Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Roselaine Aparecida Silva

Lugares Geométricos com o GeoGebra

FLORESTAL – MINAS GERAIS

2024

ROSELAINE APARECIDA SILVA

LUGARES GEOMÉTRICOS COM O GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador(a): Justino Muniz Junior *(In Memoriam)*

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

S586
2024

Silva, Roselaine Aparecida, 1989-
Lugares geométricos com o GeoGebra / Roselaine Aparecida Silva. – Florestal, MG, 2024.
1 dissertação eletrônica (53 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Justino Muniz Júnior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2024.
Referências bibliográficas: f. 53.
DOI: https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2024.004
Modo de acesso: World Wide Web.

1. GeoGebra (Software). 2. Construções geométricas. I. Muniz Júnior, Justino, 1982-. II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

005.131

ROSELAINE APARECIDA SILVA

LUGARES GEOMÉTRICOS COM O GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 22 de fevereiro de 2024.

Assentimento:

Roselaine Aparecida Silva
Autor

P/ Justino Muniz Junior (*In Memoriam*)
Orientador

Dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus pais, irmã e sobrinhas que me acompanharam e auxiliaram nessa etapa. E aos professores do curso PROFMAT da UFV Florestal que com grande maestria me proporcionaram tantos conhecimentos novos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por essa oportunidade única de cursar a pós-graduação. À todos da minha família (pai, mãe, irmã e sobrinhas) que me auxiliaram no que podiam durante o curso. Aos professores da UFV Florestal pelos conhecimentos compartilhados. Aos meus amigos e colegas de profissão por cada incentivo e palavra amiga.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

SILVA, Roselaine Aparecida, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2024. **Lugares Geométricos com o GeoGebra**. Orientador(a): Justino Muniz Júnior (**In Memoriam**).

O conceito de Lugar Geométrico constitui-se como base para abordagem da Geometria, sendo ideia fundamental para discussão de propriedades geométricas de grande relevância. Um lugar geométrico é um conjunto de pontos do plano ou do espaço que admitem uma determinada propriedade, sendo que, todo ponto desse referido conjunto possui tal propriedade e todo ponto que possuir tal propriedade pertencerá ao lugar geométrico em questão. Alguns exemplos básicos de lugares geométricos são a circunferência, a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo, o arco capaz, as cônicas, entre outros. É possível identificar um lugar geométrico de forma analítica ou por meio de construções geométricas com régua e compasso ou ainda utilizando-se de recursos computacionais. Um desses recursos é o software GeoGebra, que pode ser um instrumento facilitador de todo processo das construções geométricas. Esse trabalho tem como principal objetivo, além de estudar o conceito de lugar geométrico, utilizar-se da tecnologia como instrumento facilitador e auxiliar ao professor. Para tanto, além de aplicações do tema na educação básica propõe-se uma atividade por meio da qual é possível construir no software GeoGebra um parabolóide semelhante às antenas chamadas de *"parabólicas"* a partir do lugar geométrico da parábola tão conhecida pelos estudantes apenas como uma forma de representação de uma função do segundo grau.

Palavras-chave: Geogebra; Lugares Geométricos; Construções Geométricas.

Abstract

SILVA, Roselaine Aparecida, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2024. **Geometric Places with the GeoGebra.**. Adviser: Justino Muniz Júnior (**In Memoriam**).

The concept of Geometric Place constitutes a basis for approaching Geometry, being an idea fundamental for discussing highly relevant geometric properties. A geometric locus is a set of points on the plane or space that admit a certain property, and, every point in that set has such a property and every point that has such a property will belong to the geometric locus in question. Some basic examples of geometric places are the circumference, the bisector of a segment, the bisector of an angle, the capable arc, the conics, between others. It is possible to identify a geometric place analytically or through geometric constructions with a ruler and compass or even using computational resources. One of these resources is the GeoGebra software, which can be an instrument that facilitates the entire process of geometric constructions. This work's main objective, in addition to studying the concept of geometric locus, is to use technology as a facilitating and auxiliary instrument for the teacher. To this end, in addition to applications of the theme in basic education, an activity is proposed through which it is possible to build in the GeoGebra software a paraboloid similar to the antennas called *"parabólicas"* from the geometric locus of the parabola as known to students only as a form of representation of a second degree function.

Keywords: Geogebra; Geometric Loci; Geometric Constructions.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α Letra grega Alfa

β Letra grega Beta

γ Letra grega Gama

Γ Letra grega Gama (maiúscula)

δ Letra grega Delta

ϵ Letra grega Épsilon

η Letra grega Eta

π Letra grega Pi

$\in$ Pertence

$\notin$ Não pertence

$\angle$ Ângulo

$\equiv$ Congruência

$\Leftrightarrow$ Bicondicional

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O ensino de Matemática atual requer um esforço por parte dos professores no que se refere às formas de facilitar os objetos do conhecimento do ponto de vista da contextualização e visualização dos mesmos, tendo em vista que tal ciência é rotulada como difícil e de compreensão complexa. É preciso ressaltar também os inquestionáveis impactos que o período da pandemia, no qual o ensino remoto perdurou por dois anos consecutivos, trouxe à educação.

Temos ainda que muitos conceitos básicos de Geometria são desconexos do campo da álgebra e aritmética o que também dificulta a compreensão por parte dos discentes. E esse ponto é uma das competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3]:

"Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade)".

Outra competência da BNCC importante a ser ressaltada é:

"Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados."

Tendo em vista os pontos destacados acima, buscando uma ferramenta que possa auxiliar professores e estudantes no processo de compreensão de conceitos matemáticos utilizando-se da ferramenta das construções geométricas como recurso para visualização e a ferramenta tecnológica como facilitadora, o presente trabalho recorre ao software GeoGebra[9]. De modo a propiciar diferentes abordagens a alunos da educação básica, visto que o estudo da Geometria na grande maioria das escolas é tido como complexo e obsoleto.

Desse modo, visamos o estudo de lugares geométricos por meio de construções geométricas. Temos como objetivo desenvolver algumas construções geométricas básicas para aplicabilidade na identificação de lugares geométricos utilizando-se para tanto do software (GeoGebra) para uma melhor visualização desses objetos. Faremos também uma análise crítica de como o assunto é tratado na Educação Básica (quando é o caso) e, por fim, apresentaremos uma proposta de atividade de possível aplicabilidade em sala de aula.

A metodologia de pesquisa se resume a buscarmos na literatura especializada informações necessárias para um bom entendimento do conceito de lugares geométricos, buscando também problemas interessantes envolvendo o assunto.

Portanto, as páginas que seguem foram organizadas buscando de forma simples e objetiva para, primeiramente, apresentar a definição de lugar geométrico: alguns exemplos de lugares geométricos básicos e de que forma esse conceito é abordado na educação básica. Posteriormente, explanamos sobre as construções geométricas e a utilização do software GeoGebra, descrevemos seis exemplos de exercícios nos quais as costruções geométricas por meio de tal software foram facilitadoras para a compreensão. Finalmente, propomos uma atividade que pode ser utilizada em sala de aula para alunos da 1ª série do Ensino Médio tendo como recurso predominante o software GeoGebra. Para tanto, optamos por evidenciar a aplicabilidade dos conceitos e construções sem um enfoque minucioso da parte axiomática.

Em todos os tópicos abaixo as imagens referentes às construções geométricas e resoluções foram elaboradas no software GeoGebra versão Classic 6.0 ou diretamente na página da internet disponível em [9].

2

O conceito de lugar geométrico e sua abordagem na educação básica

Na abordagem da Geometria o conceito de lugar geométrico é de suma importância, uma vez que por meio dele é possível ter exatidão para conjecturar várias outras propriedades matemáticas. Dessa forma, procuramos nesse capítulo descrever o conceito de lugar geométrico de forma sucinta. Citamos, em seguida, alguns exemplos essenciais de lugares geométricos e por fim, buscamos algumas informações de que forma esse conceito está presente na educação básica.

2.1 Lugar geométrico: definição

Um lugar geométrico (LG) é um conjunto de pontos e, assim como todo conjunto, é preciso ser bem definido.

Definição 1: Se um ponto P possui uma propriedade $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as posições que P pode assumir (do plano ou do espaço) que possuem a propriedade $\mathcal{P}$ é chamado de Lugar Geométrico da propriedade $\mathcal{P}$. [14]

Analogamente, na apostila do programa de iniciação científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) [15], observamos que o lugar geométrico também é definido como um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade. Deste modo, uma figura descrita por uma propriedade é um lugar geométrico se todos os seus pontos admitem tal propriedade e, somente se, os pontos da figura têm essa propriedade.

Desta forma, "$\mathcal{L}$ é lugar geométrico de propriedade $\mathcal{P}$ se $\mathcal{L}$ for constituído exatamente pelos pontos que têm a propriedade $\mathcal{P}$" [11].

Portanto, e conforme referências citadas anteriormente, temos que Lugar Geométrico (LG) é um conjunto de pontos do plano ou do espaço que admitem uma determinada propriedade, sendo que, todo ponto desse referido conjunto possui tal propriedade e todo ponto que possuir tal propriedade pertencerá ao lugar geométrico em questão.

2.2 Alguns exemplos de lugares geométricos

Alguns exemplos básicos de lugares geométricos são a circunferência, a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo, o arco capaz, as cônicas, dentre outros. É possível identificar um lugar geométrico de forma analítica ou por meio de construções geométricas com régua e compasso ou ainda utilizando-se de recursos computacionais.

2.2.1 A circunferência

Definição 2: Sejam r um número real positivo e O um ponto do plano, a circunferência (Γ) é o lugar geométrico dos pontos do plano, situados a distância r do ponto O.

Temos assim que, sendo A um ponto pertencente à circunferência e $\overline{AO}$ a medida do segmento com extremidades nos pontos A e O, tal que

$$\overline{AO} = r \Leftrightarrow A \in \Gamma(O, r)$$

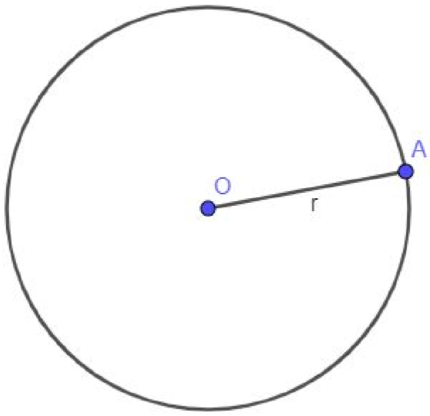

Figura 2.1: Circunferência como LG
Fonte: Elaborado pela autora.

Portanto, se $A \in \Gamma(O, r)$ temos que $\overline{AO} = r$. Reciprocamente, se $\overline{AO} = r$ temos que $A \in \Gamma(O, r)$.

2.2.2 A mediatriz de um segmento

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular ao mesmo e que passa por seu ponto médio.

Desse modo, reescrevendo tal conceito como um lugar geométrico, temos:

Definição 3: Sejam dois pontos A e B no plano, o LG dos pontos do plano que equidistam de A e de B é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Utilizando régua e compasso, para traçarmos a mediatriz de um segmento é preciso construir duas circunferências de mesmo raio cujos centros estejam em A e B, respectivamente, e ao ligar os pontos de instersecções dessas circunferências temos o segmento perpendicular ao ponto médio de $\overline{AB}$. Ressalta-se que é importante que a abertura do compasso para a construção das circunferências seja maior do que a metade do comprimento de $\overline{AB}$.

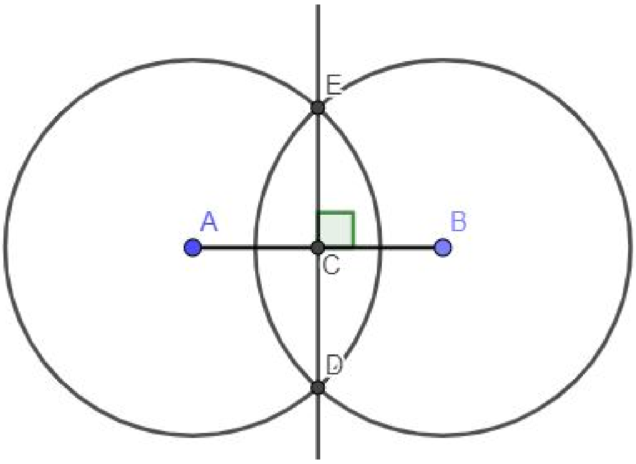

Figura 2.2: Construção da mediatriz de um segmento.
Fonte: Elaborado pela autora.

Utilizando um simples comando, o software GeoGebra já realiza todo o processo de forma precisa. Basta traçarmos o segmento e posteriormente clicarmos no comando mediatriz, que o dividirá ao meio com exatidão e de forma perpendicular. Sendo possível ainda observar a equidistância dos pontos pertencentes à mediatriz aos extremos do segmento.

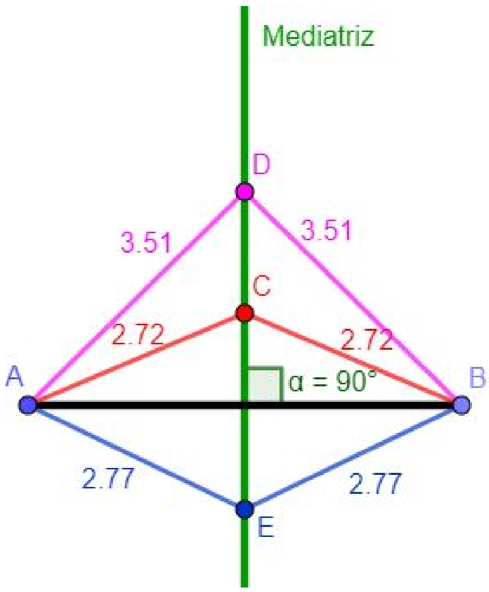

Figura 2.3: Mediatriz: equidistância de seus pontos aos extremos do segmento.
Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, seja P um ponto do plano e m a mediatriz de um segmento de reta $\overline{AB}$ também do plano temos que:

$$P \in m \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$$

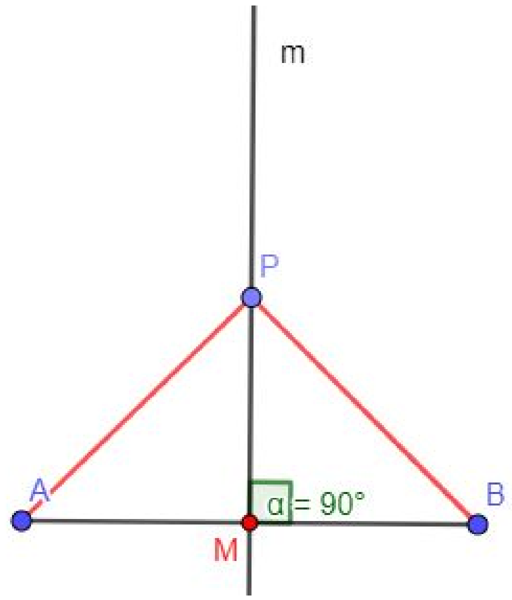

Figura 2.4: Mediatriz como LG
Fonte: Elaborado pela autora.

De fato, consideremos primeiramente que se $P \in m$, o triângulo formado pelos pontos P, A e B possui $\overline{PM}$ como altura e mediana pois, o triângulo PAB é isósceles de base $\overline{AB}$. Logo, $\overline{PA} = \overline{PB}$

Reciprocamente, se $\overline{PA} = \overline{PB}$ temos que o triângulo PAB é isósceles de base $\overline{AB}$. Segue-se então que a mediana e a altura relativas à $\overline{AB}$ coincidem. Sendo $\overline{PM}$ a mediana, segue-se que $\overline{PM}$ é perpendicular à $\overline{AB}$. Portanto, $\overline{PM}$ está na mediatriz de $\overline{AB}$. Logo, $P \in m$.

2.2.3 A bissetriz de um ângulo

Na educação básica, o conceito de bissetriz é trabalhado como uma semirreta que divide um ângulo ao meio. É possível provar também, que todo ponto pertencente a essa semirreta, que é a bissetriz, equidista de ambos os lados do ângulo.

Desse modo, conceituando bissetriz como um lugar geométrico, temos:

Definição 4: Seja um ângulo $\angle AOB$ dado. A bissetriz de $\angle AOB$ é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a ambos os lados desse ângulo.

Como os pontos pertencentes à bissetriz são equidistantes dos lados do ângulo, consequentemente fará com que a medida do ângulo em questão seja dividida pela metade. Assim, temos que:

$$d(P, \overline{OA}) = d(P, \overline{OB}) \Leftrightarrow P \in (\text{bissetriz de } \angle AOB)$$

Desse modo, para verificação, traçamos a partir do ponto P as perpendiculares aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ passando pelos pontos N e M, respectivamente.

Se $P \in$ à bissetriz de AOB, temos que que os triângulos OPN e OPM são congruentes pelo caso lado, ângulo e ângulo oposto. Pois, ambos são triângulos retângulos, com lado $\overline{OP}$ comum e ângulos $\angle NOP$ e $\angle MOP$ com mesma medida. Devido a essa congruência temos que $\overline{PN} = \overline{PM}$ e portanto, $d(P, \overline{OA}) = d(P, \overline{OB})$.

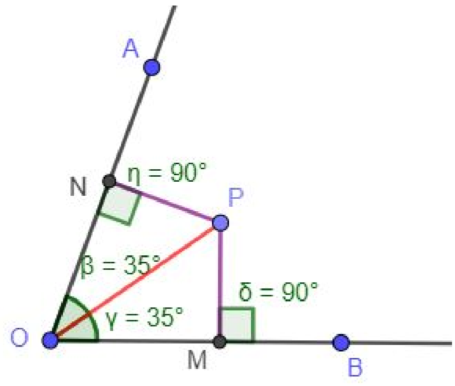

Figura 2.5: Bissetriz como LG
Fonte: Elaborado pela autora.

Reciprocamente, se P é um ponto interior ao ângulo $\angle AOB$ tal que $\overline{PN} = \overline{PM}$ temos que os triângulos OPN e OPM são retângulos, com lado $\overline{OP}$ comum. Aplicando o teorema de Pitágoras a ambos os triângulos é possível concluir que $\overline{OM} = \overline{ON}$. Desse modo, os triângulos OPN e OPM são congruentes e por isso, os ângulos $\angle MOP$ e $\angle NOP$ também são congruentes. Então, temos assim que $P \in$ à bissetriz de $\angle AOB$.

2.2.4 O arco capaz

O conceito de arco capaz é um conceito geométrico de grande relevância para a resolução de diversos problemas matemáticos. Sua construção com o uso de régua e compasso pode ser muitas das vezes demorada. A utilização do software GeoGebra traz agilidade e facilidade para a visualização dos objetos em questão. Uma vez que o arco capaz é o conjunto de pontos do plano capazes de "enxergarem" um segmento de reta $\overline{AB}$ por um mesmo ângulo α.

Definição 5: Dados um segmento $\overline{AB}$ e um ângulo α, com $0° < \alpha < 180°$, o LG dos pontos P do plano tais que $\angle APB = \alpha$ é a reunião de dois arcos de círculo, simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são os arcos capazes de α em relação a $\overline{AB}$.

Logo, o arco capaz do segmento $\overline{AB}$ e ângulo α é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o ângulo $\angle APB$ mede α. Sendo α maior que 0° e menor que 180°. O conjunto desses pontos formam assim dois arcos de círculo simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$, conforme figura 2.6. Destamos porém, que os pontos A e B não pertencem a este lugar geométrico.

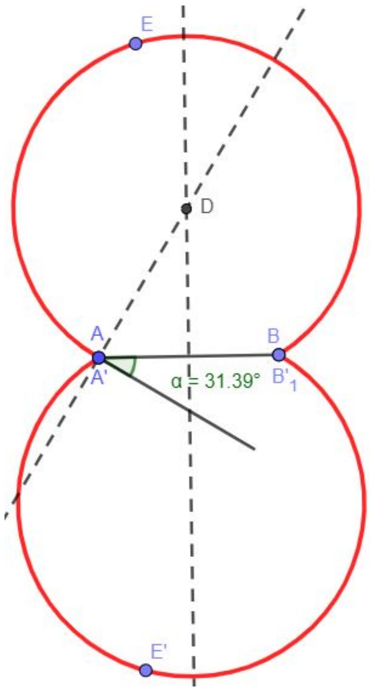

Figura 2.6: Simetria do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.

Desse modo, a construção de um arco capaz requer os seguintes passos:
1º) Dado um segmento $\overline{AB}$ e um ângulo α;

Figura 2.7: Primeiro passo para construção do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.

2º) A partir de um dos extremos do segmento $\overline{AB}$, transporta-se o ângulo α;

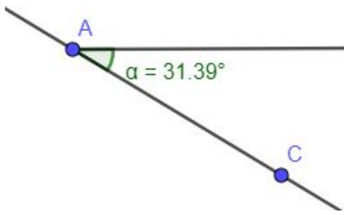

Figura 2.8: Segundo passo para construção do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.

3º) Traça-se a perpendicular ao segundo lado do ângulo passando pelo seu vértice e também a mediatriz do segmento $\overline{AB}$;

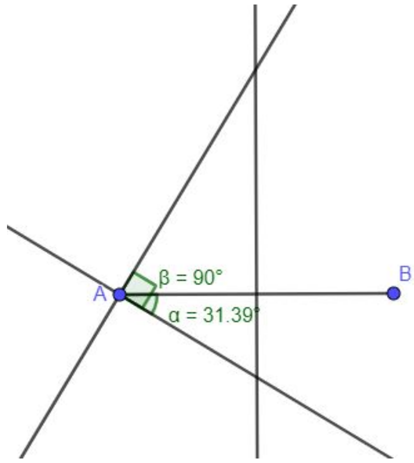

Figura 2.9: Terceiro passo para construção do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.

4º) Com o comando ponto (interseção de dois objetos) marca-se um ponto no encontro da perpendicular com a mediatriz o qual será o centro da circunferência cujos os pontos A e B pertencem;

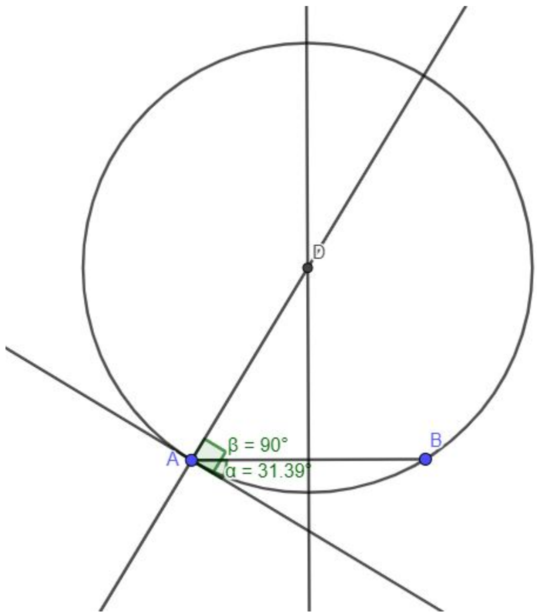

Figura 2.10: Quarto passo para construção do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.

A circunferência construída é dividida em dois arcos simétricos a partir da reta que contém o segmento $\overline{AB}$ (ver figura 2.6). Ao marcar um ponto E qualquer desse arco e ligá-lo por segmentos de reta aos pontos A e B o ângulo $\angle AEB$ é congruente ao ângulo descrito no segundo passo. As imagens abaixo são exemplos de construções feitas no GeoGebra com os passos acima descritos. No qual ainda é possível movimentar o ponto E sem modificação da amplitude do ângulo $\angle AEB$. E também pela habilitação da propriedade de rastro do ponto E conforme figura 2.12 deslocando-se o ponto em todo o arco $\overset{\frown}{AB}$ o ângulo permanece inalterado, fato esse que se justifica pelo teorema do ângulo inscrito.

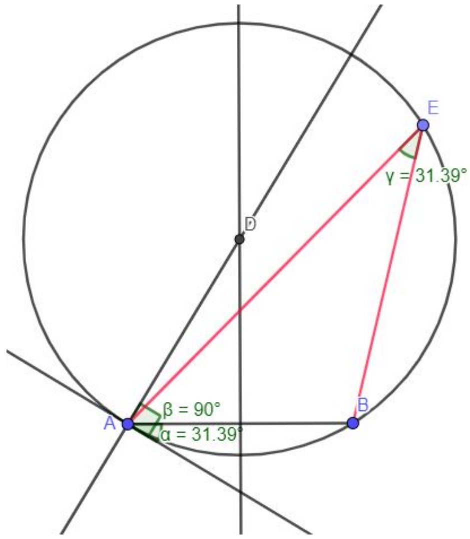

Figura 2.11: Quinto passo para construção do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.

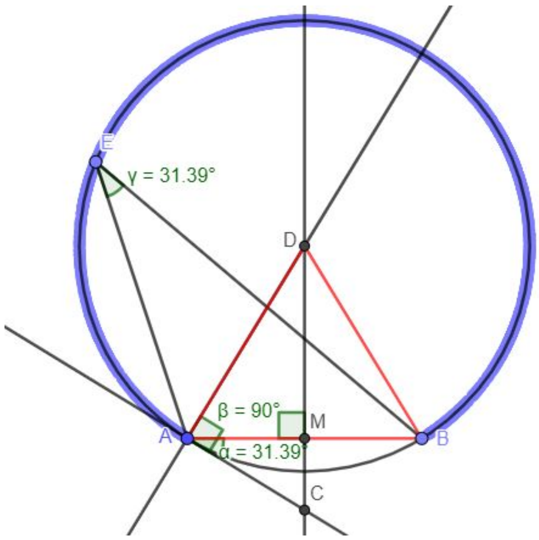

Figura 2.12: Sexto passo para construção do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/quuz73ag

Notemos que o ângulo $\angle MAD$ é complementar do ângulo α, desse modo, temos que no triângulo retângulo MAD o ângulo $\angle ADM$ também mede α, uma vez que a soma dos ângulos internos resulta em 180º. Temos ainda que o ponto D pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e, por isso, o segmento $\overline{DA}$ possui mesmo comprimento que o segmento $\overline{DB}$. Desse modo, o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{AB}$ logo, o ângulo $\angle MDB$ também mede α, consequentemente o ângulo $\angle ADB$ mede 2α. Como o ângulo $\angle ADB$ possui o vértice localizado no centro da circunferência, a medida do arco correspondente também é de 2α. O ângulo $\angle AEB$ é inscrito à circunferência e como sabemos, a medida de um ângulo inscrito numa circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente, temos então que a medida do ângulo $\angle AEB$ é metade do arco $\widehat{AB}$ cuja medida é de 2α, portanto, o ângulo $\angle AEB$ também tem medida α.

2.2.5 As cônicas

As seções cônicas são figuras planas obtidas por meio da interseção de um plano com um cone de revolução. Tendo esse plano determinadas posições específicas tal interseção pode resultar em um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes, uma circunferência, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Os três primeiros são os chamados casos degenerados. Detalharemos aqui os casos não degenerados: parábola, elipse e hipérbole, uma vez que a circunferência é um caso específico de elipse.

De forma geral as seções cônicas são definidas como:

Definição 6: Sejam dados um ponto F e uma reta d, tais que $F \notin d$. Para $\epsilon > 0$ também dado, definimos a **cônica** de **foco** F, **diretriz** d e **excentricidade** ϵ como a curva formada pelos pontos P do plano tais que

$$\overline{PF} = \epsilon.dist(P; d),$$

onde dist(P; d) denota a distância de P à reta d. O **parâmetro** da cônica é a distância p de F a d.

Desse modo, a parábola enquanto lugar geométrico é um conjunto de pontos do plano que equidistam de uma reta d *(diretriz)* e de um ponto F denominado *foco* cuja excentricidade é igual a 1 ($\epsilon = 1$).

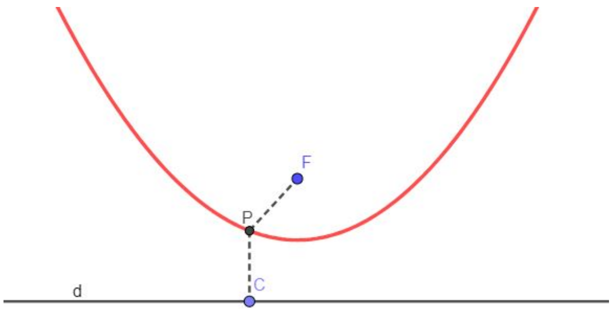

Figura 2.13: Parábola como LG.
Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, a distância do foco à reta diretriz é um segmento perpendicular cujo ponto médio é o vértice da parábola e o ponto da curva que possui menor distância de F e de d, pontos estes pelos quais passa o eixo de simetria dessa parábola.

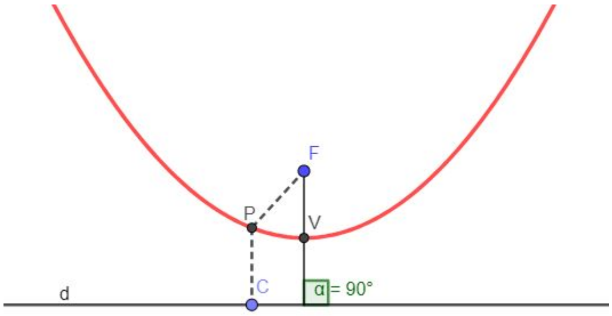

Figura 2.14: Vértice da parábola.
Fonte: Elaborado pela autora.

Dessa forma, fixando o sistema de coordenadas cartesianas, temos que a distância do foco ao vértice é igual a distância do vértice à reta diretriz, o que é denominado parâmetro. No presente trabalho representaremos o parâmetro por p.

Portanto, sendo as coordenadas do vértice $V = (X_v, Y_v)$ o foco tem coordenadas $F = (X_v, Y_v + p)$ e a reta diretriz tem equação $y = Y_v - p$. Considerando nesse caso específico que a parábola tem concavidade voltada para cima e, por conseguinte, a reta diretriz é paralela ao eixo das abscissas que é o caso mais comum de estudo na educação básica. Os demais casos são análogos, dependendo apenas da posição da reta diretriz.

Como a distância de qualquer ponto da parábola ao foco é igual à distância desse mesmo ponto à reta diretriz, tomemos desse modo um ponto P=(x, y) qualquer pertencente à parábola de parêmtro p e foco $F = (X_v, Y_v + p)$ e também a respectiva projeção ortogonal de P sobre a reta diretriz $P' = (x, y_v - p)$.

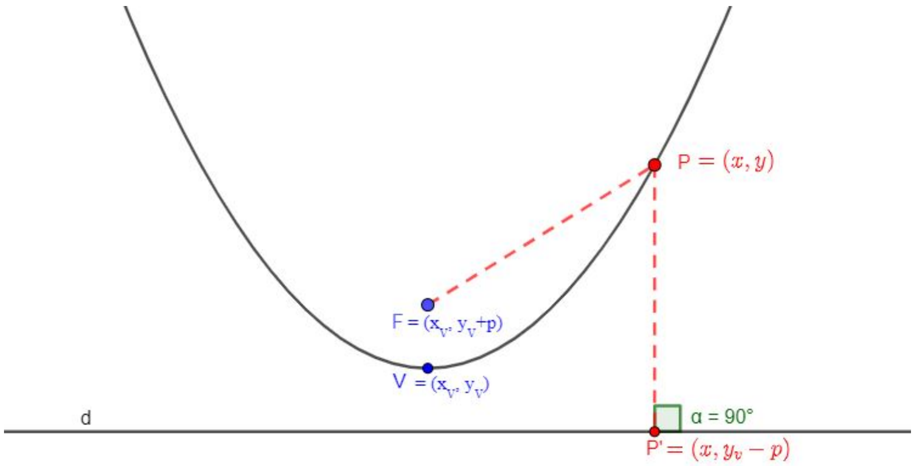

Figura 2.15: Parábola e seus elementos para demonstração da equação geral.
Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, se $Dist(P; F) = Dist(P; P')$ então podemos calcular tais distâncias de modo que:

$$Dist(P; F) = Dist(P; P')$$

$$\sqrt{(x-x_v)^2+\big(y-(y_v+p)\big)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\big(y-(y_v-p)\big)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis obtemos:

$$(x-x_v)^2+y^2-2y(y_v+p)+(y_v+p)^2=y^2-2y(y_v-p)+(y_v-p)^2$$

$$(x-x_v)^2+y^2-2yy_v-2py+(y_v+p)^2=y^2-2yy_v+2py+(y_v-p)^2$$

Agrupando os termos semelhantes no segundo membro, resulta-se em:

$$(x-x_v)^2=4py-(y_v+p)^2+(y_v-p)^2$$

Novamente desenvolvendo os produtos notáveis do segundo membro e adicionando os termos semelhante temos:

$$(x-x_v)^2=4py-4py_v$$

Colocando em evidência o termo $4p$ no segundo membro concluimos que:

$$(x-x_v)^2=4p(y-y_v) \tag{2.1}$$

Essa é a equação geral de uma parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo das abscissas e concavidade voltada para cima. As demais posições são análogas e não serão detalhadas aqui.

As parábolas possuem uma propriedade importante denominada propriedade refletora, a qual está relacionada ao foco. Sendo que raios incidentes à parábola de forma paralela ao seu eixo de simetria são refletidos e direcionados ao seu foco (Figura 2.16). Analogamente, se uma fonte de luz estiver localizada no foco da parábola, seus raios refletirão de forma paralela ao seu eixo de simetria (Figura 2.17).

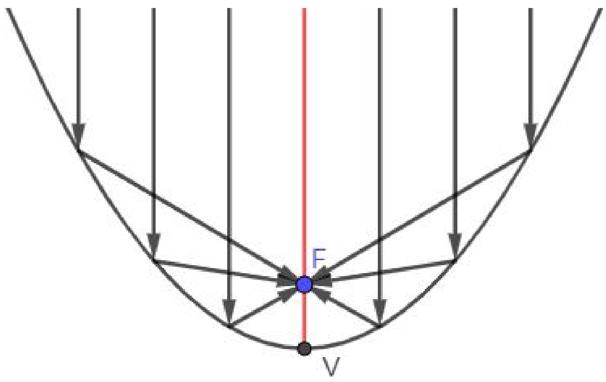

Figura 2.16: Propriedade refletora da parábola - I.
Fonte: Elaborado pela autora.

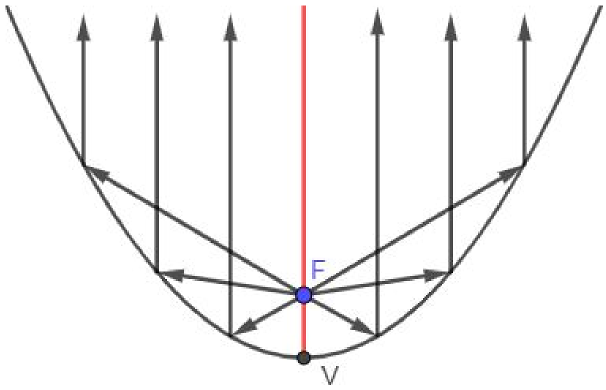

Figura 2.17: Propriedade refletora da parábola - II.
Fonte: Elaborado pela autora.

Definição 7: Ao fixarmos dois pontos F_1 e F_2 no plano e um número real positivo a tal que $2a > \overline{F_1F_2}$ a elipse é o lugar geométrico dos pontos (P) do plano tais que

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \text{ e } 0 < \epsilon > 1$$

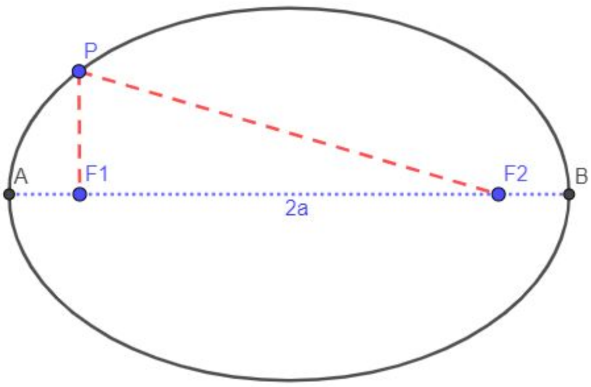

Figura 2.18: Elipse como LG
Fonte: Elaborado pela autora.

Observemos que a elipse possui dois eixos perpendiculares, sendo um deles chamado de eixo maior o qual contém os focos, e outro eixo denominado de eixo menor e que intercepta o eixo maior no centro da elipse. Denotando assim, a metade da medida do eixo menor por b, a distância do centro a um dos focos por c e a metade da medida do eixo maior por a, é possível verificarmos a relação pitagórica $b^2 + c^2 = a^2$. E considerando um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à elipse cujo centro é dado por $F = (x_0, y_0)$ podemos descreve-lá por meio da equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{2.2}$$

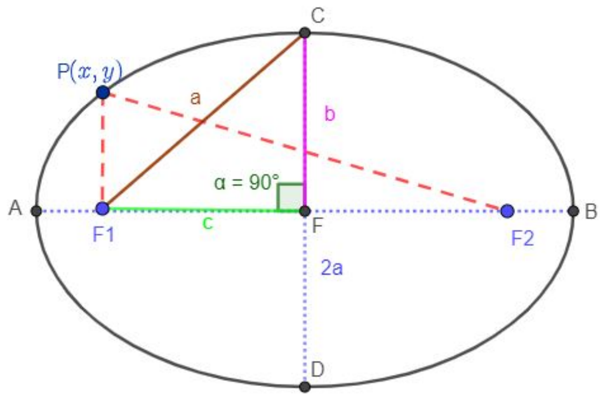

Figura 2.19: Elementos da Elipse
Fonte: Elaborado pela autora.

Nos casos em que *2a*< $\overline{F_1F_2}$ o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

é denominado hipérbole de focos F_1 e F_2 associada ao número real *2a* e excentricidade maior que 1 ($\epsilon > 1$).

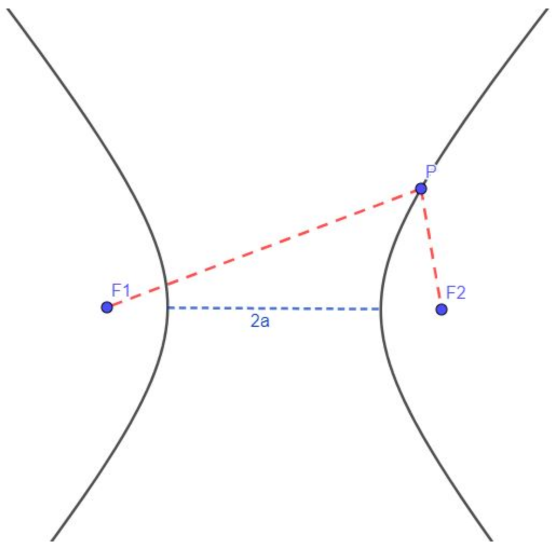

Figura 2.20: Hipérbole como LG.
Fonte: Elaborado pela autora.

Consideremos alguns elementos constituintes da hipérbole, que são:

Centro da hipérbole, na imagem abaixo, denotado por F e localizado no ponto médio do segmento de reta cujas extremidades são os focos (eixo focal);

A distância do centro à um dos focos denotada por c;

A distância do vértice de um dos ramos da hipérbole ao centro denominada por a;

Um eixo chamado *imaginário* perpendicular ao centro da hiperbóle sobre qual é válida a relação pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2$.

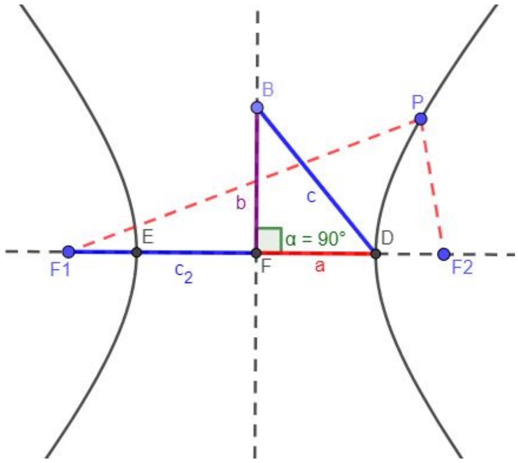

Figura 2.21: Elementos da hipérbole.
Fonte: Elaborado pela autora.

O eixo focal pode estar paralelo ao eio das abscissas bem como ao eixo das ordenadas, por isso, temos duas situações, sendo:

Equação da hipérbole quando o eixo focal é paralelo ao eixo das abscissas:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{2.3}$$

Equação da hipérbole quando o eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \tag{2.4}$$

2.3 Abordagem na Educação Básica

Em [12], Pavanello destaca as várias aptidões que os alunos conseguem desenvolver por meio do ensino de Geometria, como a construção de um pensamento que favoreça a compreensão e a organização do mundo em que vivem, a criatividade, capacidade de abstração, dentre outras. A autora também aponta que alguns estudos mostram que, nas escolas de educação básica, a maioria dos alunos não conseguem boa pontuação em questões que envolvem conceitos geométricos, ou seja, não é comum trabalhar questões desse tipo em sala de aula ou são trabalhadas de forma insatisfatória. Desse modo, é necessário que os professores tenham conhecimento do conteúdo geométrico a ser ministrado e que se estabeleça uma conexão entre a Geometria e os outros campos do conhecimento, trabalhando a partir das representações dos alunos.

Dentro do campo da Geometria, salientamos aqui como o conceito de lugar geométrico é abordado nas práticas pedagógicas do ensino básico. Esse é um dos questionamentos motivadores do presente trabalho visto a importância do mesmo para a compreenssão de muitas propriedades geométricas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento norteador mais atual das habilidades a serem trabalhadas na Educação, após análise das habilidades sugeridas para os Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, verificamos que apenas duas citam o conceito de lugar geométrico, sendo uma referente ao sétimo ano e outra ao oitavo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental. São elas:

(EF07MA22) "Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes [3]".

(EF08MA17) "Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas [3]".

Das habilidades referente ao Ensino Médio destaca-se a resolução de problemas por meio de funções polinomiais podendo utilzar-se de tecnologias digitais, como softwares:

(EM13MAT302) "Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais [3]".

(EM13MAT406) "Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra [3]".

Portanto, tanto nas habilidades bem como nas competências Matemáticas apresentadas na BNCC, temos a indicação de utilização de recursos tecnológicos para o ensino de Matemática. Sabemos também do crescente acesso às tecnologias, ainda mais depois de um mundo pós pandêmico, no qual as formas de ensino foram revolucianadas significativamente devido as práticas de ensino a distância.

É preciso salientar também que vários conceitos importantes e necessários para um estudo da Geometria estão ausentes dos atuais livros didáticos. Como também o estudo da Geometria Plana que muitas vezes fica restrito ao oitavo e/ou nono ano da educação básica. Desse modo, tópicos úteis não são trabalhados conforme necessitam.

As construções geométricas estão intimamente relacionadas a ideia de lugar geométrico. Porém, a cada ano letivo esse recurso é menos utilizado. São poucas as escolas e/ou professores que se favorecem com tal prática.

Assim, na educação básica espera-se que o conceito de lugar geométrico seja tabalhado como circunferência, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento nos anos finais do Ensino Fundamental. No Ensino Médio além do estudo das cônicas, em Geometria Analítca, temos também as representações geométricas das funções.

Dos exemplos de lugares geométricos mais comuns citados acima a parábola que é tão conhecida dos estudantes do Ensino Médio é identificada por eles como uma forma de representação geométrica de uma função do segundo grau. E se resume nesse único fato. Porém, o que muitos estudantes e até mesmo educadores não têm clareza é que o conhecimento de tal cônica e seus elementos trouxe uma revolução à sociedade, sendo que as antenas de captação de sinais do espaço, como por exemplo, as antenas chamadas de *parabólicas*, os faróis de automóveis, os espelhos dos telescópios estão fundamentados na propriedade refletora das cônicas. Ou seja, no caso das antenas, os sinais recebidos pelo espaço são fracos, de forma que precisa de uma área grande de recepção e sua concentração em um único ponto para amplificação, sendo tal área a região interna de uma parábola e tal ponto o foco da mesma. Desse modo, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola, é refletido e posteriormente se direciona ao foco.

Outra cônica que possui propriedade similar à das parábolas e de grande relevância é a Elipse, que na educação básica fica reservada ao estudo da Geometria Analítica que quando ocorre é de forma bastante superficial e sem até mesmo citar o fato de que as propriedades refletora e bissetora da elipse são utilizadas em tratamentos de radioterapia. Uma vez que tais propriedades permitem concentrar os raios luminosos em determinado ponto, evitando que os raios afetem os tecidos saudáveis. Pois, pela definição de elipse, temos que a soma das distânicas de um ponto da curva aos focos é constante, o que faz com que toda luz ou som emitido em um dos focos, sofra reflexão e se dirija ao outro foco, percorrendo a mesma distância em igual tempo.

A propriedade refletora das hipérboles por sua vez, é utilizada em telescópios óticos e também em radiotelescópios. O telescópio refletor é, essencialmente, um espelho parabólico no fundo de um tubo. Os raios provenientes de um corpo celeste distante formam um feixe paralelo, que se reflete no espelho e vai formar a imagem do objeto no foco da parábola. A utilização de um espelho hiperbólico entre o espelho parabólico e o foco da parábola, permite que os raios que iriam formar a imagem no foco da parábola sejam novamente refletidos e vão formar essa imagem no outro foco da hipérbole.

3

Construções geométricas e a utilização do GeoGebra

As construções geométricas tiveram início na Grécia antiga e foram de suma importância no desenvolvimento da Matemática, sendo instrumento de grande utilidade tanto para o ensino da Geometria quanto da Álgebra. São também essenciais para o aprendizado de conceitos geométricos. Uma vez que os problemas que envolvem construções geométricas são imprescindíveis para elaboração de hipóteses e consequentemente levam à descoberta de novas propriedades.

Um problema que envolve a construção geométrica dificilmente terá solução única, exige uma análise, planejamento e posteriormente a construção em si, a partir da qual é possível inferir conclusões que precisam ser compatíves com os dados fornecidos. Porém, esse tópico está cada vez mais ausente dos currículos escolares, bem como a Geometria de uma forma geral. Muitos livros didáticos abordam esse conteúdo em capítulos específicos e desconexos dos demais conteúdos e que, geralmente, vêm no final dos livros e quase sempre nem são trabalhados devido ao tempo, falta de aptidões por parte dos professores, dentre outros motivos. Um exemplo simples da desconexão entre Geometria e Álgebra é a interpretação geométrica de equações algébricas.

As construções com régua e compasso remotam ao século V a.C, e para a Matemática grega foram de importância inigualável. Já por volta do século III a.C as grandezas começaram a ser associadas a segmentos de retas ao invés de números, sendo que a ideia de número real seria construída anos seguintes. Dessa forma, a álgebra passou a ser tratada de forma geométrica. Assim, o que hoje são cálculos e resoluções, naquela época era análogo à construir. Ao longo do tempo, as construções geométricas permaneceram sem modificações, no entanto, não perderam sua utilidade. O professor Eduardo Wagner [16] cita, inclusive, no prefácio do livro *"Construções Geométricas"* que o computador é a versão moderna da régua e do compasso.

Nesse sentido, temos várias ferramentas que a tecnologia trouxe-nos para agilizar e facilitar tais construções como aplicativos, softwares, ferramentas de uso on-line dentre várias outras. Especificamente para construções geométricas e respectiva parte algébrica, um software que está sendo muito utilizado no mundo inteiro é o

GeoGebra.

O software GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica, livre, prático e de fácil utilização sendo que pode estar disponível em várias plataformas bem como sua utilização de forma on line. Combina conceitos de Geometria e Álgebra, sendo que é possível visualizar uma interface geométrica e outra algébrica e inserindo uma informação em um desses campos é feito sua correspondência para o outro, o que auxilia e facilita as práticas pedagógicas que abordam conceitos abstratos, elaboração e investigação de hipóteses e conjecturas do campo geométrico e/ou algébrico além de estimular o processo criativo bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico. Os aspectos geométricos podem ser observados tanto de forma bidimensional quanto tridimensional.

No artigo sobre o estudo das cônicas com o auxílio de Geometria dinâmica de José Carlos de Souza Júnior e Andréa Cardoso presente no livro *"Geometria em Sala de Aula"* de Ana Catarina P. Hellmeister [8] temos que os mesmos concluem que, adaptar ao meio computacional as técnicas de desenho geométrico faz com que tais construções sejam rápidas e precisas. Além disso, é possível manipular os objetos construídos sem alteração das definições estabelecidas, o que pode facilitar na observação de padrões, instigar e posteriormente validar conjecturas.

O desenvolvimento desse software teve como objetivo ensino e aprendizagem em matemática para os variados níveis de ensino. Atualmente, considerando ainda a revolução no ensino no mundo moderno pós pandemia que provocou um ensino a distância por longo período, o manuseio de ferramentas digitais se tornou indispensável e de suma importância tanto para doscentes quanto para discentes que cada dia mais recorrem a ferramentas como essa na busca de faciliar, observar e validar informações.

Vale ressaltar ainda que para a exploração dessa ferramenta em uma sala de aula de ensino presencial não é necessário muitos recursos tecnológicos, uma vez que existem versões para celulares e tablets ou ainda a utilização pelo site de forma on line.

3.1 Alguns exemplos

Dentre os inúmeros exercícios nos quais é possível utilizar o software GeoGebra para construções geométricas e manipulação dos instrumentos com finalidade de analisar, conjecturar e explorar conceitos matemáticos foram selecionados seis problemas não por níveis de complexidade e/ou exigência mas, sim devido o software ter sido o instrumento facilitador de todo processo que se tornou simples, prático e fácil, que é um dos objetivos do presente trabalho.

3.1.1 Exemplo 1 - LG do vértice A do triângulo ABC.

O exercício proposto abaixo foi extraído da seção 3.1 de [11].

Identifique o LG do vértice A do triângulo ABC, conhecidas as posições dos vértices B e C e o comprimento m_a da mediana relativa ao lado BC.

Para alunos do ensino básico o enunicado acima pode ser compreendido primeiramente de forma equivocada como única a localização do ponto A. Porém, esse fato pode ser de fácil percepção com a visualização da imagem e sua manipulação.

Recorrendo de forma prática ao software GeoGebra, com as informações dadas, devemos traçar o segmento $\overline{BC}$ com comprimento fixo, em seguida com o comando "ponto médio ou centro" marca-se o ponto médio M do segmento $\overline{BC}$. A partir do ponto M, traça-se o segmento de comprimento fixo cuja extremidade é o ponto A. Temos assim, os segmentos $\overline{MA}$ e $\overline{BC}$ ambos com comprimento fixo. Manipulando a localização do ponto A com o comando "mover" e, com a opção de habilitar rastro, observa-se que a trajetória descrita por tal ponto é uma circunferência cujo raio é $\overline{MA}$.

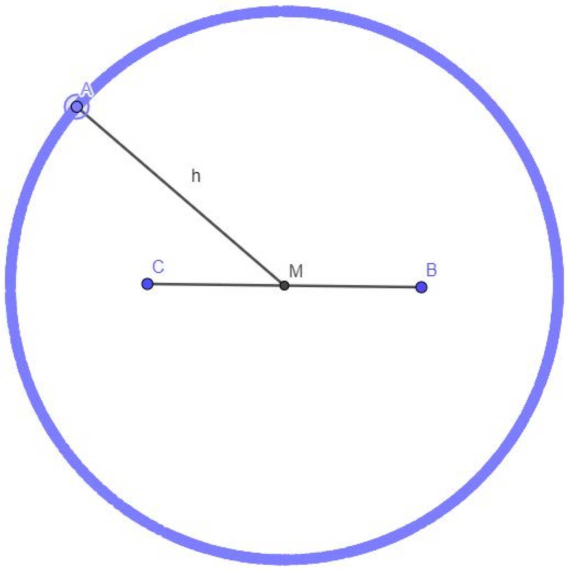

Figura 3.1: LG do vértice A.
Fonte: Elaborado pela autora.

3.1.2 Exemplo 2 - Arco capaz

Em um triângulo ABC, o lado BC é fixo e o ângulo A é constante dado. Determine o LG do ortocentro do triângulo ABC.

Sabemos que o ortocentro de um triângulo é a interseção das três alturas, relativas aos vértices A, B e C, neste caso. Primeiramente, é necessário constuir o arco capaz do ângulo $\hat{A}$ em relação ao segmento $\overline{BC}$, os quais terão comprimentos fixos.

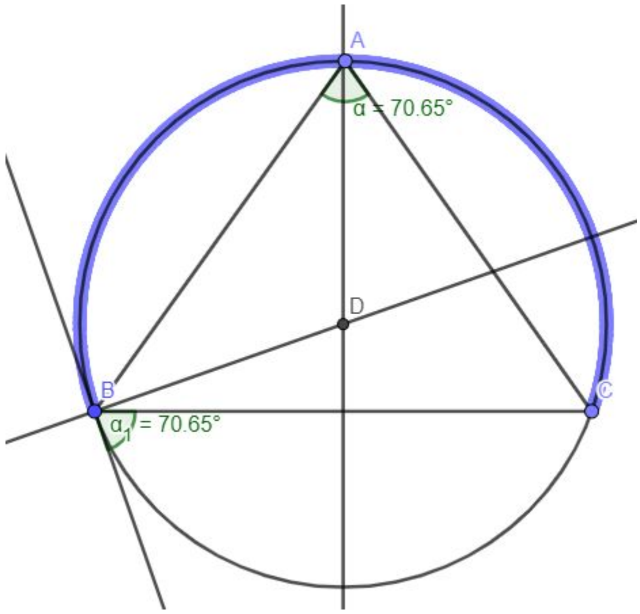

Figura 3.2: Construção do triângulo a partir do arco capaz.
Fonte: Elaborado pela autora.

Dando ênfase ao triângulo ABC formado e suprimindo-se os demais objetos é fácil perceber que ao traçarmos ao menos duas alturas desse triângulo temos o ortocentro (F na imagem abaixo), o qual descreve a trajetória em destaque ao movimentarmos o ponto A.

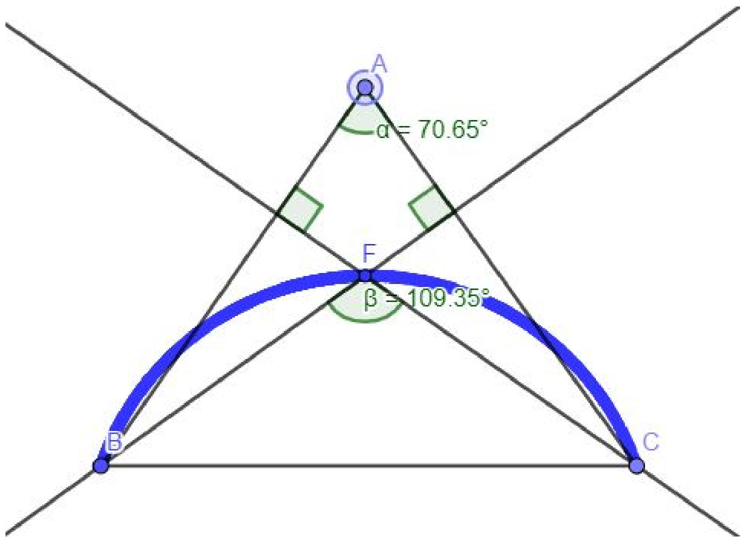

Figura 3.3: Novo arco capaz gerado a partir do triângulo.
Fonte: Elaborado pela autora.

Note que o ângulo α é fixo, logo, seu suplementar que é o ângulo β também será. Então, o lugar geométrico do ortocentro é o arco capaz do segmento $\overline{BC}$ de ângulo $\pi - \alpha$.

A identificação do arco capaz proposto pelo problema inicial e gerado pelo ortocentro após o manuseio do software GeoGebra fica de fácil percepção. O que, muitas vezes, com desenho utilizando régua e compasso ou até mesmo sem esse passo, não seja tão rápido, claro e objetivo. É fácil também perceber as demais propriedades geométricas em questão como o quadrilátero formado com os vértices opostos nos pontos A e F e a relação entre os ângulos desses vértices, dentre outras. Temos assim, o GeoGebra como um recurso prático e facilitador dessa e de várias outras atividades e problemas matemáticos.

3.1.3 Exemplo 3 - Ponto médio de segmento

O exercício proposto abaixo foi extraído da seção 3.1 de [11].

É dado no plano um segmento $\overline{AB}$ e um ponto P sobre ele. De um mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$, construímos os triângulos retângulos isósceles APQ e BPR, de hipotenusas $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$, respectivamente. Em seguida, marcamos o ponto médio M do segmento $\overline{QR}$. Encontre o LG descrito pelo ponto M, à medida que P varia sobre o segmento $\overline{AB}$.

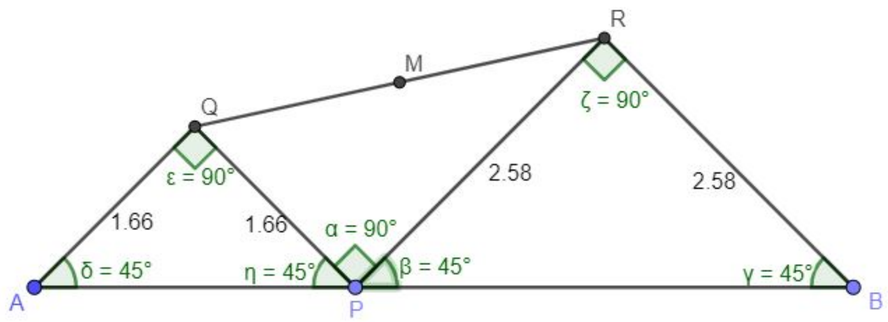

Figura 3.4: Representação geométrica do exemplo 3
Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, como os triângulos APQ e BPR são isósceles e retângulos, respectivamente, em Q e R os ângulos

$$\angle QAP \equiv \angle QPA \equiv \angle RPB \equiv \angle RBP.$$

Além disso, temos também que os ângulos $\angle QAP, \angle QPA, \angle RPB, \angle RBP$ medem 45° cada. Logo, o ângulo $\angle QPR$ é reto, uma vez que os ângulos $\angle QPA, \angle QPR$ e $\angle RPB$ são suplementares. Como $\overline{AB}$ é um segmento finito, quando o ponto P aproximar-se de B até coincidirem teremos um único triângulo isósceles AQP, consequentemente, o triângulo QPR deixará de existir e o ponto M coincidirá com a posição inicial do ponto R. De forma análoga, quando o ponto P se aproxima do ponto A até coincidirem teremos um só triângulo BRP no qual o ponto M se posicionará nas coordenadas do ponto original Q.

No GeoGebra, é possível perceber tal situação ao movimentarmos o ponto P sobre o segmento $\overline{AB}$, habilitando a opção de rastro do ponto M, o segmento descrito por tal ponto é paralelo ao segmento dado.

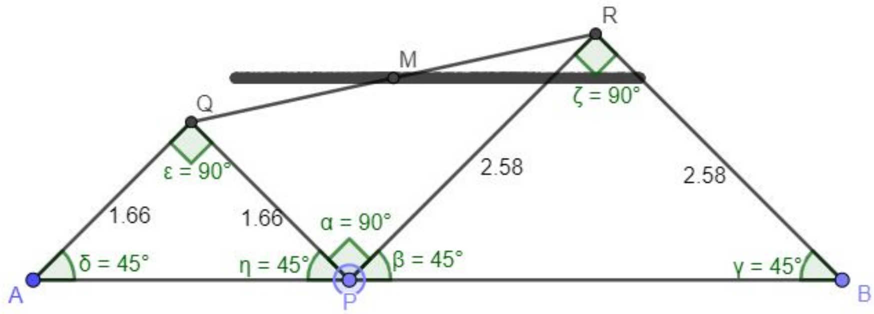

Figura 3.5: LG descrito pelo ponto M - Ponto P na posição inicial.
Fonte: Elaborado pela autora.

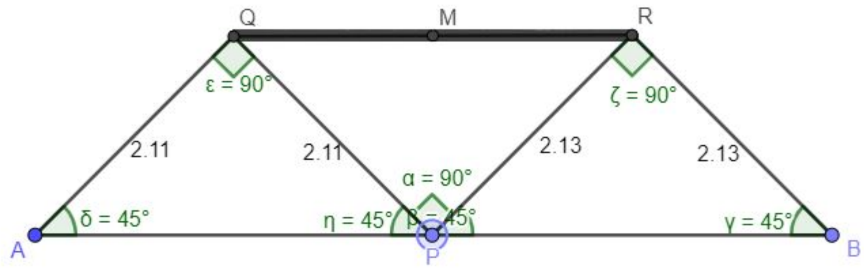

Figura 3.6: LG descrito pelo ponto M - Ponto P na posição final.
Fonte: Elaborado pela autora.
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/epvxgb4w

3.1.4 Exemplo 4 - LG dos pontos médios das cordas de um círculo paralelas à uma reta.

O exercício proposto abaixo também foi extraído da seção 3.1 de [11].

Temos no plano do papel um círculo Γ*, de centro* O*, e uma reta* r *que não intersecta* Γ*. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos pontos médios das cordas de* Γ *que são paralelas à reta* r*.*

No GeoGebra, as ferramentas são de entendimento e manuseio muito fáceis. Nesse exemplo, para a construção basta utilizarmos o comando círculo com centro e raio, e, em seguida, o comando reta e traçá-la de forma exterior à circunferência esboçada anteriormente. Logo após, basta utilizarmos do comando "retas pralelas" e clicarmos na reta r e depois dentro da circunferência que teremos uma reta paralela à reta r e secante à circunferência Γ. Em seguida, marcamos os pontos de interseção da nova reta com a circunferência no comando "interseção de dois objetos". Ligando os pontos de interseção com segmentos de reta basta clicarmos no comando "ponto médio ou centro" que será marcado o ponto médio da corda da circunferência Γ e paralela à reta r. Repetindo o procedimento descrito acima, podemos traçar inúmeras cordas secantes à circunferência Γ e paralelas à reta r. Notemos que o diâmetro da circunferência Γ é uma, e também a maior, das cordas paralelas à reta r.

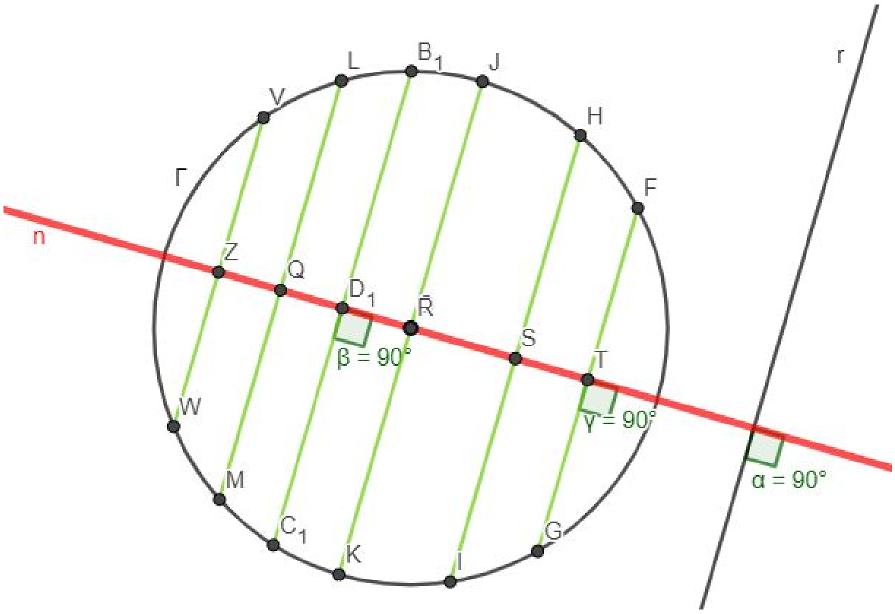

Figura 3.7: LG dos pontos médios das cordas de Γ.
Fonte: Elaborado pela autora.

Observamos que os pontos médios das cordas ficam alinhados. E para verificarmos esta afirmação, utilizamos a ferramenta cujo comando é "reta perpendicular". Dessa forma, selecionando e clicando sobre a reta r, interceptamos todos os pontos médios das cordas.

Portanto, o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da circunferência Γ paralelas à reta r é uma reta perpendicular à reta r que passa pelo centro da circunferência Γ.

Certificando de forma analítica, o que também é possível pela software, uma vez que temos a janela "Álgebra" na qual todas as construções são descritas de forma algébrica, verificamos que as coordenadas de qualquer um dos pontos médios das cordas satisfaz a equação da reta perpendicular à reta r.

3.1.5 Exemplo 5 - Lugar geométrico descrito pelo ponto médio da corda de uma circunferência em relação à um ponto.

São dados: uma circunferência e um ponto P fixo. Uma reta r variável passa por P e corta a circunferência em A e B. Determine o LG do ponto médio da corda AB. Discuta os casos em que P é interior, exterior ou pertence à circunferência.

Para que a reta dada passe pelos pontos P e intercepte a circunferência nos pontos A e B, esses três pontos precisam necessariamente estarem alinhados. Temos também que a corda $\overline{AB}$ deve ser necessariamente um segmento da reta r, que é secante à circunferência dada, e ainda que o maior comprimento que essa corda pode ter é o diâmetro da circunferência em questão.

Após essas análises prévias e construindo os elementos no GeoGebra de forma a analisar as três possíveis posições do ponto P em relação à circunferência: exterior, pertencente e interior, temos as imagens abaixo, nas quais o LG do ponto médio da corda, ponto M, descreveu a trajetória em negrito durante a movimentação do ponto

P.

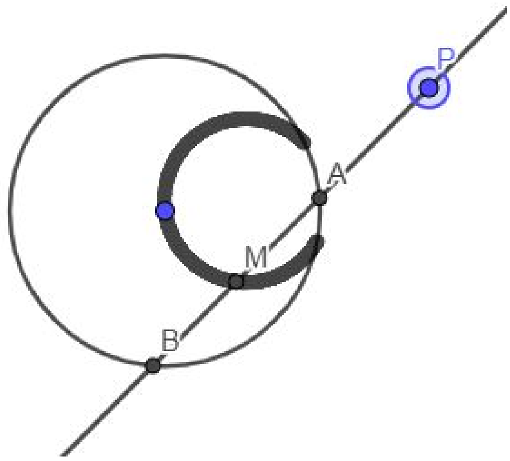

Figura 3.8: Ponto P exterior à circunferência.
Fonte: Elaborado pela autora.

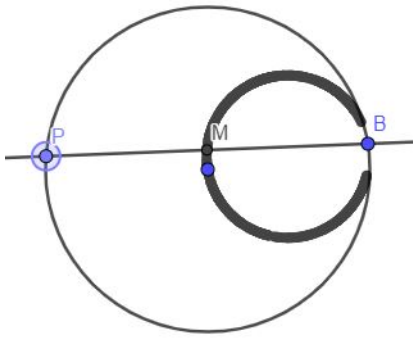

Figura 3.9: Ponto P pertencente à circunferência.
Fonte: Elaborado pela autora.

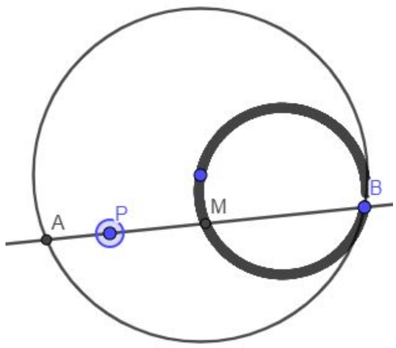

Figura 3.10: Ponto P interior à circunferência.
Fonte: Elaborado pela autora.
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v3fkkwnf

Observamos que nos três casos o LG descrito pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$ é um arco de circunferência que passa pelo centro da circunferência dada e extremidades contidas na mesma. A circunferência não é completa pois, como o segmento $\overline{AB}$ é uma corda quando a reta r deixa de ser secante e sim tangente, não temos o ponto médio. Notamos também que o raio do arco de circunferência descrito é metade do raio da circunferência dada.

3.1.6 Exemplo 6 - Incentro do triângulo

Na apostila [14], encontramos o seguinte exemplo.

Num triângulo ABC, os vértices A e B são fixos e o ângulo de vértice C mede 40°. Considerando C de um mesmo lado da reta AB, determine o lugar geométrico do incentro do triângulo ABC.

Sabemos que o incentro *(I)* de um triângulo é o ponto de encontro das três bissetrizes internas. Logo, com as informações dadas podemos esboçar a imagem abaixo (Figura 3.11). Para a construção dessa imagem foi utilizado também o software GeoGebra e para que esse triângulo permanecesse com o segmento $\overline{AB}$ e o $\angle ACB$ de comprimento fixo e, ainda, para que o ponto A possa se mover sem alterar sua medida foi preciso primeiro construir o arco capaz do ângulo de 40º sobre o segmento $\overline{AB}$ e em seguida, delimitar o triângulo com os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

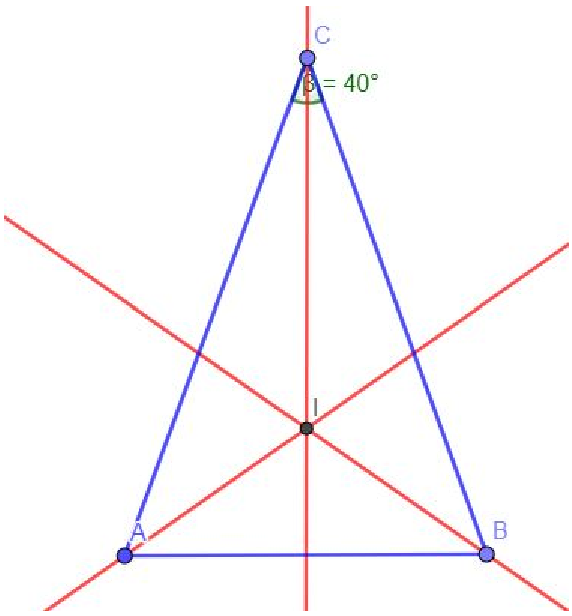

Figura 3.11: Exemplo 6: Incentro do triângulo ABC.
Fonte: Elaborado pela autora.

Notemos a congruência entre os ângulos: $\angle CAI \equiv \angle IAB$ e $\angle CBI \equiv \angle ABI$. Desse modo, no triângulo ABC temos que:

$$2.\angle IAB + 2.\ \angle ABI + 40^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$2.\angle IAB + 2.\ \angle ABI = 180^{\circ} - 40^{\circ}$$
$$2.\angle IAB + 2.\ \angle ABI = 140^{\circ}$$
$$2.\ (\angle IAB + \angle ABI) = 140^{\circ}$$
$$\angle IAB + \angle ABI = 70^{\circ}$$

Portanto, no triângulo ABI o $\angle IAB$ + $\angle ABI$ + $\angle AIB = 180^{\underline{o}}$ e como $\angle IAB$ + $\angle ABI = 70^{\underline{o}}$ resta que $\angle AIB = 110^{\underline{o}}$. Utilizando a ferramenta "habilitar rastro" do software GeoGebra para o ponto I e movendo-se o vértice C, percebemos que o LG do incentro descreve um arco capaz do ângulo de $110^{\underline{o}}$ sobre o segmento $\overline{AB}$, o qual possui comprimento fixo pois está associado ao ângulo de $40^{\underline{o}}$ do vértice C, que também possui abertura fixa.

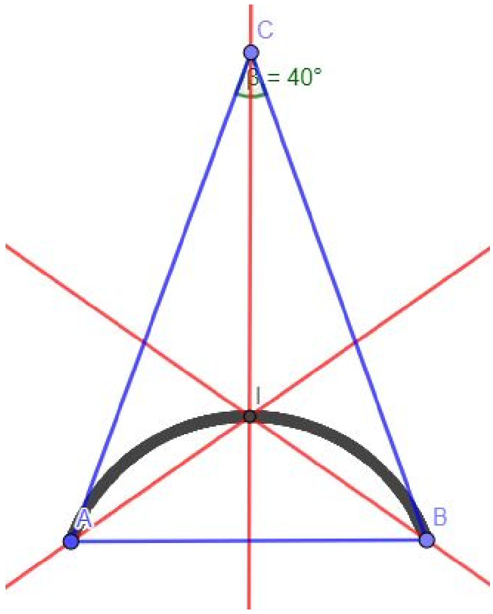

Figura 3.12: Exemplo 6: arco capaz do ângulo de $110^{\underline{o}}$.
Fonte: Elaborado pela autora.
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ehgmmqfs

4

Proposta de atividade

Diante de todos os aspectos expostos nas seções anteriores, apresentaremos agora uma proposta de atividade a qual tem como objetivo relacionar o conceito de função do segundo grau e sua respectiva representação geométrica com o conceito de lugar geométrico. Buscamos também uma forma de contextualização de tais conteúdos utilizando de ferramentas digitais. Desse modo, a proposta foi dividida em quatro etapas: primeiramente uma breve revisão de conceitos importantes; em seguida a construção de uma parábola tendo como recurso o software GeoGebra; logo após, discutimos um pouco a respeito das aplicações da parábola; e por fim, propomos o esboço de um parabolóide semelhante às antenas chamadas de *"parabólicas"*, utilizadas na recepção de sinais de telecomunicações, tendo também como recurso o GeoGebra. Alterações que se julguem necessárias podem ficar a critério do professor.

Público-alvo: Alunos da primeira série do Ensino Médio.

Carga horária necessária: Cinco aulas de quarenta e cinco minutos.

Pré-requisitos: Conhecimento dos conceitos de mediatriz, retas paralelas e perpendiculares e as ideias básicas de função do segundo grau, sua representação algébrica e gráfica.

Infraestrutura: É necessário que a sala possua um aparelho com acesso ao software GeoGebra que pode ser um notebook, desktop ou até mesmo um smartphone, os quais precisarão também estar conectados a um projetor de imagens (datashow ou televisão). Utilizamos aqui o software gratuito GeoGebra Classic 6.0, versão para Windows. Porém esse modelo do programa, bem como a plataforma utilizada, não comprometem a atividade. Podendo também ser utilizado a versão online disponível em [9].

Bibliografia: Toda a proposta foi fundamentada nos textos presentes no livro "Geometria em sala de aula" de Ana Catarina P. Hellmeister [8], e também no livro "Tópicos de Matemátic Elementar- Volume 2 (Geometria Euclidiana Plana) de Antônio Caminha Muniz Neto [11] e demais materiais disponíveis no portal do GeoGebra [9].

4.0.1 Primeira etapa: Revisando alguns conceitos importantes.

Os alunos da 1ª série do Ensino Médio têm uma noção do conceito de função e sua respectiva representação gráfica, conteúdo esse que é trabalhado no nono ano e também no ano em questão de forma um pouco mais detalhada. Porém, mesmo sabendo que uma função do segundo grau é representada graficamente por uma curva denominada parábola, suas raízes e vértice, não fazem a relação dessa curva como um lugar geométrico, ou seja, um conjunto de pontos com determinada propriedade. Logo, desconhecem provalvemente o conceito de foco e reta diretriz.

Desse modo, a proposta aqui detalhada deverá ser trabalhada após a consolidação do conceito de função do segundo grau e suas respectivas representações algébrica e gráfica. É muito oportuno, porém, retomar a ideia de lugar geométrico de forma simples, conforme definições abordadas no capítulo 2, seção 2.1.

Podendo aproveitar o ensejo para relembrarmos o conceito de mediatriz, reforçando que a mediatriz também é um lugar geométrico, sendo um conjunto de pontos que a constitue e tais pontos são equidistantes das extremidades de um segmento de reta. E, de maneira bem objetiva, podemos utilizar o GeoGebra traçando segmentos com medidas conhecidas e, em seguida, traçar a mediatriz a partir do comando disponível na janela de retas. Posteriormente, para verificação das equidistâncias de qualquer ponto da reta traçada aos extremos do segmento é possível marcar pontos sobre a mediatriz e ligá-los aos extremos visualizando as medidas de ambos.

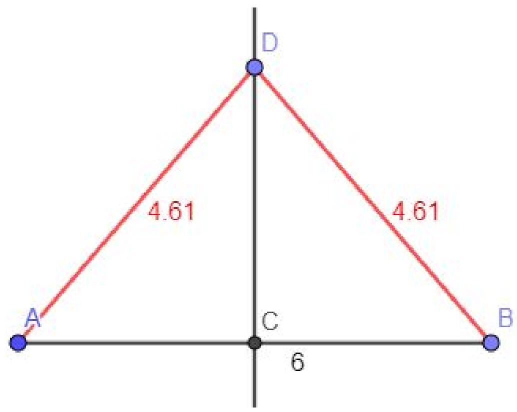

Figura 4.1: Mediatriz de um segmento
Fonte: Elaborado pela autora.

Seguimos com a definição de parábola como um lugar geométrico e seus respectivos elementos (vértice, foco e reta diretriz).

A curva resultante ao esboçar a representação gráfica de uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, é denominada parábola. Tal curva é o resultado da seção de um cone de revolução com um plano, e essa curva nada mais é que um conjunto de pontos equidistantes de um ponto fixo, denominado foco, e de uma reta chamada reta diretriz.

A partir da imagem abaixo e demais recursos aqui sugeridos, é possível também fazermos várias outras explanações e demonstrações, inclusive dos elementos constituintes: foco, vértice e diretriz. Seguimos com a construção de uma parábola a partir de suas propriedades geométricas, fixando ainda o sistema de coordenadas cartesianas.

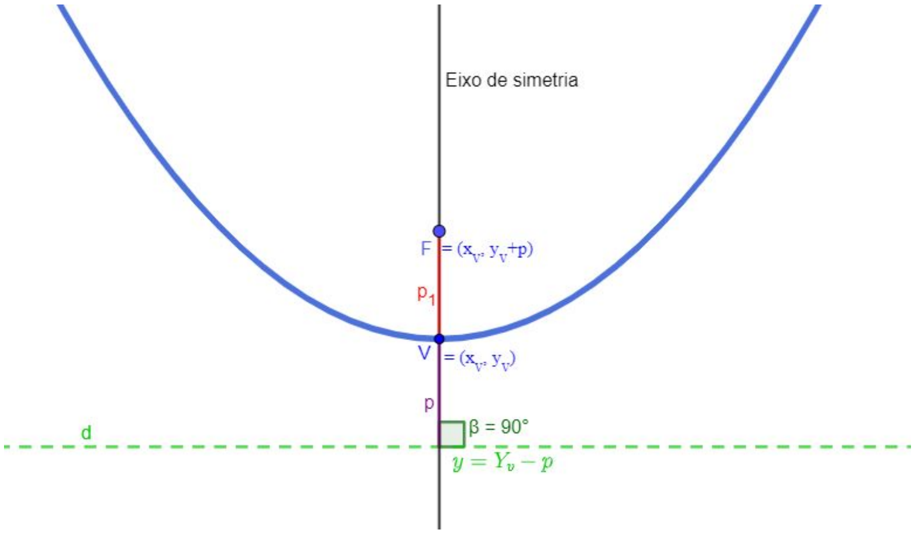

Figura 4.2: Parábola como LG e seus elementos.
Fonte: Elaborado pela autora.

4.0.2 Segunda etapa: Construção de uma parábola com o GeoGebra.

Nessa etapa, sugerimos a utilização do software GeoGebra para construção de uma parábola a partir de suas propriedades geométricas. Para tanto, é necessário seguir os passos descritos abaixo nos quais as coordenadas do ponto F e da reta diretriz podem ser escolhidas de forma arbitrária.
1º) Marcar o ponto F de coordenadas aleatórias;
2º) Traçar a reta d paralela ao eixo x passando por um ponto qualquer;
3º) Com o comando ponto sobre objeto marcar um ponto C qualquer sobre a reta d;
4º) Passando por C traçar uma reta perpendicular à reta d;
5º) Traçar a mediatriz do segmento $\overline{CF}$;
6º) Na interseção da perpendicular com a mediatriz marca-se um ponto P no qual é necessário habilitar a opção de rastro.

Como o ponto P pertence à mediatriz de um segmento, podemos afirmar que a distância de P a F é igual a distância de P a C. E como C pertence a reta d e à reta perpendicular a d podemos também dizer que a distância de P a reta d é a mesma de P a F. Assim, temos um ponto equidistante de um ponto e uma reta, portanto um ponto que satisfaz a definição de parábola. Como queremos um conjunto de pontos do plano com tal propriedade precisamos, determinar outros. Desse modo, é possível pelo software movimentar o ponto C sobre a reta d sem alterações das propriedades acima descritas que a trajetória do ponto P descreverá uma parábola cuja concavidade estará voltada para cima ou para baixo conforme coordenadas iniciais.

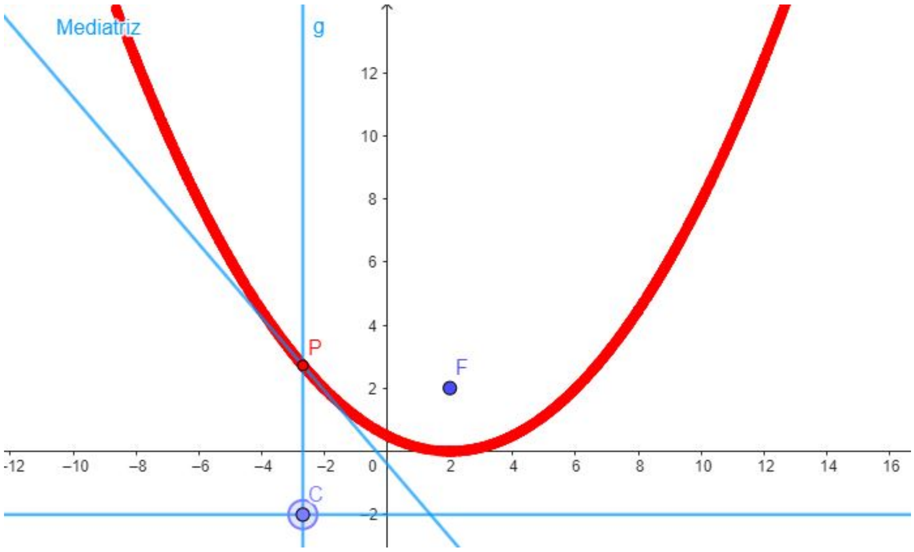

Figura 4.3: Construção da parábola
Fonte: Elaborado pela autora.
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/qvhexaj2

Outra alternativa é utilizar o comando de parábola e ao selecionar o ponto F e a reta d teremos a mesma figura formada.

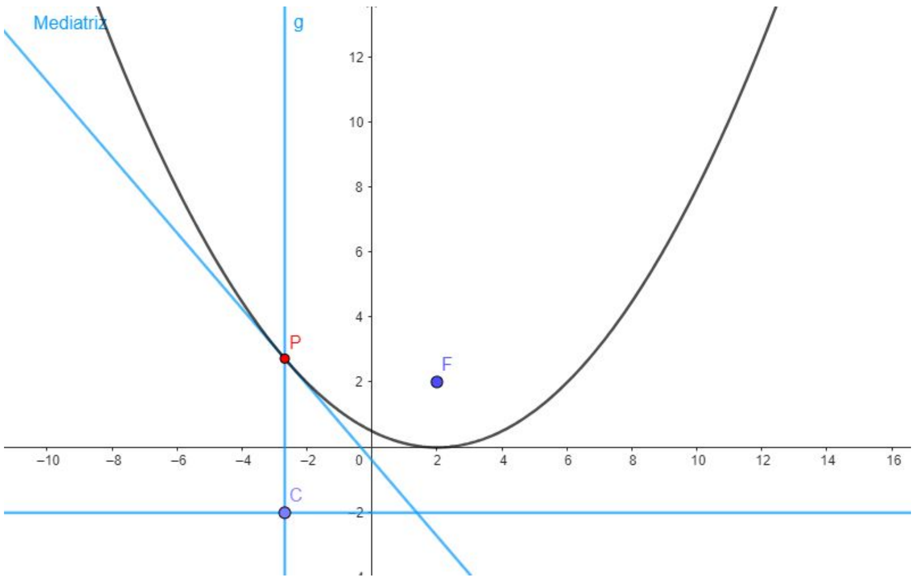

Figura 4.4: Construção da parábola como LG.
Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com o exemplo descrito acima, temos uma parábola cujo parâmetro é $p = 2$, vértice de coordenadas $V = (2, 0)$, foco $F = (2, 2)$ e reta diretriz $y = -2$. Substituindo essas informações na equação geral da parábola que é dada por $(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$ temos a seguinte relação:

$$(x - 2)^2 = 4.2.(y - 0)$$

Desenvolvendo os produtos notáveis, obtemos:

$$x^2 - 4x + 4 = 8y$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por 8, concluimos:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = y$$

que é uma função da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

.

Podemos ainda, verificar que qualquer ponto pertencente à parábola descrita por

$$\frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = y$$

é equidistante do foco e da reta diretriz. Tomemos, por exemplo, um ponto P qualquer, de coordenadas $P = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e sua respectiva projeção ortogonal sobre a reta diretriz $P' = (0, -2)$. Calculando as distâncias entre os pontos P a P' e P a F, temos:

$$Dist(P; P') = Dist(P; F)$$

$$\sqrt{(0-0)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - (-2)\right)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 2\right)^2}$$

$$\frac{5}{2} = \sqrt{\left(4 + \frac{9}{4}\right)}$$

$$\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

Concluimos assim, que o ponto pertencente à parábola é equidistante do foco e da reta diretriz.

Após a construção, também é possível fazer algumas conjecturas e verificá-las de acordo com o comportamento observado por meio da dinâmica proposta pelo software, tais como:

1) A abertura da concavidade da parábola de acordo com a posição do foco e em relação a reta diretriz;

2) A abertura da concavidade, mais fechada ou aberta, quando o foco se aproxima da reta diretriz;

3) Mudança de posição de acordo com a reta diretriz, quando paralela ao eixo das ordenadas;

4) Traçar o eixo de simetria, observando que o mesmo é perpendicular a reta diretriz e passa pelo foco;

5) Observar a mudança da abertura da concavidade da parábola de acordo com o parâmetro, se positivo ou negativo.

Tais questionamentos podem também ser visualizados por meio dos materiais disponíveis dentro do próprio software GeoGebra. Um recurso adicional ao professor que pode ser de grande utilidade. Um bom exemplo que aqui se insere referente a parábola é o ilustrado abaixo:

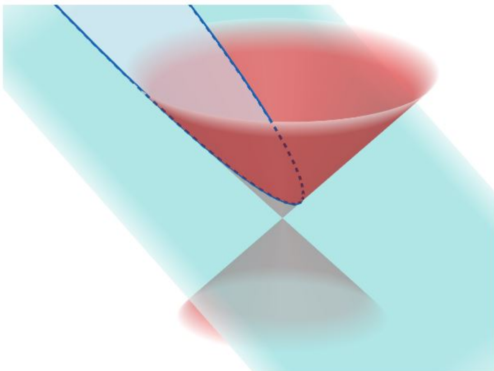

Figura 4.5: Construção da parábola pela intersecção de um plano com um cone duplo de revolução.
Fonte: https://www.geogebra.org/m/jedzj8nm
Acesso em: 06/11/2023.

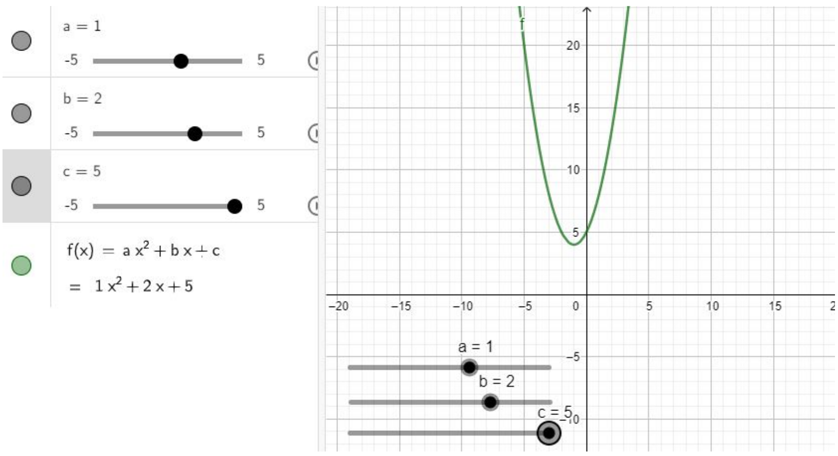

Figura 4.6: Variações dos coeficientes e respectiva representação gráfica.
Fonte: https://www.geogebra.org/m/jedzj8nm
Acesso em: 06/11/2023.

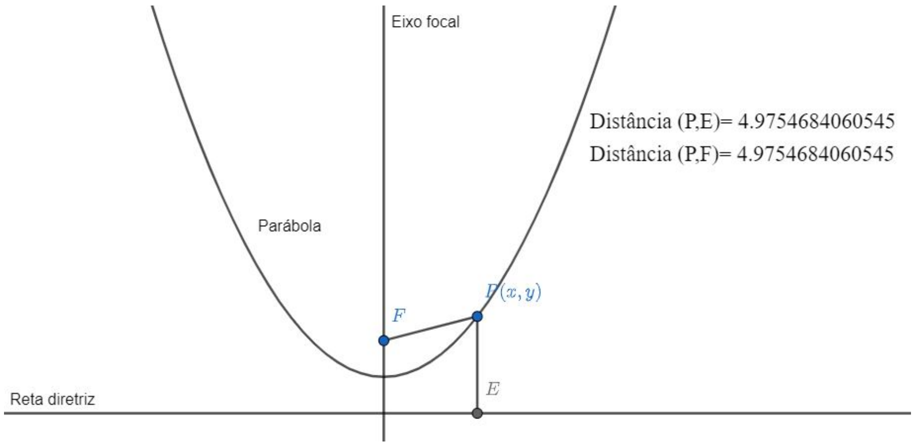

Figura 4.7: Definição de parábola - GeoGebra.
Fonte: https://www.geogebra.org/m/jedzj8nm
Acesso em: 06/11/2023.

Vários outros questionamentos podem se tornar oportunos de acordo com a dinâminca dos envolvidos. Um dos possíveis questionamentos a ser levantado pode ser quanto a aplicação do conceito de parábola no cotidiano. Por isso, nesse momento torna-se importante mostrar algumas aplicações.

4.0.3 Terceira etapa: Aplicações da parábola.

A curva denominada parábola, ao ser rotacionada em torno de seu eixo de simetria, gera um sólido de revolução denominado de *"parabolóide"*. Tal sólido possui várias aplicações em diferente ramos. A seguir citaremos algumas aplicações, as quais para a sociedade atual apresentam relevância inquestionável.

Engenharia e Arquitetura: Nas construções de pontes, buscando-se estabilidade e economia, utilizam-se arcos de parábolas. Como por exemplo a ponte Juscelino Kubitschek em Brasília.

Figura 4.8: Ponte Juscelino Kubitschek em Brasília
Fonte: http://patrimonioememoria.ccbbeducativo.com
Acesso em: 06/11/2023.

Além de otimização dos espaços, iluminação e ventilação usam-se os arcos de parábolas também por questões estéticas e estruturais [5]. Outros exemplos bem conhecidos são a igreja da Pampulha na capital mineira e os arcos da Marquês de Sapucaí no Rio de Janeiro.

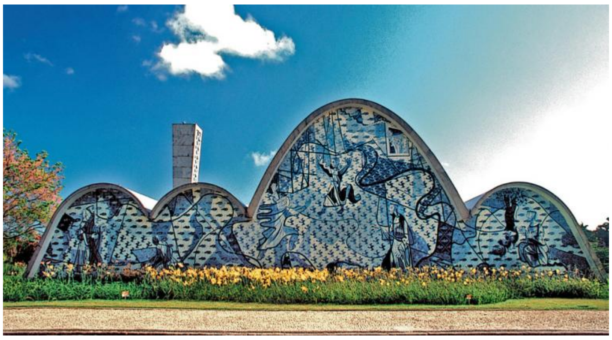

Figura 4.9: Igreja da Pampulha-Belo Horizonte - MG
Fonte: https://prefeitura.pbh.gov.br
Acesso em: 06/11/2023.

Figura 4.10: Arco da Marquês de Sapucaí - Rio de Janero (RJ)
Fonte: https://prefeitura.rio
Acesso em: 07/11/2023.

Comunicações: Nas comunicações, através de transmissão via satélite, telefonia móvel e GPS (Global Positioning System).

Sendo que a grande superfície parabólica recebe os sinais do espaço e os concentra no foco para amplificação. Portanto, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola, é refletido e posteriormente se direciona ao foco.

Faróis automotivos: Os faróis de veículos automotivos também utilizam das propriedades óticas da parábola sendo que possuem uma lâmpada que é colocada no foco da superfície parabólica.

Captação de energia solar: Alguns fornos e fogões em formato parabólico captam a energia solar e a direcionam ao foco da parábola no qual está os alimentos a serem assados e/ou cozinhados. Utilizando assim, uma fonte de energia limpa e sustentável. Porém, dependente de condições climáticas.

Figura 4.11: Fogão solar parabólico
Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-8-Fogao-solar
Acesso em: 07/11/2023.

4.0.4 Quarta etapa: Simulação de uma antena parabólica no GeoGebra.

Conforme aplicações citadas anteriormente, sugerimos nesse momento a utilização do GeoGebra para rotacionar uma parábola em torno do seu eixo de simetria e respectiva visualização do sólido de revolução gerado, o parabolóide. Tal sólido é utilizado nas antenas de recepção de sinais e, para tanto, faz-se necessário também identificar o foco de tal superfície que, quando planificada coincide com o foco da parábola rotacionada.

Em todos os passos descritos abaixo é necessário abrir a janela de visualização tridimensional do software a qual ficará à direita da janela bidimensional.

1º) No campo de entrada inserir uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2+bx+c$ podendo os coeficientes b e c serem nulos;
Na imagem do exemplo ilustrativo abaixo foi utilizado a função $f(x) = x^2 + x - 1$

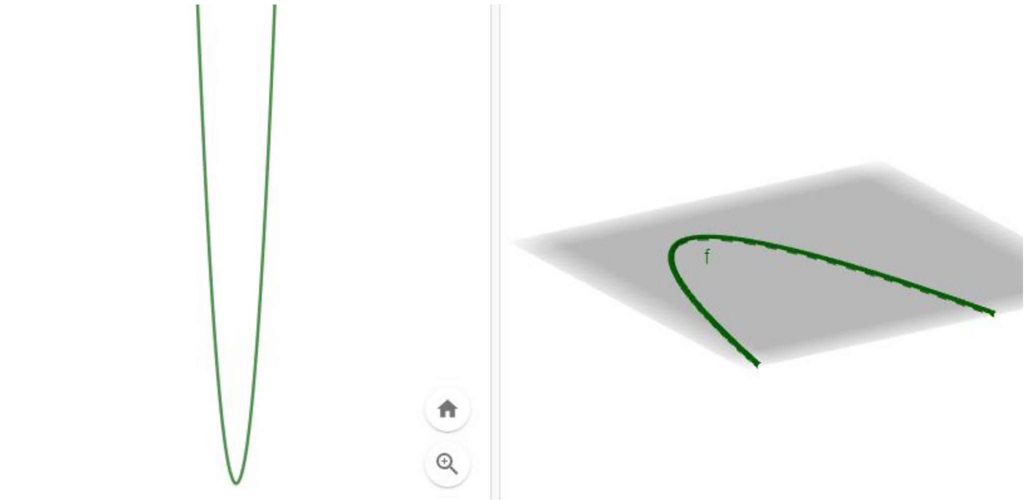

Figura 4.12: Primeiro passo para construção do parabolóide.
Fonte: Elaborado pela autora.

2º) Selecionar a função e na aba “ponto” clicar em “otimização” para que o vértice da parábola seja exibido;

No exemplo aqui proposto temos o ponto A(-0,5; -1,25).

3º) A partir do vértice traçar o eixo de simetria da parábola, o qual será perpendicular ao eixo x;

No exemplo, temos o eixo g dado pela equação $x = -0{,}5$, uma vez que o eixo de simetria é paralelo ao eixo y e passa pelo vértice da parábola.

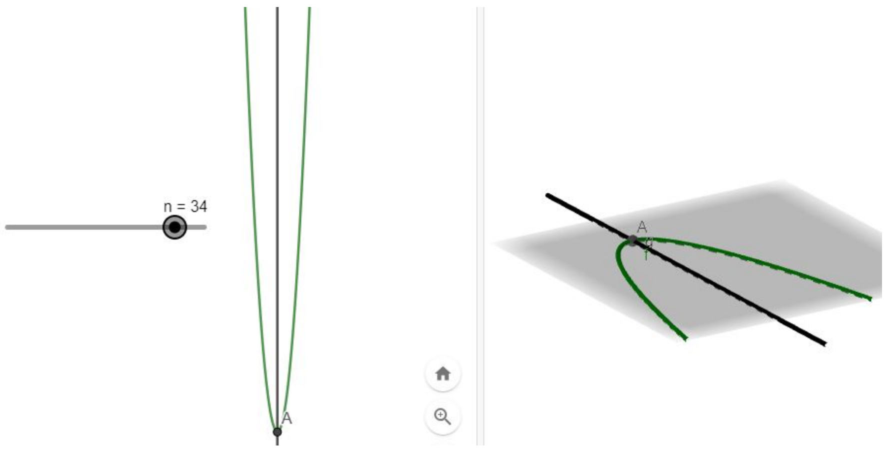

Figura 4.13: Construção do parabolóide - enfoque ao eixo de simetria.
Fonte: Elaborado pela autora.

4º) Acrescentar no campo de entrada o comando para rotação da parábola em torno de seu eixo de simetria traçado no terceiro passo. Para tanto, é necessário inserir um controle deslizante de nomenclatura genérica n, intervalo de 0 a 40 e incremento de uma unidade. Para que a sequência de rotações se dêem em torno do eixo de simetria é necessário inserir na caixa de entrada a sequência:

$$Sequência\left(Girar\left(f,i * \tfrac{2\pi}{n}, g\right)i, 0, n, \tfrac{2\pi}{n}\right)$$

Após inserir a sequência acima e clicando enter é possível por meio do controle deslizante visualizar a rotação da parábola em torno do seu eixo de simetria até completar o sólido esperado.

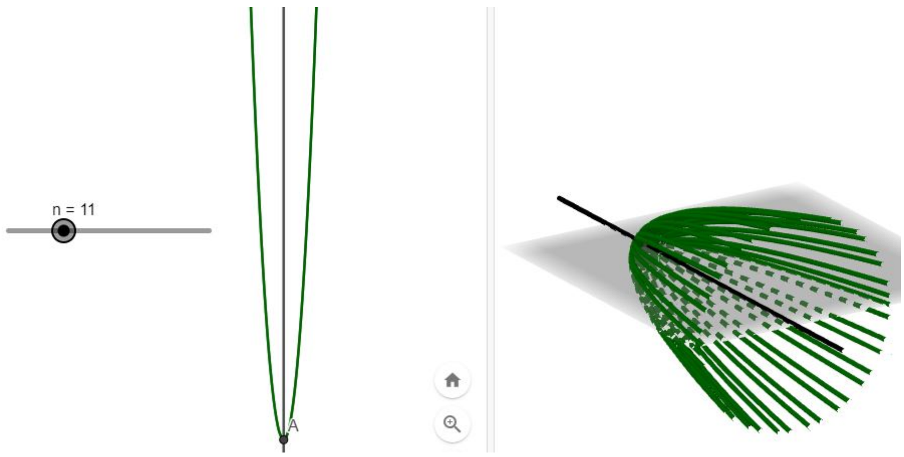

Figura 4.14: Construção do parabolóide após a 11ª rotação.
Fonte: Elaborado pela autora.

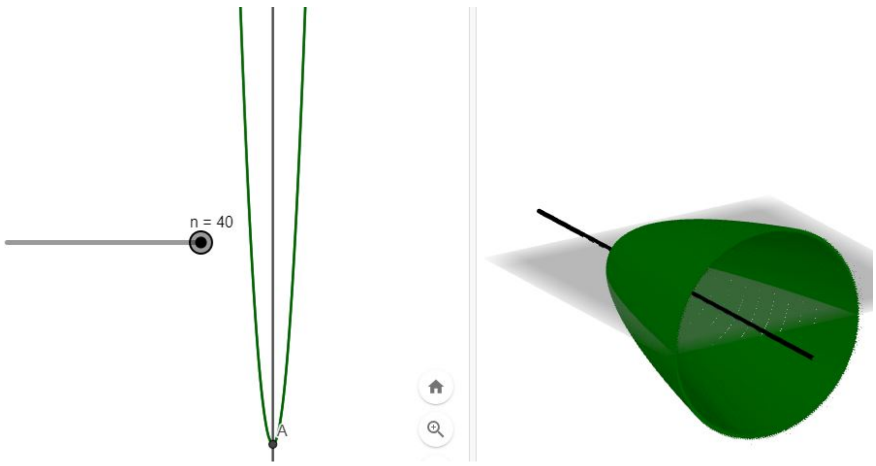

Figura 4.15: Construção do parabolóide após a 40ª rotação
Fonte: Elaborado pela autora.
Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hffkuf9t

Uma vez que o foco do parabolóide é o ponto onde se concentra os sinais refletidos, precisamos encontrar as coordenadas desse ponto que, nesse caso é o foco da parábola rotacionada de equação $y = x^2 + x - 1$. Ressaltamos que o foco do parabolóide está em R^3 e o da parábola em R^2, consideremos portanto a planificação da superfície.

Como no segundo passo descrito acima o software exibiu o ponto do vértice e suas respectivas coordenadas na janela de álgebra e também tem-se o eixo de simetria, faz-se necessário relembrar aqui que o foco e a reta diretriz são respectivamente, $F = (X_v, Y_v + p)$ e $y = Y_v - p$. Temos ainda que o parâmetro p é a distância do vértice da parábola ao foco que é igual à distância do vértice da parábola à reta diretriz. Logo, aplicando ao exemplo em questão temos $F = (-0{,}5; -1{,}25 + p)$ e diretriz de equação $y = -1{,}25 - p$.

Relacionando ao exemplo em questão, temos que a localização do vértice é dada por $V = (-0{,}5; -1{,}25)$ e escolhendo arbitrariamente um ponto pertencente à função $y = x^2 + x - 1$ é possível definir, o parâmetro dessa parábola, as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz a partir da equação geral da parábola descrita na seção 2.1 que é:

$$\big(x - x_v\big)^2 = 4p(y - y_v)$$

Substituindo na equação acima as coordenadas do vértice $x_v = -0{,}5$ e $y_v = -1{,}25$ e escolhendo o ponto $(0, -1)$ pertencente à parábola, temos:

$$\big(0 - (-0{,}5)\big)^2 = 4p\big(-1 - (-1{,}25)\big)$$

$$(0{,}5)^2 = 4p(0{,}25)$$

$$0{,}25 = 4p(0{,}25)$$

$$1 = 4p$$

$$p = 0{,}25$$

Como o parâmetro resultou em 0,25 e as coordenadas do foco são dadas por $F = (X_v, Y_v + p)$ e diretriz d: $y = y_v - p$ concluímos que $F = (-0{,}5; -1)$ e d: $y = -1{,}5$.

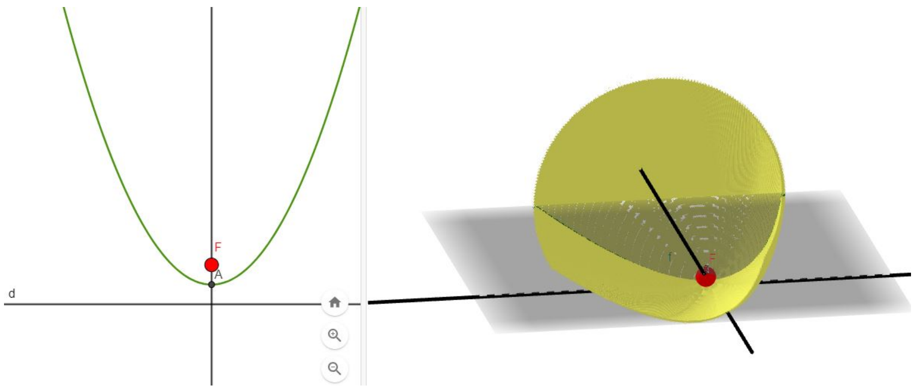

Figura 4.16: Parábola rotacionada com respectivos foco e diretriz.
Fonte: Elaborado pela autora.

5 Conclusões

Inúmeros são os desafios para o ensino da Matemática na atual sociedade. Tendo em vista as transformações sociais e tecnológicas impostas pelo mundo globalizado além da era digital à qual estamos submersos. Para que a aprendizagem se dê de forma significativa e não compartimentada dos conteúdos matemáticos, é preciso que os profissionais tenham uma postura crítica, reflexiva e pesquisadora a todo momento, sem receios de testar novas metodologias e recursos disponíveis. Tais recursos são muitos, que várias vezes o profissional pode se perder ou até mesmo pela falta de tempo, preparo ou apoio, deixar de se beneficiar de tais instrumentos, como é o caso dos softwares de matemática dinâminca como foi sugerido no presente trabalho o uso do GeoGebra. Mesmo esse software sendo gratuito e de fácil manuseio, existem ainda muitos professores que não o utilizam ou até mesmo desconhecem.

A nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reafirma como uma competência a inclusão de tecnologias digitais para modelagem e resolução de problemas do cotidiano. Tendo em vista que faz parte do nosso cotidiano o avanço tecnológico, como por exemplo tablets e celulares que nos auxiliam na comunicação e por conseguinte evolução social. Com um aparelho celular moderno é possível muito mais que comunicar-se por mensagens e ligações bem como acessar inúmeros aplicativos de diversas utilidades, como por exemplo usar um transferidor para medir ângulos.

Observar o ambiente à nossa volta, gerar conjecturas e testá-las, formulando hipóteses e inter-relacionando informações é algo primordial a ser desenvolvido nos indivíduos, não só alunos como também educadores. E muitas vezes isso não ocorre no campo da Matemática. A álgebra é vista totalmente desconexa da Geometria e vice-versa. Por isso, a importância de relacionar uma construção Geométrica com sua representação algébrica. Porém, atualmente não é muito comum nas salas de aula trabalhar com construções geométricas. As construções geométricas remontam ao século V a.C. e foram de suma importância para o desenvolvimento da Matemática. Já por volta do século III a.C. cálculos e resoluções já eram sinônimos de construir geometricamente. Atualmente, o processo de construção se tornou simples e rápido sendo que o computador executa as funções de régua e compasso.

Por tudo isso, nesse trabalho foi abordado o conceito de lugar geométrico bem como os principais exemplos de lugares geométricos de forma simples e objetiva para que possa auxiliar ao professor leitor na compreensão e reflexão de sua prática. Selecionamos seis exemplos de exercícios nos quais a ideia de lugar geométrico foi norteadora, e ainda utilizamos o software GeoGebra como instrumento facilitador da visualização de todo processo. Também apresentamos uma proposta didática a ser aplicada a alunos da primeira série do Ensino Médio a qual tem por objetivo relacionar o conceito de função do segundo grau e sua representação geométrica com um exemplo prático de lugar geométrico. Tendo também o software GeoGebra como instrumento auxiliar de todo o processo. Espera-se que possa clarear e nortear ideias para futuros pesquisadores. E ainda que possa servir de impulso para novos questionamentos e formas de utilização do software GeoGebra para o estudo de lugares geométricos. Prática essa que precisa estar presente no cotidiano escolar.

Bibliografia

[1] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. SBM, 1985.

[2] BOYER, C. B. "História da matemática; tradução: Elza F". *Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo* (1974).

[3] BRASIL. *"Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular." Portaria 1570.* URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (acesso em 12 de ago. de 2023).

[4] CADAR, L. e DUTENHEFNER, F. "Encontros de Geometria" (2015).

[5] CERQUEIRA, A. A. "Parábola e suas aplicações" (2017).

[6] DELGADO, J. et al. *Geometria Analítica, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, 2017.*

[7] DOLCE, O. e POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 10: Geometria espacial, posiçao e métrica*. Atual, 2005.

[8] HELLMEISTER, A. C. P. "Geometria em sala de aula" (2013).

[9] HOHENWARTER, M. et al. *GeoGebra*. 2017. URL: http://www.geogebra.org (acesso em 9 de jul. de 2021).

[10] NETO, A. C. M. "Geometria, Coleção Profmat". *Rio de Janeiro: SBM* (2013).

[11] NETO, A. C. M. *Tópicos da Matemática Elementar-Geometria Euclidiana Plana, vol 2, SBM.* 2012.

[12] PAVANELLO, R. M. e ANDRADE, R. N. G. d. "Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática". *Educação Matemática em revista* 9.11 (2002), pp. 78–87.

[13] REZENDE, E. Q. F. e QUEIROZ, M. L. B. de. *"Geometria euclidiana plana e construções geométricas"*. Editora da Unicamp, (2000).

[14] WAGNER, E. "Lugares Geométricos Básicos I" (2013).

[15] WAGNER, E. "Uma introdução às construções geométricas". *Rio de Janeiro* (2009).

[16] WAGNER, E. e CARNEIRO, J. P. Q. *Construções geométricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, (2007).