

Gilcelia Helmer Costa Rocha

Sequência Didática de Ensino de Análise Combinatória por meio de Problemas

Vitória

2022

Gilcelia Helmer Costa Rocha

Sequência Didática de Ensino de Análise Combinatória por meio de Problemas

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

Vitória

2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

S677t Sobrenome do autor, Nome do autor, 1989-
 Título da obra : Subtítulo da obra / Nome do autor Sobrenome
do autor. - 2022.
 Total de folhas f. : il.

 Orientador: Nome do orientador Sobrenome do orientador.
 Coorientador: Nome do coorientador Sobrenome do
coorientador.

 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de
Ciências Exatas.

 1. Posicionando na terra e no espaço. I. Sobrenome do
orientador, Nome do orientador. II. Sobrenome do coorientador,
Nome do coorientador. III. Universidade Federal do Espírito
Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

REGISTRO DE JULGAMENTO DA DISSERTAÇÃO DO(A) CANDIDATO(A) AO GRAU DE MESTRE PELO PROFMAT/UFES.

A Comissão Examinadora da Dissertação de Mestrado intitulado “Sequência didática de ensino de análise combinatória por meio de problemas”, elaborado(a) por Gilcélia Helmer Costa Rocha, candidato(a) ao Grau de MESTRE EM MATEMÁTICA, recomendou, após apresentação da Dissertação, realizada no dia 22 de fevereiro de 2024, que a mesma seja:

APROVADO

Os membros da Comissão deverão indicar a natureza de sua decisão através de sua assinatura na coluna apropriada que segue:

Nome	Função	Resultado
Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho	Orientador(a) – UFES	APROVADO
Dr. Moacir Rosado Filho	Membro Interno – UFES	APROVADO
Dra. Ana Lucia da Silva	Membro Externo – UEL	Aprovado





Registro de Julgamento Gilcéia Helmer Costa Rocha

Data e Hora de Criação: 20/02/2024 às 07:58:33

Documentos que originaram esse envelope:

- Registro de Julgamento Gilcéia Helmer Costa Rocha.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 80b9ff5b41413d7c78e3a087e5e68241a64950058943aad542aa6aad95fb6179

[SHA512]: e0acae803b4f05ade0708843f530c2b2235676c7da4164575972c2140499552bebb1eb1574ec83efea262c5b78b53349b8be534b46d7bf42196b6e2dd43186df

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Ana Lucia da Silva (analucia@uel.br)

Data/Hora: 23/02/2024 - 09:47:55, IP: 189.32.47.73

[SHA256]: f2c5057389212bd9e797777e7ceafca6276f80c7f26df50520e0ecbfaef891a



ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)

Data/Hora: 22/02/2024 - 13:59:11, IP: 187.36.169.214, Geolocalização: [-20.257177, -40.278425]

[SHA256]: ce8645afb7f8aea6f1faad55a70da59a9448461d9d302857d29c3382b8d3d35b



ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacrosa@gmail.com)

Data/Hora: 22/02/2024 - 13:35:37, IP: 179.102.132.116, Geolocalização: [-20.284976, -40.291020]

[SHA256]: b6c86ec2bfb1b9cb5112910ccd9c63150370c973ac2413e219313f89a42656d3

Histórico de eventos registrados neste envelope

23/02/2024 09:47:55 - Envelope finalizado por analucia@uel.br, IP 189.32.47.73

23/02/2024 09:47:55 - Assinatura realizada por analucia@uel.br, IP 189.32.47.73

22/02/2024 13:59:11 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.169.214

22/02/2024 13:58:00 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.169.214

22/02/2024 13:35:37 - Assinatura realizada por moacrosa@gmail.com, IP 179.102.132.116

21/02/2024 16:04:07 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br

21/02/2024 16:04:06 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br

20/02/2024 07:58:36 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

Gilcelia Helmer Costa Rocha

Sequência Didática de Ensino de Análise Combinatória por meio de Problemas

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Vitória
2022

Dedico a todos que acreditam que um dia tudo pode ser melhor.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida, por estar sempre presente em tudo em minha existência, nas viagens até a UFES e nos momentos difíceis que enfrentei desde o início até a conclusão deste curso. Só tenho a agradecer por todas as conquistas que permitiu que fossem possíveis, em toda trajetória até aqui.

Aos meus pais: João da conceição Costa(Im memoriam) e Zilda Helmer Costa (Im memoriam), pelo carinho, pela dedicação e por terem me ensinado, desde criança, a trabalhar, persistir e não desistir dos sonhos. Ao meu esposo, Adenilson, às minhas filhas Déborah e Annelise, a minha cunhada Marenilda por estar sempre me apoiando em tudo e em especial nos estudos de mestrado. A amiga Selma que tanto me ajudou com seus conhecimentos na elaboração do pré projeto para a SEDU .

Ao meu orientador Florêncio Ferreira Guimarães Filho, por todo apoio e dedicação,que ao ministrarem curso de extensão, juntamente com a professora Luzia Maria Casati,

pelo programa Pró-Ciência, promovido pela Sedu em parceria com o departamento de Matemática da UFES, em 1986, despertou em mim o interesse pelo curso de Licenciatura em Matemática, cursado na CEUNES de São Mateus. Seus ensinamentos, orientações e direcionamento foram imprescindíveis para realização deste trabalho. Aos colegas e amigos da turma do PROFMAT, em especial Alex, Joglícia, Moacir, Naftaly, Rosiane, Rhuana, Welingthon que sempre dedicaram um tempo de suas vidas, compartilhando conhecimentos para que pudéssemos seguir juntos e concluir as matérias do curso.

A todos os professores do PROFMAT que com toda dedicação e carinho repassaram seus conhecimentos, com rigor necessário,para que as disciplinas do currículo do curso ofertado proporcionassem de fato conhecimentos que pudessem melhorar o ensino de Matemática.

Expresso aqui gratidão por todos os professores da graduação, que não mediram esforços na ministração de aulas na graduação, em especial o professor Rocha e o professor Jamil que serviram como base de todo conhecimento que necessitei neste curso.

Aos ex coordenadores Moacir e Florêncio e o atual coordenador do PROFMAT Fábio Júlio, por todo empenho demonstrado no exercício de sua função.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual, seria inviável o deslocamento até o campus para os estudos. E a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que isso tudo fosse possível.

“Texto referente a epigrafe.”
(Indicar fonte do texto)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma sequência de ensino de Análise Combinatória por meio de problemas da OBMEP, visando melhorar o raciocínio e interesse pela aprendizagem de Matemática no ensino fundamental e posteriormente no ensino médio. A relevância deste trabalho deve-se ao fato deste conteúdo estar presente currículo no ensino fundamental e de uma forma mais abrangente na matriz curricular do Ensino Médio, sendo cobrado no ENEM. Percebe-se que os discentes apresentam muitas dificuldades, no Ensino Médio, quando se deparam com resolução de problemas envolvendo Análise Combinatória, tendo em vista essa dificuldade, fazem-se necessárias intervenções no nível fundamental, a fim de explorar estratégias de resolução, desenvolvendo conteúdo por meio de problemas com contextos que despertem e valorize de fato, o raciocínio. A Matemática tem sido considerada como algo difícil entre os jovens, acredita-se também, que com esse trabalho será possível uma ruptura com o que está posto, uma vez que raciocínio todos têm e que é preciso saber explorá-lo e torná-la atraente. Além disso, espera-se sobretudo que o que for desenvolvido aqui possa possibilitar uma formação discente que vá além dos muros da escola e do currículo escolar, que possa contribuir com o progresso científico e tecnológico.

Palavras-chave: Sequência didática, análise combinatória, resolução de problemas, OBMEP.

Abstract

This work aims to present a teaching sequence of Combinatorial Analysis through OBMEP problems, aiming to improve reasoning and interest in learning Mathematics in elementary school and later in high school. The relevance of this work is due to the fact that this content is present in the elementary school curriculum and in a more comprehensive way in the High School curriculum, being highly demanded in ENEM. It is noticed that students present many difficulties, in High School, when they are faced with solving problems involving Combinatorial Analysis, considering this difficulty, interventions are necessary at the fundamental level, in order to explore resolution strategies, developing content through problems with contexts that truly awaken and value reasoning. Mathematics has been called something difficult among young people, it is also believed that with this work it will be possible to break with what is established, since everyone has reasoning and I need to know how to explore it and make it attractive. Furthermore, it is hoped, above all, that what is developed here will enable student training that goes beyond the walls of the school and the school curriculum, which can contribute to scientific and technological progress. This is the english abstract.

Keywords: Didactic sequence, combinatorial analysis, problem solving, OBMEP.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Árvore das Possibilidades	27
Figura 2 – Viagem	28
Figura 3 – Escolhendo a cor das flores	29
Figura 4 – Árvore das Possibilidades 1	30
Figura 5 – Caixas	35
Figura 6 – Mapa I	42
Figura 7 – Mapa II	43
Figura 8 – Brinquedo	45
Figura 9 – Potes I	48
Figura 10 – Potes II	48
Figura 11 – dado	52
Figura 12 – escada	54
Figura 13 – cadeiras I	55
Figura 14 – cadeiras II	56
Figura 15 – cadeiras III	56
Figura 16 – cadeiras IV	56
Figura 17 – cadeiras V	56
Figura 18 – cadeiras VI	57
Figura 19 – cadeiras VII	57
Figura 20 – 2013	59
Figura 21 – Número 1	60
Figura 22 – Número 3	60
Figura 23 – Número 0	61
Figura 24 – Número 1-	61
Figura 25 – Número 3-	61
Figura 26 – Número 0-	62
Figura 27 – Sequências I	62
Figura 28 – Sequências II	63
Figura 29 – Sequências III	63
Figura 30 – sequência IV	64
Figura 31 – sequência V	64
Figura 32 – sequência VI	64
Figura 33 – sequência VII	64
Figura 34 – sequência VIII	65
Figura 35 – sequência IX	65
Figura 36 – sequência X	65

Figura 37 – Quadriláteros I	65
Figura 38 – Hexágono I	66
Figura 39 – Hexágono II	66
Figura 40 – Triangulação I	66
Figura 41 – Triangulação II	66
Figura 42 – Triangulação III	67
Figura 43 – Triangulação IV	67
Figura 44 – Triangulação V	68
Figura 45 – Triangulação VI	68
Figura 46 – Triangulação VII	68
Figura 47 – Triangulação VIII	68
Figura 48 – Divisão dos peixes I	69
Figura 49 – Divisão dos peixes II	70
Figura 50 – Divisão dos peixes III	70
Figura 51 – Divisão dos peixes IV	70
Figura 52 – Divisão dos peixes V	70
Figura 53 – Divisão dos peixes	71
Figura 54 – Divisão dos peixes VI	71
Figura 55 – Divisão dos peixes VII	71
Figura 56 – Sequência I	72
Figura 57 – Sequência II	73
Figura 58 – Sequência III	74
Figura 59 – Polígonos IV	75
Figura 60 – Polígonos Simples	75
Figura 61 – Polígonos regulares	76
Figura 62 – Ferramenta 1	77
Figura 63 – Ferramenta 2	78
Figura 64 – Ferramenta 3	78

Lista de tabelas

Tabela 1 – Soluções	49
Tabela 2 – Soluções	49
Tabela 3 – Nomeclatura dos Polígonos	76

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
3	ANÁLISE COMBINATÓRIA	20
3.1	Princípios Elementares de contagem	20
3.1.1	Definição de conjunto Finito	21
3.1.2	Princípio Aditivo	21
3.1.3	Princípio Multiplicativo	25
3.2	Permutação Simples	37
3.3	Combinação Simples	38
3.4	Permutação com repetição	41
4	OUTRAS FÓRMULAS COMBINATÓRIAS	45
4.0.1	Permutações Circulares	45
4.0.2	Combinações Completas	46
5	PROPOSTA	50
5.0.1	Descrição da Proposta	50
5.0.2	Descrição das Etapas do Processo	50
5.0.3	Questões da OBMEP	51
5.0.3.1	Atividade 1	51
5.0.3.2	Atividade 2	52
5.0.3.3	Atividade 3	53
5.0.3.4	Atividade 4	55
5.0.3.5	Atividade 5	57
5.0.3.6	Atividade 6	58
5.0.3.7	Atividade 7	59
5.0.3.8	Atividade 8	62
5.0.3.9	Atividade 9	65
5.1	Desenvolvimento de Atividades Diferenciadas	69
5.1.0.1	Divisões	69
5.1.1	Produto Notáveis	72
5.1.1.1	Quadrado da soma de dois termos	72
5.1.1.2	Quadrado da diferença de dois termos	73
5.1.1.3	Produto da Soma Pela Diferença de dois Termos	74

5.1.2	Polígonos	74
5.1.2.1	Polígonos regulares	75
5.2	O uso do Geogebra como Ferramenta de Ensino	76
5.2.0.1	Construindo Polígonos	77
5.2.0.2	Traçando Diagonais	78
5.2.0.3	Medindo ângulos	78
5.3	Considerações Finais	79
	REFERÊNCIAS	80

1 Introdução

A Matemática tem sido reconhecida como uma área do conhecimento de grande importância para o desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico. Muitas pesquisas científicas têm sido feitas acerca de como melhorar o ensino, buscando a satisfação tanto por parte de quem ensina quanto por parte de quem aprende, a fim de encontrar metodologias que propiciem melhoras nos resultados do ensino aprendizagem e aumento nos índices tão esperados nas avaliações externas. Apesar de não estar entre as preferidas dos discentes, permanece no currículo escolar, por ser reconhecida como ciência que dá suporte às demais. Este reconhecimento, deve-se ao fato de seu ensino possibilitar ao estudante raciocínio lógico, pensamento criativo e abstração de resultados. De acordo com os Parâmetros Curriculares (PCNs) o ensino da Matemática

desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno (BRASIL, 2001,p.15).

Conforme (BRASIL, 2001,p.15) o ensino desse componente curricular deve ir além de procedimentos mecânicos,sem significado para o discente. Nesse sentido, deve permitir que o aluno seja capaz de fazer investigação de natureza da matemática, e assim, perceber a Matemática e sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre este.

Nessa mesma direção, os (BRASIL, 2001,p.15) apontam para metodologia de resolução de problemas como proposta de ensino capaz de atingir objetivos previstos e estabelecidos para promover as competências gerais e o conhecimento da Matemática.

Não obstante, a essa metodologia (POLYA, 2006) reforça que o professor precisa ir além de atividades rotineiras que engessam o pensamento, promovendo problemas compatíveis com o conhecimento dos alunos, utilizando questionamentos que estimulem e possam promover o raciocínio independente.

Nesse sentido, no que diz respeito aos alunos, a BNCC do ensino Médio reforça que

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

De acordo com (POLYA, 2006) na metodologia de resolução de problemas os quatro passos importantes a se considerar são: compreensão do problema, identificação dos variados itens que se inter-relacionam para traçar um plano de resolução do problema, execução deste plano e por fim um retrospecto da resolução completa.

Dessa forma para o professor iniciar um trabalho com foco na resolução de problemas, precisa partir de um problema, que de acordo com (ONUCHIC, 2000)

Esse problema inicial é chamado problema gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula. (ONUCHIC, 2000)

Segundo (ONUCHIC, 2000), no desenvolvimento das atividades em sala de aula é necessário observar 10 etapas: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução de problemas, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas.

Neste sentido, este trabalho pretende apresentar uma sequência didática de ensino de Análise Combinatória por meio de problemas com objetivo de melhorar o raciocínio e interesse pela aprendizagem de Matemática no ensino fundamental e posteriormente no ensino médio. Esta dissertação foi dividida em cinco capítulos:

1—O primeiro capítulo denomina-se introdução, constitui-se no ponto de partida pelo qual este trabalho foi idealizado, tendo por finalidade evidenciar a importância da Matemática, sobretudo do ramo da Análise Combinatória, para o desenvolvimento do raciocínio, evolução da sociedade e avanços na tecnologia existente.

2— O segundo capítulo denomina-se fundamentação teórica, nele ocorre uma breve discussão sobre o ensino-aprendizagem de Matemática e metodologias utilizadas, além disso, reflete importância da investigação e contribuições para a aprendizagem.

3— O terceiro capítulo aborda o conteúdo de Análise Combinatória e a forma como este deve ser desenvolvido no Ensino Médio, além disso, são: discutidos os Princípios Elementares, Permutação, Arranjos, Combinação e Permutações com repetição com um série de exemplos interessantes que podem embasar o conhecimento do professor.

4— Um quarto capítulo denominado Outras Formas de Combinatória, em que são abordadas técnicas não usuais no Ensino médio, tais como Permutações Circulares, Combinações Completas e Combinações Complementares, que permitem uma ampliação do repertório dos professores no ensino de Análise Combinatória.

5— Um Quinto capítulo denominado de proposta, apresentará as tarefas que serão trabalhadas com os alunos, as possíveis resoluções dos problemas, as possíveis dúvidas e a

formalização do conteúdo.

6— Por fim, apresentaremos o último capítulo com algumas considerações a respeito do trabalho proposto

2 Fundamentação Teórica

No contexto escolar, muitas discussões no campo da Educação Matemática têm sido levantadas acerca do processo de ensino-aprendizagem de Matemática, entre elas as metodologias de ensino que os professores desta área de conhecimento precisam se apropriar e repassar para seus alunos, a fim de que estes consigam construir seu próprio conhecimento de forma crítica e reflexiva. Nesse sentido, o ensino desta disciplina deve ir além de meras repetições de exercícios e aplicações de fórmulas, não se limitando a modelos prontos e acabados.

segundo (ONUCHIC, 2000) o foco principal do ensino de Matemática deve ser sua aplicação, ou seja, deve possibilitar que alunos utilizem os conhecimentos adquiridos nesse componente curricular,afim de resolverem problemas que surgem em outros contextos.

Dessa forma, possivelmente haverá um rompimento com modelos impostos no ensino tradicional, propiciando ao sujeito da aprendizagem o que prevê os quatro pilares da educação: aprender a conhecer, aprender a conviver, aprender a fazer e aprender a ser.

Para tanto, cabe ao professor a transposição de detentor do conhecimento para mediador do ensino, através de aulas investigativas que promovam reflexões e intervenções, com objetivo de gerar novos conhecimentos e pensamento autônomo.

Dessa forma, como ocorre em todas as Ciências, a Matemática, sem perder a beleza e encanto, será ensinada e aprendida, utilizando-se de todos os recursos que lhe são disponíveis.

3 Análise Combinatória

A análise Combinatória constitui-se numa das partes da Matemática mais difíceis de serem ensinadas e também aprendida. De acordo com (MORGADO, 2000, p. 1) os alunos entendem combinatória como estudo das combinações, arranjos e permutações, não conseguem fazer transposição do que lhes é ensinado, limitando-se a resolver problemas em cima de modelos prontos, preocupando-se apenas em classificar o problema e aplicar fórmulas. Nesse sentido, (MORGADO, 2000, p. 1) aborda que

Isso no entanto é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos.(MORGADO, 2000, p. 1)

Ainda segundo (MORGADO, 2000, p. 1), existem outras técnicas para atacar e resolver um problema, e que sua solução demanda quase sempre de estratégias e conhecimento total da situação descrita. Também aborda que combinação, arranjos e permutações, devem ir além de meras repetições mecânicas e padronizadas.

De acordo com (SANTOS, 2013) a análise combinatória é um tópico importante da Matemática, que atua em vários ramos e fornece base para a contagem de possibilidades de eventos no cotidiano das pessoas. Além disso, constitui-se numa ferramenta de grande valia para inserção do indivíduo no mercado de trabalho, uma vez que está presente em vários campos da ciência, entre eles: Matemática, Odontologia, Educação, Medicina, Agronomia, Ciências Sociais, Economia e outros.

3.1 Princípios Elementares de contagem

De acordo com (BNCC, 2018), o ensino de Matemática e suas tecnologias, deve basear-se no desenvolvimento de competências específicas e este deve associar-se às habilidades que os estudantes devem alcançar. A Análise Combinatória é contemplada pela competência 3. De acordo com (BNCC, 2018)

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente(BNCC, 2018).

Dessa forma, ao observar essa competência no desenvolvimento do conteúdo, também é necessário desenvolver a habilidade que esta sugere, assim conforme a (BNCC, 2018) deverá ser desenvolvida:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore (BNCC, 2018).

Conforme essa habilidade, é necessário iniciar o estudo de Análise combinatória observando os princípios elementares da contagem. Neste estudo, definiremos o número de elementos de um conjunto A por $|A|$. Os princípios básicos de contagem serão apresentados a partir da construção de bijeções apropriadas e de uso de recursos.

3.1.1 Definição de conjunto Finito

Considere o conjunto dos números naturais de 1 a n , com $n \in \mathbb{N}$, como sendo: $I_n = \{j \in \mathbb{N} / 1 \leq j \leq n\}$.

Dizemos que um conjunto A é finito se for o conjunto vazio ou se existir uma bijeção de $f : I_n \rightarrow A$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Considere o conjunto dos números naturais de 1 a n , com $n \in \mathbb{N}$, como sendo: $I_n = \{j \in \mathbb{N} / 1 \leq j \leq n\}$.

Dizemos que o conjunto A não vazio é finito se existir uma bijeção de $f : I_n \rightarrow A$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Assim representamos $a_i = f(i)$, e vamos escrever $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, onde n é o número de elementos do conjunto A , ou seja, $|A| = n$.

3.1.2 Princípio Aditivo

O princípio aditivo da contagem é uma consequência do princípio bijetivo, constituindo-se numa ferramenta primordial para resolução de problemas de análise combinatória, e será enunciado conforme definição:

Definição 3.1.1. Considere dois conjuntos A e B ; definimos como $A \cup B$ ao conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B , ou seja, os elementos deste conjunto devem pertencer a pelo menos um dos conjuntos em questão. O conjunto $A \cup B$ é denominado união de A com B .

Simbolicamente, expressamos por: $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Podemos definir a união de uma quantidade qualquer de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

“Por indução sobre n , uma vez definido é representada por $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ para algum n inteiro e $n \geq 2$, define-se $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}$ como sendo $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}$.”

Exemplo 3.1.2. Considere os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{r, s, t\}$, $C = \{a, x, y\}$. Determine os conjuntos $A \cup B$ e $A \cup C$.

Solução: de acordo com 3.1.1 temos que o conjunto $A \cup B = \{a, e, i, o, u, r, s, t\}$ e o conjunto $A \cup C = \{a, e, i, o, u, x, y\}$.

Definição 3.1.3. Considere dois conjuntos A e B , definimos como $A \cap B$ ao conjunto dos elementos que pertencem a A e a B simultaneamente. O conjunto $A \cap B$ é denominado intersecção de A com B .

Simbolicamente, expressamos por: $A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$

Podemos definir a intersecção de uma quantidade qualquer de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

“Por indução sobre n , uma vez definido $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n =$ para algum inteiro n e $n \geq 2$, define-se $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cap A_{n+1}$ como sendo $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cap A_{n+1}$ ”.

Exemplo 3.1.4. Considere os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{r, s, t\}$, $C = \{a, x, y\}$. Determine os conjuntos $A \cap B$ e $A \cap C$.

Solução: de acordo com 3.1.3 $A \cap B = \emptyset$ e $A \cap C = \{a\}$.

Dizemos que dois conjuntos A e B são disjuntos quando $A \cap B = \emptyset$. Ressaltamos que este fato não se restringe apenas a dois conjuntos.

Exemplo 3.1.5. Numa escola, serão realizadas oficinas e sessões de cinema paralelas aos jogos inter-classe, na semana da criança. Para não haver superlotação e confusão, definiu-se que cada criança deverá escolher uma oficina ou uma sessão de cinema para participar. Sabendo que foram ofertadas 4 oficinas e 3 sessões de cinema, de quantas formas cada criança poderia participar dos eventos programados para sua diversão?

Solução: Observe inicialmente que a escolha pode ser feita por uma oficina ou um jogo. Neste caso, podemos considerar tais escolhas como sendo conjuntos disjuntos, indicaremos por 1, 2, 3, 4 as oficinas e por A, B, C as sessões de cinema, temos:

$$O = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$J = \{A, B, C\}$$

Observa-se que os conjuntos O e J estão de acordo com a definição 3.1.1, assim temos que :

$O \cup J = \{x/x \text{ é uma oficina ou um jogo}\} = \{1, 2, 3, 4, A, B, C\}$, $n(O \cup J) = n(O) + n(J) = 4 + 3 = 7$

Para a solução desse problema é imprescindível observar o conectivo "ou" que se relaciona diretamente com o Princípio Aditivo. Atentar-se ao conectivo presente no problema constitui-se numa estratégia importante na interpretação dos problemas e também na decisão do princípio de resolução que deve ser aplicado.

Exemplo 3.1.6. *O cardápio de uma lanchonete oferece 4 tipos de salgados fritos e 5 tipos de salgados assados. Considerando que um cliente tenha dinheiro para comprar um salgado, de quantos modos distintos essa cliente pode comprar seu lanche?*

Solução: O cliente deverá escolher entre os 4 salgados fritos ou entre 5 tipos de salgados assados. Os salgados fritos serão indicados por 1, 2, 3, 4 e os assados por A, B, C, D, E , assim temos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{A, B, C, D, E\}$$

Observe que $A \cap B = \emptyset$, portanto A e B são disjuntos. De acordo com a definição 3.1.1, a solução desse problema se dá pela união dos dois conjuntos; assim, temos $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, A, B, C, D, E\}$, onde $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 5 = 9$.

Nesse exemplo, a cliente pode fazer sua escolha de 9 modos diferentes.

Teorema 3.1.7. *Sejam A e B dois conjuntos disjuntos finitos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, sendo que p e q o número de elementos de A e B , respectivamente. Então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.*

Prova:

Como A tem p elementos então existe uma bijeção $f : I_p \rightarrow A$.

Como B tem q elementos então existe uma bijeção $g : I_q \rightarrow B$.

Considere a seguinte função $h : I_{p+q} \rightarrow A \cup B$, definida por $h(n) = f(n)$, quando $n \in I_p = \{1, 2, \dots, p\}$ e $h(n) = g(n - p)$, quando $n \in I_{p+q} - I_p = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$.

Afirmção 1: A função h está bem definida. De fato, seja $n \in I_{p+q} = I_p \cup (I_{p+q} - I_p)$. Se $n \in I_p$, então $h(n) = f(n)$, que pertence a A e, $A \subset A \cup B$. Logo se $n \in I_{p+q} - I_p = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$, então $n - p \in I_q$, e $h(n) = g(n - p)$, que pertence a B e, $h(n) \in A \cup B$, $B \subset A \cup B$. Logo $h(n) \in A \cup B$.

Afirmção 2: h é injetiva.

De fato, sejam $n, n' \in I_{p+q}$ tais que $h(n) = h(n')$. Vamos mostrar que $n = n'$. Temos 3 casos a considerar:

– Caso 1: $n, n' \in I_p$.

Nesse caso, tem-se $f(n) = h(n) = h(n') = f(n')$ e logo, com f é injetiva (já que f é bijetiva), tem-se que $n = n'$.

– Caso 2: $n, n' \in I_{p+q} \setminus I_p$.

Nesse caso, tem-se $g(n - p) = h(n) = h(n') = g(n' - p)$ e logo, com g é injetiva (já que g é bijetiva), tem-se $n - p = n' - p$, ou seja, $n = n'$.

– Caso 3: $n \in I_p$ e $n' \in I_{p+q} \setminus I_p$ (esse caso é totalmente análogo ao caso em que $n' \in I_p$ e $n \in I_{p+q} \in I_p$).

Nesse caso, $n \in I_p$ então $h(n) = f(n) \in A$. Como $n' \in I_{p+q} \setminus I_p$ então $h(n') = g(n' - p) \in B$.

Como $h(n) = h(n')$, então $f(n) = g(n' - p)$, portanto $f(n) = g(n' - p) \in A \cap B$, mas A e B são disjuntos, o que é um absurdo. Logo esse caso não ocorre.

Afirmção 3: h é sobrejetiva.

De fato, seja $y \in A \cup B$. Então, $y \in A$ ou $y \in B$. Se $y \in A$, como f é sobrejetiva (pois f é bijetiva), existe $n \in I_p$ tal que $f(n) = y$. Logo $h(n) = f(n) = y$. Se $y \in B$, como g é sobrejetiva (pois, g é bijetiva), existe $m \in I_q$ tal que $g(m) = y$. Como $m \in I_q$, então $m + p \in I_{p+q} \setminus I_p$. Tomando $n = m + p$ então $h(n) = h(m + p)$. Por definição de h tem-se $h(m + p) = g((m + p) - p) = g(m) = y$. Portanto h é sobrejetiva.

Como h é injetiva e sobrejetiva, então h é uma bijeção de I_{p+q} sobre $A \cup B$ e, assim, $A \cup B$ tem $p + q$ elementos.

.

O Princípio Aditivo”. pode ser estendido a um número finito de conjuntos. Generalizando tal princípio, podemos mostrar que:

O Teorema 3.1.8, a seguir, expressa o Princípio Aditivo.”

Teorema 3.1.8. *Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ conjuntos disjuntos 2 a 2, onde cada conjunto X_i possui x_i elementos, então $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ possui $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ elementos.*

Prova: Considere A, B, C conjuntos dois a dois disjuntos entre si, então A e $B \cup C$ são disjuntos. Logo, $n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(C)$.

Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, então $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$.

Note que $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup X_{n+1} = (X_1 \cup \dots \cup X_n) \cup X_{n+1}$. Logo $n(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup X_{n+1}) = n(X_1 \cup \dots \cup X_n) + n(X_{n+1}) = n(X_1) + \dots + n(X_n) + n(X_{n+1})$.

Por indução matemática isso vale $\forall n$.

3.1.3 Princípio Multiplicativo

No ensino de Análise Combinatória, muitas dificuldades são encontradas no momento de resolução de problemas de contagem, devido à tentativa de enquadrar os problemas em três tipos de agrupamento, sendo que, o princípio multiplicativo dá conta de muitos desses problemas. A sequência de problemas e observações pontuadas abaixo ajudaram a compreender o "poder" desse princípio.

O princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo constituem-se ferramentas básicas para resolver problemas de Contagem.

Definição 3.1.9. Se A e B são conjuntos, definimos $A \times B$ como o conjunto dos pares ordenados (a, b) tal que $a \in A$ e $b \in B$. Em símbolos $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$. Por par ordenado entende-se que o par $(x, y) \neq (y, x)$, quando $x \neq y$.

Exemplo 3.1.10. Seja $A = \{a, b, c\}$ e $\{1, 2\}$, então $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Observe que A possui 3 elementos e B possui 2 elementos, assim $A \times B$ possui $6 = 3 \cdot 2$

O resultado seguinte é chamado de Princípio Multiplicativo (P.M).

Considere o seguinte resultado:

Teorema 3.1.11. Sejam A e B conjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então o conjunto $A \times B$ formado pelos pares ordenados (a, b) , tais que $a \in A$ e $b \in B$, tem elementos $p \cdot q$.

Prova:

Como A tem p elementos então $f : I_p \rightarrow A$.

Como B tem q elementos então existe uma bijeção $g : I_q \rightarrow B$.

Considere a seguinte função $h : I_{pq} \rightarrow A \times B$, definida por $h(n) = (f(r_n + 1), g(q_n + 1))$, onde r_n e q_n são o resto e o quociente da divisão euclidiana de $n - 1$ por p , para cada $n \in I_{pq}$.

A função h está bem definida, pois $n \in I_{pq}$ tem-se que $r_n \in \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ e $q_n \in \{0, 1, 2, \dots, q - 1\}$ e logo $r_n + 1 \in I_p$ e $q_n + 1 \in I_q$.

Afirmção 1: h é injetiva.

De fato, sejam $n, n' \in I_{pq}$ tais que $(f(r_n + 1), g(q_n + 1)) = h(n) = h(n') = (f(r_{n'} + 1), g(q_{n'} + 1))$. Então $f(r_n + 1) = f(r_{n'} + 1)$ e $g(q_n + 1) = g(q_{n'} + 1)$. Como f é injetiva (já que f é bijetiva), então $r_n + 1 = r_{n'} + 1$ e, logo $r_n = r_{n'}$. Como g é injetiva (já que g é bijetiva), então $q_n + 1 = q_{n'} + 1$ e, logo, $q_n = q_{n'}$. Como r_n e q_n são o resto e o quociente da divisão euclidiana de $n - 1$ por p , e $r_{n'}$ e $q_{n'}$ são o resto e o quociente

da divisão euclidiana de $n' - 1$ por p , então $n - 1 = pq_n + r_n$ e $n' - 1 = pq_n + r_n$. Como $r_n = r_{n'}$, $q_n = q_{n'}$, $n - 1 = pq_n + r_n$ e $n' - 1 = pq_{n'} + r_{n'}$ e então $n + 1 = n' + 1$. Assim, h é injetiva.

Afirmção 2: h é sobrejetiva.

De fato, seja $(a, b) \in A \times B$. Como f é sobrejetiva (já que f é bijetiva), então existe $i \in I_p$ tal que $a = f(i)$, como f é sobrejetiva (já que g é bijetiva), então existe $j \in I_q$ tal que $b = f(j)$. Seja $n = p(j - 1) + i$. Como $i \in I_p$ e $j \in I_q$, então $n \in I_{pq}$. Além disso, com $n = p(j - 1) + i$ então $n - 1 = p(j - 1) + (i - 1)$. Como $i \in I_p$, então $i - 1 \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$. Como $n - 1 = p(j - 1) + (i - 1)$ e $i - 1 \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, então, pela unicidade do quociente e do resto da divisão euclidiana, segue que $i - 1$ e $j - 1$ são o quociente e o resto da divisão euclidiana de $n - 1$ por p , respectivamente. Assim, $i - 1 = r_n$ e $j - 1 = q_n$ e, portanto, $i = r_n + 1$ e $j = q_n + 1$. Como $i = r_n + 1$ e $h = q_n + 1$, então $(a, b) = (f(i), g(j)) = h(n)$.

Como h é injetiva e sobrejetiva, então h é uma bijeção de I_{pq} sobre $A \times B$ e, assim, $A \times B$ tem pq elementos.

Tendo em vista esse princípio, considere os problemas de aplicação:

Exemplo 3.1.12. *O cardápio de uma lanchonete oferece 4 tipos de salgados fritos e 3 tipos de salgados assados. Considerando que um cliente tenha dinheiro para comprar um salgado frito e um salgado assado, de quantos modos distintos esse cliente pode comprar seu lanche?*

Solução: O cliente deverá escolher entre os 4 salgados fritos e entre 3 tipos de salgados assados. Os salgados fritos serão indicados por 1, 2, 3, 4 e os assados por A, B, C , assim temos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{A, B, C\}$$

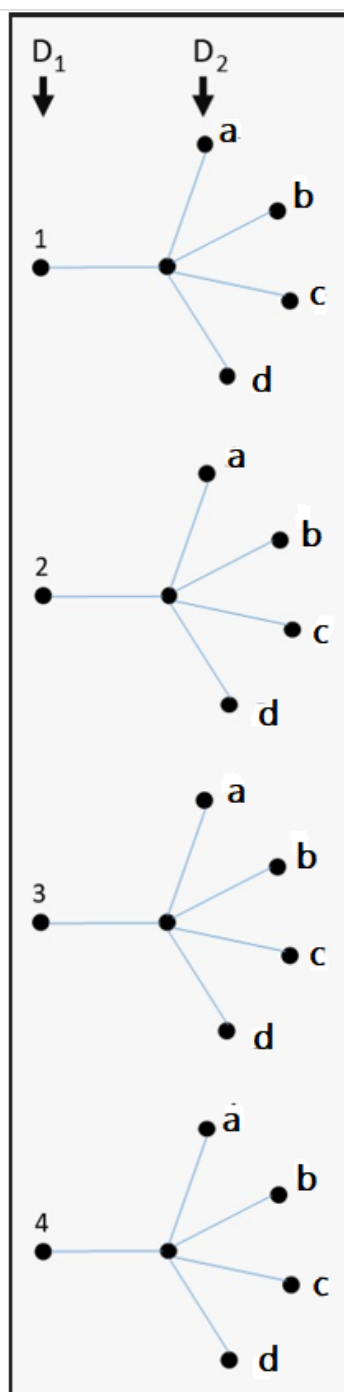
Observe que os conjuntos A e B são disjuntos, dessa forma, conforme o teorema 3.1.11, a solução desse problema se dá pelo produto cartesiano dos dois conjuntos, assim, temos $A \times B = \{(1, A), (1, B), (1, C), (2, A), (2, B), (2, C), (3, A), (3, B), (3, C), (4, A), (4, B), (4, C)\}$, onde $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 4 \cdot 3 = 12$.

Nesse exemplo, o cliente pode fazer sua escolha de 12 modos diferentes.

O problema acima ilustra o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Enumeração, o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

Se uma decisão 1 pode ser tomada de m formas e se, após realizada a decisão 1, a decisão 2 puder ser feita de n maneiras, então o número de formas de se tomar as decisões 1 e 2 será dado por $m \cdot n$.

Figura 1 – Árvore das Possibilidades



Exemplo 3.1.13. Numa academia que dá aulas de forró, existem 4 moças e 4 rapazes. De quantos modos é possível formar um par de rapaz e moça para dançar uma música de forró?

Solução: Representando os 4 rapazes por 1, 2, 3 e 4 as moças por a, b, c e d , observam-se que haverá para cada um dos rapazes 4 formas de escolher uma moça para dançar, assim o número de pares para a dança, conforme P.M é igual a $4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 4 = 16$.

Observe que o Princípio Multiplicativo nesse caso retoma a ideia de Produto

Cartesiano $D_1 \times D_2$, presente na lista 1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 2d, 3a, 3b, 3c, 3d, 4a, 4b, 4c, 4d.

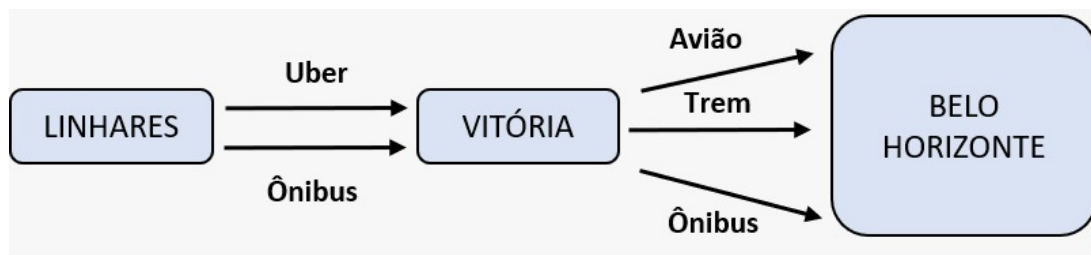
Exemplo 3.1.14. *Em Julho de 2024, pretendo realizar uma viagem de Linhares para a cidade de Ouro Preto, em Belo Horizonte. Considerando que posso ir de ônibus ou de Uber até Vitória, onde seguirei viagem para Ouro Preto e, sabendo que este trajeto poderá ser feito de ônibus, avião ou trem, de quantas formas é possível fazer essa viagem de Linhares a Ouro Preto?*

Solução: É necessário organizar um procedimento sistemático para traçar as possíveis conduções, sem repeti-las. Assim, observam-se as possíveis decisões a serem tomadas e examinam-se todas as possibilidades para cada uma delas.

- 1o) escolher o meio de transporte de Linhares a Vitória;
- 2o) em seguida, escolher o meio de transporte de Vitória a Ouro preto.

A primeira escolha pode ser realizada de 2 modos diferentes. Feita essa escolha, a segunda escolha pode ser realizada de 3 modos diferentes. Pode-se, então listar todas as formas possíveis de realizar essa viagem, que são 6, conforme a figura abaixo.

Figura 2 – Viagem



I– De Linhares até Vitória podemos ir de ônibus ou Uber (2 maneiras)

II– De Vitória a Ouro Preto podemos ir de carro, ônibus ou avião (3 maneiras).

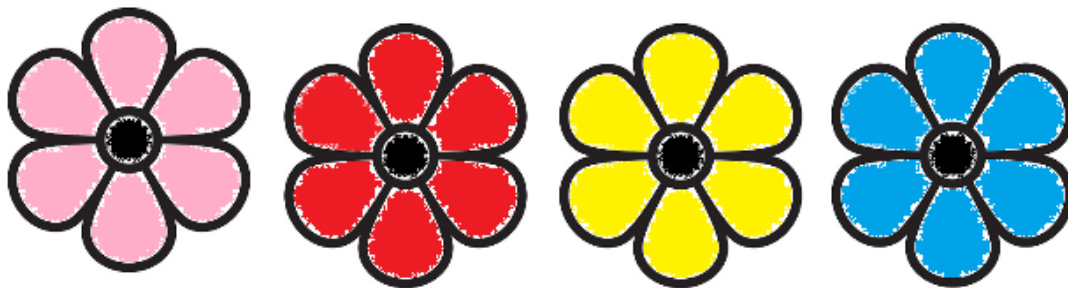
Desse modo, tem-se um total de $3 + 3 = 2 \cdot 3 = 6$, pelo *P.M.*

Exemplo 3.1.15. *Uma professora distribuiu a seus alunos um faixa decorativa composta por seis flores e pediu que eles pintassem cada florzinha de uma cor diferente. Os alunos dispunham de lápis de cor rosa, vermelho, verde, amarelo e azul. De quantas formas essa faixa poderá ser pintada, de modo que flores adjacentes não sejam pintadas de uma mesma cor?*

Solução: Pintar a faixa significa escolher a cor de cada flor. Há 4 formas de escolher a cor da primeira flor.

Para escolher a cor da segunda flor é preciso ter feito a escolha da cor da primeira flor.

Figura 3 – Escolhendo a cor das flores



Fonte: Produção google imagens

I- Se a cor escolhida para a primeira flor for rosa, então a segunda flor poderá ser pintada de vermelho, verde, amarelo ou azul.

II-Se a cor escolhida para a segunda flor for azul, então a terceira flor poderá ser pintada de vermelho, verde, amarelo ou rosa.

III-Se a cor escolhida para a terceira flor for amarela, então a quarta flor poderá ser pintada de vermelho, verde, rosa ou azul.

Observando esse procedimento e as condições do problema, percebe-se que a escolha da primeira flor poderá ser feita de 4 formas, teremos 3 formas para escolher a cor da segunda, da terceira e da quarta flor. Assim, conforme P.M., $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$ formas de pintar a faixa de acordo com a condição dada.

Exemplo 3.1.16. *Uma escola promoveu uma competição de Natação e 10 crianças participaram. Foram premiados o primeiro lugar, o segundo lugar e o terceiro lugar, com medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente. De quantas maneiras essas medalhas poderão ser distribuídas?*

Solução: A medalha de ouro poderá ser dada a qualquer um dos 10 participantes. Considerando que o vencedor da medalha de ouro foi escolhido e que este não concorre às demais medalhas, teremos 9 participantes concorrendo à medalha de prata. Da mesma forma, 8 participantes correndo à medalha de bronze. Portanto a solução do problema, conforme P.M, é dada por $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

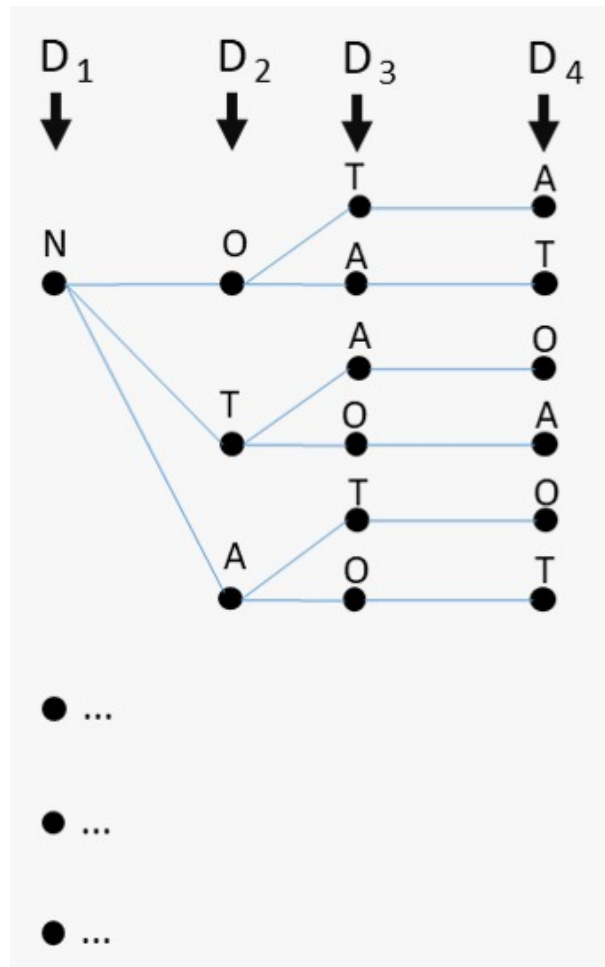
Exemplo 3.1.17. *Em uma aula introdutória de Análise Combinatória, a professora explicou o significado de anagramas e pediu que seus alunos utilizassem algum artifício para encontrar os anagramas da palavra NOTA. Quantos anagramas eles encontraram?*

Solução: Observe a árvore das possibilidades no esquema da figura:

Note que:

I– Para a primeira letra existem 4 opções de escolha;

Figura 4 – Árvore das Possibilidades 1



Fonte: Produção do próprio autor.

II—Para a segunda letra existem 3 opções de escolha;

III—Para a terceira letra existem 2 opções de escolha;

IV—Para a quarta letra existe 1 opção de escolha.

Pelo P.M., o total de anagramas é igual ao produto $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Exemplo 3.1.18. *Uma lanchonete dispõe de banana, goiaba, morango e pera para fazer vitaminas para seus clientes. Considerando que são utilizadas três dessas frutas em cada vitamina, determine o número de vitaminas que é possível fazer com essas frutas?*

Solução: São 4 frutas e devemos escolher 3 para fazer a vitamina. Assim 1 fruta sempre não é usada. Logo existem 4 possibilidades:

Vitamina sem Morango: $\{B, G, P\}$

Vitamina sem Banana: $\{M, G, P\}$

Vitamina sem Goiaba: $\{M, B, P\}$

vitamina sem Pera: $\{M, B, G\}$

Será possível utilizar o P.M?

Há 4 maneiras de escolher a 1^o. Um vez escolhida a 1^a fruta, há 3 maneiras de escolher a segunda fruta. Uma vez escolhida a segunda fruta, há 2 maneiras de escolher a terceira fruta, assim $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Porém essa não é a solução, pois as vitaminas $\{B, G, P\}, \{B, P, G\}, \{P, B, G\}, \{P, G, B\}, \{G, P, B\}$ são a mesma.

Para cada grupo de 3 frutas a vitamina está contada 6 vezes. Assim temos $\frac{24}{6} = 4$

Exemplo 3.1.19. *a) De quantas formas podemos dar 2 presentes distintos a 8 moças, de modo que dois presentes não sejam dados a uma mesma moça? b) E se os presentes pudessem ser dados à mesma pessoa? c) E se cada pessoa pudesse ganhar mais de um presente?*

Solução: a) Se os presentes são diferentes então o 1^o pode ser dado a 8 moças, uma vez dado o presente, o segundo pode ser dado de 7 formas, assim pelo P.M. $8 \cdot 7 = 56$ maneiras de presentear. b) Aplicaremos o mesmo princípio, considerando que o presente poderá ser dado à mesma pessoa, assim temos $8 \cdot 8 = 64$ formas de dar o presente. c) Neste caso teremos $64(56 + 8)$ maneiras.

Exemplo 3.1.20. *Em um auditório, onde são feitas entrevistas de emprego, existem 9 cadeiras enfileiradas, sendo estas numeradas de 1 a 9. De quantas formas dois candidatos a emprego podem ocupar essas cadeiras, de modo que haja pelo menos uma cadeira vaga entre eles?*

Solução: Observe que os números das cadeiras escolhidas pelos candidatos X e Y formam um par ordenado. Dessa forma, o par ordenado $(1, 6)$ informa que o candidato X escolheu a cadeira com número 1, enquanto o candidato Y escolheu a cadeira 6. Note que o par ordenado $(6, 1)$ informa que o candidato X ocupa a cadeira 6 e o candidato Y ocupa a cadeira 1. Dessa forma, temos que o número de formas diferentes das cadeiras serem ocupadas é dado pela quantidade de pares ordenados obtidos com os números de 1 a 9. Esse total pode ser obtido sem necessariamente listar as quantidades, ou seja, aplicando o P.M. temos: $9 \cdot (9 - 1) = 72$ formas de ocupar as cadeiras.

Assim, é possível encontrar 72 pares ordenados ou 72 sequências de dois elementos distintos de um conjunto com 9 elementos. No entanto, é preciso considerar a restrição imposta pelo problema, onde X e Y não podem ocupar cadeiras cujos números são consecutivos. Dessa forma, vamos excluir os pares ordenados que apresentam números consecutivos deste total. Identificamos que os pares ordenados consecutivos são:

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8)$, resultando assim num total de 16 pares ordenados. Portanto, teremos $72 - 16 = 56$ formas de os candidatos escolherem o local para se sentarem de modo que haja pelo menos uma cadeira vaga entre eles.

Exemplo 3.1.21. *Considerando os algarismos 1, 5, 6, 7, 8, quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?*

Solução: Como devemos escolher 3 elementos distintos de um conjunto com cinco elementos distintos, pelo *P.M.*, temos que $5 \cdot (5 - 1) \cdot (5 - 2) = 60$ números.

Exemplo 3.1.22. *Considerando os algarismos 1, 4, 7, 8, 9 quantos números distintos maiores que 100 e menores que 1000 é possível determinar se:*

- (a) o número deve ser par?
- (b) o número deve ser ímpar?
- (c) o número deve ser par ou ímpar?

Solução: Devemos escolher um número de três algarismos distintos, assim escolheremos as posições:

$$\overline{P}_1 \overline{P}_2 \overline{P}_3$$

Nos itens (a) e (b) existem restrições quanto à forma do número, de acordo com essa condição, preencheremos inicialmente a posição P_3 .

(a) Como o número deve ser par, existem duas opções de escolha para a posição P_3 , ou seja, o 4 e o 8. Observe que qualquer um desses números pode ocupar a terceira posição, escolhendo um deles, o mesmo não deve configurar em nenhuma das outras posições. Dessa forma, cada uma das posições P_1 e P_2 pode ser preenchida de 4 formas, assim temos pelo *P.M.* existem $4 \cdot (4 - 1) = 12$ maneiras de escolhê-las. Para a escolha das três posições, de acordo com o *P.M.* existem $12 \cdot 2 = 24$ formas distintas.

(b) Nesse item, exige-se que o número escolhido seja ímpar, existem 3 opções para escolher a posição P_3 , sendo elas os números 1, 7 e 9. Considerando que qualquer um desses números pode ocupar a terceira posição e que ao escolher um deles, o mesmo não deve configurar em nenhuma das outras duas posições, temos 4 opções para escolher cada uma das posições P_1 e P_2 , pelo *P.M.* existem $4 \cdot (4 - 1) = 12$ maneiras de escolhê-las. Para a escolha das três posições, de acordo com o *P.M.* existem $12 \cdot 3 = 36$ formas distintas..

(c) Como desejamos um número par ou ímpar, então basta adicionar o resultado do item a com o do item b, assim teremos 60 possibilidades de escolha.

Exemplo 3.1.23. *Quantos números inteiros existem entre 100 e 999 que possuem algarismos distintos e que são números pares?*

Solução: Observe que os números procurados apresentam 3 algarismos distintos, vamos pensar na escolha das posições:

$$\overline{P_1} \overline{P_2} \overline{P_3}$$

Como o número solicitado deve ser par, assim na última posição devemos escolher um dos dígitos: 0, 2, 4, 6, 8. Pensaremos inicialmente nos pares terminados em 0, teremos uma forma de escolher a posição $\overline{P_3}$, a posição $\overline{P_1}$ contará com 9 opções, entre os números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Lembrando que devemos escolher os números da posição $\overline{P_1}$ e $\overline{P_2}$, pelo *P.M.* teremos $9 \cdot 8 = 72$ formas. Dessa forma, temos pelo *P.M.* existem $72 \cdot 1$ números pares terminados em zero.

Agora pensemos nos pares terminados em 2, 4, 6 e 8, se a posição $\overline{P_3}$ for ocupada por um desses números, assim teremos 9 opções de escolher as demais posições. Lembrando que devemos escolher as posições $\overline{P_1}$ e $\overline{P_2}$, considerando que o 0 não pode ocupar a primeira posição, pelo *P.M.* teremos $8 \cdot 8 = 64$ formas de escolhê-las. Para um número de três algarismos, pelo *P.M.* temos $4 \cdot 64 = 256$ números de algarismos distintos e que são números pares compreendidos entre 100 e 999.

Exemplo 3.1.24. *a) De quantas formas podemos dar 2 presentes iguais a 8 moças, de modo que dois presentes não sejam dados a uma mesma moça? E se os presentes pudessem ser dados à mesma pessoa?*

Solução: a) Neste caso teremos 28 maneiras de presentear, esse resultado é a metade do valor encontrado no item a do exemplo anterior. b) Teremos $36 = (28 + 8)$ maneiras de presentear.

Exemplo 3.1.25. *Meu esposo me levou a uma loja de joias, no mostruário da loja haviam 5 tipos diferentes de anéis, 7 tipos diferentes de brincos e 8 tipos diferentes de cordões. Como era meu aniversário, pediu que escolhesse 2 tipos de joias, com a condição de que elas não fossem do mesmo tipo. De quantas formas eu posso escolhê-las?*

Solução: Posso escolher o presente das seguintes formas:

a) anel e brinco : $5 \cdot 7 = 35$ formas;

b) anel e cordão : $5 \cdot 8 = 40$ formas;

c) brinco e cordão : $7 \cdot 8 = 56$ formas; Solução:

Como as escolhas devem ocorrer dentro de uma das 3 possibilidades (a), (b) e (c), então terei $35 + 40 + 56 = 131$ formas de fazer a escolha do presente.

Exemplo 3.1.26. *Numa escola há 10 rapazes e 8 moças, onde 3 rapazes e 2 moças são filhos de um mesmo pai e os outros não têm laços sanguíneos com ninguém. Quantos casais de namorados (rapaz e moça) é possível formar?*

Solução: Considerando que 3 rapazes possuem 2 irmãs, haverá $3 \cdot 6 = 18$ casais de namorados. Além disso, considerando 7 rapazes que não têm irmãs, teremos $7 \cdot 8 = 56$ casais possíveis. Portanto, existem $18 + 56 = 74$ casais de namorados.

Na solução dos problemas 8 e 9, usamos o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

Exemplo 3.1.27. *Numa empresa existem cinco administradores. De quantas maneiras é possível escolher um presidente, um vice presidente e um secretário?*

Solução : Note que existem 3 posições a serem preenchidas, a posição do presidente (1o), a posição do vice presidente (2o) e a posição do secretário (3o). A (1o) posição pode ser preenchida de 5 formas; escolhida a posição do presidente a (2o) posição pode ser preenchida de 4 formas, escolhida a posição do vice presidente, a (3o) posição pode ser preenchida de 3 formas. Pelo *P.M.* existem $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras de escolher um presidente, um vice presidente e um secretário.

Exemplo 3.1.28. *Numa empresa existem cinco administradores. De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 3 pessoas para representante da empresa?*

Solução: Considere que essas pessoas sejam representadas pelos números $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Listando os subconjuntos de P que representam essas comissões temos: $P_1 = \{1, 2, 3\}$; $P_2 = \{1, 2, 4\}$; $P_3 = \{1, 2, 5\}$; $P_4 = \{1, 3, 4\}$; $P_5 = \{1, 3, 5\}$; $P_6 = \{1, 4, 5\}$; $P_7 = \{2, 3, 4\}$; $P_8 = \{2, 3, 5\}$; $P_9 = \{2, 4, 5\}$; $P_{10} = \{3, 4, 5\}$.

Observe que existem 10 subconjuntos do conjunto P com 3 elementos. Esse valor corresponde a $\frac{1}{6}$ do total de números de escolher 3 pessoas de um grupo de 5 cinco pessoas, conforme encontrado no exemplo 3.2.1. Isso ocorre, visto que, por exemplo, os subconjuntos $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{2, 3, 1\}$; $\{2, 3, 1\}$; $\{3, 2, 1\}$; $\{3, 1, 2\}$ são diferentes, visto que, a ordem das pessoa deve ser respeitadas, mas quando se trata de comissões, temos que 123;132;213;213;231;312 e 321 são todos idênticos.

Consideraremos três exemplos, para generalizar um fato:

Exemplo 3.1.29. *Determine os divisores dos números : a)16. b) 24.*

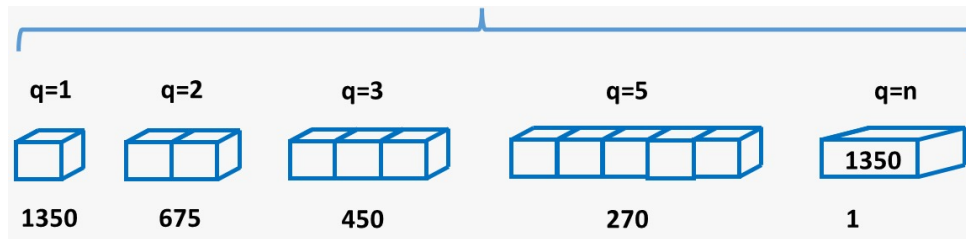
Exemplo 3.1.30. *Solução: Para resolver os itens acima, analisaremos dois casos:*

Caso $N = 1$, ou seja, quando na decomposição do número 16 em fatores primos temos apenas um fator primo, observe que $16 = 2^4$ e que os divisores de 16 são $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$, portanto, apresenta 5 divisores que são 1, 2, 4, 8, 16. Note que $5 = 4 + 1$.

Caso $N = 2$, na decomposição do números 24 em fatores primos temos dois fatores primos ,ou seja, $24 = 2^3 \cdot 3$ e que os divisores de 24 são $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 3^0, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3$, ou seja, 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24. Observe que existem 8 divisores para o número 24 e que $8 = (3 + 1) \cdot (1 + 1)$ possui 5 divisores. Note que $5 = 4 + 1$.

Exemplo 3.1.31. Deseja-se colocar 1350 objetos idênticos em caixas idênticas que comportam a mesma quantidade q desses objetos. De quantas maneiras podemos escolher a capacidade q da caixa para distribuir todos os objetos de modo que cada caixa fique completamente cheia e não sobre nenhum objeto fora das caixas?

Figura 5 – Caixas



Solução: De acordo com as exigências impostas pelo problema, precisamos encontrar o número de divisores de 1350, para isso, vamos inicialmente decompor este em fatores primos. Realizando o processo de decomposição foi encontrado $N = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

Observe alguns divisores do número 1350: 2 ; $2 \cdot 3$; $2 \cdot 3^2$; $2 \cdot 3^3$; $2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2 \cdot 3^3 \cdot 5$ e etc.

Note que de acordo com os fatores primos no número acima, podemos concluir que nos divisores de 1350:

I— No fator 2 o expoente varia de 0 a 1, ou seja, temos $(2^0; 2^1)$

II— No fator 3 o expoente varia de 0 a 3, ou seja, temos $(3^0; 3^1; 3^2; 3^3)$.

III— No fator 5 o expoente varia de 0 a 2, ou seja, temos $(5^0; 5^1; 5^2)$.

Então se indicarmos os divisores de 1350 como sendo $D = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, de acordo com as observações anteriores temos:

1— O expoente x apresenta 2 possibilidades, que são $\{0, 1\}$.

2— O expoente y apresenta 4 possibilidades, que são $\{0, 1, 2, 3\}$.

3— O expoente z apresenta 3 possibilidades, que são $\{0, 1, 2\}$.

Pelo P.M. temos $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ divisores de 1350. Assim, existem 24 opções de caixa para empacotar os objetos. Note que nesse exemplo temos o caso $N = 3$, ou seja na decomposição do número 1350 temos 3 fatores primos que são 2, 3 e 5, além disso, observe que $24 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = (1 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (2 + 1)$.

Exemplo 3.1.32. Quantidade de divisores de um número Natural

A contagem do exemplo anterior pode ser generalizada para qualquer número natural N , não importando com a quantidade de fatores primos que o mesmo tenha.

Seja N um número Natural cuja decomposição em fatores primos é dada por $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ temos que o número de divisores de N é dado por $D = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$.

Exemplo 3.1.33. Pedro tem 6 maçãs (idênticas) e quer distribuir para 2 crianças. De quantas maneiras ele pode fazer essa distribuição?

Solução: Considerando que o primeiro número representa a quantidade de maçãs dada a primeira criança e o segundo número foi dado a segunda criança, então a distribuição das maçãs poderá ser feita da seguinte forma: $0 + 6, 1 + 5, 2 + 4, 3 + 3, 4 + 2, 5 + 1, 6 + 0$.

Assim existem 7 formas de dividir as 6 maçãs para as duas crianças.

Exemplo 3.1.34. De quantas formas é possível dividir n parafusos idênticos em 2 gavetas diferentes?

Solução: Considerando que o primeiro número representa a quantidade de parafusos colocados na primeira gaveta e o segundo número representa a quantidade de parafusos colocados na segunda gaveta, então a distribuição dos parafusos nessas gavetas poderá ser feita da seguinte forma: $0 + n, 1 + n - 1, 2 + n - 2, \dots, n + 0$.

Dessa forma, existem $(n + 1)$ formas de distribuir as n peças idênticas em 2 gavetas.

Exemplo 3.1.35. De quantas maneiras podemos distribuir 6 maçãs (idênticas) entre 2 crianças, de forma que cada uma receba pelo menos 1 maçã?

Solução : Observando o exemplo 3.25, nota-se que devemos eliminar a criança não recebe nenhuma maçã, ou seja, temos 2 casos possíveis. Assim teremos $7 - 2 = 5$ formas possíveis de distribuir as 6 maçãs para as 2 crianças, de forma que cada uma receba pelo menos 1 maçã.

Exemplo 3.1.36. De quantas formas é possível dividir n parafusos idênticos em 2 gavetas diferentes, de forma que nenhuma delas fique vazia?

Solução: As possíveis soluções $1 + (n - 1), 2 + (n - 2), \dots, (n - 1) + 1$. Nesse caso, vamos subtrair 2 casos em que as gavetas ficam vazias, do resultado encontrado no exemplo 3.2.6. Logo, existem $(n + 1) - 2 = n - 1$ formas de dividir n objetos iguais em 2 gavetas diferentes sem que nenhuma fique sem parafusos.

Exemplo 3.1.37. De quantas maneiras podemos colocar 6 maçãs idênticas e 2 em caixas iguais?

Solução: observa-se que dos 7 casos descritos acima, temos 3 casos que são repetições, que são: $0 + 6, 1 + 5, 2 + 4, 3 + 3$.

Assim, dos 7 casos possíveis subtraem-se os 3 casos repetidos, ou seja, $7 - 3 = 4$ formas de dividir as 6 maçãs entre 2 caixas iguais.

Exemplo 3.1.38. De quantas maneiras podemos dividir 7 maçãs idênticas entre 2 potes iguais?

solução: Considerando que os potes são indistinguíveis, devemos considerar somente a metade dos casos, isto é, $\frac{8}{2} = 4$ formas de dividir 7 maçãs em dois potes iguais.

Exemplo 3.1.39. Considerando n um número de parafusos idênticos. De quantas formas podemos distribuí-los em 2 gavetas idênticas?

Solução: Há dois casos a considerar :

Caso 1 : n par.

As soluções são: $0 + n, 1 + (n - 1), \dots, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$. Há $\frac{n}{2} + 1$ maneiras de colocar os n parafusos em 2 duas gavetas idênticas.

Caso 2 : n é ímpar.

As soluções são: $0 + n, 1 + (n - 1), \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$. Há $\frac{n+1}{2}$ maneiras de colocar os n parafusos em 2 gavetas idênticas.

Exemplo 3.1.40. Quantos números de 3 algarismos podem ser escritos de modo que o algarismo da centena seja par, que o algarismo das dezenas seja ímpar e o algarismo das unidades seja diferente dos dois primeiros?

Solução: Considerando que no sistema decimal os números variam de 0 a 9, o algarismo das centenas poderá ser escolhido de 5 maneiras diferentes (1, 3, 5, 7, 9), o algarismo das dezenas também de 5 maneiras diferentes (0, 2, 4, 6, 8) e o algarismo das unidades poderá ser qualquer número, com exceção daqueles algarismos que foram escolhidos anteriormente na posição das centenas e dezenas, assim temos 8 possibilidades. Pelo P.M. temos $5 \cdot 5 \cdot 8 = 200$.

3.2 Permutação Simples

Uma permutação de n elementos é uma bijeção do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ nele mesmo. Por exemplo: existem 6 permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$, que correspondem às listas ordenadas: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Nessa nomenclatura a lista ordenada 321 representa a bijeção $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ tal que $f(1) = 3, f(2) = 2$ e $f(3) = 1$.

Assim, o número de permutações é igual a quantidade de listas ordenadas dos números $1, 2, \dots, n$. Existem n possibilidades de escolha do primeiro termo da lista. Depois de escolhido o primeiro termo, existem $n - 1$ possibilidades de escolher o segundo, $n - 2$

possibilidades de escolher o terceiro, e continuando dessa forma, resta uma possibilidade de escolher o último. Pelo P.M. existem exatamente $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutações de n elementos.

Ao produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ denotamos pelo símbolo $n!$ chamado de *n* fatorial.

Proposição 3.2.1. *Sendo um conjunto A que possui n elementos, então existem exatamente $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutações de A .*

Exemplo 3.2.2. *Considerando os algarismos 1, 5, 6, 7 e 8 quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados?*

Solução: De acordo com a proposição acima temos que $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ permutações para os algarismos 1, 5, 6, 7, 8, ou seja, 120 números distintos.

Exemplo 3.2.3. *De quantas maneiras uma professora pode organizar uma fila com 6 meninos?*

Solução: Observe que a ordem dos meninos na fila faz diferença na arrumação da fila. De acordo com a proposição acima temos que $6! = 6 \cdot (6-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ possíveis filas, ou seja, 720 filas distintas.

3.3 Combinação Simples

Considerando um conjunto A com n elementos, onde $n \geq 1$, denominamos de combinação simples de n elementos tomados p a p como sendo um subconjunto A com exatamente p elementos de forma que $p \leq n$.

De forma prática define-se combinação simples de um conjunto A com n elementos tomados de p em p , com $n \geq 1$ e $p \leq n$, aos agrupamentos de p elementos distintos que se diferenciam entre si somente pela natureza de seus elementos.

Exemplo 3.3.1. *Maria fará uma viagem e gostaria de convidar quatro amigos (André, Bruno, Carla e Daniela) para ir junto, porém seu carro só tem lugar para duas pessoas. De quantas formas ela poderá escolher os dois amigos?*

Solução: Há 4 maneiras de escolher a 1ª pessoa e 3 maneiras para escolher a segunda. Logo, há $4 \cdot 3 = 12$ maneiras de fazer as duas escolhas. No entanto a escolha André e Bruno é a mesma de Bruno e André.

Isso ocorre com qualquer dupla de amigos, pois a contagem de 12 deve ser dividida por 2. Logo o número de escolhas dos 2 amigos é $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, podemos listá-los pelas iniciais $\{AB\}, \{AC\}, \{AD\}, \{BC\}, \{BD\}$ e $\{CD\}$.

Exemplo 3.3.2. Carla quer fazer uma vitamina e dispõe de 5 frutas: banana, morango, goiaba, maçã, e pera. Sabendo que utilizará na vitamina apenas 3 dessas frutas, de quantas formas a vitamina poderá ser feita?

Solução: Há 5 formas de escolher a 1ª fruta, 4 formas de escolher a 2ª e 3 formas de escolher a terceira fruta. Logo, há $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas de fazer as 3 escolhas das frutas. No entanto a escolha $\{B, M, G\}$ é a mesma que $\{B, G, M\}$, o mesmo ocorre com a escolha $\{M, B, G\}$ e a escolha $\{G, M, B\}$. Dessa forma observa-se toda terna B, M, G está sendo contada $3!$ maneiras, pois os trios $\{B, M, G\}, \{B, G, M\}, \{M, B, G\}, \{M, G, B\}, \{G, M, B\}, \{G, B, M\}$ representam uma só escolha. Portanto existem $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ formas para Carla fazer as vitaminas.

O exemplo abaixo demonstrará o caso geral.

Exemplo 3.3.3. Considerando um conjunto A com n pessoas, onde $n \geq 1$, quantos grupos com p pessoas é possível formar?

Solução: Para escolher a primeira pessoa do grupo temos n maneiras, para segunda pessoa temos $n - 1$ maneiras, para terceira temos $n - 2$ maneiras de escolher, até que escolhamos a última pessoa, que neste caso é dado por $n - p + 1$ maneiras, assim temos $n \cdot (n - 1) \cdots (n - p + 1)$ maneiras de escolher as p pessoas. No entanto, cada uma dessas escolhas é contada de $p!$ vezes. Assim, temos que o número de combinações simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdots n-p+1}{p!}$$

Multiplicando por $(n - p)! = (n - p) \cdot (\cdots) \cdot 2 \cdot 1$, obtemos

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdots n-p+1}{p!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!},$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \text{ (fórmula deduzida).}$$

É fácil concluir que $C_n^p = C_n^{n-p}$, uma vez que existe uma bijeção entre o conjunto das combinações de p elementos de um conjunto de n elementos e o conjunto de suas combinações de $n-p$ elementos.

Exemplo 3.3.4. Considerando o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, encontre o número de subconjuntos que é possível encontrar com os elementos desse conjunto, contendo p elementos, sendo $0 \leq p \leq 5$.

Solução: Listando os subconjuntos, observa-se que é possível formar subconjuntos com:

I- Zero elementos, neste caso teremos apenas um subconjunto que no caso é $\emptyset$, desse modo $C_4^0 = 1$

II- Um elemento, podemos encontrar 4 subconjuntos a saber: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$, dessa forma temos $C_4^1 = 4$;

III- Dois elementos, assim teremos 6 subconjuntos a saber: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$, logo temos $C_4^2 = 6$;

IV- Três elementos, assim temos 4 subconjuntos a saber: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$, portanto temos $C_4^3 = 4$;

IV- Quatro elementos, assim temos 1 subconjunto a saber: $\{1, 2, 3, 4\}$, assim $C_4^4 = 1$.

Concluimos que é possível formar um total de 16 considerando os elementos do conjunto A .

Exemplo 3.3.5. Numa entrevista de emprego com 30 pessoas serão escolhidas 4 delas para compor o quadro de funcionários de uma empresa. Considerando que são 20 homens e 10 mulheres concorrendo às vagas, e que serão escolhidas 2 pessoas de cada sexo, de quantas formas a empresa poderá fazer essa escolha?

Solução: Faremos essa escolha de duas formas:

I – Escolhendo 2 dos 20 homens, temos $C_{20}^4 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$;

II – Escolhendo 2 das 10 mulheres, temos $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$.

Pelo princípio multiplicativo temos que o número de possibilidades é dado $C_{20}^4 \cdot C_{10}^2 = 190 \cdot 45 = 8550$

Dessa forma, temos que o número de formas distintas que a empresa poderá fazer a escolha de 2 pessoas de cada sexo de um grupo de 30 pessoas é 8550.

Exemplo 3.3.6. Considere 6 pontos sobre uma reta s e 9 pontos sobre uma reta r , sendo r paralela a s . Quantos triângulos podem-se formar com vértices em 3 desses 15 pontos?

Solução: Os três pontos escolhidos para vértices dos triângulos não podem estar alinhados, ou seja, numa mesma reta, assim o problema proposto será resolvido analisando os casos:

I - Escolhendo um ponto na reta s e dois na reta r , assim o número de triângulos possíveis será dado por $C_6^1 \cdot C_9^2 = 6 \cdot \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = 6 \cdot \frac{9!}{2! \cdot (7)!} = 6 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 6 \cdot 36 = 216$.

II- Escolhendo um ponto na reta r e dois pontos na reta s , o número de triângulos possíveis será dado por $C_9^1 \cdot C_6^2 = 9 \cdot \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = 9 \cdot \frac{6!}{2! \cdot (4)!} = 9 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 15 = 135$.

De acordo com o princípio aditivo ??, o total de triângulos formado com três de seus vértices num desses pontos é dado por $C_6^1 \cdot C_9^2 + C_9^1 \cdot C_6^2 = 216 + 135 = 351$.

Exemplo 3.3.7. As turmas do 3º ano do Ensino Médio resolveram fazer uma camisa de formatura e na frente de cada camisa decidiram que fossem escritos os anagramas da palavra CRÂNIO, que começavam com consoantes e terminavam por vogal. Sendo assim, quantas camisas diferentes foi possível fazer, utilizando o critérios propostos pelas turmas?

Solução: observe que a palavra CRÂNIO possui 3 vogais e 4 consoantes. Precisamos escolher uma consoante para iniciar a palavra e uma vogal para concluí-la. Isso poderá ser feito, respectivamente, de C_4^1 e C_3^1 formas. As 7 letras podem aparecer em qualquer das 7 posições, assim, temos $7!$ formas. Logo, $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot 7! = 4 \cdot 3 \cdot 7! = 5040$ de anagramas da palavra CRÂNIO que começam e terminam por vogal, assim será possível fazer 5040 camisas.

3.4 Permutação com repetição

Exemplo 3.4.1. Quantos anagramas é possível formar com as letras da palavra DADO?

Solução: Note que neste exemplo não podemos afirmar que número de anagramas da palavra DADO é $4! = 24$, pois apresenta letras distintas. Indicando o primeiro D por D_1 e o segundo D por D_2 na contagem $4! = 24$, os anagramas D_1ADO e o D_2ADO , estão contados como se fossem diferentes, no entanto, eles representam apenas o anagrama DADO.

Isso ocorre com todos os anagramas que aparecem aos pares mas representam um só anagrama.

Por isso, o número de anagramas da palavra DADO é igual a $\frac{4!}{2!} = 12$. A letra D aparece duas vezes, observe que os anagramas foram contados $2!$ vezes para a palavra, dessa forma o número correto de anagramas é dado por $\frac{4!}{2!} = 12$.

Exemplo 3.4.2. Quantos anagramas é possível formar com as letras da palavra DALILA?

Solução: Nesse caso, contando todos os anagramas da palavra DALILA temos um total de $6! = 720$, no entanto, esse resultado não está correto, uma vez que apresenta letras repetidas. Como o L aparece 2 vezes e a letra A também aparece 2 vezes então cada anagrama da palavra DALILA, aparece repetida $2! \cdot 2! = 4$ vezes

Por exemplo os 4 anagramas:

$IA_1A_2L_1L_2D$

$IA_1A_2L_2L_1D$

$IA_2A_1L_1L_2D$

$IA_2A_1L_2L_1D$

Devem ser contados apenas uma vez, visto que representam o anagrama *IAALLD*.

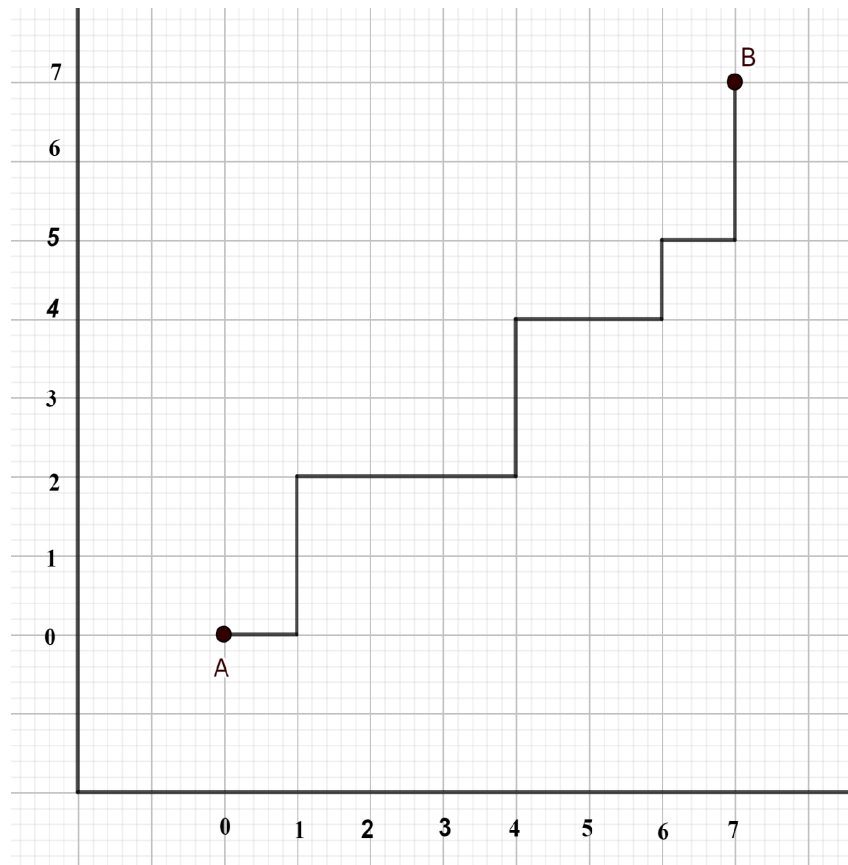
Isto ocorre com todos anagramas, logo como *DALILA* tem 6 letras com 2 repetidas mais 2 repetidas. O número de anagramas da palavra *DALILA* é igual a $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$.

No caso geral de uma lista de n elementos, em que um deles aparece n_1 , outro n_2 vezes, e assim por diante, o número de permutações desses n objetos é igual a: :

$$P_n^{n_1, n_2, \dots} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}.$$

Exemplo 3.4.3. Quantos caminhos ligam os pontos *A* e *B* de modo que o deslocamento seja somente para a direita ou para cima?

Figura 6 – Mapa I



Solução: Todo caminho anda 7 quarteirões horizontais e 7 quarteirões verticais. Esse caminho será representado pelo código *DCCDDCCDDCCDCC*.

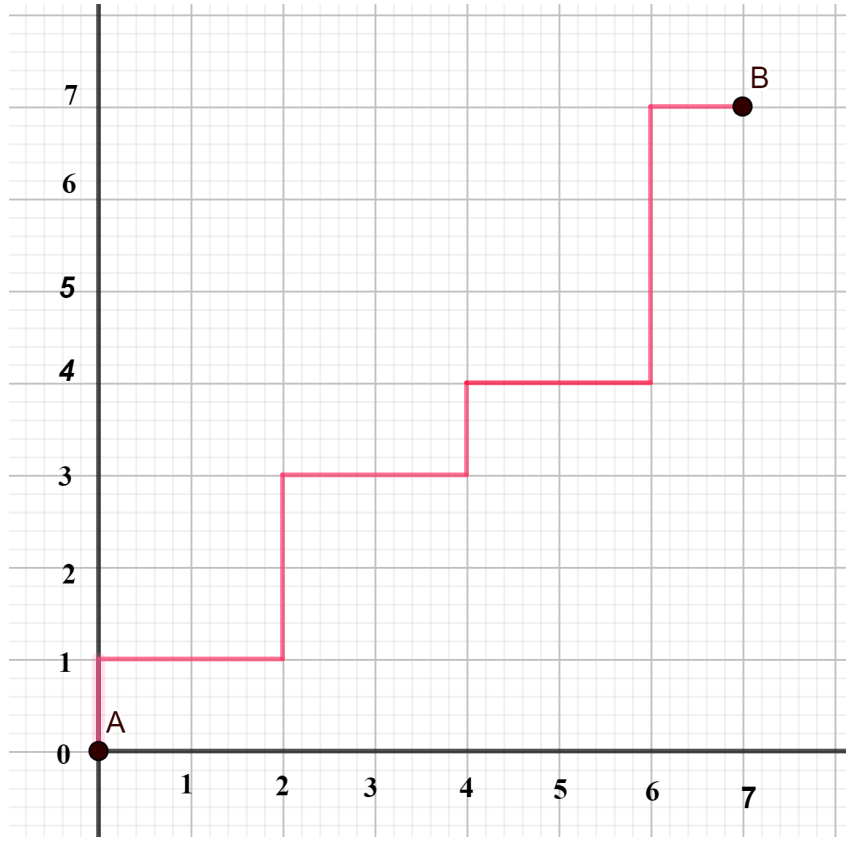
Cada código com as letras *C* e *D* repetidas num total de 14 letras determina um único caminho.

O caminho representado por *CDDCCDDCDDCCCD* corresponde a:

Logo todos os caminhos de *A* a *B* dessa forma são iguais ao mesmo número de anagramas de 14 letras *C* e *D* com *C* repetido 7 vezes.

Portanto, o número de caminhos é igual a $\frac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$.

Figura 7 – Mapa II



No caso geral, suponha que o ponto B está deslocado m espaços para a direita de A e n passos para cima em relação a A .

Então cada caminho pode ser representado por um código formado por uma lista de letras C e D , tais que D aparece m vezes e C aparece n vezes na lista.

A quantidade de códigos será $P_{m+n}^{m,n} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ e este quociente também é igual a C_{m+n}^m .

Como o caminho é representado por um código e cada código representa um caminho, a quantidade de caminhos é igual à quantidade de códigos. Portanto, existem $\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$.

caminhos ligando os pontos A e B de modo que o deslocamento seja somente para a direita ou para cima.

Outra maneira de fazer essa contagem é observar que a quantidade de escolhas de m posições para colocar a letra D na lista que é C_{m+n}^m .

Nas outras posições colocará a letra C .

Exemplo 3.4.4. Determine o número de anagramas da palavra "BRASILEIRA".

Solução: Para cada uma das $10!$ permutações das letras da palavra BRASILEIRA existem $8 = 2! \cdot 2! \cdot 2!$ que são iguais, logo $P_{10}^{2,2,2} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453600$ anagramas para esta

palavra.

Exemplo 3.4.5. *Meu time favorito participou de um campeonato em que jogou 10 partidas, tendo vencido 5 jogos, empatado 3 e perdido 2. Encontre o número de formas em que isso pode ter ocorrido.*

Solução: Temos que $P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 630$

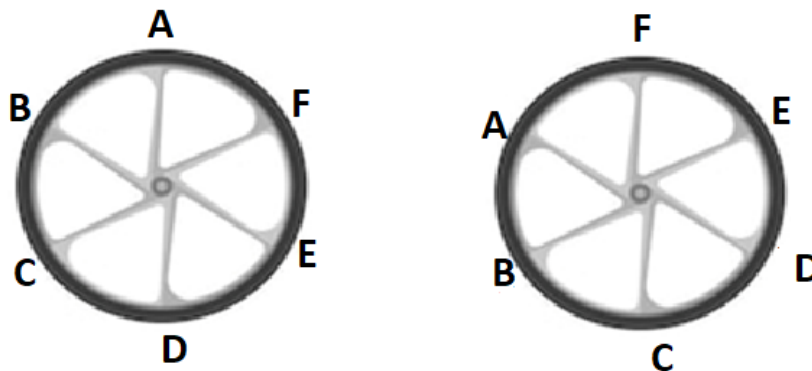
4 Outras Fórmulas Combinatórias

A utilização do Princípio Fundamental da contagem, auxiliada por técnicas de permutação e combinações, possibilita a solução da maior parte dos problemas de contagem que são apresentados no Ensino Médio. No entanto, o professor, ao ministrar esse conteúdo precisa ampliar seu repertório de técnicas com a resolução de problemas que serão abordados nesta seção.

4.0.1 Permutações Circulares

Exemplo 4.0.1. *Numa pracinha existe um brinquedo em forma de roda, onde as crianças se sentam e giram nela. De quantas formas 6 crianças podem sentar-se para brincarem nessa roda.*

Figura 8 – Brinquedo



Fonte: produções:Google imagens.

Solução: Para fazer a brincadeira com as 6 crianças, basta escolher a ordem em que se sentaram na roda, assim tem-se $6! = 720$ formas. Indicando cada criança com a letra inicial de seu nome, observa-se qual a disposição $ABCDEF$ e $FABCDE$ são iguais, visto que, na organização das crianças nesse brinquedo o que importa é a posição relativa das crianças entre si, tal como a organização $ABCDEF$ e $FABCDE$. A cada "disposição" das crianças ocorre de seis modos, a contagem de 720 contou cada roda 6 vezes, ou seja, de fato teremos $\frac{720}{6} = 120! = 5!$ formas de as crianças se organizarem para a brincadeira.

Exemplo 4.0.2. *Quantos colares diferentes podem ser feitos com cristais de n cores diferentes ?*

Solução: Para confeccionar os colares com n cristais coloridos, basta escolher a cor dos cristais que iniciará o cordão, assim tem-se $n!$. Indicando cada cristal pela letra inicial, referente a cor delas, por exemplo: rosa, verde, lilás e azul, podemos ter a seguinte disposição RVLZ e UALR são idênticas, visto que o que importa é a posição relativa entre elas no colar. Considerando que cada disposição ocorre de n modos, a contagem de $n!$ colares contou cada um deles n vezes, ou seja, teremos um total de colares dados por $PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$, que fornece o número de permutações circulares de n objetos.” colares distintos.

Observe que nos problemas que envolvem permutações simples o que importa é o lugar em que os objetos foram dispostos, enquanto nos problemas que tratam de permutações circulares o que importa, de fato, é a posição relativa entre os objetos.

Quando viramos um colar de modo que a parte de baixo fique para cima, a ordem dos cristais no colar inverte. Logo cada colar e o colar com cristais na ordem contrária representam o mesmo colar. Portanto dividir o cálculo por 2.

Portanto o número de colares diferentes com n cristais é $\frac{(n-1)!}{2}$.

4.0.2 Combinações Completas

Exemplo 4.0.3. *Pedro foi a uma sorveteria que possibilita 5 sabores e ele pretende escolher 3 sorvetes. De quantos modos será possível fazer essa escolha?*

Solução: Observe que a resposta desse problema não é somente $C_5^3 = 10$, pois devemos escolher 3 sorvetes que podem ser distintos ou não.

O número de escolhas de 3 sorvetes de sabores distintos é que é $C_5^3 = 10$.

Assim podemos escolher 2 sabores iguais e 1 diferente que dá $5 \cdot 4 = 20$ e também os 3 sorvetes de mesmo sabor que dão 5 escolhas.

Assim temos $10 + 20 + 5 = 35$ escolhas para 3 sorvetes de 5 sabores.

Esse não é o melhor método para se escolher p objetos.

No caso, acima $n = 5$ e $p = 3$

Exemplo 4.0.4. *Numa festa são servidas cocadas de abacaxi, limão, mamão e uva. De quantos modos podemos escolher 3 cocadas de $n = 3$ cocadas desses 4 sabores.*

Solução: Nesse problema temos que escolher $p = 3$ cocadas de $n = 4$ sabores. Com 3 sabores iguais temos 4 escolhas.

Com 2 sabores iguais temos 4 escolhas. Com 2 sabores iguais e 4 diferentes temos $4 \cdot 3 = 12$ escolhas. De 3 sabores diferentes temos $C_4^3 = 4$. Logo há $4 + 12 + 4 = 20$ maneiras de escolher 3 cocadas em 4 sabores.

Também podemos limitá-los.

Definindo os sabores abacaxi= A, Limão=L , mamão= M e uva= U, temos as listas:

AAA, LLL, MMM, UUU, AAL, AAM, AAU , LLA, LLM, LLU, MMA, MML, MMU, UUA, UUL, UUM, ALM, ALU, AMU, LMU.

Para os casos n e p muito grandes estas não representa a melhor solução.

Exemplo 4.0.5. *Numa festa são servidas cocadas no sabores abacaxi, cacau, gengibre, limão, mamão, nozes e uva. De quantas maneiras podemos escolher 4 cocadas dentre estes 7 sabores?*

Solução: indicando por

x_1 = número de cocadas de abacaxi.

x_2 = número de cocadas de cacau.

x_3 = número de cocadas de gengibre.

x_4 = número de cocadas de limão.

x_5 = número de cocadas de mamão.

x_6 = número de cocadas de nozes.

x_7 = número de cocadas de uva .

Temos uma soma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

Onde $x_1 + x_2 + \dots, x_7$ são inteiros ≥ 0 .

O problema se resolve se descobrir a quantidade de formas de $n = 7$ parcelas que dão $p = 4$ de números inteiros não negativos.

Observe que:

$0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4$ representa uma solução da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$ onde a escolha foi de 2 cocadas de cacau, 1 de limão e 1 de nozes.

Para fazer essa contagem vamos introduzir símbolos. Imagine 4 potes iguais vagos e 6 traços para indicar os sabores a serem colocados nos potes.

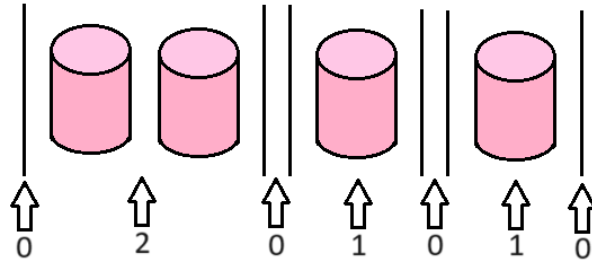
A solução $0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4$ será representado pelo símbolo.

São 6 traços separando 7 sabores.

Cada solução $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 4$ está associada a um símbolo e todo símbolo representa uma única solução. Por exemplo, o símbolo

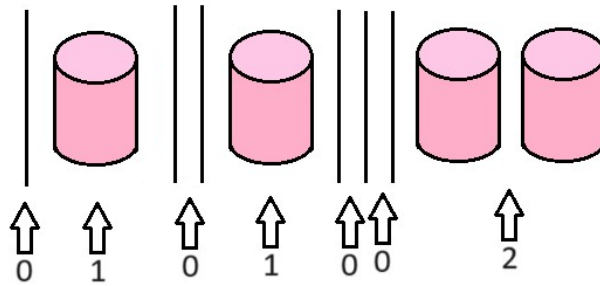
representa a solução

Figura 9 – Potes I



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 10 – Potes II



Fonte: Produção do próprio autor.

$$0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 = 4.$$

Portanto o número de escolhas de p objetos (os 4 potes), distintos ou não entre n elementos ($n - 1$ traços) não entre n elementos é a quantidade de símbolos, que é

$$P_{4+6}^{4,6} = P_{10}^{1,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = C_{10}^4 = C_{4+(7-1)}^4 = C_{10}^4 = 210.$$

Na expressão $C_{4+(7-1)}^4$, no termo $4 + (7 - 1)$, o 4 representa p bola e $7 - 1$ indica $n - 1$ traços.

A essa quantidade damos o nome de número de combinações com repetição de p elementos distintos ou não entre n elementos e indicado por CR_n^p .

$$\text{Logo } CR_n^p = C_{p+n-1}^p = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Exemplo 4.0.6. Determine o número de soluções inteiras e não negativa que a inequação $x + y + z \leq 6$ apresenta.

Solução 1: Observe que as soluções inteiras não negativas da inequação $x + y + z \leq 6$, dividem-se nos grupos de soluções das equações $x + y + z = 6, x + y + z = 5, \dots, x + y + z = 0$. Então o número de soluções da inequação $x + y + z \leq 6$ é:

$$\begin{aligned} &= CR_3^6 + CR_3^5 + CR_3^4 + CR_3^3 + CR_3^2 + CR_3^1 + CR_3^0 \\ &= C_8^6 + C_7^5 + C_6^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 = 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84 \end{aligned}$$

Solução 2-

Considerando cada uma das soluções inteiras não negativas da inequação $x + y + z \leq 6$, defina a variável f dada por $f = 6 - (x + y + z)$.

A tabela a seguir mostra algumas soluções e as respectivas folgas.

Tabela 1 – Soluções

Solução da inequação $x + y + z \leq 6$	Solução da equação $x + y + z = 6$
$(+1, +1, +0) \leq 6$	$1 + 1 + 0 + 4 = 6$
$(+2, +1, +0) \leq 6$	$2 + 1 + 0 + 3 = 6$
$(+1, +1, +4) \leq 6$	$1 + 1 + 4 + 0 = 6$
$(+2, +2, 0) \leq 6$	$2 + 0 + 2 + 2 = 6$

Fonte: Produção google imagens

Note que entre as soluções inteiras não negativas da inequação $x + y + z \leq 6$ e as soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z + F = 6$ existe uma correspondência biunívoca.

Na compra com 6 reais 2 $(2, 1, 1)$ sobram 2 reais. Assim temos

Tabela 2 – Soluções

Solução da inequação $x + y + z \leq 6$	Solução da equação $x + y + z = 6$
$(+2, +1, +1) \leq 6$	$2 + 1 + 1 + 2 = 6$

Fonte: Produção google imagens

Observe que na soma $2 + 1 + 1 + 2 = 6$, 4 parcelas, dessa forma temos $n = 4$ e como o resultado da adição é 6, temos $p = 6$. Dessa forma $CR_n^p = CR_4^6 = C_9^6 = C_9^3 = 84$.

5 Proposta

A proposta aqui apresentada segue as seguintes etapas:

- 1º Etapa: Apresentação da situação;*
- 2º Etapa: Produção Inicial;*
- 3º Etapa: Módulo 1, Módulo 2, Módulo n;*

.

Na primeira etapa proposta por esse modelo, apresenta-se o objeto de estudo no qual será desenvolvida a sequência didática, bem como os recursos a serem utilizados pelo professor durante a aplicação da mesma, além disso, são definidas as finalidades e o prazo de aplicação desse trabalho. Na segunda etapa desse trabalho, foram apresentadas diversas questões propostas pela OBMEP, para entender em que nível de conhecimento dos alunos e capacidade de resolver problemas que exigem raciocínio, o que permitirá ao professor elaborar intervenções para atingir os objetivos propostos. Na terceira etapa do modelo proposto pretende-se solucionar os problemas e deficiências encontradas na segunda etapa do processo, e esta intervenção será feita através de atividades diferenciadas, recursos didáticos, pesquisas e aulas dinâmicas de modo a prover uma aprendizagem efetiva do conhecimento que ainda não foi apropriado.

5.0.1 Descrição da Proposta

A Sequência didática deve ser aplicada nas turmas do 8º ou 8ºda adaptando-as ao conhecimento dos alunos.

Tendo em vista o fortalecer desenvolver o raciocínio e conhecimento dos alunos, afim de melhorar os índices nas avaliações externas PAEBES e SAEBES que são aplicadas pela rede de ensino.

5.0.2 Descrição das Etapas do Processo

No primeiro momento apresentar as turmas a proposta de trabalho, em que o conteúdo previsto é o de Análise Combinatória através da resolução de questões da OBMEP. Formaram-se grupos de trabalhos afim de analisar e discutir as possibilidades de resolução entre os ocupantes de cada grupo dos problemas propostos.

No segundo momento aplicou-se a sequência didática, por um período de aproximadamente 2 meses, apresentando aos discentes problemas da OBMEP, selecionados entre questões fáceis, médias e difíceis.

Tendo em vista, as dificuldades que possam ocorrer durante a realização dos problemas propostos na segunda fase deste trabalho, fazer intervenções, tais como: apresentação de conteúdos que os estudantes não tenham conhecimento, uso de recursos tecnológicos, tais como tabletes, em que as ferramentas do Geogebra serão exploradas afim de atrair e estimular a aprendizagem.

Como produto final pretende-se observar empenho dos alunos na solução das questões, em que será avaliado o interesse por parte do estudante na disciplina de Matemática e os resultados alcançados, tendo em vistas as constantes avaliações tanto internas quanto externas, que os alunos da rede municipal são submetidos constantemente.

5.0.3 Questões da OBMEP

5.0.3.1 Atividade 1

Exemplo 5.0.1. *(OBMEP 2005 - N2Q3 – 2ª fase) Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.*

(A) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?

(B) Quantos botões há na caixinha?

Soluções: 1ª a) Na caixa existem somente 1 botão branco de cada tamanho e de cada forma, logo existem somente 3 botões brancos.

b) Observe que existem 3 formas de escolher a cor do botão, 3 formas de escolher o tamanho do botão e 2 formas de escolher o formato do botão, pelo P.M tem-se $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ formas de escolhê-lo, no entanto na caixa não tem botões pequenos e redondos e nem grandes e pretos, assim excluiríamos deste total 3 possibilidades. Além disso como existem apenas um botão de cada tipo excluiríamos 2 desse resultado, portanto, existem $13 = 18 - 3 - 2$ botões na caixa.

2ª A solução apresentada por alguns alunos no item a foi idêntica a anterior, já no item b ocorreu por meio árvore de possibilidade considerando apenas a cor preta a princípio e as condições a ela impostas. Observou-se que o botão preto poderia ser pequeno e quadrado, médio e quadrado, médio e redondo. Para cada um dos botões branco e Marrons existem 5, que no caso são: pequeno e quadrado, médio e quadrado, médio e redondo, grande e quadrado, branco e quadrado.

3ª Segundo a pauta de correção da OBMEP:

a) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão

de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.

b) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, segue que o número de possíveis tipos de botões é $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é $18 - (3 + 2) = 13$. Outra solução equivalente (mais longa e trabalhosa) é fazer uma tabela, listando todos os tipos possíveis de botões e depois excluir os pequenos redondos e os grandes pretos.

4ª Para o item b) podemos apresentar o seguinte resultado:

i- Como não existem botões pequenos redondos, e existe um botão de cada tipo, então teremos neste caso 3 botões pequenos quadrados, sendo um de cada cor.

ii- Como não existem botões grandes pretos, então temos 2 opções de tamanho (pequenos e médios) e 2 opções de cores (brancos e marrons), dessa forma pelo P.M. temos $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades.

iii- No caso dos botões médios não houve restrição da cor e nem dos tamanhos, assim existem 3 possibilidades para a cor e 2 possibilidades para os tamanhos, dessa forma pelo P.M. temos $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades.

Considerando cada um dos resultados apresentados acima, aplicando o P.A. temos $3 + 4 + 6 = 13$ possibilidades de escolha.

5.0.3.2 Atividade 2

Exemplo 5.0.2. (OBMEP/2018 – F2 – N2 – P6). Um enfeite é formado por um dado encaixado em uma cavidade quadrada sobre uma base, como mostra a figura. As faces do dado estão numeradas de 1 a 6.

Figura 11 – dado



- De quantas maneiras o dado pode ser encaixado na base com face 1 para cima?
- De quantas maneiras o dado pode ser encaixado na base?

c) De quantas maneiras o dado pode ser encaixado na base, de modo que pelo menos um dos vértices da face 6 fique em contato com a base?

c) De quantas maneiras um dado, encaixado como na figura, pode ser reposicionado na base, de modo que nenhum número permaneça em sua posição original?

d) De quantas maneiras um dado, encaixado como na figura, pode ser reposicionado na base, de modo que nenhum número permaneça em sua posição original?

Solução:

a) A face 1 está para cima se a face 6 estiver na base, pois a soma das faces opostas do dado é sempre 7. Assim como a face de número 1 em cima podemos reposicionar as laterais, assim temos 4 possibilidades

b) Temos 6 possibilidades para ocupar a base, no entanto, devemos considerar o posicionamento do dado. Ao fixarmos uma face na base temos 4 possibilidade para as faces laterais. Assim aplicando o P.M. temos $6 \cdot 4 = 24$ possibilidades.

c) Podemos ter 1, 2, 3 ou 4 vértices da face com o número 6 tocando a base, assim para tirar do resultado anterior os 4 vértices, que representa quando a face com número 6 não toca a base, logo temos $24 - 4 = 20$ formas.

d) Vamos analisar em quantos dos casos as posições da figura repetem-se:

- Número 1 na face superior: como vimos no primeiro item da questão, existem 4 situações em que o número 1 está na face superior, incluindo a posição original do dado;

- Número 3 na face da frente: de forma análoga, fixando o número 3 na face da frente, a face oposta também fica, e restam assim quatro números para colocar na face superior. Como o caso em que o número 1 está na face superior já foi descontado no item anterior, restam 3 posições distintas em que o número 3 está na face da frente.

- Número 5 na face lateral: mais uma vez, restam 4 números para serem colocados na face da frente. Como o caso em que o número 3 ocupa essa face já foi descontado no item anterior, restam 3 posições distintas em que o número 5 está na face lateral. Portanto, somando os casos acima, temos que o número de disposições em que as posições originais se repetem é $4 + 3 + 3 = 10$. Descontando do número total já calculado anteriormente, segue que o número de formas de dispor o dado sem que nenhuma posição se repita é $24 - 10 = 14$.

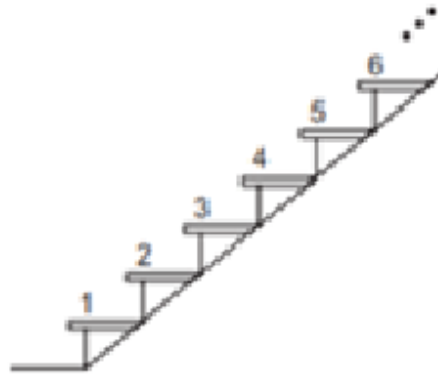
5.0.3.3 Atividade 3

Exemplo 5.0.3.

(OBMEP/2014-F 2-N3) Fábio gosta de brincar em escadas, subindo ou descendo

seus degraus da seguinte maneira: • começa no degrau de número 1 • a cada movimento ele sobe ou desce um ou dois degraus e, ao subir ou descer dois degraus, não pisa no degrau intermediário; • pisa em todos os degraus exatamente uma vez. Por exemplo, em uma escada com três degraus ele pode brincar de duas maneiras diferentes: $1 - 2 - 3$, $1 - 3 - 2$; com quatro degraus ele pode brincar de quatro maneiras diferentes: $1 - 2 - 3 - 4$, $1 - 2 - 4 - 3$, $1 - 3 - 2 - 4$ e $1 - 3 - 4 - 2$.

Figura 12 – escada



a) Fábio pode brincar de seis maneiras diferentes em uma escada com cinco degraus. Descreva essas seis maneiras.

b) Explique por que sempre é possível terminar a brincadeira no degrau de número 2 em qualquer escada com dois ou mais degraus.

c) Há 31 e 68 maneiras diferentes de se brincar em escadas com nove e onze degraus, respectivamente. De quantas maneiras diferentes Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus?

Soluções:

1ª – a) As seis maneiras são as seguintes: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$, $1 - 2 - 3 - 5 - 4$, $1 - 2 - 4 - 3 - 5$, $1 - 2 - 4 - 5 - 3$, $1 - 3 - 2 - 4 - 5$, $1 - 3 - 5 - 4 - 2$.

b) Basta ele subir pelos degraus ímpares até o mais alto dos ímpares e em seguida ir para o mais alto dos pares e descer pelos degraus pares.

• Exemplo para 10 degraus: $1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 10 - 8 - 6 - 4 - 2$.

• Exemplo para 11 degraus: $1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 10 - 8 - 6 - 4 - 2$

c) Se ele começar com os movimentos $1 - 2$, o problema recairá no caso com 11 degraus e, portanto, será possível completá-lo de 68 maneiras.

Se ele começar com $1 - 3 - 2$, então ele terá que ir para o degrau 4, e o problema recairá na mesma situação da escada com 9 degraus e ele terá 31 maneiras para completá-lo.

Se ele começar com $1 - 3 - 4$, os degraus com 2 e 5 ficarão com um afastamento de 3 degraus e não será possível completar o movimento.

Se ele começar com $1 - 3 - 5$, ele não poderá mais descer ou subir um degrau, até atingir o último ímpar para depois voltar pelos pares como descrito no item **b)**, e, portanto, haverá apenas uma maneira.

Logo, o número de maneiras de completar a brincadeira será igual a $68 + 31 + 1 = 100$ maneiras.

2ª – a) Análoga a anterior.

b) Ele deve pular sobre os degraus ímpares em ordem crescente até o último ímpar, em seguida, deve pular para o maior degrau par e depois pular apenas sobre os degraus pares em ordem decrescente, encerrando a brincadeira no degrau 2.

c) Supondo que comece com o movimento $1 \rightarrow 2$, recai no caso com 11 degraus e, logo, será possível completá-lo de 68 maneiras.

Caso comece com $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, deverá ir para o degrau 4, recaindo assim na mesma situação da escada com 9 degraus, o que resulta em 31 maneiras de completá-lo.

Se começar com os movimentos $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, os degraus 2 e 5, os degraus estarão distanciados de 3 degraus um do outro e não será possível terminar a brincadeira.

Caso comece com os movimentos $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$, não poderá mais descer ou subir um degrau, até atingir o último ímpar para depois retornar pelos pares como descrito no item **b)**, assim existirá apenas uma maneira de fazer essa sequência.

Dessa forma, o número que representa o total de maneiras que Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus é $100 = 68 + 31 + 1$

5.0.3.4 Atividade 4

Exemplo 5.0.4. (OBMEP/2019-F2-N2-P5). Dizemos que uma fila de cadeiras de cinema está ocupada de forma quase-cheia quando não há duas cadeiras consecutivas ocupadas, mas a próxima pessoa a chegar será obrigada a sentar-se ao lado de uma cadeira já ocupada. Uma fila de 5 cadeiras tem exatamente quatro ocupações quase-cheias, mostradas abaixo. As cadeiras marcadas com X indicam que elas estão ocupadas.

Figura 13 – cadeiras I



a) Uma fila de 6 cadeiras possui cinco ocupações quase cheias. Marque com X as cadeiras dessas ocupações.

Figura 14 – cadeiras II



b) Quantas são as ocupações quase-cheias em uma fila de 8 cadeiras em que a segunda cadeira já está ocupada?

Figura 15 – cadeiras III



c) A tabela abaixo apresenta o número de ocupações quase-cheias para algumas filas de cadeiras. Calcule o total de ocupações quase-cheias em uma fila com 19 cadeiras. Justifique.

Figura 16 – cadeiras IV

Número de cadeiras da fila	5	6	...	16	17	18	19
Número de ocupações quase-cheias	4	5	...	86	114	151	

Solução: 1ª - a)

Figura 17 – cadeiras V



b) Como a segunda cadeira já está ocupada, a primeira e terceira cadeiras necessariamente devem ficar livres. Assim, os demais a chegar devem ocupar, de modo quase cheio, as 5 cadeiras restantes. Como visto no enunciado, há 4 possibilidades para a ocupação dessas cadeiras.

c) Em uma ocupação quase cheia de 19 cadeiras, exatamente uma das duas primeiras cadeiras deve estar ocupada. Com a primeira cadeira ocupada e consequentemente a segunda livre, as demais pessoas devem ocupar, de modo quase cheio, as outras 17 cadeiras. De acordo com a tabela, há 114 possibilidades para essa ocupação.

Figura 18 – cadeiras VI

Fernando	Isaura
101	155

Com a segunda cadeira ocupada e conseqüentemente as duas ao lado livres, as demais pessoas devem ocupar, de modo quase cheio, as outras 16 cadeiras. De acordo com a tabela, há 86 possibilidades para essa ocupação. Portanto, há um total de $114 + 86 = 200$ ocupações quase cheias para 19 cadeiras.

Figura 19 – cadeiras VII

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Observação: A quantidade a_n de ocupações quase cheias de n cadeiras é dada pela recorrência $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2$ e $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ para todo $n \geq 4$.

5.0.3.5 Atividade 5

Exemplo 5.0.5. (OBMEP/2008-F2-N-P5). Um conjunto de inteiros consecutivos é equilibrado se ele pode ser dividido em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos, de modo que:

(1) Os dois subconjuntos não tenham elementos em comum; b. a soma dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos elementos do outro;

(2) A soma dos quadrados dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos elementos do outro;

(3) A soma dos quadrados dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos quadrados dos elementos do outro. Por exemplo, o conjunto $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ é equilibrado, pois podemos dividi-lo nos subconjuntos $\{7, 10, 12, 13\}$ e $\{8, 9, 11, 14\}$, e $7 + 10 + 12 + 13 = 8 + 9 + 11 + 14$ e também $7^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 = 8^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2$

a. Verifique que o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ é equilibrado.

b. Mostre que qualquer conjunto de oito naturais consecutivos é equilibrado.

c. Mostre que nenhum conjunto de quatro naturais consecutivos é equilibrado.

Solução:

1ª – : a Dividindo o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nos subconjuntos $\{1, 4, 6, 7\}$ e $\{2, 3, 5, 8\}$. Como

$$1 + 4 + 6 + 7 = 18 = 2 + 3 + 5 + 8 (*)$$

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 102 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2, (**)$$

Vemos que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ é equilibrado.

b) Seja $A = \{a + 1, a + 4, \dots, a + 8\}$ um conjunto arbitrário de 8 números inteiros consecutivos. De (*), segue que

$$(a + 1) + (a + 4) + (a + 6) + (a + 7) = (a + 2) + (a + 3) + (a + 5) + (a + 8)$$

ou seja, podemos dividir A nos subconjuntos $\{a + 1, a + 4, a + 6, a + 7\}$ e $\{a + 2, a + 3, a + 5, a + 8\}$ que têm a mesma soma. Para ver que a condição na soma dos quadrados também vale, basta calcular

$$\begin{aligned} & (a + 1)^2 + (a + 4)^2 + (a + 6)^2 + (a + 7)^2 \\ &= 4a^2 + 2a(1 + 4 + 6 + 7) + (1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2) \\ &= 4a^2 + 2a(2 + 3 + 5 + 8) + (2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2) \\ &= (a + 2)^2 + (a + 3)^2 + (a + 5)^2 + (a + 8)^2. \end{aligned}$$

Concluimos que A é equilibrado.

Uma solução análoga é quando escrevemos $\{a, a + 1, a + 2, \dots, a + 7\}$.

Neste caso, deve-se observar primeiramente que $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ é equilibrado; para ver isso, basta dividi-lo em $\{0, 3, 5, 6\}$ e $\{1, 2, 4\}$. O restante da solução é idêntico, dividindo A nos subconjuntos $a, a + 3, a + 5, a + 6$ e $a + 1, a + 2, a + 4, a + 7$

c) Suponha que exista um número inteiro a tal que o conjunto $a, a + 1, a + 2, a + 3\}$ seja equilibrado. A soma dos elementos desse conjunto é $4a + 6$, para que ele satisfaça a primeira condição de um conjunto equilibrado, devemos dividi-lo em dois subconjuntos de dois elementos cada um, e tais que a soma dos elementos de cada um deles seja $\frac{1}{2}(4a + 6) = 2a + 3$; isso só é possível quando os subconjuntos são $\{a, a + 3\}$ e $\{a + 1, a + 2\}$. Para que a segunda condição de um conjunto equilibrado seja satisfeita, devemos ter

$$(a^2 + (a + 3)^2 = (a + 1)^2 + (a + 2)^2, \text{ ou seja:}$$

Simplificando essa última igualdade chegamos a $4 = 0$, um absurdo. Logo nenhum conjunto com quatro inteiros consecutivos é equilibrado.

5.0.3.6 Atividade 6

Exemplo 5.0.6. (OBMEP 2016) Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1ª posição seja maior do que 1, o da 2ª posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas 52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2. a) Se a senha de Fernanda começar com 9467, qual deve ser o algarismo da 5ª posição?

b) Se Fernanda começar a formar sua senha escolhendo o algarismo 7 para a 5ª posição, quantas são as possibilidades de escolha para a 4ª posição?

c) Quantas senhas Fernanda poderá formar?

Solução: a) Os possíveis algarismos 5ª posição são 6, 7, 8 ou 9. Como 6, 7 e 9 já foram escolhidos, só há uma possibilidade para escolha do algarismo da 5ª posição: o algarismo 8.

b) Os possíveis algarismos da 4ª posição são 5, 6, 7, 8 ou 9; entretanto, como 7 foi utilizado na 5ª posição, há apenas 4 possibilidades de escolha para a 4ª posição (5, 6, 8 ou 9).

c) Observamos, primeiramente, que há 4 possibilidades de escolha para a 5ª posição (6, 7, 8 ou 9). Feita uma dessas escolhas, vemos que há somente 4 possibilidades de escolha para a 4ª posição. De fato, o item b) ilustra o que ocorre se o algarismo 7 ocupasse a 5ª posição, e é claro, o mesmo ocorre se 6, 8 ou 9 ocupar a última posição. Em cada um dos casos há 4 possibilidades para a 4ª posição. Feitas as escolhas das duas últimas posições, vemos também que há 4 escolhas para a terceira posição (das possibilidades 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, devemos excluir duas escolhas já feitas). Utilizando exatamente o mesmo raciocínio, teremos também 4 escolhas para a 2ª posição e 4 escolhas para a 1ª posição. Pelo P.M., há $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$ senhas diferentes que Fernanda poderá formar.

5.0.3.7 Atividade 7

(OBMEP 2012 - 2ª Fase - Nível 3 - Q3) Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Figura 20 – 2013



(a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \cdot 2 \cdot 2$ maneiras diferentes.

De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1? (b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3? (c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0? (d) Escreva uma expressão numérica que permita

Calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Solução:

Figura 21 – Número 1



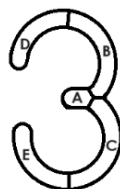
1ª – a) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo P.M., o algarismo 1 pode ser pintado de $3 \cdot 2 = 6$ maneiras distintas.

b) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há 2 opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C.

A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B e; logo, para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E.

Assim, pelo P.M., já $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismos 3.

Figura 22 – Número 3

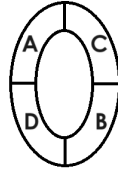


c) Vamos distinguir dois casos.

* As cores de A e B coincidem: nesse caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo P.M., o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ maneiras distintas.

Segue do P.A. que o algarismo 0 pode ser pintado de $12 + 6 = 18$ maneiras distintas.

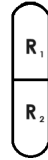
Figura 23 – Número 0



d) Basta pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3; o 2 pode ser pintado de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo *P.M.*, há $12 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 18 = 31104$ maneiras distintas de pintar o número 2013.

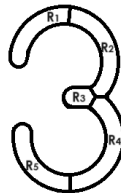
2ª- observe que o algarismo 1 em questão apresenta duas regiões, a qual chamaremos de R_1 e R_2 , como temos três cores a disposição, a região R_1 poderá ser pintada de 3 formas. Como regiões vizinhas não podem apresentar a mesma cor, então R_2 poderá ser pintada de 2 formas. Assim pelo *P.M.* podemos pintar o número 1 de $3 \cdot 2 = 6$ formas distintas.

Figura 24 – Número 1-



b) No caso do algarismo 3 em questão, apresenta cinco regiões, que indicaremos por R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 . Iniciando a pintura pela região R_1 temos 3 opções de cores, como a região R_2 é vizinha de R_1 e não deve ter a mesma cor da região anterior, então teremos 2 opções de cores para pintá-la. No caso da região R_3 , teremos 2 opções de cores, uma vez que a cor colocada na região R_1 pode ser utilizada agora novamente. Para a região R_4 teremos apenas 1 opção de cor, visto que esta é vizinha da região R_2 e R_3 , assim não pode ter as mesmas cores delas. A região R_5 poderá apresentar 2 opções de cor pois das 3 cores existentes só não pode ter a mesma da cor utilizada na região R_4 . Assim pelo *P.M.* temos $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 24$ formas de pintar o dígito 3.

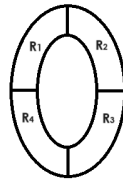
Figura 25 – Número 3-



c) No caso do algarismo 0 é necessário observar 4 regiões em que podemos pensar em pintá-las de 2 formas:

1ª)- A região R_1 e R_3 com a mesma cor, neste caso teremos 3 opções de cores para a região R_1 , fixada a cor para essa região, teremos 1 opção de cores para a região R_3 . Em

Figura 26 – Número 0-



seguida podemos pintar a região R_2 e R_4 da mesma de cor, assim teremos 2 opções de cores para cada uma das regiões. Pelo princípio multiplicativo temos $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ maneiras de pintar o algarismo 0 respeitando esta condição.

2ª- Somente as regiões R_1 e R_3 da mesma cor, dessa forma temos 3 opções para R_1 , escolhida a cor de R_1 , a região R_2 terá 2 formas de escolhas, pois não pode apresentar a mesma cor que a primeira região. A cor de R_3 deverá ser a mesma de R_1 , assim teremos 1 opção para esta região. Na região R_4 temos 1 opção. Dessa maneira temos pelo Princípio multiplicativo temos $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ maneiras de pintar algarismo 0 respeitando esta condição.

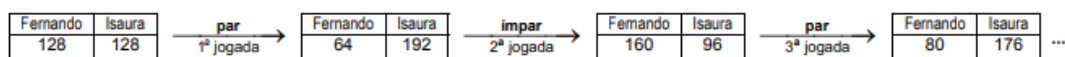
Considerando as soluções apresentadas na 1ª e 2ª solução temos pelo P.A. $12+6 = 18$ formas de pintar o algarismo 0.

5.0.3.8 Atividade 8

Exemplo 5.0.7. *Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:*

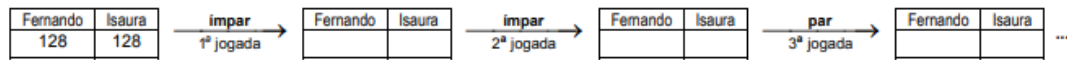
- (1) *eles começam uma partida com 128 palitos cada um;*
- (2) *em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.*
3. *eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos. Veja o que acontece em uma partida onde a sequência das três primeiras jogadas é par, ímpar, par:*

Figura 27 – Sequencias I



(a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

Figura 28 – Sequências II



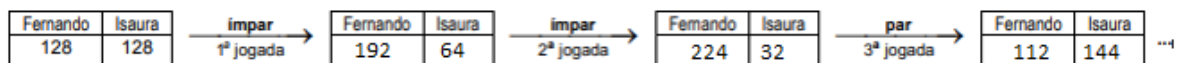
(b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?

(c) Qual foi a sequência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?

(d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

Solução: 1ª- Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seu palitos par o Fernando;desse modo, Isaura fica co 64 palitos, e como o número total de palitos é 256, segue que Fernando ficou com $256 - 64 = 192$ palitos. Do mesmo modo, após a segunda jogada Isaura ficou com 32 palitos. Do mesmo modo, após a segunda jogada Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256 - 32 = 224$ palitos Na terceira jogada saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256 - 112 = 144$ palitos.

Figura 29 – Sequências III



b) Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $256 - 127 = 129$ palitos,logo,o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

c) 1ª Solução: Suponhamos que em um dado momento Felipe tenha x palitos e Isaura tenha y palitos; notamos que como $x + y = 256$, que é o numero par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

* Saiu par: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y + \frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando.

* Saiu ímpar: nesse caso Fernando fica com $x + \frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: Se Isaura tiver mais, o resultado foi par; e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $206 - 202 = 155$ palitos. Logo, o resultado da última jogada foi par.

d) Aplicamos o raciocínio do item b) para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Figura 30 – sequência IV

Fernando	Isaura
101	155

Isaura tem mais palitos; logo, na partida anterior saiu par; então *Fernando* tinha $2 \cdot 101 = 202$ palitos e Isaura tinha $256 - 202 = 54$ palitos;

Figura 31 – sequência V

Fernando	Isaura
202	54

Fernando tem mais palitos; logo, na partida anterior saiu ímpar; então Isaura tinha $2 \cdot 54 = 108$ palitos e Fernando $256 - 108 = 148$ palitos.

Figura 32 – sequência VI

Fernando	Isaura
148	108

Fernando tem mais palitos; logo, na partida anterior saiu ímpar; então Isaura tinha $2 \cdot 108 = 216$ palitos e Isaura $256 - 216 = 40$ palitos;

Figura 33 – sequência VII

Fernando	Isaura
40	216

Isaura tem mais palitos, logo, na partida anterior saiu par, então Fernando tinha $2 \cdot 40 = 80$ palitos e Isaura tinha $256 - 80 = 176$ palitos.

Figura 34 – sequência VIII

Fernando	Isaura
80	176

Figura 35 – sequência IX

Fernando	Isaura
160	96

Isaura tem mais palitos; logo, na partida anterior saiu ímpar; então Fernando tinha $2 \cdot 80 = 160$ palitos e Isaura tinha $256 - 160 = 96$ palitos;

Fernando tem mais palitos; logo, na partida anterior saiu ímpar, então Isaura tinha $2 \cdot 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos;

Figura 36 – sequência X

Fernando	Isaura
64	192

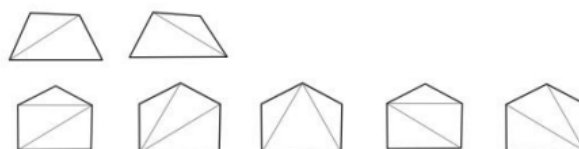
Isaura tem mais palitos; logo, na partida anterior saiu par; então Fernando tinha $2 \cdot 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos;

Observando o que foi feito no item *d* podemos construir o diagrama do número de jogadas

5.0.3.9 Atividade 9

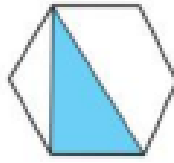
Exemplo 5.0.8. (OBMEP 2018) *A nova mania de Fábio é triangular polígonos, ou seja, decompor polígonos em triângulos desenhando diagonais que não se cruzam no interior do polígono. Fábio notou que há apenas duas maneiras de triangular um quadrilátero e cinco maneiras de triangular um pentágono, como nas figuras.*

Figura 37 – Quadriláteros I



a) *Fábio começou a triangular o hexágono abaixo com o triângulo pintado. De quantas maneiras ele pode terminar de triangular esse hexágono? (veja figura 39)-*

Figura 38 – Hexágono I



b) Fábio começou a triangular o hexágono abaixo com o triângulo pintado. De quantas maneiras ele pode terminar de triangular esse hexágono? (veja figura 40)

Figura 39 – Hexágono II

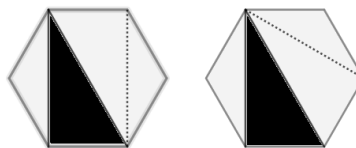


c) De quantas maneiras Fábio pode triangular um hexágono?

d) De quantas maneiras Fábio pode triangular um heptágono?

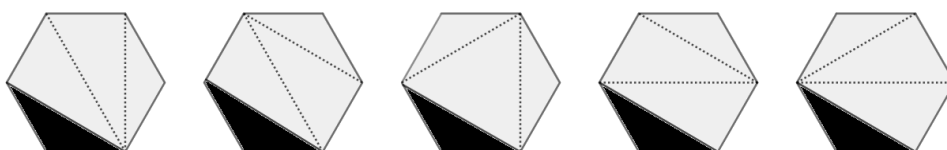
Solução: a) Há apenas duas triangulações do hexágono que contêm o triângulo azul; elas correspondem às duas triangulações do quadrilátero à direita desse triângulo: (observe as duas triangulações presentes no enunciado). (veja figura 41)

Figura 40 – Triangulação I



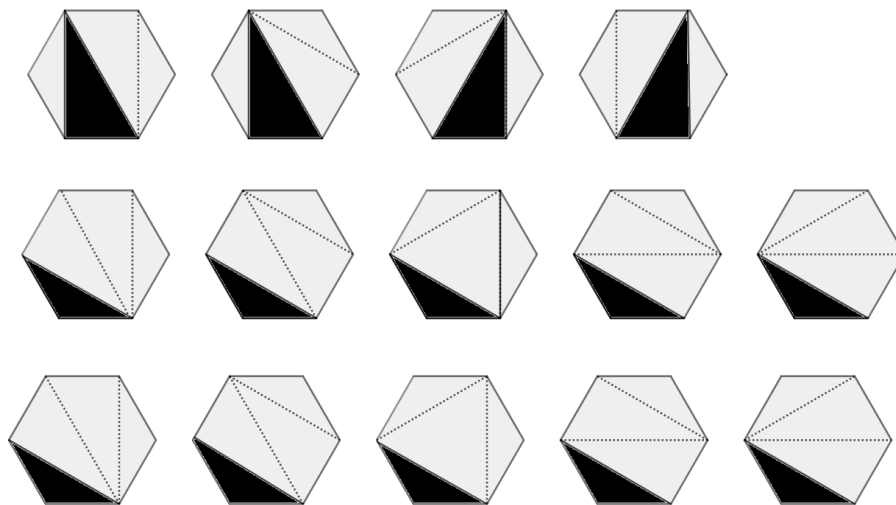
b) Há cinco triangulações do hexágono que contêm o triângulo vermelho; elas correspondem às cinco triangulações do pentágono não pintado dentro do hexágono. (Observe as 5 triangulações do pentágono presentes no enunciado).

Figura 41 – Triangulação II



c) O número total de triangulações do hexágono é 14. São as seguintes: (veja figura 43)

Figura 42 – Triangulação III

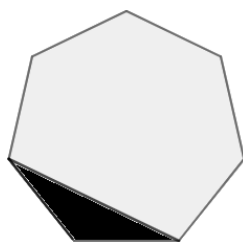


Essas triangulações correspondem, em cada caso, a triangular polígonos com um número menor de lados que o polígono original.

d) Raciocinando como foi feito acima, e usando um lado como base(nas figuras abaixo escolhemos o lado inferior horizontal), podemos fazer a contagem das triangulações do heptágono destacando triângulos que tenham um lado sobre essa base escolhida e vértice oposto a tal base coincidente com um dos cinco vértice superiores do heptágono. Isso permite organizar a contagem da seguinte maneira: (ver figuras 44,45,46,47).

1 Contamos inicialmente as triangulações destacadas em vermelho: elas correspondem às triangulações do hexágono, que, como vimos acima, são em número de 14.

Figura 43 – Triangulação IV



2) Contamos, a seguir, as triangulações que contêm o triângulo destacado em azul: elas correspondem às triangulações do pentágono e são em número de 5

3) Contamos agora as triangulações que contêm o triângulo verde. Nesse caso, as partes não pintadas do heptágono são dois quadriláteros e, portanto, existem $2 \cdot 2 = 4$ triangulações que contêm o triângulo verde.

4) Contamos agora as triangulações que contêm, p triângulo amarelo Esse caso é análogo ao caso 2. O número de triangulações que contêm esse triângulo é igual ao número

Figura 44 – Triangulação V

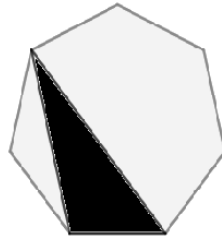
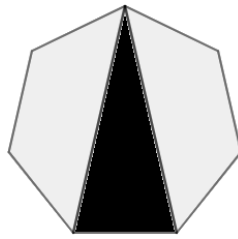
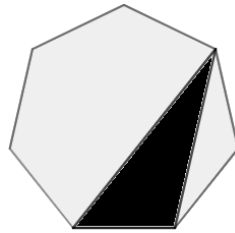


Figura 45 – Triangulação VI



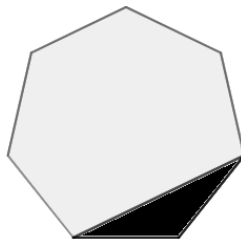
de triangulações do pentágono, ou seja, 5.

Figura 46 – Triangulação VII



5) Finalmente, consideramos o triângulo rosa. Esse caso é análogo ao caso 1 e corresponde ao número de triangulações do hexágono, que é 14.

Figura 47 – Triangulação VIII



Assim, no total temos $14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$ triangulações diferentes para o heptágono.

O procedimento acima pode ser generalizado para contar as triangulações de qualquer polígono convexo com n lados. ao selecionarmos um triângulo específico com vértices do polígono, a figura original fica dividida em polígonos com um número menos de lados, o que garante que o número de triangulações pode ser obtido recursivamente.

A título de curiosidade, se T_n denota o número de triangulações de um polígono com n lados, então $T_2 = T_3 = 1$ e $T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_2$, para $n \geq 4$.

5.1 Desenvolvimento de Atividades Diferenciadas

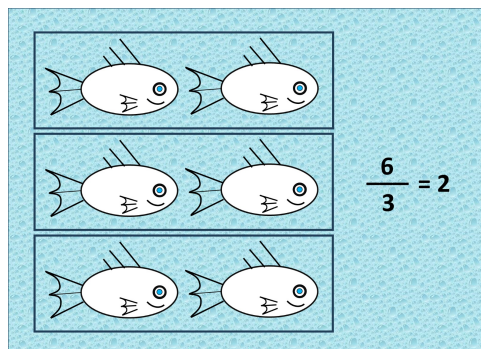
Tendo em vista as dificuldades dos alunos em resolver as questões proposta na sequência didática apresentada na seção 3.7.1, foi planejado a abordagem de alguns conteúdos, em que os alunos possivelmente não obtiveram até o momento efetiva apropriação, tais como: divisão de dois números inteiros, produtos notáveis e polígonos regulares. No que diz respeito ao conteúdo de polígonos regulares, deve-se fazer uma breve abordagem, utilizando as ferramentas do Geogebra para os alunos entenderem de forma prática o que é um polígono regular e conhecer suas propriedades.

5.1.0.1 Divisões

Exemplo 5.1.1. *Neste final de semana João, Pedro e Paulo foram a uma lagoa pescar e que pegaram 6 peixes. Determine quantos peixes coube a cada um dos rapazes ao repartirem a pescaria*

A operação de divisão pode ser introduzida com uma conexão de problema de contagem:

Figura 48 – Divisão dos peixes I



Exemplo 5.1.2. *Sabendo que Pedro e Paulo foram a uma lagoa pescar e que pegaram 6 peixes. Quantos peixes coube a cada um deles?*

Note que na divisão, conforme mostrado nas figuras acima, temos que $\frac{6}{3} = 2$ e $\frac{6}{2} = 3$, ou seja, $6 = 3 \cdot 2$ e $6 = 2 \cdot 3$

Exemplo 5.1.3. *Considerando que na pescaria, em que foram fsgados 20 peixes por 4 pescadores, como ficaria a divisão dos peixes entre eles ? E se fossem 5 pescadores, com quantos peixes cada um ficaria?*

Figura 49 – Divisão dos peixes II

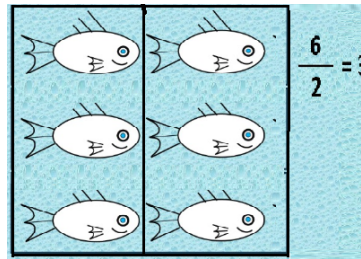


Figura 50 – Divisão dos peixes III

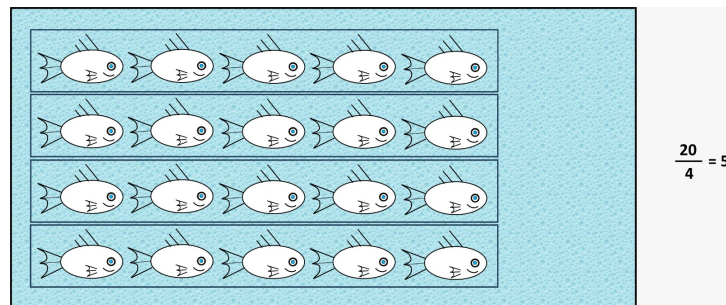
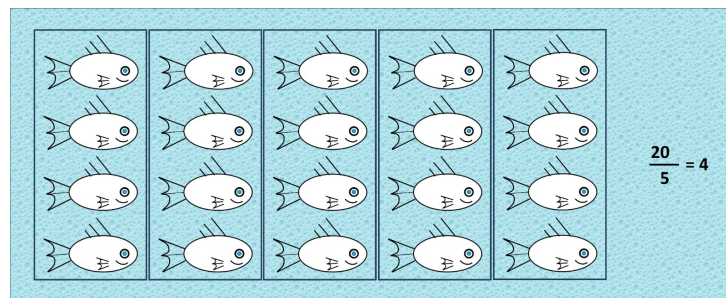


Figura 51 – Divisão dos peixes IV



De acordo com as figuras 51 e 53, observa-se que divisão que $\frac{20}{4} = 5$ e $\frac{20}{5} = 4$, ou seja, $20 = 5 \cdot 4$ e $20 = 4 \cdot 5$. Na operação de divisão, no caso da divisão exata, é preciso sempre observar que dados os números a, b e c , com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ ocorre sempre duas soluções, ou seja, $\frac{a}{b} = c$ e $\frac{a}{c} = b$, em ambos os casos temos $a = bc$

Exemplo 5.1.4. *Supondo agora que na pescaria fossem fisgados 9 peixes por 3 pescadores, como ficaria a divisão dos peixes entre eles? E se fossem 9 peixes e 4 pescadores? E se fossem dois pescadores*

Figura 52 – Divisão dos peixes V

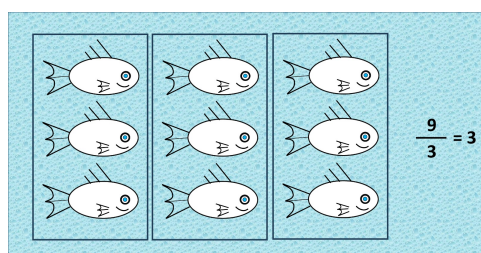


Figura 53 – Divisão dos peixes

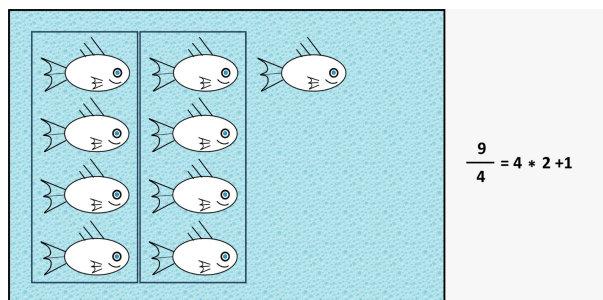


Figura 54 – Divisão dos peixes VI

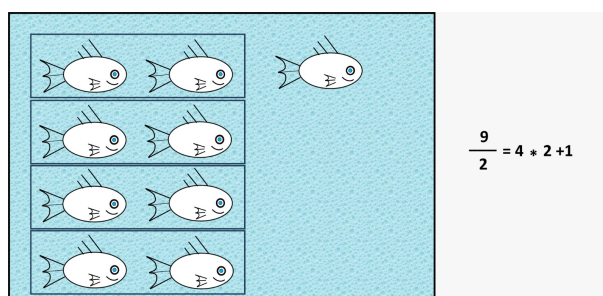
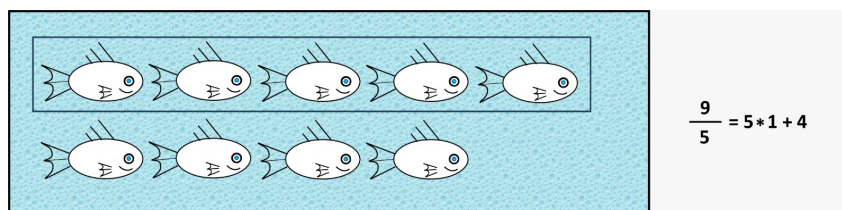


Figura 55 – Divisão dos peixes VII



De acordo com as figuras 52,53, 54 e 55, observa-se a divisão $\frac{9}{3} = 3$, $\frac{9}{4} = 4 \cdot 2 + 1$, $\frac{9}{2} = 2 \cdot 4 + 1$ e $\frac{9}{5} = 1 \cdot 5 + 4$. Na operação de divisão, no caso da divisão exata, é preciso sempre observar que dados os números a, b e c , com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ ocorre somente uma forma para a divisão, ou seja, $\frac{a}{b} = c$, neste caso $a = b \cdot c$. O mesmo não ocorre nas divisões não exatas. Repare o o divisor trata-se de um quadrado perfeito.

Vamos a seguir considerar um outro quadrado perfeito:

Exemplo 5.1.5. Supondo agora que na pescaria fossem fígados 25 peixes por 5 pescadores, como ficaria a divisão dos peixes entre eles? E se fossem 25 peixes e 4 pescadores? E se fossem 25 peixes e 3 pescadores. E se fossem 25 peixes e 2 pescadores?

Nesse caso, omitiremos as figuras, mas é possível verificar de modo análogo feito no exemplo anterior, na divisão $\frac{25}{5} = 5$, $\frac{25}{4} = 4 \cdot 6 + 1$, $\frac{25}{3} = 3 \cdot 8 + 1$ e $\frac{25}{2} = 2 \cdot 12 + 1$.

Na operação de divisão, em que a divisão é exata, é preciso sempre observar que dados os números a, b e c , com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ ocorre somente uma forma para a divisão, ou seja, $\frac{a}{b} = c$, neste caso $a = b \cdot c$. O mesmo não ocorre nas divisões não exatas. Repare o divisor, trata-se de um quadrado perfeito.

Exemplo 5.1.6. Supondo agora que na pescaria fossem fígados 15 peixes por 7 pescadores, como ficaria a divisão dos peixes entre eles? E se fossem 15 peixes e 6 pescadores? E se fossem 15 peixes e 5 pescadores. E se fossem 15 peixes e 4 pescadores? E se fossem 15 peixes e 3 pescadores? E se fossem 15 peixes e 2 pescadores?

Nesse caso, é possível verificar de modo análogo aos exemplos anteriores que na divisão $\frac{15}{7} = 2 \cdot 7 + 1$, $\frac{15}{6} = 2 \cdot 6 + 3$, $\frac{15}{5} = 3 \cdot 5$, $\frac{15}{4} = 3 \cdot 4 + 3$ e $\frac{15}{3} = 5$ e $\frac{15}{2} = 7 \cdot 2 + 1$. Na operação de divisão, no caso da divisão exata, $15 = 5 \cdot 3$ e $15 = 3 \cdot 5$ e é preciso sempre observar que dados os números a, b e c , com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ ocorre duas soluções para a divisão, ou seja, $\frac{a}{b} = c$ e $\frac{a}{c} = b$, neste caso $a = b \cdot c$. O mesmo não ocorre nas divisões não exatas. Repare o o divisor trata-se de um quadrado perfeito.

5.1.1 Produto Notáveis

A abordagem do conteúdo de Produtos Notáveis deve ser feita em razão de atender item b e c da atividade 5 apresentada na sequência didática acima. Apresentando de várias formas, afim de facilitar a compreensão e apropriação por parte dos aluno.

5.1.1.1 Quadrado da soma de dois termos

Considere a expressão $(x + a)^2$, que representa o quadrado da soma de dois termos.

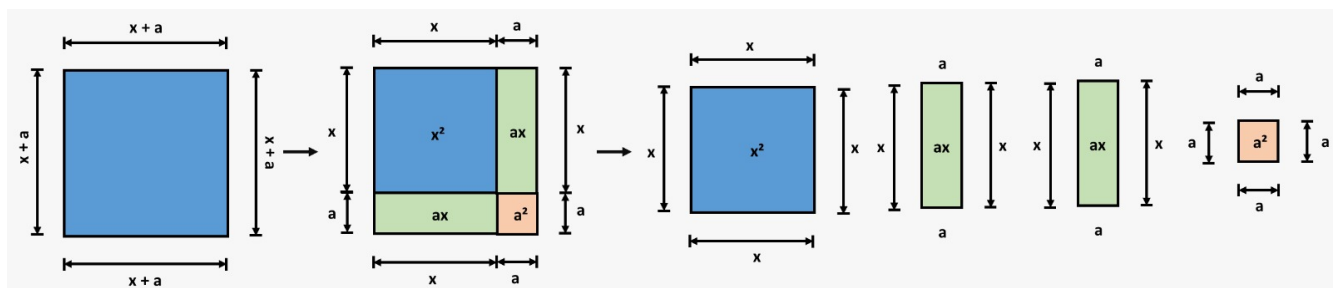
I – Pela definição de potências temos que:

$$(x+a)^2 = (x+a) \cdot (x+a) = x \cdot (x+a) + a \cdot (x+a) = x^2 + a \cdot x + x \cdot a + a^2 \rightarrow x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a^2.$$

Assim $(x + a)^2 = x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a^2$, o pode ser interpretado como sendo o quadrado do primeiro termo, adicionado ao dobro do primeiro termo, multiplicado pelo segundo termo, adicionado ao quadrado do segundo termo.

II – Geometricamente, temos o mesmo resultado: Considere um quadrado cuja medida do lado seja $x + a$, conforme figura:

Figura 56 – Sequência I



O quadrado de lado $x + a$ foi dividido conforme a figura, em dois quadrados menores de lado x e lado a , e em dois retângulos de lados x e a . Determinando a área de cada um

dos quadrados e retângulos temos que a área total do quadrado de lado $x + a$ pela soma das áreas individuais, assim temos que $(x + a)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2$.

Dessa forma tanto algebricamente como geometricamente temos que $(x + a)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2$.

5.1.1.2 Quadrado da diferença de dois termos

Considere a expressão $(x - a)^2$, que representa o quadrado da diferença de dois termos.

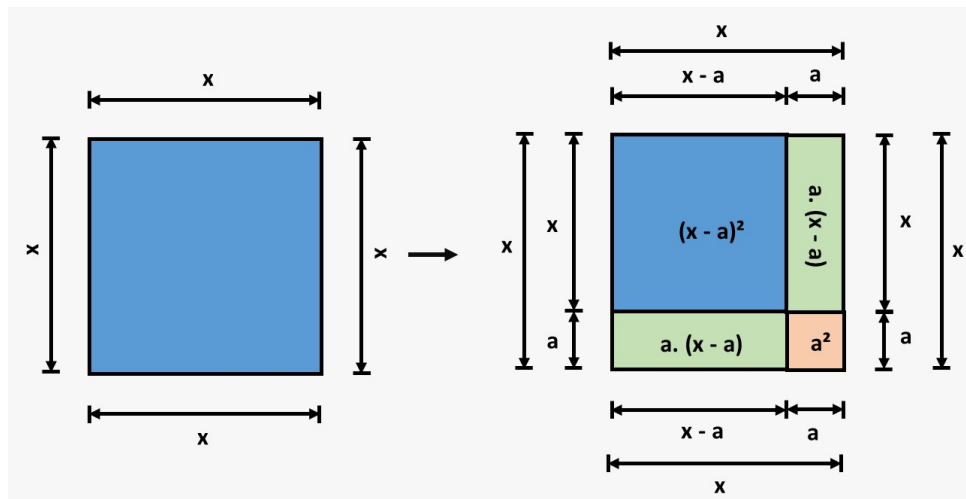
I– Pela definição de potências temos que:

$$(x - a)^2 = (x - a) \cdot (x - a) = x \cdot (x - a) - a \cdot (x - a) = x^2 - x \cdot a - a \cdot x + (-a)^2 \rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2.$$

Assim $(x - a)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2$, o pode ser interpretado como sendo o quadrado do primeiro termo, subtraído ao dobro do primeiro termo, multiplicado pelo segundo termo, adicionado ao quadrado do segundo termo.

II– Geometricamente, temos o mesmo resultado: Considere um quadrado cuja medida do lado seja x , conforme figura:

Figura 57 – Sequência II



O quadrado de lado x foi dividido conforme a figura, em que $x \geq a$, a divisão resultou em dois quadrados menores de lado $x - a$ e lado a , e em dois retângulos de lados $x - a$ e a . Como queremos a área do quadrado de lado $x - a$, temos que subtrair a do quadrado de lado x a área dos dois retângulos e a área do quadrado de lado x , ou seja, $x^2 - 2 \cdot a(x - a) - a^2 = x^2 - 2xa + a^2$.

Dessa forma tanto algebricamente como geometricamente temos que $x^2 - 2 \cdot a(x - a) - a^2 = x^2 - 2xa + a^2$.

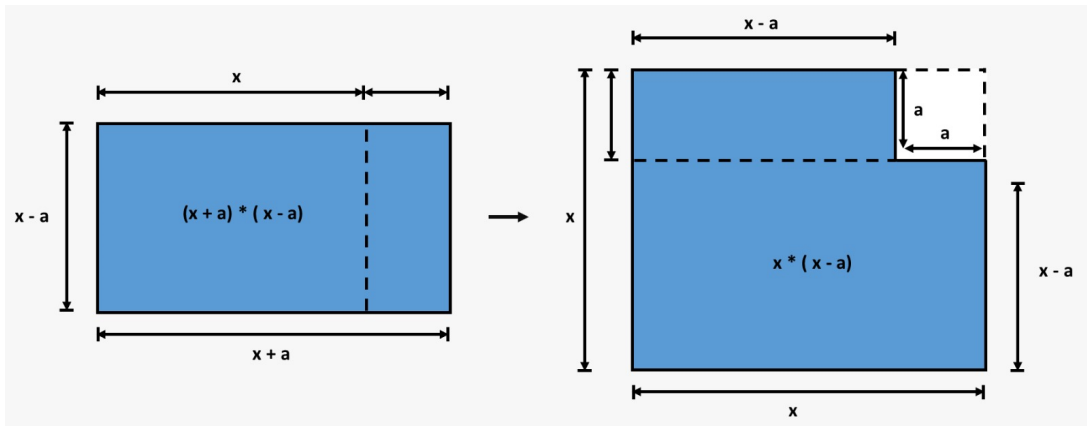
5.1.1.3 Produto da Soma Pela Diferença de dois Termos

Considere a expressão $(x + a)(x - a)$, que representa o produto da soma de dois termos pela diferença entre os mesmos termos.

I– Fazendo o produto temos $(x - a) \cdot (x + a) = x^2 - xa + xa - a^2 = x^2 - a^2 =$.

II– Geometricamente, temos o mesmo resultado: Considere um retângulo de lados seja $x + a$ e $x - a$, conforme a primeira figura:

Figura 58 – Sequência III



Recortando o primeiro retângulo no tracejado e construindo a segunda figura. Observa-se que a área do retângulo da primeira figura é dada por $(x + a)(x - a)$ e a área da segunda figura é dada por $(x - a)a + x(x - a) = xa - a^2 + x^2 - xa = x^2 - a^2$. Como as áreas de ambas as figuras são iguais, temos a igualdade $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

Dessa forma tanto algebricamente como geometricamente temos que $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

5.1.2 Polígonos

Sendo n pontos distintos ($n \geq 3$), no plano, ordenados $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$, em que três pontos não são necessariamente colineares, no entanto A_n e A_1 devem ser consecutivos, denomina-se polígonos a união dos n segmentos com extremidades em dois pontos consecutivos.

Os polígonos podem ser simples ou convexo.

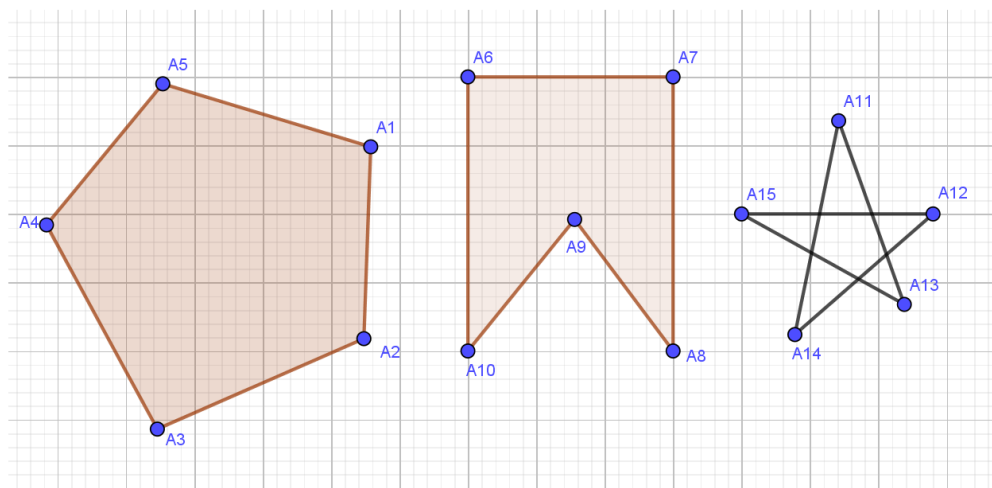
Definição 5.1.7. *Os polígonos que não tem intersecção entre os lados não consecutivos são ditos simples.*

Observe que todas as figuras 59 apresentadas são polígonos ($n = 5$).

A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são vértices.

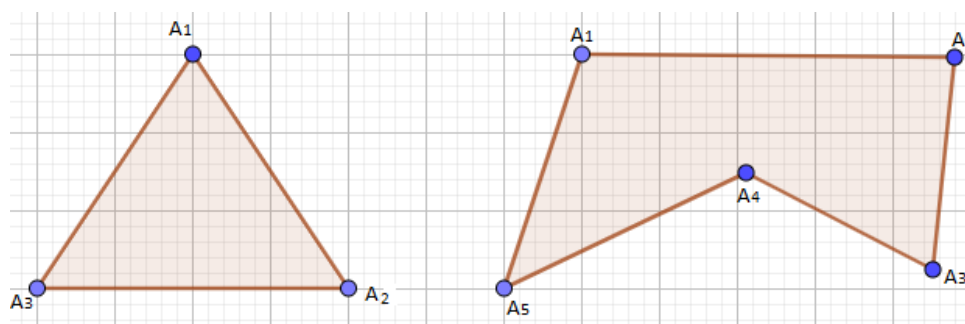
$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ e A_5A_1 são lados.

Figura 59 – Polígonos IV



Definição 5.1.8. Os polígonos simples em que toda reta que passa por dois vértices consecutivos deixar todos os outros vértices num mesmo semiplano são chamados de polígonos convexos. O conjunto do pontos internos do polígono é formado pela intersecção de todos os semiplanos assim definidos.

Figura 60 – Polígonos Simples



Os polígonos tem nomes específicos, de acordo com o número de vértices que possuem. Assim conforme tabela 1 temos:

5.1.2.1 Polígonos regulares

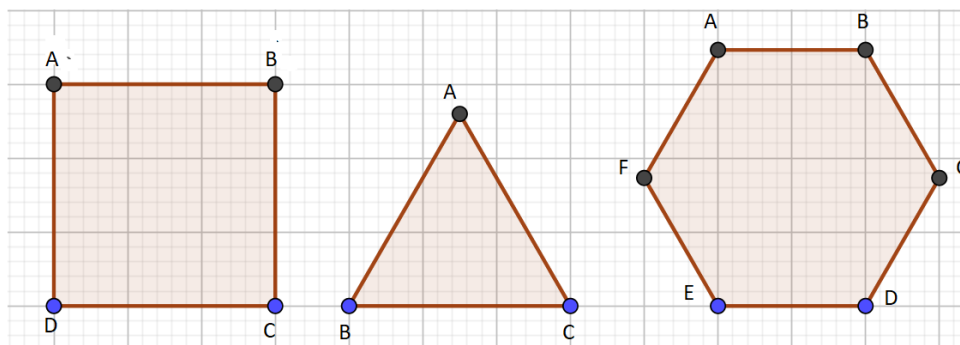
Um polígono convexo é regular se e só se for equilátero (lados congruentes) e equiângulo (ângulos congruentes).

Tabela 3 – Nomeclatura dos Polígonos

Número de lados	Nome do Polígono
3 lados	Triângulo
4 lados	quadrilátero
5 lados	pentágono
6 lados	hexágono
7 lados	heptágono
8 lados	octógono
9 lados	eneágono
10 lados	decágono
11 lados	undecágono
12 lados	dodecágono
13 lados	tridecágono
14 lados	tetradecágono
15lados	pentadecágono
16lados	hexadecágono
17 lados	heptadecágono
18lados	octadecágono
19 lados	eneadecágono
20lados	icoságono
30lados	polígono de 30 lados

Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 61 – Polígonos regulares



Na figura acima 61 são apresentados o quadrado, o triângulo retângulo e o hexágono, todos esses polígonos são regulares, pois são todos equiláteros e equiângulos.

Observação: É importante ressaltar que nem todo polígono equilátero é equiângulo, e vice-versa. A exemplo disso, temos o retângulo e o losango.

5.2 O uso do Geogebra como Ferramenta de Ensino

De acordo com a (BNCC, 2018) o desenvolvimento tecnológico marcado fortemente a vida das pessoas na modernidade, verifica-se um crescente uso da tanto computação, quanto

das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), em que o conhecimento da humanidade tem se armazenado de forma digital. Essas transformações impactam intensamente a formações das novas gerações. Nesse sentido, conforme (BNCC, 2018)

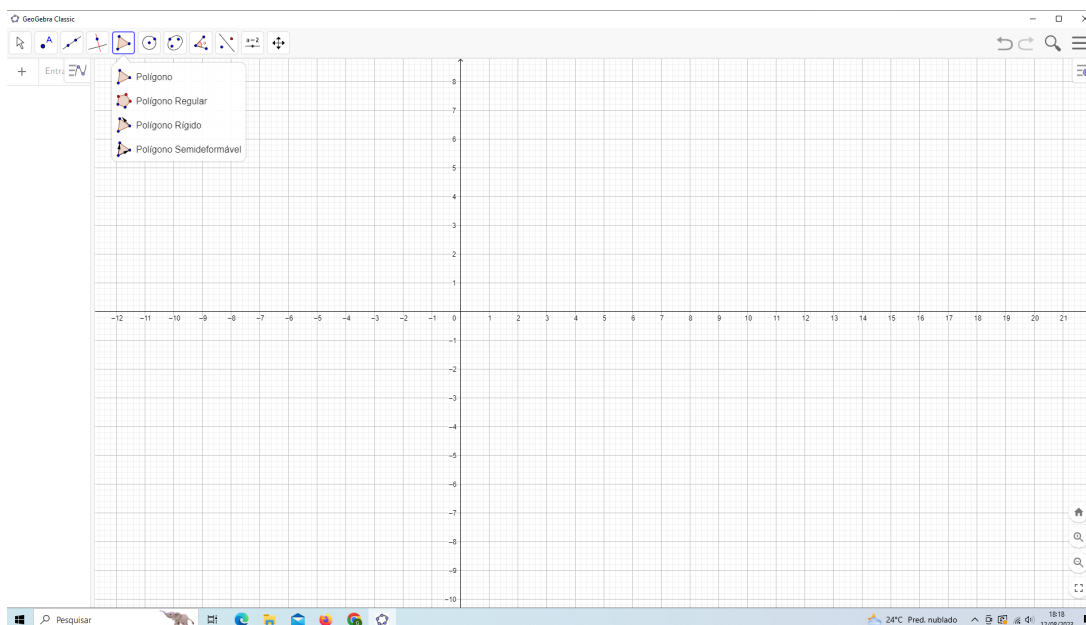
É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse sentido(BRASIL, 2001,p.15) os softwares educacionais são apontados como recurso pedagógico, em que o professor ao escolhe-lo não perca de vista os objetivos da aprendizagem e do conhecimento.

Dessa forma, conforme estudo realizado nas aulas de Recursos Computacionais o software Geogebra pode ser utilizado como ferramenta de aprendizagem, por se tratar de um software matemático de fácil acesso, que pode contribuir para os estudo de Geometria e para realização de alguns dos problemas propostos nessa sequencia didática.

5.2.0.1 Construindo Polígonos

Figura 62 – Ferramenta 1

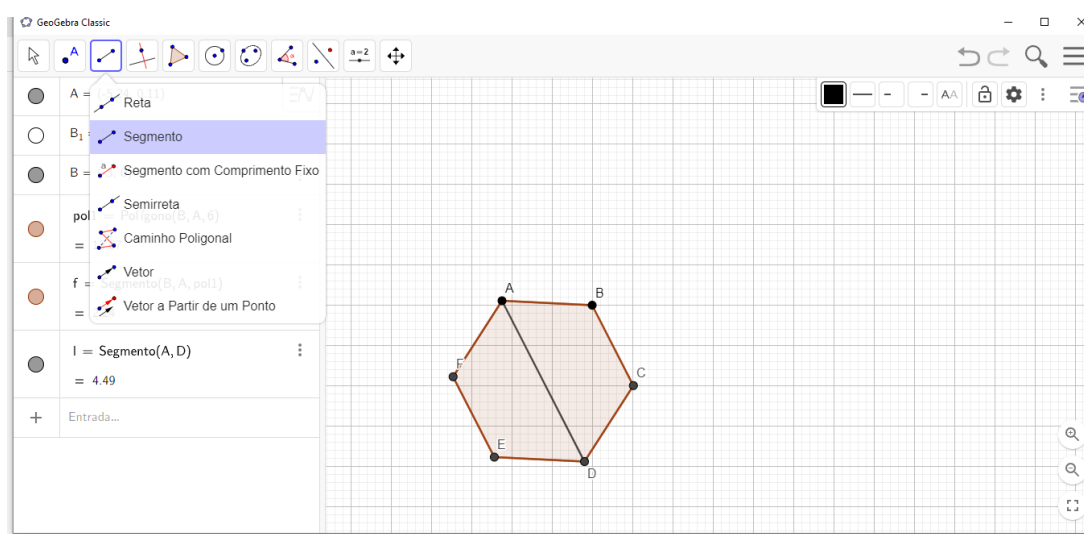


Conforme apresentado na figura 62 destacada de Lilás, podemos construir um polígono no software Geogebra de 4 formas, utilizando a opção polígono, polígono regular, polígono rígido e polígono deformável. Na opção polígono, inicialmente ,inserimos os pontos (vértices), e após selecionar a ferramenta polígonos, clicando nos vértices obteremos o polígono desejado. Na opção polígono regular, após inserir dois pontos, clicamos neles e

informamos o número de lados do polígono e automaticamente o polígono se apresentará. Na opção polígono rígido devemos selecionar todos os vértices e, então clique no primeiro vértice novamente (ou apenas clique sobre um polígono para fazer uma cópia rígida). Na opção polígono deformável inserimos em todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial.

5.2.0.2 Traçando Diagonais

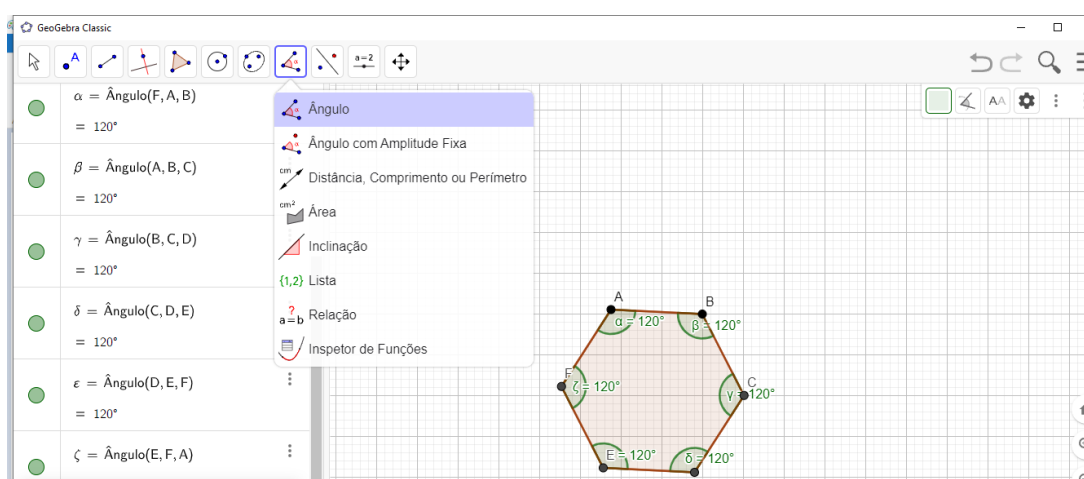
Figura 63 – Ferramenta 2



A ferramenta indicada de lilás na figura 63, permite traçarmos retas, segmento de retas, semi-retas, caminho Poligonal e vetores. No caso do segmento de reta, basta selecionar a opção e clicar em cima dos pontos onde deseja-se o segmento, assim é possível traçar diagonais em um polígono e também triangular-los.

5.2.0.3 Medindo ângulos

Figura 64 – Ferramenta 3



Na ferramenta indicada de lilás na figura 64 é possível medir ângulo, distância, comprimento ou perímetro, área, inclinação, lista, relação e inspetor de funções.

Para trabalharmos ângulos de forma mais dinâmica é possível utilizar o geogebra, no caso dos polígonos basta clicarmos no sentido horário em três dos vértices do polígono e os ângulos internos estarão indicados.

5.3 Considerações Finais

Ensinar Matemática não é e nunca foi tarefa fácil, dessa forma constantemente busca-se constantemente formas de intervenção para melhorar e tornar mais atrativo a aprendizagem dessa componente curricular.

Acredita-se que realização deste trabalho possibilita a aprendizagem de Análise Combinatória de forma prática, utilizando-se uma sequência didática baseada em problemas da OBMEP que abordavam a parte inicial deste assunto de forma contextualizada, permite interação entre os alunos, desenvolvimento de raciocínio e estratégias de resolução. De acordo (BNCC, 2018) espera-se que com a articulação dos diversos campos da Matemática os alunos percebam que podem utilizar dessa componente para resolver problemas, utilizando conceitos, procedimentos e resultados para encontrar soluções e entendê-las de acordo com contextos das situações.

No ensino fundamental a (BNCC, 2018) prevê o ensino de problemas de contagem, visto que, 'possibilita a ampliação da capacidade da enumeração dos elementos espaço amostral surgem com ensino de probabilidades.

A sequência didática conta 9 questões, em que o conhecimento e raciocínio dos alunos serão explorados de forma natural, utilizando o conhecimento que já possuem. As intervenções devem ser feitas somente quando os grupos de trabalho de fato não conseguirem entender ou resolver as questões.

Na aplicação desta sequência o professor poderá observar o empenho, empolgação e o raciocínio dos alunos em cada problema realizado. Haverá um espaço de discussão e participação coletiva, em que o conhecimento será formado .

Espera-se que este trabalho possa contribuir com aprendizagem e ensino de Matemática.

A perspectiva é continuar com as pesquisas e aplicações, expandido o conhecimento dos discentes, afim de prepará-los para as avaliações externas e para OBMEP.

Referências

BNCC. Base nacional comum curricular. *Brasília: MEC*, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 20, 21, 76, 77 e 79.

BRASIL, M. d. E. F. Pêns:matematica. *Brasil*, 2001,p.15. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 77.

MORGADO. Análise combinatória e probabilidade. *SBM*, 2000, p. 1. Citado na página 20.

ONUICHIC, e. a. Resolução de problemas:teoria e prática. *JundiaíPaco editorial*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. *ed. Interciencia Ltda*, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

SANTOS, P. F. Uma abordagem da análise combinatória sem o uso abusivo de fórmulas. Universidade Federal de Viçosa, 2013. Citado na página 20.