UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – UFES MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O ENSINO DA PROBABILIDADE COM FOCO NO ENEM

DARIOMAR CANO FERNANDES

Vitória - 2024

DARIOMAR CANO FERNANDES

O ENSINO DA PROBABILIDADE COM FOCO NO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Bayer

VITÓRIA- ESPÍRITO SANTO
2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Fernandes, Dariomar Cano, 1975-
F363e O ENSINO DA PROBABILIDADE COM FOCO NO ENEM / Dariomar Cano Fernandes. - 2024.
71 f. : il.

Orientador: Valmecir Bayer.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Probalidade. 2. ENEM. 3. Avaliações. 4. Análise. I. Bayer, Valmecir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“O ENSINO DA PROBABILIDADE COM FOCO NO ENEM”

Dariomar Cano Fernandes

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 05/12/2024 por:

gov.br Documento assinado digitalmente
VALMECIR ANTONIO DOS SANTOS BAYER
Data: 10/12/2024 19:45:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Orientador(a) – UFES

gov.br Documento assinado digitalmente
MOACIR ROSADO FILHO
Data: 09/12/2024 20:41:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Membro Interno – UFES

gov.br Documento assinado digitalmente
PEDRO MATOS DA SILVA
Data: 15/12/2024 21:28:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Pedro Mattos da Silva
Membro Externo – IFES

AGRADECIMENTOS

É um grande orgulho poder agradecer a todos que contribuíram com esta pesquisa e me proporcionaram alcançar mais um degrau na minha formação acadêmica e na minha vida profissional. Lecionar por tantos anos e seguir me encantando pela matemática não é um caminho fácil devido a inúmeros desafios já conhecidos pela sociedade, porém buscar transferir o conhecimento como forma de somar para que meus alunos também conquistem novos patamares em suas vidas profissionais, é o que me conduziu para este ponto de pesquisa.

Ao meu orientador, professor Dr Valmecir Bayer, quero agradecer por ter acreditado neste projeto e me auxiliado com toda sua experiência e positividade durante o desenvolvimento desta dissertação.

A todos os professores que me proporcionaram ampliação dos meus conhecimentos, em especial aos professores: Dr. Moacir Rosado Filho, Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, Dr. Etereldes Gonçalves Junior, Dr. Fabio Julio da Silva Valentim e Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Aos amigos que ganhei durante a vida acadêmica que foram sempre inspirações: Rubens, Vanilda, George, Rodrigo e Fabio. Aos colegas de área e de jornada de trabalho que me incentivaram e não me deixaram desistir.

À Lucilene, minha esposa, que esteve ao meu lado em cada momento desta caminhada, me dando força e que foi luz para o meu filho Antônio, também amante da matemática, à minha filha, Ana Carolina, a quem eu dedico todos meus esforços diários. A toda minha família pela força e luta para que eu alcançasse mais este objetivo. Em especial, a minha mãe Lucia e ao meu pai que, mesmo estando somente em minha memória, me dão alegria e entusiasmo para batalhar por meus objetivos.

Aos alunos que são o motivo de tudo isto, para os quais planto aqui esta semente e desejo sempre sucesso em suas caminhadas.

A Deus que colocou em meu caminho essas pessoas especiais e que me encheram de coragem e fé para que eu perseverasse neste objetivo. Muito obrigado, por ter me proporcionado esta realização.

RESUMO

A probabilidade está presente no raciocínio humano ao longo de toda a vida, em eventos diversos: na perspectiva de se ganhar um prêmio, de se saber o sexo de um bebê, de haver sol ou chuva, dentre outros acontecimentos. A dúvida em relação a esses eventos vão ocorrer ou não desperta o interesse de todos os envolvidos e expectadores. O estudo da probabilidade, no Ensino Fundamental e Médio, traz fórmulas e regras para os cálculos usados para analisar essas probabilidades. Esta dissertação abrange essa temática, analisando a metodologia empregada no ensino desses cálculos, por contextualizar o conteúdo e observar a resolução de exemplos. A pesquisa foi feita tendo como base um grupo de 20 alunos que resolveu as questões propostas de Nível Médio que foram apresentadas no Exame Nacional do Ensino Médio e discutiu-se as dificuldades apresentadas, erros e acertos encontrados. A partir dessas discussões, foi feita uma intervenção utilizando alguns métodos de estudo como por exemplo: resolução de exercícios em pares, resolução por problemas em pares e times, para melhorar a performance nas avaliações desse ano. Comparando a avaliação diagnóstica, feita no início do processo com o simulado do ENEM ao final do mesmo, houve um número satisfatório de acertos. Os principais desvios ocorreram por descuido, erro de interpretação de texto e por nervosismo comum a muitas pessoas ao fazerem avaliações, principalmente, pelo tempo reduzido e pelo caráter classificatório. Em vista disso, percebeu-se a necessidade de um número maior de horas de treino e execução das atividades, para que os alunos tivessem mais segurança, pois, além de praticar os conteúdos, há também a necessidade de treinar e gerenciar a calma e a concentração.

Palavras-chave: probabilidade; estudantes, avaliações, análise.

ABSTRACT

The probability is present in human reasoning throughout the entire lifetime in different events: in a perspective of winning a prize, by guessing the sex of a baby, whether there willbe sun or rain, and others. The doubt regarding whether these events will occur or not encourage the interest of the spectators and of all the people involved. The probability study in Elementary and High School presents formulas and rules used to analyze these probabilities. This dissertation will approach this issue by investigate the methodology used in teaching these calculations and by contextualizing the contents and observe the examples resolutions. A research has been made based on a group of students who solved the proposed questions presented in the Brazilian National High School Exam. This students group discussed about the mistakes, difficulties and the right answers. An intervention has been made developed from this discussion in order to improve the students' performance in exams during this year which has generated a high level o flearning. There was a highly satisfactory number of hits. Most mistakes have been occurred due to carelessness, text comprehension problems and by the anxiety common to many people when they are making exams, mainly due to the limited time and their classificatory nature. Therefore, it has been showed that there is a necessity to increase the number of training hours and activities resolutions in order to rise the students´ security. Besides practicing the resolutions, the students also need to practice and manage calm and concentration.

Key Words: probability, students, exams, analysis.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para a Matemática, o cálculo das probabilidades é um ramo que estuda os fenômenos aleatórios, ou seja, observações ou experimentos que, quando realizados, não apresentam resultados conhecidos de antemão, por exemplo, a probabilidade de chover ou não, de se ganhar um prêmio de loteria, de um bebê ser menino ou menina, ter olhos claros ou escuros numa gravidez, dentre outros. A palavra probabilidade é derivada do latim *probare*, que significa testar ou provar. É muito comum usarmos a palavra possível para indicar algo que não se tem certeza se vai acontecer. Essa palavra também está associada às palavras sorte, azar, incerto, chance, duvidoso. Os fenômenos aleatórios estão presentes, inerentemente, em nossa vida cotidiana (Rizzo, 2022).

Matemáticos, autores, concordam que os significados da Probabilidade são inerentes ao conceito, limitar-se a apenas um enfoque, reduz a sua amplitude. Por isso, defendem a institucionalização dos diversos significados de acordo com cada nível de ensino. A necessidade de institucionalização é de fato necessária, porém os professores, de uma forma geral, não estão preparados para incorporá-la e nem os livros estão adequados a esta tendência de renovação do Ensino da Probabilidade. É evidente, portanto, a necessidade de mais pesquisas sobre o assunto que procurem estabelecer quais são os conceitos fundamentais para o ensino adequado desse conteúdo. Além disso, de acordo com Amâncio (2012), é necessário que sejam realizados trabalhos que proponham meios de capacitar os professores de acordo com as mudanças necessárias. Esses trabalhos poderiam acontecer utilizando oficinas práticas, troca de experiências entre docentes e desenvolvimento de recursos pedagógicos, etc...

Esta pesquisa pretende contribuir para aperfeiçoar o ensino da Probabilidade de modo a facilitar a compreensão integral do processo. Além disso, foi produzida e aplicada uma sequência didática com essa abordagem, visando uma aprendizagem mais significativa dos alunos. Por outro lado, analisamos as contribuições e as dificuldades do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da escola básica e dos licenciandos, utilizando para estes os estudos de Shulman (1986, 1987). Tendo em vista que foi desenvolvida uma sequência didática, aplicamos para essa parte do trabalho a metodologia da Engenharia Didática (Machado, 2002).

A finalidade desta dissertação de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é oferecer ao professor um material que apresente as diferentes abordagens de probabilidade, considerando em alguns momentos os contextos históricos, dando espaço ao lúdico e às atividades diversificadas. Inserimos também a concepção subjetivista de probabilidade, a teoria da decisão e a relação com a Estatística. Queremos proporcionar ao aluno um modo diferente de aprendizagem, baseado não apenas no tradicionalismo, mas também nas novas metodologias de ensino, como a aprendizagem por grupos interativos, gameficação dentre outros, em que o aluno é o receptor das ideias e conceitos passados pelo professor. Não abordaremos as deduções, as definições das fórmulas e os conceitos de probabilidade e de análise combinatória.

2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E O CONTEXTO EDUCACIONAL ATUAL

A sequência didática é uma excelente estratégia para o ensino. De acordo com Morelatti et al. (2014), ela favorece o ensino-aprendizagem desde a Educação Infantil ao Ensino Médio, pois é uma abordagem construtivista, isto é, o aluno participa ativamente das atividades que estão interligadas, facilitando pensar no passo a passo para o entendimento do conteúdo.

Dessa forma, o professor pensa em cada etapa, necessitando de planejamento para compreensão de qual objetivo deseja alcançar. Assim, ao finalizar, precisa haver uma avaliação sobre a aprendizagem do conteúdo da disciplina ministrada.

Faz-se relevante ouvir os alunos para que as atividades tenham sentido para eles, fazendo com que o tempo em sala de aula e fora dela seja mais produtivo. Isso requer o envolvimento prático de toda a turma (MORELATTI 2014).

Essa perspectiva permite aos educadores olhar os aprendizes não mais como sujeitos que somente precisam receber conhecimento, apenas reproduzindo-os, mas fazer parte desse conhecimento ativamente e criativamente, como afirma Gontijo (2007).

Em disciplinas como a matemática, a criatividade e a criticidade parecem passar longe do contexto pedagógico quando comparada com outras disciplinas. Para tornar o conhecimento mais real, explorar tais características intrínsecas a espécie humana, é extremamente importante em todas as disciplinas, incluindo as da área de exatas. De acordo com Gontijo (2007, p.9),

> “Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, *a análise crítica, a imaginação e a criatividade*, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.”

A Base Nacional Comum Curricular não deixa claro o quão relevante são os pensamentos criativos nas abordagens matemáticas, mas cita que “é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática” (Brasil, 2018, p. 265), e que “[...] reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações” (BRASIL, 2018, p. 9).

Tal afirmação compreende que através de conhecimentos anteriores e experimentação o aluno pode criar, na realização de atividades, métodos próprios para solucionar uma questão, criando ferramentas matemáticas particulares, ligando o pensamento lógico a modos de realização de tarefas propostas pelo professor durante as aulas.

Para Gontijo **(**2007, p. 38), a definição de ser criativo quando se trata da disciplina matemática é:

> [...] a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade), tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações.

Ele cita ainda que a através do ensino pautado no conhecimento empírico há o despertar da fluência, flexibilidade e originalidade de pensamentos que é entendida como a coordenação de ideias múltiplas para solucionar problemas. Desse modo, pode-se compreender que é possível e necessário estimular o pensamento crítico integrado a outras habilidades próprias da matemática.

O professor, nessa cena, entra como um conhecimento prático, pautado na ação, inserindo o aluno em um mundo complexo e ambíguo, porém cheio de sentido e empírico, como aborda Gontijo (2007).

Roldão elucida tal questão quando fala que a docência é "saber ensinar como fazer aprender" (Gontijo, 2007, p.29) e apresenta variações de acordo com o nível de escolaridade, contexto educacional e social e área de conhecimento, caracterizando-o como temporal, heterogêneo o plural.

> Na verdade, tal saber é resultante de vários saberes: profissional (das ciências da educação e ideologia pedagógica), disciplinar, curricular e da experiência. Os saberes profissional, curricular e disciplinar se originam de conhecimentos, doutrinas e normas que embasam a ação pedagógica. [...]. Por sua vez, o saber da experiência resulta de escolhas, decisões e ações que envolvem intencionalidade e consciência, possibilitando a construção de saberes próprios, mediante a prática e a experiência. A prática docente é uma atividade complexa porque depende, em última instância, do conjunto dos saberes (MORELATTI, et al., 2014, p.640).

Conforme Carvalho (et al. 2023), os conjuntos de saberes citados podem ser descritos como: saber do conteúdo específico; saber do conteúdo geral; saber do conteúdo pedagógico; saber curricular; saber sobre os objetivos educacionais; e, saber sobre os alunos. Esses dois últimos saberes supõem o entendimento de como os estudantes aprendem, se desenvolvem e suas diferentes formas de ensinar os conteúdos e colocá-los em prática.

As sequências didáticas chegam nesse cenário com o objetivo de ampliar a participação do aluno – saber sobre os alunos e sobre os objetivos educacionais – que passa a ser coautor do ensino-aprendizagem.

As sequências didáticas são modos de articular atividades e intervenções ao longo de uma unidade didática. Assim, relacionando ao objetivo educativo, são propostas tarefas orientadas pela aprendizagem do aluno, ou seja, as sequências indicam “a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliam a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhe atribuir” (COSTA, 2022, p.367).

De acordo com Costa (2022), na Matemática, há muitas décadas, o método de ensino trata apenas de exercícios para solucionar problemas. As sequencias didáticas, entretanto, enfatizam que é necessário considerar como mais relevante as questões que incluem o conhecimento empírico: incentivar que os alunos questionem com comparações e generalizações, levantem hipóteses, proponham atividades e novos métodos de resolução das atividades.

Outro ponto importante abordado por Morelatti (et al. 2014), é a influência da vida escolar e da licenciatura dos professores na sua forma de ensinar. De acordo com ela, ao longo de toda trajetória acadêmica a prática pedagógica do professor é moldada. “Há pesquisas que demonstram que a prática do professor está diretamente ligada ao seu conhecimento e às suas crenças com relação à Matemática e ao seu ensino, que são fortemente influenciados por suas experiências prévias como estudantes de Matemática” (MORELATTI et al, 2014, p. 649).

Ante ao exposto, observa-se a inclusão do ensino do pensamento probabilístico já no ensino fundamental como uma habilidade fundamental para a vida social e econômica, porque fornece saber necessário para análises e tomadas de decisões importantes (CARVALHO 2023). Essa mudança ocorreu com a implementação da Base Nacional Comum Curricular em 2018 e destacam-se no documento dois avanços sobre o ensino de probabilidade:

– foi separado em uma unidade própria chamada de Probabilidade e Estatística, demonstrando maior ênfase no tema.

– o ensino de probabilidade no ensino fundamental deve ser pautado no desenvolvimento da compreensão da aleatoriedade de eventos, sendo eles possíveis, impossíveis, prováveis e improváveis.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o ensinamento sobre probabilidade permite ao estudante a aquisição de capacidades direcionadas à organização, interpretação, análise de contextos e à habilidade de escolha. Dessa forma, o indivíduo poderá “fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos” (BRASIL, 2018, p. 274).

3 ENSINANDO PROBABILIDADE – NOÇÕES GERAIS

De acordo com Rizzo (2024) , probabilidade é a chance de obter determinado resultado em um experimento. Fundamentos probabilísticos são utilizados na análise de experimentos e situações aleatórias e podem contribuir para tomadas de decisões em diferentes contextos. Neste capítulo, relembramos as fórmulas necessárias para os estudantes resolverem as questões do ENEM que foi o foco do estudo realizado, as demonstrações e deduções podem ser encontradas por exemplo no Livro “A Matemática do Ensino Médio, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Vol 2 de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado, Nos capítulos 4 e 5”.

3.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Sengundo Lima (2006) o princípio fundamental da contagem diz que há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy. Lima (2006, p.85) advoga que a análise combinatória é uma área da matemática que estuda a contagem, organização e combinação de objetos. Neste tópico serão explorados alguns dos principais conceitos de análise combinatória que são pré-requisitos para a aprendizagem da probabilidade.

3.1.1 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E ADITIVO

O Princípio Multiplicativo afirma que, se um evento pode ocorrer de k maneiras consecutivas e independentes, de maneira que o número de possibilidades: na 1ª etapa é k_1, na 2ª etapa é k_2, na 3ª etapa k_3 e na enésima k_n, o número total de possibilidades de ocorrer o referido evento é o produto de $k_1 . k_2 . k_3 . \ldots . k_n$.

Em termos gerais, se você tem uma série de etapas ou decisões, e cada etapa pode ser realizada de diferentes maneiras, o número total de combinações possíveis é o produto do número de opções em cada etapa.

O Princípio Aditivo afirma que, se um evento pode ocorrer de k maneiras distintas e se os eventos são mutuamente exclusivos, de maneira que o número de possibilidades: na 1ª etapa é k_1, na 2ª etapa é k_2, na 3ª etapa k_3 e na enésima k_n, o número total de possibilidades de ocorrer o referido evento é a soma de $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n$.

Exemplos de Aplicações, formulados pelo autor:

Exemplo 3.1.1: Você tem 3 camisas diferentes e 4 calças diferentes. Quantas maneiras diferentes você pode escolher uma calça e uma camisa para usar?

Solução: Cada escolha de camisa pode ser combinada com qualquer uma das calças. Portanto, o número total de combinações por serem 3 camisas e 4 calças é dado por:

$$3.4 = 12\ combinações$$

Exemplo 3.1.2: Você está criando uma senha de 4 dígitos e pode usar os números de 0 a 9. Quantas senhas diferentes podem ser formadas?

Solução: Cada dígito da senha pode ser escolhido de 10 maneiras (0 a 9), como há 4 dígitos, o número total de senhas é:

$$10.10.10.10 = 10^4 = 10000$$

Exemplo 3.1.3: Você está criando uma senha de 2 caracteres, onde o primeiro caractere será uma letra (26 opções) e o segundo caractere pode ser um número (10 opções). Quantas senhas diferentes podem ser criadas?

Solução: Como temos 26 letras e 10 números, o total de senhas será dado por:

$$26.10 = 260 \text{ senhas}$$

Exemplo 3.1.4: Uma adolescente tem uma quantia suficiente para ir a um parque de diversões onde terá que optar por brincar em um dos 10 brinquedos existentes ou assistir a um dos 4 filmes em cartaz. De quantas maneiras a adolescente poderá se divertir?

Solução: Como temos 10 brinquedos e 4 filmes e a adolescente precisa optar por um brinquedo ou um filme. O total de escolhas será dado por:

$$10 + 4 = 14 \text{ opções}$$

3.1.2 PERMUTAÇÕES

Permutações referem-se à organização de um conjunto de n elementos, tomados n a n em uma sequência ou ordem específica. Temos dois tipos:

- **Permutações Simples:** é um tipo de organização de todos os elementos de um conjunto, onde os elementos não se repetem. A ordem é importante e todos os elementos do conjunto são utilizados. O número de permutações é dado por n! (fatorial de n). Sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, definimos fatorial de n como o produto dos n números naturais consecutivos de 1 até n.

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2).(n-3). \ldots .1$$

Exemplo 3.1.5: Quantas maneiras você pode organizar 3 livros distintos em uma prateleira?

Solução: Como temos 3 livros**,** vamos apenas mudar a ordem de organização, portanto vamos permuta-los**.**

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

Exemplo 3.1.6: Quantas diferentes formas você pode arranjar as letras da palavra "CADERNO"?

Solução: Como a palavra "CADERNO" tem 7 letras distintas, vamos permuta-las. Logo:

$$P_7 = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$$

- **Permutações com Repetição:** Se há objetos repetidos, o número de permutações é dado por $\frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_k!}$, onde n é o número de elementos do conjunto, n_1 o números de vezes que o elemento 1 se repete, n_2 o números de vezes que o elemento 2 se repete e assim sucessivamente.

$$P_n^{n_1,n_2,n_K} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_k!},$$

Exemplo 3.1.7: Quantas maneiras você pode organizar as letras da palavra "BANANA"?

Solução: A palavra "BANANA” tem 6 letras, mas a letra (N) se repete duas vezes e a letra (A) se repete três é necessario que desconsideremos as permutações entre essas letras. Logo, teremos:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!.2!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.2} = 6.5.2 = 60$$

3.1.3 COMBINAÇÕES

Combinações consistem em contar todos os subconjuntos de um conjunto, com um número específico de elementos, onde a ordem dos elementos não importa. Temos dois tipos:

- **Combinação simples**

O número de maneiras de escolher k objetos distintos de um conjunto de n é dado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Exemplo 3.1.7: De quantas maneiras você pode escolher 2 livros de uma coleção de 5 livros?

Solução: Como temos 5 livro e escolheremos 2, e a escolha do livro A e B ou do livre B e A, é a mesma teremos:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!.(5-2)!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 5.2 = 10.$$

Exemplo 3.1.8: Um comitê deve ser formado com 3 homens e 2 mulheres a partir de um grupo de 6 homens e 4 mulheres. Quantos comitês diferentes podem ser formados?

Solução: 1º. Escolher 3 entre os 6 homens, a escolha dos homens (A, B e C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B) ou (C, B, A) são equivalentes, logo:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!.(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2} = 5.4 = 20.$$

2º. Escolher 2 entre as 4 mulheres, a escolha das mulheres (X e Y) ou (Y e X) são equivalentes, logo:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!.(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!.2} = 2.3 = 6.$$

Temos, então: $\binom{6}{3}.\binom{4}{2} = 20.6 = 120$

- **Combinação com repetição**

Combinação com repetição: Se você deseja escolher k objetos de um total de n tipos, e as repetições são permitidas, o número de combinações é dado por $\binom{n+k-1}{k}$

Exemplo 3.1.9: Quantas maneiras você pode escolher 3 bolas de uma caixa com 12 bolas, sendo, 3 delas vermelhas, 3 azuis, 3 pretas e 3 brancas?

Solução: Vamos utilizar, V para vermelha, A para azul, P para preta e B para branca, é importante notar que por exemplo: os grupos de bolas (V,A,P), (P,A,V), (A,P,V), (V,A,P), (A,P,V), (V,P,A) são idênticos. Logo, temos uma combinação, onde escolheremos 3 cores num total de 4 cores existentes, podendo repetir essas cores.

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!.(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2} = 5.4 = 20.$$

OBS: As 20 combinações seriam: (BBB, PPP, VVV, AAA, BBA, BBP, BBV, PPA, PPB, PPV, VVA, VVB, VVP, AAB, AAP, AAV, APB, APV, ABV, PBV)

3.1.4 ARRANJOS

Arranjos são seleções de objetos em que a ordem dos elementos importa, e cada objeto pode ser selecionado apenas uma vez. Temos dois tipos:

- **Arranjo simples**

Em análise combinatória, o termo **arranjo** refere-se a uma maneira de organizar um conjunto de objetos em uma ordem específica. Arranjos são úteis quando a ordem dos elementos é importante. Os arranjos simples, também conhecidos como permutações de r objetos a partir de um total de n, representam o número de maneiras de organizar esses r objetos distintos em uma sequência.

$$A_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo 3.1.10: Quantas comissões diferentes de 3 pessoas sendo um líder, um vice-líder e um tesoureiro podemos organizar partir de um grupo de 5 pessoas?

Solução: Aqui, a ordem da escolha altera o resultado, pois, A é lider, B é vice-lider e C é tesoureiro forma uma comissão diferente de C como lider , A como vice-lider e B como tesoureiro. Então temos n = 5 e r = 3. Usando a fórmula:

$$A_{(5,3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

Portanto, há 60 maneiras diferentes de organizar essas comissões.

- **Arranjos com repetição**

Quando você pode usar os mesmos objetos mais de uma vez, você está lidando com arranjos com repetição. Aqui, a ordem ainda importa. O número de arranjos de **r** objetos onde cada objeto pode ser repetido e você tem n tipos de objetos disponíveis é dado por: $\mathbf{n^r}$

Exemplo 3.1.11: Quantos diferentes códigos de 4 dígitos podem ser formados usando os dígitos 0 a 9, se os dígitos podem se repetir?

Solução: Aqui temos n =10 (os dígitos 0 a 9) e r = 4, como os números podem ser repetir teremos os 10 dígitos em cada posição. Usando a fórmula:

$$10^4 = 10000$$

Às vezes, há restrições sobre como os arranjos podem ser feitos.

Exemplo 3.1.12: Quantas maneiras diferentes você pode arranjar 5 pessoas em uma fila, se duas pessoas devem sempre estar juntas?

Solução: Vamos considerar duas pessoas que devem estar juntas como uma única unidade. Então você tem 4 unidades para organizar (a unidade composta e as outras 3 pessoas). O número de arranjos dessas 4 unidades é:

$$4! = 24$$

Dentro da unidade composta, duas pessoas podem trocar de lugar de 2 maneiras AB ou BA. Então:

$$24 . 2 = 48$$

Portanto, há 48 maneiras diferentes de arranjar 5 pessoas, com as duas pessoas específicas sempre juntas.

3.1.5 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO

Esse princípio é utilizado para contar o número de elementos em uma união de conjuntos quando há sobreposição entre eles. Se você tem 3 conjuntos A, B, e C, e deseja encontrar o número de elementos em (AUBUC), o princípio é dado por:

$\mathrm{n(AUBUC)} = \mathrm{n(A)} + \mathrm{n(B)} + \mathrm{n(C)} - \mathrm{n(A \cap B)} - \mathrm{n(A \cap C)} - \mathrm{n(B \cap C)} + \mathrm{n(A \cap B \cap C)}$,
onde $\mathrm{n(AUBUC)}$, corresponde ao número de elememtos da união do cojuntos A, B e C.

Exemplo 3.1.13: Em uma sala de aula, 30 alunos jogam futebol, 20 jogam basquete, 15 jogam volei, 10 jogam futebol e basquete, 6 jogam basquete e vôlei, 12 jogam futebol e volei e 4 fazem ambos. Quantos alunos fazem pelo menos um dos três esportes?

Solução: Usando o princípio da inclusão-exclusão, Consideraremos:

$n(A)$ = alunos que jogam futebol
$n(B)$ = alunos que jogam basquete
$n(C)$ = alunos que jogam vôlei, assim temos:

$$\mathrm{n(AUBUC)} = \mathrm{n(A)} + \mathrm{n(B)} + \mathrm{n(C)} - \mathrm{n(A \cap B)} - \mathrm{n(A \cap C)} - \mathrm{n(B \cap C)} + \mathrm{n(A \cap B \cap C)}$$

$$\mathrm{n(AUBUC)} = 30 + 20 + 15 - 10 - 6 - 12 + 4 = 41$$

3.2 NOÇÕES DE PROBABILIDADE

Para desenvolver o estudo da probabilidade, precisa-se compreender alguns conceitos básicos que serão apresentados a seguir:

3.2.1 PONTO AMOSTRAL NA PROBABILIDADE

São situações ou experimentos que podem produzir diferentes resultados cada vez que ocorrer (ou seja, um experimento aleatório). Cada resultado individual é chamado de ponto amostral.

Exemplo 3.2.1: A face voltada para cima do lançamento de um dado cúbico honesto é um experimento aleatório.

Solução: Cada uma das possiveis face é um ponto amostral. Logo temos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3.2.2 ESPAÇO AMOSTRAL NA PROBABILIDADE

Espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Esse conjunto é frequentemente expresso pela letra grega maiúscula Ômega: Ω .

Exemplo 3.2.2: A face superior resultante do lançamento de um dado de 6 faces pode ser o número $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6. Logo, nesse experimento, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Um espaço amostral é chamado de equiprovável se todos os resultados possuem a mesma chance de acontecerem.

Exemplo 3.2.3: Ao lançar um dado comum (também chamado de "não viciado") de 6 faces, a chance de obter, na face superior, o número 1 é a mesma de obter o número 2, que é a mesma de obter o número 3 e assim por diante. Portanto, o espaço amostral $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ é equiprovável.

3.2.3 TIPOS DE PROBABILIDADE

Segundo Rizzo (2024), existem diferentes concepções acerca do estudo de probabilidade.

- A probabilidade **clássica** supõe um espaço amostral equiprovável para o cálculo de probabilidades.
- A probabilidade **empírica** considera que o cálculo de probabilidade deve ser realizado a partir de repetições do experimento e análise dos resultados.
- A probabilidade **subjetiva** se baseia em ideias, crenças e julgamentos pessoais. Consequentemente, o cálculo de probabilidade em determinado contexto pode variar de uma pessoa para outra.

3.2.4 EVENTOS NA PROBABILIDADE

Um evento é um conjunto único de resultados que será geralmente representado por uma letra do nosso alfabeto maiúscula.

Vamos considerar, o experimento de lançar um dado honesto de 6 faces e observar a face voltada para cima. Alguns exemplos de eventos são:

- $\mathrm{A} = \{3\}$ (Obter o número 3);
- $\mathrm{B} = \{2, 3, 5\}$ (Obter um número primo);
- $\mathrm{C} = \{1, 2\}$ (Obter o número menor ou igual a 2);
- $\mathrm{D} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Obter um número maior ou igual a 1 e menor ou igual a 6);
- $\mathrm{E} = \{7\}$ (Obter o sucessor de 6).

Podemos observar que os eventos A, B, C e D são subconjuntos do espaço amostral (o evento D, inclusive, é igual ao espaço amostral). Assim, os eventos A, B e C são eventos possíveis e o evento D é um evento certo, pois com certeza a face obtida será um número de 1 a 6. Já o evento E é chamado de evento impossível, pois não podemos obter o número 7 ao lançar um dado de 6 faces.

3.2.5 FÓRMULA DA PROBABILIDADE

Conhecendo esses conceitos básicos, podemos seguir com o cálculo de probabilidade. Vamos representar a probabilidade de um evento A ocorrer por P(A).

A probabilidade de um evento A acontecer a partir de um experimento é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis. Ou seja, a razão entre o número de elementos do conjunto A e o número de elementos do espaço amostral do experimento, nessa ordem.

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(\Omega)}}$$

- $\mathrm{P(A)} \rightarrow$ probabilidade do evento A acontecer.
- $\mathrm{n(A)} \rightarrow$ número de elementos do conjunto A, ou seja, o total de pontos amostrais favoráveis à ocorrência de A.
- $\mathrm{n(\Omega\,)} \rightarrow$ número total de elementos do espaço amostral.

Observações:

- Essa razão é normalmente expressa nas formas fracionárias irredutíveis, percentual ou decimal.
- Como $\mathrm{n(A)}$ é sempre menor ou igual $\mathrm{n(\Omega)}$ essa razão sempre será um número de 0 a 1. Se A for impossível, $\mathrm{n(A)} = 0$ e $\mathrm{P(A)} = 0 = 0\%$. Se A for igual ao espaço amostral, então $n(\mathrm{A}) = \mathrm{n(\Omega)}$ e $\mathrm{P(A)} = 1$ ou seja 100%.

3.2.6 COMO CALCULAR PROBABILIDADE?

Para calcular a probabilidade de um evento, primeiro vamos calcular o número de casos favoráveis à sua ocorrência e o número de casos possíveis e depois aplicamos a fórmula.

Exemplo 3.2.4: Lançando–se uma moeda honesta qual é a probabilidade de obter a face "cara" nesse lançamento?

Solução: Tomemos com A o evento de obter a face "cara" no lançamento dessa moeda. Existem duas possibilidades de resultados para o lançamento de moeda: "cara" ou "coroa". Assim, $\Omega = \{cara, coroa\}$, ou seja, o número de elementos do espaço amostral é 2. Ainda, o número de casos favoráveis ao evento A é 1, que é o resultado "cara". Portanto,

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(\Omega)}}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P(A)} = 0{,}5 = 50\%$$

Exemplo 3.2.5: Qual a probabilidade de obter um número primo no lançamento de um dado honesto de 6 faces?

Solução: Seja A o evento de obter o número 2, 3 e 5 de um dado de 6 faces. Como observamos anteriormente, há 6 possíveis resultados: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Assim, o número de casos possíveis é 6. Ainda, os casos favoráveis ao evento A são 2, 3 e 5 em um dado de 6 faces. Assim, $A = \{2, 3, 5\}$ e o número de elementos de A é 3. Logo:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(\Omega)}}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{6}$$

$$\mathrm{P(A)} = 0{,}5 = 50\ \%$$

Exemplo 3.2.6: Uma ação entre amigos foi organizada pela igreja do bairro para arrecadar fundos para a reforma do telhado da grupa dessa igreja. Essa ação será composta por 2000 bilhetes contendo números de 1 a 2000, sendo um número em cada bilhete e o valor desses bilhetes será de R$ 10,00 cada. O prêmio será dado ao bilhete que apresentar o número que será sorteado aleatoriamente no evento de festividades da páscoa, em sorteio único ao final do evento. Sabendo que todos os números da ação foram vendidos.

Qual é a probabilidade de o bilhete sorteado conter um número de 1 a 40?

a) 1%
b) 2%
c) 3%
d) 4%
e) 5%

Solução: Chamamos de A o evento de sortear um número de 1 a 40. Assim, $n(A) = 40$. Como as pessoas compraram bilhetes numerados de 1 até 2000, tem-se que $n(\Omega) = 2000$. Logo,

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(\Omega)}}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{40}{2000} = \frac{4}{200} = \frac{2}{100}$$

$$\mathrm{P(A)} = 2\% \text{ (Alternativa B).}$$

Exemplo 3.2.7: Em uma urna, há 25 bolinhas numeradas de 1 a 25. Uma Bolinha será retirada aleatoriamente dessa urna. Qual a probabilidade de o número nessa bolinha ser maior ou igual a 20?

a) 1/25
b) 6/25
c) 16/25
d) 20/25
e) 1/5

Solução: Seja o evento A, retirar uma bolinha com um número maior ou igual a 20. Desta forma, temos: A = {20, 21, 22, 23, 24, 25} e $n(A) = 6$. Ainda, $n(\Omega) = 25$. Logo:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(\Omega)}}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{6}{25} \text{ (Alternativa B).}$$

Exemplo 3.2.8: Em uma urna, há 8 bolinhas vermelhas, 4 bolinhas azuis, 6 bolinhas pretas e 6 bolinhas brancas. Duas bolinhas serão retiradas aleatoriamente dessa urna. Qual a probabilidade de:

a) saírem duas bolinhas vermelhas, com a reposição das bolinhas?
b) saírem duas bolinhas vermelhas, sem a reposição das bolinhas?
c) sair uma bolinha branca seguida de uma bolinha preta com reposição das bolinhas?

Solução da letra a: Seja o evento A, retirar uma bolinha vermelha e evento B retirar outra bolinha vermelha, como são duas retiradas, teremos: $\mathrm{n(A)} = 8$ e $\mathrm{n}(\Omega) = 24$, para a 1ª bolinha. Como haverá a reposição da bolinha retirada, teremos: $\mathrm{n(B)} = 8$ e $\mathrm{n}(\Omega) = 24$, também para a 2ª bolinha. Logo:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P(B)} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

E assim a probabilidade total é dada por $\mathrm{P(A)} \, . \, \mathrm{P(B)} = \frac{1}{9}$

Solução da letra b - Seja o evento A, retirar uma bolinha vermelha e evento B retirar outra bolinha vermelha, como serão retiradas duas bolinhas e sem a reposição, teremos: $\mathrm{n(A)} = 8$ e $\mathrm{n}(\Omega) = 24$, para a 1ª bolinha. E $\mathrm{n(B)} = \mathrm{n(A)} - 1 = 7$ e o novo, $\mathrm{n}(\Omega) = 23$, para a 2ª bolinha. Logo:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P(B)} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{23}$$

Assim a probabilidade total é dada por $\mathrm{P(A)} \, . \, \mathrm{P(B)} = \frac{1}{3} \, . \, \frac{7}{23} = \frac{7}{69}$

Solução da letra c - Seja o evento A, retirar uma bolinha branca e evento B retirar uma segunda bolinha porém preta, como são duas retiradas, teremos então: $\mathrm{n(A)} = 6$ e $\mathrm{n}(\Omega) = 24$, para a 1ª bolinha. Como não haverá a reposição da bolinha retirada, então teremos: $\mathrm{n(B)} = 6$ e $\mathrm{n}(\Omega) = 23$, para a 2ª bolinha. Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{23}$$

Assim, a probabilidade total é dada por $P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{23} = \frac{6}{92} = \frac{3}{46}$

3.3 LEIS DA PROBABILIDADE

Lei do Complemento - Como o nome já diz, a probabilidadede um evento ocontecer somada a probabilidade dele não acontecer será sempre igual a 100%.

Lei da Adição - A probabilidade de A ∪ B acontecer é a probabilidade de A acontecer somada a probabilidade de B acontecer, menos a probabilidade de A ∩ B acontecer (já que está foi contada duas vezes).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo 3.3.1 - Em uma urna, há 25 fichas numeradas de 1 a 25. Uma ficha será sorteada aleatoriamente. Qual é a probabilidade do número dessa ficha ser múltiplo de 3 ou de 4?

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}, n(A) = 8$$

$$B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}, n(B) = 6$$

$$n(A \cap B) = 8 + 6 = 14, n(A \cap B) = 2$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{25} + \frac{6}{25} - \frac{2}{25} = \frac{12}{25} = 0{,}48 = 48\%$$

Obs.: Eventos excludentes referem-se a eventos que não podem ocorrer simultaneamente. Em termos simples, se você tem dois eventos excludentes, a ocorrência de um impede a ocorrência do outro.

Por exemplo, ao lançar um dado, os eventos "obter um número par" e "obter um número ímpar" são excludentes, porque não é possível que um número seja simultaneamente par e ímpar.

Para calcular a probabilidade de pelo menos um dos eventos excludentes ocorrer, você pode somar as probabilidades individuais dos eventos. A fórmula para dois eventos excludentes A e B é:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Isso é válido porque a soma das probabilidades dos eventos excludentes não precisa ajustar por sobreposição (já que não há sobreposição).

Por exemplo, ao lançar um dado honesto, a probabilidade de sair um número par (2, 4 ou 6) é $\frac{3}{6}$, e a probabilidade de sair um número ímpar $(1, 3 \text{ ou } 5)$ também é $\frac{3}{6}$. Como esses eventos são excludentes, temos:

$$\mathrm{P}(\text{par ou ímpar}) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

Assim, a probabilidade de obter um número par ou um número ímpar em um lançamento de dado é 1, o que faz sentido, já que é certo que o dado mostrará um número par ou um número ímpar

3.4 DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

A distribuição binomial é aplicada em casos de experimentos repetidos, onde existem sempre dois possíveis resultados, sucesso ou fracasso, item com defeito ou item sem defeito, correto ou incorreto e muitos outros possíveis pares. A probabilidade dessa distribuição pode ser calculada utilizando o princípio multiplicativo, talvez com o uso do diagrama de árvore, porém é muito mais simples e eficiente utilizar uma equação generalizada.

Assim, uma variável aleatória poderá ter sua distribuição de probabilidade modelada de forma binomial caso atenda os seguintes pressupostos:

- O resultado é completamente determinado por chance (aleatório);
- Existem somente **dois possíveis resultados**, experimento *Bernoulli*;
- Todas as tentativas possuem a *mesma* probabilidade para um resultado em particular. Ou seja, as tentativas ou realizações do experimento são **independentes**;
- Isso implica que, existe uma probabilidade P de sucesso constante em cada tentativa

- O **número de tentativas,** n, é um valor fixo, um número inteiro e positivo. Seja X o número de **sucessos** em n **tentativas** independentes.

Dado um experimento aleatório e, de acordo com a variável aleatória X.

- Seja X o número de **caras** em n **tentativas** independentes.
- Seja X o número de **itens defeituosos** em n **itens produzidos** independentes.
- Seja X o número de **amostras contaminada** em n **amostras** independentes.
- Seja X o número de **questões corretas** em n **questões respondidas** independentes.

Note que a palavra **sucessos** e **tentativas** podem ser alteradas conforme o *experimento aleatório.*

A probabilidade de ter exatamente k sucessos é dado pela função de probabilidade:

$f(k; n, p) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$, para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ n onde q $= 1 -$ p e $\binom{n}{k}$ é uma combinação.

Colocando a função completa:

$$f(k; n, p) = \frac{n!}{k!.(n-K)!} . p^k . q^{n-k}$$

Onde o número de sucesso é p^k e a probabilidade de fracasso é $(1 - p)^{n-k}$.

Exemplo 3.4.1: Um jogador do Botafogo tem uma taxa de 70% de aproveitamento na conversão de pênaltis. Qual a probabilidade que em 6 penalidades, esse jogador converta exatamente dois desses pênaltis é de:

A) 4,08%
B) 5,95%
C) 18,52%
D) 32,41%

Solução: Conforme o enunciado a possibilidade de sucesso é de 70%, logo: p = 0,7. Com isso a possibilidade de fracasso é de 30%, logo: q = 1– 0,7 = 0.

Número de tentativas é n = 6 e o número desejado de acertos k = 2. Temos:

$$P = \binom{6}{2} . 0{,}7^2 . 0{,}3^{6-2}$$

$$P = \frac{6!}{(6-2)!.2!} . 0{,}7^2 . 0{,}3^4$$

$$P = 15 . 0{,}49 . 0{,}0081 = 0{,}059535 = 5{,}9535\% \cong 5{,}95\%$$

Exemplo 3.4.2 - Um jogador do Botafogo tem uma taxa de 70% de aproveitamento na conversão de seus pênaltis. Qual é a probabilidade de que em 6 dessas penalidades, esse jogador converta mais que dois desses pênaltis?

Solução - A probabilidade de que as penalidades sejam convertidas em mais de dois gols é a probabilidade de que seja obtido 3, 4, 5 ou 6 gols. Usando a distribuição binomial para calcular a probabilidade temos, duas maneiras:

1ª Maneira - Calculamos e somamos as quatro possibilidades, converter em gols:
3 penalidades, 4 penalidades, 5 penalidades ou 6 penalidades.

- 3 penalidades convertidas: 3 sucessos e 3 fracassos

$$P_3 = \binom{6}{3} . 0{,}7^3 \;.\; 0{,}3^3 = 20 . 0{,}343 . 0{,}027 = 0{,}18522$$

- 4 penalidades convertidas: 4 sucessos e 2 fracassos:

$$P_4 = \binom{6}{4} . 0{,}7^4 \;.\; 0{,}3^2 = 15.\ 0{,}2401.\ 0{,}09 = 0{,}324135$$

- 5 penalidades convertidas: 5 sucessos e 1 fracasso:

$$P_5 = \binom{6}{5} . 0{,}7^5 . 0{,}3^1 = 6.\ 0{,}16807 . 0{,}3 = 0{,}302526$$

- 6 penalidades convertidas: 6 sucessos e 0 fracassos

$$P_6 = \binom{6}{6} . 0{,}7^6 . 0{,}3^0 = 1 . 0{,}117649 . 1 = 0{,}117649$$

Logo, a probabilidade total:

$$P = 0{,}18522 + 0{,}324135 + 0{,}302526 + 0{,}117649$$

$$P = 0{,}92953 = 92{,}953\ \% \cong 92{,}95\%$$

2ª Maneira: Calculamos e somamos as possibilidades de converter em gols apenas: 2 penalidades, 1 penalidade ou nenhuma penalidade e descontamos do total de 100% de conversões.

$$P = 1 - \left(\binom{6}{2} . 0{,}7^2 . 0{,}3^4 + \binom{6}{1} . 0{,}7^1 . 0{,}3^5 + \binom{6}{0} . 0{,}7^0 . 0{,}3^6 \right)$$

$$P = 1 - (15.049.0{,}0081 + 6.0{,}7.0{,}00243 + 1.1.0{,}000729)$$

$$P = 1 - (0{,}059535 + 0{,}010206 + 0{,}000729)$$

$$P = 1 - 0{,}07047$$

$$P = 0{,}92953 = 92{,}953\% \cong 92{,}95\%$$

3.5 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Dados dois eventos A e B, com P(A) ≠ 0, a probabilidade condicional de B na certeza de A é o número $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, usaremos para o cálculo de P(A∩B) = P(A). P(B/A)

Exemplo 3.5.1: Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Retirando – se da urna duas bolas sem reposição. Qual a probabilidade de serem duas bolas brancas?

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).\ P(B_2/B_1) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Exemplo 3.5.2: Uma turma de 3º ano do ensino médio é composta por 32 alunos, representados na tabela abaixo:

	Usam óculos	Não usam óculos
Rapazes	3	10
Moças	4	15

Se um aluno for sorteado ao acaso, qual a probabilidade de ele ser um rapaz sabendo que esse aluno não usa óculos?

Solução: Os eventos são: (B: O aluno sorteado usa óculos) e (A: O aluno sorteado é um rapaz) e (A ∩ B): O aluno sorteado usar óculos e ser um rapaz). Temos:

$$n(B) = 10 + 15 = 25$$

$$n(A \cap B) = 10$$

Logo: $P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{10}{25} = 0{,}4$ ou 40%

4 ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS DE COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

As metodologias escolhidas para esse estudo pesquisa foram as quantitativas e as qualitativas baseadas na análise de conteúdo para responder aos objetivos a partir da interpretação dos dados apresentados. Com a análise quantitativa dos dados observamos a quantidade de erros e acertos em cada questão e avaliamos o nível de preparação e compreensão dos participantes sobre probabilidade com foco no ENEM. Já com a análise qualitativa foi possível evidenciarmos quais as maiores dificuldades e como foi o resultado do ensino- aprendizagem com as sequências didáticas realizadas.

Bardin (2002) define a análise de conteúdo como:

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas), destas mensagens (BARDIN, 2002, p. 38).

Escolhemos uma amostra da população desejada para identificar os padrões que os alunos apresentam, relacionados à aprendizagem do tema probabilidade. Foi escolhida a Escola Zuleima Forte Farias, pois ela preenche os requisitos de ser uma escola pública da rede estadual de ensino e de fácil acesso, pois o pesquisador atua como professor da disciplina matemática nessa escola. Nessa unidade escolar existem três turmas da 3ª série do Ensino Médio e por meio de sorteio foi selecionada uma delas, escolheu-se uma turma da 3ª série do Ensino Médio visto a proximidade que os estudantes estão da realização do Exame Nacional do Ensino Médio. A turma sorteada foi a 3ª serie Técnico em Segurança do Trabalho. Nessa turma existem 30 alunos e o critério para participar da pesquisa era o interesse em prestar o ENEM no ano de 2024. A partir desse preceito, realizaram a prova 24 alunos com idade média de 17 anos.

Explicamos aos participantes que havia ainda um critério que anularia a participação na pesquisa que seria a falta da resolução escrita, assinalando somente a resposta final. Tal preceito foi estabelecido devido à importancia de analisar a condução do pensamento do aluno até chegarmos ao resultado final, sendo possível compreender, então, o método usado para resolução da questão problema. Dessa forma, 20 avaliações foram validadas para análise dos resultados.

O pesquisador desenvolveu a atividade em apenas um encontro. Em sala de aula, previamente informados da realização do teste, foram dados 45 minutos aos participantes para solucionar as questões. Esse tempo foi escolhido por ser semelhante a avaliação do ENEM – tempo total da prova / quantidade de questões = aproximadamente 3,5 minutos.

Anteriormente à realização do propriamente dito teste, aplicamos uma avaliação diagnóstica afim de verificarmos os conceitos, as habilidades e o entendimento que os alunos já haviam adiquirido nos anos anteriores tendo em vista que o conteúdo de probabilidade está também dentro do curriculo do 9º ano do ensino fundamental e do 2º ano do ensino médio.

A principal questão observada, com os resultados da avaliação diagnóstica, foi a dificuldade do aluno comprender o problema a ser resolvido, isto é, uma grande dificuldade de interpretação de qual era a problemática central e também de como direcionar na resolução os dados apresentados *a priori*. A partir do resultado e da análise dos principais erros foram apresentados todos os conceitos da probalidade e ensinado aos alunos com sequências didáticas elaboradas a partir das indicações da BNCC que orienta priorizar os saberes anteriores dos estudantes, os caminhos heurísticos, a criatividade e a crítica. A sequência didática utilizada será exposta no tópico a seguir:

4.1 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Objetivo Central da Sequência Didática: compreender e aplicar conceitos de probabilidade para resolver problemas e questões no formato do ENEM. Utilizando lista de exercícios, grupo interativo, etc.

Duração: 10 aulas (50 minutos cada)

Aula 1: Aplicação de uma avaliação diagnostica

Aula 2: Correção e discussão da avaliação diagnostica

Aula 3: Relembrando os conceitos de análise combinatória

- Compreender a análise combinatória e analisar estruturas e relações discretas;
- Resolver problemas usando análise combinatória.

Aulas 4 e 5: Introdução à Probabilidade

Objetivos Específicos

- Compreender o conceito de probabilidade;
- Identificar e calcular a probabilidade de eventos simples.

Conteúdos

- Definição de probabilidade;
- Espaço amostral e eventos;
- Cálculo da probabilidade de eventos simples. $P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$.

Atividades

Teoria e Exemplos

- Explicação sobre probabilidade;
- Exemplos de eventos simples (como jogar um dado ou uma moeda).

Exercícios Práticos

- Calcular a probabilidade de sair um número par em um dado;.
- Calcular a probabilidade de obter cara ao lançar uma moeda.

Discussão

- Aplicar conceitos em situações do dia a dia e discutir os resultados.

Tarefa de Casa

- Resolver problemas de probabilidade em jogos e situações cotidianas.

Aula 6: Probabilidade Condicional e Independência

Objetivos Específicos

- Compreender e aplicar probabilidade condicional;
- Diferenciar entre eventos independentes e dependentes.

Conteúdos

- Probabilidade condicional;
- Eventos independentes e dependentes.

Atividades:

1. **Teoria e Exemplos**

- Explicação da probabilidade condicional com exemplos práticos;
- Discussão sobre eventos independentes e dependentes.

2. **Exercícios Práticos**

- Resolver problemas que envolvem probabilidade condicional;
- Determinar se eventos são independentes ou dependentes.

3. **Discussão**

- Aplicar a probabilidade condicional em problemas de interesse, como em sorteios e jogos.

Tarefa de Casa

- Resolver exercícios sobre probabilidade condicional e eventos independentes.

Aulas 7 e 8: Probabilidade em Situações Complexas

Objetivos Específicos

- Aplicar a probabilidade a situações mais complexas, como múltiplos eventos e permutações.

Conteúdos

- Probabilidade de eventos compostos;
- Permutações e combinações;
- Aplicações práticas.

Atividades

1. **Teoria e Exemplos:**

- Explicação sobre eventos compostos e cálculos de probabilidade em diferentes cenários;
- Introdução a permutações e combinações.

2. **Exercícios Práticos**

- Resolver problemas que envolvam múltiplos eventos e suas probabilidades;
- Calcular a probabilidade em situações envolvendo permutações e combinações.

3. **Discussão**

- Aplicar os conceitos a problemas complexos encontrados em questões do ENEM.

Tarefa de Casa

- Resolver questões de probabilidade envolvendo permutações e combinações.

Aulas 9 e 10: Estratégias para o ENEM

Objetivos Específicos

- Revisar os principais conceitos e estratégias de resolução de questões de probabilidade no ENEM;
- Praticar com questões de provas anteriores.

Conteúdos

- Revisão dos conceitos de probabilidade;
- Estratégias para resolver questões do ENEM;
- Análise de questões de provas anteriores.

Atividades

1. **Revisão e Discussão**

Revisão dos conceitos e resolução de dúvidas.

2. **Prática**

Resolução de questões de probabilidade de provas anteriores do ENEM. Discussão das estratégias de resolução e análise das respostas corretas.

3. **Simulado**

- Realizar um simulado com questões de probabilidade no estilo do ENEM.

Tarefa de Casa

- Revisar os conceitos abordados e praticar com mais questões de probabilidade;
- Resolver em duplas a questão do ENQ 2022-1

Recursos Adicionais

- Livros e apostilas sobre probabilidade;
- Simuladores e calculadoras online;
- Sites de questões de provas anteriores.

Avaliação:

- Participação e desempenho nas atividades práticas;
- Desempenho no simulado e capacidade de aplicar conceitos em novas situações.

Durante essas dez aulas, os alunos interagiram com o professor trazendo as informações sobre o processo, as dúvidas, os anseios e o que de novo estava sendo aprendido. Como dito anteriomente, o conteúdo de probabilidade é apresentado aos estudantes tanto no nono ano do ensino fundamental quanto no segundo ano do ensino médio e depois de verificado o conhecimento prévio dos alunos e as carências no conteúdo, observadas partindo da analise do resultado de uma avaliação diagnóstica, foi possível, com a sequência didática, reforçar o ensino de acordo com as maiores dificuldades apresentadas. Assim, foram feitas as devidas revisões de conteúdo, correções com foco nas demandas dos alunos e aplicado um simulado baseado no ENEM para comparar seu resultado com o resultado da avaliação diagnóstica.

Objetivamos, então, com a sequência didática construída e utilizada no decorrer desta pesquisa, o preparo dos alunos para o Exame Nacional do Ensino Médio em probabilidade.

4.2 COLETA DOS DADOS

A coleta dos dados foi realizada a partir de 9 questões evidenciadoras que foram coletadas das provas dos ultimos 8 anos do ENEM (1 questão 2016, 2 questões de 2017, 1 questão 2018, 1 questão 2019, 1 questão 2020, 1 questão 2021, 1 questão 2022, 1 questão 2023), caderno azul e ainda uma questão extra que o aluno pôde resolver em um momento diferente da sala de aula que foi aplicada na prova de qualificacão 2022/1 do próprio PROFMAT.

A análise dos dados, a partir das questões evidenciadoras, foi realizada através das respostas de cada problema, de um grupo de 20 estudantes do 3º ano do Ensino médio, que foram escolhidos dentro de uma turma de 30 estudantes, o critério utilizado na escolha, foi o interesse em prestar o ENEM, os 20 estudantes que atenderam à proposta de resolver as questões e deixar como evidência o caminho utilizado na resolução das mesmas, averiguando o desenvolvimento de novos métodos de solução em consequência das novas formas de pensamento, que constitui um dos objetivos principais da sequência didática e por conseguinte dessa pesquisa. Analisamos, então, o conteúdo das respostas e em seguida foi avaliado o aprendizado de cada aluno integrante do estudo.

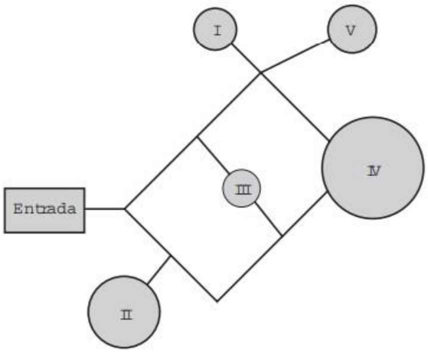
A seguir serão apresentadas as questões evidenciadoras.

4.2.1 Apresentação das Questões Evidenciadoras

1º problema: ENEM 2016

QUESTÃO 152

Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

A) $\frac{1}{96}$

B) $\frac{1}{64}$

C) $\frac{5}{24}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{5}{12}$

Possível resolução
Existem apenas duas opções favoráveis de percurso: uma no sentido horário e outra no sentido anti-horário. Logo:

Sendo A, B, C, D e E as ramificações como mostradas no desenho anterior, temos apenas dois caminhos sem passar por outras áreas e sem retornar:

1º - (entrada – A – B – C – IV)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

2º- (entrada – A – D – E – IV)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Assim, a resposta é $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ (alternativa C)

2º problema: ENEM 2016

QUESTÃO 146

Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala.

Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{18}$

C $\frac{1}{40}$

D $\frac{1}{54}$

E $\frac{7}{18}$

Possível resolução

Primeiro será sorteada a sala, como são três teremos 1 chance em três de ser a sala C. Como na sala C tem 18 integrantes e a aluna em questão é desses 18 integrantes a probabilidade da aluna ser sorteada é:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{54} \text{ (alternativa D)}$$

3º Problema: ENEM 2018

QUESTÃO 149

Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos.

Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{3}{16}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{1}{2}$

Possível resolução:

Como são quadrigemeos e temos menino ou menina serão: $2^4 = 2.\ 2.\ 2.\ 2 = 16$ possiveis ordem de ocorrer o nascimento.

No caso de dois meninos e duas meninas podemos utilizar a permutação de 4 com repeticão de 2 os e 2 as.(O,O,A,A)

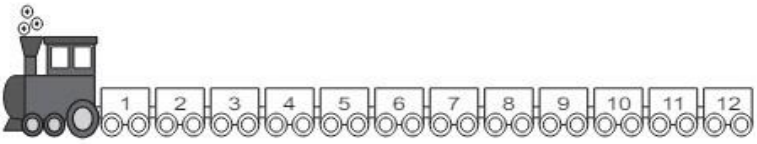
$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!.2!} = (4.\ 3) : 2 = 6$$

Logo temos 6 casos que atendem serem dois meninos e duas meninas. Portanto a resposta é $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ (alternativa D).

4º Problema: ENEM 2019

Questão 171

Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

A) $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$

B) $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$

C) $C_{12}^{4} \times 2 \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{2}$

D) $C_{12}^{4} + 2 \times C_{12}^{3} + C_{12}^{2}$

E) $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$

Possível resolução

- Como temos 12 vagões para pintar e 4 serão pintados na cor vermelha. Se pintarmos o 1º depois o 2º, depois o 3º e por último o 4º ou se começarmos pintando o 4º e depois o 3º em seguida o 2º e por último o primeiro. Observe que teremos os mesmos vagões pintados, portanto para calcular o número de vagões pintados em vermelho, será dado por: C_{12}^{4}
- Como temos agora 8 vagões para pintar 3 deles na cor azul. O número de vagões pintados em azul, será dado por: C_{8}^{3}
- Como temos agora 5 vagões para pintar 3 deles na cor verde. O número de vagões pintados em verde, será dado por: C_{5}^{3}
- Como temos agora 2 vagões para pintar 2 deles na cor amarela. O número de vagões pintados em amarela, será dado por: C_{2}^{2}

Logo: $C_{12}^{4}.\ C_{8}^{3}.\ C_{5}^{3}.\ C_{2}^{2}$ (alternativa E)

5º Problema: Enem 2020

Questão 156 - Matemática e suas Tecnologias

Uma casa lotérica oferece cinco opções de jogos. Em cada opção, o apostador escolhe um grupo de *K* números distintos em um cartão que contém um total de *N* números disponíveis, gerando, dessa forma, um total de *C* combinações possíveis para se fazer a marcação do cartão. Ganha o prêmio o cartão que apresentar os *K* números sorteados. Os valores desses jogos variam de R$ 1,00 a R$ 2,00, conforme descrito no quadro.

Jogo	Valor do jogo (R$)	Números a serem escolhidos (*K*)	Números disponíveis (*N*)	Combinações possíveis (*C*)
I	1,50	6	45	8 145 060
II	1,00	6	50	15 890 700
III	2,00	5	60	5 461 512
IV	1,00	6	60	50 063 860
V	2,00	5	50	2 118 760

Um apostador dispõe de R$ 2,00 para gastar em uma das cinco opções de jogos disponíveis.

Segundo o valor disponível para ser gasto, o jogo que oferece ao apostador maior probabilidade de ganhar prêmio é o

Ⓐ I.

Ⓑ II.

Ⓒ III.

Ⓓ IV.

Ⓔ V.

Possível resolução

Vamos analisar qual das opcões oferece maior probabilidade:

Jogo I = Como o apostador tem 2 reais só pode fazer uma aposta de R$ 1,50, logo 1 chance em 8145060 ou seja $\frac{1}{8145060}$

Jogo II = Como o apostador tem 2 reais pode fazer duas apostas de R$ 1,00, logo, 2 chance em 15890700 ou seja, $\frac{2}{15890700} = \frac{1}{7945350}$

Jogo III = Como o apostador tem 2 reais só pode fazer uma aposta de R$ 2,00, logo 1 chance em 5416512 ou seja $\frac{1}{5416512}$

Jogo IV = Como o apostador tem 2 reais pode fazer duas aposta de R$ 1,00, logo 2 chance em 50063860 ou seja $\frac{2}{50063860} = \frac{1}{25031930}$

Jogo V = Como o apostador tem 2 reais só pode fazer uma aposta de R$ 2,00, logo 1 chance em 2118760 ou seja $\frac{1}{2118760}$

O menor denominador,nos fornece o jogo de maior probabilidade de sucesso. Portanto jogo

6º Problema: Enem 2021

Questão 142 enem2021

O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é

A) 2.

B) 4.

C) 6.

D) 9.

E) 10.

Possível resolução:

Como queremos que a probabilidade de acerto seja maior que $\frac{9}{10}$, e a probabilidade de acerto ou erro é de $\frac{1}{2}$ podemos fazer:

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{9}{10}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{9}{10} - 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{10}$$

logo $2^n \geq 10$

Como **n** é o número de lançamentos, precisa ser um número inteiro positivo, o menor valor que atende a essa restrição é 4.

7º Problema: ENEM 2022

QUESTÃO 137

A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão.

Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

A) $\frac{35}{64}$

B) $\frac{40}{64}$

C) $\frac{42}{64}$

D) $\frac{44}{64}$

E) $\frac{52}{64}$

Possível resolução

Como temos dois times, e o campeonato termina quando um deles obtiver a 4ª vitória, teremos:

- Ganhar 4 jogos em 4 jogos, tendo ganhado o 1º: $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

- Ganhar 4 jogos em 5 jogos, como no 1º e 5º jogo obtevesse vitórias, temos uma derrota entre o 2º e o 4º podemos permutar VVD jogo: $\frac{3!}{2!} . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

- Ganhar 4 jogos em 6 jogos, como no 1º e 6º jogo obtevesse vitórias, temos duas derrotas entre o 2º e o 5º podemos permutar VVDD jogo: $\frac{4!}{2!.2!} . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

- Ganhar 4 jogos em 7 jogos, como no 1º e 7º jogo obtevesse vitórias, temos três derrotas entre o 2º e o 6º podemos permutar VVDDD jogo: $\frac{5!}{3!.2!} . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$

Logo o time que venceu a 1ª partida tem: $\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{32} = \frac{4 + 6 + 6 + 5}{32} = \frac{21}{32} = \frac{42}{64}$

8º Problema: Enem 2023

QUESTÃO 141

No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{8}$

D $\frac{2}{9}$

E $\frac{3}{8}$

Possível resolução

Temos:

No 1º Ano, 200 estudantes e cada um com um cartão. Logo, serão 200 cartões.

No 2º Ano, 150 estudantes e cada um com dois cartões. Logo, serão 300 cartões.

No 3º Ano, 100 estudantes e cada um com três cartões. Logo, serão 300 cartões.

$$P = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}$$

9º Problema: ENEM 2017-2

QUESTÃO 179

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

A) 0,075
B) 0,150
C) 0,325
D) 0,600
E) 0,800

Possível resolução

Temos, duas situações:

- Caso chova: 0,5 . 0,3 = 0,15
- Caso não chova: 0,25 . 0,7 = 0,175

Logo: 0,15 + 0,175 = 0,325

10º Problema: ENQ 2022-1

Questão 08 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Um prêmio é oferecido a um jogador pelo lançamento de um dado não viciado, com as seguintes regras:

- Se o resultado for 1, o jogador ganha 1 ponto.
- Se o resultado for 2 ou 3, o jogador ganha 2 pontos.
- Se o resultado for 4, 5 ou 6, não obtém pontuação.
- Os pontos vão se somando a cada jogada.
- O prêmio é entregue assim que o jogador conseguir obter exatamente 3 pontos e o jogo é encerrado.

(a) Determine a probabilidade de se ganhar o prêmio na segunda jogada.

(b) Determine a probabilidade de se ganhar o prêmio apenas na terceira jogada.

Possível resolução

Pergunta (a): Há duas maneiras de obter 3 pontos na segunda jogada:

• fazer 1 ponto na primeira e 2 pontos na segunda jogada cuja probabilidade é: $\frac{1}{6}.\frac{2}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

• fazer 2 pontos na primeira e 1 ponto na segunda jogada cuja probabilidade é: $\frac{2}{6}.\frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Logo a probabilidade de se ganhar o prêmio na segunda jogada é igual a: $\frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

Pergunta (b): Para facilitar a escrita considere a terna (a, b, c), onde a indica a pontuação na primeira jogada, b na segunda e c na terceira. Há cinco maneiras de obter 3 pontos exatamente na terceira jogada:

• (0, 1, 2) cuja probabilidade é: $\frac{3}{6}.\frac{1}{6}.\frac{2}{6} = \frac{6}{216}$

• (0, 2, 1) cuja probabilidade é: $\frac{3}{6}.\frac{2}{6}.\frac{1}{6} = \frac{6}{216}$

• (1, 0, 2) cuja probabilidade é: $\frac{1}{6}.\frac{3}{6}.\frac{2}{6} = \frac{6}{216}$

• (2, 0, 1) cuja probabilidade é: $\frac{2}{6}.\frac{3}{6}.\frac{1}{6} = \frac{6}{216}$

• (1, 1, 1) cuja probabilidade é: $\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

Portanto a probabilidade de se ganhar o prêmio exatamente na terceira jogada é igual a:

$$5 \cdot \frac{6}{216} + 1.\frac{1}{216} = \frac{24}{216} + \frac{1}{216}$$

5 ANALIZANDO OS RESULTADOS

5.1 ANÁLISE INDIVIDUAL DE CADA QUESTÃO

5.1.1 Análise dos resultados da questão 1 (ENEM 2016)

Quinze alunos (75%) acertaram e acharam a questão bem tranquila de fácil entendimento. Dos cinco que erraram, um deles, disse que esqueceu de multiplicar o primeiro desdobramento do caminho, os outros quatro tiveram dificuldade de entender o que deveria ser feito e desistiram da questão.

5.1.2 Análise dos resultados da questão 2 (ENEM 2017-1)

Quatorze alunos (70%) acertaram e acharam a questão tranquila, por ter um cálculo simples e com números pequenos, quatro alunos que erraram marcaram, letra b, pois se confundiram e acharam que era uma condicional estar no quarto C. Os outros dois marcaram C, pois acharam que era apenas uma relação de 1 aluna em 40 alunos.

5.1.3 Análise dos resultados da questão 3 (ENEM 2018

Dezessete alunos (85%) acertaram, treze utilizaram o mesmo caminho da resolução demonstrada na página 36. Três dos que acertaram, escreveram todas as 16 possibilidades possíveis utilizando a árvore de possibilidades. Um aluno utilizou permutação com repetição para todas as possibilidades conforme a apêndice 3.2. Os três que erraram, tentaram ganhar tempo e quando leram, “dois meninos e duas meninas” marcaram letra E, pensando em 50%.

5.1.4 Análise dos resultados da questão 4 (ENEM 2019

Quatorze alunos(70%) acertaram, desses quatorze, um aluno fez por permutação e comparou o resultado, como podemos ver no apêndice 4.2, por ter usado permutação com repetição, precisou verificar qual das opções apresentava mesma expressão, ele disse que optou pela que só teria multiplicação, então testou a letra A e a E, não chegou nem a testar a C. Dos seis que erraram, 4 marcaram B, pois pensaram que se somariam as combinações.

5.1.5 Análise dos resultados da questão 5 (ENEM 2020)

Dezenove alunos (95%) acertaram, acharam a questão muito simples. O que errou a questão disse que se confundiu porque a tabela tinha muita informação, e disse, com tom de brincadeira, que não é de exatas.

5.1.6 Análise dos resultados da questão 6 (ENEM 2021)

Apenas dez alunos (50%) acertaram essa questão, um dos alunos que acertou, utilizou as opções, para chegar ao resultado, com o dois não serviria, pois, o organizador queria aumentar o número de dardos que já eram 3, testou com 4 dardo e verificou que satisfazia o desejado pelo organizador conforme apêndice 6.2. Os que erraram, só entenderam a atividade depois de resolvida em sala.

5.1.7 Análise dos resultados da questão 7 (ENEM 2022)

Apenas seis alunos (30%) acertaram, essa foi a questão que eles acharam a mais difícil e, mesmo depois de resolvida em sala, foi necessário refazer mais algumas vezes para que todos conseguissem entender o raciocínio.

5.1.8 Análise dos resultados da questão 8 (ENEM 2023)

Todos acertaram (100%) e disseram que essa questão é tão simples que deve ser uma questão do ENEM, para ninguém zerar a prova de matemática.

5.1.9 Análise dos resultados da questão 9 (ENEM 2017-2)

Dezessete alunos (85%) acertaram a questão. Os três, que erraram, não pensaram no 70% da probabilidade de não chover.

5.1.10 Análise dos resultados da questão 10 (ENQ 2022-1)

A questão 10, é uma questão retirada do ENQ 2022-1, não foi aplicada junto com as do ENEM. Foi executada em dupla e com um tempo maior, os alunos acharam a questão bem elaborada e difícil, mas conseguiram entender e agora se consideram capazes de solucionar uma questão desse nível, porém todos compreenderam que precisam de mais horas de treino, com listas de exercícios e resolução de problemas, afim de fixar melhor as fórmulas e ganhar segurança na execução das questões do ENEM e precisam também de mais concentração na hora das resoluções.

5.2 PERSPECTIVAS DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA PROBALILIDADE A PARTIR DO RESULTADO DAS QUESTÕES

Após a correção de todas as questões acreditamos que probabilidade não será um problema para essa turma. Visto que depois de aplicada a avaliação, o simulado e discutidas as questões, observamos melhora nos resultados, a média de acertos dos vinte alunos na diagnostica foi de 5,05 questões corretas por aluno, já no simulado essa média subiu para 6,6 questões por aluno e como podemos ver no gráfico, abaixo, o número de alunos que obtiveram uma quantidade maior de acertos subiu, mostrando que a sequência didática foi eficiente, retomamos na correção dos erros ocorridos e revisamos o conteúdo utilizando o grupo interativo, e sistema de rotações por estações onde os alunos se ajudaram e sanaram as dificuldades.

Houve um bom número de acertos. Os principais desvios ocorreram por descuido, erro de interpretação de texto e por nervosismo comum há muitas pessoas ao fazerem avaliações, principalmente pelo tempo reduzido e pelo caráter classificatório. Em vista disso, percebemos que há necessidade de um número maior de horas de treino e execução das atividades, para que os alunos tenham mais segurança, pois além de praticar os conteúdos, temos também a necessidade de treinar e gerenciar a calma e a concentração. No gráfico, apresentado abaixo, pode ser notada a diferença entre o desempenho dos alunos participantes da pesquisa na avaliação diagnóstica e no teste simulado.

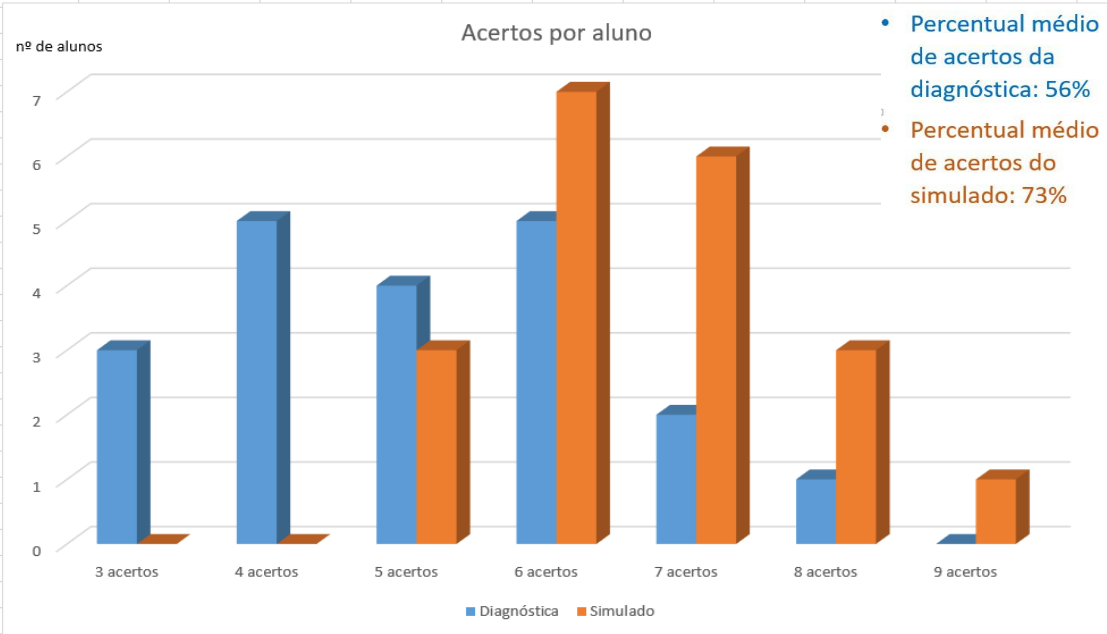


Gráfico 1

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como pudemos observar, a probabilidade é intrinseca a vida cotidiana, estando sempre presente no raciocínio humano. A dúvida a respeito da probabilidade de ocorrência dos eventos sempre dispertaram interesse da população mundial: A chance de um evento acontecer ou não, de se ganhar um prêmio, de saber o sexo de um bebê, se fará sol ou se choverá, e, até mesmo, sobre as possíveis características fenotípicas de um recém-nascido, dentre outras.

O estudo da probabilidade, no Ensino Fundamental e Médio, traz fórmulas e regras para esses cálculos e nesta dissertação trouxemos esse conteúdo. Notamos que, usando a metodologia da sequência didática, foi possível ofertar um caminho mais simples para ensinar o conteúdo descrito acima.

Por conseguinte, observamos que essa forma de ensino facilitou que o grupo de alunos participantes da pesquisa obtivessem um resultado positivo na resolução das questões de nível médio do Exame Nacional do Ensino Médio. Foi relatado pelos estudantes que os principais erros ocorreram por descuido e por nervosismo comum às pessoas ao realizarem avaliações, principalmente, pelo tempo reduzido e por ter carater classificatório.

Por fim, a partir dos resultados desta pesquisa, foram feitas discussões e intervenções para melhorar a performace dos alunos nas avaliações desse ano. Nota-se que há a necessidade de um número maior de horas de treino e execução de atividades e resolução de problemas sobre probabilidade no Ensino Médio para que os alunos tenham mais segurança ao realizar as questões desse tema e, além disso, são necessárias intervenções, que possam melhorar a concentração e a tranquilidade nas resoluções das avaliações. Por exemplo, utilizar as aulas de Estudo Orientado para trabalhar a segurança e concentração, e o APOIE (Ação Psicossocial e Orientação Interativa Escolar, com exercícios de respiração e atividades que auxiliem na prática do controle emocional e melhora da autoestima).

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMÂNCIO, Juliana Ramos. ***Planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBID*** / Juliana Ramos Amâncio. -- Rio de Janeiro, 2012. x, 225 f. : il. ; 29 cm. UFRJ / Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2012. Referências: f. 168-172.

BARDIN, Laurence. ***A análise de conteúdo***. Lisboa: Edições 70, 2002. Disponível em: <(PDF) BARDlN, L. (1977). Análise de conteúdo. Lisboa edições, 70, 225. | renan silva - Academia.edu> Acesso em: 01 de maio de 2024.

BRASIL, Ministério da Educação. ***Base Nacional Comum Curricular***. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc> Acesso em: 10 de maio de 2024.

CARVALHO AT de, GONTIJO CH, FONSECA MG. ***Pensamento crítico e criativo no ensino de probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental***. Educ. Pesqui. 2023. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349250774por > Acesso em: 10 de maio de 2024.

COSTA DE, GOLÇALVES TO. ***Compreensões, Abordagens, Conceitos e Definições de Sequência Didática na área de Educação Matemática***. Bolema. 2022 Jan; 36 (72): 358-88. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a16> Acesso em: 10 de maio de 2024.

GONTIJO, Cleyton Hércules. ***Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio.*** 2007. 194 f. Tese (Doutorado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2007. Disponível em <https//core.ac.uk/download/pdf/20482887.pdf> Acesso em: 15 de junho de 2024.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. ***A Matemática do Ensino Médio***. v2, SBM, 2006 Coleção do Professor de Matematica.

LIMA, E. L. de . ***Probabilidade em livros didáticos de matemática dos anos finais: diferentes concepções.*** Zetetike, Campinas, SP, v. 28, p.e020015, 2020. Disponível em:<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/ view/8656908.> Acesso em : 08 de outubro de 2023

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. de. ***Noções de Probabilidade e Estatística***. 5ª edição. São Paulo: Edusp, 2002.

MORELATTI, M. R. M. ET AL. ***Sequências didáticas descritas por professores de matemática e de ciências naturais da rede pública: possíveis padrões e implicações na formação pedagógica de professores***. Ciênc. Educ., Bauru, v. 20, n. 3, p. 639-652, 2014.

RIZZO, Maria Luiza Alves. ***Probabilidade***; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade.htm.> Acesso em 20 de março de 2024.>

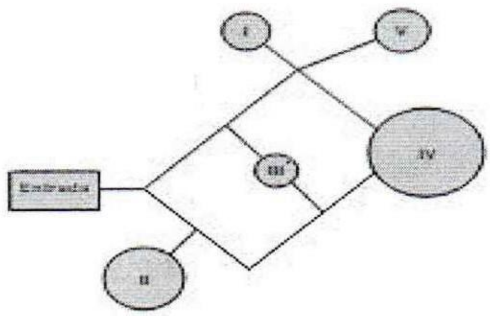
8 ANEXOS

Anexo 1 – Resolução 1ª questão

Problema 1- ENEM 2016

QUESTÃO 152

Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

A) $\frac{1}{96}$

B) $\frac{1}{64}$

C) $\frac{5}{24}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{5}{12}$

Entrada →

Sobe = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Desce = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{8+12}{96} =$

$\frac{20 :4}{96 :4} = \frac{5}{24}$

Anexo 2 – Resolução 2ª questão

Problema 2- ENEM 2017

QUESTÃO 146

Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala.

Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{18}$

C) $\frac{1}{40}$

D) $\frac{1}{54}$

E) $\frac{7}{18}$

São 3 salas $= \frac{1}{3}$ de estar na C

Estando lá $= \frac{1}{18}$ de ser sorteada

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{54}$$

Anexo 3 – Resolução 3ª questão (3 modelos)

Problema 3- ENEM 2018

QUESTÃO 149

Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos.

Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{3}{16}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{1}{2}$

• Quadrigêmeos ⇒ $n(\Omega) = 2^4 = 16$

• 2 meninos e duas meninas ⇒ (o, o, a, a), (o, a, o, a), (o, a, a, o), (a, o, o, a), (a, a, o, o), (a, o, a, o)

$n(A) = 6$

$P(A) = \frac{6}{16} \begin{smallmatrix}:2\\:2\end{smallmatrix} = \frac{3}{8}$

Problema 3- ENEM 2018

QUESTÃO 149

Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos.

Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

Possibilidades

= O O O O
= O O O A
= O O A O
= O O A A
= O A O O
= O A O A
= O A A O
= O A A A

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{3}{16}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{1}{2}$

numa segunda árvore o 1º nascimento de menina logo: (AOOO, AOOA, AOAO, AOAA, AAOO, AAOA, AAAO, AAAA

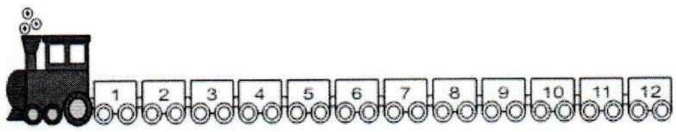
$P(A) = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$

Anexo 4 – Resolução da 4ª questão (2 soluções)

Problema 4- ENEM 2019

Questão 171

Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

A) $C^4_{12} \times C^3_{12} \times C^3_{12} \times C^2_{12}$

B) $C^4_{12} + C^3_8 + C^3_5 + C^2_2$

C) $C^4_{12} \times 2 \times C^3_8 \times C^2_5$

D) $C^4_{12} + 2 \times C^3_{12} + C^2_{12}$

E) $C^4_{12} \times C^3_8 \times C^3_5 \times C^2_2$

1) Temos 12 vagões, 4 serão vermelhos, fazemos então C^4_{12}

2) Sobrou 8 vagões, 3 serão azuis, fazemos então C^3_8

3) Sobrou 5 vagões, 3 serão verdes, fazemos então C^3_5

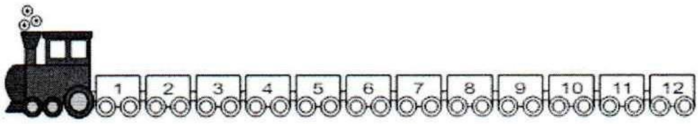
4) Sobrou 2 vagões, que serão amarelos, C^2_2 como isso vai ser aleatório teremos

$C^4_{12} \cdot C^3_8 \cdot C^3_5 \cdot C^2_2$

Problema 4- ENEM 2019

Questão 171

Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

Ⓐ $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$

Ⓑ $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$

Ⓒ $C_{12}^{4} \times 2 \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{2}$

Ⓓ $C_{12}^{4} + 2 \times C_{12}^{3} + C_{12}^{2}$

Ⓔ $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$

Vermelha → 4 vagões
Azul → 3 vagões
Verde → 3 vagões
Amarela → 2 vagões

Os doze vagões serão pintados, podemos permutar com a repetição das cores.

$$P_{12}^{4,3,3,2} = \frac{12.11.10.9.8.7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.3.2.1.3.2.1.2.1} = \frac{12.11.\cancel{9}.10.\cancel{8}.7.6.5}{\cancel{9}.\cancel{8}} = 12.11.10.7.6.5$$

Como só tem multiplicação, compararei com a letra E

$$C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{3} \cdot C_{5}^{3} \cdot C_{2}^{2} = \frac{12.11.10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}.4.3.2.1} \cdot \frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}.3.2.1} \cdot \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2.1} \cdot \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}.1}$$

$$C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{3} \cdot C_{5}^{3} \cdot C_{2}^{2} = \frac{12.11.10.\cancel{9}.\cancel{8}.7.6.5.\cancel{4}}{\cancel{4}.\cancel{9}.\cancel{8}} = 12.11.10.7.6.5$$

$$P_{12}^{4,3,3,2} = C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{3} \cdot C_{5}^{3} \cdot C_{2}^{2}$$

Anexo 5 – Resolução da 5ª questão

Problema 5- Enem 2020

Questão 156 - Matemática e suas Tecnologias

Uma casa lotérica oferece cinco opções de jogos. Em cada opção, o apostador escolhe um grupo de *K* números distintos em um cartão que contém um total de *N* números disponíveis, gerando, dessa forma, um total de *C* combinações possíveis para se fazer a marcação do cartão. Ganha o prêmio o cartão que apresentar os *K* números sorteados. Os valores desses jogos variam de R$ 1,00 a R$ 2,00, conforme descrito no quadro.

Jogo	Valor do jogo (R$)	Números a serem escolhidos (*K*)	Números disponíveis (*N*)	Combinações possíveis (*C*)
I	1,50	6	45	8 145 060
II	1,00	6	50	15 890 700
III	2,00	5	60	5 461 512
IV	1,00	6	60	50 063 860
V	2,00	5	50	2 118 760

Um apostador dispõe de R$ 2,00 para gastar em uma das cinco opções de jogos disponíveis.

Segundo o valor disponível para ser gasto, o jogo que oferece ao apostador maior probabilidade de ganhar prêmio é o

Ⓐ I.

Ⓑ II.

Ⓒ III.

Ⓓ IV.

● V.

Mesmo Comprando duas apostas do jogo II ou duas apostas do jogo IV. O jogo que apresenta menor número de combinações no espaço amostra é jogo V.

I → 1/8145060   III → 1/5461512   V → 1/2118760

II → 1/7145350   IV → 1/25031930

15'8'9'0'7'0'0 |2 → 7945350
−18
09
10
07
10
00

5'0'0'6'3'8'6'0 |2 → 25031930
10
006
03
18
06
00

Anexo 6 – Resolução da 6ª questão (2 soluções)

Problema 6- ENEM 2021

Questão 142 enem2021

O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é

A 2.
B 4.
C 6.
D 9.
E 10.

acertar no 1º lançamento $\rightarrow \frac{1}{2}$

errar o 1º e acertar o 2º $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

errar o 1º e 2º, acertar o 3º $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

errar o 1º, 2º e 3º e acertar o 4º $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

com 4 dardos já passa de $\frac{9}{10}$, pois

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{8+4+2+1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\frac{15}{16} > \frac{9 \cdot 1,6}{10 \cdot 1,6} = \frac{14,4}{16}$$

Problema 6- ENEM 2021

Questão 142 enem2021

O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é

A) 2.

B) 4.

C) 6.

D) 9.

E) 10.

Chance de ganhar maior que $9/10$ é o mesmo que a chance de errar menor que $1/10$.

Então, $(1/2)^n < 1/10$

$(1/2)^2 = 1/4 > 1/10$

$(1/2)^4 = 1/16 < 1/10$

Anexo 7 – Resolução 7ª questão

Questão 7 – ENEM 2022

QUESTÃO 137

A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão.

Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

A) $\frac{35}{64}$

B) $\frac{40}{64}$

C) $\frac{42}{64}$

D) $\frac{44}{64}$

E) $\frac{52}{64}$

Time campeão:
V (Vitória) D (Derrota)

* Ganhou a 1º e os próximos 3. (V, V, V, V)

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{8}}$

* Ganhou o 1º e 3 dos quatro próximos (V, —, —, —, V) no meio, temos: (2 vitórias e 1 derrota)

$P_3^{2} = \frac{3!}{2!} = 3$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \boxed{\frac{3}{16}}$

* Ganhou o 1º e 3 dos cinco próximos (V, —, —, —, —, V) no meio, temos: (2 vitórias e 2 derrotas)

$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \boxed{\frac{6}{32}}$

* Ganhou o 1º e 3 dos seis próximos (V, —, —, —, —, —, V) no meio, temos (2 vitórias e 3 derrotas)

$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = \boxed{\frac{10}{64}}$

total: $\frac{10}{64} + \frac{6}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} =$

$\frac{10 + 12 + 12 + 8}{64} = \frac{42}{64}$

Anexo 8 – Resolução da 8ª questão

Questão 8 – ENEM 2023

QUESTÃO 141

No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{2}{9}$

E) $\frac{3}{8}$

primeiro: 200 (1 cartão) = 200

segundo: 150 (2 cartões) = 300

terceiro: 100 (3 cartões) = 300

$$\overline{800}$$

$$\frac{3\cancel{00}}{8\cancel{00}} = \frac{3}{8}$$

Anexo 9 – Resolução da 9ª questão

Questão 9 – ENEM 2017

QUESTÃO 179

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

A 0,075
B 0,150
C 0,325
D 0,600
E 0,800

Se chover ⇒ 0,5 . 0,3 = 0,15

Se der sol ⇒ 0,25 . 0,7 = 1,75

$$\begin{array}{r} \overset{2}{0,25} \\ \times\ 0,7 \\ \hline 0,175 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,175 \\ +\ 0,15 \\ \hline 0,325 \end{array}$$

A probabilidade de atraso é de 0,325

Anexo 10 – Resolução da 10ª questão (ENQ 2022-1)

Questão 10 - ENQ 2022 1

Questão 08 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Um prêmio é oferecido a um jogador pelo lançamento de um dado não viciado, com as seguintes regras:

- Se o resultado for 1, o jogador ganha 1 ponto.
- Se o resultado for 2 ou 3, o jogador ganha 2 pontos.
- Se o resultado for 4, 5 ou 6, não obtém pontuação.
- Os pontos vão se somando a cada jogada.
- O prêmio é entregue assim que o jogador conseguir obter exatamente 3 pontos e o jogo é encerrado.

(a) Determine a probabilidade de se ganhar o prêmio na segunda jogada.

(b) Determine a probabilidade de se ganhar o prêmio apenas na terceira jogada.

a) Para ganhar o Prêmio na segunda jogada, temos duas Possibilidades.
1ª Sair 1 no 1º lançamento e sair (2 ou 3) no 2º lançamento
2º Sair (2 ou 3) no 1º lançamento, e sair 1 no 2º lançamento

$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{4:4}{36:4} = \frac{1}{9}$

b) Para ganhar o Prêmio apenas na terceira jogada, temos 5 possibilidades.

	1º lançamento	2º lançamento	3º lançamento
1º Possibilidade	Sair 1	Sair 1	Sair 1
2º Possibilidade	Sair 1	Sair 4, 5 ou 6	Sair 2 ou 3
3º Possibilidade	Sair 4, 5 ou 6	Sair 1	Sair 2 ou 3
4º Possibilidade	Sair 4, 5 ou 6	Sair 2 ou 3	Sair 1
5º Possibilidade	Sair 2 ou 3	Sair 4, 5 ou 6	Sair 1

$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(A) = \frac{1}{216} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} = \frac{25}{216}$

Apêndice 1 – Lista Diagnóstica

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="3">EEEFM "ZULEIMA FORTES FARIA"</td></tr>
<tr><td>DISCIPLINA: Matemática</td><td>TURMA:</td><td rowspan="2">Fique atento</td></tr>
<tr><td>PROFESSOR: Dariomar C Fernandes</td><td>DATA:</td></tr>
<tr><td colspan="3">NOME:</td></tr>
</table>

1) Qual é a probabilidade de obter um número ímpar ao lançar um dado padrão de 6 faces?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{2}{3}$

2) Em uma urna com 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 5 bolas verdes, qual é a probabilidade de retirar uma bola azul?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{2}$

3) Numa urna tem 5 bolinhas, numeradas de um a cinco. Retirando-se duas delas sem reposição. Qual a probabilidade de que a soma Dos números das duas bolinhas seja 6?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{4}{13}$

4) Qual é a probabilidade de não obter um número 3 ou 4 ao lançar um dado padrão de 6 faces?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

5) Se dois dados são lançados, qual é a probabilidade de a soma dos números ser 7?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{13}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{4}$

6) Uma — urna contém 4 bolas vermelhas e 6 bolas verdes. Se duas bolas são retiradas aleatoriamente, uma após a outra com a reposição da bola retirada, qual é a probabilidade de ambas serem verdes?

A) 33%

B) 24%

C) 36%

D) 16%

E) 18%

7) Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 6 bolas verdes. Se duas bolas são retiradas aleatoriamente, uma após a outra sem a reposição da bola retirada, qual é aproximadamente a probabilidade de ambas serem verdes?

A) 33%

B) 24%

C) 36%

D) 16%

E) 18%

8) Em uma urna, há 10 bolinhas numeradas de 1 e 10, duas bolinhas serão sorteadas aleatoriamente sem reposição. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma das bolinhas sorteadas tenha nela escrito um número par?

A) 0,333...

B) 0,5

C) 0,666...

D) 0,777...

E) 0,25

9) Um professor sabe que 40% dos alunos de uma classe são excelentes em matemática. Se ele seleciona aleatoriamente 5 alunos para um projeto, qual é a probabilidade de que exatamente 3 deles sejam excelentes em matemática?

A) 23%

B) 27%

C) 34%

D) 19%

E) 16%

Possível resolução 1: Um dado padrão tem 6 faces, das quais 3 são ímpares (1, 3 e 5). Portanto, a probabilidade de obter um número ímpar é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, opção (C)

Possível resolução 2: O total de bolas é 10 (3 vermelhas + 2 azuis + 5 verdes). A probabilidade de retirar uma bola azul é $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, opção (B)

Possível resolução 3: Existem as seguintes possibilidades de se obter soma 6. (Sair 1 na primeira bolinha e 5 na segunda ou o contrário) e (sair 2 na primeira bolinha e 4 na segunda ou o contrário). Logo $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{1}{5}$, opção (D).

Possível resolução 4: Existem 6 faces e queremos a probabilidade de não obter 3 ou 4, ou seja, obter qualquer uma das outras 4 faces. Portanto, a probabilidade é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, opção (D).

Possível resolução 5: Para obter uma soma de 7, as combinações possíveis são (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), e (6,1). Existem 6 combinações favoráveis. Como há um total de 36 combinações possíveis (6 faces em cada dado), a probabilidade é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, opção (D).

Possível resolução 6: O total de bolas é 10 (4 vermelhas + 6 verdes). A probabilidade de retirar uma bola verde e depois mais uma bola verde repondo a primeira bola retirada é: $\frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100}$, opção (C).

Possível resolução 7: O total de bolas é 10 (4 vermelhas + 6 verdes). A probabilidade de retirar uma bola verde e depois mais uma bola verde sem a repor a primeira bola retirada é: $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ = 33,33..., opção (A).

Possível resolução 8: Primeiro, calculamos a probabilidade de nenhum número ser par. Existem 5 números ímpares entre 1 e 10. Logo: $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$. Portanto, a probabilidade de pelo menos um número ser par é $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$, opção (D)

Possível resolução 9: Vamos utilizar a fórmula da binomial. Temos: n = 5 (total de alunos), k = 3 (excelentes em matemática), probabilidade de sucesso (40%) e probabilidade de insucesso (60%). Portanto, a probabilidade de exatamente 3 dos 5 serem excelentes é: $\binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^{5-3} = \frac{5!}{3!.2!} \cdot 0{,}064 \cdot 0{,}36 = 0{,}2304 = 23{,}04\%$, opção (A)