Figura 2.4.*

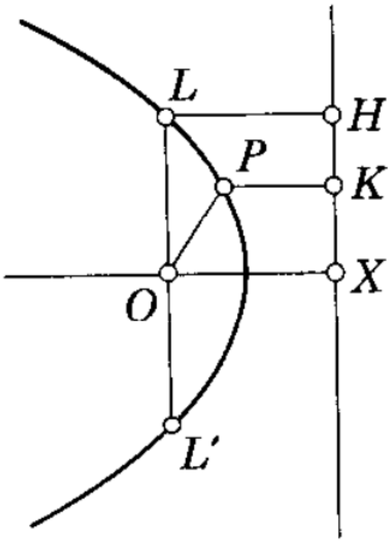
Como toda parábola é simétrica em relação à reta focal, podemos concluir na Figura 2.4 que: $\overline{LO} = \overline{OL'} = l$*; o foco* O *é o ponto médio do segmento* $\overline{LL'}$*;* $d(L, H) = d(O, X)$ *e que* $l = 2p$*, onde* p *é o parâmetro da parábola. De fato, temos que* $\overline{OX} = 2p$*, e como* $l = \overline{OL} = \overline{LH} = \overline{OX}$*, segue que* $l = 2p$*. Consequentemente,* $2l = 4p = s$*.*

Nesta primeira estratégia, usamos as parábolas $x^2 = ky$ *e* $y^2 = 2kx$*, onde* $k = 2$*, com vértices na origem. A parábola* $x^2 = ky$ *possui reta focal coincidente com o eixo* Oy*, isto é, a forma canônica com* $p = \frac{1}{2}$*, onde* $F = (0, p)$*,* $\mathrm{d} : y = -p$ *e* $2p = d(F, \mathrm{d})$*. Já a parábola* $y^2 = 2kx$ *possui reta focal coincidente com o eixo* Ox*, ou seja, a forma canônica com* $p' = 2p$*, onde* $F_1 = (p', 0)$*,* $\mathrm{d} : x = -p'$ *e* $2p' = d(F, \mathrm{d})$*.*

[2] The chord LL' through the focus, parallel to the directrix, is called the *latus rectum*; its length is denoted by $2l$, so that $l = OL = eLH$.

[3] Razão entre a distância do centro ao foco e a distância de um ponto na cônica da diretriz.

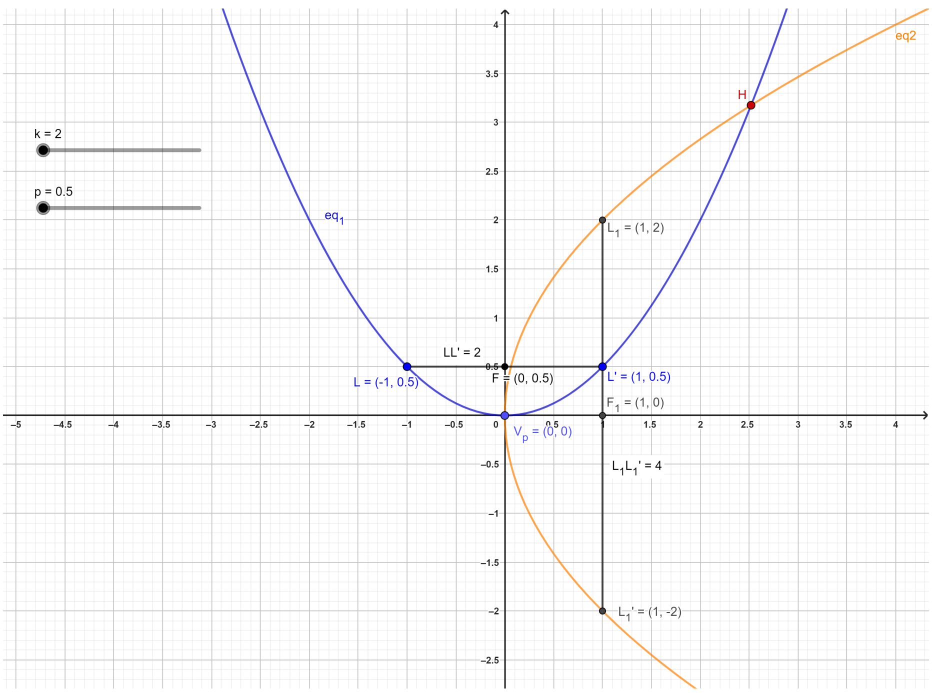
Figura 2.4 – *Latus rectum* $\overline{LL'}$ da parábola



Fonte: Coxeter (1969, p. 115).

Assim, o latus rectum $\overline{LL'}$ *terá como extremos os pontos* $L = (-2p, p)$ *e* $L' = (2p, p)$ *para* $x^2 = ky$ *e o latus rectum* $\overline{L_1 L_1'}$ *terá como extremos os pontos* $L_1 = (p', 2p')$ *e* $L_1' = (p', -2p')$ *para* $y^2 = 2kx$ *— Figura 2.5, cumprindo deste modo as condições de Menaecmo.*

Figura 2.5 – *Latus rectum* $\overline{LL'}$ e $\overline{L_1 L_1'}$ das parábolas $x^2 = ky$ e $y^2 = 2kx$, respectivamente, com $k = 2$

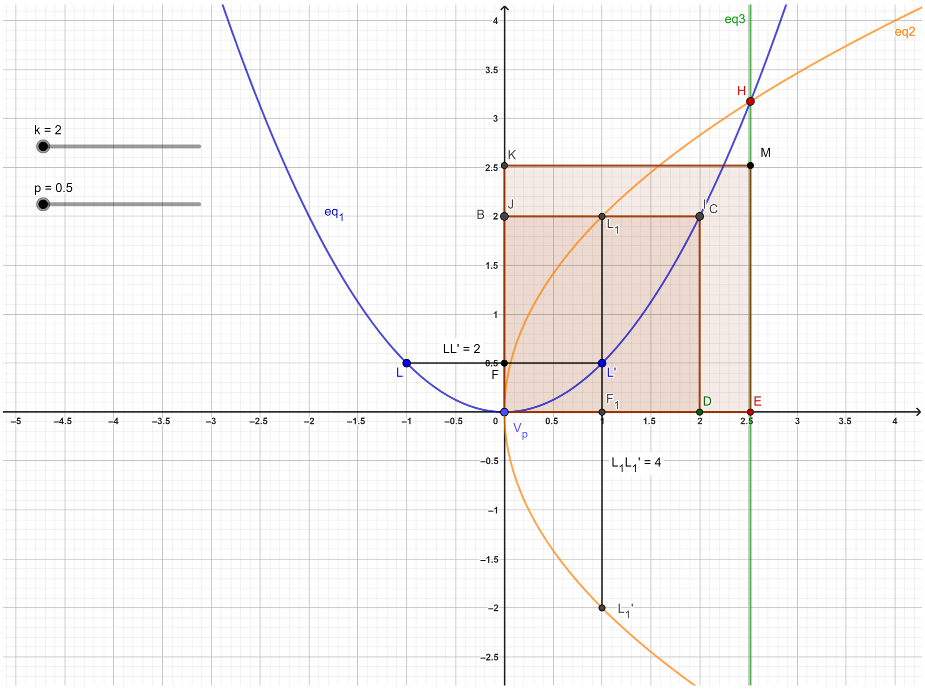


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Na Figura 2.5, $H = \left(\sqrt[3]{2}\,k, \sqrt[3]{4}\,k\right)$ *é o ponto de interseção das duas parábolas. As coordenadas deste ponto podem ser determinadas empregando-se o método da substituição para solucionar o sistema composto pelas equações* (2.2) *e* (2.3).

Inserindo a equação (2.5) ($x = \sqrt[3]{2}\,k$) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra, visualizamos uma reta perpendicular ao eixo x e paralela ao eixo y, que passa pelo ponto H – Figura 2.6.

Figura 2.6 – Parábolas $x^2 = ky$ (azul) e $y^2 = 2kx$ (laranja), a reta $x = \sqrt[3]{2}\,k$ (verde) e os segmentos $\overline{V_pD}$ e $\overline{V_pE}$, de comprimentos k e x, respectivamente, com $k = 2$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

As medidas dos segmentos $\overline{V_pD}$ e $\overline{V_pE}$ na Figura 2.6, onde $D = (k, 0)$ e $E = \left(\sqrt[3]{2}\,k, 0\right)$, representam, respectivamente, o comprimento k da aresta do cubo e o comprimento $x = \sqrt[3]{2}\,k$ da aresta do cubo de volume duplicado. Desta forma, os quadrados V_pDCB e V_pEMK representam as faces do cubo e do cubo de volume duplicado, respectivamente. Construímos no GeoGebra uma atividade dinâmica que permite, atráves de um controle deslizante, alterar o valor da medida k e observar o que ocorre com as parábolas e os segmentos $\overline{V_pD}$ e $\overline{V_pE}$. Disponibilizamos essa atividade no link:

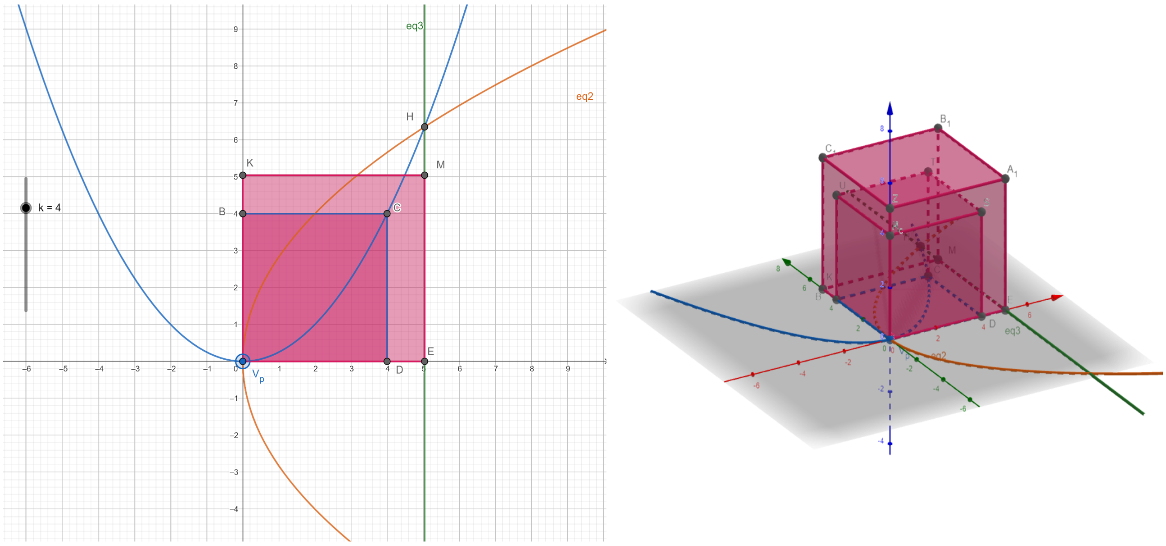
<https://www.geogebra.org/calculator/uqpvcbmz>.

Usando o GeoGebra na opção de janela 3D, criamos um cubo de aresta k e outro cubo de aresta $\sqrt[3]{2}\,k$ a partir dos quadrados V_pBCD e V_pKME, respectivamente – Figura 2.7. Assim, dados um cubo $\mathcal{C}$ de aresta k e um cubo $\mathcal{D}$ de aresta $\sqrt[3]{2}\,k$, temos que o volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{C}$ é $\mathcal{V}(\mathcal{C}) = k^3$ e o volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$ é $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2k^3$. Portanto: $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 2\mathcal{V}(\mathcal{C})$.

No link

<https://www.geogebra.org/classic/gmsk8jgv>,

Figura 2.7 – Cubos de arestas k e $\sqrt[3]{2}\,k$, com $k = 4$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

disponibilizamos uma atividade construída no GeoGebra que permite observar a duplicação do cubo alterando-se o valor de k no controle deslizante.

2.2.2 USANDO UMA PARÁBOLA E UMA HIPÉRBOLE

2.2.1 Nível: Ensino Médio.

2.2.2 Série: 1ª.

2.2.3 Número de aulas: 3 (50 minutos cada).

2.2.4 Competência específica no RCEMP: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2.2.5 Habilidades específicas no RCEMP:
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de primeiro ou segundo graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais;
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de segundo grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais

uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

2.2.6 Conteúdos abordados: volume do cubo; duplicação do cubo; cônicas (parábola e hipérbole).

2.2.7 Objetivos:

- ◇ Construir no GeoGebra uma parábola e uma hipérbole derivadas da proporção (2.1) de Hipócrates;
- ◇ Mostrar que os eixos x e y correspondem às assíntotas da hipérbole $xy = 2k^2$;
- ◇ Mostrar que a hipérbole $xy = 2k^2$ é equilátera;
- ◇ Destacar a interseção da parábola e da hipérbole e baixar uma perpendicular em relação ao eixo x.
- ◇ Determinar as arestas do cubo inicial e do cubo duplicado.

2.2.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

2.2.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade.

O Problema 2.3, que aborda a duplicação do cubo, e a Questão 2.3 regem a segunda parte da Atividade 2.2.

Questão 2.3. *Utilize a segunda contribuição de Menaecmo para determinar a aresta correspondente ao cubo de volume duplicado.*

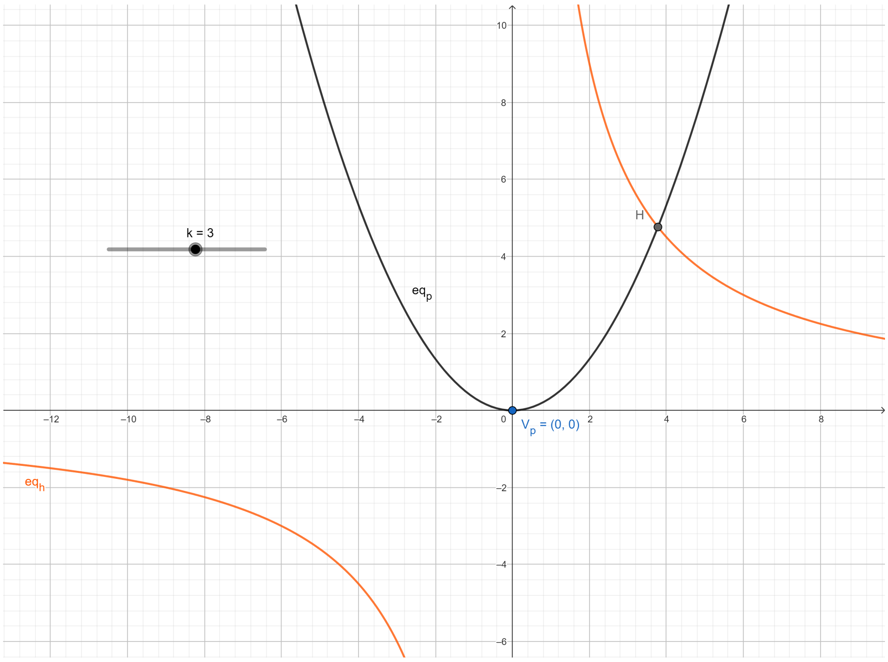
Solução. *Inserindo as equações* (2.2) *($x^2 = ky$) e* (2.4) *($xy = 2k^2$) na janela de álgebra (opção calculadora gráfica) do GeoGebra, obtemos a Figura 2.8. Nesta, destacamos o ponto H, que representa a interseção da parábola com a hipérbole. O ponto $V_p = A = (0, 0)$ é o vértice da parábola* (2.2)*.*

Estabelecida a parábola, precisamos verificar se a hipérbole $xy = 2k^2$ se enquadra nas normas de Menaecmo, isto é, se é uma hipérbole equilátera cuja distância entre os vértices reais é igual a $4s$, uma vez que $2l = 4p = s$, e as assíntotas são o eixo focal da parábola e a tangente a esta que passa pelo vértice.

Construindo o gráfico da hipérbole $xy = 2k^2$, com $k = 2$, no GeoGebra – Figura 2.9, temos que o eixo focal da parábola $x^2 = ky$ é coincidente ao eixo Oy. Logo, este eixo é uma das assíntotas uma vez que $\lim\limits_{x \to 0^-} y = \dfrac{2k^2}{x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \dfrac{2k^2}{x} = +\infty$. A outra assíntota corresponde ao eixo Ox, isto porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{2k^2}{x} = 0$. E o eixo Ox é tangente à parábola $x^2 = 2y$ e passa pelo vértice V_p. Como os eixos Ox e Oy são perpendiculares, temos que a hipérbole $xy = 2k^2$ é equilátera.

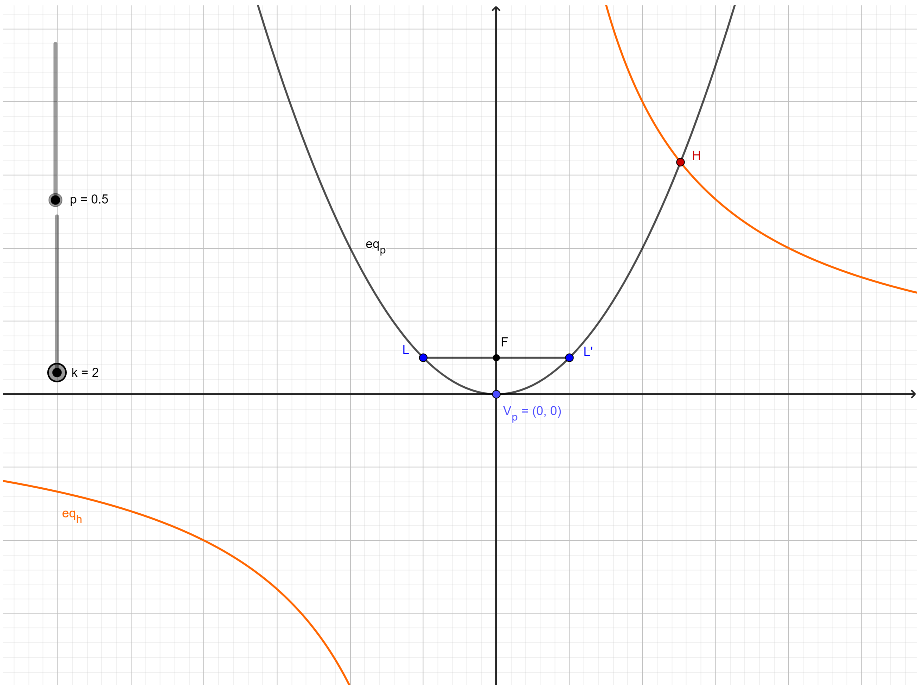
Contudo, a hipérbole $xy = 2k^2$ está rotacionada. Para que essa hipérbole satisfaça os critérios de construção de Menaecmo, a rotação dos eixos devem ser de $45°$, por se tratar de

Figura 2.8 – Interseção H da parábola $x^2 = ky$ com a hipérbole $xy = 2k^2$ (laranja), onde $k = 3$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Figura 2.9 – Assíntotas da hipérbole $xy = 2k^2$, com $k = 2$

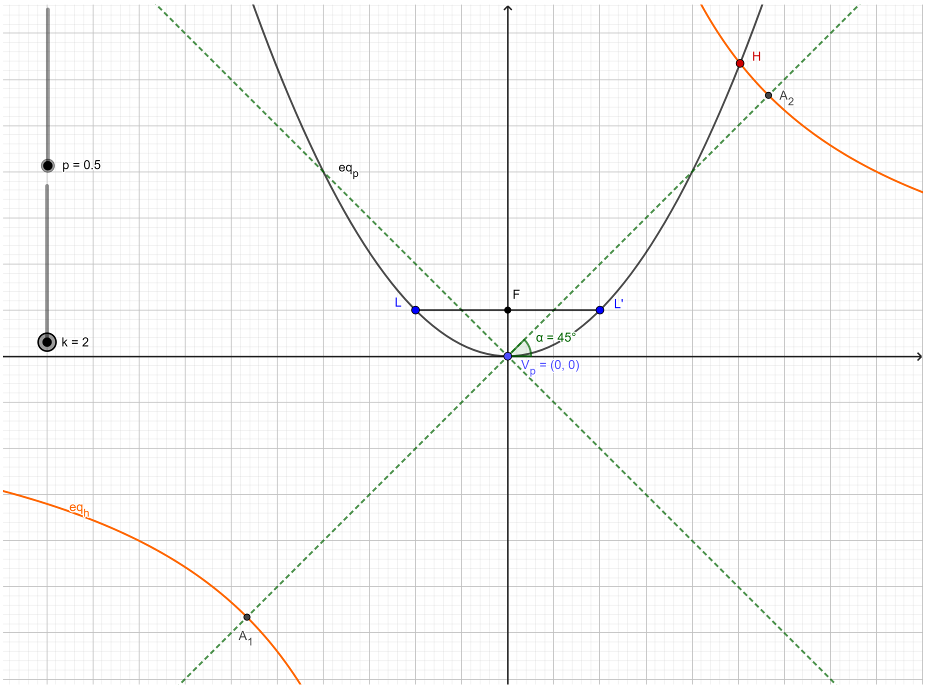


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

uma hipérbole equilátera. Para tanto, precisamos traçar as bissetrizes em relação aos eixos Ox e Oy – Figura 2.10.

Sabemos que na hipérbole equilátera $a = b$, ou seja, o retângulo base é um quadrado, e que a distância entre os vértices reais A_1 e A_2 é $d(A_1, A_2) = 2a$. Assim, devemos ter $d(A_1, A_2) = 2a = 4s$. Como $LL' = 2l = 4p = s$, segue que $d(A_1, A_2) = 4s = 16p$. Logo, empregando os

Figura 2.10 – Bissetrizes (verde) em relação aos eixos Ox e Oy



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

valores em função de p, podemos afirmar que a hipérbole $xy = 2k^2$ se encaixa nos padrões de construção de Menaecmo.

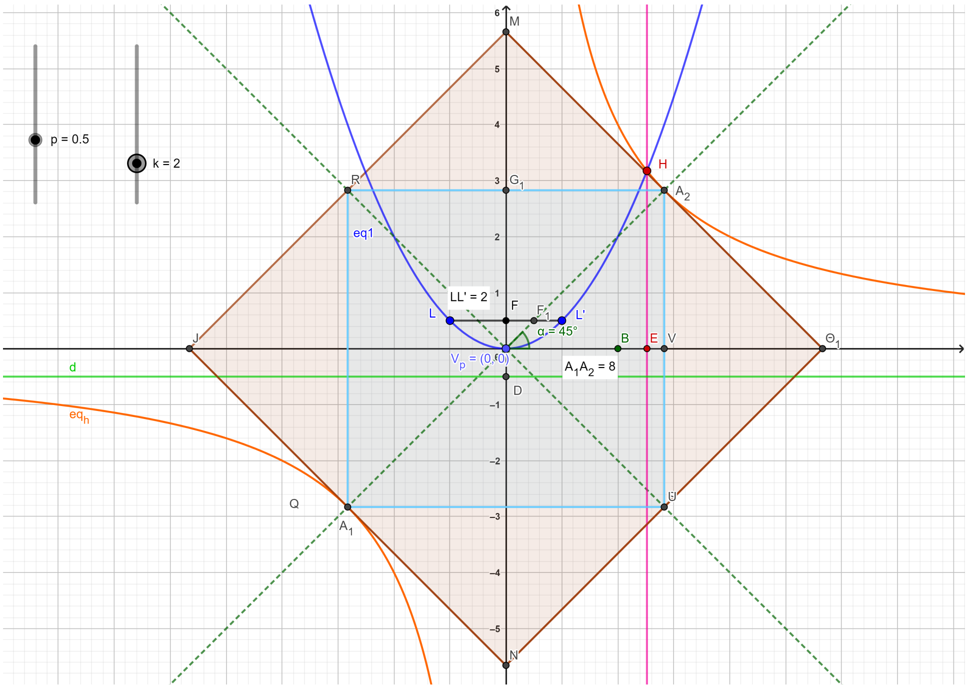
De fato, a distância $d(A_1, A_2) = 4s = 16p$ corresponde à diagonal (coincidente com uma das bissetrizes) do quadrado inscrito no retângulo base da hipérbole. Os vértices do quadrado inscrito correspondem aos pontos médios dos lados do retângulo base, isto é, A_1 e A_2 são vértices opostos desse quadrado. Além disso, como $4s = 16p = 2a$ e $2l = 4p = s$, temos que $2a = 4s = 8l$, de onde podemos concluir que a distância entre os vértices A_1 e A_2 é igual ao quádruplo do latus rectum da parábola $x^2 = ky$, ou seja, $d(A_1, A_2) = 8l$ – Figura 2.11.

Utilizando o método da substituição para solucionar o sistema de equações $x^2 = ky$ e $xy = 2k^2$, obtemos como solução o ponto $H = (\sqrt[3]{2}\,k, \sqrt[3]{4}\,k)$, interseção da parábola com a hipérbole. Baixando uma perpendicular ao eixo Ox passando por H, determinamos o ponto E em Ox. Este ponto tem a mesma abscissa do ponto H. Logo, $E = \left(\sqrt[3]{2}\,k, 0\right)$ – Figura 2.12.

Na Figura 2.12, as distâncias $d(A, B)$, onde $B = (k, 0)$, e $d(A, E)$ representam, respectivamente, o comprimento da aresta k do cubo e o comprimento da aresta $x = \sqrt[3]{2}\,k$ do cubo de volume duplicado. Ao manejarmos os controles deslizantes, que correspondem a valores atribuídos às medidas k e p, podemos observar o que ocorre com as medidas dos segmentos $\overline{V_pB}$ e $\overline{V_pE}$, onde $V_p = A = (0, 0)$ é o vértice da parábola. Construímos uma atividade no GeoGebra que permite observar o que ocorre quando se altera o valor de p e/ou k. Esta atividade está disponível no link:

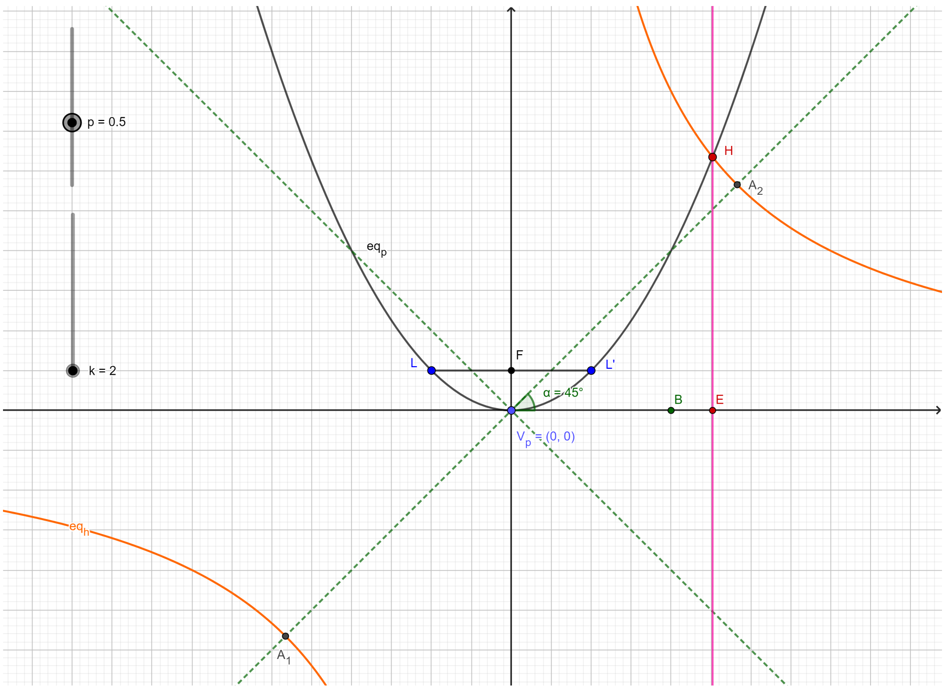
<*https://www.geogebra.org/classic/q5vb2qht*>.

Figura 2.11 – Retângulo base da hipérbole $xy = 2k^2$ e quadrado inscrito



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

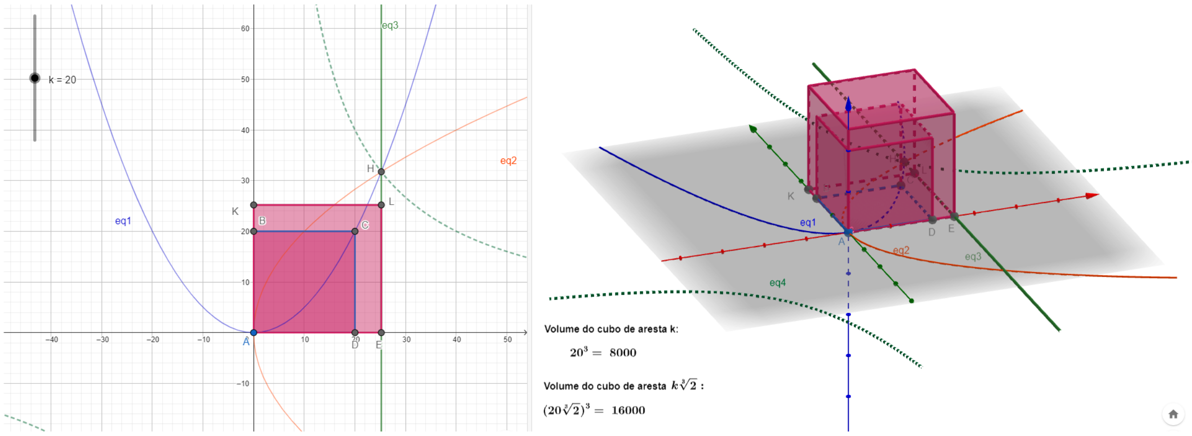
Figura 2.12 – Cônicas $x^2 = ky$ e $xy = 2k^2$, com $k = 2$, e as arestas $\overline{V_pB}$ e $\overline{V_pE}$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Deste modo, a solução do Problema 2.3 usando as contribuições de Menaecmo consiste em se determinar a insterseção entre as parábolas (2.2) *e* (2.3) *ou entre uma destas e a hipérbole* (2.4). *Em qualquer das escolhas, baixando uma perpendicular ao eixo Ox passando pelo ponto de interseção H, determinamos em Ox o ponto E. Assim, o comprimento do segmento $\overline{V_pE} = \overline{AE}$ é a medida da aresta do cubo dublicado. Podemos visualizar as duas contribuições* *de Menaecmo à duplicação do cubo na Figura 2.13.*

Figura 2.13 – Volume dos cubos de arestas k e $\sqrt[3]{2}\,k$, com $k = 20$



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Organizamos no GeoGebra uma atividade para determinar o volume do cubo original e do cubo duplicado a partir do valor do parâmetro k, que pode ser modificado pelo controle deslizante. Disponibilizamos a atividade no link:

<https://www.geogebra.org/classic/htadhqhx>.

2.3 ATIVIDADE 2.3: RELEITURA DE IMAGENS

Uma releitura é a ação de interpretar novamente, acrescentando algo novo e original. A releitura de uma obra é a criação de uma nova obra, ressignificando a obra anterior. Na ressignificação, o autor da nova obra confere um toque pessoal à obra anterior.

De acordo com Daniel (2021, p. 16): “Fazer uma releitura de uma obra é expor a sua interpretação, sem fugir da ideia original. É recriar com novos elementos, mas que seja possível identificar que a obra original foi utilizada como inspiração”.

Além disso, a releitura pode ser usada como um *feedback* ao autor da obra, uma forma de elogio ou crítica através da reinterpretação da obra original (Daniel, 2021).

2.3.1 RELEITURA DO PÔR DO SOL EM MORRETES–PR

A releitura do “Pôr do Sol em Morretes” foi recriada no GeoGebra a partir de uma fotografia – Figura 2.14 – feita pela autora nos fundos da casa onde reside em Morretes–PR.

Destacamos a seguir o protocolo utilizado para construir a releitura da obra no GeoGebra.

1. Enquadramos a arte em um retângulo, para simular uma moldura, e definimos essa área com fundo neutro em tom azul claro.

Figura 2.14 – Pôr do Sol em Morretes−PR

Fonte: A autora.

2. Usamos a parábola
$$0,8y^2 + 10x - 12y = 200,$$
com reta focal paralela ao eixo Ox e diretriz à direita do foco, para desenhar o arco presente no céu da Figura 2.14.

3. Empregamos as parábolas
$$(x+70)^2 = -\,4(y-25), \tag{2.6}$$
$$(x+62)^2 = -\,\frac{1}{4}(y-20), \tag{2.7}$$
$$(x+56)^2 = -\,2(y-15), \tag{2.8}$$
$$(x+48)^2 = -\,8(y-5), \tag{2.9}$$
com retas focais paralelas ao eixo Oy e diretrizes acima do foco, para desenhar os picos ou morros da Figura 2.14.

4. Delimitamos as parábolas (2.6) a (2.9) com a função SE do GeoGebra, para que as mesmas simulem as deformações dos picos (usamos as interseções para termos ideia dos pontos de delimitação). Para tanto, reescrevemos as equações (2.6) a (2.9) como funções, ou seja,
$$\begin{aligned} g(x) &= -\,\frac{(x+70)^2}{4} + 25, \\ h(x) &= -\,4(x+62)^2 + 20, \\ q(x) &= -\,\frac{(x+56)^2}{2} + 15, \\ s(x) &= -\,\frac{(x+48)^2}{8} + 5. \end{aligned}$$

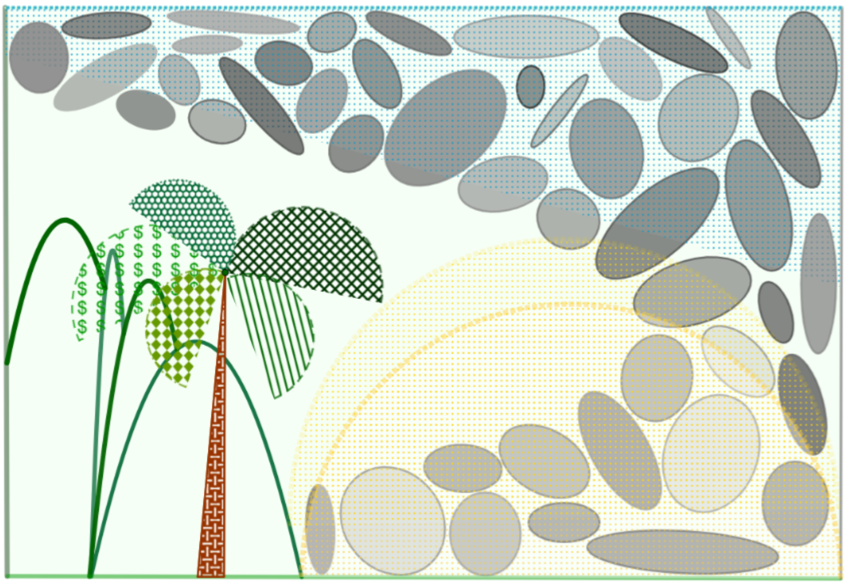
5. Utilizamos elipses de tamanhos variados em tom cinza para representar as nuvens da Figura 2.14.
6. Acrescentamos um trapézio na parte superior do retângulo moldura e preenchê-lo com efeito pontilhado em tom de azul, para simular o céu da Figura 2.14.
7. Empregamos um triângulo em cor marrom e efeito tecelado para representar o tronco do coqueiro da Figura 2.14.
8. Usamos cinco semicírculos com efeitos variados em tons de verde para simbolizar as folhas do coqueiro da Figura 2.14.
9. Posicionamos dois semicírculos, com efeito pontilhado em tons de amarelo, na parte inferior direita da moldura com o intuito de iluminar a arte, imitando os raios de sol da Figura 2.14.

A Figura 2.15, também presente no link

<https://www.geogebra.org/m/pktmm78t>,

ilustra a releitura do “Pôr do Sol em Morretes”, construída segundo as etapas descritas anteriormente.

Figura 2.15 – Releitura do “Pôr do Sol em Morretes”



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

2.3.2 RELEITURA DO MUSEU OSCAR NIEMEYER (MON)

O prédio que hoje abriga em Curitiba−PR o Museu Oscar Niemeyer (MON) − Figura 2.16 − foi projetado em 1967, era inicialmente chamado *Presidente Humberto Castelo Branco* e sediava em 1970 algumas secretarias do Estado do Paraná (Paraná, 2023).

Figura 2.16 – Museu Oscar Niemeyer

Fonte: Globo (2023, n.p).

Ainda, segundo Paraná (2023, n.p):

> No ano 2000, começaram as negociações para a transformação do espaço num museu de arte, na gestão do então governador Jaime Lerner. Em 2001, 23 anos depois de sua inauguração, as autoridades do Estado decidiram transformar a generosa área em museu e, em 22 de novembro de 2002, o edifício deixou de ser sede de secretarias de Estado para se transformar no, inicialmente batizado, Novo Museu.

Com a construção de um anexo – Figura 2.17, popularmente chamado de “Olho” devido ao seu formato, e de outras adaptações, o Novo Museu deu lugar ao MON. A autoria das adaptações e do anexo é do reconhecido arquiteto Oscar Niemeyer.

Figura 2.17 – MON e o arquiteto Oscar Niemeyer

Fonte: Paraná (2023, n.p).

> Oscar Niemeyer, um dos maiores nomes da arquitetura moderna internacional, nasceu no Rio de Janeiro, em 15 de dezembro de 1907 e morreu em 5 de

> dezembro de 2012, aos 104 anos. Tem ao redor do mundo mais de 600 projetos arquitetônicos e é um dos representantes mais reconhecidos da arquitetura moderna. Foi o arquiteto designado para dar vida ao anexo do Olho e tornar o MON uma obra de arte por si só (Paraná, 2023, n.p).

O MON é considerado atualmente o maior museu da América Latina, com aproximadamente 35 mil metros quadrados de área construída e cerca de 17 mil metros quadrados de área expositiva (Paraná, 2023).

Depois desta breve explanação, propomos uma atividade sobre a releitura do MON. O Problema 2.4, que aborda a construção de parábolas e hipérboles assim como o Problema 2.3, e a Questão 2.4 conduzem a Atividade 2.3.

3.1 Nível: Ensino Médio.

3.2 Série: 3ª.

3.3 Número de aulas: 10 (50 minutos cada).

3.4 Competência específica no RCEMP: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

3.5 Habilidade específica no RCEMP:
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas, provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

3.6 Conteúdos abordados: prismas; seções cônicas.

3.7 Objetivos: construir parábolas, hipérboles, prismas e prismóides no GeoGebra.

3.8 Procedimento metodológico: aula expositiva e dialogada; solução de problemas.

3.9 Avaliação: observação do desempenho dos estudantes durante a atividade; releitura de outras obras.

Problema 2.4. *Em uma aula de arte, o professor propõe aos estudantes que façam uma releitura de obras criadas por brasileiros eminentes. Mariana, que é apaixonada por arquitetura, decide fazer uma releitura do MON para homenagear Oscar Niemeyer.*

Questão 2.4. *Como fazer uma releitura do MON, ilustrado na Figura 2.16, usando o GeoGebra?*

Solução. *Descrevemos a seguir as etapas que Mariana deve seguir para fazer a releitura do MON no GeoGebra. Disponibilizamos a releitura no link*

<https://www.geogebra.org/classic/yjpchesd>.

1. *No sistema xOy (2D), construir a parábola e a hipérbole de equações, respectivamente, iguais a:*

$$x^2 + 4y = 12;$$
$$13,09x^2 - 50,91y^2 = -41,64,$$

de forma que um ramo da hipérbole intersecte a parábola criando o formato do "Olho".

2. *No sistema $xOyOz$ (3D), construir as parábolas parametrizadas*[4]

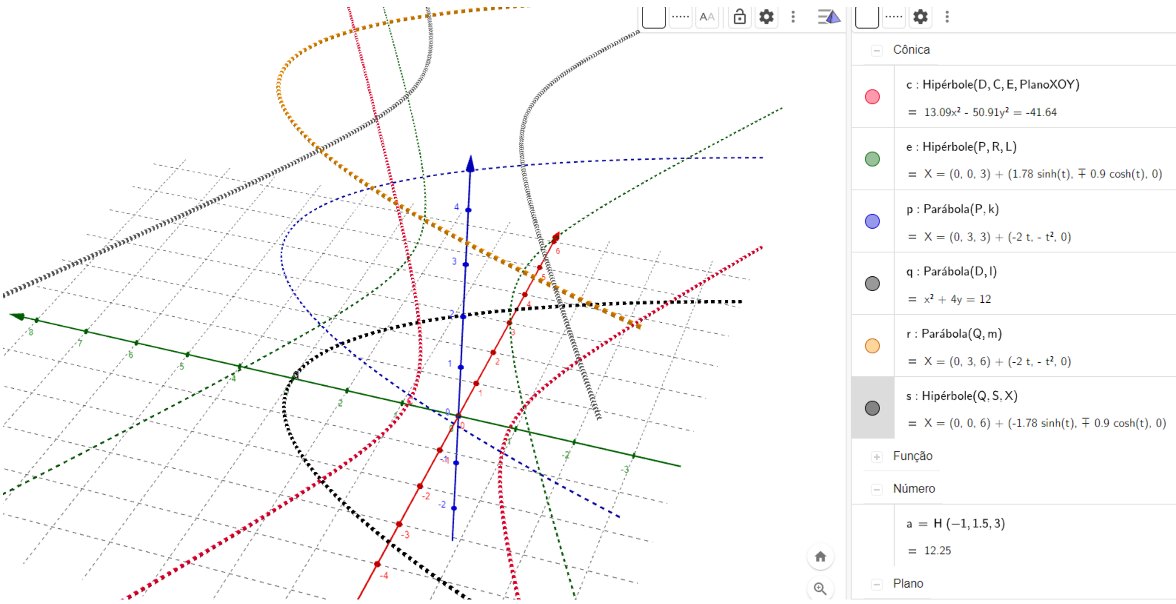
$$\mathcal{P} : X = (0,3,3) + (-2t, -t^2, 0),$$
$$\mathcal{R} : X = (0,3,6) + (-2t, -t^2, 0),$$

e as hipérboles parametrizadas

$$\mathcal{E} : X = (0,0,3) + (1,78sinh(t), \mp 0,9cosh(t), 0),$$
$$\mathcal{S} : X = (0,0,6) + (-1,78sinh(t), \mp 0,9cosh(t), 0).$$

A Figura 2.18 ilustra a construção das parábolas e hipérboles parametrizadas.

Figura 2.18 – Parábolas e hipérboles parametrizadas

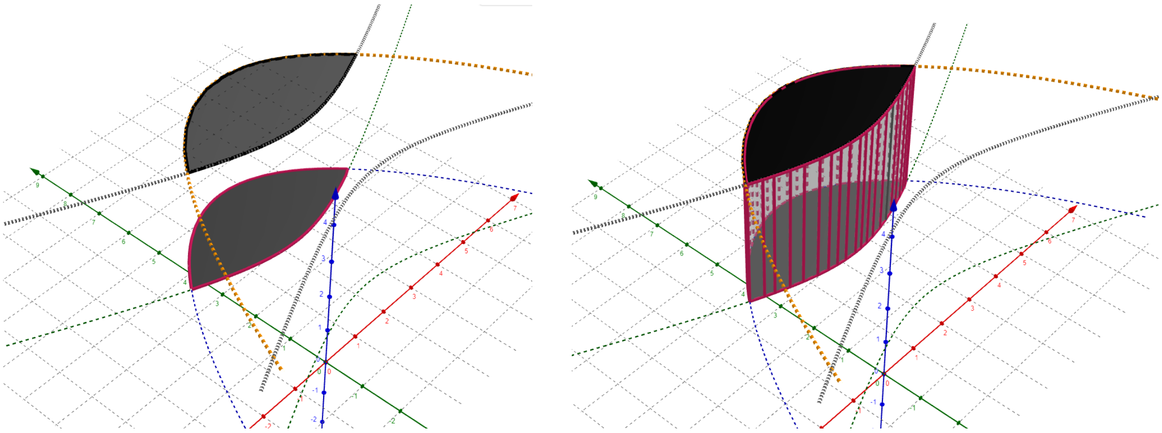


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

[4] Ao criarmos as parábolas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ e as hipérboles $\mathcal{E}$ e $\mathcal{S}$, com projeção dos focos e vértices paralelos ao eixo Ox, o GeoGebra retornou as equações de forma parametrizada.

3. *Destacar e colorir duas regiões: a superfície definida pelas interseções de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{P}$ e a superfície definida pelas interseções de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$. Com essas duas superfícies, paralelas e equivalentes, criar um prismóide que imita o "Olho", como ilustra a Figura 2.19.*

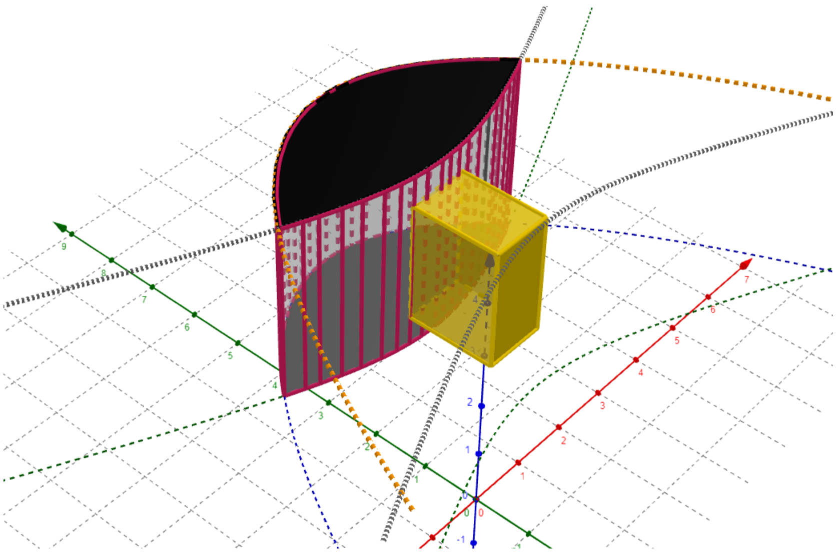
Figura 2.19 – Prismóide que imita o "Olho"



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

4. *Construir o paralelepípedo reto-retângulo que representa a base do "Olho" – Figura 2.20.*

Figura 2.20 – Paralelepípedo reto-retângulo que imita a base do "Olho"

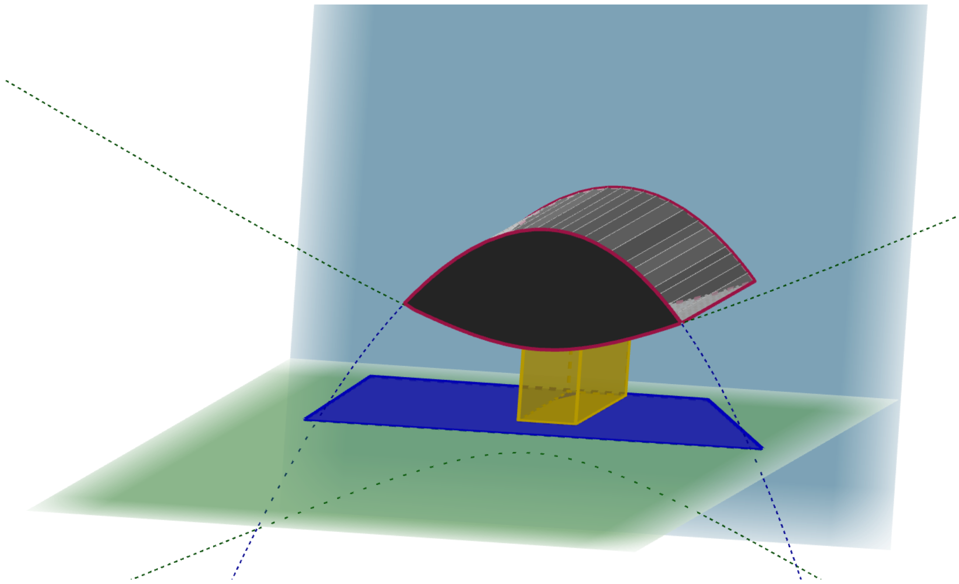


Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

5. *Alterar a posição dos eixos Oy e Oz.*

6. *Destacar um plano para representar o chão e outro para representar o plano de fundo, assim como uma região poligonal azulada com aplicação de extrusão para simular o espelho d'água – Figura 2.21.*

Figura 2.21 – Planos e espelho d'água



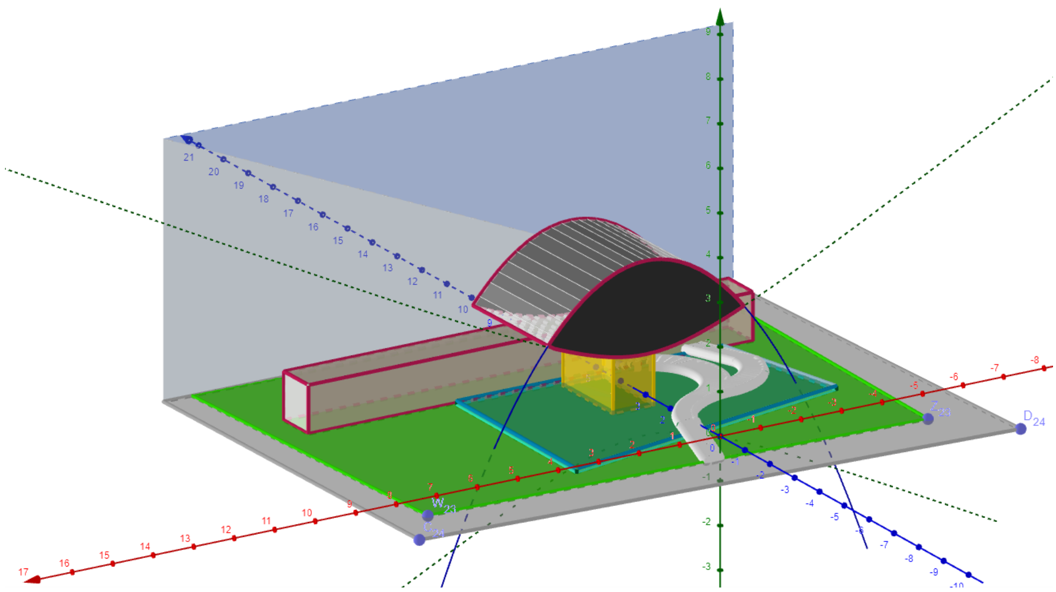
Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

7. *Construir um paralelepípedo reto-retângulo para representar o prédio mais antigo, que fica atrás do anexo do "Olho".*

8. *Empregar segmentos de reta, arcos circulares e novos planos para originar a passarela bifurcada acima do espelho d'água, permitindo o acesso tanto do anexo do "Olho" quanto do prédio mais antigo.*

9. *Construir uma região poligonal esverdeada e outra azulada que representam, respectivamente, o gramado e o céu. A Figura 2.22 ilustra o resultado final da releitura.*

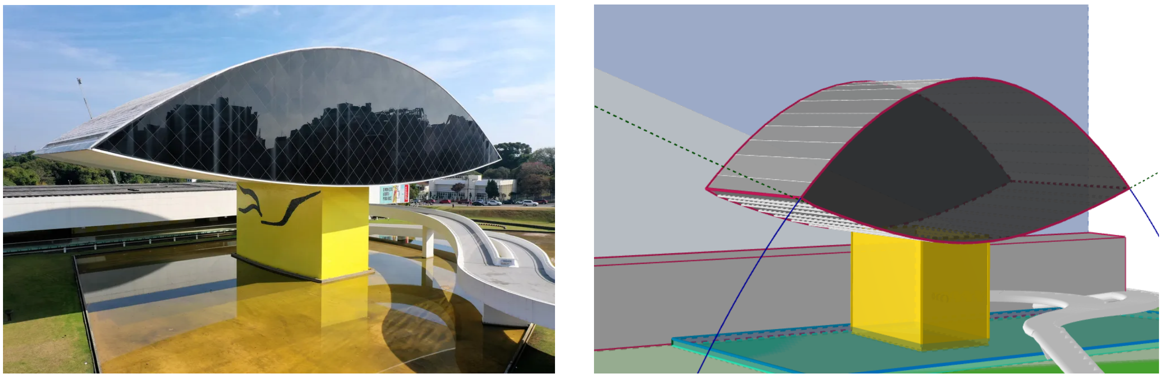
Figura 2.22 – Uma releitura do MON



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022a).

Finalizada a releitura, podemos compará-la com a Figura 2.16. A Figura 2.23 ilustra a comparação.

Figura 2.23 – (a) MON; (b) releitura do MON



(a) (b)

Fonte: (a) Paraná (2023, n.p); (b) a autora com o GeoGebra (2022a).

Observação 2.1. *O professor de matemática da Educação Básica pode iniciar com releituras* $2D$*, empregando polígonos e círculos. Para releituras mais complexas, como a do MON, sugerimos a Torre Eiffel – Figura 2.24. Para essa releitura, indicamos a leitura do material de Martínez (2023) e de Ganfornina (2023).*

Figura 2.24 – Torre Eiffel

Fonte: GetYourGuide (2023, n.p).

REFERÊNCIAS

ALIEXPRESS. **Cubo pelúcia**. S.l.: AliExpress, 2022. Disponível em: <https://pt.aliexpress.com/item/1005005319589379.html?spm=a2g0o.productlist.main.1.6e19380fQ6qg7u&algo_pvid=663e16a8-d366-4127-acba-20a7ffe3fa98&aem_p4p_detail=202307300352423780378954591200l4022588&algo_exp_id=663e16a8-d366-4127-acba-20a7ffe3fa98-0&pdp_npi=3%40dis%21BRL%21102.10%2151.05%21%21%2120.50%21%21%402101d68d16907143625006157e8abc%21120000032614831116%21sea%21BR%210&curPageLogUid=oTBGQNjlrSOA&search_p4p_id=202307300352423780378954591200l4022588_1>. Acesso em: 29 jul. 2023. 27

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2022. 10, 34

CATARINA, A. S. **Processamento de imagens digitais: histogramas e suas transformações**. Cascavel: Unioeste, 2023. Disponível em: <https://www.inf.unioeste.br/~adair/PID/Notas%20Aula/Processamento%20de%20Imagens%20Digitais%20-%20Histogramas.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2023. 15, 16

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. São Paulo: Livraria da Física, 2012. v. 1. 541 p. 37

COXETER, H. S. M. **Indroduction to geometry**. Toronto: John Wiley e Sons, 1969. 470 p. 41, 42

DANIEL, B. **Aprendendo geometria por meio de releituras de obras de arte**. 35 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, SC, 2021. 49

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017. 380 p. 39

DOMINGUES, H. H. Seções cônicas: história e ensino. **Revista de Educação Matemática**, v. 6, n. 4, p. 43–49, 1998. 38

EATON, J. W. **GNU Octave: sobre, história**. S.l.: Oitava GNU, 2023. Disponível em: <https://octave-org.translate.goog/about?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR&_x_tr_pto=sc>. Acesso em: 12 ago. 2023. 12, 13, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 31, 32, 33

EVES, H. **Indrodução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. 843 p. 37, 39

FEOFILOFF, P. **Bytes, números e caracteres**. São Paulo: IME/USP, 2019. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/bytes.html>. Acesso em: 26 ago. 2023. 22

GANFORNINA, R. M. F. **Modelado 3D con GeoGebra**. S.l.: GeoGebra, 2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kMNrEEg4>. Acesso em: 11 nov. 2023. 57

GEOGEBRA. **Baixar aplicativos GeoGebra**. S.l.: GeoGebra, 2022a. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Acesso em: 04 nov. 2022. 37, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 54, 55, 56, 57

GETYOURGUIDE. **Paris: ingresso para a Torre Eiffel e passeio de barco no Sena**. Zurique e Berlim: GetYourGuide, 2023. Disponível em: <https://www.getyourguide.com.br/paris-l16/paris-acesso-a-torre-eiffel-e-cruzeiro-no-rio-sena-t45877/>. Acesso em: 19 ago. 2023. 57

GLOBO. **Museu Oscar Niemeyer abrirá nos feriados de abril; veja programação**. S.l.: G1 Globo, 2023. Disponível em: <https://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2022/04/15/museu-oscar-niemeyer-abrira-nos-feriados-de-abril-veja-programacao.ghtml>. Acesso em: 19 ago. 2023. 52, 57

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Processamento de imagens digitais**. Brasil: Edgard Blücher, 2000. 501 p. 13, 14

INC., T. **Experimente o SketchUp**. S.l.: SketchUp, 2022. Disponível em: <https://www.sketchup.com/pt-BR/try-sketchup>. Acesso em: 09 jul. 2023. 38

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 297 p. 35

MARTÍNEZ, A. **Taller: Cómo utilizar GeoGebra para realizar un paseo matemático**. Andalucía - Espanha: Instituto GeoGebra de Andalucía - SAEM THALES, 2023. Disponível em: <https://thales.cica.es/geogebra/sites/thales.cica.es.geogebra/files/t6.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2023. 57

MENESES, P. R.; ALMEIDA, T. de. **Introdução ao processamento de imagens de sensoriamento remoto**. 2012. Disponível em: <https://www.academia.edu/40388021/INTRODU%C3%87%C3%83O_AO_PROCESSAMENTO_DE_IMAGENS_DE_SENSORIAMENTO_REMOTO>. Acesso em: 26 ago. 2023. 17

OCTAVE. **Ler e apresentar dados**. Octave, 2013. Disponível em: <http://octave.di.uminho.pt/index.php/Ler_e_apresentar_dados>. Acesso em: 27 ago. 2023. 23

PARANÁ. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: SEED, 2021. Disponível em: <https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf>. Acesso em: 10 set. 2023. 18, 39

PARANÁ, G. do. **História do museu Oscar Niemeyer**. Curitiba: Museu Oscar Niemeyer - Governo do Paraná, 2023. Disponível em: <https://www.museuoscarniemeyer.org.br/sobre/historia>. Acesso em: 10 ago. 2023. 51, 52, 53

PEREIRA, A. de F.; SALLES, P. P.; PEREIRA, R. de F. **Biografia Julio Cesar de Mello e Souza**. S.l.: Ideiatrip Comunicação e Design, 2017. Disponível em: <https://malbatahan.com.br/>. Acesso em: 04 nov. 2022. 14, 20, 25

QUEIROZ, J. E. R. de; GOMES, H. M. Introdução ao processamento digital de imagens. **RITA**, VIII, n. 1, p. 31, 2001. 14, 15, 16

SHUTTERSTOCK. **Animated convince parents to get dog**. S.l.: rostore.clearance2023.com, 2023. Disponível em: <https://www.shutterstock.com/pt/video/clip-1099701103-animated-convince-parents-get-dog-child-wanting>. Acesso em: 11 nov. 2023. 11

SPRING/INPE. **Spring: processamento de imagens**. Brasil: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006. Disponível em: <https://www.dpi.inpe.br/spring/portugues/tutorial/introducao_pro.html>. Acesso em: 27 ago. 2023. 15, 17

STATELLA, T. **Processamento digital de imagens com GNU Octave (2/13)**. S.l.: YouTube, 2022a. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=LC6tkjwd9sI&list=PL55-j0gEZ-BR4NQstl2_HKbQQ7o7TPdpK&index=2>. Acesso em: 20 ago. 2023. 20, 21, 22

STATELLA, T. **Processamento digital de imagens com GNU Octave (3/13)**. S.l.: YouTube, 2022b. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ww8uHm-rKAs&list=PL55-j0gEZ-BR4NQstl2_HKbQQ7o7TPdpK&index=3>. Acesso em: 20 ago. 2023. 18

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro - São Paulo: Record, 2008b. 300 p. 35

TRYFOROS, T. **Refine suas fotos e consiga as exposições certas usando a ferramenta de histograma**. S.l.: Adobe, 2023. Disponível em: <https://www.adobe.com/br/creativecloud/photography/discover/how-to-read-a-histogram.html#:~:text=Histograma%20%C3%A9%20um%20gr%C3%A1fico%20que,mais%20brilhoso%20no%20lado%20direito.> Acesso em: 27 ago. 2023. 16

WOLFFENBÜTTEL, A. O que é pixel? **Ipea - Desafios do desenvolvimento**, n. 28, 2006. 14

ÍNDICE