UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Uso da sala de aula invertida apoiada por tecnologias digitais no ensino da geometria analítica

Ronan Lucas de Souza
Magister Scientiae

FLORESTAL - MINAS GERAIS
2024

RONAN LUCAS DE SOUZA

Uso da sala de aula invertida apoiada por tecnologias digitais no ensino da geometria analítica

Dissertação Mestrado Profissional apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (Profissionalizante), para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Lucas Carvalho Silva

FLORESTAL - MINAS GERAIS
2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

Souza, Ronan Lucas de, 2025-

S729u
2024

Uso da sala de aula invertida apoiada por tecnologias digitais no ensino da geometria analítica / Ronan Lucas de Souza. – Florestal, MG, 2024.

1 dissertação eletrônica (115 f.): il. (algumas color.).

Inclui anexos.

Orientador: Lucas Carvalho Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2024.

Referências bibliográficas: f. 114-115.

DOI: https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2025.002

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Geometria analítica. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. . I. Silva, Lucas Carvalho , 1983-. II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 23. ed. 516.3

RONAN LUCAS DE SOUZA

Uso da sala de aula invertida apoiada por tecnologias digitais no ensino da geometria analítica

Dissertação Mestrado Profissional apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (Profissionalizante), para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 8 de novembro de 2024.

Assentimento:

Ronan Lucas de Souza
Autor

Lucas Carvalho Silva
Orientador

Dedico este trabalho a Deus, à minha amada filha Cecília, à minha esposa Erika e aos meus queridos pais, Elvécio e Auxiliadora.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, que me deu força e sabedoria durante esses anos de estudos. A Ele, toda honra e toda glória.

Agradeço também à minha amada filha Cecília, que, mesmo sem saber, me deu força e foi um dos combustíveis que me impulsionaram a alcançar este objetivo. Obrigado, princesa! Meu presente de Deus! Amor da minha vida!

Gratidão aos meus amados pais, Elvécio e Auxiliadora, que me deram grande suporte e apoio, não apenas para a realização do mestrado, mas também para outros objetivos na minha vida. Muito obrigado! Amo vocês!

Obrigado também à minha esposa Erika, companheira e guerreira, que me deu todo o suporte necessário para que eu pudesse dedicar tempo aos meus estudos. Te amo!

Agradeço aos meus colegas de sala do PROFMAT UFV Florestal, que contribuíram para o meu aprendizado e para a conclusão deste mestrado. E aos nossos professores, que ministraram suas aulas com grande maestria, contribuindo imensamente para minha formação profissional e pessoal.

Em especial, muita gratidão ao meu orientador, Professor Dr. Lucas Carvalho Silva, pelas orientações, disponibilidade e paciência. Gratidão também aos meus coorientadores, Dra. Danielle Franco Nicolau e Dr. Guaraci de Lima Requena, e ao coordenador do PROFMAT UFV Florestal, Dr. Luís Felipe Gonçalves Fonseca, pelo suporte e orientações durante esses anos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

SOUZA, Ronan Lucas de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2024. **Uso da sala de aula invertida apoiada por tecnologias digitais no ensino da geometria analítica**. Orientador: Lucas Carvalho Silva.

O ensino de geometria analítica nas escolas de ensino básico brasileiras é desafiador. Dentre os motivos para dificuldade no ensino e aprendizado da geometria analítica, um deles é que esse tema requer que o aluno tenha um bom conhecimento de álgebra como pré-requisito. Outro complicador é a dificuldade de associar equações algébricas com as formas geométricas, além da dificuldade de entender e reconhecer os lugares geométricos, suas definições e propriedades.
Diante disto, este trabalho tem como objetivo propor uma forma alternativa para o ensino da geometria analítica, usando a metodologia da Sala de Aula Invertida, amparada pelo uso do GeoGebra, vídeo-aulas e estudos dirigidos. Elaboramos, aplicamos e testamos um projeto de ensino, usando essas ferramentas e metodologia no terceiro ano do ensino médio do Colégio Tiradentes PMMG, unidade Nossa Senhora das Vitórias (Bairro Prado, Belo Horizonte - MG). Este projeto não atingiu os resultados esperados devido a diversos fatores, como a falta de empenho dos alunos, a rigidez na distribuição de pontos e o foco dos estudantes no ENEM. Embora os resultados quantitativos e qualitativos não tenham sido satisfatórios, a pesquisa indica que, em condições mais favoráveis, a metodologia proposta pode ser eficaz para o aprendizado. Para alcançar o sucesso, seria necessário um processo de mudança na mentalidade dos alunos, aliado a uma implementação mais adequada, com maior tempo disponível e uma distribuição de pontos mais atrativa, que incentivasse o engajamento dos estudantes.

Palavras-chave: ensino da matemática. sala de aula invertida. geogebra. geometria analítica. estudos dirigidos.

ABSTRACT

SOUZA, Ronan Lucas de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2024. **Flipped classroom and digital technologies in teaching analytic geometry**. Adviser: Lucas Carvalho Silva.

The teaching of analytic geometry in Brazilian basic education schools is challenging. Among the reasons for the difficulty in teaching and learning analytic geometry, one of them is that this topic requires students to have a good knowledge of algebra as a prerequisite. Another complication is the difficulty of associating algebraic equations with geometric shapes, as well as the challenge of understanding and recognizing geometric loci, their definitions, and properties.

In light of this, this study aims to propose an alternative approach to teaching analytic geometry, using the Flipped Classroom methodology, supported by the use of GeoGebra, video lessons, and guided studies. We developed, applied, and tested a teaching project using these tools and methodology in the third year of high school at Colégio Tiradentes PMMG, Nossa Senhora das Vitórias unit (Bairro Prado, Belo Horizonte - MG). This project did not achieve the expected results due to various factors, such as the lack of student effort, rigid point distribution, and students' focus on the ENEM. Although the quantitative and qualitative results were unsatisfactory, the research indicates that, under more favorable conditions, the proposed methodology can be effective for learning. To achieve success, a process of changing students' mindset is needed, along with a more suitable implementation, with more time available and a more attractive point distribution that encourages student engagement.

Keywords: teaching of mathematics. flipped classroom. geogebra. analytic geometry. guided studies.

Lista de Símbolos

COLOQUE AQUI OS Símbolos e notações utilizadas NO SEU trabalho. EXEMPLO:

α Letra grega Alfa

β Letra grega Beta

γ Letra grega Gama

δ Letra grega Delta

ϵ Letra grega Épsilon

ζ Letra grega Zeta

η Letra grega Eta

θ Letra grega Teta

ι Letra grega Iota

κ Letra grega Kapa

λ Letra grega Lambda

μ Letra grega Mi

ν Letra grega Ni

ξ Letra grega Xi

o Letra grega Ômicron

π Letra grega Pi

ρ Letra grega Rô

σ Letra grega Sigma

τ Letra grega Tau

υ Letra grega Upsilon

ϕ Letra grega Fi

χ Letra grega Chi

ψ Letra grega Psi

ω Letra grega Ômega

$A_{n,k}$ Arranjo de n, tomados k a k

C_n^w Combinação de n, w a w

$\mathbb{N}^r$ Produto Cartesiano de $\mathbb{N}$ por ele mesmo r vezes

P_n^w Permutação de n, w a w

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A matemática é uma das disciplinas em que os alunos das escolas de ensino básico brasileiras apresentam maior dificuldade na aprendizagem (Lima et al., 2020)[1]. Um dos parâmetros para tal afirmação de Lima [1] são os resultados de matemática no PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), em que o Brasil teve melhoras no seu desempenho médio, entretanto, em todos anos de sua participação o Brasil sempre ficou com a nota abaixo da média geral de todos países que realizaram o exame. Tomando como exemplos o ano 2000, primeira aplicação desta avaliação, o Brasil teve nota de 334 enquanto a média dos países participantes foi de 496; Em 2018, o Brasil melhorou seu desempenho, assim como em outros anos, porém sua nota ainda ficou abaixo da média geral, o país ficou com a nota de 384 e média das notas de todos países participante foi 492.

Os indicadores acima, assim como outros, mostram o pouco rendimento e aprendizado que os estudantes brasileiro têm em matemática. Todavia esta dificuldade, também é percebida no cotidiano escolar pelos professores, gestores e demais colaboradores da área de educação. Tal dificuldade é percebida normalmente em todas as principais áreas de matemática no ensino básico: aritmética, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística. No ensino médio os alunos se deparam com a Geometria Analítica, uma novidade desagradável para muitos, principalmente para os discentes que têm uma aversão à matemática. O aprendizado desse conteúdo depende de um bom conhecimento prévio sobre álgebra e geometria plana.

O conteúdo de Geometria Analítica nas escolas de ensino básico brasileiras é estudado no terceiro ano do ensino médio, seguindo orientações da BNCC[2]. Todavia durante os anos anteriores os alunos aprendem sobre: expressões e equações algébricas, valor numérico de polinômios, plano cartesiano, conceitos de ponto, reta e plano, um pouco sobre geometria euclidiana, áreas e perímetros de figuras planas, dentre outros. A falta de domínio sobre esses assuntos prejudica o entendimento da geometria analítica. O desconhecimento de alguns conceitos geométricos, dificuldades de desenhar e, consequentemente, visualizar geometricamente a situação proposta também são obstáculos para o processo de aprendizagem na geometria analítica. Ademais a própria dificuldade dos alunos com a álgebra contribuem para uma aprendizagem não satisfatória de geometria analítica.

Atualmente, alguns professores têm recorrido com frequência a ferramentas tecnológicas (PAULA, Teófilo Oliveira de, 2013)[3] para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, como plataformas, jogos educativos e softwares para computadores e celulares. Os próprios estudantes têm recorrido com frequência a conteúdos digitais, principalmente por meio da internet, como vídeo aulas no YouTube, para aprenderem novos conteúdos ou revisar conteúdos já estudados. Em relação ao estudo da matemática, o GeoGebra (software de geometria dinâmica, de acesso livre) surge como uma ferramenta importante no estudo de questões envolvendo álgebra e geometria. Diante de tantas ferramentas disponíveis aos estudantes e professores, a aplicação da Sala de Aula Invertida se torna praticável e pode auxiliar na aprendizagem dos estudantes.

Diante disso, queremos propor uma maneira de alcançar um aprendizado mais significativo de temas de geometria analítica nas aulas do ensino médio. Usando a metodologia da Sala de Aula Invertida, que é uma proposta pedagógica já estudada e experimentada (Jonathann Bergmann e Aaron Sams. 2011)[4]; (Hugo Luiz Gonzaga Honório e Liamara Scortegagna. 2017) [5], apoiada pelo uso do GeoGebra (PAULA, Teófilo Oliveira de. 2013)[5], estudos dirigidos (Lando, Janice Cassia. 2011) [6]; Santana, Rogério Joaquim. 2023)[7], vídeo-aulas e WhatsApp, como ferramentas.

Mas, o que seria uma Sala de Aula Invertida? Sendo bem simplista nesse primeiro momento, segundo (Bergmann e Sams)[4] a Sala de Aula Invertida é uma metodologia de ensino e aprendizagem que consiste em o aluno, sob a orientação do professor, estudar o conteúdo antes da aula, e durante a aula presencial são resolvidos exercícios e esclarecidas as dúvidas inerentes ao conteúdo estudado previamente pelos discentes.

Esse estudo foi realizado em turmas de terceiro ano do Colégio Tiradentes da PMMG, Unidade NSV, localizado no Bairro Prado, em Belo Horizonte/MG. Esta pesquisa foi autorizado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da UFV, com anuência do Colégio, conforme consta na Figura 6.45 em anexo.

Como já citado acima, o objetivo principal deste trabalho é propor uma alternativa à metodologia tradicional de ensino, enfatizando o protagonismo do aluno e o uso de ferramentas tecnológicas, visando melhorar a aprendizagem de geometria analítica em turmas do terceiro ano do ensino médio. Mas existem outras indagações que serão pesquisadas e com sorte esclarecidas neste estudo. A principal indagação é sobre a metodologia da Sala de Aula Invertida, sendo um dos objetivos a implementação e teste desta metodologia, verificando também o grau de aceitação por parte dos alunos. Em relação ao GeoGebra, os objetivos são: verificar se o aluno teve facilidade de realizar tarefas básicas usando este programa; e o quanto esse programa contribuiu para aprendizagem. Vale ressaltar que também serão testadas o uso de estudos dirigidos, WhatsApp e vídeo-aulas gravadas, que são as ferramentas usadas para comunicação e orientação durante o período de estudo extraclasse. Finalmente, tem-se o objetivo de verificar o engajamento e aprendizado dos alunos durante as etapas desta pesquisa.

2

Revisão de Literatura

Neste capítulo consta uma revisão bibliográfica sobre Sala de Aula Invertida, metodologia usada nesta pesquisa, e também sobre Estudos Dirigidos e o Uso do GeoGebra no ensino da Geometria Análitica, que foram ferramentas auxiliares e de suma importância para a montagem e execução desse projeto. Consta também nesta revisão bibliográfica os tópicos de Geometria Analítica que serão estudados pelos alunos por meio desse projeto de ensino e aprendizagem.

2.1 Sala de Aula Invertida

Antes de dissertar sobre a metodologia da Sala de Aula Invertida é importante ressaltar que ela é uma das Metodologias Ativas de Ensino e Aprendizagem. Segundo Lima (2021) [8] e Lorenzato (2010) [9] a aprendizagem depende, entre outros fatores, da metodologia utilizada. E quando o método de ensino coloca o aluno como protagonista de sua aprendizagem e não apenas um espectador, possibilita uma maior interação e trocas de conhecimento, proporcionando uma aprendizagem mais significativa. De maneira geral, as Metodologias Ativas de Ensino e Aprendizagem são métodos de ensino em que o aluno assume o protagonismo da sua aprendizagem e o professor passa a ter o papel de mediador e facilitador. Entre esses tipos de metodologias estão: Aprendizagem baseadas em problemas, Aprendizagem em pares, Gamificação, Sala de Aula Invertida, entre outros. Nessa revisão bibliográfica destacamos e dissertamos sobre a Sala de Aula Invertida, que foi a Metodologia Ativa usada nessa pesquisa.

Em Bergmann e Sams (2012) [4], encontramos relatos e dicas interessantes de educadores americanos que já estão há algum tempo nessa empreitada de motivar os alunos a aprenderem com mais autonomia e dentro das suas particularidades. Bergman e Sams, além de contarem suas experiências, citam alguns problemas vivenciados nas escolas que podem ser solucionados ou ao menos atenuados, por essa metodologia. Um dos principais obstáculos relatados por Bergmann e Sams, e alguns outros professores, é o grau de dificuldade e necessidade que cada aluno apresenta durante o processo de aprendizagem. E com a Sala de Aula Invertida é possível solucionar essas questões, pois possibilita uma abrangência melhor das particularidades dos discentes. Uma bandeira levantada pelos autores citados é de que temos que modificar não apenas a maneira de planejar e executar as aulas, mas temos que mudar nossa mentalidade de docentes, passarmos a preocupar com uma aprendizagem efetiva de cada aluno, e não apenas em cumprir o conteúdo programado.

Mas, o que de fato é invertido? Bergmann e Sams (2012) [4] esclarecem que: no método de ensino tradicional, o professor explica a matéria, principais conceitos e mostra alguns exemplos, e indica para os alunos exercícios/problemas para serem resolvidos em casa. A principal novidade apresentada por essa metodologia é que os alunos assistem vídeos e leem o conteúdo em casa, e na sala de aula, com o auxílio do professor são resolvidos os exercícios e problemas relacionados ao assunto.

No entanto, é mencionado nessa literatura alguns problemas nesta inversão de aula. Um dos principais é de que os alunos ao assistirem a aula introdutória de um assunto não podem fazer perguntas instantaneamente, devido ao fato de que essa aula não é ao vivo. Esse problema pode ser resolvido, se o aluno anotar essas dúvidas e saná-las com professor assim que possível. Mas não é tão simples, quanto parece, pois os alunos não estão acostumados com tal prática, são necessários alguns treinamentos para que eles assistam vídeos de uma forma eficaz, tomando nota de tópicos importantes e anotando eventuais dúvidas. Por fim, é de suma importância relatar aqui alguns retornos positivos observados por esses professores, após a implantação da sala de aula invertida. Um dos principais, é poder dar atenção devida aqueles alunos que apresentam uma maior dificuldade em aprender matemática. Permite também uma melhor gestão de sala de aula, ganhando um maior tempo para tirar as dúvidas e resolver exercícios com os alunos.

Uma outra vantagem mencionada é permitir que o aluno (principalmente os tímidos) “pause e rebobine o professor”, podendo assistir novamente algumas partes ou as aulas todas novamente, possibilitando assim tomar nota e anotar as dúvidas com mais tranquilidade. E isso traz benefícios para os alunos tímidos que têm vergonha de perguntar ou até mesmo pedir para o professor explicar tudo novamente, trazendo também uma economia de tempo nas aulas presenciais, possibilitando a utilização desse tempo para esclarecer dúvidas mais específicas desses e dos demais alunos da classe.

Com a Sala de Aula Invertida, é possível fazer uma verificação mais eficaz em relação ao aprendizado, pois essa metodologia permite um atendimento mais individualizado durante as aulas de resolução de exercícios (Bergmann e Sams, 2012).Relata-se experiências e apresenta-se estratégias de educadores que já estão há algum tempo nessa empreitada de motivar os alunos a aprenderem com mais autonomia e dentro das suas particularidades. Além de poder dar a devida atenção aos alunos com maior grau de dificuldade, a Sala de Aula Invertida permite também uma melhor gestão da classe, ganhando um maior tempo para tirar as dúvidas e resolver exercícios com os alunos.

Bergmann e Sams relatam a dificuldade de elaborar materiais para que os alunos estudassem em casa, além de produzirem materiais para leitura, eles gravaram áudios explicativos, que curiosamente começaram a despertar interesses até mesmo nos pais e responsáveis pelos alunos. Eles relataram que os pais falavam em reuniões nas escolas que também escutavam as aulas e achavam interessante.

Para entender o que é uma Sala de Aula Invertida foi necessário recorrer à Bergmann e Sams, que foram um dos precursores desta metodologia. No entanto, alguns questionamentos podem surgir: Isso é aplicável no ensino da matemática no Brasil? Uma vez que eles são educadores americanos, onde as estruturas e planos de ensino são diferentes dos adotados no Brasil. Diante disso, é de suma importância ler, estudar e falar sobre experiências com o uso da Sala de Aula Invertida aqui no Brasil. Nesse sentido, a dissertação: Sala de Aula Invertida na prática: implementação e avaliação no ensino de matemática, de Honório e Scorteagagna (2017) [5], teve uma contribuição nesse estudo. Onde foram compartilhadas experiências com elaboração e aplicação da metodologia da Sala de Aula Invertida no ensino da matemática em uma escola de ensino básico, em uma turma do 9º ano do ensino fundamental.

O conteúdo abordado na aplicação da Sala de Aula Invertida por Honório e Scortegagna foi o de razões trigonométricas no triângulo retângulo, uma vez que era o conteúdo previsto no planejamento anual da escola para a turma naquele momento. Esse processo de implantação da Sala de Aula Invertida, realizada por Honório e Scortegagna, foi dividido em três etapas: Planejamento, implantação e avaliação do processo.

O planejamento (1ª etapa) foi dividido em três partes, a preparação do AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem), plataforma utilizada pelos pesquisadores. A segunda parte foi a preparação do material didático que são as listas de exercícios e os vídeos, que foram gravados e editados por uma equipe técnica da UFJF, com duração máxima de 10 minutos, seguindo a sugestão dada por Bergman e Sams (2012). Nessa parte, também foi definido e elaborado o teste de aprendizagem com questões objetivas e discursivas, esse teste também foi postado no AVA. No planejamento feito por Honório e Scortegagna foi incluído algo primordial no processo, que foi a preparação dos alunos, que incluiu uma explicação sobre a metodologia Sala de Aula Invertida e a conscientização dos alunos da importância da aprendizagem colaborativa. Nessa etapa também foram instruídos sobre como usar o ambiente virtual de aprendizagem.

Para a segunda etapa, implementação, Honório e Scortegagna usaram duas semanas de aulas, totalizando 5 aulas presenciais, seguindo o horário de aulas da turma na escola. Foi intercalado momentos online com as aulas presenciais, ou seja, antes e depois das aulas presenciais eram postados conteúdos e vídeos na plataforma, e também foram disponibilizados fóruns de discussões sobre a teoria apresentada nos vídeos. Depois de cada aula presencial foram disponibilizados testes de aprendizagens no AVA.

Na terceira e última parte da sua pesquisa, Honório e Scortegagna fizeram a avaliação desse processo, que consistiu em uma análise qualitativa e quantitativa do mesmo. Foram analisados os relatórios obtidos da própria plataforma de aprendizagem, observações feitas pelo professor durante as aulas presenciais e as respostas dadas pelos alunos em um questionário aplicado no final do projeto. Honório e Scortegagna (2017) relataram que a experiência com a Sala de Aula Invertida foi satisfatória na escola onde aplicaram, e foi bem quista pelos alunos, que até solicitaram que o método fosse utilizado até o encerramento do ano letivo.

2.2 Estudos Dirigidos

O que seria um Estudo Dirigido? É um roteiro criado por professores para nortear e organizar os estudos autônomos de seus alunos. Visto que alguns discentes são habituados a estudar, buscar e adquirir seu conhecimento, apresentando uma maturidade para fazê-lo sem uma orientação. Mas uma parte significativa dos alunos tem dificuldade para estudar sem ter diretrizes e referências. Normalmente, o estudo dirigido é acompanhado por aulas expositivas antes ou depois de sua realização. Esses estudos podem ser realizados em casa, de forma individual ou na escola, de forma individual, grupos ou pares. Todavia, neste experimento, os estudos dirigidos foram feitos em casa, antes das aulas presenciais (fato que será explanado na seção: Metodologia da pesquisa).

Como e quando surgiu O Estudo Dirigido? Santana (2023) [7] em seu artigo “As origens do Estudo Dirigido” relata que esta ferramenta de ensino e aprendizagem existe há muito tempo, porém não foi encontrado registro formal do seu surgimento. Entretanto no início do século 20 (aproximadamente em 1910) Os irmãos McMurry começaram a formalizar e escrever sobre essa metodologia. Na pesquisa feita por Santana (2023) foi observado que alguns autores, associam de forma equivocada, que Charles McMurry foi o autor de um dos primeiros tratados sobre Estudo Dirigido, porém pelas análises feitas nas obras de Frank McMurry, e citações de outros autores e pesquisadores, infere-se que esse último foi o que mais contribuiu para formalização dessa prática de aprendizagem, embora seu irmão (Charles McMurry) tenha dado suas contribuições.

Santana (2023) [7] também cita em seu artigo outros autores, que ajudam a definir o conceito e aplicações dos estudos dirigidos no processo de ensino e aprendizagem, relatando parte das contribuições de Chaves (1960), Bezerra (1959) e Silva (1960). E os principais pontos levantados por esses educadores e pesquisadores é que uma das finalidades do estudo dirigido é desenvolver o hábito de estudo e ensinar os alunos a estudarem de forma adequada e eficiente, aumentando significativamente o rendimento escolar, e sua utilização é um ótimo remédio para corrigir a deficiência de aprendizagem na escola básica. Um ponto importante também observado neste artigo de Santana (2023) [7], é saber que o autodidatismo e a aprendizagem por meio de Estudo Dirigido não são a mesma coisa. Afinal um aluno que é autodidata, e já possui hábito e habilidade para aprender sozinho não têm a necessidade de receber um roteiro de estudo do professor. Uma das finalidades do estudo dirigido é nortear e incentivar aqueles alunos que não são autodidatas, ou seja, aqueles que precisam de orientação para estudar sozinhos.

Para essa pesquisa também foi importante buscar referências de estudos dirigidos aplicados no ensino da matemática no Brasil, nesse sentido o trabalho de Lando (2011) [6] também foi relevante nessa revisão bibliográfica. A autora relata a importância do Colégio de Aplicação das Faculdades de Filosofia, onde foram desenvolvidos alguns experimentos usando a técnica do estudo dirigido. Houve variações na forma de como o estudo dirigido foi desenvolvido, uma das variações é que alguns docentes usaram o estudo dirigido para fixação da aprendizagem e outro grupo de docentes usavam para introduzir um novo conceito. No primeiro modelo, eram feitas listas de exercícios; leitura de uma parte do livro e resolução de exercícios referentes ao conteúdo lido, no entanto esse conteúdo era trabalhado previamente em sala. No segundo modelo, que tinha como objetivo introduzir um novo conceito ou tópico do conteúdo, os discentes faziam a leitura de uma parte do livro didático selecionada pelo professor, e posteriormente eram discutidas as dúvidas e resolução de exercícios.

Lando concluiu em seu trabalho que de uma maneira geral os estudos dirigidos são usados para a fixação da aprendizagem. Entretanto sua utilização não é apenas com objetivo de ensinar conteúdos de uma determinada disciplina, mas principalmente ensinar o discente a estudar de forma correta e eficiente.

2.3 Uso do GeoGebra no ensino da geometria analítica

O processo ensino-aprendizagem está em constante transformação, e o avanço tecnológico tem sido um grande responsável pelas últimas novidades pedagógicas. As telas (celulares, computadores, tablets, ...) por determinado tempo eram vistas como vilões no processo de aprendizagem, pois os alunos passam horas conectados, deixando de se dedicarem aos estudos. No entanto, alguns educadores têm percebido que a tecnologia pode ser uma aliada no processo ensino-aprendizagem. Nesse sentido, o GeoGebra é um Software de geometria dinâmica, com aplicativo para smartfones, que auxilia significativamente no ensino da geometria.

Durante o desenvolvimento deste trabalho percebemos que muitos docentes têm usado o GeoGebra para ensinar matemática nas escolas de educação básica brasileiras. Notasse o uso para o estudo de funções, geometria plana, geometria analítica entre outros conteúdos obrigatórios de matemática para ensinos médio e fundamental, no Brasil. Um trabalho que está diretamente ligado ao que foi proposto nesse estudo, foi o: "O uso do software de geometria dinâmica GeoGebra no ensino de geometria analítica no 3º ano do ensino médio" de Paulo Alessandro Favacho Brito e Valdemir Cunha Oeiras (2017) [10]. Estes autores, relatam que a matemática é a disciplina que os alunos apresentaram maiores dificuldades na aprendizagem, segundo os dados do Movimento Todos pela Educação (2016). Especificamente, a geometria analítica é uma das áreas que os alunos do do Ensino Médio apresentaram as piores notas no primeiro simulado online do ENEM (ACESSO, 2016). O uso do GeoGebra, permite aulas mais dinâmicas e de melhor interação entre docentes e discentes (Brito e Oeiras). E por mais desafiador que seja para os docentes do que uma aula expositiva tradicional, o aumento do interesse, participação e desempenho dos alunos, tornam essas aulas atraentes até mesmo para os docentes mais tradicionais.

Brito e Oeiras planejaram e aplicaram uma oficina, com uma sequência didática para a utilização do GeoGebra no ensino da Geometria Analítica. Como o conteúdo de GA é extenso, no estudo realizado por eles, foi abordado apenas o assunto: Estudo de Retas. O trabalho proposto foi aplicado na Escola Estadual de Ensino Médio Inácio Moura, em Santo Antônio do Tauá, no estado do Pará. Devido as limitações do laboratório de informática da escola, somente 10 alunos participaram da oficina, esses alunos foram selecionados pela professora de matemática da turma. A participação desses alunos na oficina foi pontuada como uma atividade avaliativa da etapa.

As aulas para a aplicação dessa oficina foram divididas em dois momentos: O primeiro momento em sala de aula, onde foram ensinados conteúdos teóricos sobre plano cartesiano, pontos, retas, entre outros; uma apresentação teórica sobre o software GeoGebra; e as orientações para a segunda etapa da oficina. O segundo momento foi realizado no laboratório de informática da escola por meio de atividades relacionadas ao conteúdo teórico trabalhado previamente em sala.

Para coletar e analisar os dados, os pesquisadores analisaram o desempenho dos alunos nas quatro atividades realizadas no laboratório de informática e nas respostas de dois questionários aplicados, um antes e outro após a realização da oficina. A análise dos dados das atividades e dos questionários foram feitas de forma qualitativa e quantitativa.

Analisando o desempenho dos alunos nas atividades propostas e as respostas dadas nos questionários, os autores deste trabalho constataram que o uso do GeoGebra é importante para uma melhor interação e participação dos alunos nas aulas, melhorando o aprendizado e rendimento. Em vista disso, esse recurso tecnológico pode transformar a maneira de ensinar geometria analítica nas escolas de educação básica, transformando as aulas em aulas mais dinâmicas, atrativas e motivadoras, tanto para os discentes quanto para os docentes de matemática do Ensino Médio.

2.4 Geometria Analítica

Para Elon Lages Lima (2014) [11], a Geometria Analítica é uma parte da matemática cujo objetivo é expressar os conceitos e definições da geometria mediante a álgebra. Fazendo o caminho inverso, é também um instrumento geométrico para interpretar propriedades algébricas. A Geometria Analítica Plana se fundamenta na ideia de usar os números reais para representar os pontos da reta e pares de números reais para representar os pontos do plano. Essas representações são feitas utilizando-se o Plano Cartesiano.

Nas escolas de educação básica, o ensino da geometria analítica se limita à geometria plana. Não é lecionado sobre a geometria analítica espacial, este conteúdo é visto em alguns cursos de graduação na área de ciências exatas. Entre os conteúdos de geometria analítica ensinados no ensino médio, está parte da revisão bibliográfica foca nos assuntos que foram trabalhados neste projeto de ensino e aprendizagem. A principal referência bibliográfica utilizada foi o livro adotado pelo Colégio Tiradentes, unidade Nossa Senhora das Vitórias, onde a pesquisa foi realizada. Além deste, foram usados também o livro de Geometria Analítica da Coleção PROFMAT[12]; Geometria Analítica e Álgebra Linear[11], de Elon Lages Lima; e Fundamentos de Matemática Elementar[13], volume 7, de Gelson Iezzi.

O livro adotado pelo Colégio Tiradentes da PMMG foi elaborado pela editora Positivo. Especificamente, o livro do 3º ano do EM foi elaborado a pedido da diretoria de ensino da rede CTPM (Colégio Tiradentes da Polícia Militar) e tem como título: “Prepara”[14], alusão a preparação dos alunos do terceiro ano do ensino médio para o ENEM.

Os tópicos abordados nos estudos estudos dirigidos e que serão mencionados nesta seção são: Posições relativas entre retas no plano; Distância entre ponto e reta; Circunferência no plano cartesiano; Posições relativas entre ponto e a circunferência, e entre reta e a circunferência. Entretanto para descrevermos sobre posições relativas entre retas no plano cartesiano, é importante falarmos sobre as equações de retas no plano e para isso também vamos descrever um pouco sobre a condição de alinhamento de três pontos.

2.4.1 Condição para o alinhamento de três pontos no plano cartesiano

No sistema de coordenadas cartesianas três pontos distintos podem determinar um triângulo. A área de um triângulo com vértices $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ pode ser calculada por:

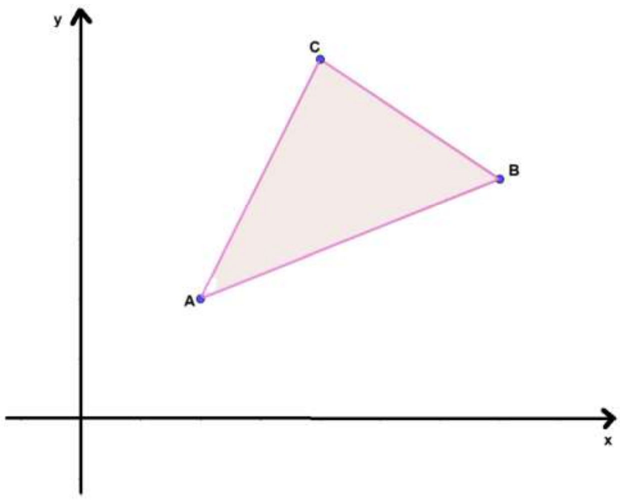
$$A = \frac{1}{2}.|\Delta| \tag{2.1}$$

Onde Δ é um determinante $3x3$, formado pela primeira coluna preenchida com os valores das abscissas dos pontos, a segunda pelas ordenadas destes pontos e a terceira coluna é unitária.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + y_A x_C + x_B y_c - y_B x_c - x_A y_C - y_A x_B$$

De fato, dado um triângulo ABC qualquer, representado na Figura 2.1, vamos obter sua área de uma maneira diferente da habitual.

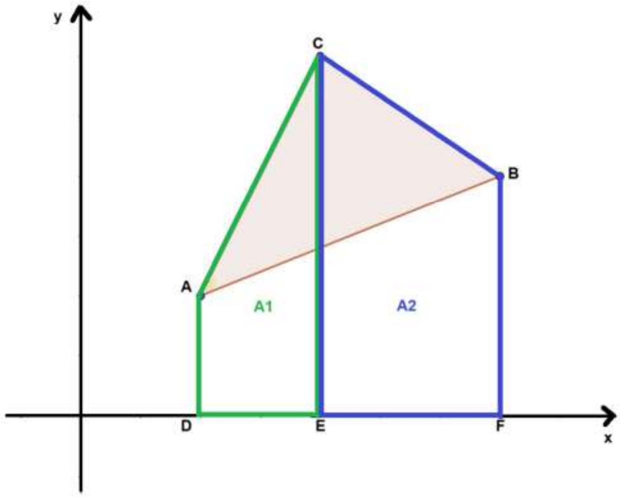
Figura 2.1: Triâgulo ABC qualquer no plano cartesiano



Fonte: Autor

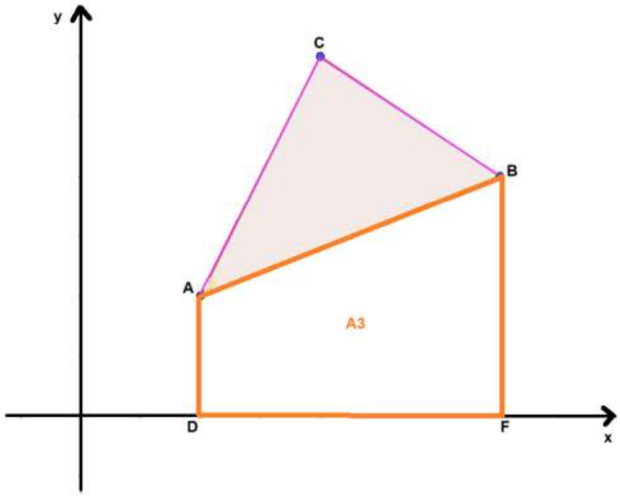
Considerando dois trapézios de vértices ADEC e EFBC, chamaremos de trapézios 1 e 2, respectivamente, como indicado na Figura 2.2. E um trapézio com vértices ADFB, que chamaremos de trapézio 3, indicado na Figura 2.3.

Figura 2.2: Triâgulo ABC, trapézios 1 e 2



Fonte: Autor

Figura 2.3: Triâgulo ABC, trapézio 3



Fonte: Autor

Temos que a área do triângulo ABC pode ser obtida pela soma das áreas do trapézio 1 (A1) com a área do trapézio 2 (A2), subtraída pela área do trapézio 3 (A3). Lembrando que o cálculo da área de um trapézio é dado por:

$$A = \frac{(B+b)H}{2}$$

Segue que:

$$A = A1 + A2 - A3$$

$$A = \frac{(B1+b1)H1}{2} + \frac{(B2+b2)H2}{2} - \frac{(B3+b3)H3}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} |\,(y_C - y_E + y_A - y_D)\,(x_C - x_A) + (y_C - y_E + y_B - y_F)\,(x_B - x_C)$$
$$-\ (y_B - y_F + y_A - y_D)\,(x_B - x_A)\,|$$

$$A = \frac{1}{2} |\,(y_C + y_A)\,(x_C - x_A) + (y_C + y_B)\,(x_B - x_C) - (y_B + y_A)\,(x_B - x_A)\,|$$

$A = \frac{1}{2}|y_C x_C - x_A y_C + y_A x_C - x_A y_A - y_c x_B - y_C x_C + y_B x_B - y_B x_C$
$- (y_B x_B - y_B x_A + y_A x_B - y_A x_A)\,|$

$A = \frac{1}{2}| - x_A y_C + y_A x_C + y_c x_B - y_B x_c + y_B x_A - y_A x_B|$

$A = \frac{1}{2}|x_A y_B + y_A x_C + x_B y_c - y_B x_c - x_A y_C - y_A x_B|$

Em que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + y_A x_C + x_B y_c - y_B x_c - x_A y_C - y_A x_B$$

Logo a área de qualquer triângulo ABC é dada por:

$$A = \frac{1}{2}.|\Delta| \tag{2.2}$$

Onde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

Como queríamos demonstrar.

Consequentemente, três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são colineares, se e somente se, eles não formam um triângulo e consequentemente a área formada por eles é igual a zero, ou seja, $\Delta = 0$. Obtem-se, então, uma condição para o alinhamento entre três pontos: Para que três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ estejam alinhados é necessário que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4}$$

2.4.2 Equações de retas no plano cartesiano

Antes de falar sobre as posições relativas entre retas no plano, que é um dos assuntos abordados nos estudos dirigidos, é interessante lembrar que a reta no plano cartesiano pode ser representada de formas distintas.

- Equação geral da reta

  Pelo Axioma I dos Postulados de Euclides sobre geometria plana, temos que dois pontos determinam uma única reta. Dito isso, dois pontos distintos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, definem uma reta r. E, se um ponto $(x, y) \in r$, então este ponto está alinhado com A e B, inferindo-se que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

Daí, segue que

$$x_A y_B + y_A x + x_B y - y_B x - y_A x_B - x_A y = 0 \tag{2.6}$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0 \tag{2.7}$$

Substituindo $y_A - y_B$ por a, $x_B - x_A$ por b e $x_A y_B - x_B y_A$ por c, obtemos, o que chamamos de, equação geral da reta:

$$ax + by + c = 0 \tag{2.8}$$

De modo que todo ponto $P = (x, y)$ pertencente a reta r deve verificar a equação acima, que é chamada de Equação Geral da Reta.

- Equação reduzida da reta:

  Tomando a equação geral da reta, apresentada acima, e considerando $b \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}n \end{aligned}$$

  Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$, obtém-se a seguinte equação:

$$y = mx + n \tag{2.9}$$

  Esta equação em que y é expressado em função de x, é chamada de equação reduzida da reta. Além disso m é conhecido como coeficiente angular e n como coeficiente linear. Essa equação é a que melhor possibilita comparar a posição relativa entre duas retas, pois $|m|$ é a tangente do menor ângulo formado entre a reta em questão e o eixo x.

- Equação paramétrica:

  A equação reduzida e a equação geral relacionam diretamente x e y, coordenadas de um ponto genérico da reta. Contudo, podemos escrever x e y em função de uma terceira variável t, chamada de parâmetro. Nesse caso, temos as Equações Paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = f(t) = At + B \\ y = g(t) = Ct + D \end{cases} \tag{2.10}$$

- Equação segmentária:

  Isolando t nas equações obtidas em (2.10), temos

$$\frac{x-B}{A} = t = \frac{y-D}{C} \tag{2.11}$$

  e daí, se supomos que $BC - AD \neq 0$, temos

$$C(x-B) = A(y-D) \tag{2.12}$$
$$Cx - BC = Ay - AD \tag{2.13}$$
$$Cx - Ay = BC - AD \tag{2.14}$$
$$\frac{Cx}{BC-AD} - \frac{Ay}{BC-AD} = 1 \tag{2.15}$$
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{2.16}$$

  Em que: $p = \dfrac{BC-AD}{C}$ e $q = -\dfrac{BC-AD}{A}$.

  Essa última equação é dita equação segmentária da reta.

2.4.3 Posições relativas entre retas no plano

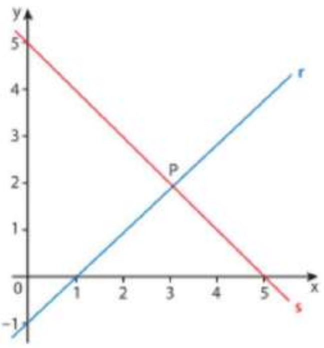
Como dito acima, dentre as equações apresentadas, a equação reduzida é a que melhor possibilita comparar a posição relativa entre duas retas. Outra forma de identificar a posição relativa entre retas, é a interpretação da solução do sistema linear composto pelas equações das respectivas retas. Ou seja, as possibilidades quanto às soluções desses sistemas estão relacionadas com as posições entre as retas representadas pelas equações do mesmo. Diante disso os sistemas são classificados como:

Sistema Possível e Determinado (SPD)

É quando o sistema tem uma única solução e as retas representadas pelas equações desse sistema são concorrentes. Observe, por exemplo, o sistema a seguir, formado pelas equações das retas r e s, respectivamente, e sua representação gráfica na Figura 2.4.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \tag{2.17}$$

Figura 2.4: Representação de retas concorrentes.



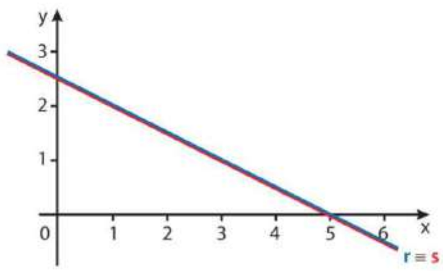
Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

O sistema é possível e indeterminado, quando têm infinitas soluções. Neste caso, as retas representadas pelas equações desse sistema são coincidentes. Observe o exemplo a seguir e sua representação gráfica (Figura 2.5):

$$\begin{cases} r : x + 2y = 5 \\ s : 2x + 4y = 10 \end{cases} \tag{2.18}$$

Figura 2.5: Representação de retas coincidentes



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

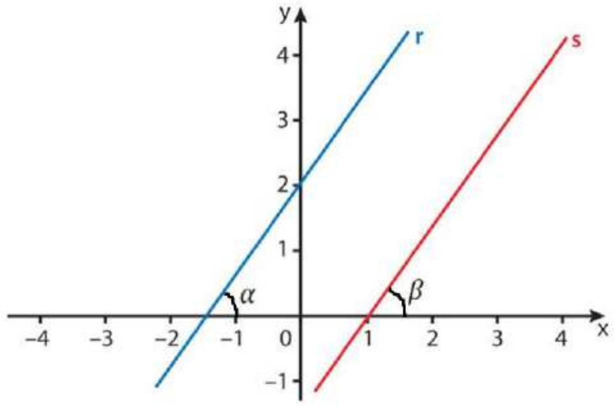
Sistema Impossível (SI)

Sistema impossível é aquele que não possui solução e as retas representadas pelas equações desse sistema são paralelas. Ou seja, não existe nenhum par ordenado (x, y) que satisfaça simultaneamente as equações das retas r e s, portanto elas não se interceptam. Observe o sistema a seguir e sua representação gráfica (2.6) :

$$\begin{cases} r : 4x - 3y = -6 \\ s : 4x - 3y = 4 \end{cases} \tag{2.19}$$

Dado r e s duas retas paralelas, representadas na Figura 2.6, α e β os menores ângulos que as retas r e s, respectivamente, formam com o eixo x do plano cartesiano, podemos inferir que α e β são congruentes. Se os coeficientes angulares m_r e m_s das retas r e s estiverem definidos, temos que: $\alpha = \beta$, $\text{tg}\alpha = \text{tg}\beta$ e $m_r = m_s$. Portanto

Figura 2.6: Representação de retas paralelas



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

retas paralelas, não verticais, apresentam coeficientes angulares iguais. Por exemplo, as equações reduzidas das retas apresentadas em (2.19), são

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \text{ e } y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \tag{2.20}$$

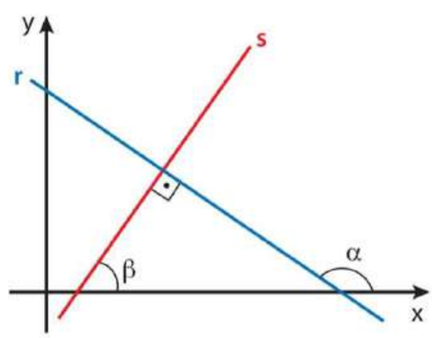
ou seja,

$$m_r = m_s = \frac{4}{3}. \tag{2.21}$$

Logo, a condição necessária para que duas retas r e s sejam paralelas é que que seus coeficientes angulares sejam iguais.

Como mencionado anteriormente, o sistema possível e determinado representa duas retas concorrentes no plano cartesiano. Particularmente, duas retas além de terem um ponto em comum, elas podem formar nesse ponto de interseção um ângulo de 90^o. Neste caso dizemos que elas são perpendiculares. Observe as duas retas r e s, representadas na Figura 2.7.

Figura 2.7: Representação de retas perpendiculares



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

Observemos que os ângulos formados pelas retas r e s com o eixo x medem α e β, respectivamente. Podemos inferir que $\alpha = 90^o + \beta$. Aplicando algumas relações trigonométricas, temos que $\alpha = 90^o + \beta$ e daí, $\text{tg}\alpha = \text{tg}(90^o + \beta)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\text{tg}\alpha &= \frac{\text{sen}(90^o+\beta)}{\cos(90^o+\beta)} && (2.22)\\
&= \frac{\text{sen}90^o\cos\beta+\text{sen}\beta\cos 90^o}{\cos 90^o\cos\beta-\text{sen}90^o\text{sen}\beta} && (2.23)\\
&= \frac{\cos\beta}{-\text{sen}\beta} = -\beta && (2.24)\\
&= -\frac{1}{\text{tg}\beta}. && (2.25)
\end{aligned}$$

Portanto, a condição para que duas retas r e s sejam perpendiculares é:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}, \tag{2.26}$$

ou, equivalentemente,

$$m_r \cdot m_s = -1. \tag{2.27}$$

2.4.4 Distância entre ponto e reta

Queremos calcular a distância de um ponto $P = (x_0, y_0)$ à uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, no plano cartesiano. Primeiramente vamos calcular a distância entre a reta r e sua paralela que passa pelo ponto P.

Seja s uma reta paralela a reta r e que passa por P, ao achar a distância entre as retas r e s, qualquer ponto de s estará a mesma distância de r. A equação da reta s é: $ax + by + d = 0$, pois tem o mesmo coeficiente angular da reta r e diferente coeficiente linear.

Seja t uma reta que passa pela origem do plano cartesiano e que é perpendicular as retas r e s. Temos que Q é o ponto de interseção da reta r com a reta t e M a interseção da reta s com a reta t. Como t passa pela origem e é perpendicular a reta r, ou seja, seu coeficiente angular é o inverso do oposto do coeficiente angular de r, temos que a equação da reta t é dada por: $bx - ay = 0$. A Figura 2.8 a seguir ilustra a situação descrita.

Para acharmos os pontos Q e M que são as interseções da reta t com as retas r e s, respectivamente, temos que resolver os sistemas:

$$\begin{cases} r : ax + by + c = 0 \\ t : bx - ay = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

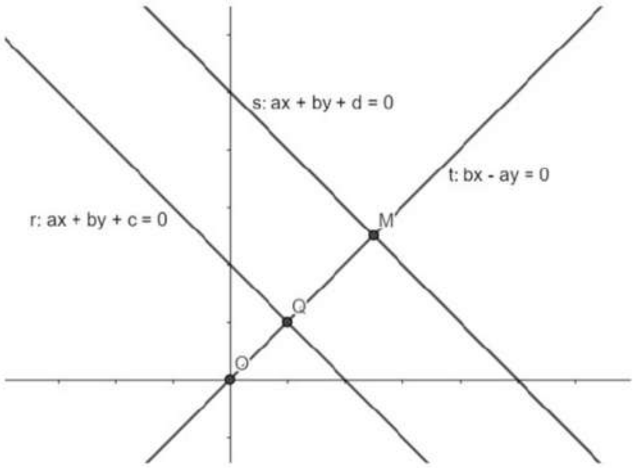
$$\begin{cases} s : ax + by + d = 0 \\ t : bx - ay = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Ressaltando que $Q = r \cap t$ e $M = s \cap t$. Resolvendo esses sistemas, temos que as coordenadas de Q e M, são:

$$Q = \left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right) \ \ e \ \ M = \left(\frac{-ad}{a^2+b^2}, \frac{-bd}{a^2+b^2}\right) \tag{2.30}$$

Calculando-se a distância entre os pontos Q e M, temos:

Figura 2.8: Reta t perpendicular às retas paralelas r e s



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

$$d_{Q,M} = \sqrt{(X_M - X_Q)^2 + (Y_M - Y_Q)^2} \tag{2.31}$$

$$d_{Q,M} = \frac{|d - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.32}$$

Tomando a equação da reta $s : ax + by + d = 0$, temos que $d = -ax - by$. Como $P = (x_0,\ y_0)\ \in s$. Então: $d = -ax_0 - by_0$.

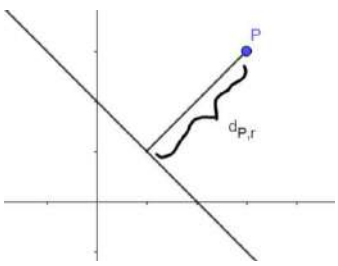
A distância entre Q e M é a distância entre as retas r e s. E a distância de qualquer ponto da reta s até a reta r é igual a distância entre essas duas retas. Segue que:

$$d_{P,r} = d_{s,r} = d_{Q,M} = \frac{|d - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-ax_0 - by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.33}$$

Portanto a distância entre um ponto $P = \ (x_0,\ y_0)$ e uma reta $r : ax + by + c = 0$ representada na Figura 2.9 é dada por:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.34}$$

Figura 2.9: Distância do ponto P à reta r

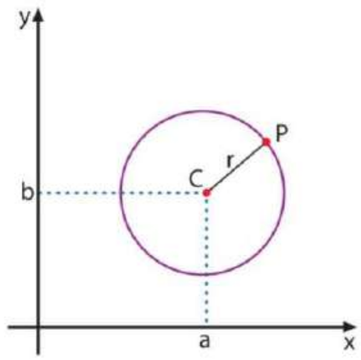


Fonte: Autor.

2.4.5 Circunferência no plano cartesiano

A circunferência é uma figura geométrica bem conhecida, pois está presente no dia a dia e é estudada desde o ensino infantil. Todavia a definição de circunferência e círculo são confundidos com frequência por estarem relacionados, no entanto não são a mesma coisa. O círculo é a região delimitada por uma circunferência e o comprimento da circunferência é o perímetro do círculo. A circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma mesma distância de um ponto C. Dizemos que C é o centro da circunferência e a distância de C até qualquer ponto da circunferência é chamada de raio, denotado pela letra r. A Figura 2.10 ilustra uma circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r.

Figura 2.10: Representação da circunferência no Plano Cartesiano



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

Sejam uma circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r e um ponto $P = (x, y)$ pertencente a essa circunferência. Por definição temos que a distância do ponto P ao centro C é igual a r, ou seja, $d(C,P) = r$.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d_{C,P} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{2.35}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{2.36}$$

Esta é a equação reduzida da circunferência, dado o centro $C = (a, b)$ e raio r. Desenvolvendo a equação reduzida, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{2.37}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2byb^2 = r^2 \tag{2.38}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \tag{2.39}$$

A equação acima é conhecida como a equação geral da circunferência.

Portanto, para obtermos a equação geral da circunferência conhecendo seu centro e raio, substituímos os valores da coordenada do centro e a medida do raio na fórmula da equação reduzida e desenvolve-se essa equação. Para fazer o caminho inverso, ou seja, obter o centro e o raio da circunferência, dada sua equação geral, um dos métodos é o de "Completar Quadrados".

Exemplo 1:

Escreva a equação geral de uma circunferência com centro $C = (4, 5)$ e raio 6.

Solução:

Substituindo o centro e raio dados na fórmula da equação reduzida da circunferência, e desenvolvendo-a, obtém-se a equação geral da circunferência:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{2.40}$$

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 6^2 \tag{2.41}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 - 36 = 0 \tag{2.42}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 5 = 0 \tag{2.43}$$

Exemplo 2:

Determine o centro e o raio da circunferência de equação:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0 \tag{2.44}$$

Solução:

Reorganizando a equação, temos:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 36 = 0 \tag{2.45}$$

Observe que $x^2 - 4x$ é uma parte do trinômio quadrado perfeito $x^2 - 4x + 4$. Assim como $y^2 - 6y$ é uma parte de $y^2 - 6y + 9$. Reescrevendo a equação e "completando os quadrados", temos:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 4 - 9 - 36 = 0 \tag{2.46}$$

Observe que como somamos 4 e 9 para completar os quadrados, por isto foi necessário subtraí-los adiante na equação. Efetuando as devidas operações e manipulações algébricas, obtemos a equação reduzida da circunferência:

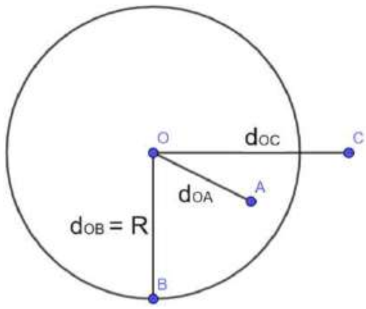
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 49 \tag{2.47}$$

Portanto, a circunferência apresentada, tem centro $C = (2, 3)$ e raio igual a 7.

2.4.6 Posições relativas entre ponto e circunferência

Seja uma circunferência no plano cartesiano com equação definida, um ponto P no plano cartesiano pode ter três possibilidades em relação à sua posição em relação a essa circunferência: P pode pertencer à circunferência, P pode ser exterior ou P pode ser interior à circunferência.

Figura 2.11: Posição do ponto em relação à circunferência



Fonte: Autor.

Na Figura 2.11 temos a representação das três situações, o ponto A é interior à circunferência, o ponto B pertence a circunferência e o ponto C é exterior à circunferência.

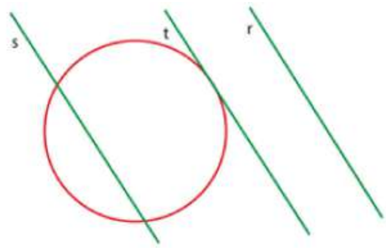
Para determinarmos a posição de um ponto $P = (x, y)$ em relação a uma circunferência λ de raio R e centro $O = (x_0, y_0)$, calculamos a distância entre o ponto P e centro O da circunferência, e comparamos o resultado com a medida do raio, R, da circunferência. Observemos que na Figura 2.11:

- B pertence à λ, portanto $d_{B,O} = R$.
- C é exterior à λ, portanto $d_{C,O} > R$.
- A é interno à λ, portanto $d_{A,O} < R$.

2.4.7 Posições relativas entre reta e circunferência

Sejam uma circunferência com centro $O = (x_0, y_0)$ e raio r e uma reta com equação definida, temos três possibilidades para a posição desta reta em relação. A reta pode ser secante, tangente ou exterior à λ.

Figura 2.12: Posições relativas entre retas e uma circunferência



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

Considerando a equação da circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ e a equação da reta $s : ax + by + c = 0$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \lambda : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \\ s : ax + by + c = 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

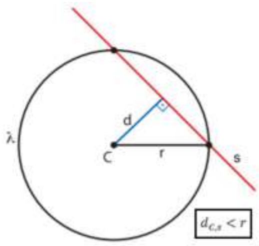
Resolvendo esse sistema em $\mathbb{R}$, posto que $(x - x_0)$ e r são as coordenadas do centro e a medida do raio de λ, portanto são constantes; assim como a, b e c, que são os coeficientes da equação geral da reta s, temos três possibilidades:

- O sistema ter duas soluções reais: Nesse caso, inferimos que a reta s intercepta λ em dois pontos, logo a reta s é secante à λ.
- O sistema ter uma solução real: Nesse caso, inferimos que a reta s intercepta λ em um único ponto, logo a reta s é tangente à λ.
- O sistema não apresentar solução em $\mathbb{R}$: Nesse caso, inferimos que a reta s não intercepta e nem tangencia λ, logo a reta s é exterior à λ.

Entretanto, existe uma forma mais trivial de verificar a posição da reta s em relação a , basta calcular a distância do centro $C = (x_0, y_0)$ até a reta s, usando a fórmula para calcular distância de ponto à reta, e comparar o resultado com a medida do raio de λ. Diante disto infere-se que:

- A reta s é secante à λ, se $d_{C,s} < r$.

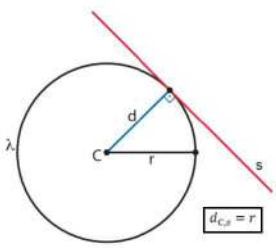
Figura 2.13: Reta secante à circunferência



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

- A reta s é tangente à λ, se $d_{C,s} = r$.

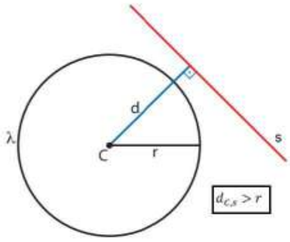
Figura 2.14: Reta tangente à circunferência



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

- A reta s é exterior à λ, se $d_{C,s} > r$.

Figura 2.15: Reta exterior à circunferência



Fonte: Prepara Positivo, volume 8, Editora: Sistema Positivo de Ensino.

3 Metodologia

A proposta metodológica nessa pesquisa é condizente com uma linha de pensamento de que o aluno deve ser o protagonista e o professor o intermediador no processo de ensino e aprendizagem, dando mais autonomia aos discentes. O docente aqui terá a função de orientar, incentivar, amparar, examinar e fazer as devidas intervenções, quando forem necessárias. A metodologia adotada nesta pesquisa foi a Sala de Aula Invertida, todavia foram usadas ferramentas pedagógicas e tecnológicas para amparar essa metodologia, como estudos dirigidos, vídeo aulas e o software de acesso livre GeoGebra.

Figura 3.1: Diagrama da metodologia e ferramentas utilizadas

Fonte: Autor

O colégio onde foi aplicado este projeto de ensino e aprendizagem tem algumas particularidades, às quais julgamos importantes mencionar, possibilitando ao leitor uma melhor compreensão da metodologia e dos resultados dessa pesquisa.

As atividades desse estudo foram desenvolvidas nas aulas de matemática de quatro turmas do terceiro ano do ensino médio do Colégio Tiradentes da PMMG, unidade Nossa Senhora das Vitórias, localizado no Bairro Prado em Belo Horizonte-MG. Nesse colégio as turmas do 3º ano do ensino médio são divididas por áreas de conhecimento de acordo com o interesse e afinidade dos alunos com base nas diretrizes do Novo Ensino Médio. As turmas de Ciências Humanas e Linguagem possuem apenas quatro aulas semanais de matemática, e os conteúdos a serem trabalhados durante o ano são vistos superficialmente. As turmas de Ciências Exatas e da Natureza têm sete aulas semanais, desse modo os conteúdos a serem trabalhados durante o ano letivo, são vistos de uma forma mais detalhada. As turmas 301 e 302 são chamadas de turmas de "Humanas" e as turmas 303 e 304 são conhecidas como turmas de "Exatas". De acordo com essas divisões foi elaborado um plano de estudos, pela editora Positivo (responsável pela elaboração do material da rede CTPM-MG) com respaldo da direção pedagógica da rede CTPM.

Neste plano anual de estudos têm os conteúdos que devem ser ministrados em todas as turmas, e os conteúdos específicos para as turmas de "Exatas". Por exemplo, o conteúdo de Geometria Analítica é ministrado para as turmas de ambas áreas do conhecimento, entretanto é visto de maneira superficial nas turmas de "Humanas" e mais aprofundado nas turmas de "Exatas", ou seja, tem tópicos que são lecionados somente nas turmas de "Exatas", tal como os tópicos: Posições relativas entre ponto e circunferência; e Posições relativas entre reta e circunferência, são previstos para serem lecionados somente nas turmas de Exatas , todavia esse conteúdo foi ministrado para todos as turmas, usando a metodologia relatada neste texto.

É importante mencionar que na rede de Colégios Tiradentes da PMMG foram adotados os livros do Sistema Positivo de Ensino e um plano de ensino anual com uma certa peculiaridade. Os conteúdos são divididos em três partes, chamadas de "Frentes", sendo que na Frente 1: estão os conteúdos revisionais relativos a álgebra do 1º ano do EM e depois estudos de polinômios e números complexos; na Frente 2: Toda geometria abordada no ensino médio, começando da geometria plana, depois trigonometria, geometria espacial e finalizando com a geometria analítica; e na Frente 3: estão os conteúdos da parte algébrica trabalhados no 2º ano do EM, análise combinatória e probabilidade. Essa informação é relevante para esclarecer que enquanto os alunos estavam estudando de forma autônoma geometria analítica, estavam tendo aulas presenciais sobre outros conteúdos do plano anual de estudos.

As observações relatadas acima são relevantes para a análise dos resultados dessa pesquisa, tanto pela diferença da carga horária e consequentemente dos tópicos previstos para serem trabalhados na disciplina de matemática, quanto para enfatizar as diferenças características dos alunos de cada turma em relação à afinidade com a área de exatas, e consequentemente pela matemática.

Na perspectiva do aluno, a metodologia foi dividida em três partes. Em um primeiro momento estudos autônomos em casa, com o suporte do professor por meio de estudos dirigidos e tecnologias digitais (vídeos, GeoGebra, WhatsApp). Na segunda parte, em sala de aula, foram feitas discussões sobre as dúvidas surgidas e resoluções de problemas. O terceiro momento foi destinado para os alunos fazerem uma avaliação da metodologia e do processo de aprendizagem (Questionário) e testar o conhecimento adquirido (Teste de Aprendizagem).

O professor além de participar de todas essa as fases mencionadas acima, teve todo um processo de preparação do material a ser utilizado. Portanto a divisão do trabalho inerente ao professor e pesquisador nessa pesquisa é: Preparação, implementação e avaliação.

Figura 3.2: Fases da metodologia utilizada

Fonte: Autor

O início do conteúdo de geometria analítica foi lecionado presencialmente com aulas expositivas, antes da realização dessa pesquisa. Na oportunidade os alunos foram lembrados sobre o plano cartesiano, as características e definições inerentes a ele. Nesse primeiro momento foi trabalhado também a definição e as equações de retas no plano cartesiano. Os conteúdos que foram estudados usando a metodologia proposta foram: Posições relativas entre retas no plano cartesiano, distância entre ponto e reta, circunferência no plano cartesiano, posições relativas entre ponto e circunferência e posições relativas entre reta e circunferência. Para cada tópico foi elaborado um estudo dirigido (Figura 6.1, em anexo), os quais foram nomeados e divididos da seguinte maneira:

- ED 1: Posições relativas entre retas no plano cartesiano;
- ED 2: Distância entre ponto e reta;
- ED 3: Circunferência no plano cartesiano.
- ED 4: Posições relativas entre ponto e circunferência; e entre reta e circunferência.

Nos estudos dirigidos, foram indicadas as páginas dos livros onde os respectivos assuntos estavam localizados, uma lista de sugestões de exercícios do próprio livro, links de vídeos curtos gravados previamente pelo professor e a atividade descrita no próprio estudo dirigido. Essas atividades continham partes que deveriam ser feitas e entregues de forma manuscrita, e partes que deveriam ser realizadas utilizando o GeoGebra, com os alunos enviando os arquivos correspondentes pelo WhatsApp. No primeiro estudo dirigido, foi colocado também o link de um breve vídeo demonstrando como acessar o GeoGebra online e suas principais ferramentas.

Em relação aos vídeos, foi decidido usar vídeos gravados pelo próprio professor regente da turma, uma vez que uma boa parte dos alunos estão habituados com a didática do mesmo, considerando também o fato de que os alunos podem procurar outros vídeos sobre o mesmo assunto na internet, ou seja, tornando o vídeo gravado pelo professor um bom parâmetro para fazerem essa busca por informação e conhecimento.

Nas aulas presenciais, inicialmente foram esclarecidas as dúvidas relacionadas aos tópicos estudados no momento assíncrono, e realizadas as correções dos exercícios propostos nos estudos dirigidos. Em seguida, foram apresentados os desafios, elaborados pelo autor (Anexo 6.25), sendo um para cada tópico estudado. Os enunciados

dos desafios, acompanhados de suas figuras ilustrativas, foram exibidos na televisão da sala de aula. Foi concedido um tempo aproximado de 10 minutos para que os alunos tentassem resolver cada desafio, e, em seguida, realizamos a discussão do problema e apresentamos uma sugestão de solução.

A terceira parte dessa metodologia foi dedicada à avaliação de todo o processo. A análise foi realizada de forma qualitativa (por meio de questionário e observações do professor) e quantitativa (por meio de teste de aprendizagem). O questionário foi enviado pelo WhatsApp, com perguntas sobre: Sala de Aula Invertida, uso do GeoGebra, vídeos gravados pelo professor, nível de comprometimento dos alunos e o aprendizado que consideraram ter alcançado. O teste de aprendizagem foi realizado de forma presencial e teve como objetivo medir o nível de conhecimento adquirido pelos alunos. As respostas do questionário foram contabilizadas na pontuação por participação, enquanto o teste de aprendizagem foi corrigido e pontuado conforme o desempenho de cada estudante. Vale ressaltar também que dois estudos dirigidos (ED1 e ED3) foram pontuados, enquanto dois outros (ED2 e ED4) não foram, a fim de verificar o comprometimento e empenho dos estudantes, por meio de uma bonificação e sem essa bonificação, ou seja, para identificar os alunos com maior interesse em estudar e buscar conhecimento.

3.1 Realização dos vídeos

Foi cogitada a hipótese de usar nos estudos dirigidos indicações de vídeos de professores e canais de YouTube já conhecidos, por serem na maioria das vezes bem editados e com explicações claras e objetivas. Todavia foi definido que a produção destes vídeos ficaria a cargo do pesquisador e também professor regente dessas turmas, possibilitando que os alunos assistam vídeos com o próprio professor que estão habituados a assistir às aulas presenciais.

Para gravar os vídeos foi usado o OBS Studio (Open Broadcaster Software) um software de transmissão de vídeos em código aberto. Esse software grava a tela do computador e o áudio captado pelo microfone do computador. Por inaptidão em operar outras ferramentas, o programa usado para escrever e explicar os conteúdos durante os vídeos gravados foi o Paint, um programa de fácil manejo e que normalmente vêm instalado nos computadores.

Para editar os vídeos foi usado o CapCut, que é um software de edição de vídeo gratuito que disponibiliza recursos como efeitos de transição, filtros, legendas e faixas de áudio para ajudar o usuário em sua produção audiovisual. Esse software foi de suma importância para fazer recortes e juntar partes dos vídeos gravados, pois durante a gravação desses teve alguns erros, falas e/ou escritas incompreensíveis. Durante a gravação e edição desses vídeos foi captado que era mais fácil a edição de partes desses vídeos, caso acontecesse algum equívoco, do que a gravação de todo vídeo novamente.

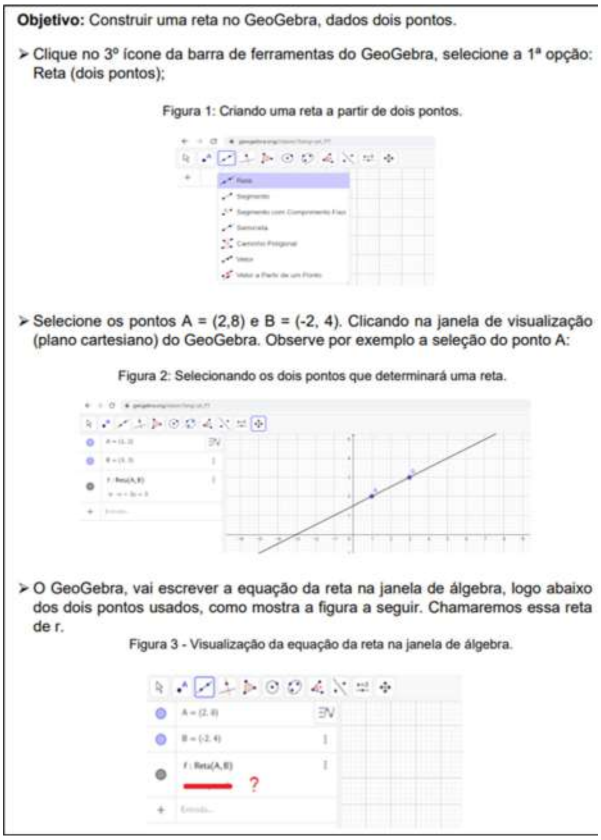
Os vídeos editados foram postados no YouTube e os links disponibilizados nos estudos dirigidos. Foi também disponibilizado o link desses vídeos (Anexo 6.3) no final deste trabalho, caso o leitor tenha interesse em assisti-los.

3.2 Uso do GeoGebra

O GeoGebra foi escolhido nesta pesquisa por ser um software que permite ao aluno visualizar a relação da álgebra com a geometria plana. Outra vantagem do GeoGebra é que ele é um software de acesso aberto, que não precisa ser baixado e instalado, além de ser um programa intuitivo.

Para sua utilização, foi feito um vídeo explicando sobre sua utilidade, como acessá-lo e suas principais funcionalidades. Outras informações relevantes foram passadas durante os estudos dirigidos. Por exemplo no primeiro estudo dirigido (Anexo 6.1) foi solicitado aos alunos que obtivessem a equação da reta que passa pelos pontos A = (2,8) e B = (-2,4), primeiramente de forma manuscrita por meio de cálculos, em seguida, usando o GeoGebra, para realização dessa parte, eles tiveram a orientação dentro do próprio estudo dirigido, como pode se observar na figura 3.3.

Figura 3.3: Orientação para obter equação de reta no GeoGebra (ED 1)



Fonte: Autor.

3.3 Orientação e comunicação

A orientação foi realizada antes do início do projeto, destacando a importância do protagonismo do estudante no processo de aprendizagem, além das orientações nos estudos dirigidos. Também foi disponibilizado um contato direto com o professor por meio do WhatsApp. Um grupo foi criado para que os alunos pudessem enviar suas dúvidas; entretanto, foi dada a liberdade de enviar mensagens no privado, caso se sentissem desconfortáveis em compartilhá-las no grupo. A escolha do WhatsApp como meio de comunicação, em detrimento de outros meios (como e-mail e outras plataformas), se deu pela praticidade oferecida pelo aplicativo, que é de fácil acesso e amplamente utilizado pelos alunos onde esta pesquisa foi aplicada.

O conteúdo de geometria analítica foi introduzido em aulas presenciais, e a explicação da metodologia, assim como a orientação sobre os estudos dirigidos, também foi feita pessoalmente pelo professor. Ou seja, tanto no início quanto no final do processo, a comunicação foi realizada de forma presencial, permitindo uma interação mais eficaz entre professor e aluno nesses momentos cruciais para a introdução do conteúdo, a orientação no desenvolvimento da aprendizagem e o fechamento do conteúdo estudado.

3.4 Criação e utilização dos Estudos Dirigidos

O estudo dirigido ou estudo orientado, é uma ferramenta importante e indispensável na metodologia da sala de aula invertida, pois para que os alunos estudem a matéria antes da aula presencial é importante que eles recebam orientações dos conteúdos e tópicos a serem estudados, e um direcionamento para obtenção de material de apoio. Salientando que um professor de filosofia pedir aos alunos para "ler o capítulo 3 do volume 1, e façam um resumo, para discutirmos na próxima aula" não deixa de ser um estudo dirigido, por mais simples que seja. Afinal o aluno foi orientado de como se preparar em casa para a próxima aula presencial.

A utilização e confecção dos estudos dirigidos foi inspirada pelas aulas de Fundamentos de Cálculo, lecionada pelo professor Dr. Luiz Gustavo Perona, que foram lecionadas online, por causa da Pandemia da Covid-19. Ele usou estudos dirigidos para ministrar suas aulas, a diferença da aplicação usada por ele é que uma parte do estudo dirigido era feita por ele durante as aulas e ele selecionava alguns exercícios para serem feitos nos estudos individuais dos discentes e escolhia um da lista para cada aluno entregar na semana seguinte. A metodologia usada por ele incitou em aplicar estudos dirigidos para ensinar alguns conteúdos de matemática em turmas do ensino médio.

A elaboração dos estudos dirigidos não foi tão desafiadora quanto a elaboração dos vídeos, mas foi necessário um cuidado com suas confecções, pois a metodologia da Sala de Aula Invertida foi uma novidade para os alunos, motivando para que esses estudos dirigidos fossem bem elaborados e claros nas orientações. Os estudos dirigidos foram elaborados com a seguinte estrutura:

- Orientação de leitura - páginas do livro didático do próprio aluno;
- Link dos vídeos gravados;
- Exercícios para serem entregues de forma manuscrita;
- Exercícios para serem feitos no GeoGebra, entregues pelo WhatsApp;
- Sugestões de exercícios do livro didático (Não eram para entregar).

Os quatro estudos dirigidos (anexo 6.1) foram revisados e corrigidos algumas vezes, até chegarmos na versão final, enviadas (pelo WhatsApp) aos alunos. As dúvidas e esclarecimentos gerais sobre os estudos dirigidos foram tiradas também pelo WhatsApp. E as dúvidas específicas sobre os conteúdos abordados e sobre a resolução dos exercícios sugeridos foram esclarecidas nas aulas presenciais.

Para cada estudo dirigido, também foi elaborado um desafio (anexo 6.2) que, inicialmente seriam colocados no final de cada estudo dirigido, mas ficou definido que era melhor serem apresentados no final das aulas presenciais, pois os alunos estariam mais familiarizados com o assunto e preparados para tentar resolvê-los. Foi dado um tempo de aproximadamente dez minutos para que resolvessem e após esse prazo o professor apresentou uma proposta de resolução.

4

Resultados e discussão

Dos resultados encontrados na pesquisa, alguns foram quantitativos, ou seja, podem ser mensurados e analisados suas estatísticas e parâmetros. Como por exemplo, quantitativo de alunos que fizeram os estudos dirigidos pontuados e não pontuados, aproveitamento e média de acertos no teste de aprendizagem. Entretanto, outros resultados foram qualitativos, dos quais as análises precisam ser feitas de uma maneira diferente, por exemplo o grau de interesse dos alunos durante todo o processo.

Foram três fontes de onde foram obtidos os resultados: observação do professor e pesquisador durante a pesquisa; resultados do teste de aprendizagem (anexo 6.5) aplicados presencialmente nas quatro turmas analisadas nesta pesquisa; e as respostas dadas ao questionário (anexo 6.6) enviado para os alunos no término dos estudos dos quatro tópicos estudados usando esta metodologia proposta.

4.1 Empenho dos alunos do ponto de vista do professor regente

Nessa análise, foram considerados os seguintes parâmetros: Interação com o professor pelo WhatsApp durante o período de estudos autônomos, entrega das atividades propostas, interação durante as aulas presenciais para tirar dúvidas e engajamento para resolver os desafios propostos em sala ao final de cada tópico estudado.

Infelizmente, os alunos não interagiram o suficiente pelo WhatsApp para tirar dúvidas em relação aos conteúdos e resolução de exercícios, a pouca interação com o professor se deu em relação à entrega das atividades propostas nos Estudos Dirigidos, que deveriam ser feitas usando o GeoGebra. De todos os alunos envolvidos na pesquisa, totalizando 99 alunos, apenas cinco (aproximadamente 5%) enviaram mensagens perguntando a respeito do conteúdo e para tirar dúvidas sobre os exercícios propostos. Importante ressaltar que dos 99 alunos envolvidos na pesquisa, quatro são Pessoas com Necessidades Especiais (PNE), os mesmos apresentam dificuldades intelectuais e de interação com colegas e professores, tanto pessoalmente, quanto pelo WhatsApp.

Ressaltando que foram enviados aos discentes quatro estudos dirigidos, sendo que dois estudos dirigidos (ED1 e ED3) foram pontuados e dois (ED2 e ED3) não foram pontuados, para verificar o comprometimento e empenho dos estudantes mediante uma bonificação e sem essa bonificação, ou seja, identificar alunos que têm satisfação em estudar e buscar conhecimento. Ao analisar a quantidade de trabalhos entregues constatamos que a maioria dos alunos estavam mais interessados na bonificação em detrimento a buscar conhecimento e focar na aprendizagem. Isso foi verificado na discrepância de ED1 e ED3 entregues (aproximadamente 87%) em relação à ED2 e ED4 (aproximadamente 26%).

Outro ponto observado foi que possivelmente parte dos alunos copiaram os trabalhos feitos por outros colegas, as resoluções de todos os exercícios estavam iguais em alguns trabalhos. Além disso, em relação à parte relacionada ao uso do GeoGebra, muitos arquivos enviados não estavam salvos na forma que foi orientado pelo professor, ou seja, identificação do aluno com nome completo e turma.

Durante o momento presencial, a falta de interesse da maioria dos alunos em adquirir conhecimento ficou evidente, pois poucos alunos apresentaram dúvidas relacionadas aos conteúdos trabalhados e aos exercícios propostos. Mesmo considerando a hipótese de que todos ou grande maioria tenham assimilado os conteúdos trabalhados, é improvável que todos os discentes participantes deste estudo não tenham dificuldades em exercícios mais complexos.

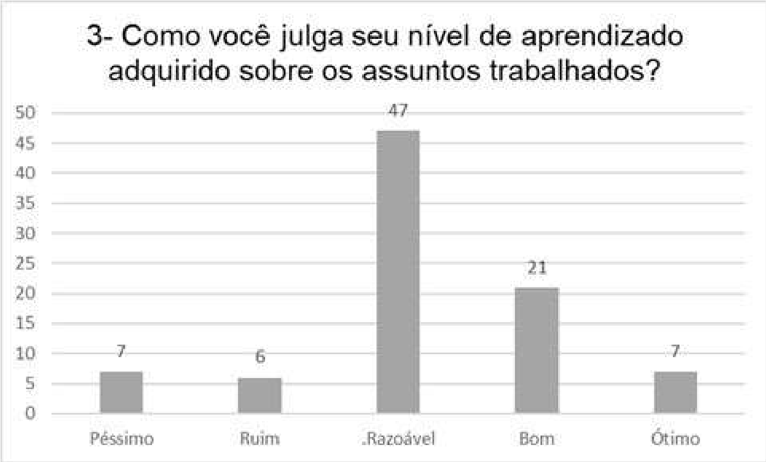
Outro fator que endossou a hipótese da falta de interesse dos alunos em relação à aprendizagem dos conteúdos trabalhados foi o pouco empenho em resolver os quatros desafios propostos nos instantes finais do momento presencial. Nas turmas 301 e 302, chamadas de turmas de "Humanas", três alunos, de um total de 27, de cada turma pensaram e tentaram resolver os desafios. Nas turmas 303 e 304, turmas de "Exatas", esse número aumentou para sete alunos empenhados em achar a solução dos desafios, entretanto a quantidade ainda é considerada pequena, uma vez que os alunos dessas turmas, teoricamente, têm mais facilidade e entusiasmo em aprender e estudar matemática.

4.2 Avaliação da Metodologia

Com o intuito de saber a opinião dos alunos sobre toda metodologia aplicada foi elaborado um questionário (anexo 6.6), usando o Google Forms, que foi enviado para os alunos pelo WhatsApp. Os estudantes foram questionados acerca de seu empenho e dedicação durante o processo. Infelizmente 11 dentre os 99 alunos não responderam ao questionário, mesmo com muita insistência. As perguntas 1 e 2 foram sobre o nome e turma que o aluno pertence. As perguntas 3 a 9 foram perguntas com opções de respostas qualitativas, e permitiu que os alunos entrevistados avaliassem a metodologia, o aprendizado, o comportamento e nível de comprometimento deles em relação a esses estudos.

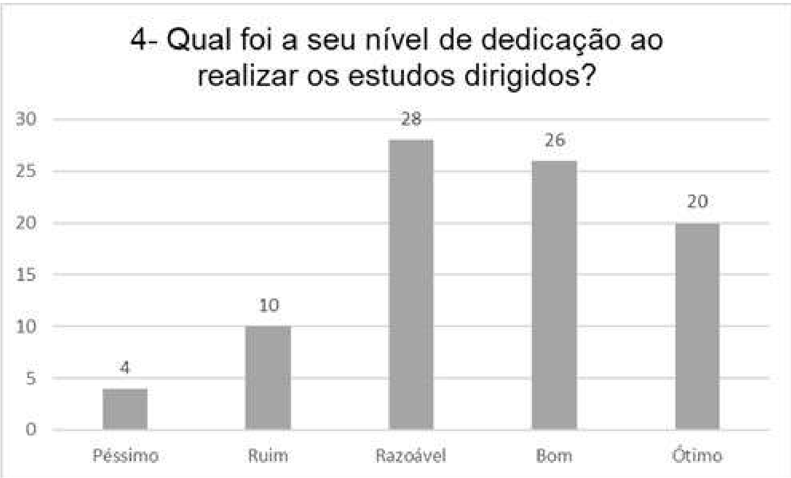
As perguntas 10 a 15 foram perguntas com opções de respostas quantitativas, nas quais os alunos tinham que dar notas entre 1 e 5 sobre a metodologia e ferramentas usadas durante esse processo. E na última pergunta, de número 16, foi solicitado que os alunos descrevessem sobre a experiência com a metodologia apresentada, suas dificuldades, críticas e sugestões. Seguem as perguntas e os gráficos das respostas obtidas neste questionário.

Figura 4.1: Respostas dos alunos à pergunta 3 do questionário



Fonte: Autor.

Figura 4.2: Respostas dos alunos à pergunta 4 do questionário

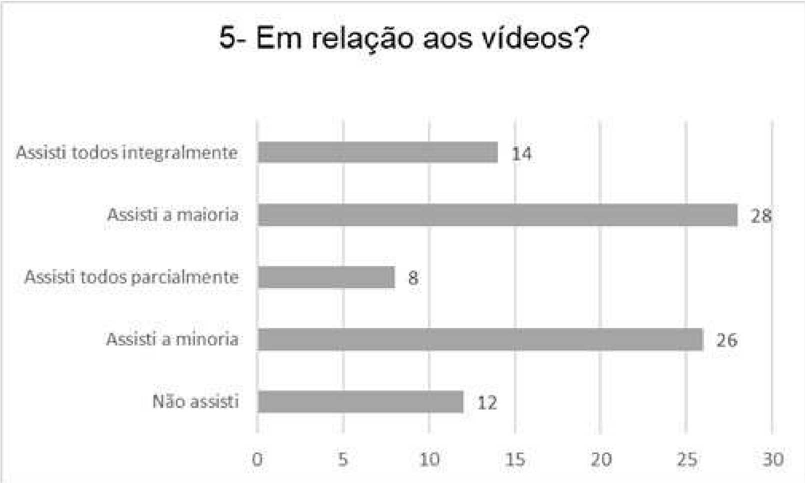


Fonte: Autor.

As respostas da terceira pergunta (Figura 4.1) indicam o aprendizado adquirido na visão dos próprios alunos, de acordo com essas respostas podemos inferir que a maioria dos alunos não apresentaram muita segurança em relação ao aprendizado, pois apenas 32% dos alunos responderam que o nível de aprendizado foi bom ou ótimo. E mais da metade (aproximadamente 53%) dos alunos disseram que aprenderam razoavelmente, em contrapartida apenas 15% responderam que não tiveram um bom aprendizado nos conteúdos trabalhados.

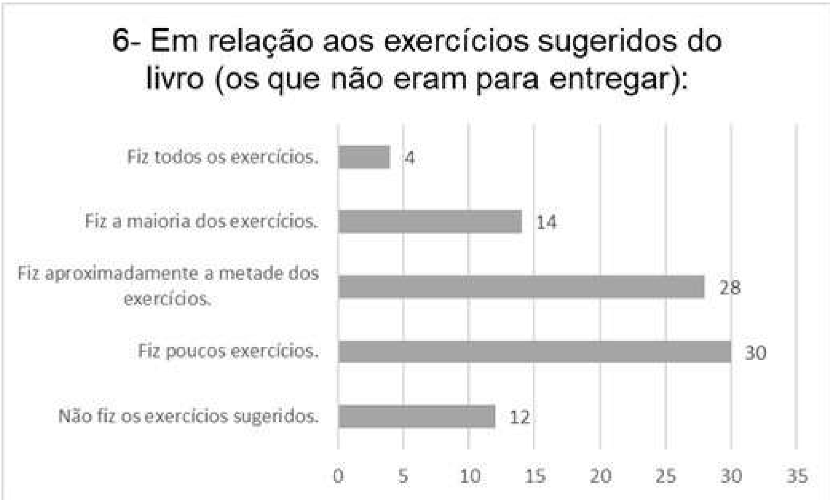
Os gráficos das respostas das perguntas 4 (Figura 4.2), 5 (Figura 4.3), 6 (Figura 4.4) e 7 (Figura 4.5), estão relacionados com o nível de empenho e dedicação dos alunos durante o processo de aprendizagem. A análise das respostas permite inferir que aproximadamente metade dos alunos não se empenharam suficientemente durante os estudos em casa. Apenas metade (aproximadamente 52%) dos alunos fizeram o estudo dirigido de forma adequada, 32 alunos assistiram a maioria ou todos os

Figura 4.3: Respostas dos alunos à pergunta 5 do questionário



Fonte: Autor.

Figura 4.4: Respostas dos alunos à pergunta 6 do questionário



Fonte: Autor.

vídeos gravados, apenas 18 deles fizeram a maioria ou todos exercícios do livro didático sugeridos nos estudos dirigidos. E uma quantidade ainda menor (13 alunos) mantiveram uma comunicação pelo WhatsApp antes da aula presencial.

Uma dúvida que naturalmente pode surgir é se existe uma relação entre o nível de aprendizado que os alunos julgaram ter alcançado e o empenho demonstrado nos estudos. Para investigar essa relação, realizamos um Teste Qui-quadrado de McNemar, utilizando o software Jamovi (de acesso livre). Para facilitar a execução e a interpretação do teste, criamos uma variável chamada 'Engajamento', para medir o empenho dos alunos. Primeiramente, atribuirmos valores numéricos às respostas, por exemplo: 'ótimo' foi classificado com valores entre 3 e 4 (dependendo da pergunta e das opções de resposta), enquanto 'péssimo' recebeu o valor 0. Para a questão sobre assistir aos vídeos, atribuímos o valor 2 para as respostas 'Assisti a maioria' e 'Assisti todos parcialmente', considerando que ambas representavam um empenho similar. Dessa forma, a soma mínima dos valores nas respostas de um único aluno

Figura 4.5: Respostas dos alunos à pergunta 7 do questionário

Fonte: Autor.

poderia ser 0 (zero), e a soma máxima seria 14. A partir dessa soma, classificamos o empenho dos alunos da seguinte maneira: soma entre 0 e 4 como 'insatisfatório', de 5 a 9 como 'razoável', e de 10 a 14 como 'satisfatório'. Antes de realizar o teste, também reorganizamos as respostas sobre o nível de aprendizado, classificando as respostas 'bom' ou 'ótimo' como satisfatórias, 'ruim' ou 'péssimo' como insatisfatórias, e mantendo as respostas 'razoável'.

Figura 4.6: Teste de McNemar - Aprendizado x Engajamento

Tabelas de Contingência

		Aprendizado			
Engajamento		Insatisfatório	Razoável	Satisfatório	Total
Insatisfatório	Contagem	7	15	2	24
	% em linha	29.2 %	62.5 %	8.3 %	
Razoável	Contagem	6	29	17	52
	% em linha	11.5 %	55.8 %	32.7 %	
Satisfatório	Contagem	0	3	9	12
	% em linha	0.0 %	25.0 %	75.0 %	
Total	Contagem	13	47	28	88
	% em linha	14.8 %	53.4 %	31.8 %	

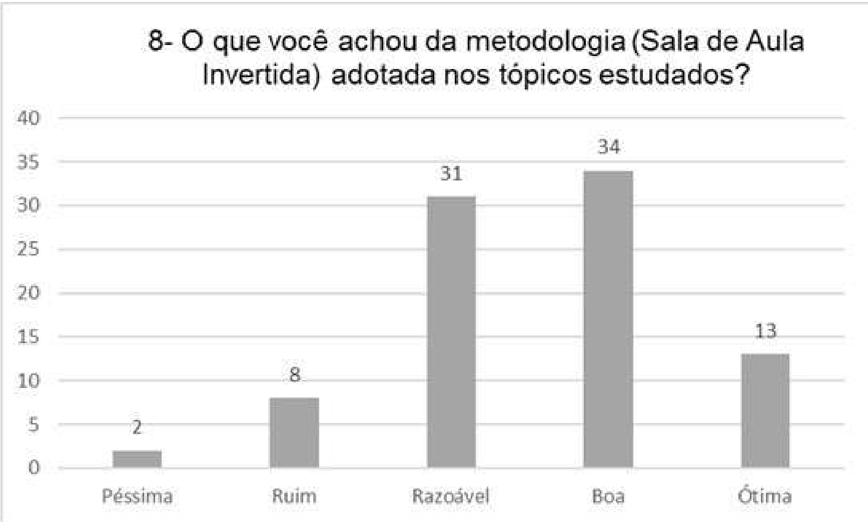
Teste de McNemar

	Valor	gl	p
χ^2	15.7	3	0.001
N	88		

Fonte: Autor.

Analisando os resultados do teste apresentados na Figura 4.6, observamos que o valor da estatística foi de 15,7, com três graus de liberdade, e o p-valor foi inferior a 5%, o que nos permite inferir que existe correlação entre as variáveis 'Engajamento' e 'Aprendizado'. Ao examinar a Tabela de Contingência (Figura 4.6), podemos observar que, quando o engajamento foi insatisfatório, 7 de 24 alunos (29,2%) apresentaram aprendizado insatisfatório, um valor superior ao esperado (aproximadamente 15%). Além disso, apenas 2 alunos indicaram ter tido um aprendizado satisfatório, mesmo com engajamento insatisfatório. Outra observação relevante a partir dessa tabela é que nenhum aluno com engajamento satisfatório relatou ter obtido aprendizado insatisfatório.

Figura 4.7: Respostas dos alunos à pergunta 8 do questionário



Fonte: Autor.

As respostas à pergunta oito (Figura 4.7) parecem contradizer as respostas das questões anteriores. O gráfico acima revela que apenas 10 alunos reprovaram a metodologia aplicada, 31 a consideraram razoável e 47 a aprovaram. No entanto, embora a maioria dos alunos não tenha rejeitado a metodologia ao responder a essa pergunta, o fato de não se empenharem nos estudos antes das aulas presenciais indica que não aderiram totalmente à proposta. Com base nessa dúvida, foi realizado outro Teste Qui-quadrado de McNemar (Figura 4.8) para verificar se há uma relação entre o engajamento dos alunos e a avaliação da metodologia.

Analisando os resultados desse outro teste (Figura 4.8), rejeitamos a hipótese de que as variáveis 'Engajamento' e 'Opinião sobre a metodologia' sejam independentes. Isso indica que há uma relação entre a falta de empenho dos alunos e a não aceitação da metodologia de Sala de Aula Invertida, o que contradiz a impressão inicial. O valor da estatística neste teste foi de 36,2, com três graus de liberdade, e o p-valor foi inferior a 5%. Ao observar a tabela de contingência, podemos notar, entre outros aspectos, que, quando o engajamento dos alunos foi satisfatório, 83% consideraram a metodologia boa ou ótima, enquanto o valor esperado era de 53,4%. Isso sugere que uma opinião positiva sobre a metodologia está associada a um maior engajamento dos alunos.

Figura 4.8: Teste de McNemar - Engajamento x Opinião sobre a metodologia.

Tabelas de Contingência

Engajamento		Opinião sobre a metodologia: Ruim ou péssima	Razoável	Boa ou ótima	Total
Insatisfatório	Contagem	6	13	5	24
	% em linha	25.0 %	54.2 %	20.8 %	
Razoável	Contagem	4	16	32	52
	% em linha	7.7 %	30.8 %	61.5 %	
Satisfatório	Contagem	0	2	10	12
	% em linha	0.0 %	16.7 %	83.3 %	
Total	Contagem	10	31	47	88
	% em linha	11.4 %	35.2 %	53.4 %	

Teste de McNemar

	Valor	gl	p
χ^2	36.2	3	< .001
N	88		

Fonte: Autor.

Figura 4.9: Respostas dos alunos à pergunta 9 do questionário

Fonte: Autor.

As respostas mostradas no gráfico (Figura 4.9), reforçam a ideia de que a maioria dos alunos têm mais segurança no método de ensino tradicional em detrimento da metodologia da Sala de Aula Invertida. Descartando aqueles que responderam que nenhum método influência a capacidade de entender matemática e os que não souberam responder, tem-se que entre os alunos que se posicionaram sobre as metodologias de ensino, 42 alunos acreditam que método de ensino tradicional é mais eficaz para que entendam matemática e apenas 19 alunos acharam que a nova proposta de ensino apresentada melhorou a capacidade de entenderem a matemática. Considerando os 61 alunos que marcaram as duas últimas opções de respostas para essa pergunta, apenas 31% acharam que a metodologia Sala de Aula Invertida contribuiu de fato com uma melhora no processo de aprendizagem.

Nas perguntas de 10 a 15, os alunos tiveram a oportunidade de avaliar de forma quantitativa toda a metodologia e as ferramentas utilizadas nesta pesquisa. As respostas a essas questões foram registradas em uma escala de 1 a 5. Abaixo, apresentamos as tabelas com as distribuições de frequência e a nota média atribuída a cada item avaliado pelos alunos.

Sobre a metodologia da Sala de Aula Invertida (Figura 4.10), oito alunos atribuíram nota mínima, o que pode indicar total insatisfação com a proposta de aprendizagem. Por outro lado, vinte alunos deram nota máxima, sugerindo que esses alunos ficaram satisfeitos com a nova abordagem de ensino. A média das notas foi de aproximadamente 3,4, e mais da metade dos alunos (46) deram nota 4 ou 5, o que sugere que, pelo menos, a metade dos estudantes aprovou a metodologia da Sala de Aula Invertida.

Figura 4.10: Respostas dos alunos à pergunta 10 do questionário

Metodologia: Sala de Aula Invertida.	
Nota:	Fa
1	8
2	11
3	23
4	26
5	20
$\bar{x}$	3,4

Fonte: Autor.

Em relação ao uso do GeoGebra (Figura 4.11), a média das notas foi de 3,5, reforçando a ideia de que o uso de softwares pode ser um recurso valioso no processo de ensino e aprendizagem. Ferramentas como o GeoGebra são, geralmente, bem recebidas pelos alunos, como mostra o gráfico, no qual cerca de 56% dos alunos aprovaram o uso do software no ensino de Geometria Analítica — 22 alunos deram nota 4 e 27 deram nota 5. No entanto, esperava-se uma aprovação mais expressiva, considerando que a maioria dos alunos do Ensino Médio está familiarizada com o uso da internet e dispositivos eletrônicos.

Quanto aos estudos dirigidos, o índice de rejeição foi baixo, com apenas 7 alunos expressando descontentamento entre os 88 que participaram. No entanto, as respostas sobre esse item divergiram das percepções do pesquisador e do professor regente, especialmente em relação à comunicação via WhatsApp e ao engajamento dos alunos nos estudos autônomos. Surpreendentemente, aproximadamente 67% dos alunos

Figura 4.11: Respostas dos alunos à pergunta 11 do questionário

Uso do GeoGebra.	
Nota:	Fa
1	9
2	14
3	16
4	22
5	27
$\bar{x}$	3,5

Fonte: Autor.

expressaram satisfação com os estudos dirigidos, com 29 alunos atribuindo nota 4 e 30 nota 5, resultando em uma avaliação média de cerca de 3,9 (Figura 4.12).

Figura 4.12: Respostas dos alunos à pergunta 12 do questionário

Estudos Dirigidos	
Nota:	Fa
1	2
2	5
3	22
4	29
5	30
$\bar{x}$	3,9

Fonte: Autor.

A tabela referente à pergunta 13 (Figura 4.13), revela a preferência dos alunos pela metodologia convencional, mesmo que de forma não intencional. Embora esta pergunta não tenha sido diretamente sobre a metodologia de ensino, o fato de nenhum aluno ter atribuído notas 1 ou 2, e a avaliação média de 4,6 ser consideravelmente mais alta que as demais, indica que os alunos se sentem mais confortáveis e seguros nas aulas presenciais. Este foi, de fato, o item mais bem avaliado pelos estudantes, se comparado com as outras questões do questionário.

Em relação à avaliação dos vídeos (Figura 4.14), a nota média foi de 3,9, com uma aprovação de 67% (18 alunos deram nota 4 e 41 nota 5). Embora a nota geral tenha sido inferior à das aulas presenciais, os alunos demonstraram que preferem assistir a vídeos gravados pelo professor do que estudar de forma autônoma com livros e exercícios.

Figura 4.13: Respostas dos alunos à pergunta 13 do questionário

Aula Presencial	
Nota:	Fa
1	0
2	0
3	10
4	17
5	61
$\bar{x}$	4,6

Fonte: Autor.

Figura 4.14: Respostas dos alunos à pergunta 14 do questionário

Vídeos	
Nota:	Fa
1	9
2	3
3	17
4	18
5	41
$\bar{x}$	3,9

Fonte: Autor.

Sobre a comunicação via WhatsApp (Figura 4.15), a avaliação foi positiva, com uma média de 4,1, no entanto, a prática não condiz com a avaliação. Apesar de a maioria dos alunos ter classificado bem essa ferramenta de comunicação, poucos a utilizaram efetivamente durante os estudos em casa. Os alunos que entraram em contato geralmente o fizeram para tirar dúvidas sobre pontuação ou prazos de entrega dos estudos dirigidos. Apenas três alunos do terceiro ano usaram o WhatsApp como canal para esclarecer dúvidas relacionadas ao conteúdo.

Por fim, no décimo sexto e último item do questionário, que solicitava que os alunos descrevessem suas experiências com a metodologia, as dificuldades, críticas e sugestões, a maioria relatou dificuldades por não estar acostumada com essa metodologia ou abordagens semelhantes. Em geral, os alunos não estão habituados a ter tanta autonomia e controle no processo de aprendizagem. Muitos também apontaram a falta de tempo e a carga excessiva de afazeres na reta final do ensino médio como fatores que dificultaram seu engajamento na realização dos estudos dirigidos.

Figura 4.15: Respostas dos alunos à pergunta 15 do questionário

Comunicação pelo WhatsApp	
Nota:	Fa
1	7
2	4
3	10
4	15
5	52
$\bar{x}$	4,1

Fonte: Autor.

4.3 Teste de Aprendizagem

Outra forma de testar a metodologia e o aprendizado dos alunos foi por meio do Teste de Aprendizagem (Figura 6.4, em anexo) aplicado no final do processo. Infelizmente, uma parte razoável dos alunos presentes no dia do teste, receberam o teste e devolveram em branco, e nem tentaram fazer as questões propostas. Por isso foram computados para essa análise apenas os testes dos alunos que tentaram de fato responder o teste de aprendizagem, que representam 56,6% do total. A tabela em anexo (Figura 6.5) mostra o acerto por questão dos alunos, a célula em branco representa que o aluno errou ou não fez a questão, nota 0,5 representa um acerto parcial da questão ou item, e 1 representa o acerto integral da questão.

O teste aplicado possui quatro questões, duas relativas ao conteúdo de retas e duas relativas a circunferências. Foi atribuída uma nota de 1,0 ponto de exercícios nesse teste. Não foi possível atribuir uma pontuação maior, devido a um engessamento na distribuição de pontos imposta pela instituição de ensino. Abaixo será apresentado o enunciado e soluções das questões e pauta de correção.

4.3.1 Enunciados e soluções das questões

Questão 1:

Dado um triângulo ABC com coordenadas A = (- 2, 1); B = (1, 1) e C = (1, 5). Calcule a medida da altura relativa ao lado AC desse triângulo.

1ª Opção de solução:

Achar a equação da reta que passa pelos pontos A e C.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{1+2} = \frac{4}{3} \tag{4.1}$$

$$y = mx + n \tag{4.2}$$

$$5 = \frac{4}{3}(1) + n \tag{4.3}$$

$$15 = 4 + 3n \tag{4.4}$$

$$n = \frac{11}{3} \tag{4.5}$$

Portanto as equações reduzida e geral da reta que passa pelos pontos A e C são:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \tag{4.6}$$

$$4x - 3y + 11 = 0 \tag{4.7}$$

Calcular a distância entre o vértice B = (1, 1) do triângulo até o segmento AC que está contido na reta representada pela equação $4x - 3y + 11 = 0$.

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{4.8}$$

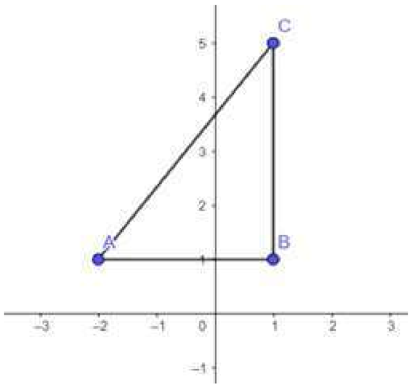
$$d_{B,r} = \frac{|4.1 - 3.1 + 11|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4 - 3 + 11}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|12|}{\sqrt{25}} = 2{,}4 \tag{4.9}$$

2ª Opção de solução:

Antes de apresentar essa segunda opção de solução, é importante ressaltar que no início do ano letivo, foi estudado por esses alunos, as relações métricas no triângulo retângulo.

O primeiro passo nessa opção de solução é esboçar o triângulo no Plano Cartesiano, como mostra a Figura 4.16.

Figura 4.16: Representação do triângulo ABC no Plano cartesiano.



Fonte: Autor.

Ao esboçar o triângulo no Plano Cartesiano, como mostrado na Figura 4.16, percebe se que o triângulo é retângulo em B, com medidas de catetos iguais a 3 e 4, e consequentemente a hipotenusa é igual a 5. De outra relação métrica no triângulo retângulo, tem-se que o produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa por sua altura relativa. Diante disto, segue que:

$$a.h = b.c \tag{4.10}$$

$$5.h = 4.3 \tag{4.11}$$

$$h = \frac{12}{5} = 2{,}4 \tag{4.12}$$

Onde h é a altura procurada, ou seja, a altura relativa ao lado AC do triângulo dado.

Outra possível solução para achar a reta que passa pelos pontos A e C desta questão é utilizar a condição de alinhamento de três pontos. Entretanto nenhum aluno pensou nesta solução, portanto ela não foi considerada para essa análise.

Questão 2:

Uma reta r passa pelos pontos A = (-1, 3) e B = (2, 6).

A) Determine a equação geral da reta s, que passa pelo ponto C = (4, - 5) e é perpendicular à reta r.

B) Encontre o ponto de interseção das retas r e s.

C) Determine a reta t que é paralela à reta s, e passa pelo ponto D = (5, - 2)

Solução:

Primeiramente deve se encontrar a reta r que contém os pontos A = (-1, 3) e B = (2, 6);

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-3}{2+1} = \frac{3}{3} = 1 \tag{4.13}$$

$$y = mx + n \tag{4.14}$$

$$6 = 1.2 + n \tag{4.15}$$

$$n = 4 \tag{4.16}$$

Portanto as equações reduzida e geral da reta que passa pelos pontos A e C são, respectivamente:

$$y = x + 4 \tag{4.17}$$

$$x - y + 4 = 0 \tag{4.18}$$

A) Determinando a reta s que é perpendicular a reta r e passa pelo ponto C = (4, -5);

Pela condição de perpendicularidade entre duas retas, segue que:

$$m_r \cdot m_s = -1. \tag{4.19}$$

$$1 \cdot m_s = -1. \tag{4.20}$$

$$m_s = -1. \tag{4.21}$$

Substituindo o coeficiente angular da reta s e as coordenadas do ponto C, na equação reduzida da reta, tem-se que:

$$y = mx + n \tag{4.22}$$

$$-5 = -1.4 + n \tag{4.23}$$

$$n = -1 \tag{4.24}$$

Logo, as equações reduzida e geral da reta s são, respectivamente:

$$y = -x - 1 \tag{4.25}$$

$$x + y + 1 = 0 \tag{4.26}$$

B) Para encontrar o ponto P de interseção entre duas retas, deve-se encontrar um par ordenado (x, y) que satisfaça simultaneamente as duas equações, ou seja, resolver um sistema de equações do 1º grau.

$$\begin{cases} r : -x + y = 4 \\ s : x + y = -1 \end{cases} \tag{4.27}$$

Segue que $y = \frac{3}{2}$ e $x = \frac{-5}{2}$. Logo o ponto P de interseção das retas r e s é:

$$P = \left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right) = (-2{,}5; 1{,}5) \tag{4.28}$$

C) A condição para que duas retas sejam paralelas é que seus coeficientes angulares sejam iguais.

$$m_t = m_s = -1. \tag{4.29}$$

Substituindo o coeficiente angular da reta t e as coordenadas do ponto D, na equação reduzida da reta, tem-se que:

$$y = mx + n \tag{4.30}$$

$$-2 = -1.5 + n \tag{4.31}$$

$$n = 3 \tag{4.32}$$

Logo, as equações reduzida e geral da reta t são, respectivamente:

$$y = -x + 3 \tag{4.33}$$

$$x + y - 3 = 0 \tag{4.34}$$

Questão 3:

Os pontos A = (- 6, - 3) e B = (0, 5) determinam o diâmetro de uma circunferência.

A) Determine as equações reduzida e geral dessa circunferência.

B) Determine a posição do ponto D = (2, 3) em relação a essa circunferência. (Justifique com cálculos)

Solução:

A) O centro C da circunferência é o ponto médio do segmento AB (diâmetro da circunferência). E a medida do raio é a distância do centro C até um dos pontos da circunferência. Segue que:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6+0}{2} = -3 \quad e \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1 \tag{4.35}$$

$$C = (-3, 1) \tag{4.36}$$

$$Raio = d_{C,A} = \sqrt{(X_A - X_C)^2 + (Y_A - Y_C)^2} \tag{4.37}$$

$$r = d_{C,A} = \sqrt{(-6+3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \tag{4.38}$$

Portanto a equação reduzida dessa circunferência é:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25 \tag{4.39}$$

Desenvolvendo a equação reduzida, obtém-se a equação geral da circunferência:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 25 \tag{4.40}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \tag{4.41}$$

B) Para identificar a posição do ponto D = (2, 3) em relação a circunferência, devesse obter a distância entre este ponto e o centro da circunferência, comparando esta distância encontrada com a medida do raio.

$$d_{C,D} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2} \tag{4.42}$$

$$d_{C,D} = \sqrt{(2+3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \sqrt{29} > 5 \tag{4.43}$$

Portanto o ponto D é externo à circunferência, pois a distância de D até o centro da circunferência é maior que o raio da mesma.

Outra solução para esse item é substituir as coordenadas do ponto D na equação da circunferência, fazer os cálculos indicados e interpretar a igualdade ou desigualdade encontrada.

Questão 4:

Dada a circunferência de equação: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 36 = 0$. Determine a posição da reta r: y = x + 2 em relação à essa circunferência. (Justifique com cálculos. Considere: $\sqrt{2} = 1{,}4$).

Solução:

Para saber a posição de uma reta em relação à uma circunferência, é fundamental conhecer as coordenadas do centro e a medida do raio dessa circunferência, para isto é importante saber qual sua equação reduzida. Uma forma de obter a equação reduzida da circunferência a partir da equação geral, é usando o método de "completar quadrados".

Reorganizando a equação, temos:

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y - 36 = 0 \tag{4.44}$$

Observe que $x^2 - 6x$ é uma parte do trinômio quadrado perfeito $x^2 - 6x + 9$. Assim como $y^2 + 4y$ é uma parte de $y^2 + 4y + 4$. Reescrevendo a equação e "completando os quadrados", temos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 - 36 = 0 \tag{4.45}$$

Observe que como somamos 9 e 4 para completar os quadrados, por isto foi necessário subtraí-los adiante na equação. Efetuando as devidas operações e manipulações algébricas, obtemos a equação reduzida da circunferência:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49 \tag{4.46}$$

Portanto, a circunferência tem centro $C = (3, -2)$ e raio igual a 7. Para definir a posição da reta em relação a circunferência, calcula-se a distância do centro da circunferência até a reta $r : x - y + 2 = 0$, comparando-a com a medida do raio.

$$d_{C,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1.3 - 1.(-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} < 7 \tag{4.47}$$

Logo a reta r é secante à circunferência, pois a distância do centro $C = (3, -2)$ da circunferência até a reta r é menor que a medida do seu raio.

Outra solução para essa questão é isolar uma das incógnitas da equação da reta r e substituir na equação da circunferência, obtendo uma única equação polinomial de grau 2 com uma única incógnita. Se a resolução dessa equação não apresentar solução real, temos que a reta não intersecta a circunferência, logo r é externa à circunferência; se apresentar uma única solução real, indica que r é tangente à circunferência; se a equação tiver duas soluções reais e distintas (o que de fato aconteceu) a reta r intersecta a circunferência em dois pontos distintos, ou seja, a reta $r : x - y + 2 = 0$ é secante a circunferência determinada pela equação: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$.

4.3.2 Pauta de correção

Questão 1 (25% da nota):

Solução 1:

- Achar o coeficiente angular: 6%;
- Achar o coeficiente linear e escrever a equação reduzida: 6%;
- Determinar a equação geral da reta a partir da equação reduzida: 6%;
- Calcular a distância do vértice B ao segmento AC: 7%.

Solução 2:

- Esboçar o triângulo no Plano Cartesiano corretamente: 8%;
- Identificar o triângulo ABC como Triângulo Pitagórico e deduzir a medida do lado AC: 7%;
- Encontrar a altura procurada usando as relações métricas do triângulo retângulo: 10%;

Questão 2 (25% da nota):

- Encontrar o coeficiente angular da reta: 3%
- Achar o coeficiente linear e escrever a equação reduzida da reta: 3%

Item A:

- Usar a condição de perpendicularidade entre retas para encontrar o coeficiente angular da reta s: 3%
- Achar o coeficiente linear e escrever a equação da reta s: 3%

Item B:

- Montar o sistema com as equações das retas r e s: 4%
- Resolver corretamente o sistema e encontrar o ponto de interseção das retas: 4%

Item C:

- Usar a condição de paralelismo entre retas para identificar o coeficiente angular da reta t: 2%
- Achar o coeficiente linear e escrever a equação da reta t: 3%

Questão 3 (25% da nota):

Item A:

- Interpretar que o ponto médio do segmento AB é o centro da circunferência e encontrá-lo: 5%
- Encontrar a medida do raio da circunferência: 4%
- Escrever corretamente a equação reduzida da circunferência de acordo com o centro e o raio encontrados: 3%
- Desenvolver a equação reduzida da circunferência, determinando sua equação geral: 4%

Item B:

- Interpretar que para responder esse item é necessário calcular a distância do ponto D até o centro da circunferência: 5%
- Fazer o cálculo e concluir corretamente sobre a posição do ponto em relação a circunferência: 4%

Outra solução para o item B:

- Interpretar e substituir as coordenadas do ponto na equação da circunferência: 5%
- Fazer o cálculo e concluir corretamente a partir do resultado sobre a posição do ponto em relação a circunferência: 4%

Questão 4 (25% da nota):

Solução 1:

- Obter a equação reduzida da circunferência: 10%
- Identificar o centro e o raio: 2%
- Determinar a equação geral da reta a partir da equação reduzida: 2%
- Interpretar que para responder a pergunta é necessário calcular a distância do centro da circunferência até a reta: 7%
- Fazer os cálculos e a conclusão corretamente: 4%

Solução 2:

- Substituir a equação da reta na equação da circunferência obtendo uma única equação polinomial do 2º grau: 10%
- Resolver e verificar a quantidade de soluções da equação: 7%
- Interpretar corretamente os resultados: 8%

4.3.3 Resultados do Teste de Aprendizagem

Esperávamos que os alunos não tivessem um bom rendimento na realização do teste, como consequência da falta de comprometimento durante os estudos em casa, pouca participação nas aulas presenciais e a falta de engajamento até mesmo para fazer o teste. No entanto, mesmo deduzindo que o aproveitamento dos alunos no teste seria baixo, não estava previsto um rendimento tão insatisfatório. Alguns alunos nem tentaram fazer o teste, escreveram apenas o nome e assinaram a lista de presença, resaltando que estes testes não foram contabilizados para essa análise. Na tabela (Figura 6.5, em anexo) constam apenas a tabulação dos resultados dos alunos que ao menos tentaram, mesmo que com pouco engajamento, responder às questões do teste. Para essa análise, os testes foram avaliados em cem pontos. Posteriormente, a nota foi convertida para pontuação real atribuída na distribuição de pontos de atividade na 3ª etapa do ano letivo. A partir dessa tabela, geramos uma nova tabela (Figura 4.17) que apresenta a quantidade de acertos integrais e parciais por questão. Além disso, calculamos a nota máxima e mínima por turma, a média e o desvio padrão, cujos resultados estão disponíveis na tabela (Figura 4.19). Também fizemos uma distribuição de frequência e construímos um histograma, apresentado no gráfico (Figura 4.18).

Figura 4.17: Tabela com a quantidade de acertos por questão do TA.

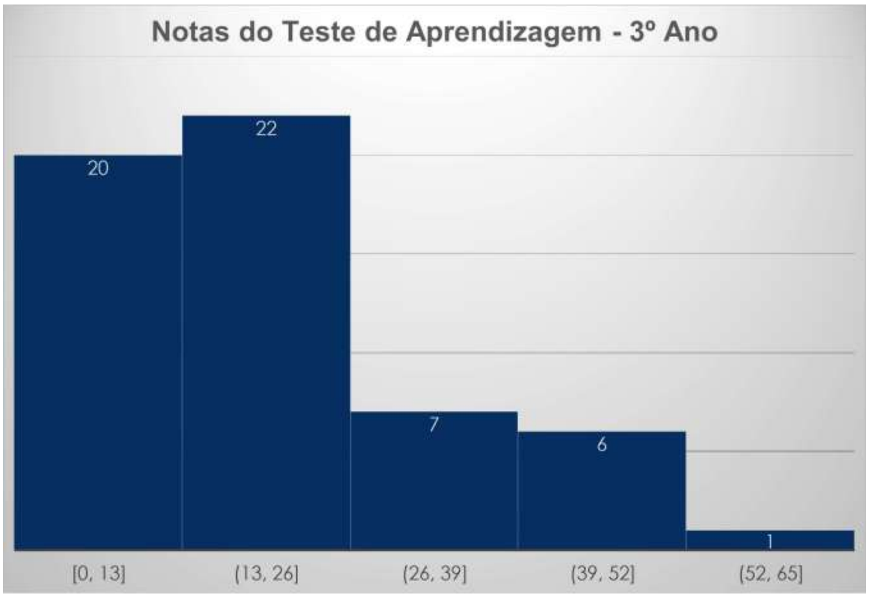
	Acerto integral.				Acerto parcial.			
Sala	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
301	0	2	0	0	7	0	2	3
302	0	0	0	0	3	2	0	2
303	3	0	0	0	9	5	2	7
304	0	2	0	2	11	0	0	7
Total	3	4	0	2	30	7	4	19

Fonte: Autor.

Podemos inferir que os alunos tiveram mais facilidade para resolver a questão 1, mas a quantidade de acertos integrais (3) e parciais (30) não foi significativa, considerando que 56 alunos tentaram resolver essa questão, assim como o restante do teste. A questão abordava a habilidade de encontrar a equação de uma reta a partir de dois pontos e, em seguida, calcular a distância entre um ponto e essa reta. No entanto, a maioria dos alunos resolveu a questão de forma mais simples, incluindo os três que acertaram integralmente. Eles esboçaram o triângulo no plano cartesiano, perceberam que se tratava de um triângulo equilátero e aplicaram relações métricas no triângulo retângulo para chegar à resposta correta. Ou seja, para resolver essa questão, não era necessário um conhecimento profundo em geometria analítica. Com base nos resultados apresentados na tabela, pode-se concluir que os alunos encontraram menos dificuldades nos conteúdos abordados nos estudos dirigidos 1 e 2, em comparação com os demais.

As questões 2 e 3, por outro lado, tiveram um número muito baixo de acertos, o que indica que os alunos encontraram maiores dificuldades nos conteúdos abordados nos estudos dirigidos 1 e 3. Para resolver a questão 4, que estava relacionada ao conteúdo do estudo dirigido 4, os alunos precisavam ter uma compreensão consolidada dos tópicos trabalhados. Embora o índice de acertos tenha sido menor do que o da questão 1, essa questão não ofereceu uma solução tão direta quanto a anterior. Isso sugere que os alunos assimilaram melhor o conteúdo sobre posições relativas entre ponto e circunferência e entre reta e circunferência.

Figura 4.18: Histograma das notas do TA de todas as turmas.



Fonte: Autor.

Observando o histograma (Figura 4.18), é possível perceber que mais da metade dos alunos avaliados, considerando apenas aqueles que realmente realizaram o teste, obteve um aproveitamento inferior a 26%. A maioria dos alunos não conseguiram alcançar mais de 40% de aproveitamento no teste.

Figura 4.19: Tabela com as estatísticas das notas das quatro turmas

Turmas:	Mínimo	Máximo	Média	Dp
301	0	46	13,7	12,1
302	0	28	13,8	7,7
303	0	52	20,6	14,4
304	10	60	28,6	14,7
Geral	0	60	19,6	14,4

Fonte: Autor.

Observando a tabela (Figura 4.19), podemos concluir que as notas das quatro turmas apresentam uma distribuição bastante heterogênea, como evidenciado pelos elevados valores de desvio padrão. As turmas 303 e 304, por exemplo, apresentaram desvios padrões de 14,4 e 14,7, respectivamente, enquanto a turma 302 foi a mais homogênea entre as quatro, com desvio padrão de 7,7.

Figura 4.20: Teste t - Notas - Turmas de Humanas x Turmas de Exatas

Teste t para amostras independentes

		Estatística	gl	p
Notas	t de Student	−2.81	54.0	0.007

Nota. H_a $\mu_{Humanas} \neq \mu_{Exatas}$

Fonte: Autor.

A partir da tabela (Figura 4.19), também podemos observar uma diferença nas notas médias entre as quatro turmas, especialmente entre as turmas 301 e 302 ("Humana") e as turmas 303 e 304 ("Exatas"). Para verificar se essa diferença é estatisticamente significativa, aplicamos o Teste t para amostras independentes (Figura 4.20), também utilizando o software Jamovi. O valor de t obtido foi de -2,81, com 54 graus de liberdade e um p-valor de 0,007, o que indica que a diferença entre as médias é estatisticamente significativa ($p < 0{,}05$). Assim, com base nos resultados do teste t, podemos concluir que a diferença nas médias das notas entre as turmas de 'Humanas' e 'Exatas' provavelmente não é fruto de variabilidade aleatória.

Como já constatado, as turmas 301 e 302 (Turmas de "Humanas") foram as turmas com piores desempenhos, com notas médias de 13,69 (301) e 13,75 (302). Eles tiveram notas zero, dois alunos na 301 e um na 302, esses alunos realmente tentaram resolver as questões do teste de aprendizagem, mas são alunos que realmente têm muita dificuldade no aprendizado da matemática. A participação dos alunos da turma 301 foi maior que a da turma 302, na turma 301 dezesseis dos vinte sete alunos da turma tentaram responder o teste, enquanto que na turma 302, apenas oito dos vinte sete alunos do total participaram efetivamente do teste de aprendizagem. As maiores notas obtidas nessas turmas foram 46 pontos, na turma 301, e 28 pontos na 302.

O desempenho dos alunos da turma 303 foi melhor, o que já era esperado, já que as turmas 301 e 302 são turmas, compostas em sua maioria por alunos que têm mais afinidade com as disciplinas da área de ciências humanas e linguagens, já as turmas 303 e 304, são compostas de alunos que normalmente se identificam com as áreas de ciências exatas e da natureza. A nota média da turma 303 foi de 20,6 pontos e a maior nota da sala foi 52 pontos, nessa turma também houve dois alunos que tiraram notas zero. O engajamento dos alunos para fazerem a atividade também foi melhor, 18 dos 22 alunos da sala tentaram resolver os problemas propostos no teste de aprendizagem.

A turma que apresentou melhor desempenho no teste foi a 304, como previsto, pois foi a turma mais comprometida com os estudos durante todo ano letivo. Nessa turma, 14 dos 23 alunos matriculados, fizeram o teste, com nota mínima igual a 10 pontos, nota máxima igual a 60 e média de 28,6 pontos.

5 Considerações finais

O objetivo principal desta pesquisa foi avaliar uma maneira alternativa ao método tradicional de ensino, para ensinar geometria analítica. A sugestão aqui proposta e experimentada foi o uso da Sala de Aula Invertida, metodologia já existente e aplicada em algumas escolas no Brasil e no mundo. Para dar suporte a essa metodologia usamos outras ferramentas pedagógicas já existentes, como o uso do estudo dirigido, vídeo-aulas e o software GeoGebra. Importante ressaltar que nada foi inventado, apenas agrupamos boas ideias e ferramentas metodológicas de ensino já experimentadas, montando um projeto de ensino do conteúdo de geometria analítica diferente das aulas expositivas tradicionais.

Esse projeto foi essencialmente dividido em três partes: planejamento, execução e análise de resultados. O planejamento consistiu na elaboração dos estudos dirigidos, teste de aprendizagem e o questionário, além da gravação e edição das vídeo-aulas. A execução começou com uma conversa com os alunos explicando a metodologia que seria usada para o ensino aprendizagem de alguns tópicos de geometria analítica, criação de quatro grupos de WhatsApp (um para cada turma), envio dos estudos dirigidos e suporte aos alunos por meio destes grupos de WhatsApp, e as aulas presenciais, nas quais foram sanadas as dúvidas, resolvidos alguns exercícios e os quatro desafios relativos aos estudos dirigidos. A análise de resultados foi dividida em três partes: Análise da perspectiva do professor regente e também pesquisador, em relação ao engajamento dos alunos, rendimento dos alunos no teste de aprendizagem aplicado aos alunos no término das atividades propostas. A terceira parte foi a avaliação da metodologia na perspectiva dos alunos, através do questionário.

Em relação a fase de planejamento desse projeto, a elaboração do estudo dirigido foi minuciosa e trabalhosa, sendo corrigida e refeita algumas vezes. Afinal, para que o estudo em casa seja eficiente é necessário um bom roteiro de estudos, principalmente pelo fato de que uma boa parte dos estudantes não estão habituados à serem protagonistas no processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, o maior desafio na fase de planejamento foi a gravação dos vídeos. O principal motivo desta dificuldade foi que o pesquisador e professor responsável por essa pesquisa nunca havia gravado vídeo e, com isso, surgiu um pouco de insegurança em fazê-los. A inspiração e motivação veio de professores que têm canais no YouTube, sendo um deles o

Professor Paulo Ferreira (Canal Descomplica), vídeos outrora usados para rever algum assunto do Ensino Médio para preparar aulas ou até mesmo como indicação de estudos para alguns alunos. Outro professor que serviu de inspiração foi Bruno Glass, professor que tem um canal no Youtube que ajuda alunos do ProfMat de todo Brasil a se prepararem para o ENQ (Exame Nacional de Qualificação), no qual foi muito útil na aprovação do autor desse texto na aprovação nesse exame. No curso de Aritmética do ProfMat também surgiu não apenas uma inspiração para gravação de vídeos, mas também o uso da metodologia da sala de aula invertida. Na ocasião, o professor Dr. Luis Felipe Gonçalves Fonseca usou a metodologia para lecionar a disciplina de aritmética, gravando e disponibilizando vídeos para estudos assíncronos, e apresentação de exercícios pelos discentes durante os momentos síncronos. A ideia inicial é que esses vídeos teriam uma duração de aproximadamente 5 minutos, sendo bem objetivos, pois vídeos longos costumam ser cansativos, podendo ocasionar um desinteresse nos alunos. Entretanto, esse objetivo não foi alcançado integralmente, por falta de experiência do professor regente em gravar e editar vídeos, mas como as explicações feitas nos vídeos são lentas, foi orientado aos alunos que quisessem tinham a opção de mudar a velocidade do vídeo tornando-o menos demorado, sem perder a capacidade de entendimento.

Também foi encontrada certa dificuldade na fase de execução do projeto e um dos motivos foi a falta de empenho da maioria dos alunos. Essa falta de motivação pode ter algumas causas: os alunos não estarem acostumados a estudarem em casa um determinado conteúdo antes de uma aula presencial. Outra possível causa para falta de empenho dos discentes é uma distribuição de pontos engessada da escola na qual foi aplicado esse projeto, não dando autonomia para que o professor oferecesse uma pontuação mais atrativa para as entregas das atividades propostas nesse projeto, o que motivaria um maior empenho por parte dos estudantes. Durante a execução desta pesquisa, as datas das provas finais da terceira etapa letiva do 3º ano do EM foram antecipadas de forma repentina e sem aviso prévio, prejudicando significativamente o planejamento e andamento desta pesquisa, fato que não foi de responsabilidade do professor regente e pesquisador, e menos ainda dos alunos. Não se pode inferir qual destes fatores foi mais determinante para que a execução do projeto não tivesse o êxito esperado, por ser algo subjetivo e que não pode ser quantificado. Outro complicador para o desenvolvimento desta pesquisa foi o fato de que o conteúdo de geometria analítica foi lecionado já no final do ano letivo, seguindo as orientações do plano de ensino elaborado pela diretoria dos Colégios Tiradentes juntamente com a Editora Positivo, e o mesmo deve ser seguido por todas as unidades. E nesta data os estudantes estão focados e com as atenções voltadas para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), ocasionando uma certa dispersão em relação aos estudos e afazeres escolares, afinal essa avaliação é de suma importância para maioria dos estudantes do terceiro ano do ensino médio brasileiro, sendo decisivo para ingressarem em boas universidades.

A avaliação da metodologia também foi prejudicada pela falta de engajamento dos alunos em fazer o teste de aprendizagem e respondessem o questionário (11 alunos não responderam, mesmo diante de muita insistência), ocasionado por uma atribuição de pontos insuficiente para motivá-los. A expectativa em relação ao rendimento dos alunos no teste de aprendizagem não era boa, diante do comportamento dos alunos, observado pelo professor nos momentos que precederam a aplicação do teste. Falta de empenho em fazer os estudos dirigidos, assistir os vídeos, fazer os exercícios sugeridos (que não eram para entregar e portanto não seriam pontuados), tentar fazer os desafios propostos, já era um prenúncio de que o rendimento médio no teste de aprendizagem seria baixo. No entanto, mesmo que as expectativas em relação aos resultados fossem baixas, os resultados foram ainda piores do que o esperado.

Os resultados encontrados nesta pesquisa não foram satisfatórios, tanto os quantitativos, que foram os resultados do teste de aprendizagem e entrega de atividades, quanto os qualitativos, que foram as observações e deduções feitas pelo professor em relação ao comportamento e engajamento dos alunos em todas as fases da pesquisa. No entanto, considerando os diversos fatores, já mencionados, que corroboraram para que essa pesquisa não retornasse o resultado inicialmente imaginado, seria insensato concluir que toda metodologia e ferramentas utilizadas nessa pesquisa não possam trazer benefícios para o aprendizado da geometria analítica. Se essa pesquisa tivesse mais tempo durante o ano letivo para ser realizada e pudesse ser atribuídos mais pontos para as entregas de atividades, participação e para a realização do teste de aprendizagem, provavelmente os resultados seriam mais promissores.

Por mais que esta pesquisa não tenha retornado o resultado esperado, acreditamos que o uso da Sala de Aula Invertida, amparada por tecnologias digitais, seja benéfica para a aprendizagem de geometria analítica, quando aplicada em momentos mais oportunos e condições mais favoráveis. Como por exemplo no início do ano letivo, com mais tempo para implantar a ideia na mente dos estudantes, que estão acostumados e acomodados com outras formas de ensino. Uma distribuição de pontos mais atrativa, tanto para entrega de atividades, quanto para participação e realização do teste de aprendizagem, também contribuiria significativamente para o sucesso da metodologia proposta neste trabalho.

A ideia proposta aqui pode ser expandida para outros conteúdos da matemática, por exemplo: o ensino de funções, também usando GeoGebra; o ensino de estatística e matemática financeira, usando excel; ensino de probabilidade, usando jogos. A metodologia proposta nesta pesquisa pode alcançar um êxito maior em algumas disciplinas da área de exatas na graduação, como por exemplo geometria analítica e álgebra linear, visto que os estudantes de graduação estão mais interessados e habituados a estudarem de forma mais autônoma.

Em síntese, embora esse projeto não tenha dado o retorno esperado, acreditamos que a metodologia proposta nesta pesquisa possa contribuir significativamente para o ensino de geometria analítica no terceiro ano do ensino médio quando implementada em condições favoráveis. Um dos fatores que mais pode contribuir para o sucesso desta metodologia é uma mudança na mentalidade dos estudantes, pois para que a mesma dê certo, os alunos precisam assumir um protagonismo maior no processo de ensino aprendizagem. Ou seja, para essa metodologia ser bem sucedida, requer tempo para implantação, pois a mudança na mentalidade e na maneira de estudar dos estudantes não acontecerá repentinamente.

6

Anexos

6.1 Estudos Dirigidos

6.1.1 Estudo Dirigido 1

Figura 6.1: ED 1 - Página 1

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO ESCOLAR E ASSISTÊNCIA SOCIAL
COLÉGIO TIRADENTES DA POLÍCIA MILITAR

ESTUDO DIRIGIDO 1	ETAPA: 3ª	DATA: / 10 / 2023	ANO: 3º Ano
UNIDADE: Nossa Senhora das Vitórias		ENSINO: Médio	SOESP: Leonardo
PROFESSOR: Ronan Lucas de Souza		DISCIPLINA: Matemática	

Estudo dirigido 01:
Posições relativas entre retas no plano.

Objetivo: Identificar as posições relativas entre retas no plano, por meio de suas equações. Verificar a relação entre os coeficientes de retas paralelas e retas concorrentes.

1ª PARTE:

Orientações:

- Leia o livro didático; Volume 7 - Frente 2; capítulo 25, páginas 1 a 5, e refaça a situação resolvida da página 6;
- Agora faça os exercícios 1 e 2 desse estudo dirigido.
- **Caso não consiga, o vídeo a seguir pode ajudar a esclarecer o assunto.**
  - Vídeo 1- ED 1: https://youtu.be/WvolcWVdwhU

Exercício 1: (Favor apresentar os cálculos e raciocínios usados para responder às seguintes questões, e entregar em folha separada)

A) Obtenha a equação da **reta r** que passa pelos pontos A = (2,8) e B = (-2,4). Determine seus coeficientes, angular e linear.

B) Dada uma **reta s**, de equação: **y = mx + n**. Determine os valores de **m** e **n**, para que as retas r e s, sejam:

- Paralelas (não coincidentes);
- Concorrentes (não perpendiculares);
- Perpendiculares.

Importante: Para fazer o exercício 2 você deverá usar o GeoGebra. Se você ainda não conhece o GeoGebra, no vídeo a seguir tem uma breve apresentação desse interessante software.

- Vídeo 2 - ED 1: https://youtu.be/RdYBIbRowRU

Fonte: Autor.

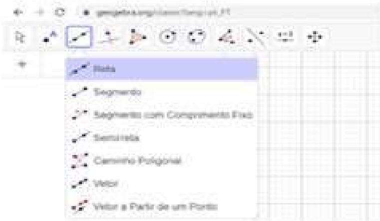
Figura 6.2: ED 1 - Página 2

Exercício 2: (Enviar arquivo, devidamente identificado pelo WhatsApp)

Objetivo: Construir uma reta no GeoGebra, dados dois pontos.

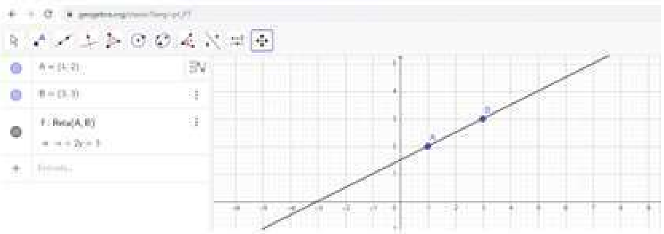
- Clique no 3º ícone da barra de ferramentas do GeoGebra, selecione a 1ª opção: Reta (dois pontos);

Figura 1: Criando uma reta a partir de dois pontos.



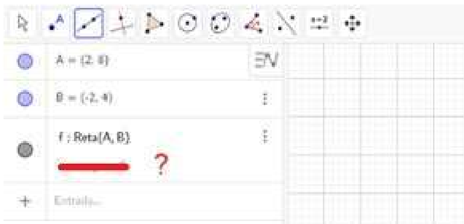
- Selecione os pontos A = (2,8) e B = (-2, 4). Clicando na janela de visualização (plano cartesiano) do GeoGebra. Observe por exemplo a seleção do ponto A:

Figura 2: Selecionando os dois pontos que determinará uma reta.



- O GeoGebra, vai escrever a equação da reta na janela de álgebra, logo abaixo dos dois pontos usados, como mostra a figura a seguir. Chamaremos essa reta de r.

Figura 3 - Visualização da equação da reta na janela de álgebra.

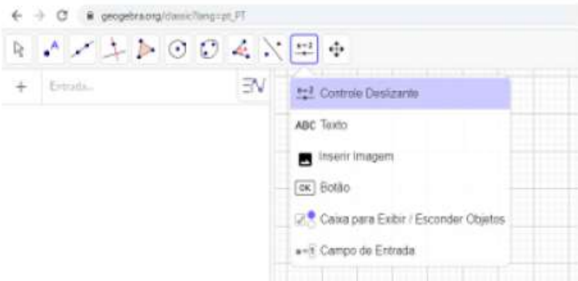


Fonte: Autor.

Figura 6.3: ED 1 - Página 3

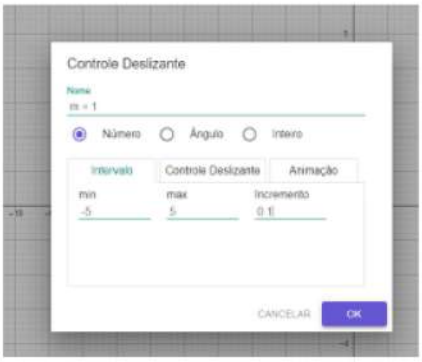
- Agora vamos encontrar equações de retas que sejam concorrentes, coincidentes, paralelas e perpendiculares à reta r, que passa pelos pontos A = (2,8) e B= (-2,4), encontrada anteriormente.
- Criar os controles deslizantes **m** e **n**. Para isso, siga os próximos passos:
- Clicar no 10º ícone na parte superior do lado esquerdo na janela do GeoGebra;

Figura 4 - Criando um controle deslizante.



- Coloque o nome de "**m**" para esse controle deslizante, pois esse será o parâmetro **m** da equação reduzida da reta, que é seu coeficiente angular. Escolha um valor mínimo e um valor máximo para o intervalo (sugestão -5 e 5), e coloque incremento igual a 0,1. Depois clique em "OK";

Figura 5: Determinando o intervalo e incremento do controle deslizante **m**.



Fonte: Autor.

Figura 6.4: ED 1 - Página 4

➢ Faça o mesmo processo para criar o controle deslizante do parâmetro **n** da equação da equação reduzida da reta. (Sugestão: colocar intervalo min = - 10 e máx = 10, incremento igual a 1);

Figura 6 - Determinando o intervalo e incremento do controle deslizante **n**.

➢ Digite na janela de álgebra do GeoGebra o seguinte comando: "s : y = mx + n".

➢ Por meio dessa construção, variando os valores dos parâmetros m e n da reta, e observando a posição relativa entre as duas retas, você consegue verificar se suas respostas dadas no exercício 1, item B, estão corretas e corrigi-las, caso estejam erradas.

Praticando:

➢ Agora pratique e verifique seus conhecimentos adquiridos. Faça os exercícios: 2, 5, 7, 13 e 14; do capítulo 25 (Frente 2 – Volume 7).

➢ Qualquer dúvida pode enviar no nosso grupo de WhatsApp.

➢ Anote demais dúvidas para esclarecermos durante nossas aulas presenciais.

➢ Desde já, agradeço sua participação e empenho!

Fonte: Autor.

Figura 6.5: ED 1 - Página 5

2ª PARTE:

Orientações:

- Leia o livro didático; Volume 7 - Frente 2; capítulo 26, páginas 13 a 15, e refaça as situações resolvidas 1 e 2 da página 16.
- Agora faça os exercícios 3 e 4 a seguir (Entregar em folha separada).
- **Caso não consiga, o vídeo a seguir pode ajudar a esclarecer o assunto.**
  - Vídeo 3 - ED 1: https://youtu.be/GQe0JiFss_M

Exercício 3: Dada uma reta **t: y = - 2x + 5**. Responda:

- Qual a equação da reta s, que passa pelo ponto P = (-2, 3) e é perpendicular a reta t?

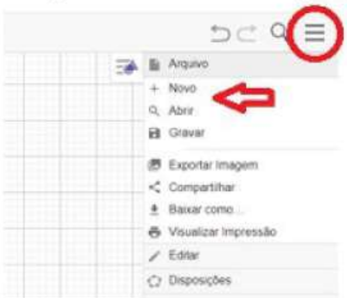
- Qual é a interseção entre essas duas retas?

Exercício 4: (Para essa atividade você deverá usar o GeoGebra. Enviar arquivo, devidamente identificado pelo WhatsApp).

Objetivo: Construção de retas perpendiculares, usando GeoGebra.

- Abra um novo arquivo, clicando no menu (canto superior direito), e "+ Novo";

Figura 7 - Criando um novo arquivo.



- Digite na janela da álgebra, no GeoGebra, o seguinte comando: "r : y = -2x + 5";
- GeoGebra construirá uma reta, chamada reta r, no plano cartesiano;
- Clique no 4º ícone da barra de ferramentas do GeoGebra, selecione a 1ª opção: Reta Perpendicular;

Fonte: Autor.

Figura 6.6: ED 1 - Página 6

Figura 8 - Criando uma reta perpendicular.

- GeoGebra vai solicitar um ponto e uma reta;
- Clique no ponto (-2, 3) e na reta r;
- GeoGebra construirá uma reta que passa pelo ponto (-2, 3) e perpendicular a reta r;
- Na janela de álgebra vai aparecer o nome e a equação dessa reta;
- Existe uma maneira precisa para determinar a interseção de dois objetos: 3º ícone da barra de ferramenta - 4ª opção.
- A reta **perpendicular** que apareceu é igual à que você encontrou no exercício 3 da parte 1?
- E as coordenadas do ponto de interseção das retas **r** e **s** foram iguais?
- Se a resposta para alguma das duas perguntas acima for negativa, volte a primeira parte desse estudo dirigido e refaça o exercício 3, até encontrar as respostas corretas.

Praticando:

- Agora pratique e verifique seus conhecimentos adquiridos. Faça os exercícios: 1, 4, 12, 13 e 21; do capítulo 26 (Frente 2 – Volume 7).
- Lembre-se: Qualquer dúvida pode enviar no nosso grupo de WhatsApp.
- Anote demais dúvidas para esclarecermos durante nossas aulas presenciais.

Fonte: Autor.

Figura 6.7: ED 1 - Página 7

Observação importante:

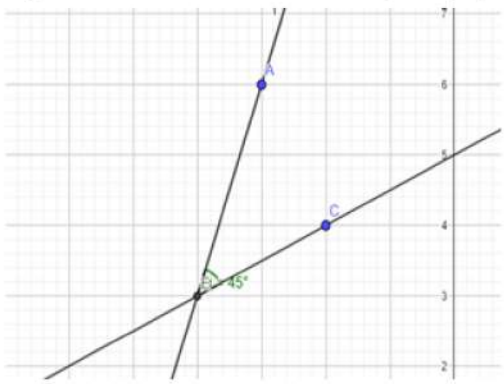
➢ Como medir ângulo entre duas retas no GeoGebra?

- Selecione a interseção das duas retas, chamaremos esse ponto de ponto E ;
- Selecione um ponto em cada uma das duas retas, que não seja o ponto de interseção, chamaremos esses pontos de A e C;
- Clique no 8º ícone da barra de ferramentas do GeoGebra, selecione a 1ª opção: Ângulos:

Figura 9 - Medindo um ângulo.

- Selecione os pontos CEA nessa ordem. Lembrando que o GeoGebra mede o ângulo entre as retas no sentido anti-horário. Caso selecione os pontos de forma desvantajosa, o GeoGebra vai te retornar um ângulo maior que 180º. Todavia basta subtrair 360º pelo ângulo encontrado, que você encontrará o ângulo agudo formado entre as retas. Observe as figuras:

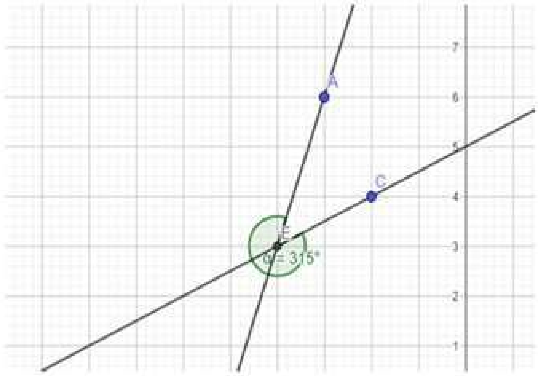
Figura 10 - a) Ângulo medido no sentido anti-horário de C para A (ângulo CÊA):



Fonte: Autor.

Figura 6.8: ED 1 - Página 8

Figura 10- b) Ângulo medido no sentido anti-horário de A para C (ângulo AÊC):



Fonte: Autor.

6.1.2 Estudo Dirigido 2

Figura 6.9: ED 2 - Pag 1

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO ESCOLAR E ASSISTÊNCIA SOCIAL
COLÉGIO TIRADENTES DA POLÍCIA MILITAR

COLÉGIO TIRADENTES

ESTUDO DIRIGIDO 2	ETAPA: 3ª	DATA: / 10 / 2023	ANO: 3º Ano
UNIDADE: Nossa Senhora das Vitórias		ENSINO: Médio	SOESP: Leonardo
PROFESSOR: Ronan Lucas de Souza		DISCIPLINA: Matemática	

Estudo dirigido 02:
Distância entre ponto e reta.

Objetivo: Facilitar a compreensão algébrica e geométrica do cálculo da distância entre dois pontos, e sua aplicabilidade em resolução de problemas.

Orientações:

- Leia o livro didático volume 7 – frente 2; capítulo 26, páginas 16 e 17, e refaça as situações resolvidas 3 e 4, da página 17;
- Agora faça os exercícios 1 e 2 desse estudo dirigido (Entregar em folha separada);
- **Caso não consiga, o vídeo a seguir pode ajudar a esclarecer o assunto.**

Vídeo 1 - ED 2: https://youtu.be/wbR94zC78PM

Exercício 1: (Favor apresentar os cálculos e raciocínios usados para responder às seguintes questões. Entregar em folha separada)

A) Obtenha a distância entre o ponto A= (2, -3) e a reta r: 4x -3y +8 = 0.

B) Dado o triângulo ABC, com vértices A= (2,4), B = (3, -3) e C = (9, 5). Calcule a altura relativa ao lado BC.

- **Caso não consiga resolver o item B, o vídeo a seguir pode ajudar:**

Vídeo 2 - ED 2: https://youtu.be/vD8yMgxBzgA?si=n1NW--ZFXSJeTnrW

Exercício 2: (Para essa atividade você deverá usar o GeoGebra. Enviar o arquivo com devida identificação pelo WhatsApp).

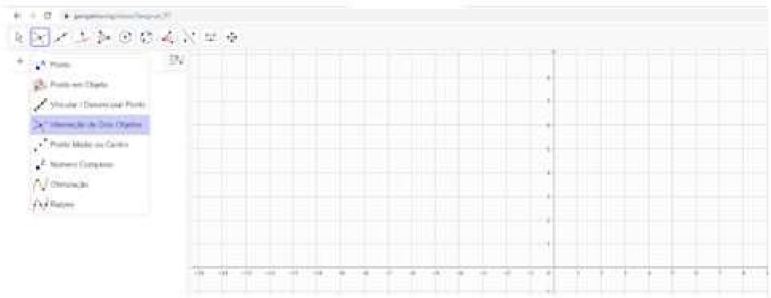
A) Obter a distância entre um ponto e uma reta.

- Digite na janela de álgebra a equação da reta r, 4x -3y +8 = 0.
- GeoGebra vai construir essa reta no plano cartesiano.
- Marque o ponto A= (2, -3) no plano cartesiano.
- Trace uma perpendicular a reta r passando pelo ponto A. (Seguir os passos descritos no estudo dirigido 1).
- Para encontrar a interseção entre essas duas retas clique no 2 ícone da barra de ferramentas e na 4º opção. Em seguida selecione as duas retas. Esse ponto de interseção, chamaremos de ponto B.

Fonte: Autor.

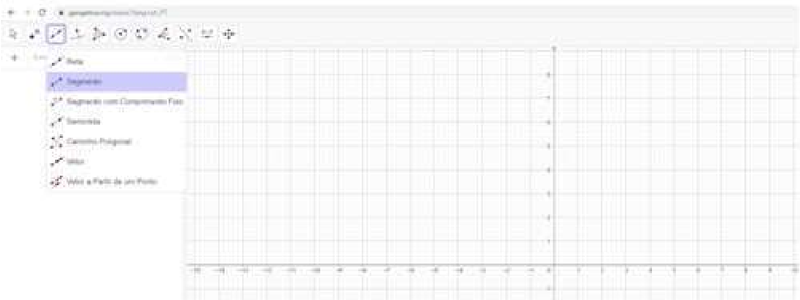
Figura 6.10: ED 2 - Pag. 2

Figura 1- Interseção entre dois objetos.



- Agora obtenha a distância entre os pontos A e B. Para isso, clique no 3 ícone da barra de ferramentas e na 2ª opção. Em seguida selecione os pontos A e B. A medida desse segmento aparecerá na janela de álgebra do GeoGebra.

Figura 2 - Medida de um segmento.



- ➢ Essa distância encontrada é realmente a distância entre o ponto A e a reta r? Justifique.

- ➢ A distância encontrada usando o GeoGebra é a mesma que você calculou? Caso a resposta seja negativa, verifique onde está o erro e faça a correção.

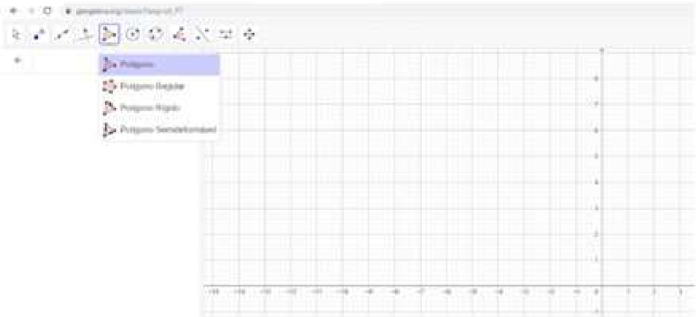
B) Dado um triângulo, escolha um lado e calcule a altura relativa a esse lado. Vamos obter a altura do triângulo ABC do exercício 2 da primeira parte desse estudo dirigido, usando o GeoGebra e verificar se a medida encontrada coincide com o valor calculado.

- Abra um novo arquivo, clicando no menu (canto superior direito), e "+ novo";
- Primeiramente, vamos construir o triângulo ABC.
- Use a janela da álgebra (veja figura) e digite as coordenadas dos pontos. Por exemplo, digite A=(2,4) e tecle enter. Faça o mesmo para os outros pontos.
- Clique no 5º ícone da barra de ferramentas, na 1º opção (polígono).

Fonte: Autor.

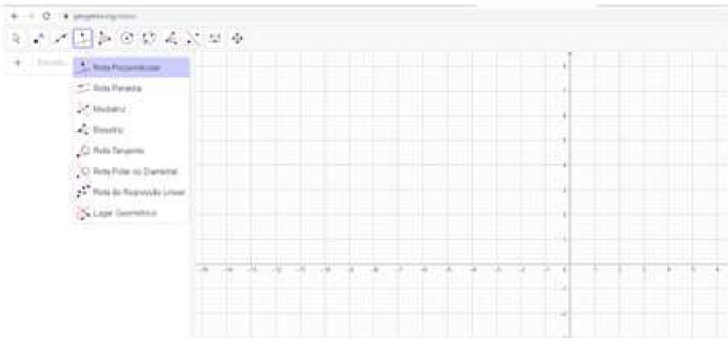
Figura 6.11: ED 2 - Pag. 3

Figura 3 - Criando um triângulo.



- Selecione os vértices desse triângulo no plano cartesiano do GeoGebra
- Queremos encontrar a altura do triângulo ABC em relação ao lado BC. Para isso, trace uma perpendicular ao lado BC do triângulo, passando pelo ponto A;
- Clique no 4º ícone da barra de ferramentas do GeoGebra, selecione a 1ª opção: Reta Perpendicular;

Figura 4 - Obtendo reta perpendicular.

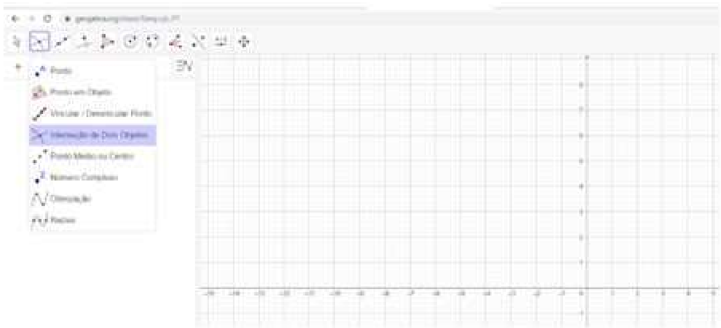


- GeoGebra vai solicitar um ponto e uma reta;
- Clique no ponto A = (2, 4) e no segmento BC;
- GeoGebra construirá uma reta que passa pelo ponto (2, 4) e perpendicular ao lado BC;
- Para encontrar a interseção entre essa perpendicular e o segmento BC, clique no 2 ícone da barra de ferramentas e na 4º opção (veja Figura 5). Em seguida selecione o lado BC do triângulo e a reta perpendicular. Esse ponto de interseção, chamaremos de ponto D.

Fonte: Autor.

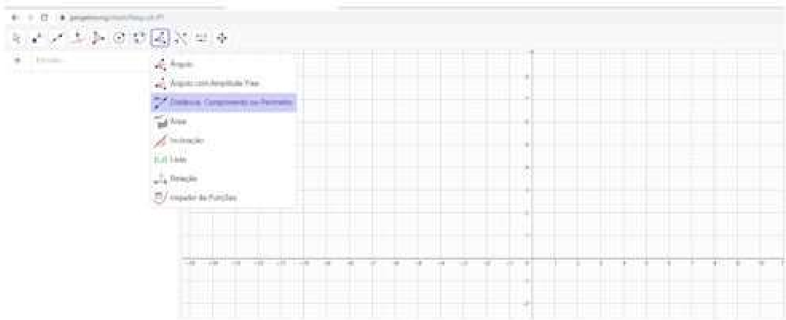
Figura 6.12: ED 2 - Pag. 4

Figura 5 - Encontrando a interseção entre dois objetos:



- Agora obtenha a distância entre os pontos A e D. A partir do 8º item e 3ª opção.

Figura 6 - Distância entre dois pontos.



- Essa distância encontrada é realmente a medida da altura procurada? Justifique.

- A altura encontrada usando o GeoGebra é a mesma que você calculou? Caso a resposta seja negativa, verifique onde está o erro e faça a correção.

Praticando:

- Agora pratique e verifique seus conhecimentos adquiridos. Faça os exercícios: 2, 6, 14, 16 e 25, do capítulo 26 (Frente 2 – Volume 7).
- Lembre-se: Qualquer dúvida pode enviar no nosso grupo de WhatsApp.
- Anote demais dúvidas para esclarecermos durante nossas aulas presenciais.

Fonte: Autor.

6.1.3 Estudo Dirigido 3

Figura 6.13: ED 3 - Pag. 1

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO ESCOLAR E ASSISTÊNCIA SOCIAL
COLÉGIO TIRADENTES DA POLÍCIA MILITAR

COLÉGIO TIRADENTES

ESTUDO DIRIGIDO 3	**ETAPA: 3ª**	**DATA: / 10 / 2023**	**ANO: 3º Ano**
UNIDADE: Nossa Senhora das Vitórias		**ENSINO: Médio**	**SOESP: Leonardo**
PROFESSOR: Ronan Lucas de Souza		**DISCIPLINA: Matemática**	

Estudo dirigido 03
Circunferência no plano cartesiano.

Objetivo: Interpretar uma equação de circunferência, identificando as coordenadas do centro e o tamanho do raio. Escrever a equação da circunferência, a partir do seu centro e raio. Fazer corretamente a associação entre as circunferências no plano cartesiano e suas equações algébricas.

1ª PARTE:

Orientações:

- Leia o livro didático; Volume 7 – Frente 2; capítulo 27; páginas 25 a 28, e refaça as situações resolvidas 1 e 2, das páginas 27 e 28;
- Agora faça os exercícios 1 e 2 desse estudo dirigido;
- Caso não consiga, o vídeo a seguir pode ajudar a esclarecer o assunto.
  - Vídeo 1 - ED 3: https://youtu.be/tvhxMw5SvNM

Exercício 1: (Favor apresentar os cálculos e raciocínios usados para responder às seguintes questões)

A) Qual a equação geral da circunferência com centro C = (-1, 2) e raio igual a 5?

B) Determine qual o raio e o centro de uma circunferência de equação:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$$

- Caso ainda não consiga resolver o item B, a seguir segue um vídeo com mais um exemplo resolvido, que pode te ajudar:
  - Vídeo 2 - ED 3: https://youtu.be/Zpanh7yV5Zw

Fonte: Autor.

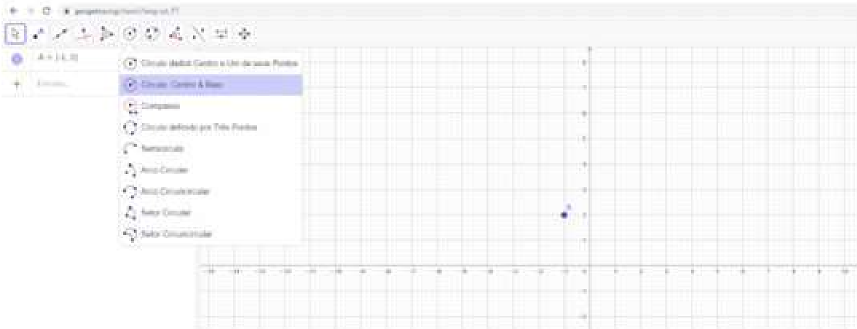
Figura 6.14: ED 3 - Pag. 2

Exercício 2: (Para essa atividade você deverá usar o GeoGebra)

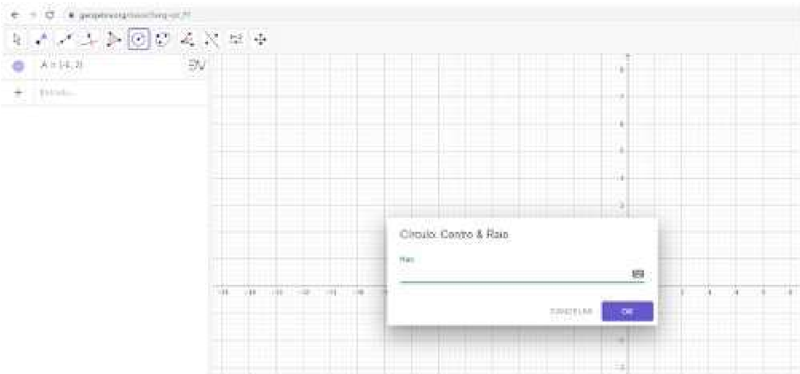
A) Construir uma circunferência com centro C = (-1, 2) e raio igual a 5 no GeoGebra, e identificar sua equação.

- Marque o ponto A = (-1, 2) no plano cartesiano.
- Clique no 6º ícone da barra de ferramentas e na 2ª opção:
- Selecione o centro, A = (-1, 2) e depois o valor digite o valor do raio da circunferência e clique em OK.

Figura 1 - a) Traçando um círculo a partir de seu centro e raio.



b) Informando o tamanho do raio da circunferência.

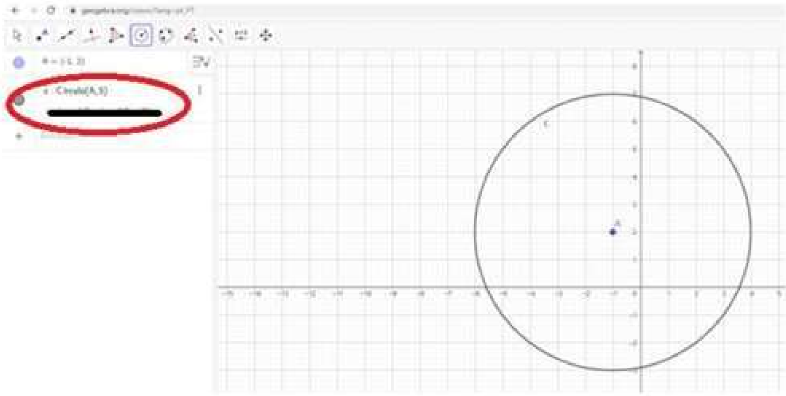


- Depois desses passos, o GeoGebra desenhar a circunferência especificada e também vai escrever a sua equação na janela de álgebra:

Fonte: Autor.

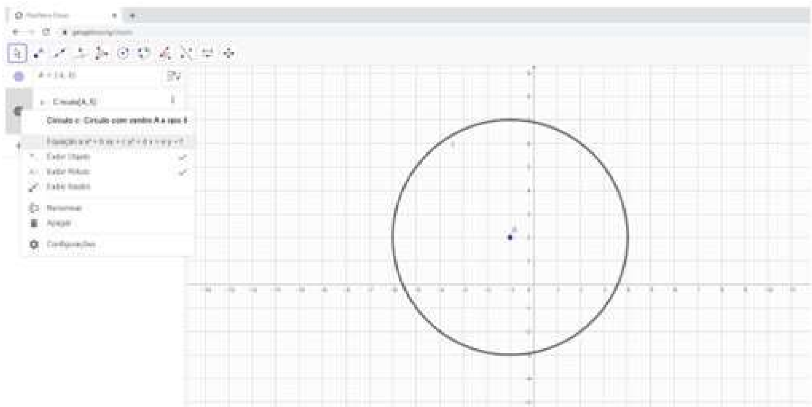
Figura 6.15: ED 3 - Pag. 3

Figura 2 - Circunferência e sua equação.



- Clique com o botão direito do mouse em cima da bolinha onde apareceu a equação reduzida da circunferência e selecione mude a equação para sua forma geral:

Figura 3 - Mudando a forma da equação de circunferência.



➢ A equação encontrada usando o GeoGebra é a mesma que você obteve por meio de cálculos? Caso a resposta seja negativa, verifique onde está o erro e faça a correção.

Fonte: Autor.

Figura 6.16: ED 3 - Pag. 4

B) Construir uma circunferência de equação: $\mathbf{x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0}$ no GeoGebra e identificar qual seu centro e raio.

- Abrir um novo projeto no GeoGebra.
- Digite na janela de álgebra a equação da circunferência. E aperte a tecla "Enter".
- O GeoGebra vai desenhar a circunferência no plano cartesiano.
- DESAFIO: Agora, com os conhecimentos adquiridos até esse momento e usando o GeoGebra, descubra qual o centro e o raio dessa circunferência.

  - Descreva os passos que você usou para resolver a atividade proposta.

  - O centro e o raio encontrados usando o GeoGebra são iguais aos que você obteve por meio de cálculos? Caso a resposta seja negativa, verifique onde está o erro e faça a correção.

Praticando:

- Agora pratique e verifique seus conhecimentos adquiridos. Faça os exercícios: 3, 5, 8, 9 e 15 do capítulo 27, frente 2, volume 7 do livro didático.
- Lembre-se: Qualquer dúvida pode enviar no nosso grupo de WhatsApp.
- Anote demais dúvidas para esclarecermos durante nossas aulas presenciais.

Fonte: Autor.

Figura 6.17: ED 3 - Pag. 5

2ª PARTE:

Orientações:

- Agora faça os exercícios 3 e 4 desse estudo dirigido;
- **Caso não consiga, o vídeo a seguir pode ajudar a esclarecer o assunto.**
  - Vídeo 3 - ED 3: https://youtu.be/nkaVTZAmm0Y

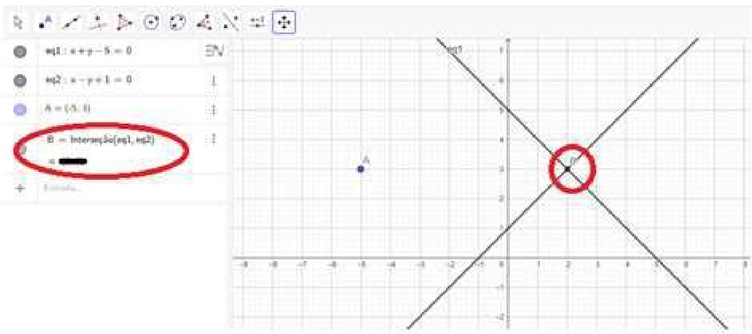
Exercício 3: (Favor apresentar os cálculos e raciocínios usados para responder às seguintes questões)

- Obtenha a equação da circunferência com centro **C = (-5, 3)** e que passa pela interseção das retas **r: x + y – 5 = 0** e **s: x – y + 1 = 0**

Exercício 4: Resolver o exercício 3 (desse estudo dirigido) a partir da construção geométrica, usando o GeoGebra.

- Abrir um novo projeto no GeoGebra.
- Digite a equação da reta r: **x + y – 5 = 0**, na janela de álgebra e dê "enter" em seguida.
- Agora, digite a equação da reta s: **x - y + 1 = 0**.
- Selecione o centro da circunferência, ponto (-5, 3), no plano cartesiano.
- Marque a interseção entre as retas r e s:

Figura 4 - Interseção das retas **r** e **s**.

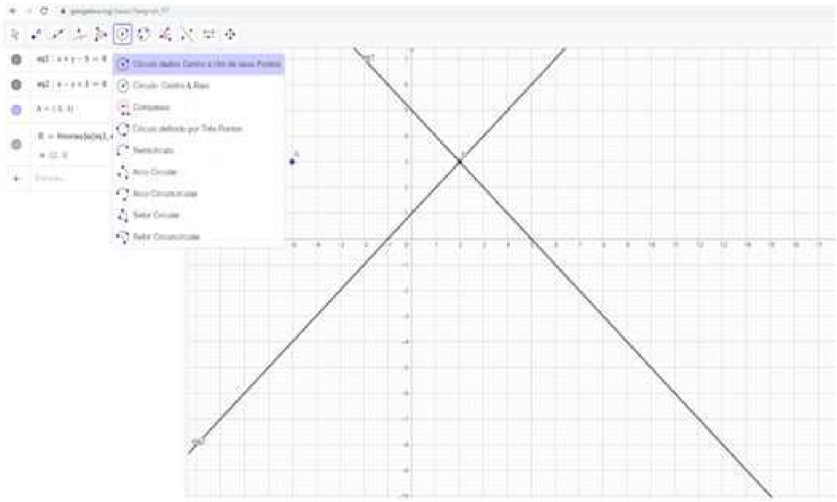


- Clique no 6º ícone da barra de ferramentas e na 1ª opção:
- Selecione o centro da circunferência e, depois, o ponto de interseção das retas r e s.

Fonte: Autor.

Figura 6.18: ED 3 - Pag. 6

Figura 5 - Circunferência com centro C=(-5,3) e que passa pela interseção das retas **r** e **s**.



- Depois desses passos, o GeoGebra desenhará a circunferência especificada e também vai escrever a sua equação na janela de álgebra.
- A equação encontrada usando o GeoGebra é a mesma que você obteve por meio de cálculos? Caso a resposta seja negativa, verifique onde está o erro e faça a correção.

Praticando:

- Agora pratique e verifique seus conhecimentos adquiridos. Faça os exercícios: 16, 17 e 21 do capítulo 27, frente 2, volume 7 do livro didático.
- Lembre-se: Qualquer dúvida pode enviar no nosso grupo de WhatsApp.
- Anote demais dúvidas para esclarecermos durante nossas aulas presenciais.

Fonte: Autor.

6.1.4 Estudo Dirigido 4

Figura 6.19: ED 4 - Pag. 1

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO ESCOLAR E ASSISTÊNCIA SOCIAL
COLÉGIO TIRADENTES DA POLÍCIA MILITAR

COLÉGIO TIRADENTES

ESTUDO DIRIGIDO 4	ETAPA: 3ª	DATA: / 10 / 2023	ANO: 3º Ano
UNIDADE: Nossa Senhora das Vitórias		ENSINO: Médio	SOESP: Leonardo
PROFESSOR: Ronan Lucas de Souza		DISCIPLINA: Matemática	

Estudo dirigido 04

Posições relativas entre ponto e circunferência;
e entre reta e circunferência.

Objetivo: Obter as posições relativas: entre um ponto e uma circunferência; e entre uma reta e uma circunferência, calculando as distâncias desses objetos até o centro da circunferência.

1ª PARTE:

Orientações:

- Leia o livro didático; Volume 7 – Frente 2; capítulo 28; páginas 36 e 38, e refaça a situação resolvida 1 da página 38;
- Agora faça os exercícios 1 e 2 desse estudo dirigido;
- Caso não consiga, o vídeo a seguir pode ajudar a esclarecer o assunto.
  - Vídeo 1 - ED 4: https://youtu.be/nGsINVSmBg8

Exercício 1: (Favor apresentar os cálculos e raciocínios usados para responder às seguintes questões)

- Dado o ponto P = (m, 2) e a circunferência: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$. Determine para quais valores de m, o ponto P:

A) Seja externo à circunferência;
B) Seja interno à circunferência;
C) Pertença à circunferência.

Exercício 2: (Para essa atividade você deverá usar o GeoGebra)

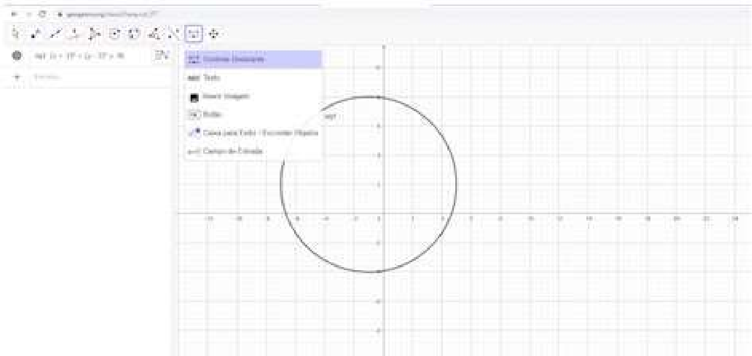
Refazer o exercício 1, usando o GeoGebra. Ou seja, verificar a posição do ponto P = (m, 2) em relação a circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$, de acordo com os valores do parâmetro m.

- Digite na janela de álgebra a equação da circunferência acima, e aperte "Enter" - o GeoGebra vai desenhar a circunferência descrita pela equação digitada;
- Crie o controle deslizante para o parâmetro **m**, do ponto P, com intervalo [-10, 10] e incremento 0,1. Como mostrado nas figuras abaixo;

Fonte: Autor.

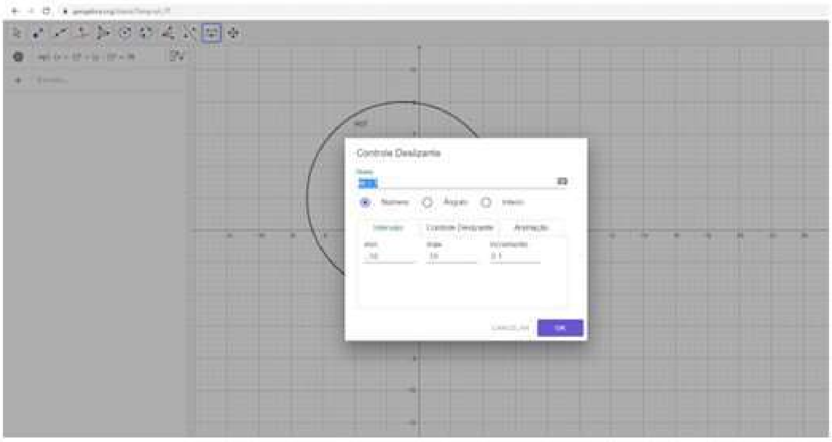
Figura 6.20: ED 4 - Pag. 2

Figura 1 - Criando um controle deslizante.



- Não esquecer de quando clicar na parte do plano cartesiano e fora da circunferência, com o botão do lado esquerdo do mouse, para aparecer a janela de configuração desse controle deslizante. E também de colocar a letra **m** como nome desse controle deslizante.

Figura 2 - Determinando o intervalo e incremento do controle deslizante.

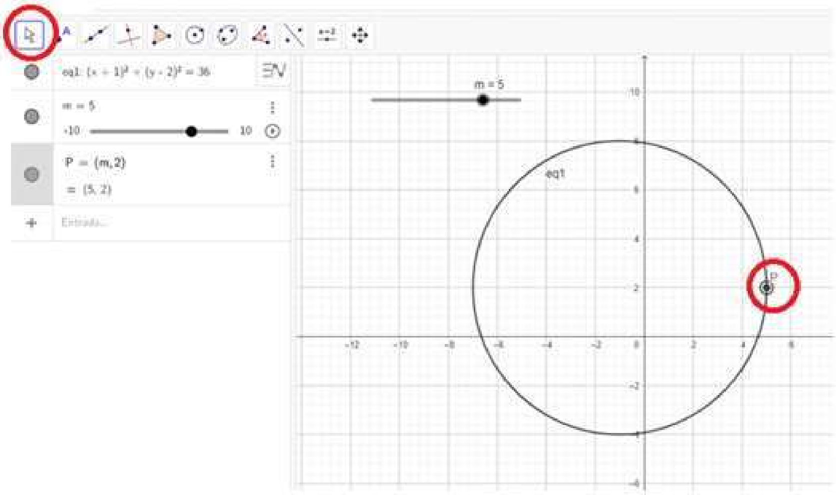


- Digite também o ponto P = (m, 2);
- Clique no primeiro ícone da barra de ferramentas, para movimentar livremente o cursor (veja Figura 3). E depois clique no ponto P no plano cartesiano e o movimente até achar o(s) momento(s) em que ele pertença à circunferência;

Fonte: Autor.

Figura 6.21: ED 4 - Pag. 3

Figura 3 - Movimentando o cursor do controle deslizante.



- Você consegue descobrir esses valores de **m,** usando o GeoGebra, de outra maneira? Descreva como você faria:

Praticando:

- Agora pratique e verifique seus conhecimentos adquiridos. Faça os exercícios: 1 e 2 do capítulo 28, frente 2, volume 7 do livro didático.
- Lembre-se: Qualquer dúvida pode enviar no nosso grupo de WhatsApp.
- Anote demais dúvidas para esclarecermos durante nossas aulas presenciais.

Fonte: Autor.

Figura 6.22: ED 4 - Pag. 4

2ª PARTE:

Orientações:

- Leia o livro didático; Volume 7 – Frente 2; capítulo 28; páginas 37 a 39, e refaça a situação resolvida 2 da página 39;
- Agora faça os exercícios 1 e 2 desse estudo dirigido;
- Caso não consiga, os vídeos a seguir podem ajudar a esclarecer o assunto.
    - Vídeo 2 - ED 4: https://youtu.be/mTBIgGFFEa0
    - Vídeo 3 - ED 4: https://youtu.be/21TZEVxNV1Q
    - Vídeo 4 - ED 4: https://youtu.be/h4ZJIP5b-aI

Exercício 1: (Favor apresentar os cálculos e raciocínios usados para responder às seguintes questões)

➢ Considerando a reta: $4x - 3y + n = 0$ e a circunferência: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$. Determine para quais valores de n, a reta seja:

A) Externa à circunferência;
B) Secante à circunferência;
C) Tangente à circunferência.

➢ Dada a circunferência: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Determine sua interseção com:

A) O eixo das abscissas;
B) O eixo das ordenadas;
C) A bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exercício 2: (Para essa atividade você deverá usar o GeoGebra)

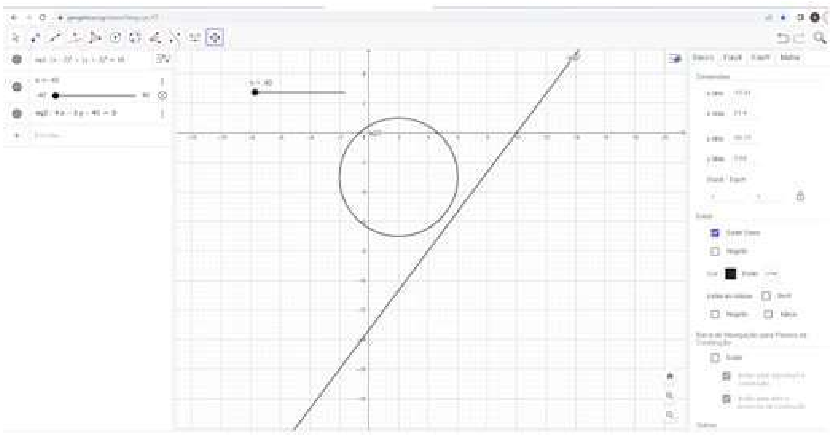
A) Verificar a posição da reta **r** de equação: $4x - 3y + n = 0$ e a circunferência de equação: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, de acordo com os valores do parâmetro n.

- Abrir um novo projeto no GeoGebra.
- Digite na janela de álgebra a equação da circunferência. E aperte a tecla "Enter" - o GeoGebra vai desenhar a circunferência no plano cartesiano;
- Crie o controle deslizante para o parâmetro **n**, da reta **r**, com intervalo [-40, 40] e incremento 0,1, como feito na primeira parte desse estudo dirigido;
- Digite a equação $4x - 3y + n = 0$ da reta r, na janela de álgebra;
- Movimente o controle deslizante referente ao parâmetro **n**, e observe para quais valores a reta será tangente, externa ou secante à circunferência;

Fonte: Autor.

Figura 6.23: ED 4 - Pag. 5

Figura 4 - Circunferência e a reta **r**.



- Os valores encontrados usando o GeoGebra são iguais aos que você obteve por meio de cálculos? Caso a resposta seja negativa, verifique onde está o erro e faça a correção.

B) Determinar as interseções da circunferência: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ com os eixos ordenados e com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

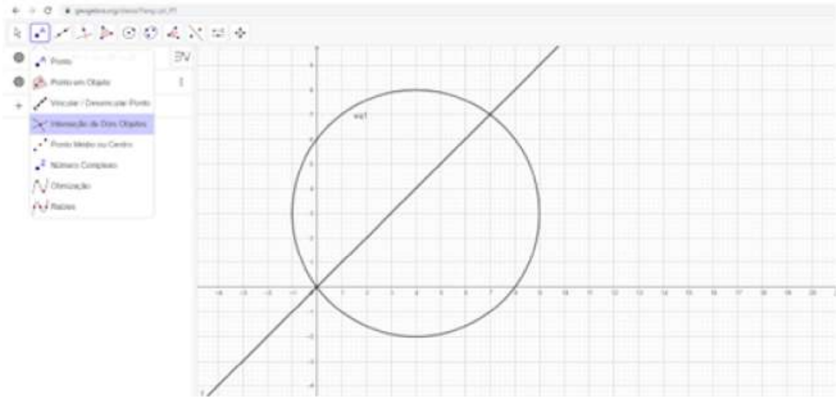
- Abrir um novo projeto no GeoGebra.
- Digite na janela de álgebra a equação da circunferência. E aperte a tecla "Enter" - o GeoGebra vai desenhar a circunferência no plano cartesiano.
- Digite a na janela de álgebra a equação da bissetriz dos quadrantes ímpares. Qual seria essa equação?

- Clique no 2º ícone da barra de ferramentas e selecione a opção interseção entre dois objetos, e em seguida clique na circunferência e na bissetriz dos quadrantes ímpares. O GeoGebra vai retornar quais as interseções da reta com a circunferência;

Fonte: Autor.

Figura 6.24: ED 4 - Pag. 6

Figura 5 - Circunferência e a bissetriz dos quadrantes ímpares.



- Repita o mesmo processo para achar as interseções da circunferência com o eixo das abscissas. E depois da circunferência como o eixo das ordenadas;

  - Os pontos de interseções encontrados usando o GeoGebra são os mesmos que você obteve por meio de cálculos? Caso a resposta seja negativa, verifique onde está o erro e faça a correção.

Praticando:

- Agora pratique e verifique seus conhecimentos adquiridos. Faça os exercícios: 6, 7, 8, 15 e 17 do capítulo 28, frente 2, volume 7 do livro didático.
- Lembre-se: Qualquer dúvida pode enviar no nosso grupo de WhatsApp.
- Anote demais dúvidas para esclarecermos durante nossas aulas presenciais.

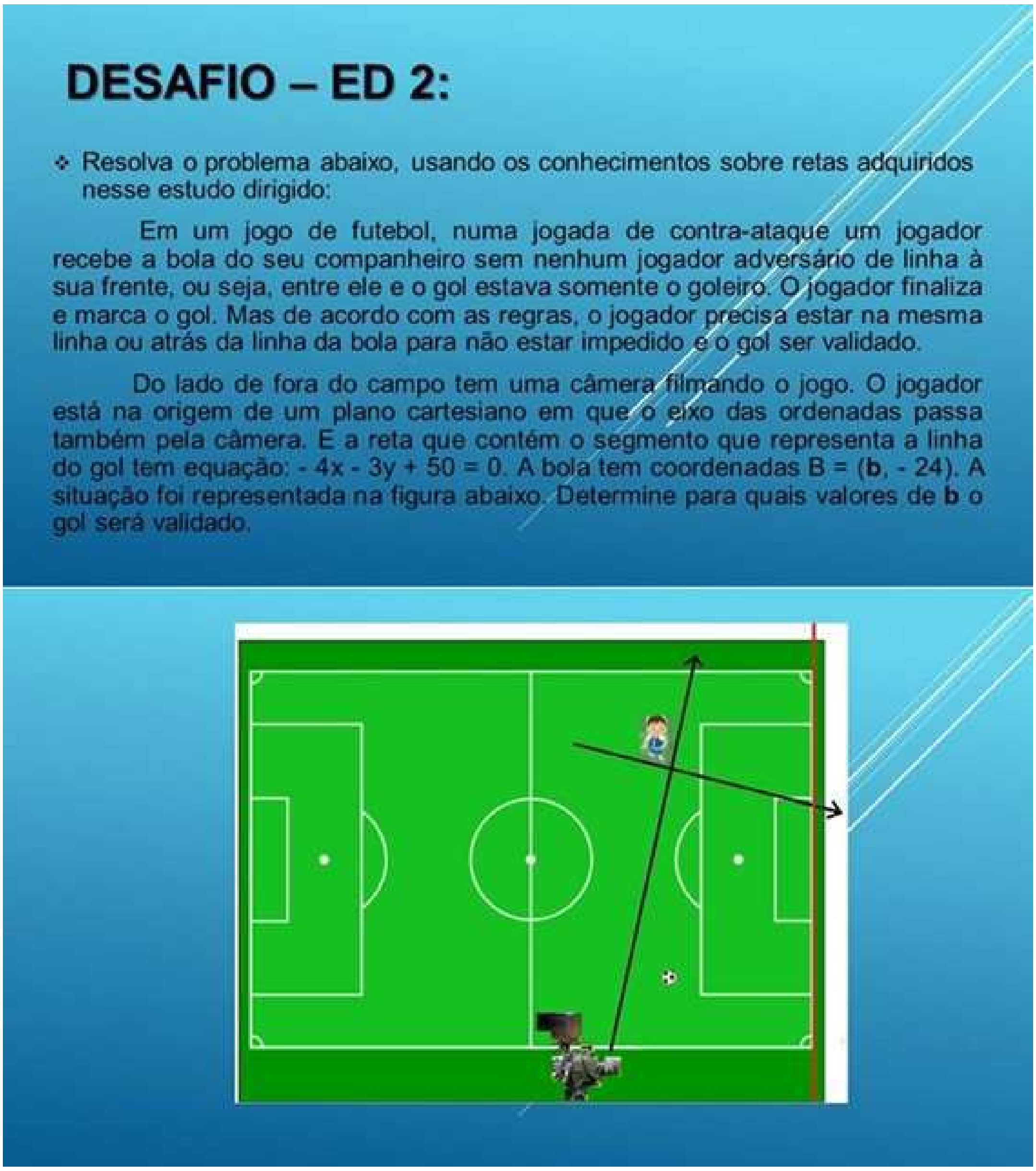
Fonte: Autor.

6.2 Desafios dos Estudos Dirigidos

Figura 6.25: Desafio - ED 1

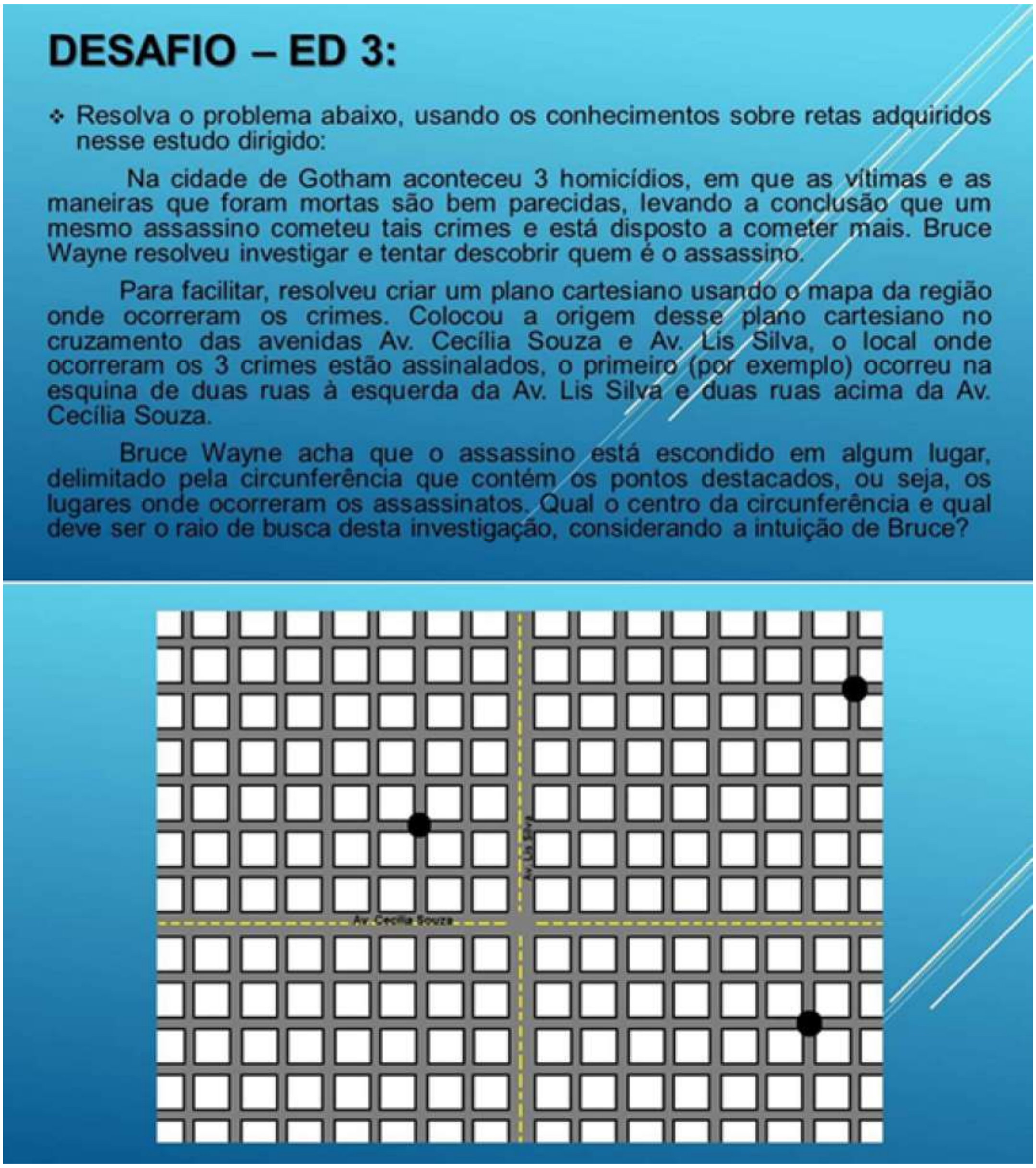
Fonte: Autor.

Figura 6.26: Desafio - ED 2



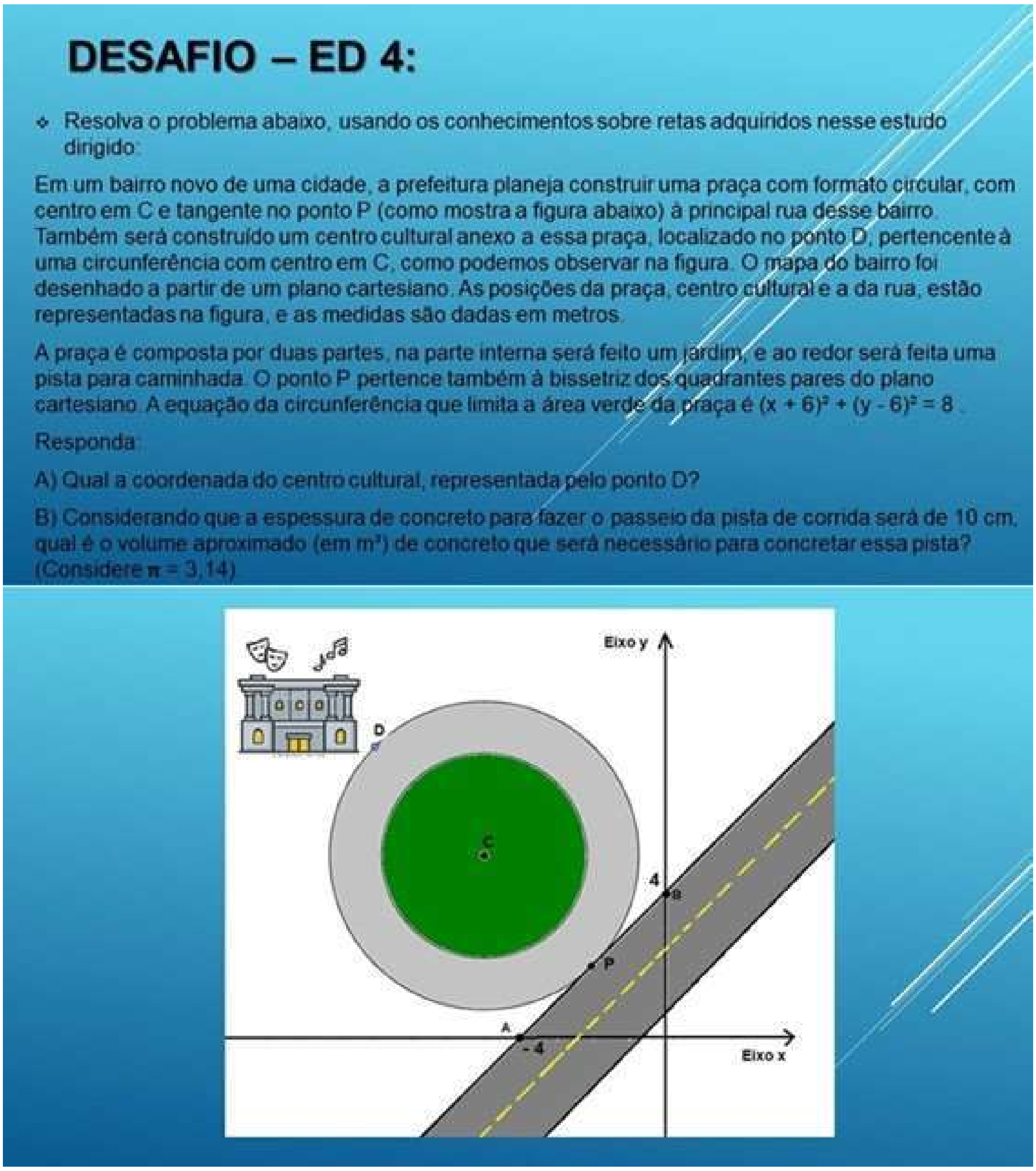
Fonte: Autor.

Figura 6.27: Desafio - ED 3



Fonte: Autor.

Figura 6.28: Desafio - ED 4



Fonte: Autor.

6.3 Links dos vídeos gravados

- Vídeos do Estudo Dirigido 1:

  Vídeo 1 - ED 1

  Vídeo 2 - ED 1

  Vídeo 3 - ED 1

- Vídeos do Estudo Dirigido 2:

  Vídeo 1 - ED 2

  Vídeo 2 - ED 2

- Vídeos do Estudo Dirigido 3:

  Vídeo 1 - ED 3

  Vídeo 2 - ED 3

  Vídeo 3 - ED 3

- Vídeos do Estudo Dirigido 4:

  Vídeo 1 - ED 4

  Vídeo 2 - ED 4

  Vídeo 3 - ED 4

  Vídeo 3 - ED 4

6.4 Teste de Aprendizagem

Figura 6.29: Teste de Aprendizagem - Pág. 1

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO ESCOLAR E ASSISTÊNCIA SOCIAL
COLÉGIO TIRADENTES DA POLÍCIA MILITAR

COLÉGIO TIRADENTES

Teste de Aprendizagem - GA	ETAPA: 3ª	DATA: 30 / 11 / 2023	ANO: 3º Ano
UNIDADE: Nossa Senhora das Vitórias		ENSINO: Médio	SOESP: Leonardo
PROFESSOR: Ronan Lucas de Souza		DISCIPLINA: Matemática	
ALUNO:		Nº:	TURMA: 303 e 304
VALOR:	NOTA:	ASS. RESPONSÁVEL P/ ALUNO:	

QUESTÃO 01

Dado um triângulo ABC com coordenadas A = (- 2, 1); B = (1, 1) e C = (1, 5). Calcule a medida da altura relativa ao lado AC desse triângulo.

Fonte: Autor.

Figura 6.30: Teste de Aprendizagem - Pág. 2

QUESTÃO 02

Uma reta **r** passa pelos pontos A = (-1, 3) e B = (2, 6).

A) Determine a equação geral da reta **s**, que passa pelo ponto C = (4, - 5) e é perpendicular a reta **r**.

B) Encontre o ponto de interseção das retas **r** e **s**.

C) Determine a reta **t** que é paralela à reta **s**, e passa pelo ponto D = (5, - 2)

Fonte: Autor.

Figura 6.31: Teste de Aprendizagem - Pág. 3

QUESTÃO 03

Os pontos A = (- 6, - 3) e B = (0, 5) determinam o diâmetro de uma circunferência.

A) Determine as equações reduzida e geral dessa circunferência.

B) Determine a posição do ponto D = (2, 3) em relação à essa circunferência. (Justifique com cálculos)

Fonte: Autor.

Figura 6.32: Teste de Aprendizagem - Pág. 4

QUESTÃO 04

Dada a circunferência de equação: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 36 = 0$. Determine a posição da reta r: $y = x + 2$ em relação à essa circunferência. (Justifique com cálculos)

Considere: $\sqrt{2} = 1{,}4$

Fonte: Autor.

6.5 Tabelas com acertos e aproveitamento no teste de aprendizagem

Figura 6.33: Resultados - TA - 301 - Questões 1 e 2

Turma: 301		1ª Questão:							2ª Questão:							
		1ª Solução:				2ª Solução:			Encontrar a reta r		Item A		Item B		Item C	
Alunos:	Notas (%)	Encontrar o coeficiente angular.	Encontrar o coeficiente linear.	Eq. da reta	Encontrar altura usando: Distância de ponto à reta.	Representar o triangulo corretamente	Identificar um Triângulo Pitagórico	Encontrar a altura usando: As Relações Métricas no Triângulo Retângulo	Encontrar o coeficiente angular.	Eq. da reta	Encontrar o coeficiente angular de retas perpendiculares a reta r.	Determinar Eq. da reta	Montar um sistema com as equações das retas.	Resolver o sistema e encontrar o ponto de interseção.	Identificar o coeficiente angular de retas paralelas à reta s.	Eq. da reta
1	20					1	1									
2	20					1	1									
3	33								1	1	1	1	1	1		
4	0															
5	46						1		1		1	1	1	1		
6	15					1										
7	5															
8	5															
9	5															
10	10					1	1									
11	10					1										
12	0															
13	15					1	1									
14	0															
15	20					1	1									
16	15					1	1									

Fonte: Autor.

Figura 6.34: Resultados - TA - 301 - Questões 3 e 4

	3ª Questão:						4ª Questão:							
	Item A				Item B		1ª Solução:					2ª Solução:		
Alunos:	Encontrar o centro da circunferência	Encontrar o raio da circunferência	Escrever corretamente a equação reduzida da circunferência.	Obter a equação geral da circunferência a partir da eq. reduzida.	Interpretação	Cálculo e conclusão a partir do resultado obtido	Obter a equação reduzida da circunferência	Identificar o centro e o raio	Eq. Geral Reta	Calcular a distância entre ponto (centro) e reta	Interpretação correta do resultado e conclusão.	Substituir a equação da reta na circunferência	Verificar a quantidade de soluções obtidas na resolução da equação	Interpretar corretamente os resultados.
1												0,5		
2												0,5		
3	1	1	0,5	0,5										
4														
5	0,5	0,5	0,5		1	1				1	0,5			
6												1		
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15												1		
16														

Fonte: Autor.

Figura 6.35: Resultados - TA - 302 - Questões 1 a 4

Turma: 302		1ª Questão:							2ª Questão:							
		1ª Solução:				2ª Solução:			Encontrar a reta r		Item A		Item B		Item C	
Alunos:	Notas (%)	Encontrar o coeficiente angular.	Encontrar o coeficiente linear.	Eq. da reta	Encontrar altura usando: Distância de ponto à reta.	Representar o triangulo corretamente	Identificar um Triângulo Pitagórico	Encontrar a altura usando: As Relações Métricas no Triângulo Retângulo	Encontrar o coeficiente angular.	Eq. da reta	Encontrar o coeficiente angular de retas perpendiculares a reta r.	Determinar Eq. da reta	Montar um sistema com as equações das retas.	Resolver o sistema e encontrar o ponto de interseção.	Identificar o coeficiente angular de retas paralelas à reta s.	Eq. da reta
1	15					1	1									
2	28					1	1		1	1						
3	15					1										
4	0															
5	20					1	1		1	1						
6	8	0,5									1					
7	11					1			1							
8	13					1										

	3ª Questão:						4ª Questão:							
	Item A				Item B		1ª Solução:					2ª Solução:		
Alunos:	Encontrar o centro da circunferência	Encontrar o raio da circunferência	Escrever corretamente a equação reduzida da circunferência.	Obter a equação geral da circunferência a partir da eq. reduzida.	Interpretação	Cálculo e conclusão a partir do resultado obtido	Obter a equação reduzida da circunferência	Identificar o centro e o raio	Eq. Geral Reta	Calcular a distância entre ponto (centro) e reta	Interpretação correta do resultado e conclusão.	Substituir a equação da reta na circunferência	Verificar a quantidade de soluções obtidas na resolução da equação	Interpretar corretamente os resultados.
1														
2	1													
3												1		
4														
5														
6														
7														
8												1		

Fonte: Autor.

Figura 6.36: Resultados - TA - 303 - Questões 1 e 2

Turma: 303		1ª Questão:							2ª Questão:							
		1ª Solução:				2ª Solução:			Encontrar a reta r		Item A		Item B		Item C	
Alunos:	Notas (%)	Encontrar o coeficiente angular.	Encontrar o coeficiente linear.	Eq. da reta	Encontrar altura usando: Distância de ponto à reta.	Representar o triângulo corretamente	Identificar um Triângulo Pitagórico	Encontrar a altura usando: As Relações Métricas no Triângulo Retângulo	Encontrar o coeficiente angular.	Eq. da reta	Encontrar o coeficiente angular de retas perpendiculares a reta r.	Determinar Eq. da reta	Montar um sistema com as equações das retas.	Resolver o sistema e encontrar o ponto de interseção.	Identificar o coeficiente angular de retas paralelas à reta s.	Eq. da reta
1	13						1		1	1						
2	26					1	1		1							
3	0															
4	52	1	1	1	1				1	1	1					
5	10						1		1							
6	41					1	1	1								
7	5															
8	15					1	1		1	1						
9	23					1	1		1	1						
10	23					1	1		1							
11	49					1	1		1		1		1			
12	30					1	1	1								
13	18					1	1		1							
14	15					1	1									
15	19															
16	12															
17	19															
18	0															

Fonte: Autor.

Figura 6.37: Resultados - TA - 303 - Questões 3 e 4

	3ª Questão:						4ª Questão:							
	Item A				Item B		1ª Solução:					2ª Solução:		
Alunos:	Encontrar o centro da circunferência	Encontrar o raio da circunferência	Escrever corretamente a equação reduzida da circunferência.	Obter a equação geral da circunferência a partir da eq. reduzida.	Interpretação	Cálculo e conclusão a partir do resultado obtido	Obter a equação reduzida da circunferência	Identificar o centro e o raio	Eq. Geral Reta	Calcular a distância entre ponto (centro) e reta	Interpretação correta do resultado e conclusão.	Substituir a equação da reta na circunferência	Verificar a quantidade de soluções obtidas na resolução da equação	Interpretar corretamente os resultados.
1														
2							0,5	0,5						
3														
4	1	1	1				0,5	0,5						
5														
6	1	1	1	1										
7												1		
8														
9														
10	1													
11		1										1	1	
12		1												
13														
14														
15							1	1						
16							0,5	0,5						
17							1	1						
18														

Fonte: Autor.

Figura 6.38: Resultados - TA - 304 - Questões 1 e 2

Turma: 304		1ª Questão:							2ª Questão:							
		1ª Solução:				2ª Solução:			Encontrar a reta r		Item A		Item B		Item C	
Alunos:	Notas (%)	Encontrar o coeficiente angular.	Encontrar o coeficiente linear.	Eq. da reta	Encontrar altura usando: Distância de ponto à reta.	Representar o triangulo corretamente	Identificar um Triângulo Pitagórico	Encontrar a altura usando: As Relações Métricas no Triângulo Retângulo	Encontrar o coeficiente angular.	Eq. da reta	Encontrar o coeficiente angular de retas perpendiculares a reta r.	Determinar Eq. da reta	Montar um sistema com as equações das retas.	Resolver o sistema e encontrar o ponto de interseção.	Identificar o coeficiente angular de retas paralelas à rota s.	Eq. da reta
1	10															
2	21					1	1		1	1						
3	60					1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1
4	39					1	1	0,5	1							
5	15					1	1									
6	20					1	1									
7	15					1	1									
8	20					1	1									
9	11					1			1							
10	27					1	1									
11	35					1	1									
12	48					1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1
13	39					1			1	1						
14	41					1	1	0,5								

Fonte: Autor.

Figura 6.39: Resultados - TA - 304 - Questões 3 e 4

	3ª Questão:						4ª Questão:							
	Item A				Item B		1ª Solução:					2ª Solução:		
Alunos:	Encontrar o centro da circunferência	Encontrar o raio da circunferência	Escrever corretamente a equação reduzida da circunferência.	Obter a equação geral da circunferência a partir da eq. reduzida	Interpretação	Cálculo e conclusão a partir do resultado obtido	Obter a equação reduzida da circunferência	Identificar o centro e o raio	Eq. Geral Reta	Calcular a distância entre ponto (centro) e reta	Interpretação correta do resultado e conclusão	Substituir a equação da reta na circunferência	Verificar a quantidade de soluções obtidas na resolução da equação	Interpretar corretamente os resultados.
1												1	1	
2														
3												1	1	1
4												1	1	
5														
6							0,5	0,5						
7														
8												1		
9														
10							1	1						
11							0,5	0,5				1	1	
12		1												
13												1	1	1
14												1	1	

Fonte: Autor.

6.6 Questionário

Figura 6.40: Questionário - Pág. 1

Questionário

Questionário sobre o ensino de Geometria Analítica.

* Indica uma pergunta obrigatória

1. Nome: *

2. Turma: *

Marcar apenas uma oval.

- 301
- 302
- 303
- 304

3. Como você julga seu nível de aprendizado adquirido sobre os assuntos trabalhados? *

Marcar apenas uma oval.

- Péssimo
- Ruim
- .Razoável
- Bom
- Ótimo

Fonte: Autor.

Figura 6.41: Questionário - Pág. 2

4. Qual foi a seu nível de dedicação ao realizar os estudos dirigidos? *

Marcar apenas uma oval.

- Péssimo
- Ruim
- Razoável
- Bom
- Ótimo

5. Em relação aos vídeos? *

Marcar apenas uma oval.

- Não assisti
- Assisti a minoria
- Assisti a maioria
- Assisti todos parcialmente
- Assisti todos integralmente

6. Em relação aos exercícios sugeridos do livro (os que não eram para entregar): *

Marcar apenas uma oval.

- Não fiz os exercícios sugeridos.
- Fiz poucos exercícios.
- Fiz aproximadamente a metade dos exercícios.
- Fiz a maioria dos exercícios.
- Fiz todos os exercícios.

Fonte: Autor.

Figura 6.42: Questionário - Pág. 3

7. Você tirou dúvidas com o professor pelo WhatsApp? *

Marcar apenas uma oval.

- Nenhuma vez.
- Poucas vezes
- Algumas vezes
- Muitas vezes

8. O que você achou da metodologia (Sala de Aula Invertida) adotada nos tópicos estudados? *

Marcar apenas uma oval.

- Péssima
- Ruim
- Razoável
- Boa
- Ótima

9. Dê que forma você acredita que consiga aprender mais? *

Marcar apenas uma oval.

- Método de ensino tradicional
- Metodologia: Sala de Aula Invertida
- Não sei responder
- Nenhum dos métodos influenciaram minha capacidade de entender a matemática

Dê notas de 1 a 5 para cada item abaixo:

Fonte: Autor.

Figura 6.43: Questionário - Pág. 4

10. Metodologia: Sala de Aula Invertida *

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5
◯	◯	◯	◯	◯

11. Uso do GeoGebra *

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5
◯	◯	◯	◯	◯

12. Estudos dirigidos *

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5
◯	◯	◯	◯	◯

13. Aula presencial *

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5
◯	◯	◯	◯	◯

Fonte: Autor.

Figura 6.44: Questionário - Pág. 5

14. Vídeos *

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5

15. Comunicação por WhatsApp *

Marcar apenas uma oval.

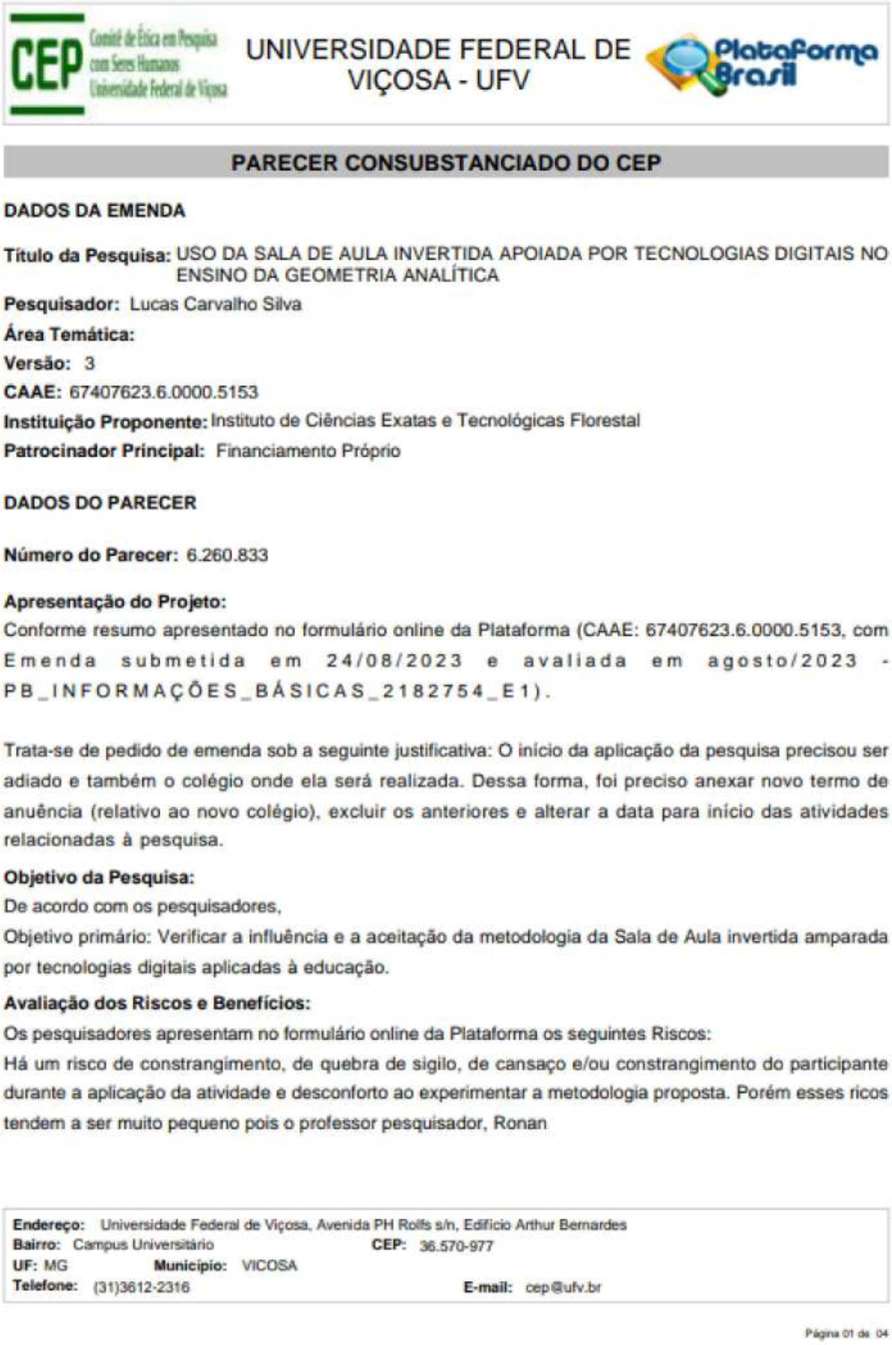
1	2	3	4	5

16. Descreva sua experiência com a metodologia apresentada, suas dificuldades, críticas e sugestões. *

Fonte: Autor.

6.7 Autorização para realização da pesquisa

Figura 6.45: Autorização do CEP-UFV - Pág. 1



CEP Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos Universidade Federal de Viçosa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - UFV

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DA EMENDA

Título da Pesquisa: USO DA SALA DE AULA INVERTIDA APOIADA POR TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Pesquisador: Lucas Carvalho Silva

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 67407623.6.0000.5153

Instituição Proponente: Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas Florestal

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.260.833

Apresentação do Projeto:

Conforme resumo apresentado no formulário online da Plataforma (CAAE: 67407623.6.0000.5153, com Emenda submetida em 24/08/2023 e avaliada em agosto/2023 - PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_2182754_E1).

Trata-se de pedido de emenda sob a seguinte justificativa: O início da aplicação da pesquisa precisou ser adiado e também o colégio onde ela será realizada. Dessa forma, foi preciso anexar novo termo de anuência (relativo ao novo colégio), excluir os anteriores e alterar a data para início das atividades relacionadas à pesquisa.

Objetivo da Pesquisa:

De acordo com os pesquisadores,

Objetivo primário: Verificar a influência e a aceitação da metodologia da Sala de Aula invertida amparada por tecnologias digitais aplicadas à educação.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Os pesquisadores apresentam no formulário online da Plataforma os seguintes Riscos:

Há um risco de constrangimento, de quebra de sigilo, de cansaço e/ou constrangimento do participante durante a aplicação da atividade e desconforto ao experimentar a metodologia proposta. Porém esses ricos tendem a ser muito pequeno pois o professor pesquisador, Ronan

Endereço: Universidade Federal de Viçosa, Avenida PH Rolfs s/n, Edifício Arthur Bernardes
Bairro: Campus Universitário **CEP:** 36.570-977
UF: MG **Município:** VICOSA
Telefone: (31)3612-2316 **E-mail:** cep@ufv.br

Página 01 de 04

Fonte: Autor.

Figura 6.46: Autorização do CEP-UFV - Pág. 2

CEP Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos Universidade Federal de Viçosa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - UFV

Plataforma Brasil

Continuação do Parecer: 6.260.833

Lucas de Souza, é graduado em Licenciatura Matemática pela UFMG (2011), tem especialização em Estatística, UFMG (2017). E está cursando o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, polo UFV-Florestal. Tem 12 anos de experiência na docência, sendo 10 anos em uma mesma instituição, Colégio Tiradentes da PMMG, no qual trabalha até o presente momento e onde desenvolverá as atividades da pesquisa. Dessa forma, é importante ressaltar que a sua presença na sala de aula, local da pesquisa, não causará nenhum prejuízo aos alunos.

E os seguintes Benefícios:
Oferecer materiais e métodos alternativos a serem utilizados no processo ensino-aprendizagem

Avaliação: Os riscos e os benefícios estão de acordo com as recomendações sobre pesquisas com seres humanos, baseados nas Resoluções 466/12 e 510/16 do CNS

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
Os pesquisadores propõe verificar a influência e a aceitação da metodologia da Sala de Aula invertida amparada por tecnologias digitais aplicadas à educação. Para isso pretendem aplicar-se-á um questionário com questões objetivas e outras discursivas para avaliar a interferência causada pelo pesquisador. Posteriormente será aplicada análise estatística adequada ao questionário utilizado e ao número de dados coletados. Importante ressaltar que o professor pesquisador, Ronan Lucas de Souza, é graduado em Licenciatura Matemática pela UFMG (2011), tem especialização em Estatística, UFMG (2017). E está cursando o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, polo UFV-Florestal. Tem 12 anos de experiência na docência, sendo 10 anos em uma mesma instituição, Colégio Tiradentes da PMMG. Dessa forma, é importante ressaltar que a sua presença na sala de aula, local da pesquisa, não causará nenhum prejuízo aos alunos (seguirá em anexo na Plataforma Brasil os documentos que comprobatórios da formação e experiência profissional do pesquisador).

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:
Tendo em vista que não ocorreram alterações éticas no protocolo, não existe óbice para que o pedido de emenda seja acatado.

Recomendações:
Quando da coleta de dados, o TCLE deve ser elaborado em duas vias, rubricado em todas as suas páginas e assinado, ao seu término, pelo convidado a participar da pesquisa ou responsável legal,

Endereço: Universidade Federal de Viçosa, Avenida PH Rolfs s/n, Edifício Arthur Bernardes
Bairro: Campus Universitário **CEP:** 36.570-977
UF: MG **Município:** VICOSA
Telefone: (31)3612-2316 **E-mail:** cep@ufv.br

Página 02 de 04

Fonte: Autor.

Figura 6.47: Autorização do CEP-UFV - Pág. 3

CEP Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos Universidade Federal de Viçosa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - UFV

Plataforma Brasil

Continuação do Parecer: 6.260.833

bem como pelo pesquisador responsável, ou pessoa(s) por ele delegada(s), devendo todas as assinaturas constar na mesma folha.

Não é necessário apresentar os TCLEs assinados ao CEP/UFV. Uma via deve ser mantida em arquivo pelo pesquisador e a outra é do participante da pesquisa.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovada.

Considerações Finais a critério do CEP:

Emenda aprovada nos termos expostos pelo pesquisador.

Ao término da pesquisa é necessário apresentar, via notificação, o Relatório Final (modelo disponível no site www.cep.ufv.br). Após ser emitido o Parecer Consubstanciado de aprovação do Relatório Final, deve ser encaminhado, via notificação, o Comunicado de Término dos Estudos para o encerramento de todo o protocolo na Plataforma Brasil.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_2182754_E1.pdf	24/08/2023 18:15:27		Aceito
Declaração de concordância	2003_Termodeanuencia_ColegioTiradentes.pdf	19/07/2023 14:08:20	Lucas Carvalho Silva	Aceito
Outros	Questionario.pdf	18/02/2023 16:34:22	Lucas Carvalho Silva	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_Ronan_Versao_final.pdf	18/02/2023 16:32:13	Lucas Carvalho Silva	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	2023_Ronan_TCLE_Responsavel_assinado.pdf	18/02/2023 16:29:10	Lucas Carvalho Silva	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	2023_Ronan_TCLE_maior_idade_assinado.pdf	18/02/2023 16:29:00	Lucas Carvalho Silva	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	2023_Ronan_TA_menor_idade_assinado.pdf	18/02/2023 16:28:45	Lucas Carvalho Silva	Aceito
Outros	Diario_Oficial_Nomeacao_Ronan.pdf	18/02/2023	Lucas Carvalho	Aceito

Endereço: Universidade Federal de Viçosa, Avenida PH Rolfs s/n, Edifício Arthur Bernardes
Bairro: Campus Universitário **CEP:** 36.570-977
UF: MG **Município:** VICOSA
Telefone: (31)3612-2316 **E-mail:** cep@ufv.br

Página 03 de 04

Fonte: Autor.

Figura 6.48: Autorização do CEP-UFV - Pág. 4

CEP Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos Universidade Federal de Viçosa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - UFV

Plataforma Brasil

Continuação do Parecer: 6.260.833

Outros	Diario_Oficial_Nomeacao_Ronan.pdf	15:44:31	Silva	Aceito
Outros	Diploma_especializacao.pdf	18/02/2023 15:43:10	Lucas Carvalho Silva	Aceito
Outros	Diploma_graduacao.pdf	18/02/2023 15:42:30	Lucas Carvalho Silva	Aceito
Cronograma	2023_Cronograma_Ronan_assinado.pdf	18/02/2023 15:40:41	Lucas Carvalho Silva	Aceito
Declaração de Pesquisadores	2023_Ronan_Declaracao_de_pesquisadores_assinado.pdf	18/02/2023 15:40:21	Lucas Carvalho Silva	Aceito
Folha de Rosto	folhaDeRosto_assinado.pdf	18/02/2023 15:35:24	Lucas Carvalho Silva	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

VICOSA, 25 de Agosto de 2023

Assinado por:
Érica nascif Rufino Vieira
(Coordenador(a))

Endereço: Universidade Federal de Viçosa, Avenida PH Rolfs s/n, Edifício Arthur Bernardes
Bairro: Campus Universitário **CEP:** 36.570-977
UF: MG **Município:** VICOSA
Telefone: (31)3612-2316 **E-mail:** cep@ufv.br

Página 04 de 04

Fonte: Autor.

Figura 6.49: Termo de Anuência da escola

COLÉGIO TIRADENTES DA PMMG - CTPM
UNIDADE NOSSA SENHORA DAS VITÓRIAS
RUA DOS PAMPAS, 767, PRADO - BH/MG
TELEFONE: 21239505

TERMO DE ANUÊNCIA

Eu, Thaís Couto de Oliveira, na qualidade de Diretora Pedagógica do Colégio Tiradentes, unidade Nossa Senhora das Vitórias, autorizo a realização da pesquisa intitulada USO DA SALA DE AULA INVERTIDA APOIADA POR TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA, a ser conduzida pelo Prof. Ronan Lucas de Souza, mestrando do PROFMAT-UFV/Florestal, sob orientação do Prof. Lucas Carvalho Silva, e declaro, que esta Instituição apresenta infraestrutura favorável à realização da referida pesquisa. Esta autorização só é válida no caso de haver parecer favorável do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa para a referida pesquisa.

COLÉGIO TIRADENTES / PMMG
1949
BELO HORIZONTE - NSV

Belo Horizonte, 04 de julho de 2023.

ThaísCouto

Thaís Couto
Diretora pedagógica
CTPM-NSV

Fonte: Autor.

Referências Bibliográficas

[1] Moreira G. E. Vieira L. B. Ortigão M. I. R. Lima, P. V. P. de. Brasil no pisa (2003-2018): reflexões no campo da matemática. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática, 3(2), 03–26. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12122*, 2020.

[2] MEC/CONSED/UNDIME. *Base Nacional Curricular (BNCC), 2018: Educação é a base.* Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 07 de março 2024.

[3] Teófilo Oliveira de Paula. O ensino de geometria analítica com o uso do geogebra. Master's thesis, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2013.

[4] Jonathan Bergmann and Aaron Sams. *Sala de Aula Invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem.* Editora LTC, 1ª edição edition, 2016.

[5] Hugo Luiz Gonzaga Honório and Liamara Scortegagna. Sala de aula invertida na prática: implementação e avaliação no ensino de matemática. *VI Congresso Brasileiro de Informática na Educação*, 2017.

[6] Janice Cassia Lando. O estudo dirigido no ensino de matemática no brasil. *XIII CIAM*, 2011.

[7] Rogério Joaquim Santana. As origens do estudo dirigido. *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática, V16, 89–93*, 2023.

[8] Edilene França Pareira e Sitko Camila Maria Lima, Valdineia Rodrigues; Sousa. Metodologias ativas de ensino e aprendizagem: Sala de aula invertida, instrução por colegas e júri simulado no ensino matemática. *Researt, Society and Development*, 2021.

[9] Sergio Lorenzato. *Para Aprender Matemática.* Autores Associados, 3ª edição edition, 2010.

[10] Paulo Alessandro Favacho Brito and Valdemir Cunha Oeiras. O uso do software de geometria dinâmica geogebra no ensino de geometria analítica no 3º ano do ensino médio. *VI Congresso Brasileiro de Informática na Educação and Anais do XXIII Workshop de Informática na Escola*, 2017.

[11] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* IMPA, 2014.

[12] Jorge Joaquin Delgado Gomez, Katia Rosenvald Frense, and Lhaylla dos Santos Crissaff. *Geometria Analítica.* SBM, 2017.

[13] Gelson Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, 7: Geometria Analítica*, volume 7. Ed. Atual, 6ª edição edition, 2013.

[14] Adilson Langen and lilian Cordeiro Brambia. *Prepara Positivo, Matemática.* Sistema de Ensino Positivo, 2022.