

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA - PROFMAT**

**“CONTRIBUIÇÕES DO TESTE DE TRÊS CAMADAS APLICADO
À AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO EM MATEMÁTICA”.**

ANTÔNIO PEIXOTO JUNIOR

**VITÓRIA - ES
2024**

ANTÔNIO PEIXOTO JÚNIOR

**“CONTRIBUIÇÕES DO TESTE DE TRÊS CAMADAS APLICADO
À AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO EM MATEMÁTICA”.**

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

**VITÓRIA - ES
2024**

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

P377" Peixoto Júnior, Antonio, 1981-
"CONTRIBUIÇÕES DO TESTE DE TRÊS CAMADAS
APLICADO À AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO EM
MATEMÁTICA". / Antonio Peixoto Júnior. - 2024.
58 p.

Orientador: Moacir Rosado Filho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Avaliação Educacional. 2. Plano de Aula. I. Rosado Filho, Moacir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

**“Contribuições do Teste de Três Camadas Aplicado à
Avaliação de Desempenho em Matemática”**

Antônio Peixoto Júnior

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 05/12/2024 por:

Documento assinado digitalmente
gov.br MOACIR ROSADO FILHO
Data: 09/12/2024 20:32:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Orientador(a) – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br ALANCARDEK PEREIRA ARAUJO
Data: 09/12/2024 21:34:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) Dr.(a) Alancardek Pereira Araujo
Membro Interno – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br MATEUS MENDES MAGELA
Data: 10/12/2024 08:34:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) Dr.(a) Mateus Mendes Magela
Membro Externo – IFES

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação à minha esposa Jossilane, as minhas filhas Helena, Maria Luiza, e a Maísa que está por chegar. Todos me impulsionaram para essa conquista. A minha mãe Miriam que sempre acreditou que a educação pode mudar trajetórias.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me permitir chegar até aqui depois de tantos obstáculos em minha trajetória. Minha esposa Jossilane que não mediu esforços para me ajudar a concluir essa dissertação e impulsionar meus sonhos. Minhas filhas, Helena e Maria Luiza e a Maísa que está chegando, que me fizeram enxergar uma nova perspectiva de vida e uma vontade enorme de representar essa família que eu escolhi pra mim.

A minha mãe que sempre lutou para que eu pudesse estudar e conseguir galgar coisas melhores para mim. A minha prima Fernanda que me ajudou muito a concluir esse trabalho.

Ao meu Colega Geovani que me apresentou esse tema para dissertação e me incentivou a concluir essa dissertação. Aos colegas Fabricio, José Roberto, Carlos Henrique e Célio que me incentivaram a concluir essa dissertação.

Ao meu orientador, professor Dr. Moacir Rosado Filho, pelo incentivo, pelo conhecimento compartilhado, pela paciência, pelas palavras sábias e encorajadoras as quais não seria possível à conclusão deste trabalho.

Aos colegas do PROFMAT com os quais compartilhei momentos inesquecíveis, em especial aos colegas Demétrio, Jordon, Paulo Célio e Luciano com os quais estreitamos laços de amizade e companheirismo.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original”.

Albert Einstein

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta de intervenção lúdica, orientada pelo teste em três camadas, onde a partir dos dados coletados será elaborado um plano de ação. O objetivo do estudo é individualizar ao máximo as dificuldades identificadas através desses dados. O trabalho começa com um breve contexto histórico sobre a avaliação, apresentando também o conceito do teste em três camadas de forma geral. Em seguida, o teste em três camadas é aplicado ao conteúdo de análise combinatória, os dados são coletados e, com esses dados em mãos, é elaborado um plano de ação para a intervenção com os estudantes. Após a intervenção, os alunos realizam um novo teste em três camadas para que as evoluções possam ser analisadas.

Palavras-chave: Avaliação; Teste em três camadas; Análise Combinatória; Plano de ação; Resultados.

ABSTRACT

This dissertation presents a proposal for a playful intervention, guided by the three-tier test, where an action plan will be developed based on the data collected. The objective of the study is to individualize as much as possible the difficulties identified through these data. The work begins with a brief historical context about the evaluation, also presenting the concept of the three-tier test in general. Then, the three-tier test is applied to the combinatorial analysis content, the data is collected and, with this data in hand, an action plan for the intervention with the students is developed. After the intervention, the students take a new three-tier test so that the developments can be analyzed.

Keywords: Evaluation; Three-tier test; Combinatorial analysis; Action plan; Results.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	10
2. Avaliação educacional: Fundamentos, Propósitos e Aplicações no Ensino Médio.....	12
2.1 OBJETIVO GERAL.....	15
2.2 Objetivos específicos.....	15
3. A Avaliação no Ensino Médio: Desafios e Práticas Efetivas.....	15
3.1 Desafios na Avaliação do Ensino Médio.....	16
3.2 Práticas Efetivas de Avaliação no Ensino Médio.....	16
4 O Teste em Três Camadas: Conceito, Aplicação e Objetivos.....	17
4.1 Objetivos do Teste em Três Camadas.....	19
4.2 Benefícios e Desafios na Implementação do Teste em Três Camadas.....	20
4.3 Aplicação do teste de três camadas.....	24
4.4 A Integração do Teste de 3 Camadas com a Análise Combinatória na Evolução dos Estudantes.....	24
5 A aplicação do teste de 3 camadas com os estudantes.....	26
5.1 Plano de Ação usado após a análise da primeira avaliação.....	48
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	55
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	56

1. INTRODUÇÃO

Desde os meus anos de estudante no ensino fundamental e médio, sempre notei a resistência dos meus colegas em relação à matemática. As reclamações eram constantes: "Essa aula é muito chata, não consigo entender nada." Como eu sempre gostei de ajudar, procurava formas mais agradáveis de ensinar, e logo percebi que, ao associar o conteúdo com situações práticas, meus colegas conseguiam se desenvolver melhor em matemática. No entanto, ainda não sabia como criar métodos para que os estudantes pudessem aprender mais efetivamente.

Ingressei no Profmat em 2013, mas precisei abandonar o curso por questões pessoais, mesmo já qualificado e faltando apenas a apresentação da dissertação. Determinado a não desistir, fiz novamente a prova de acesso em 2021 e passei por todo o processo novamente.

Minha paixão pela matemática sempre esteve presente, e o desafio era encontrar uma maneira de ensinar que reduzisse a resistência dos estudantes. Foi então que, conversando com um professor de física que estava fazendo doutorado, fui apresentado ao teste em três camadas.

Este trabalho nasceu de um diálogo com um professor doutorando em Física, que me mostrou um estudo sobre o teste em três camadas realizado por outro professor. A partir daí foi despertada em mim a vontade de aplicar uma metodologia de ensino baseada nesse teste. Decidi aprofundar-me nessa metodologia e adaptá-la para a matemática, percebendo que sua aplicação poderia ser útil em diversas outras áreas.

No início dos anos 2000, ao começar a lecionar matemática em uma escola pública no interior do Espírito Santo, observei que os professores utilizavam métodos tradicionais, desmotivando muitos alunos e tornando a aprendizagem da matemática uma fragilidade. Para melhorar esses resultados e a resistência dos estudantes, comecei a adotar uma abordagem mais lúdica, que atraía mais os estudantes, até mesmo no ensino médio, onde quase nenhum professor utilizava essa prática. Com o tempo, alguns estudantes passaram a se interessar mais pela disciplina e a participar ativamente das aulas. Quanto mais

lúdica era a abordagem, mais engajados os alunos ficavam e melhores eram os resultados. No entanto, surgiu a necessidade de desenvolver uma metodologia para mensurar essa evolução e criar estratégias de ensino mais assertivas e individualizadas.

Foi então que decidi pesquisar sobre o teste em três camadas aplicado à matemática e percebi que havia poucas pesquisas sobre o tema no Brasil. Essa lacuna me motivou a desenvolver uma avaliação que orientasse os professores na preparação de novas turmas e conteúdo. O teste em três camadas que desenvolvi consiste em:

- Primeira camada: questões de conceitos factuais, onde o professor ensina e o aluno memoriza e replica.
- Segunda camada: questões de compreensão conceitual, onde o professor explica e o aluno imagina aplicações, sugerindo outras possibilidades.
- Terceira camada: questões sobre o nível de segurança nas respostas das camadas anteriores.

Após a aplicação desse teste, os resultados foram organizados em tabelas. Com esses dados, o professor pode elaborar um plano de aula diversificado, abordando as maiores dificuldades dos estudantes. Utilizei a análise combinatória na aplicação do teste, por ser um conteúdo mais flexível para aulas dinâmicas, mas qualquer outro conteúdo poderia ser utilizado em qualquer série do ensino fundamental ou médio, além de outras áreas como Física, Química, Biologia e Tecnológicas.

Este trabalho foi dividido em oito capítulos: Introdução: Contextualiza a importância da maneira como a Matemática é lecionada para o desenvolvimento do raciocínio, evolução da sociedade e avanços tecnológicos. Avaliação Educacional: Fundamentos, Propósitos e Aplicações no Ensino Médio: Aborda brevemente o que é a avaliação, seu contexto histórico, abordagens e utilizações gerais. Avaliação no Ensino Médio: Desafios e Práticas Efetivas: Discute a avaliação no Ensino Médio, evidenciando desafios e oportunidades para práticas mais efetivas. O Teste em Três Camadas: Introduce a ideia do teste e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento. Benefícios e Desafios do Teste em Três Camadas: Detalha os pontos positivos e as dificuldades encontradas na

aplicação do teste. Aplicação do Teste em Três Camadas: Explica como realizar a aplicação do teste. Plano de Ação e Melhoria dos Resultados: Mostra como foi a aplicação do teste, a utilização do plano de ação como intervenção para melhoria dos resultados dos alunos e Considerações Finais que apresenta reflexões sobre o trabalho proposto.

2. Avaliação Educacional: Fundamentos, Propósitos e Aplicações no Ensino Médio

A avaliação educacional é um componente fundamental do processo de ensino e aprendizagem, desempenhando papéis essenciais no desenvolvimento acadêmico e na formação integral dos estudantes. No ensino médio, a avaliação assume ainda mais relevância devido às suas implicações para o futuro acadêmico e profissional dos alunos. Este texto explora a avaliação em sua dimensão geral e, mais especificamente, no contexto do ensino médio, discutindo seu contexto histórico e conceitual, a ideia que a sustenta, suas finalidades e objetivos, e a maneira como pode ser implementada de forma eficaz.

A prática de avaliação evoluiu ao longo dos anos, desde as formas tradicionais de mensuração de desempenho até abordagens mais modernas, que visam o desenvolvimento integral dos estudantes, incluindo competências cognitivas, socioemocionais e éticas. A avaliação no ensino médio, em particular, tem sido objeto de discussões e reformas, com o objetivo de alinhar o processo de avaliação aos novos paradigmas educacionais que valorizam a formação cidadã e crítica dos estudantes.

Historicamente, a avaliação surgiu como uma necessidade de medir e validar o conhecimento dos indivíduos. Na Grécia Antiga, os filósofos utilizavam questionamentos como forma de avaliar o raciocínio lógico e crítico dos seus discípulos. Com o tempo, essa prática evoluiu para sistemas mais formais de exame, especialmente a partir do século XIX, com o desenvolvimento dos sistemas educacionais modernos e a expansão do acesso à educação pública. No Brasil, a avaliação como conhecemos hoje começou a se consolidar na primeira metade do século XX, com a institucionalização dos exames como ferramenta de seleção e progressão nos sistemas escolares.

Segundo Luckesi (2011), "a avaliação da aprendizagem, no Brasil, tem sido historicamente utilizada como um mecanismo de controle social, além de uma ferramenta para seleção de indivíduos nas diversas etapas de ensino". Essa prática reflete a importância dada à avaliação como meio de garantir a qualidade do ensino e a equidade no acesso a oportunidades educacionais.

Com o avanço das teorias educacionais no século XX, a ideia de avaliação começou a se diversificar. O behaviorismo, por exemplo, propôs a avaliação como uma forma de medir respostas comportamentais específicas, enquanto as teorias cognitivistas e construtivistas trouxeram novas perspectivas, sugerindo que a avaliação deve considerar processos mentais complexos e a construção de conhecimento por parte dos estudantes.

A avaliação é definida como um processo sistemático e contínuo de coleta, análise e interpretação de dados para tomar decisões sobre o ensino e a aprendizagem (Perrenoud, 1999). Essa definição implica que a avaliação não é apenas um momento isolado no processo educativo, mas uma prática integrada que deve ocorrer ao longo de todo o percurso educacional. No ensino médio, a avaliação assume características específicas, pois se trata de uma etapa educacional marcada pela transição para a educação superior ou para o mercado de trabalho. Por isso, a avaliação precisa ser capaz de captar a complexidade do desenvolvimento dos alunos, considerando não apenas seus conhecimentos teóricos, mas também suas habilidades práticas e socioemocionais.

Entre as principais abordagens de avaliação, a avaliação formativa se destaca por monitorar a aprendizagem durante o processo, oferecendo feedback contínuo aos alunos e professores para melhorar o ensino e a aprendizagem. Black e Wiliam (1998) argumentam que a avaliação formativa tem o potencial de melhorar significativamente o desempenho dos estudantes, ao torná-los mais conscientes de seu processo de aprendizagem e ao permitir ajustes imediatos na prática pedagógica. Já a avaliação somativa, geralmente aplicada ao final de um ciclo, curso ou período letivo, busca medir o aprendizado acumulado pelos estudantes em relação aos objetivos educacionais preestabelecidos. Essa forma de avaliação é amplamente utilizada no ensino médio para decisões de promoção e certificação. Outra abordagem relevante é a avaliação diagnóstica,

que ocorre no início de um ciclo ou unidade de ensino, com o objetivo de identificar o nível de conhecimento prévio dos estudantes, permitindo ao professor adaptar seu plano de ensino às necessidades específicas da turma. Além disso, a avaliação autoavaliativa e coavaliativa encoraja os estudantes a refletirem sobre seu próprio aprendizado e a avaliarem seus pares, promovendo habilidades de autocrítica e colaboração. Para Andrade e Brookhart (2016), a autoavaliação e a coavaliação desenvolvem habilidades metacognitivas que são fundamentais para a aprendizagem ao longo da vida.

A avaliação educacional desempenha múltiplos papéis no ensino médio, incluindo o diagnóstico de necessidades educacionais, a promoção da aprendizagem contínua, a certificação do conhecimento adquirido e o apoio à tomada de decisões pedagógicas. A identificação das necessidades educacionais dos estudantes é fundamental para determinar quais conteúdos precisam ser revistos e quais habilidades devem ser desenvolvidas, contribuindo para um ambiente de aprendizagem mais inclusivo. Ao fornecer feedback regular, a avaliação fomenta uma cultura de aprendizagem contínua, incentivando os alunos a refletirem sobre seu próprio progresso e a desenvolverem estratégias para superar dificuldades. Segundo Nicol e Macfarlane-Dick (2006), o feedback é uma das mais poderosas influências na aprendizagem e no desempenho do aluno, quando usado de maneira eficaz.

Além disso, a avaliação tem um papel essencial na certificação e classificação dos estudantes, especialmente no contexto de exames nacionais, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) no Brasil. Esses exames influenciam diretamente as oportunidades acadêmicas e profissionais dos alunos, tornando-se um elemento central do ensino médio. A avaliação também fornece informações essenciais para os educadores, permitindo ajustes metodológicos e didáticos que melhor atendam às necessidades da turma. Por fim, ao estimular o autoconhecimento e a autorregulação, a avaliação contribui para que os estudantes desenvolvam uma consciência crítica sobre seus pontos fortes e fracos, promovendo uma aprendizagem mais autônoma e eficaz. Dessa maneira, a avaliação educacional no ensino médio deve ser planejada de forma criteriosa, garantindo que cumpra sua função de maneira justa, inclusiva e alinhada às demandas contemporâneas da educação.

2.1 OBJETIVO GERAL

Os objetivos da avaliação, particularmente no ensino médio, refletem a complexidade e a multiplicidade de funções que essa prática desempenha na educação. Entre os principais objetivos, podemos citar:

2.2 Objetivos Específicos

- **Avaliar o Desempenho Acadêmico:** Mensurar o aprendizado dos estudantes em relação aos objetivos do currículo, assegurando o desenvolvimento das competências necessárias para sua formação;
- **Identificar Habilidades e Interesses:** Reconhecer talentos e áreas de interesse dos alunos, auxiliando na orientação de suas trajetórias acadêmicas e profissionais;
- **Estimular a Autonomia e a Responsabilidade:** Incentivar os estudantes a assumirem um papel ativo no próprio aprendizado por meio de feedback contínuo e autoavaliação.
- **Garantir Inclusão e Equidade:** Adotar métodos avaliativos que atendam às diferentes necessidades e contextos dos alunos, assegurando igualdade de oportunidades.
- **Subsidiar Políticas Educacionais:** Fornecer dados para a formulação e aprimoramento de políticas públicas, permitindo melhorias na qualidade da educação.

3. A Avaliação no Ensino Médio: Desafios e Práticas Efetivas

A avaliação no ensino médio apresenta desafios específicos que demandam atenção cuidadosa dos educadores e gestores. Esta etapa é caracterizada por uma transição crucial na vida dos estudantes, em que eles se preparam para o ensino superior ou para o mercado de trabalho. Assim, a avaliação precisa considerar a complexidade dessa fase e as múltiplas dimensões do desenvolvimento juvenil.

3.1 Desafios na Avaliação do Ensino Médio

A padronização excessiva, representada por exames nacionais, pode restringir o desenvolvimento integral dos alunos ao priorizar apenas competências acadêmicas tradicionais. Esse cenário frequentemente leva ao "ensino para o teste", no qual professores e estudantes focam apenas nos conteúdos cobrados nas provas, em detrimento de outros aspectos essenciais do currículo (Freire, 1996).

Além disso, a equidade e a inclusão são fatores fundamentais a serem considerados. A avaliação deve respeitar a diversidade cultural, social e econômica dos alunos, garantindo oportunidades iguais de sucesso para todos (Bonniol & Vial, 2001). No entanto, um dos maiores entraves para a implementação de avaliações mais justas e diversificadas é a formação dos professores.

Muitas vezes, os educadores não recebem capacitação adequada para desenvolver e aplicar diferentes tipos de avaliação, o que limita sua capacidade de promover práticas mais inclusivas e eficazes (Luckesi, 2011). Assim, torna-se essencial repensar as estratégias avaliativas para garantir uma abordagem mais equitativa e alinhada às necessidades dos estudantes.

3.2 Práticas Efetivas de Avaliação no Ensino Médio

A diversificação das formas avaliativas, como o uso de portfólios, projetos, debates e autoavaliações, permite captar melhor as diversas habilidades e competências dos estudantes, evitando a limitação das provas tradicionais. Essa abordagem amplia as oportunidades de aprendizagem e incentiva o desenvolvimento de diferentes competências, tornando o processo avaliativo mais justo e eficiente (Perrenoud, 1999).

Além disso, o feedback contínuo e formativo desempenha um papel essencial no apoio ao aprendizado dos alunos. Ele deve ser específico, construtivo e voltado para o futuro, permitindo que os estudantes compreendam seus erros e identifiquem maneiras de melhorar seu desempenho. Quando bem aplicado, o feedback se torna uma ferramenta poderosa para estimular a reflexão e o aperfeiçoamento constante, promovendo um aprendizado mais eficaz e duradouro (Hattie & Timperley, 2007).

4. O Teste em Três Camadas: Conceito, Aplicação e Objetivos

O "teste em três camadas" é uma abordagem inovadora de avaliação que tem ganhado destaque no contexto educacional contemporâneo. Desenvolvido para proporcionar uma avaliação mais precisa e profunda da compreensão dos estudantes, esse modelo avalia não apenas o conhecimento factual, mas também a compreensão conceitual e a capacidade de reflexão crítica dos estudantes. Este texto explora em detalhes o conceito do teste em três camadas, como ele é estruturado, como pode ser aplicado na prática e quais são os seus principais objetivos educacionais.

O teste em três camadas é uma ferramenta de avaliação que busca aprofundar a análise da compreensão dos estudantes em três níveis distintos: conhecimento factual, compreensão conceitual e metacognição. Diferentemente dos testes tradicionais, que muitas vezes se concentram apenas em medir o conhecimento factual (fatos e informações memorizadas), o teste em três camadas também avalia como os alunos aplicam o conhecimento em situações reais e como refletem sobre o próprio processo de aprendizagem.

De acordo com Treagust (1988), o teste em três camadas foi originalmente desenvolvido para detectar concepções alternativas dos estudantes em ciência, especialmente na física, onde é comum que os estudantes possuam ideias pré-concebidas que não se alinham com o conhecimento científico formal. Desde então, essa metodologia tem sido adaptada e aplicada em diversas disciplinas, como matemática, química e biologia, devido à sua eficácia em diagnosticar profundamente as dificuldades de aprendizagem.

A estrutura do teste em três camadas organiza a avaliação dos estudantes em três níveis distintos, cada um com um foco específico. A primeira camada, voltada para o conhecimento factual, tem como objetivo medir a memorização de informações básicas, como definições, fórmulas, datas e eventos. Para isso, utiliza perguntas objetivas, como múltipla escolha e verdadeiro ou falso, garantindo que os alunos possuam uma base sólida de

conhecimento. Segundo Bransford et al. (2000), "o conhecimento factual é a base sobre a qual se constrói a compreensão conceitual".

A segunda camada, focada na compreensão conceitual, avalia a capacidade dos alunos de interpretar e aplicar conceitos em diferentes contextos. Em vez de exigir apenas a repetição de informações, essa etapa desafia os estudantes a estabelecer conexões entre ideias e resolver problemas que demandam raciocínio lógico e analítico. As questões são mais elaboradas e exigem explicações detalhadas ou a aplicação do conhecimento a novas situações.

A terceira camada aborda a metacognição, ou seja, a habilidade dos estudantes de refletirem sobre seu próprio processo de aprendizagem. Aqui, as perguntas estimulam os alunos a justificar suas respostas, explicando por que escolheram determinada alternativa ou como chegaram a determinada conclusão. Flavell (1979) define a metacognição como "o conhecimento e o controle sobre o próprio pensamento", essencial para o desenvolvimento da autonomia no aprendizado.

A aplicação do teste em três camadas segue algumas etapas fundamentais. O primeiro passo é o planejamento e desenvolvimento das questões, que devem ser cuidadosamente distribuídas entre as três camadas para garantir uma avaliação equilibrada. É essencial que as perguntas não apenas testem o que os alunos sabem, mas também como aplicam esse conhecimento e refletem sobre ele.

Na fase de implementação na sala de aula, o teste pode ser aplicado tanto de forma tradicional quanto digital, dependendo dos recursos disponíveis. Durante a aplicação, é importante orientar os alunos sobre o propósito das três camadas, incentivando-os a refletir criticamente sobre suas respostas.

Após a realização do teste, ocorre a etapa de análise e feedback, na qual os professores avaliam as respostas dos estudantes considerando os três níveis de conhecimento. Esse processo permite identificar tanto os pontos fortes quanto as dificuldades dos alunos, fornecendo um retorno detalhado e específico para cada camada.

Por fim, a fase de revisão e intervenção possibilita que os professores utilizem os resultados para planejar estratégias pedagógicas mais direcionadas.

Caso os estudantes apresentem dificuldades na compreensão conceitual, por exemplo, pode ser necessário revisar os conteúdos e oferecer atividades que reforcem o entendimento. Dessa forma, o teste em três camadas se torna uma ferramenta valiosa para aprimorar o ensino e promover uma aprendizagem mais profunda e reflexiva.

4.1 Objetivos do Teste em Três Camadas

Os principais objetivos do teste em três camadas são:

- **Promover uma Avaliação Profunda e Abrangente:** O teste em três camadas visa superar as limitações dos métodos tradicionais de avaliação, proporcionando uma compreensão mais completa do nível de aprendizado dos estudantes. Ele busca não apenas medir o que eles sabem, mas também como aplicam o conhecimento e como pensam sobre o seu próprio processo de aprendizagem.
- **Fomentar a Aprendizagem Ativa e Reflexiva:** Ao incluir uma camada de metacognição, o teste incentiva os alunos a refletirem sobre suas próprias práticas de estudo, estratégias de resolução de problemas e compreensão dos conceitos. Segundo Zimmerman (2002), "o desenvolvimento da autorregulação e das habilidades metacognitivas é crucial para a aprendizagem ao longo da vida".
- **Diagnosticar Concepções Alternativas e Lacunas de Conhecimento:** Um dos objetivos centrais do teste em três camadas é diagnosticar concepções errôneas ou incompletas que os estudantes possam ter, especialmente em áreas de ciências exatas. Isso permite que os professores abordem essas concepções diretamente, utilizando métodos de ensino que promovam uma melhor compreensão.
- **Apoiar a Tomada de Decisões Pedagógicas Informadas:** O teste fornece dados valiosos que podem ser utilizados pelos educadores para adaptar suas práticas pedagógicas às necessidades dos estudantes. Perrenoud (1999) argumenta que "a avaliação deve ser usada como uma ferramenta para orientar e melhorar o ensino, e não apenas como um mecanismo de controle".

4.2 Benefícios e Desafios na Implementação do Teste em Três Camadas

O teste em três níveis é um instrumento de avaliação inovador que possibilita uma avaliação mais detalhada do processo de aprendizado dos alunos. Esta abordagem mede o saber em diversos níveis, incluindo o conhecimento concreto, a utilização de conceitos e o pensamento crítico. Apesar de oferecer várias vantagens, a sua aplicação também se depara com alguns obstáculos.

Benefícios:

- **Avaliação Multidimensional:** Avalia diferentes aspectos do aprendizado, oferecendo uma visão mais completa das habilidades dos estudantes.
- **Promoção da Aprendizagem Ativa:** Incentiva os estudantes a se tornarem participantes ativos em seu próprio processo de aprendizagem, promovendo o desenvolvimento de habilidades críticas e reflexivas.
- **Identificação de Necessidades Educacionais:** Permite um diagnóstico preciso das necessidades individuais dos estudantes, ajudando a personalizar o ensino.

Desafios:

- **Tempo e Recursos:** A elaboração e correção do teste em três camadas pode ser mais demorada do que as avaliações tradicionais.
- **Capacitação de Professores:** Exige que os professores estejam bem preparados para desenvolver questões eficazes para cada camada e interpretar adequadamente os resultados.
- **Aceitação pelos Estudantes:** Alguns estudantes podem inicialmente resistir a esse tipo de avaliação, especialmente se estiverem acostumados a métodos mais tradicionais.

O teste em três camadas é uma ferramenta poderosa para promover uma avaliação mais justa, profunda e reflexiva. Ao considerar não apenas o

conhecimento factual, mas também a compreensão conceitual e a metacognição, essa abordagem permite uma análise mais abrangente do aprendizado dos estudantes. Para que sua implementação seja eficaz, é essencial que os educadores sejam capacitados para desenvolver e aplicar testes que realmente explorem essas três dimensões do conhecimento.

Além de ser um método avaliativo inovador, o teste em três camadas tem o potencial de transformar a maneira como compreendemos e apoiamos o processo de aprendizagem. Sua aplicação contribui para a criação de ambientes educacionais mais inclusivos e reflexivos, favorecendo o desenvolvimento integral dos alunos. Essa metodologia avalia a compreensão em diferentes níveis: conhecimento factual, aplicação de conceitos e raciocínio crítico, permitindo uma análise mais detalhada das habilidades dos estudantes. A seguir, serão apresentados exemplos práticos dessa abordagem em diversas disciplinas.

Química

Exemplo de Atividade: Reações Químicas

- **Primeira Camada (Conhecimento Factual):** Pergunte aos estudantes sobre os tipos de reações químicas, como síntese, decomposição, substituição simples e dupla.
- **Pergunta:** "Qual é o tipo de reação quando duas substâncias simples se combinam para formar uma substância mais complexa?"
- **Segunda Camada (Aplicação de Conceitos):** Dê uma equação química incompleta e peça a eles para balanceá-la.
- **Atividade:** "Balanceie a seguinte equação: $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$."
- **Terceira Camada (Raciocínio Crítico):** Apresente um problema onde os estudantes precisam prever os produtos de uma reação química complexa, levando em consideração fatores como energia de ativação e presença de catalisadores.

Problema: "Dada a reação entre ácido clorídrico (HCl) e hidróxido de sódio (NaOH), explique por que essa é uma reação exotérmica e o que aconteceria se um catalisador fosse adicionado."

Física

Exemplo de Atividade: Leis do Movimento de Newton

- **Primeira Camada (Conhecimento Factual):** Pergunte sobre as três leis de Newton.
- **Pergunta:** "Qual é a Primeira Lei de Newton e como ela é conhecida?"
- **Segunda Camada (Aplicação de Conceitos):** Forneça uma situação prática para que os estudantes apliquem a Segunda Lei de Newton.
- **Atividade:** "Um carro de 1000 kg acelera a 5 m/s^2 . Qual é a força resultante que age sobre o carro?"
- **Terceira Camada (Raciocínio Crítico):** Proponha um problema que envolva a aplicação das três leis de Newton em um sistema físico complexo, como uma colisão entre dois objetos.

Problema: "Explique o que acontece em uma colisão entre dois carros, um parado e outro em movimento, considerando a transferência de momento e energia, e como as três leis de Newton se aplicam nesse cenário.

Matemática

Exemplo de Atividade: Equações Quadráticas

- **Primeira Camada (Conhecimento Factual):** Pergunte sobre a fórmula de resolução de equações quadráticas.
- **Pergunta:** "Qual é a fórmula de Bhaskara para resolver uma equação quadrática?"
- **Segunda Camada (Aplicação de Conceitos):** Peça aos estudantes para resolverem uma equação quadrática específica usando a fórmula de Bhaskara.
- **Atividade:** "Resolva a equação quadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$ usando a fórmula de Bhaskara."
- **Terceira Camada (Raciocínio Crítico):** Proponha um problema onde os estudantes precisam identificar a relação entre os coeficientes da equação quadrática e suas raízes, e como isso se aplica em um contexto real, como o movimento de um projétil.

Problema: "Considere uma bola sendo lançada ao ar com uma trajetória parabólica. Como a equação quadrática que descreve sua trajetória pode ser usada para determinar o ponto mais alto e a distância percorrida?"

Biologia

Exemplo de Atividade: Genética e Hereditariedade

- **Primeira Camada (Conhecimento Factual):** Pergunte sobre conceitos básicos de genética, como alelos e genes.
- **Pergunta:** "O que são alelos e como eles diferem de genes?"
- **Segunda Camada (Aplicação de Conceitos):** Peça aos estudantes para resolverem um cruzamento genético usando um quadrado de Punnett.
- **Atividade:** "Realize um cruzamento entre um indivíduo heterozigoto (Bb) e um homozigoto recessivo (bb). Qual é a proporção esperada de fenótipos?"
- **Terceira Camada (Raciocínio Crítico):** Apresente um problema onde eles precisam considerar mutações genéticas e como elas afetam a sobrevivência e a seleção natural em um ambiente específico.

Problema: "Explique como uma mutação em um gene que confere resistência a um inseticida pode se espalhar rapidamente em uma população de insetos, considerando os princípios de seleção natural e evolução."

Essas atividades práticas cobrem diferentes camadas de conhecimento e podem ser adaptadas para diferentes níveis de dificuldade.

4.3 Aplicação do teste de três camadas.

O teste de três camadas é uma metodologia de avaliação educacional que estrutura o processo de aprendizagem em três níveis distintos. O primeiro nível, Conhecimento Básico, avalia a compreensão inicial dos conceitos fundamentais, garantindo que os estudantes possuam uma base sólida. No segundo nível, Aplicação, os alunos são desafiados a utilizar os conceitos aprendidos em situações práticas, demonstrando sua capacidade de transferência do conhecimento. Por fim, o terceiro nível, Análise Crítica, envolve

a resolução de problemas complexos que exigem pensamento crítico e criatividade, estimulando a autonomia e a capacidade de argumentação dos estudantes.

A importância dessa abordagem na avaliação educacional reside na sua capacidade de fornecer uma visão abrangente do progresso dos alunos. Ao permitir um diagnóstico preciso, o teste de três camadas identifica áreas específicas em que os estudantes necessitam de mais apoio, possibilitando intervenções pedagógicas mais eficazes. Além disso, contribui para o desenvolvimento de habilidades, promovendo tanto a prática quanto o aprimoramento do pensamento crítico. Outro benefício fundamental é a preparação para desafios reais, pois capacita os estudantes a enfrentar problemas complexos e situações do mundo real com mais segurança e autonomia.

Dessa forma, essa metodologia garante que a avaliação vá além da simples memorização, tornando-se um processo significativo que impulsiona o crescimento acadêmico e pessoal dos estudantes.

4.4 A Integração do Teste de 3 Camadas com a Análise Combinatória na Evolução dos Estudantes:

A educação moderna busca constantemente métodos inovadores para aprimorar a aprendizagem dos estudantes. Uma abordagem promissora nesse contexto é a integração do teste de 3 camadas com a análise combinatória, uma metodologia capaz de proporcionar uma compreensão mais profunda e diversificada dos conceitos matemáticos. A análise combinatória, ramo da matemática que estuda as diferentes maneiras de agrupar elementos de um conjunto, levando em consideração determinadas restrições, é essencial para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e de pensamento lógico.

A aplicação da análise combinatória pode ser organizada de forma progressiva, conforme o conceito das três camadas, o que facilita a construção do conhecimento. No primeiro nível, os estudantes são introduzidos aos princípios fundamentais da análise combinatória, como permutações, combinações e o princípio fundamental da contagem. Exercícios simples, como

calcular o número de maneiras de organizar livros em uma prateleira, ajudam a solidificar esses conceitos. No segundo nível, os estudantes aplicam esses princípios a problemas mais complexos, como determinar o número de maneiras de formar comissões em uma turma ou calcular probabilidades em jogos de azar. Esta aplicação prática reforça o entendimento da teoria e a sua relevância no cotidiano. Já no terceiro nível, os estudantes enfrentam problemas que exigem uma combinação de conceitos e criatividade. Desafios como otimizar a organização de eventos ou resolver problemas de logística com múltiplas restrições estimulam o desenvolvimento do pensamento crítico e preparam os alunos para situações reais.

A integração do teste de 3 camadas com a análise combinatória traz diversos benefícios. Primeiramente, permite o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, já que os estudantes aprendem a abordar questões de diferentes ângulos e a buscar soluções criativas. Além disso, o trabalho com análise combinatória no terceiro nível fomenta o pensamento crítico, essencial para lidar com problemas complexos. Por fim, essa metodologia prepara os estudantes para o futuro, pois as habilidades adquiridas são indispensáveis não apenas para o sucesso acadêmico, mas também para enfrentar desafios profissionais e pessoais.

Portanto, a combinação do teste de 3 camadas com a análise combinatória configura-se como uma abordagem eficaz para promover a evolução dos estudantes. Ao integrar conhecimento básico, aplicação prática e análise crítica, essa metodologia contribui para a construção de uma compreensão profunda dos conceitos e para o desenvolvimento de habilidades essenciais, preparando os alunos para o sucesso em diversas áreas da vida.

5. A aplicação do teste de 3 camadas com os estudantes

O teste foi aplicado a um grupo de 30 estudantes da segunda série do ensino médio, com o objetivo de avaliar suas dificuldades em conceitos de Análise Combinatória. Esses estudantes já possuíam algum conhecimento prévio sobre o tema, e a avaliação foi conduzida utilizando a metodologia do teste em três camadas. A primeira etapa consistiu na coleta de dados, que seriam analisados posteriormente. Com base nos resultados obtidos, foi planejada uma intervenção de quatro aulas para cobrir possíveis lacunas de aprendizagem, focando nas áreas identificadas pelo teste de entrada. Após a intervenção, a turma foi submetida a uma nova avaliação para observar o avanço ou a falta dele.

O objetivo do teste foi entender de forma mais assertiva e individualizada as dificuldades dos estudantes. Devido à limitação de tempo, houve uma adaptação no processo de coleta de dados. A avaliação foi estruturada de maneira objetiva, com a primeira camada abordando o conhecimento factual, que é o conteúdo tradicional. A segunda camada foi destinada à compreensão conceitual, enquanto, na terceira camada, que normalmente se refere à metacognição, houve uma alteração. Em vez de uma questão aberta, que exigiria uma escrita dos alunos, optou-se por avaliar o nível de confiança dos estudantes ao responderem as duas camadas anteriores. Essa modificação permitiu uma coleta de dados mais eficiente e direcionada para a elaboração do plano de aula.

O teste foi baseado principalmente em questões do PAEBES (Programa de Avaliação da Educação Básica do Estado), uma ferramenta de avaliação estadual voltada para o nivelamento de estudantes do ensino médio. Vale destacar que, atualmente, o PAEBES foi substituído pela AMA (Avaliação de Monitoramento da Aprendizagem). O teste consistiu em dez atividades, todas organizadas de acordo com a metodologia de três camadas, mas é importante observar que os estudantes ainda não haviam passado por uma intervenção mais individualizada antes da avaliação inicial.

Aplicada a primeira avaliação tivemos os seguintes resultados:

Objetivo Geral

Criar uma nova visão de avaliação dos estudantes visando um maior alcance em suas individualidades

Objetivos Específicos

- Desenvolver instrumentos de avaliação que considerem as competências e habilidades de cada aluno;
- Implementar avaliações formativas com feedback contínuo para monitorar o progresso dos estudantes;
- Criar planos de estudo personalizados a partir dos resultados das avaliações;
- Estimular a autoavaliação e reflexão dos alunos sobre seu aprendizado;
- Fomentar a colaboração entre alunos e professores na definição de objetivos e estratégias de aprendizagem.

AVALIAÇÃO DE ENTRADA

Questão 1

Camada 1 - (PAEBES 2015) No sistema de numeração binário, um código é formado apenas pelos algarismos 0 (zero) e 1 (um). Nesse sistema, Amanda irá criar um código utilizando 4 vezes o algarismo 1 e 3 vezes o algarismo 0. Qual é o total de possibilidades para esse código que Amanda criará?

- a) 35 b) 40 c) 49 d) 1 225 e) 5 040

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior

- a) Como temos sete algarismos sendo três zeros e quatro uns, então temos que dividir $7!$ por $4!.3!$

- b) Como temos sete algarismos sendo três zeros e quatro uns, então temos que dividir $7!$ por $4!.3!$. Após isso devemos acrescentar cinco pois são as posições em que os zeros conseguem se colocar entre os uns.
- c) Como temos sete posições para distribuir os zeros e uns que juntos somam sete então teremos 7.7
- d) Como se trata de uma combinação teremos que combinar $C_7^3.C_7^4$.
- e) Como temos uma permutação, então basta encontrar o valor de $7!$

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores?

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 2

Camada 1 - (PAEBES – 2015) Nicolas foi a uma loja comprar materiais de construção para a reforma de sua sala. A loja disponibiliza 3 tipos de cimento, 8 tipos de piso e 5 tipos de rejunte. Como a sala da casa de Nicolas tem dois ambientes, ele resolveu escolher 2 tipos diferentes de pisos, 1 tipo de cimento e 1 tipo de rejunte. De quantas maneiras distintas Nicolas pode escolher esse material?

- a) 23 b) 24 c) 420 d) 840 e) 960

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como temos de escolher dois tipos de pisos, um tipo de cimento e um tipo de rejunte então teremos $8.2 + 5 + 3$.
- b) Como temos que escolher um tipo de cimento e um tipo de rejunte, então teremos 5.3 , já o piso, teremos que escolher dois tipos logo devemos somar 8 e teremos como solução $5.3+8$.
- c) Como temos que escolher dois pisos dentre os oito possíveis então faremos C_8^2 , já os cimentos e os rejuntas, teremos que escolher apenas um de cada, portanto teremos como solução $C_8^2.5.3$.

d) Como temos que escolher dois pisos dentre os oito possíveis então faremos C_8^2 , já os cimentos e os rejantes, teremos que escolher apenas um de cada, portanto teremos como solução $C_8^2 \cdot 5 \cdot 3$. Mas como os pisos ainda podem ter sido escolhidos em ordem alternadas, então devemos multiplicar por $2!$. E nesse caso $(C_8^2 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 2!$

e) Como temos de escolher dois pisos, basta utilizar o princípio multiplicativo e nesse caso teremos $8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 3$.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 3

Camada 1 - (PAEBES – 2015) As 10 turmas de um curso utilizarão as 2 salas de multimídia do prédio para a apresentação do trabalho final dos alunos. A cada dia da última semana do curso, 2 dessas turmas farão sua apresentação. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidas as duas turmas que se apresentarão no terceiro dia dessa semana?

a) 3 b) 5 c) 15 d) 30 e) 90

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

a) Como terão turmas todos os dias, então das dez turmas já serão utilizadas 5, daí teremos cinco opções para escolher a segunda turma para o primeiro dia, quatro para o segundo dia e 3 para o terceiro dia.

b) Como terão turmas todos os dias, então das dez turmas já serão utilizadas 5. Começando a escolha da segunda turma pelo terceiro dia, visto que o terceiro dia é a exigência, então teremos 5 possibilidades.

c) Como serão duas turmas por dia, então escolheremos duas para o primeiro dia, duas para o segundo dia, restando ainda 6 turmas. No terceiro dia então teremos que escolher duas das seis turmas restantes. Nesse caso C_6^2 .

d) Como serão duas turmas por dia, então escolheremos duas para o primeiro dia, duas para o segundo dia, restando ainda 6 turmas. No terceiro dia então teremos que escolher duas das seis turmas restantes. Nesse caso C_6^2 . Feito

isso, multiplicaremos por $2!$, pois podemos escolher as duas turmas de maneira alternada.

e) Como serão duas turmas por dia, então escolheremos duas para o primeiro dia, duas para o segundo dia, restando ainda 6 turmas. No terceiro dia então teremos que escolher duas das seis turmas restantes. Nesse caso C_6^2 . Feito isso, multiplicaremos por 6, pois ainda restam seis turmas para serem escolhidas e dessa forma poderemos escolher qualquer uma delas.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 4

Camada 1 - (PAEBES – 2015) A professora de Química Bárbara, para explicar as reações químicas de dupla troca, realizou em cada uma das aulas um experimento utilizando um sal e um ácido. Para realizar esses experimentos, a professora possui 5 sais e 3 ácidos. Qual é a quantidade de aulas necessárias para realizar todos os diferentes experimentos utilizando 1 sal e 1 ácido?

a) 4 b) 10 c) 15 d) 20 e) 60

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

a) Como temos 5 sais e 3 ácidos, usaremos nos três primeiros dias um de cada, e no quarto dia dois sais que foram os que sobraram.

b) Como temos 5 sais e 3 ácidos então basta combinar eles da seguinte forma C_5^3 .

c) Como temos 5 sais e 3 ácidos, basta multiplicar eles $5 \cdot 3$.

d) Como a ordem das escolhas interferem no resultado devemos arranjar eles da seguinte forma: A_5^3 .

e) Como a ordem das escolhas interferem no resultado devemos arranjar eles da seguinte forma: A_5^3 . Feito isso multiplicamos por 3, pois a quantidade de ácido é menor que a de sal precisando então escolher ácidos repetidos.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 5

Camada 1 - (PAEBES – 2015) Uma empresa fabricante de celulares permite que os clientes, durante a compra, selecionem as configurações desejadas para o dispositivo. As opções de escolha consistiam em 2 modelos de processadores, 4 opções de capacidade de armazenamento interno, 3 tipos de memória interna, além de 6 modelos de capas. Um cliente, ao realizar a compra de um desses dispositivos, precisa escolher uma opção de cada uma dessas configurações. Qual é o total de possíveis configurações permitidas para esse dispositivo?

a) 4 b) 15 c) 24 d) 144 e) 720

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como temos 4 opções, devemos escolher uma de cada, portanto 4 opções.
- b) Como temos 2 modelos de processador, 4 opções de capacidade de armazenamento interno, 3 tipos de memória interna e 6 opções de capas. Basta somar as opções.
- c) Como temos 4 opções de acessórios, basta desenvolvermos 4!.
- d) Como temos 2 modelos de processador, 4 opções de capacidade de armazenamento interno, 3 tipos de memória interna e 6 opções de capas. Basta multiplicar as opções.
- e) Como as opções tem 2, 3, 4, e 6, pelo Princípio Fundamental da Multiplicação temos que considerar como solução 6!.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 6

Camada 1 - (PAEBES – 2015) Em um concurso literário, o vencedor poderá escolher como prêmio 5 livros. Para a escolha, foram ofertados 7 livros de ficção científica, 6 livros de romance e 5 livros de suspense. Larissa foi a vencedora e decidiu escolher 3 livros de ficção e 2 livros de suspense. Qual é o total de possibilidades de escolhas para esses livros que Larissa poderá fazer?

- a) 4 b) 350 c) 792 d) 4 200 e) 95 040

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como são três opções da primeira escolha mais uma para a segunda escolha.
 b) Como serão escolhidas 3 entre 7 opções dos livros de ficção e 2 entre 5 opções de suspense, então teremos $C_7^3 \cdot C_5^2$, pois independe da ordem de escolhas dos livros.
 c) Como temos 7 livros de ficção e 5 livros de suspense, e desses precisamos escolher 3 de um e dois do outro, como a ordem da escolha não importa, então teremos C_{12}^5 .
 d) Como precisamos escolher 3 entre os 7 livros de ficção, pelo Princípio Fundamental da Multiplicação temos $3 \cdot 7$ e também precisamos escolher 2 entre os 5 livros de suspense, devemos resolver da seguinte maneira: $3 \cdot 7 + A_5^2$.
 e) Como a ordem das escolhas alteram o resultado e temos que escolher 3 livros entre os 7 de ficção e 2 entre os 5 livros de suspense devemos desenvolver A_{12}^5 .

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 7

Camada 1 - (PAEBES – 2015) Em um time de basquete, o treinador optou por iniciar uma partida com 1 armador, 3 alas e 1 pivô. No elenco desse time, há 2 armadores, 7 alas e 3 pivôs. De quantas maneiras diferentes esse treinador pode começar essa partida?

- a) 40 b) 42 c) 210 d) 845 e) 5 040

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como temos de escolher 5 jogadores entre 12 possíveis então teremos 5.8, visto que o 8 representa: 2 armadores, 3 pivores e os 3 entre os 7 alas.
 b) Como temos que escolher três posições então teremos pelo Princípio Multiplicativo $2 \cdot 7 \cdot 3$.
 c) Como as escolhas por posições devem ser escolhidas separadamente então teremos que para armadores 2 opções onde se escolhe um, para alas teremos 7 opções onde se escolhe 3 e para pivôs 1 entre três possíveis, logo como a ordem das escolhas por posições não altera a situação teremos: $C_3^1 \cdot C_7^3 \cdot C_2^1$.
 d) AINDA NÃO CONSEGUI
 e) Como dos doze atletas disponíveis devemos escolher 5 e a ordem de escolhas não alteram a situação, basta desenvolver C_{12}^5 .

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 8

Camada 1 - (PAEBES – 2015) Em uma lanchonete são disponibilizados alguns combos de lanches, que consistem em o cliente escolher 1 bebida, 1 sanduíche e 1 sobremesa. No cardápio dessa lanchonete, constam 9 opções de bebida, 12 opções de sanduíche e 4 tipos de sobremesa. De quantas maneiras distintas um cliente pode escolher um combo nessa lanchonete?

- a) 3 b) 25 c) 432 d) 2 300 e) 13 800

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como teremos que escolher uma opção de cada, então são três opções.
- b) Como teremos que escolher uma opção de cada (bebida, sanduiche e sobremesa) e em cada opção teremos quantidades diferentes, então basta somarmos as possibilidades de cada opção.
- c) Pelo Princípio Fundamental de Contagem basta multiplicarmos as possibilidades de cada opção, visto que as escolhas são apenas uma de cada opção.
- d) Como temos de escolher três em vinte e cinco opções, e a ordem das escolhas não importam para o cardápio, então basta desenvolver C_{25}^3 .
- e) Como temos de escolher três em vinte e cinco opções, e a ordem das escolhas importa para o cardápio, então basta desenvolver A_{25}^3 .

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro
- b) inseguro
- c) neutro
- d) seguro
- e) muito seguro

Questão 9

Camada 1 - (PAEBES – 2015) José Ricardo tem 7 blusas de seleções de futebol, sendo três delas da seleção brasileira e as demais de outros países. Certo dia, ele decidiu doar duas camisas dessa coleção. Quantas possibilidades diferentes José Ricardo terá para escolher as duas camisas para doação, sendo uma delas da seleção brasileira e a outra da seleção de outro país?

- a) 12
- b) 13
- c) 21
- d) 42
- e) 49

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como serão doadas 2 blusas, onde uma é do Brasil e a outra não será do Brasil, então basta escolhermos a do Brasil (3) e a outra não será do Brasil (4).

b) Como serão doadas 2 blusas, então pelo princípio aditivo teremos na primeira escolha 7 opções e na segunda 6 opções pois uma já foi doada logo teremos $7+6$ possibilidades.

c) Como serão doadas duas blusas teremos que escolher a primeira entre as sete possíveis, já a segunda precisa ser do Brasil e, portanto, teremos $7 \cdot 3$ possibilidades.

d) Como serão doadas 2 blusas, então pelo princípio multiplicativo teremos na primeira escolha 7 opções e na segunda 6 opções pois uma já foi doada logo teremos $7 \cdot 6$.

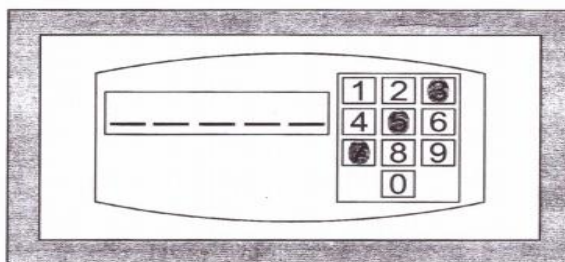
e) Como serão doadas duas blusas e a ordem delas não importará, então teremos 7 opções para a primeira e 7 para a segunda, ou seja, $7 \cdot 7$.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores?

a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 10

Camada 1 - (PAEBES – 2015) Mauro esqueceu a senha de seu cofre. Ele sabe que a senha é formada por 5 dígitos e que as teclas utilizadas para o abrir da última vez estão marcadas, conforme o desenho abaixo.



Ele lembra ainda que as teclas 3 e 7 foram utilizadas duas vezes para compor essa senha. Qual é o número total de senhas distintas que Mauro pode verificar para abrir esse cofre?

a) 10 b) 12 c) 30 d) 120 e) 125

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como temos que descobrir quantas possibilidades de senha com cinco dígitos e desse cinco, temos 2 desses que se repetem, então basta multiplicar $5 \cdot 2$ (quantidade de dígitos vezes quantidade dos dígitos que se repetem).
- b) Como temos que descobrir a quantidade de possibilidades de senhas possíveis, basta utilizar o princípio Fundamental de contagem multiplicando a quantidade de dígitos utilizados na senha pela quantidade de dígitos que se repetem. Como a ordem deles alteram a quantidade, então teremos $3! \cdot 2!$.
- c) Como temos dos cinco dígitos dois que se repetem, então teremos uma permutação com repetição que deve ser calculado como $P_5^{2,2}$.
- d) Como temos cinco dígitos na senha e a ordem deles altera a senha então teremos uma permutação simples P_5 .
- e) Como temos cinco dígitos na senha e a ordem deles altera a senha então teremos uma permutação simples P_5 . Feito isso devemos somar 5, pois temos números que se repetem e pelo Princípio da adição devemos adicionar as possibilidades sempre que isso acontece.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Tabela 1

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Acertos	7	9	11	8	11	5	2	6	5	9
Muito Seguro	2	3	3	1	3	0	0	0	1	2

Após a aplicação da primeira avaliação com o teste de três camadas, através de observações detalhadas sobre os erros e acertos dos estudantes, foi realizado um plano de aula para intervenção dessa turma. O plano de aula tinha como prioridade trabalhar com princípio multiplicativo básico; permutação simples; permutação com repetição; permutação circular; combinação simples. Importante ressaltar os resultados da terceira camada onde foram analisadas a

quantidade de respostas "Muito Seguro", onde se calcula a proporção de respostas certas com a segurança dessas respostas.

A intervenção visa não somente a aprendizagem dos conteúdos abordados como também a segurança com que os estudantes acreditam neles próprios "Autonomia e protagonismo. Após a intervenção foi realizado um segundo teste em três camadas onde conseguimos os seguintes resultados:

Questão 1

Camada 1 - (PAEBES – 2016) Darah procurou uma agência de turismo para comprar um pacote de viagem para o Ceará. A agência ofereceu à Darah 8 opções de passeios mais procurados nesse destino para que ela escolhesse 5 para compor o seu pacote. De quantas maneiras diferentes Darah pode escolher seus 5 passeios entre os 8 oferecidos pela agência?

- a) 40 b) 56 c) 120 d) 336 e) 6 720

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como temos 8 opções de passeio e queremos escolher 5, pelo Princípio Fundamental de Contagem temos $8 \cdot 5$.
- b) Como temos 8 passeios e destes devemos escolher 5 e a ordem deles não importa então teremos C_8^5 .
- c) Como devemos escolher 5 passeios e a ordem de escolhas modifica o resultado temos P_5 .
- d) Como temos que escolher 5 passeios entre os 8 possível e a ordem de escolhas interferem no resultado, então teremos A_8^5 .
- e) Como temos que escolher 5 passeios entre os 8 possível e a ordem de escolhas interferem no resultado, então teremos A_8^3 .

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores?

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 2

Camada 1 - (PAEBES – 2016) Uma senha de 6 dígitos será criada com o seguinte critério: os dois primeiros caracteres devem ser duas vogais distintas; os dois caracteres centrais devem ser dois algarismos quaisquer; e os dois últimos caracteres devem ser sinais escolhidos entre #, \$, % e @. Quantas senhas distintas podem ser criadas seguindo esse critério?

- a) 21 600 b) 24 000 c) 28 800 d) 32 000 e) 40 000

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

a) Como teremos que escolher duas vogais distintas, então teremos 5.4, os dois algarismos da mesma forma 10.9 e por fim os caracteres 4.3, sendo assim teremos:

5.4.10.9.4.3.

b) Como teremos que escolher duas vogais distintas, então teremos 5.4, os dois algarismos, como não têm restrição, então podemos repetir 10.10 e por fim os caracteres 4.3, sendo assim teremos: 5.4.10.10.4.3.

c) Como teremos que escolher duas vogais distintas, então teremos 5.4, os dois algarismos da mesma forma 10.9 e por fim os caracteres que não tem restrição alguma podemos repeti-los 4.4, sendo assim teremos: 5.4.10.9.4.4.

d) Como teremos que escolher duas vogais distintas, então teremos 5.4, os dois algarismos como não têm restrição alguma então podemos repeti-los 10.10 e por fim os caracteres que também não tem restrição alguma 4.4, sendo assim teremos: 5.4.10.10.4.4.

e) Como teremos que escolher duas vogais, então teremos 5.5, os dois algarismos da mesma forma 10.10 e por fim os caracteres 4.4, sendo assim teremos: 5.5.10.10.4.4.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 3

Camada 1 - (PAEBES – 2016) Uma banda fará uma turnê de pequenas apresentações para divulgar as 12 músicas do atual álbum de trabalho. Dessas músicas, 5 já se tornaram sucesso nas rádios e, por isso, uma ou duas entre elas devem ser tocadas em todas as apresentações. O contrato prevê que o repertório de cada apresentação deve ser composto sempre por 6 músicas. Quantos repertórios distintos, no máximo, essa banda poderá apresentar nessa turnê?

- a) 210 b) 350 c) 455 d) 840 e) 924

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como precisamos escolher 2 de 5 músicas de sucesso e a ordem dessas escolhas não alteram o repertório C_5^2 . E da mesma forma escolher outras cinco músicas entre as sete restantes C_7^5 . Com isso teremos $C_5^2 \cdot C_7^5$.
- b) Como precisamos escolher 2 de 5 músicas de sucesso e a ordem dessas escolhas não alteram o repertório C_5^2 . E da mesma forma escolher outras cinco músicas entre as sete restantes C_7^4 . Com isso teremos $C_5^2 \cdot C_7^4$.
- c) Como precisamos escolher uma ou duas músicas de sucesso, então precisamos combinar, visto que a ordem de escolhas não altera o repertório das seguintes formas C_5^1 ou C_5^2 , e da mesma forma com as outras músicas que não fazem sucesso C_7^5 ou C_7^4 . Sendo assim teremos como resultado o seguinte: $C_5^1 \cdot C_7^5 + C_5^2 \cdot C_7^4$.
- d) Como a ordem das escolhas das músicas interferem no repertório temos, para a escolhas das duas músicas de sucesso A_5^3 . Já para as cinco restantes teremos A_7^5 . E então teremos como solução $A_5^3 + A_7^5$.
- e) Como precisamos escolher duas músicas de sucesso e 4 músicas aleatórias ou 1 música de sucesso e 5 músicas aleatórias, então teremos C_{12}^6 .

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 4

Camada 1 - (PAEBES – 2016) Laura coleciona bonecas típicas de cada local que já visitou. Ela possui, ao todo, 8 bonecas, sendo 3 delas de locais da região Sudeste, 2 da região Norte e 3 da região Centro-Oeste. Durante uma campanha para arrecadar brinquedos para a creche de seu bairro, ela decidiu doar 3 dessas bonecas, uma de cada região. De quantas formas diferentes Laura poderá escolher essas 3 bonecas para a doação?

- a) 18 b) 24 c) 56 d) 336 e) 512

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como devemos escolher três boneca uma de cada região e visto que a ordem das escolhas não altera o conjunto de bonecas a ser doados, então pelo Princípio Fundamental de Contagem teremos 3.2.3.
- b) Como temos que doar três bonecas de um total de oito e visto que a ordem das escolhas não altera o conjunto de bonecas a serem doadas, então pelo Princípio Fundamental de Contagem teremos 8.3.
- c) Como devemos escolher três boneca e visto que a ordem das escolhas não altera o conjunto de bonecas a ser doados, então pelo Princípio Fundamental de Contagem teremos C_8^3 .
- d) Como devemos escolher três boneca e visto que a ordem das escolhas altera o conjunto de bonecas a ser doados, então pelo Princípio Fundamental de Contagem teremos 8.7.6.
- e) Como devemos escolher três boneca e visto que a ordem das escolhas altera o conjunto de bonecas a ser doados, então pelo Princípio Fundamental de Contagem teremos 8.8.8.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 5

Camada 1 - (PAEBES – 2016) O treinador do time de handebol de uma escola precisa de um jogador titular e um reserva para completar o time que participará de um campeonato. Na escolinha em que ele atua, existem ainda 12 alunos que não foram convocados. De quantas maneiras diferentes esse treinador pode escolher um jogador titular e um reserva entre esses alunos?

- a) 12 b) 24 c) 66 d) 132 e) 144

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

a) Como precisamos escolher de 12 jogadores disponíveis um titular e um reserva, então teremos para a escolha de um titular 12 opções, já para o reserva qualquer outro jogador poderá ser chamado e nesse caso colocaremos 1 opção sendo a solução: 12.1.

b) Como deveremos escolher dois jogadores dos doze disponíveis, então teremos como solução 12.2.

c) Como deveremos escolher 2 jogadores dentre os doze disponíveis e visto que a ordem de escolhas deles não alteram os escolhidos, então teremos C_{12}^2 .

d) Como deveremos escolher 2 jogadores dentre os doze disponíveis e visto que a ordem de escolhas deles alteram os escolhidos, então teremos A_{12}^2 .

e) Como deveremos escolher 2 jogadores, um titular e outro reserva, pelo Princípio Fundamental de Contagem teremos 12 na primeira escolha e 12 na segunda escolha, já que temos 12 atletas a disposição do time.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores?

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 6

Camada 1 - (PAEBES – 2016) Uma empresa modificou as matrículas dos funcionários registrados no departamento de recursos humanos. Assim, o novo

número de matrícula é formado por quatro algarismos distintos, de 0 a 9, sendo aqueles terminados em um número primo reservados para novos funcionários dessa empresa. Com essa mudança, quantos são os números de matrícula disponíveis para novos funcionários?

- a) 1 792 b) 2 016 c) 2 880 d) 5 040 e) 10 000

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

a) Como o número de matrícula dos funcionários novos termina sempre com algarismos primos temo que começando pela restrição quatro possibilidades. Como os números deveram ter algarismos distintos e não começados por zero, então temos como solução: 8.8.7.4.

b) Como o número de matrícula dos funcionários novos termina sempre com algarismos primos temo que começando pela restrição quatro possibilidades. Como os números deveram ter algarismos distintos, então temos como solução: 9.8.7.4.

c) Como o número de matrícula dos funcionários novos termina sempre com algarismos primos temo que começando pela restrição quatro possibilidades. Como os números deveram ter algarismos distintos, então temos como solução: 10.9.8.4.

d) Como temos um número com quatro dígitos distintos e temos dez algarismos para distribuir, então teremos como solução: 10.9.8.7.

e) Como temos um número com quatro dígitos e temos dez algarismos para distribuir, então teremos como solução: 10.10.10.10.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 7

Camada 1 - (PAEBES – 2016) Um coordenador deseja montar grupos de 3 funcionários, entre os 6 membros de sua equipe, para participarem de um revezamento de horas extras aos sábados. Dois desses funcionários são novos

na equipe e, por isso, não podem estar juntos em um mesmo grupo. Por quantos sábados seguidos essa equipe poderá trabalhar sem repetir os grupos escalados?

- a) 12 b) 16 c) 20 d) 24 e) 60

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

a) Como os novos funcionários não podem estar juntos, então escolhemos um dos dois para fazer parte do grupo e dos outros quatro escolhemos dois para completar o grupo. Assim teremos como solução $2.C_4^2$.

b) Como os novos funcionários não podem estar juntos, então escolhemos um dos dois para fazer parte do grupo e dos outros quatro escolhemos dois para completar o grupo. Assim teremos $2.C_4^2$ possibilidades. Ainda teremos grupos em que eles não estarão e será selecionado da seguinte forma C_4^3 . Portanto teremos $2.C_4^2 + C_4^3$.

c) Como precisaremos de grupos com três funcionários e sabendo que a ordem de escolhas não altera o grupo, então teremos como solução: C_6^3 .

d) Como existem grupos em que os novatos estarão envolvidos e grupos em que eles não estarão e sabendo que a ordem em que escolheremos os funcionários não alteram o grupo teremos como solução: $C_6^3.C_4^3$.

e) Como existem grupos em que os novatos estarão envolvidos e grupos em que eles não estarão e sabendo que a ordem em que escolheremos os funcionários não alteram o grupo teremos como solução: $C_6^3.3$.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 8

Camada 1 - (PAEBES – 2017) Uma determinada empresa fabrica materiais escolares, dedicando-se exclusivamente à produção de cadernos, livros e agendas. Esses materiais podem ter quatro diferentes tipos de acabamento: apenas brochura, apenas espiral, capa dura com brochura e capa dura com

espiral. Essa empresa tem disponíveis cinco opções de cores para a capa dura e três opções de tamanho para o espiral, porém não produz agendas com apenas brochura. Quantas variações de materiais escolares essa empresa produz?

- a) 15 b) 27 c) 71 d) 81 e) 180

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como temos 3 tamanhos de espiral e 5 cores para os cadernos de capa dura, então teremos 3.5 possibilidades.
- b) Como podemos encontrar 3 tipos de material (Caderno; Agenda e Livros); 3 tamanhos de espiral; e três tipos de combinações (Capa dura com espiral; cada dura com brochura; e espiral), visto que as agendas não possuem brochuras, então teremos 3.3.3 possibilidades.
- c) Como queremos saber quantas possibilidades teremos começaremos pelos livros: 1 tipo de brochura; 3 tipos de espiral; 5 tipos de Capa Dura com Brochura; e 3.5 tipos Capa Dura com Espiral. As agendas: espiral; 5 Capa Dura com Brochura; e 3.5 Capa Dura com Espiral. Os Cadernos: 1 tipo de brochura; 3 tipos de espiral; 5 tipos de Capa Dura com Brochura; e 3.5 Capa Dura com Espiral. Pelo Princípio aditivo teremos como solução: $1+1+3+3+3+5+5+5+3.5+3.5+3.5$
- d) Como podemos encontrar 3 tipos de material (Caderno; Agenda e Livros); 3 tamanhos de espiral; e três tipos de combinações (Capa dura com espiral; cada dura com brochura; e espiral), visto que as agendas não possuem brochuras, e ainda como a ordem de escolhas alteram o resultado, então teremos 3.3.3.3 possibilidades.
- e) Como temos 3 tamanhos de espirais; 5 tipos de cores para os capa dura; 3 tipos de materiais (Agenda; Livros; e Cadernos); e 4 possibilidades para cada material (Brochura; Espiral; Capa Dura com Brochura; e Capa Dura com Espiral), então teremos como solução: 3.4.5.3.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 9

Camada 1 - (PAEBES – 2017) Arielly deseja organizar em uma fileira, na prateleira de sua cozinha, três vidros de molhos de pimenta, dois de maionese, um de tomate, um de iogurte e um de gergelim. De quantas formas diferentes Arielly pode organizar sua prateleira de molhos em uma fileira?

- a) 120 b) 336 c) 3 360 d) 5 040 e) 40 320

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

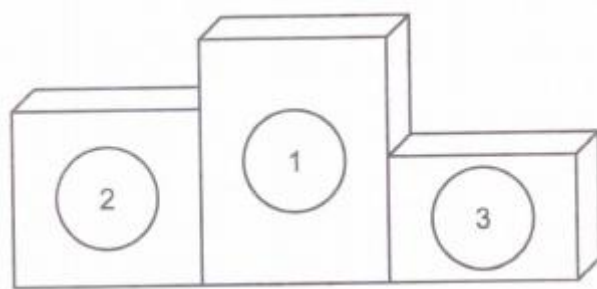
- a) Como temos 5 opções de produtos, e como a ordem com que eles são colocados importa, então teremos como opção $P_5 = 5!$.
- b) Como possuímos 8 vidros e 5 opções de produtos teremos, e a ordem deles importa, então teremos como opção A_8^3 .
- c) Como teremos 8 vidros com uma das opções tendo 3 vidros; uma outra opção tendo 2 vidros e o restante das opções um vidro de cada, e a ordem deles alteram o resultado, então teremos $P_8^{3,2}$.
- d) Como teremos 8 vidros e a ordem deles não alteram o resultado, então teremos $8!/8$.
- e) Como teremos 8 opções de vidro e a ordem de escolhas deles altera o resultado, então teremos $P_8 = 8!$.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Questão 10

Camada 1 - (PAEBES – 2019) Luan e mais 11 amigos vão disputar uma corrida de kart. Ao final dessa corrida, os 3 primeiros colocados serão fotografados em um pódio numerado, ilustrado na figura abaixo.



Quantas formações distintas de pódio podem ser obtidas nessa corrida?

- a) 33 b) 36 c) 220 d) 1 320 e) 1 728

Camada 2 - Qual explicação mais se adequa a sua resposta no item anterior?

- a) Como teremos 11 competidores disputando 3 vagas, então temos como solução $11 \cdot 3$.
- b) Como teremos 12 competidores disputando 3 vagas, então temos como solução $12 \cdot 3$.
- c) Como teremos 12 competidores disputando 3 vagas, e como sabemos que a ordem de classificação não altera o resultado no pódio, então temos como solução C_{12}^3 .
- d) Como teremos 12 competidores disputando 3 vagas, e como sabemos que a ordem de classificação altera o resultado no pódio, então temos como solução A_{12}^3 .
- e) Como teremos 12 competidores disputando 3 vagas, e como sabemos que a ordem de classificação não altera o resultado no pódio, então temos como solução $12 \cdot 12 \cdot 12$.

Camada 3 - Quanto seguro você está para marcar as respostas anteriores

- a) Muito inseguro b) inseguro c) neutro d) seguro e) muito seguro

Tabela 2

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Acertos	10	11	15	12	10	8	6	9	9	13
Muito Seguro	6	7	9	7	5	4	3	5	5	8

Após os resultados, foi feita uma conversa com os estudantes sobre esse instrumento de avaliação onde foram colocados para eles como feedback a melhoria dos resultados e o aumento na segurança das respostas em relação ao primeiro teste sendo explicado o quanto é importante nos sentirmos seguros em nossas respostas, essa ação faz com que consigamos desenvolver o protagonismo a autonomia e a autorregulação em nossos estudantes. Após o diálogo de feedback os estudantes pontuaram alguns pontos positivos e alguns pontos de atenção como:

Pontos Positivos:

Os estudantes que conseguem estudar e ficam com dúvidas em questões objetivas tradicionais, conseguem com essa metodologia terem maior segurança na escolha, pois a justificativa esclarece a dúvida que o estudante teria sem a explicação.

Outro ponto é que o estudante se concentra mais porque a pergunta tem uma resposta na segunda camada e isso pode dar uma ideia ou até mesmo uma lembrança do que foi explicado em sala de aula.

Os professores que acompanharam a aplicação do teste colocam que incentiva de forma positiva a implementação no plano de aula formas mais claras de exposição do conteúdo sempre associando teoria e prática e ainda mobilizando os estudantes a se colocarem como protagonistas e criando eles (os estudantes) novas situações de aplicação.

Pontos de Atenção:

O principal ponto de atenção tanto dos estudantes quanto dos professores é que seria preciso mais tempo para desenvolverem os conteúdos.

De maneira geral o teste em três camadas foi bem aceito tanto pelos estudantes como pelos professores que participaram desse experimento. Os resultados deste estudo sugerem que o teste de 3 camadas, aliado à análise combinatória, pode ser uma ferramenta poderosa para identificar e abordar as necessidades educacionais dos estudantes. Recomenda-se a aplicação dessa metodologia em diferentes contextos educacionais para validar seus benefícios.

5.1. Plano de Ação usado após a análise da primeira avaliação.

Plano de Aula: Análise Combinatória

Objetivo Geral:

Proporcionar aos alunos uma compreensão sólida dos conceitos de análise combinatória, permitindo que eles apliquem essas ideias em situações práticas e cotidianas.

Objetivos Específicos:

- Identificar e compreender os princípios básicos da análise combinatória;
- Aplicar fórmulas de combinação e permutação em problemas práticos;
- Desenvolver a capacidade de raciocínio lógico através de exercícios desafiadores;
- Estimular o trabalho em grupo e a colaboração entre os alunos.
- Promover a utilização de recursos tecnológicos para a resolução de problemas matemáticos.

Conteúdo:

- ✓ Definição de análise combinatória.
- ✓ Diferenças entre permutação e combinação.
- ✓ Fórmulas de cálculo para permutações e combinações.
- ✓ Exemplos práticos de aplicação em problemas do dia a dia.

- ✓ Importância da análise combinatória em diversas áreas, como estatística, probabilidade e ciências da computação.

Recursos Didáticos:

- ✓ Quadro branco e marcadores.
- ✓ Projetor multimídia para apresentação de slides.
- ✓ Material impresso com exercícios e exemplos.
- ✓ Calculadoras para facilitar os cálculos.
- ✓ Software de matemática (como GeoGebra) para visualização de conceitos.

Metodologia:**1. Introdução (20 minutos):**

Apresentar os conceitos teóricos de análise combinatória, destacando a diferença entre permutação e combinação, com o uso de exemplos práticos para ilustrar os conceitos.

2. Atividade em Grupo (50 minutos):

- Dividir os alunos em grupos e propor problemas práticos para serem resolvidos em conjunto.
- Exemplos de atividades:
- Permutação: Calcular quantas maneiras diferentes podem ser organizados 5 livros em uma estante.
- Permutação com Repetição: Calcular maneira diferentes com objetos iguais. Por exemplo, organizar molhos em um armário na cozinha sendo que alguns molhos são idênticos.
- Permutação Circular: Demonstra como acontecem as contagens quando estão posicionados de maneira circular. Por exemplo, 'posicionar pessoas em uma roda de ciranda de maneira diferentes.
- Combinação: Escolher 3 frutas de uma lista de 6 e calcular de quantas maneiras podem fazer essa escolha.

3. Discussão e Reflexão (30 minutos):

- ✓ Cada grupo apresenta suas soluções e discute as diferentes abordagens.
- ✓ O professor esclarece dúvidas e reforça os conceitos.

4. Aplicação Prática (50 minutos):

Utilizar software de matemática para resolver problemas.

Exemplo: Atividade - Explorando Permutações e Combinações.

Objetivo:

Entender e aplicar os conceitos de permutações e combinações utilizando o GeoGebra.

Passos:

1. Introdução aos Conceitos:

- ✓ Explique os conceitos de permutações (ordem importa) e combinações (ordem não importa).
- ✓ Dê exemplos simples, como a permutação de letras em uma palavra ou a combinação de ingredientes em uma receita.

2. Configuração no GeoGebra:

- ✓ Abra o GeoGebra e selecione a opção de *Calculadora Gráfica*.
- ✓ Utilize a ferramenta de *Entrada* para criar listas de elementos. Por exemplo, crie uma lista de letras: $L = \{ "A", "B", "C", "D" \}$.

3. Permutações:

- ✓ Use a função Permutação do GeoGebra para gerar todas as permutações possíveis da lista L.
- ✓ No campo de entrada, digite: Permutação (L, 4).
- ✓ O GeoGebra exibirá todas as permutações possíveis das letras A, B, C e D.

4. Combinações:

Agora, utilize a função Combinação para gerar todas as combinações possíveis. No campo de entrada, digite: Combinação (L, 2). O GeoGebra mostrará todas as combinações possíveis de 2 letras escolhidas da lista L.

5. Exploração Interativa:

Peça aos alunos para modificar a lista de elementos e os parâmetros das funções de permutação e combinação. Incentive-os a observar como as mudanças afetam os resultados.

6. Discussão:

- ✓ Discuta com os alunos as diferenças entre permutações e combinações.
- ✓ Pergunte como esses conceitos podem ser aplicados em situações do dia a dia.
- ✓ Propor um jogo de análise combinatória onde os alunos devem formar combinações de números ou letras, utilizando as fórmulas aprendidas.

5. Avaliação (50 minutos):

Aplicar um breve teste em três camadas contendo questões objetivas sobre os conceitos abordados onde a primeira camada serão perguntas objetivas básicas; a segunda será a explicação da resposta dada na primeira camada e a terceira será o nível de confiança do estudante nas duas camadas anteriores.

Avaliar a participação dos alunos nas atividades em grupo e a correção dos exercícios propostos.

Sugestões de Atividades:

- ✓ Atividade de princípio fundamental de contagem: Os estudantes devem calcular de quantas maneiras podemos nos arrumar para uma festa utilizando dois pares de tênis, três calças e duas blusas.
- ✓ Atividade de Permutação simples: Os estudantes devem calcular quantas maneiras diferentes podem ser organizados 5 livros em uma estante.

Cada grupo apresentará suas soluções e o professor irá discutir as diferentes abordagens.

- ✓ Atividade de Permutação circular: Os estudantes devem calcular de quantas maneiras diferentes quatro pessoas podem formar uma roda para brincar.
- ✓ Atividades de Permutação com Repetição: Os estudantes devem calcular de quantas maneiras diferentes podem permutar as letras de uma palavra ARARA, por exemplo.
- ✓ Outro exemplo: Os estudantes devem calcular de quantas maneiras diferentes três pessoas podem se sentar em um sofá de quatro lugares.
- ✓ Atividade de Combinação: Propor aos alunos que escolham 3 frutas de uma lista de 6 e calculem de quantas maneiras podem fazer essa escolha.
- ✓ Outro Exemplo: Os estudantes devem escolher quatro músicas para serem tocadas sendo duas delas de MPB e outras duas de Rock. Em nossa playlist temos quatro músicas de MPB e cinco de Rock, de quantas maneiras diferentes podemos escolher essas quatro músicas.
- ✓ Após a resolução, cada grupo compartilhará suas respostas e o professor esclarecerá as dúvidas.

Sugestões de Jogos de Análise Combinatória:

1. Jogo da Senha

Objetivo: Descobrir a sequência correta de cores ou números escolhida pelo adversário.

Como jogar:

1. Preparação: Um jogador escolhe uma sequência de 4 cores (ou números) sem repetir, e mantém essa sequência oculta.

2. Tentativas: O outro jogador tenta adivinhar a sequência, fazendo uma nova tentativa a cada rodada.

3. Feedback: Após cada tentativa, o jogador que escolheu a sequência dá dicas sobre quantas cores (ou números) estão corretas e em suas posições corretas, e quantas estão corretas, mas em posições erradas.

4. Repetição: O jogador continua tentando até adivinhar a sequência correta ou até um número pré-determinado de tentativas.

Este jogo pode ser adaptado para diferentes níveis de dificuldade, aumentando ou diminuindo o número de cores (ou números) e a quantidade de posições na sequência. Criar um jogo onde os alunos devem formar combinações de números ou letras, utilizando as fórmulas aprendidas. O grupo que conseguir mais combinações corretas em um tempo determinado será o vencedor.

2. Bingo Combinatório

Objetivo: Marcar combinações corretas em uma cartela de bingo.

Como jogar:

- Cada aluno recebe uma cartela de bingo com diferentes combinações de números ou cores.
- O professor sorteia combinações e os alunos marcam as correspondentes em suas cartelas.
- O primeiro a completar uma linha, coluna ou diagonal grita "Bingo!" e ganha.

3. Jogo das Permutações

Objetivo: Formar o maior número possível de permutações a partir de um conjunto de elementos.

Como jogar:

- Divida os alunos em grupos e dê a cada grupo um conjunto de letras ou números.
- Os grupos têm um tempo limitado para formar o maior número possível de permutações.

- O grupo com mais permutações corretas vence.

4. Caça ao Tesouro Combinatório

Objetivo: Resolver problemas de combinatória para encontrar pistas e chegar ao tesouro.

Como jogar:

- Crie uma série de pistas baseadas em problemas de combinatória.
- Cada pista resolvida leva à próxima, até que os alunos encontrem o "tesouro".
- Pode ser jogado em equipes para incentivar a colaboração.

5. Jogo das Combinações

Objetivo: Encontrar todas as combinações possíveis de um conjunto de itens.

Como jogar:

- Dê aos alunos um conjunto de itens (por exemplo, diferentes tipos de frutas).
- Peça para eles listarem todas as combinações possíveis de um determinado número de itens (por exemplo, combinações de 2 frutas).
- O aluno ou grupo que listar todas as combinações corretamente primeiro vence.

Esses jogos não só tornam o aprendizado mais divertido, mas também ajudam os alunos a entenderem melhor os conceitos de análise combinatória através da prática.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação do teste em três camadas utilizando a análise combinatória no ensino médio revelou-se uma abordagem inovadora e eficaz para o ensino da matemática. Este método não apenas facilitou a compreensão dos conceitos combinatórios entre os alunos, mas também promoveu um ambiente de aprendizado mais dinâmico e interativo.

Ao longo da implementação, observou-se que os alunos demonstraram um maior engajamento e interesse nas atividades propostas. A estrutura do teste em três camadas permitiu uma avaliação mais precisa das habilidades e conhecimentos dos estudantes, identificando suas dificuldades e pontos fortes de maneira mais detalhada. Além disso, a utilização da análise combinatória como ferramenta central proporcionou uma visão mais ampla e aplicada da matemática, conectando teoria e prática de forma significativa.

Os resultados obtidos indicam que a metodologia pode ser uma valiosa adição ao currículo do ensino médio, contribuindo para a formação de alunos mais preparados e confiantes em suas habilidades matemáticas. Recomenda-se, portanto, a continuidade e expansão deste método, com adaptações e melhorias baseadas no feedback dos educadores e alunos, visando sempre a excelência no ensino da matemática.

Em suma, a integração do teste em três camadas com a análise combinatória mostrou-se uma estratégia pedagógica promissora, capaz de transformar a experiência de aprendizado e avaliação no ensino médio, promovendo um ensino mais inclusivo e eficaz.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

ANDERSON, L. W.; KRATHWOHL, D. R. *Uma taxonomia para aprendizagem, ensino e avaliação: uma revisão da Taxonomia de Bloom dos objetivos educacionais*. Nova York: Longman, 2001.

BATANERO, C.; DIAZ, C. Combinações e probabilidade no ensino secundário: cruzando a interseção. *Educational Studies in Mathematics*, v. 60, n. 3, p. 311-334, 2005. Disponível em: 05 nov. 2024.

BLOOM, B. S.; ENGELHART, M. D.; FURST, E. J.; HILL, W. H.; KRATHWOHL, D. R. *Taxonomia dos objetivos educacionais: a classificação das metas educacionais*. Nova York: Longmans, Green, 1956.

BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. L.; COCKING, R. R. *Como as pessoas aprendem: cérebro, mente, experiência e escola*. Washington, DC: National Academy Press, 2000.

FLAVELL, J. H. Metacognição e monitoramento cognitivo: uma nova área de investigação do desenvolvimento cognitivo. *American Psychologist*, v. 34, n. 10, p. 906-911, 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906>. Acesso em: 05 nov. 2024.

IMMERMAN, B. J. Tornando-se um aprendiz autorregulado: uma visão geral. *Theory into Practice*, v. 41, n. 2, p. 64-70, 2002. Disponível em: https://doi.org/10.1207/s15430421tip4102_2. Acesso em: 20 nov. 2024.

PERRENOUD, P. *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

POLYA, G. *Como resolver isso: um novo aspecto do método matemático*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

RESNICK, L. B. *Educação e aprender a pensar*. Washington, DC: National Academy Press, 1987.

SHAVELSON, R. J.; STERN, P. Pesquisa sobre pensamentos pedagógicos, julgamentos, decisões e comportamento dos professores. *Review of Educational Research*, v. 51, n. 4, p. 455-498, 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.3102/00346543051004455>. Acesso em: 20 nov. 2024.

TREAGUST, D. F. Desenvolvimento e uso de testes diagnósticos para avaliar equívocos dos alunos em ciências. *International Journal of Science Education*, v. 10, n. 2, p. 159-169, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/0950069880100204>. Acesso em: 20 nov. 2024.