Moacir Velasco

Proposta para Ensino de Matemática com o uso do simulador interativo PhET colorado.

Vitória

2024

Moacir Velasco

Proposta para Ensino de Matemática com o uso do simulador interativo PhET colorado.

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Milton Edwin Cobo Cortez

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

V433p

Velasco, Moacir, 1983-
Proposta para Ensino de Matemática com o uso do simulador interativo PhET colorado. / Moacir Velasco. - 2024.
82 p. : il.

Orientador: Milton Edwin Cobo Cortez.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Tabelas. 2. Gráficos. 3. Imagens. I. Cortez, Milton Edwin Cobo. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"Uma Proposta para Ensino de Matemática com o uso do simulador interativo PhET"

Moacir Velasco

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 26/06/2024 por:

Prof.(a) Dr.(a) Milton Edwin Cobo Cortez
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Rosa Elvira Quispe Ccyollo
Membro Interno – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Maria Clara Schuwartz Ferreira Caliman
Membro Externo – IFES

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 27/06/2024 às 07:45:17

Folha de Assinaturas Moacir Velasco

Data e Hora de Criação: 24/06/2024 às 13:35:29

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Moacir Velasco.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 990186a6df496c4146efe8583d07304d067a35ff83cf190f002c0e3301d0e21a
[SHA512]: 421181f582a8f67e58461aff37d0e52c0a53800934ac82763cb139e3ad6a3c3b9178309facd43c9a49a72a4fe53ecd58b878e19ca0b12f545fc16fc557e3bebb

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Maria Clara Schuwartz Ferreira Caliman (mclarascferreira@gmail.com)
Data/Hora: 27/06/2024 - 07:45:17, IP: 164.163.207.172, Geolocalização: [-20.282036, -40.301334]
[SHA256]: 87acf140c671e276e47bf6e846e233fb7475a748de3113540b1ccd8d08e2d3dc

ASSINADO - Milton Edwin Cobo Cortez (milton.cortez@ufes.br)
Data/Hora: 27/06/2024 - 07:43:09, IP: 177.97.127.53, Geolocalização: [-20.283975, -40.293673]
[SHA256]: 7b903e73cefc215e73a803d0374bd5818a6ab2ba188d844ca47cdb9898fe414d

ASSINADO - Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (rosa.ccoyllo@ufes.br)
Data/Hora: 26/06/2024 - 19:37:23, IP: 200.137.65.103
[SHA256]: 7bdf491bfc8c0addf2350ae21ee44cbb6a40213be1af2ce0ffac580b3b584b6a

Histórico de eventos registrados neste envelope

27/06/2024 07:45:17 - Envelope finalizado por mclarascferreira@gmail.com, IP 164.163.207.172
27/06/2024 07:45:17 - Assinatura realizada por mclarascferreira@gmail.com, IP 164.163.207.172
27/06/2024 07:44:46 - Envelope visualizado por mclarascferreira@gmail.com, IP 164.163.207.172
27/06/2024 07:43:09 - Assinatura realizada por milton.cortez@ufes.br, IP 177.97.127.53
27/06/2024 07:42:43 - Envelope visualizado por milton.cortez@ufes.br, IP 177.97.127.53
26/06/2024 19:37:23 - Assinatura realizada por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.103
26/06/2024 19:37:09 - Envelope visualizado por rosa.ccoyllo@ufes.br, IP 200.137.65.103
26/06/2024 06:00:08 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
26/06/2024 06:00:07 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
24/06/2024 13:35:30 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.108

Dedico este trabalho à minha esposa e aos meus filhos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e aos meus pais, Sinval Velasco e Maria da Conceição Velasco por tudo que fizeram por mim. Agradeço a minha esposa Claudia Botelho, meus filhos Cícero e Francisco. Agradeço a meus amigos Alex, Gilcelia, Rose e Wellington. Agradeço a todos meus colegas de mestrado. Agradeço a todos professores do mestrado. Sou grato também ao meu orientador: Prof. Dr. Milton Edwin Cobo Cortez por toda ajuda ao longo da caminhada.

“Matemática é caminho para sucesso."

(Indicar fonte do texto)

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem alternativa para professores do ensino básico que trabalham com o ensino de matemática, utilizando um recurso da internet fornecido pela Universidade do Colorado e conhecido como o simulador PhET Colorado. O intuito é fornecer aos professores o conhecimento para a utilização deste simulador, juntamente com sugestões de como podem ser abordados alguns conceitos normalmente trabalhados no ensino fundamental e médio, por meio do simulador. As propostas incluem o ensino dos conceitos iniciais de frações, funções afins, funções quadráticas e funções trigonométricas. Para otimizar a apresentação do conteúdo pelos professores, foram desenvolvidas sequências didáticas para cada tópico, além da produção de vídeos para auxiliar na demonstração dos recursos do simulador.

Palavras-chave: Simulador PhET, Frações, Funções Afim, Funções Quadráticas, Funções trigonométricas.

Abstract

The objective of this work is to present an alternative approach for primary school teachers who work with teaching mathematics, using the Colorado PhET simulator. The aim is to provide teachers with knowledge about the simulator, along with suggestions on how some concepts normally worked on in elementary and secondary education can be approached through the use of the simulator. The proposals include teaching the initial concepts of fractions, affine functions, quadratic functions and trigonometric functions using PhET. To optimize the presentation of content by teachers, didactic sequences were developed for each topic, in addition to the production of videos to assist in demonstrating the simulator's resources.

Keywords: PhET Simulator, Fractions, Affine Functions, Quadratic Functions, Trigonometric Functions.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Divulgados os resultados do Pisa 2022 16
Figura 2 – Papiro de Rhind 19
Figura 3 – Escrita dos números usado pela sociedade egípcia e a escrita dos números usados atualmente 21
Figura 4 – Registro de Contagem feitos por nossos ancestrais na Serra da Capivara (PI) 22
Figura 5 – Representado uma fração no *PhEt* 23
Figura 6 – Representação de uma fração imprópria usando *PhEt* 23
Figura 7 – Representação de uma frações mistas usando o *PhEt* 24
Figura 8 – Representação de frações aparentes usando o *PhEt* 25
Figura 9 – Frações equivalentes 28
Figura 10 – Exemplo de fração imprópria para o aluno 28
Figura 11 – Criando frações impróprias 29
Figura 12 – Igualdade de frações 29
Figura 13 – Elaborado pelo próprio autor 30
Figura 14 – Galileu Galilei 32
Figura 15 – Renè Descartes 32
Figura 16 – Pierre de Fermat 33
Figura 17 – Isaac Newton 34
Figura 18 – Quadro Gottfried Wilhelm Leibniz 34
Figura 19 – Johann Bernolli 35
Figura 20 – Leonardo Euler 36
Figura 21 – Lejeune Direchlet 37
Figura 22 – Função constante 38
Figura 23 – Caso em que a =0 40
Figura 24 – Função identidade $y = x$ 41
Figura 25 – $f(x) = x + 2$ 41
Figura 26 – Gráfico da função $y = 2x$ 42
Figura 27 – Gráfico da função $y = -x$ 43
Figura 28 – Função quadrática 44
Figura 29 – Parábola com $a > 0$ 45
Figura 30 – Parábola com $a < 0$ 45
Figura 31 – $f(x) = x^2$ 48
Figura 32 – Borracha para destaque 48
Figura 33 – Gráfico de $y = 0.2x^2 + 0x + 0$ 49
Figura 34 – Gráfico da função $y = -2x^2 + 0x + 0$ 49
Figura 35 – Gráfico da função $y = 1x^2 + 4x + 0$ 50

Figura 36 – Gráfico da função $y = 1x^2 + 0x + 5$ . . . 51
Figura 37 – Gráfico da função $y = 1x^2 + 2x - 5$ . . . 52
Figura 38 – Gráfico da função $f(x) = \frac{(x-0)^2}{4 \times 2} + 0$ . . . 52
Figura 39 – Gráfico da função $y = \frac{(x-0)^2}{4 \times 1} + 0$ . . . 53
Figura 40 – Gráfico da função $f(x) = \frac{(x-0)^2}{4 \times 3} + 0$ . . . 54
Figura 41 – Gráfico da função $y = \frac{(x-0)^2}{4 \times (-1)} + 0$ . . . 55
Figura 42 – Gráfico da função $y = \frac{(x-0)^2}{4 \times (-2)} + 0$ . . . 55
Figura 43 – Enter Caption . . . 55
Figura 44 – Gráfico da função $f(x) = \frac{9(x-1)^2}{4 \times 2} + 0$ . . . 56
Figura 45 – Gráfico da função $y = \frac{(x-2)^2}{(4 \times 2)} + 0$ . . . 56
Figura 46 – Gráfico da função $y = \frac{(x-3)^2}{(4 \times 2)} + 0$ . . . 57
Figura 47 – Gráfico da função f(x) = $\frac{(x-0)^2}{4 \times 2} + 1$ . . . 57
Figura 48 – Gráfico da função y =$\frac{(x-0)^2}{4 \times 2} + 2$ . . . 58
Figura 49 – Corda de um arco . . . 60
Figura 50 – Jean Baptiste Joseph Fourier . . . 61
Figura 51 – Triângulo retângulo ABC . . . 63
Figura 52 – Circunferência Trigonométrica . . . 64
Figura 53 – Tabela de sinais do seno e do cosseno no círculo . . . 65
Figura 54 – Resumo dos sinais do seno e cosseno . . . 65
Figura 55 – Tangente de um arco . . . 66
Figura 56 – Sinais da tangente . . . 66
Figura 57 – Resumo do quadro de sinais da tangente . . . 67
Figura 58 – Imagem da função seno representada na circunferência trigonométrica . . . 68
Figura 59 – $f(x) = \sin(x)$ . . . 68
Figura 60 – Imagem da função cosseno representada na circunferência trigonométrica 69
Figura 61 – Gráfico da função cosseno . . . 70
Figura 62 – $f(x) = \tan(x)$ . . . 71
Figura 63 – Tour Trigonométrico . . . 71
Figura 64 – Opções de trabalho no simulador *PhEt* . . . 72
Figura 65 – $f(x) = \sin x$ . . . 73
Figura 66 – Escolha ângulos ou radianos . . . 73
Figura 67 – Circulo trigonométrico . . . 74
Figura 68 – Visão geral de uma representação . . . 75
Figura 69 – Função seno apresentada no Simulador *PhEt* . . . 75

Figura 70 – Botão com opção da função seno 76
Figura 71 – Função seno 76
Figura 72 – Variações do seno 76
Figura 73 – Cosseno de um ângulo θ 77
Figura 74 – Botão com opção da função cosseno 77
Figura 75 – $f(x) = cos(x)$ 77
Figura 76 – tangente de θ 78
Figura 77 – Botão com opção da função tan 78
Figura 78 – $f(x) = \tan(x)$ 78

Lista de tabelas

Tabela 1 – Sequência didática sobre frações 28
Tabela 2 – Sequência didática sobre função afim. 39
Tabela 3 – Sequência didática sobre função afim. 47
Tabela 4 – função seno 67
Tabela 5 – função cosseno 69
Tabela 6 – função tangente 70

Sumário

1 INTRODUÇÃO . . . 16

2 COMO SURGIU O SIMULADOR *PHET* . . . 18

3 UM POUCO DE HISTÓRIA DOS NÚMEROS . . . 19
3.1 O ensino do conceito moderno de fração . . . 21
3.1.1 Tipos de frações . . . 22
3.1.2 Fração aparente . . . 23
3.1.3 Frações equivalentes . . . 23
3.1.4 Número misto . . . 24
3.1.5 Comparação de duas frações . . . 24
3.1.6 Adição de frações . . . 25
3.1.7 Subtração de frações . . . 25
3.1.8 Multiplicação de frações . . . 26
3.1.9 Divisão de frações . . . 26
3.1.10 Ensino de Frações com simulador *PhET* . . . 26
3.1.11 Frações no cotidiano escolar . . . 26
3.1.12 A aceitação dos números racionais. . . . 27
3.2 Trabalhando o conceito de frações . . . 27

4 FUNÇÕES . . . 31
4.1 Abordagem de algumas funções . . . 31
4.2 Conceito de função: Contexto histórico . . . 31
4.3 Marco Teórico . . . 36
4.3.0.1 Função afim . . . 36
4.3.0.2 Função constante . . . 38
4.3.0.3 Trabalhando o conceito de Funções . . . 39

5 FUNÇÃO QUADRÁTICA . . . 44
5.1 Caracterizando uma função quadrática . . . 44

6 TRIGONOMETRIA . . . 59
6.1 Apanhado histórico da trigonometria . . . 59
6.2 Marco Teórico . . . 62
6.2.1 Trigonometria no triângulo . . . 62
6.2.2 Funções trigonométricas . . . 63
6.2.2.1 Seno e cosseno de um arco . . . 63

6.2.2.2 Variação do sinal de seno e de cosseno 64
6.2.2.3 Tangente de um arco 64
6.2.2.4 Variação do sinal da tangente 65
6.2.2.5 Função seno 65
6.2.2.6 Gráfico da função seno 67
6.2.2.7 Função cosseno 68
6.2.2.8 Gráfico da função cosseno 69
6.2.2.9 Função tangente 69
6.2.2.10 Gráfico da função tangente 70
6.2.2.11 Função seno usando simulador *PhEt* 74
6.2.2.12 Função cosseno usando *PhEt* 74
6.2.2.13 Função tangente usando *PhEt* 75

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 79

REFERÊNCIAS 80

APÊNDICE A – TÍTULO DO APÊNDICE 81

1 Introdução

O ensino da Matemática sempre representou um desafio. Atualmente, os professores enfrentam uma competição com diversos estímulos que disputam a atenção dos estudantes, tornando o ato de ensinar ainda mais desafiador. Com o intuito de aprimorar a qualidade da educação, os educadores têm se empenhado em diversas frentes para encontrar maneiras de enfrentar esse desafio, especialmente buscando tornar as aulas mais atrativas e estimular o interesse e engajamento dos discentes no processo educativo.

Deve-se notar, por exemplo, os últimos resultados dos estudantes brasileiros na avaliação PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, pela sua sigla em inglês). Na prova aplicada em 2022 pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o Brasil apresentou um desempenho médio de 379 pontos em matemática. A pontuação é inferior à média do Chile (412), Uruguai (409) e Peru (391). Não há diferença estatisticamente significativa entre a média brasileira, da Colômbia (383) e da Argentina (379). Dos estudantes brasileiros, 73% registraram baixo desempenho nesta disciplina (abaixo do nível 2). Esse nível é considerado pela OCDE o padrão mínimo para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania. Entre os países membros da OCDE, o percentual dos que não atingiram o nível 2 foi de 31%. Apenas 1% dos brasileiros atingiu alto desempenho em matemática (nível 5 ou superior).

Figura 1 – Divulgados os resultados do Pisa 2022

Fonte: Imagem extraída do site (TEIXERA, 2023)

Por outro lado, algumas indagações estão presentes na mente da maioria dos estudantes atualmente. Eles questionam, por exemplo, o sentido da escola tradicional diante da facilidade de acesso à informação e das diversas tecnologias que permitem a colaboração e a troca de ideias com pessoas do mundo todo. Num mundo rodeado de tecnologia, onde há uma quantidade praticamente infinita de informação disponível na internet, não faz sentido o docente trazer para a sala de aula fórmulas prontas que estão disponíveis na web e que se espera que sejam “aprendidas” utilizando métodos de repetição, nos quais o estudante se torna praticamente um autômato, apenas refazendo de forma mecânica o conteúdo abordado em sala de aula. Esses métodos centrados no professor não têm mais espaço em nossa sociedade; em vez disso, acreditamos que devemos colocar os discentes como protagonistas de sua aprendizagem.

Uma alternativa aos desafios mencionados é integrar a tecnologia ao ensino, tecnologia que já é toda familiar aos nossos educandos. O site *https://PhEt.colorado.edu/pt* traz diversos simuladores matemáticos, com uma interface amigável e interativa. Existem diversas opções para trabalhar os conteúdos do ensino fundamental, médio e superior de matemática e de outros componentes curriculares, onde o trabalho pode ser desenvolvido de forma dinâmica, facilitando a aplicação por parte dos professores dos conteúdos de forma ativa em sala de aula.

Por acreditar que, usando formas alternativas de ensino, podemos ganhar mais eficiência nas aulas, serão apresentados alguns conteúdos que são normalmente trabalhados no ensino básico. Traremos formas alternativas ao expor esses conteúdos, utilizando o simulador PhET Colorado. Deixando de lado os métodos tradicionais que são usados e recorrendo às atividades e à interface intuitiva do simulador, acreditamos que podemos ganhar mais eficiência nas aulas dessa forma. Utilizaremos tabelas com perguntas referentes ao conteúdo que serão respondidas pelos estudantes usando o simulador; acreditamos que isso ajuda na formação dos conceitos de forma mais duradoura e rápida.

2 Como surgiu o simulador *PhEt*

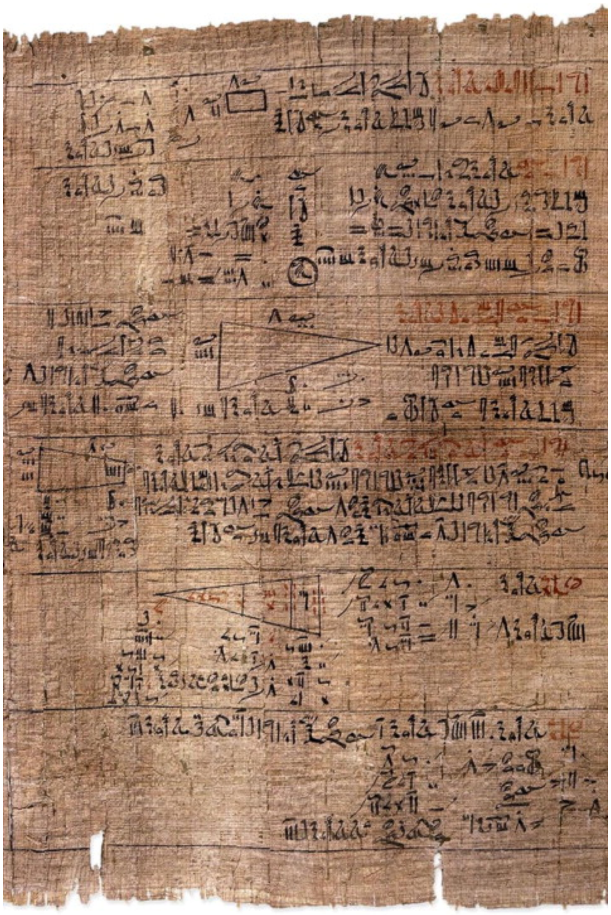
Fundado em 2002 pelo Carl Wieman, Prêmio Nobel de física em 2001, o projeto *PhEt* de Simulações Interativas da Universidade do Colorado em Boulder (Colorado, EUA), cria simulações interativas gratuitas de matemática e ciências. As Sims *PhEt* (simulações *PhEt*), baseiam-se em extensa pesquisa em educação e envolvem os alunos através de um ambiente intuitivo, estilo jogo, onde eles aprendem através da exploração e da descoberta.

3 Um pouco de história dos Números

No antigo Egito, por volta do ano 3000 a.C, o faraó *Sesóstris* distribuiu algumas terras às margens do rio Nilo para alguns agricultores privilegiados. O privilégio de possuir essas terras decorria do fato de que, anualmente no mês de julho, as águas do rio inundavam essa região ao longo de suas margens, fertilizando os campos. Essas terras, portanto, eram altamente valorizadas. Entretanto, era necessário remarcar os terrenos de cada agricultor em setembro, quando as águas baixavam. Os responsáveis por essa marcação eram os agrimensores, também conhecidos como estiradores de corda, pois mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada.

Essas cordas eram esticadas, e verificava-se quantas vezes a tal unidade de medida cabia no terreno, mas nem sempre essa medida se encaixava inteiramente nos lados do terreno.

Figura 2 – Papiro de Rhind



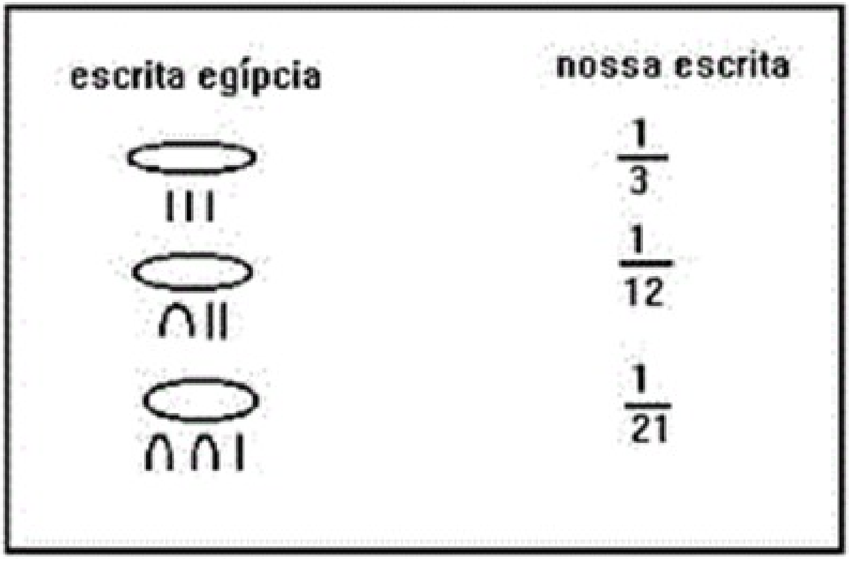
Fonte: Imagem extraída do artigo (YOUNG, 2009)

Esse problema só foi solucionado quando os egípcios introduziram um novo conceito: o número fracionário. No entanto, somente eram conhecidas as frações unitárias, ou seja, frações cujo o número que está na parte de cima é igual a 1. Porém, havia para os egípcios duas frações especiais que fugiam à regra das frações unitárias, que eram as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Os escribas tinham uma forma especial para representar as frações, eles colocavam sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. Como o número que fica na parte de cima era sempre 1, a notação era muito prática. Contudo, os cálculos eram complexos, pois no sistema de numeração utilizado no antigo Egito, os símbolos frequentemente se repetiam. Os egípcios parecem ter sido os primeiros a inserir a ideia de fração em seu sistema de numeração. Um documento histórico que evidencia o domínio dos egípcios em certos tópicos matemáticos é o famoso papiro de Rhind, também conhecido como papiro de Amósis, figura 2. Datado de 1500 a.C., este documento é na verdade uma cópia do original, cujas origens podem ser ainda mais antigas. O primeiro nome pelo qual o documento é conhecido se deve ao arqueólogo inglês Alexander Henry Rhind que, o adquiriu na cidade de Luxor em 1858 e, após sua morte, o legou ao Museu Britânico. O segundo nome se deve ao escriba que o reescreveu em hierático, por volta do século XVI a.C., a partir de textos mais antigos que, segundo Amósis, se perderam com o tempo. Devido ao estilo cuidadoso da escrita, com pouquíssimos erros, acredita-se que este fosse um manual de referência para uma escola de escribas. O papiro possui 5 metros de comprimento por 33 cm de largura e contém uma variedade de conteúdos, incluindo problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, proporções, trigonometria, equações lineares e geometria básica. Os egípcios parecem ter sido os primeiros a inserir a ideia de fração em seu sistema de numeração. No entanto, mesmo que essa afirmação seja um consenso entre os historiadores, não temos como prová-la com certeza, pois não há registros suficientes. Além disso, outras civilizações antigas já haviam inserido as ideias de fração e, mesmo sem regras estabelecidas para trabalhar com elas, esses povos já possuíam símbolos para representá-las. CONTADOR (2012) afirma que além dos egípcios, os babilônios, gregos, hindus e chineses conheciam as frações.

Algumas dessas civilizações desenvolveram posteriormente métodos muito semelhantes aos que são utilizados atualmente, como por exemplo os chineses e os hindus. Vale lembrar que tanto os chineses quanto os hindus adotavam um sistema de numeração decimal. A única diferença na hora de representar uma fração na notação chinesa em comparação com a usada hoje em dia é que eles evitavam escrever frações em que o numerador fosse maior que o denominador, como por exemplo: $\frac{11}{5}$, sendo substituído por $2\frac{1}{5}$. Segundo BERLINGOFF e GOUVÊA (2010), a regra de "inverter e multiplicar" para dividir frações foi usada pelo matemático hindu *Mahavira* por volta de 850 d.C.

Com o avanço da matemática as frações passaram a ser utilizadas com naturalidade, aparecendo em diversas situações, como nos cálculos que envolvem porcentagem, em que uma proporção ou relação é expressa por meio de uma fração cujo denominador é 100. O uso de frações também é de grande utilidade para resolver problemas que envolvem regra de três,figura 3.

Figura 3 – Escrita dos números usado pela sociedade egípcia e a escrita dos números usados atualmente



Fonte: Imagem extraída do artigo (VIANNA, 2020)

3.1 O ensino do conceito moderno de fração

Usualmente introduzimos ao aluno o conceito de número natural e inteiro e depois o conceito de número racional.

O conjunto dos números naturais, ou números de contar, é representado pela letra $\mathbb{N}$ e formado pelos elementos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Note que zero não é um número natural por definição.

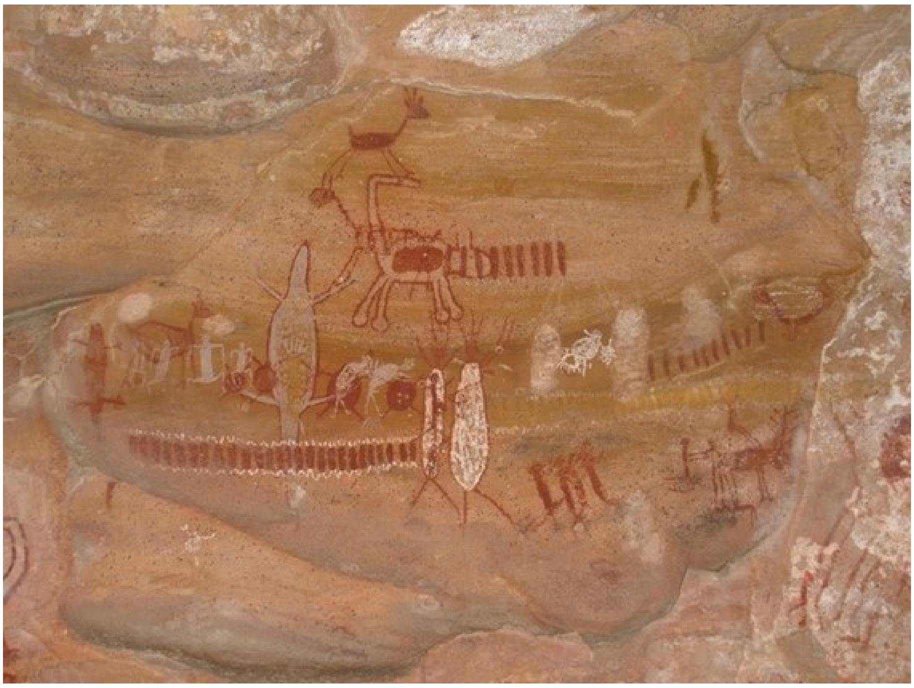
O conjunto dos números inteiros, representado pelo conjunto $\mathbb{Z}$, é formado pelos elementos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

Os números naturais $\mathbb{N}$ foram inventados ainda na pre-história, há pelo menos 20 mil anos, pois há registros de operações com eles (como nos ossos de Ishango). Já os números inteiros negativos apenas foram introduzidos na idade média na Europa, figura 4.

O conjunto dos números racionais (as frações) é formalmente definido como o conjunto de todos os quocientes entre dois números inteiros, usamos a notação:

Figura 4 – Registro de Contagem feitos por nossos ancestrais na Serra da Capivara (PI)



Fonte: Imagem extraída do site (BEZERRA, 2014)

$$\mathbb{Q} = \{p/q;\ \text{p e q} \in \mathbb{Z} \mid q \neq 0\}$$

A expressão $\frac{a}{b}$ é chamada de fração, sendo chamado de numerador quem ocupa a parte de cima, enquanto quem ocupa a parte de baixo é chamado de denominador.

$$\frac{numerador}{denominador}$$

O denominador indica em quantas partes dividimos a unidade, já o numerador indica quantas de estas partes são tomadas.

3.1.1 Tipos de frações

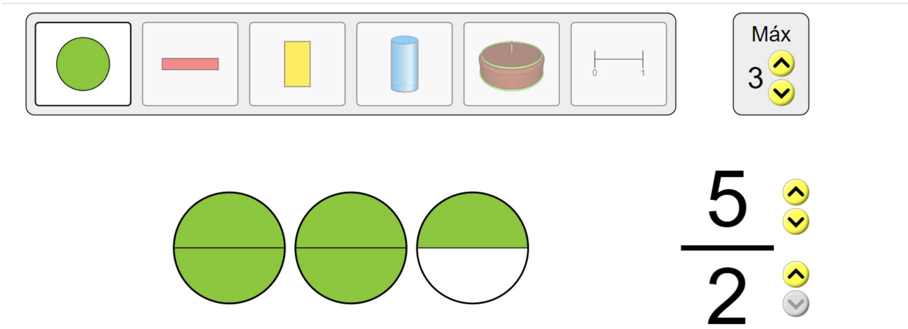
As frações podem ser consideradas como próprias ou impróprias. Uma fração, cujo numerador é menor que o denominador, é chamada de fração própria. Por sua vez, a fração em que o numerador é maior que o denominador é chamada de fração imprópria. São exemplos de frações próprias os casos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, enquanto $\frac{7}{3}$ e $\frac{5}{4}$ são casos de frações impróprias, figura 5.

Exemplo 3.1.1.

Figura 5 – Representado uma fração no *PhEt*

Fonte: figura elaborada pelo próprio autor

Figura 6 – Representação de uma fração imprópria usando *PhEt*



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor

3.1.2 Fração aparente

A fração é classificada como aparente quando a divisão entre o numerador e o denominador é igual a um número inteiro, figura 8.

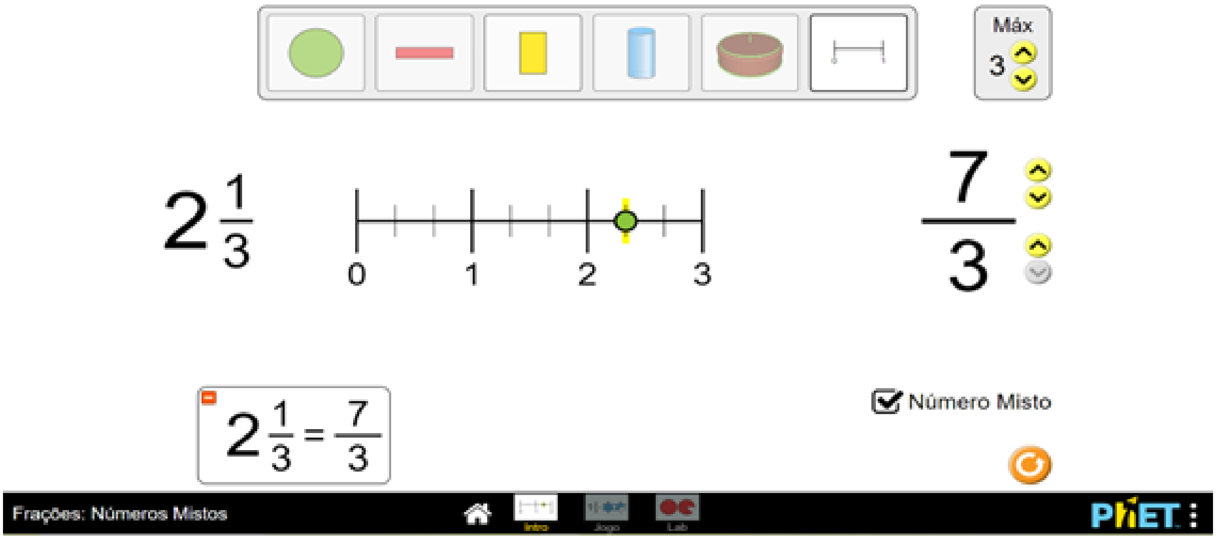
Exemplos de frações aparentes são:

$$\frac{4}{2}, \frac{9}{3}, \frac{0}{3}$$

3.1.3 Frações equivalentes

Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ que representam o mesmo número racional e são chamadas de frações equivalentes. Quando multiplicando o numerador e também o denominador de uma fração pelo conjunto dos números inteiros, teremos um conjunto de frações equivalentes a fração inicial.

Figura 7 – Representação de uma frações mistas usando o *PhEt*



Fonte: figura elaborada pelo próprio autor

Podemos introduzir o subconjunto de frações irredutíveis de $\mathbb{Q}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \{p/q; \text{p e q} \in \mathbb{Z} \mid q \neq 0, \text{p e q primos entre si}\}, \tag{3.1}$$

onde dois números p e q são primos entre si, se não têm divisores comuns, com exceção do 1. Por exemplo 5 e 9 são primos entre si, pois o único divisor comum é 1.

Na minha prática profissional, os alunos não tem dificuldade em entender o conceito de número primo mas se tem dificuldade de assimilar o conceito de número racional.

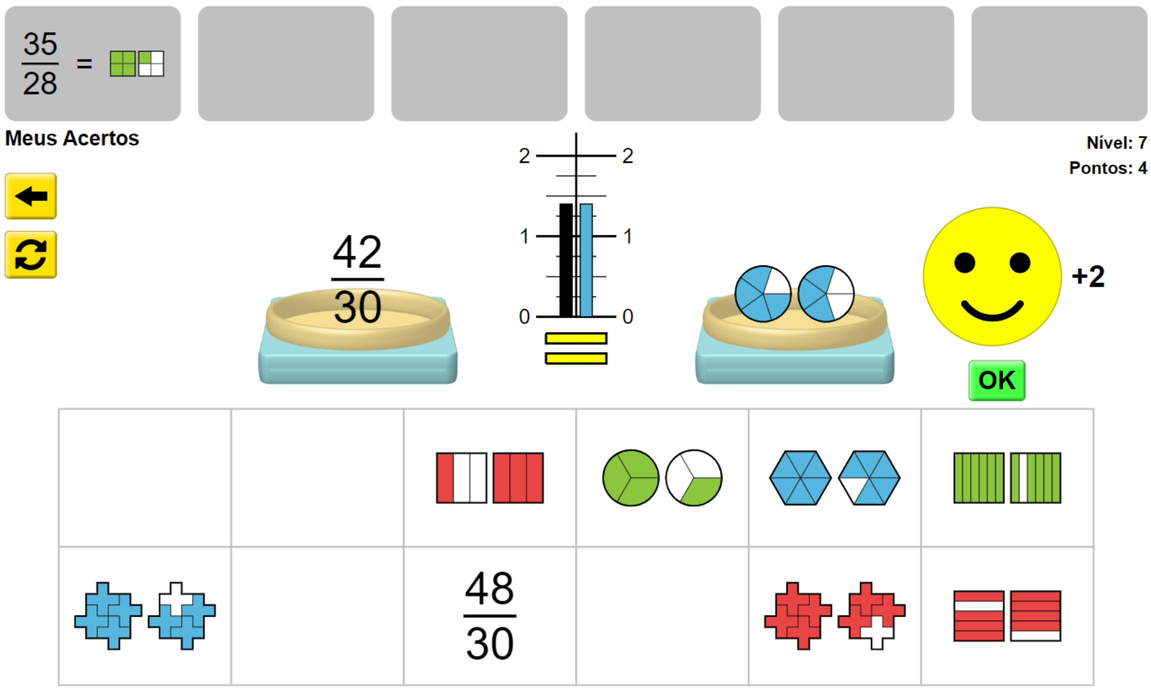
3.1.4 Número misto

Uma fração imprópria pode se transformar em uma parte inteira e uma fracionária, basta dividir o numerador pelo denominador, pegando a parte inteira, sendo o resto da divisão o novo numerador da parte fracionária. Por exemplo a fração $5/3$ é igual a $1 + 2/3$.

3.1.5 Comparação de duas frações

Se os denominadores forem iguais, a comparação é trivial, pois basta verificar os valores dos numeradores. Aquele que tiver maior valor no numerador será, de fato, a fração de maior valor. Já para frações com denominadores diferentes, é necessário encontrar um denominador comum (o mínimo múltiplo comum, MMC) para ambas as frações. Então, as frações podem ser expressas com base nesse denominador comum, facilitando a comparação. Outra forma bastante simples é converter ambas as frações para suas formas decimais e comparar os valores decimais resultantes.

Figura 8 – Representação de frações aparentes usando o *PhEt*

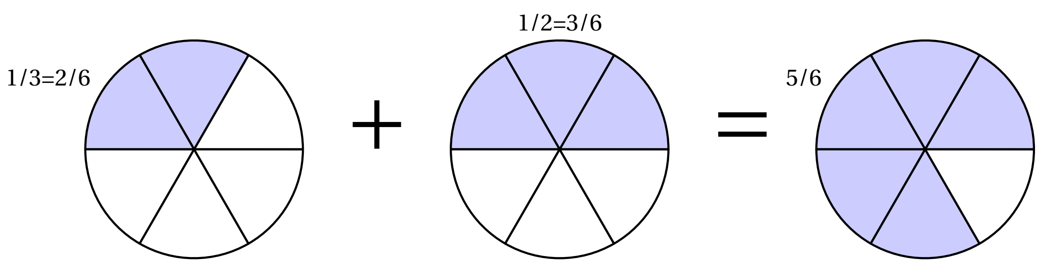


Fonte: figura elaborada pelo próprio autor

3.1.6 Adição de frações

O aluno precisa entender que para que seja possível fazer a adição de duas frações, é necessário que ambas tenham o mesmo denominador. De fato, se: a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, com b e d não nulos, temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \tag{3.2}$$



3.1.7 Subtração de frações

Na subtração,temos a necessidade de termos os denominadores idêntico, assim como na adição. Sejam a,b,c e d $\in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0, d \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \tag{3.3}$$

3.1.8 Multiplicação de frações

Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{3.4}$$

Devemos sempre fazer enfases para o aluno que fracões com denominador zero estão proibidas!

3.1.9 Divisão de frações

Seja a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \tag{3.5}$$

3.1.10 Ensino de Frações com simulador *PhET*

Agora veremos como podemos ensinar o conceito de fração usando o simulador

3.1.11 Frações no cotidiano escolar

Um número é uma medida. De forma mais precisa, um número é um objeto abstrato usado para descrever uma quantidade, uma ordem ou medida. O conceito de número natural provavelmente foi um dos primeiros conceitos matemáticos assimilados pela humanidade no processo de contagem.

É amplamente aceito que os números surgiram há mais de 30 mil anos (ainda no período *paleolítico* ou idade da pedra), quando as pessoas precisavam contar objetos e animais. Ao sentirem a necessidade de registrar suas caças ou pescarias, homens e mulheres primitivos desenhavam animais nas paredes para representar suas quantidades. Com o passar do tempo, à medida que as pessoas passaram a viver em grupos maiores, ou seja, tribos, cada uma desenvolveu seus próprios métodos de contagem. Portanto, os números não foram inventados por uma única pessoa, mas sim por diversos povos. À medida que as aldeias se transformaram em cidades e estas em impérios, o comércio entre os povos cresceu, demandando registros mais precisos. Podemos citar as contribuições para a evolução dos números pelas civilizações da Babilônia, Roma, Hindus e árabes.

3.1.12 A aceitação dos números racionais.

O ensino do conceito de número racional oferece uma certa resistência, principalmente o ensino das operações com estes números. O uso de frações não é muito comum em cálculos cotidianos dos alunos das primeiras séries. Esses fatores, juntamente com o ensino tradicional que valoriza a memorização de métodos e algoritmos em detrimento de uma aprendizagem reflexiva e duradoura, dificultam ainda mais a compreensão.

O uso de formas mais modernas de ensinar o conceito de frações torna-se uma necessidade. Assim, o simulador *PhEt* apresenta alguns recursos interessantes, podendo ser uma ferramenta que muito pode contribuir para o ensino de frações. Para a utilização do simulador, a sugestão é que sejam usadas sequências didáticas com perguntas para direcionar o aprendizado, criando um ambiente investigativo com uma participação ativa por parte do discente na construção de seu conhecimento.

Sugiro ainda que as atividades sejam realizadas individualmente ou no máximo em dupla. Além dos exercícios e desafios propostos pelo simulador para termos um controle melhor da efetividade da aprendizagem, outra sugestão é que, antes de apresentar a plataforma, os conceitos que serão desenvolvidos sejam acompanhados de um questionário para direcionar o ensino, garantindo sempre a participação de todos. O professor deve manter um olhar atento para a turma, evitando distrações por parte dos estudantes, pois ao possuírem um computador e acesso à internet, é comum que os educandos acessem sites que não são os propostos pelo professor.

3.2 Trabalhando o conceito de frações

Inicialmente, será proposto um questionário como o modelo apresentado na tabela-1.

Em relação ao questionário apresentado na Tabela 1, podemos utilizar o simulador para manipular as figuras geométricas, o que ajuda na percepção do significado e na consolidação do conceito de numerador e denominador, ou seja, as perguntas 1 e 2 do questionário.

A seguinte tabela refere-se à simulação contida no link: <https://phet.colorado.edu/sims/html/fractions-equality/latest/fractions-equality_all.html?locale=pt>

Outra situação que pode ser explorada é a capacidade do simulador de construir frações impróprias, bastando para isso pressionar a seta pintada de amarelo, localizada no canto direito de uma caixa com o título “Máx”. Isso permite aumentar ou diminuir a quantidade de figuras, auxiliando assim na construção do conceito de frações impróprias, figura 11.

Tabela 1 – Sequência didática sobre frações

QUESTIONÁRIO DE FRAÇÕES
Aluno:
1 - "O número que fica na parte de cima da fração, ao qual chamamos de numerador, quando alterado, influencia no tamanho das partes da figura geométrica que está representando a fração que você escolheu?
2 - O número que fica na parte de baixa da fração, ao qual chamamos de denominador, quando alterado, influencia na figura geométrica que está representando a fração escolhida? Se a resposta for sim, de que forma isso acontece?
3 -Podemos ter o numerador maior que o denominador?
4 - Caso o numerador seja maior que o denominador da fração, como fica a figura geométrica que representa essa fração?
5 - Construa cinco pares de figuras geométricas que representem frações equivalentes.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

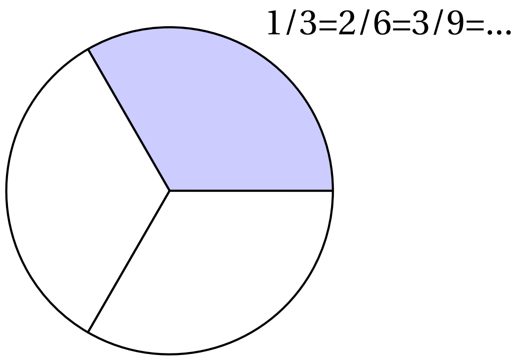


Figura 9 – Frações equivalentes

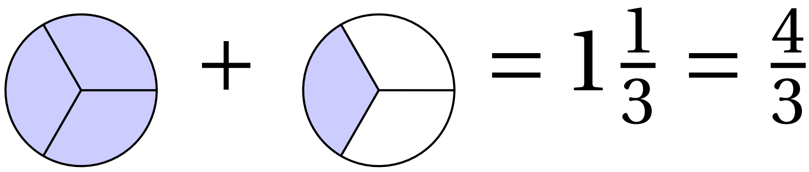
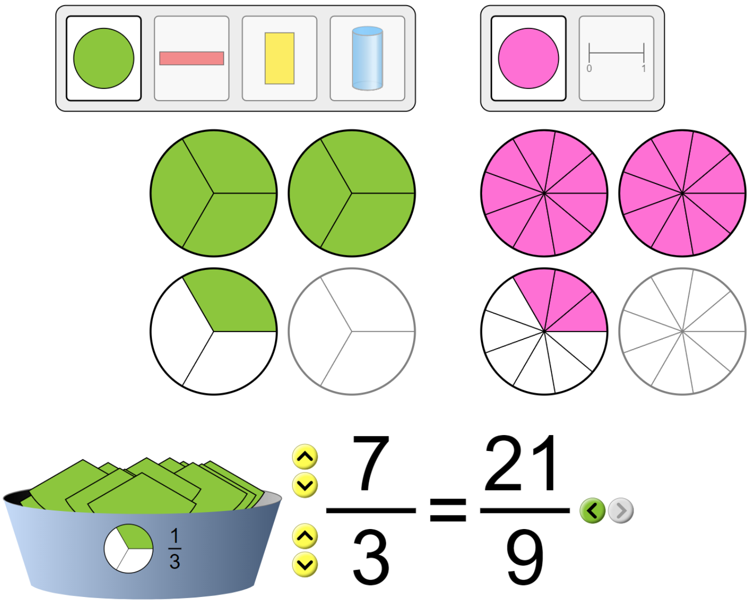


Figura 10 – Exemplo de fração imprópria para o aluno

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

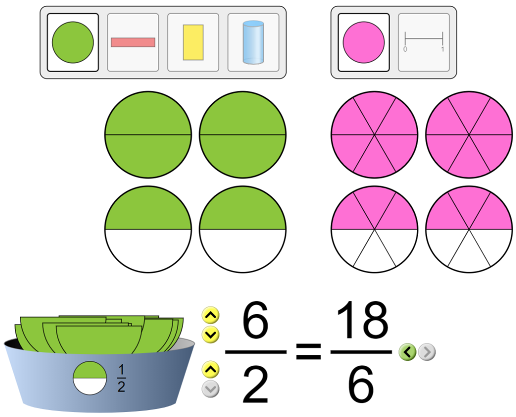
Figura 11 – Criando frações impróprias



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Há também a situação a ser explorada, que é a possibilidade de criarmos frações equivalentes, bastando acessar a janela que trata da igualdade de frações, figura 12. Nesta janela, é possível visualizar duas colunas de figuras colocadas lado a lado, e abaixo dessas colunas, suas respectivas frações. Essas frações podem ter seus valores alterados, bastando para isso manipular as setas amarelas. Dessa forma, é possível aumentar ou diminuir tanto o numerador quanto o denominador das frações referentes às figuras que aparecem na imagem. O objetivo é construir no aluno a ideia de fração equivalente, a qual está representada nas figuras abaixo:

Figura 12 – Igualdade de frações



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Ainda dentro do recurso que trata da igualdade de frações, é possível abordar o conceito na forma de um jogo. Dessa maneira, o estudante terá a sensação de estar se divertindo enquanto aprende. Para isso, basta abrir a janela mostrada na figura abaixo:

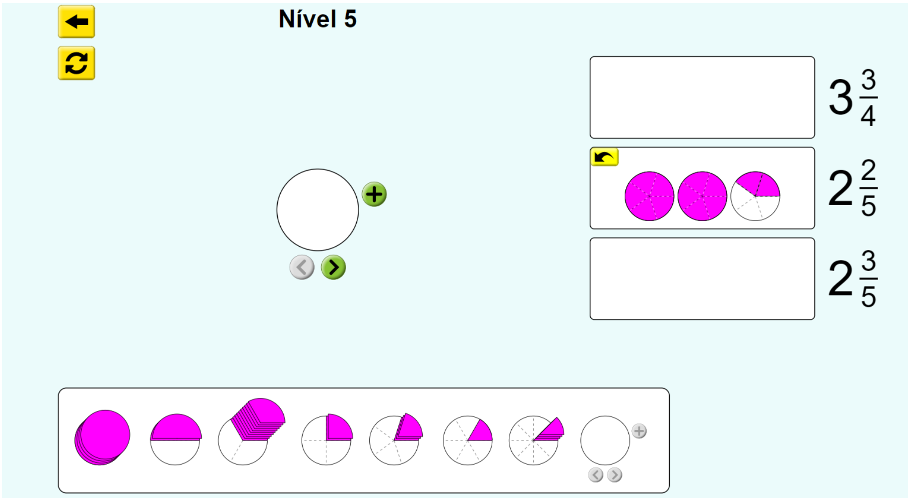


Figura 13 – Elaborado pelo próprio autor

Bem, não custa lembrar que esses recursos podem e devem ser complementados com outras abordagens metodológicas, como, por exemplo, listas de exercícios, exemplos práticos de aplicações, etc.

4 Funções

4.1 Abordagem de algumas funções

Nesta seção abordamos o ensino de algumas funções elementares como as funções do primeiro grau (linear), as funções do segundo grau e as funções trigonométricas. A escolha dessas funções se deve ao fato de que são estudadas ao longo do ensino médio e podem ser ensinadas utilizando o *PhEt*.

4.2 Conceito de função: Contexto histórico

As funções estão presentes em quase todas as áreas do conhecimento. Elas podem ser representadas atualmente na forma de tabelas, gráficos e fórmulas. No entanto, nem sempre foi assim. O conceito de função, tal como o conhecemos hoje, começou a ser desenvolvido após a Idade Média, com a contribuição de diversos matemáticos. Vamos falar brevemente sobre alguns deles.

François Viète (1540 – 1603) nasceu na cidade de Fontenay-le-Comte, na França, e contribuiu com a criação da álgebra simbólica, ou seja, o cálculo literal. Antes de Viète, as expressões que conhecemos hoje como x, x^2 e x^3 eram escritas como A, A quadratum e A cubum. Outra grande contribuição foi dada por Galileu Galilei (1564 – 1642), nascido na cidade de Pisa, na Itália. Galileu foi astrônomo, físico e engenheiro, figura 14. Entre outras coisas, estudou corpos em queda livre e, para obter seus resultados teóricos ele realizou experimentos cuidadosamente planejados, uma abordagem inédita até então. Além disso, fez uso de variáveis, as quais normalmente possuíam uma relação de dependência umas com as outras. Galileu foi responsável, não somente pelo avanço da matemática e a física, mas sua obra contribuiu para o avanço da ciência moderna como um todo. Segundo Azcárate e Deulofeu (1996), Galileu fez seu estudo usando medidas obtidas por instrumentos e tabulando estes valores de tal forma que suas leis foram relacionadas formando verdadeiras relações funcionais (DICASDECALCULO,).

René Descartes (1596 – 1650), filósofo, cientista e matemático francês, nasceu na cidade de La Haye, uma pequena cidade do distrito de Touraine, hoje chamada La Haye-Descartes em sua homenagem, figura 15. Em matemática, seu trabalho contribuiu significativamente para a geometria analítica, introduzindo o sistema de coordenadas cartesianas que possibilitou a algebrização da geometria. Com o sistema cartesiano, as ideias de x e y e a possibilidade de representar geometricamente uma função tornaram-se realidade.

Pierre de Fermat (1601 – 1665), nascido na primeira década do século XVII, na cidade

Figura 14 – Galileu Galilei

Fonte: Extraído do site (DICASDECALCULO,)

Figura 15 – Renè Descartes

Fonte: Extraído do site (DICASDECALCULO,)

de Beaumont-de-Lomagne, na França, figura 16 trabalhou na consolidação das ideias da geometria analítica iniciadas por Descartes. A descrição da geometria analítica de Fermat era muito mais sistemática e didática do que a apresentada por Descartes. A combinação das ideias de Descartes e Fermat permitiu a criação do *plano cartesiano* (DICASDECALCULO,)

Fermat também ficou muito conhecido pela sua famosa conjectura sobre a equação $x^n + y^n = z^n$. Ele conjecturou que esta equação não tinha soluções inteiras x, y, z para $n \geq 3$. Ele afirmou, em 1637, que tinha uma prova maravilhosa deste fato, mas que não revelou.

Nenhuma prova foi achada em mais de 300 anos. Finalmente esta conjectura foi provada em 1995 pelo matemático Andrew Wiles.

Figura 16 – Pierre de Fermat

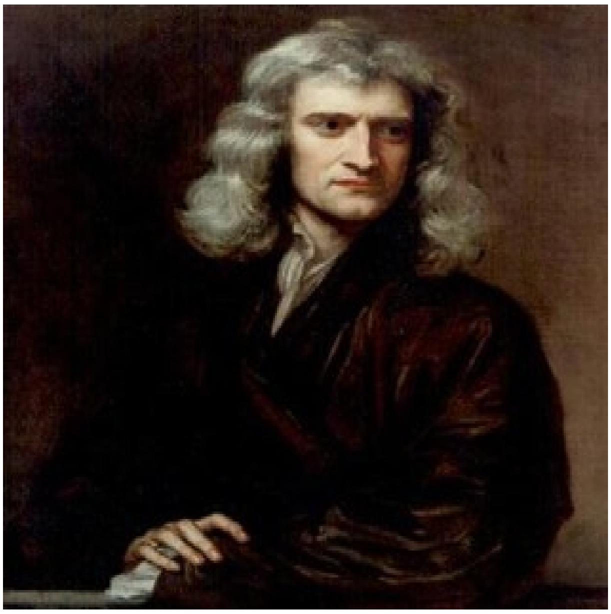
Fonte: Extraído do site (DICASDECALCULO,)

Isaac Newton (1643 – 1727), nascido na cidade de Woolsthorpe, em Lincolnshire, na Inglaterra, foi um notável físico e matemático que se dedicou ao estudo da cinemática e contribuiu para o conceito de função. Ele foi responsável por introduzir o termo "variável independente". Também desenvolveu o chamado método das fluxões, que consiste em traçar uma reta tangente a um ponto de uma curva dada. A equação obedece a lei dada por $f(x, y) = 0$ onde x e y são variáveis que que "fluem" com o passar do tempo, por isso o nome de fluentes. Suas velocidades, chamadas de fluxões.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), nascido na cidade de Leipzig, na atual Alemanha foi um filósofo e matemático, figura 18. A ele se deve o termo "função" para representar grandezas que possuíam pontos dependentes uns dos outros. Leibniz também foi o primeiro a usar o termo "parâmetro" (BLANCO, 2010).

Johann Bernoulli (1667 – 1748), nascido na cidade de Basileia, Suíça, foi um matemático que também fez contribuições na química e física. Em 1698, publicou um artigo que possibilitou a popularização da palavra "função". No entanto, para Bernoulli, a palavra "função" era empregada para denominar a solução de um problema, composto por uma variável e uma constante. Portanto, na época, a palavra "função" não tinha o mesmo sentido que usamos hoje em dia.(DICASDECALCULO,)

Figura 17 – Isaac Newton



Fonte: Extraído do site (DICASDECALCULO,)

Figura 18 – Quadro Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: Imagem extraída do site Tresando (BLANCO, 2010)

Leonhard Euler (1707-1783), nascido na cidade de Basileia, Suíça, foi um matemático e cientista muito famoso por suas importantes descobertas em várias áreas da matemática. Em sua obra, chamada "Introdução à Análise Infinitesimal", escrita no século XVIII, ele abordou o conceito de função, considerando que uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta por tal quantidade e números ou quantidades constantes. Assim, as representações de funções passam a ser dadas por fórmulas matemáticas. Nessa mesma obra, ele introduziu a notação $f(x)$ para representar uma função. Dessa forma, ao invés de

Figura 19 – Johann Bernolli

Fonte: Extraído do site (DICASDECALCULO,)

representar uma função por uma letra como:

$$y = 2x - 2$$

ele representa como

$$f(x) = 2x - 2$$

Euler não apresentou uma definição formal sobre o que seria uma expressão analítica; no entanto, tentou atribuir significado, indicando que tais expressões envolviam as quatro operações fundamentais, raízes, exponenciais e logaritmos. É importante salientar que, no entanto, Euler não foi o responsável pela origem do conceito de função; ele simplesmente tratou o cálculo como a teoria formal de funções.(BEZERRA, 2014)

Somente com Dirichlet, o conceito de funções como usamos hoje foi finalmente apresentado, figura 21. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), nascido em Düren, na Alemanha, foi um matemático que teve uma atuação relevante na teoria dos números. No campo da análise, também teve uma atuação marcante, aperfeiçoando o conceito de função e tornando-o idêntico ao que conhecemos hoje. Definição: Chama-se função toda correspondência f que associa a cada valor da variável x de um conjunto X a um único valor da variável y em um conjunto Y.(DICASDECALCULO,)

Notação

Figura 20 – Leonardo Euler

Fonte: Extraído do site (DICASDECALCULO,)

$$f: X \to Y \tag{4.1}$$

$$x \mapsto y \tag{4.2}$$

O conjunto X é chamado de domínio da função f, e Y é o contradomínio. O conjunto X é chamado de domínio da função f, e Y é o contradomínio. A letra x representa a variável independente e y, a variável dependente. O valor y é chamado de imagem de x pela função f, que é denotada por

$$y = f(x). \tag{4.3}$$

O conjunto

$$Im(f) = f(x); x \in X \tag{4.4}$$

é chamado imagem da função f. Denotamos o domínio de f por Dom(f).

4.3 Marco Teórico

4.3.0.1 Função afim

Nesta seção, apresentaremos uma proposta de ensino de funções, começando com a função afim. A função afim é normalmente apresentada ao estudante no 9º ano do ensino fundamental e retomada no primeiro ano do ensino médio.

Figura 21 – Lejeune Direchlet

Fonte: Extraído do site (DICASDECALCULO,)

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função afim quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax+b) \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b$$

O conjunto de todos os valores $f(x)$ da função, como $x \in \mathbb{R}$, são *Imagem da função f* e denotado $Im(f)$:

$$Im(f) := \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Embora não seja absolutamente necessário demonstra-lo para os alunos em sala de aula, podemos afirmar que o conjunto imagem da função afim é a reta toda se o coeficiente a não for zero. De fato, como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax + b$ para números reais a, b com $a \neq 0$, dado qualquer número $y \in \mathbb{R}$ então $y \in Im(f)$. Para isso tomamos $x = \dfrac{y-b}{a}$ e verificamos que

$$f(x) = f\Big(\frac{(y-b)}{a}\Big) + b = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y \tag{4.5}$$

Coeficiente da função afim

O coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ é denominado *taxa de crescimento, coeficiente angular* ou ainda *declividade da reta* representada no plano cartesiano. Já o termo b é chamado *coeficiente linear*.
Um *zero* da função afim é todo número $x \in \mathbb{R}$ cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$.

Assim, para determinarmos o zero da função , basta resolver a equação do 1º grau:

$$ax + b = 0$$

que apresenta uma única solução

$$x = -\frac{b}{a},$$

onde $a \in \mathbb{R}$ não deve ser nulo!

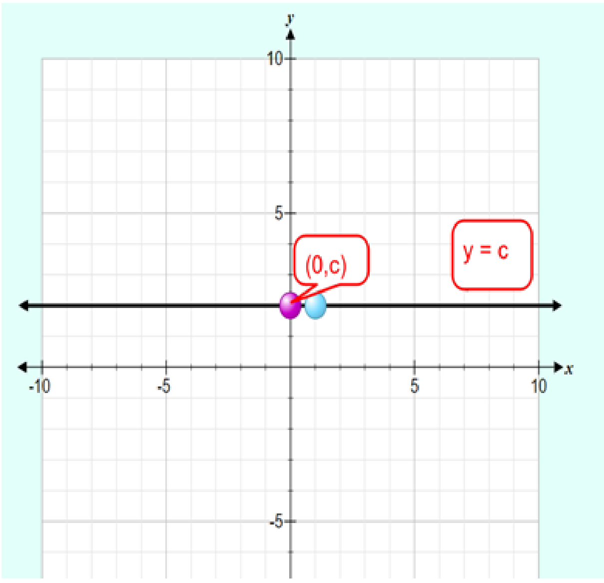
4.3.0.2 Função constante

Um caso particular da função afim ocorre quando $a = 0$, que é uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que recebe o nome de *função constante*, onde a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = c$$

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x passando pelo ponto $(0, c)$, como mostra no caso da figura 22.

Figura 22 – Função constante



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os gráficos apresentados nas figuras deste capítulo podem ser obtidos pelo link: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/graphing-slope-intercept>.
Para fins didáticos iremos seguir um roteiro, que deverá ser apresentados aos estudantes em forma de questionário, com o objetivo de consolidar os conceitos sobre as funções constante e afim.

Tabela 2 – Sequência didática sobre função afim.

Questionário da função afim
Aluno:
1 - Ao visualizar o gráfico da função $f(x) = x$ no simulador, quais são as particularidades observadas neste gráfico?
2 -Em relação ao gráfico da função $f(x) = x$, caso o valor de b for um número positivo, o que irá mudar no gráfico da função?
3 -Caso optarmos por um número negativo para b, quais a mudança que acontece com o gráfico?
4 - Houve diferença nos gráficos gerados no segundo e terceiro itens? Se sim, o que podemos concluir a respeito das mudanças que o coeficiente linear(b), proporciona no gráfico da função?
5 - Em relação ao coeficiente angular, representado pelo número a, o que acontece com o gráfico quando colocamos um número positivo maior que um?.
6- Ao contrário do item anterior, o que muda no comportamento da função se colocarmos um número negativo?
7- Analisando o item 5 e o item 6, o que podemos concluir a respeito das mudanças que a taxa de variação proporciona para o gráfico?

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

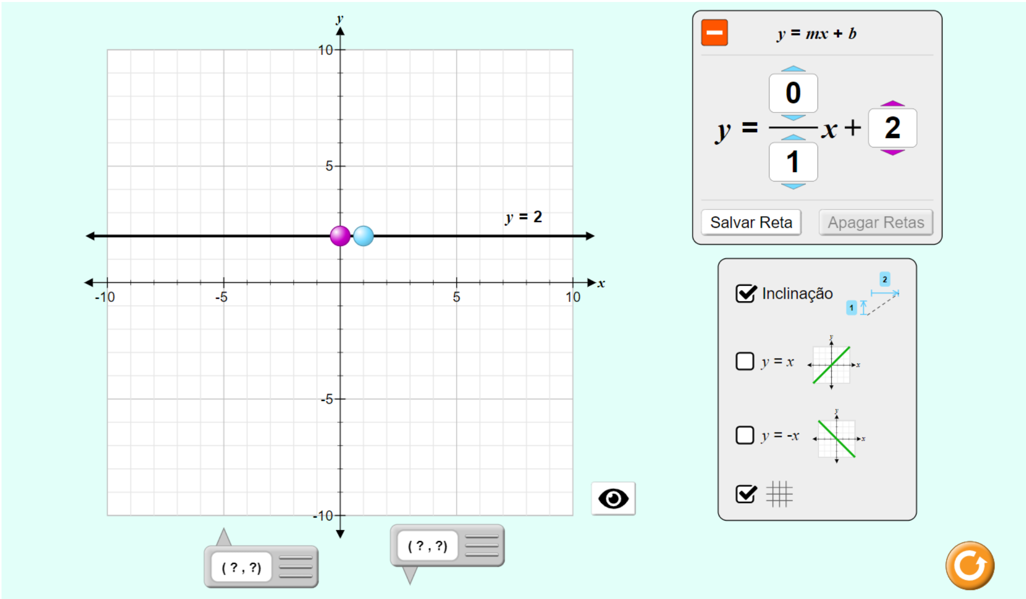
4.3.0.3 Trabalhando o conceito de Funções

Normalmente, para o desenvolvimento dos conceitos referentes aos gráficos de funções afim, que são normalmente trabalhadas no nono ano, mas retomado com mais profundidade no primeiro ano do ensino médio,portanto esse capítulo poderá ser usado como referência para trabalhar com os primeiros anos,mas também podemos trabalhar com os conceitos de reta no ensino de geometria analítica, para o ensino de função no primeiros anos é comum começar com o gráfico mais simples possível, que é o gráfico da função constante definida acima. Isso pode ser feito usando um simulador. Basta pegarmos o quadro de funções e colocarmos o valor de a igual a zero e b um número real qualquer, no exemplo mostrado abaixo, escolhemos $b = 2$, figura 23.

Para reforçar o conceito, podemos tomar diferentes valores para b, mostrando as alterações sofridas pelo gráfico ao realizarmos estas mudanças. Depois que o estudante fizer alguns exercícios propostos, é natural que ele perceba como podemos, fazer as alterações no gráfico de uma função constante. O próximo gráfico que pode ser explorado, e assim, já pode ser respondido no questionário, é o gráfico da função identidade. A ideia de começar o questionário com este gráfico se dá devido ao fato de ele possibilitar a compreensão das alterações que o coeficiente linear e a taxa de variação ocasionam no gráfico.

Acredito que vale a pena fazer uma análise mais detalhada do gráfico $f(x) = x$, sendo essa a razão da primeira pergunta do questionário ser sobre o gráfico da função identidade. Uma questão a ser respondida pela turma sobre o gráfico, é o fato de que todos os pontos

Figura 23 – Caso em que a =0



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

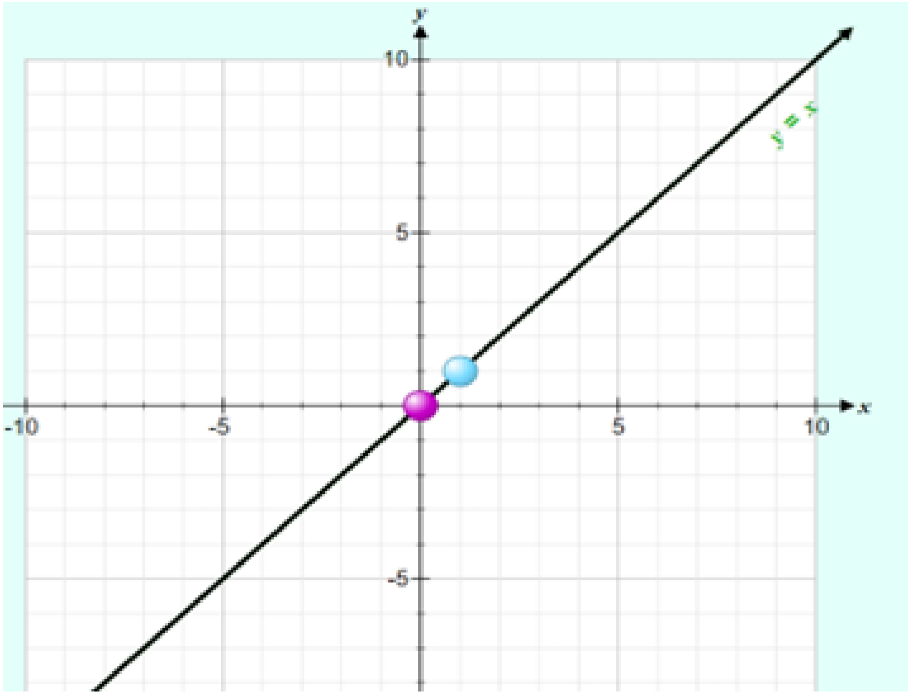
são da forma $(x, y) = (x, x)$, ou seja, $x = y$, o que aliás determina seu nome. Caso esse fato não seja observado por ninguém da turma, o professor pode instigar uma reflexão sobre o motivo do nome da função ser identidade. As três próximas questões tratam das interferências do coeficiente b no gráfico da função afim. Na figura abaixo, por exemplo, a ideia é fazer com que os estudantes percebam que ao somar duas unidades ao gráfico da função $y = x$, isso resultará em um deslocamento de duas unidades para cima no gráfico da função. Logo em seguida, o professor pode sugerir outros dois exemplos para serem executados pelos alunos.

Podemos mencionar outros valores de b, como por exemplo $b = 1$, ou ainda, $b = -1$, entre outros. Depois, com esses exemplos concluídos, podemos tentar averiguar se os estudantes compreenderam o fato de que o coeficiente b é responsável por fazer a translação do gráfico da função para cima, tantas unidades quanto são os valores de b. Para reforçar essa ideia, o professor poderá utilizar casos em que os coeficientes b são negativos, verificando com os estudantes se eles compreenderam as modificações causadas por b.

Após a confirmação por parte dos estudantes do papel que o coeficiente b exerce no gráfico, a turma estará apta para dar mais um passo, que é verificar as influências do coeficiente angular a.

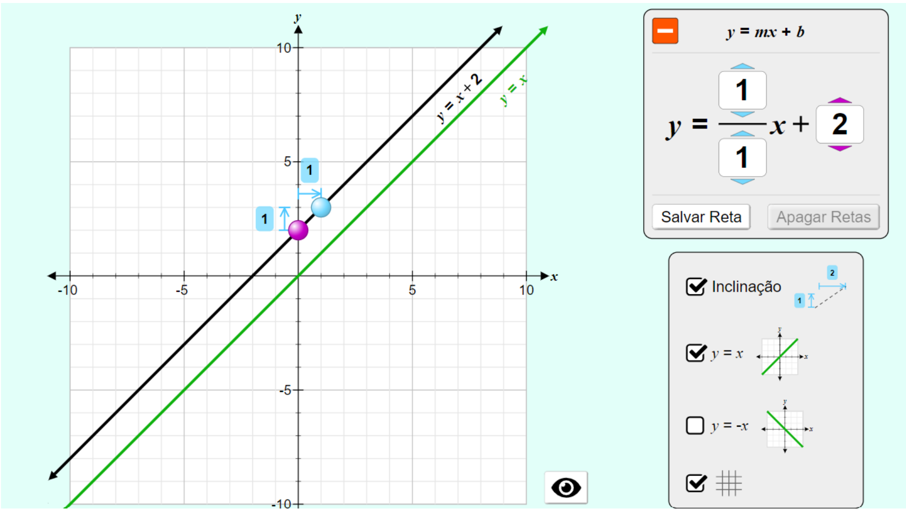
Para isso, partiremos novamente da função $y = x$ e, utilizando o simulador, o gráfico comentado está apresentado na figura 24, o professor poderá pedir para construir o gráfico da seguinte função: $y = x + 2$, apresentado na figura 25 . Logo após, durante a aula, ele pode perguntar quais as mudanças sofridas pelo gráfico a partir das alterações feitas no valor do coeficiente angular.

Figura 24 – Função identidade $y = x$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 25 – $f(x) = x + 2$

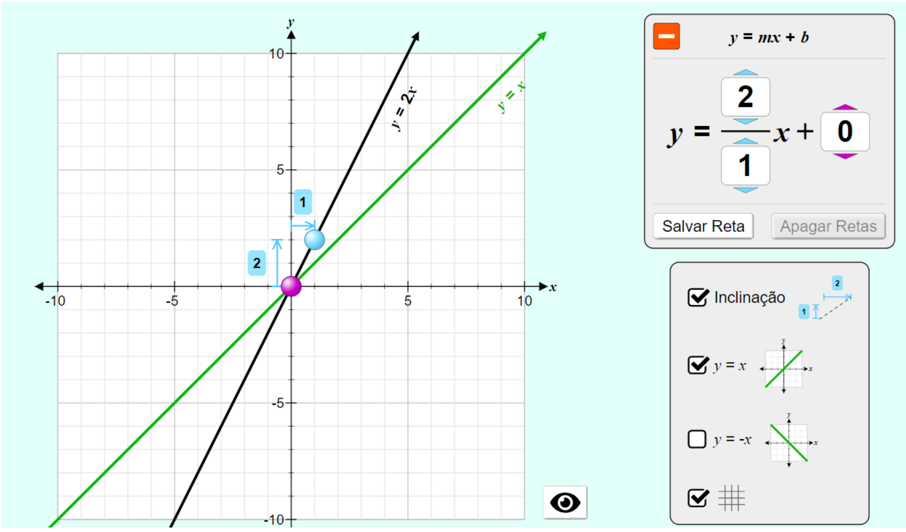


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

As diferentes funções obtidas estão apresentadas nos gráficos da figura abaixo, ambos foram construídos utilizando o simulador.

Após verificar com a turma o domínio das influências que o coeficiente angular exerce

Figura 26 – Gráfico da função $y = 2x$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

no gráfico da função para valores positivos, o professor poderá, antes de verificar se a turma compreendeu a ideia, pedir para que eles façam teste com outros valores para o coeficiente a, incluindo valores negativos, para verificar o impacto das mudanças de sinal nos gráficos. O professor poderá sugerir alguns valores dos coeficientes para mostrar à turma, como por exemplo que estão apresentados nas figuras

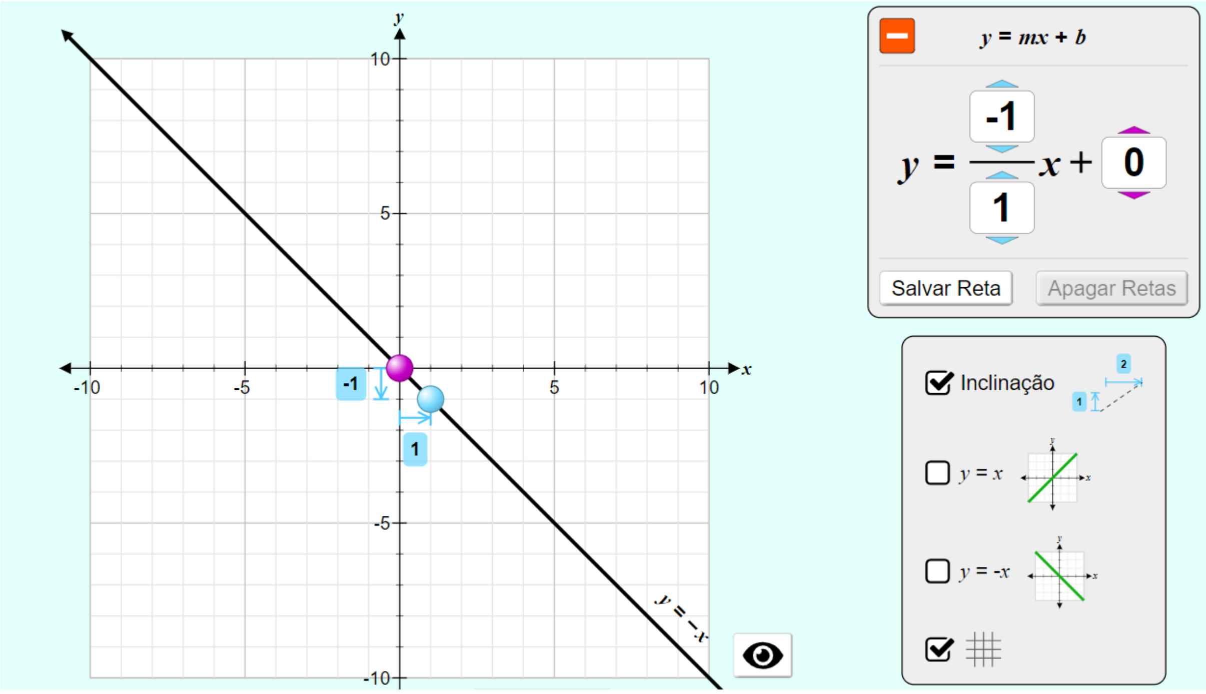
$$y = -x$$

$$y = -3x$$

$$y = -5x$$

Com os exercícios acima concluídos, conseguiremos responder às questões dos questionários propostos anteriormente. Além disso, podemos explorar o simulador trabalhando com a e b juntos em um mesmo conjunto de exercícios, para reforçar o aprendizado dos estudantes.

Figura 27 – Gráfico da função $y = -x$



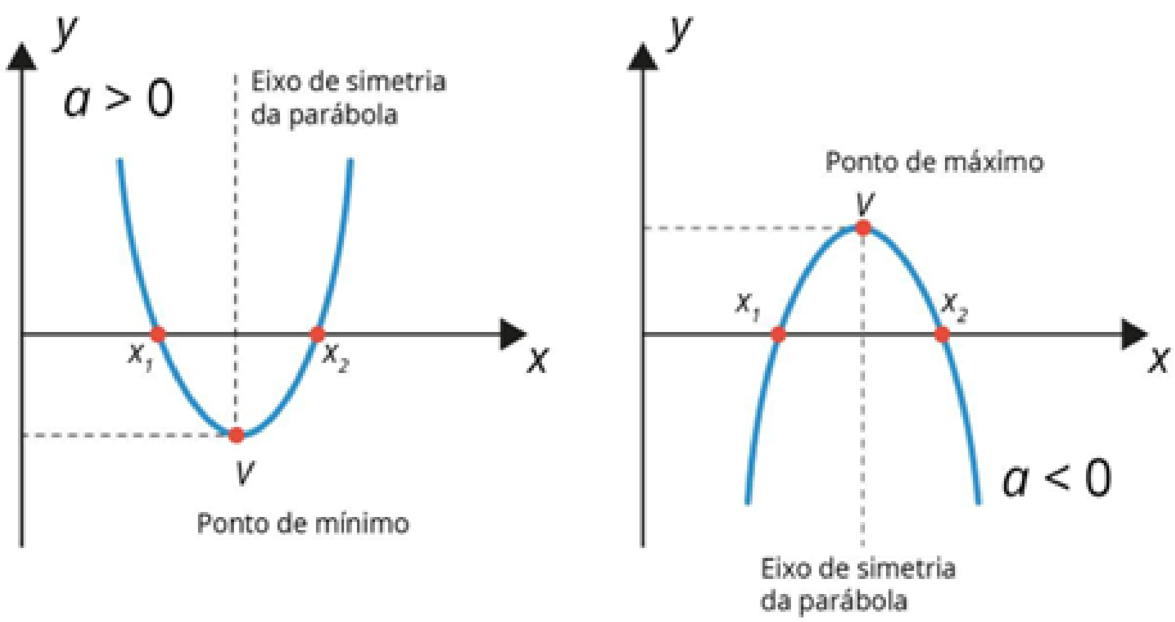
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

5 Função quadrática

5.1 Caracterizando uma função quadrática

Uma função $f\colon\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$, é chamada de função quadrática ou função polinomial de segundo grau. O gráfico da função quadrática é uma parábola com eixo de simetria vertical, como representamos a seguir:

Figura 28 – Função quadrática



Fonte: Imagem extraída do site (GUZMAN, 2023)

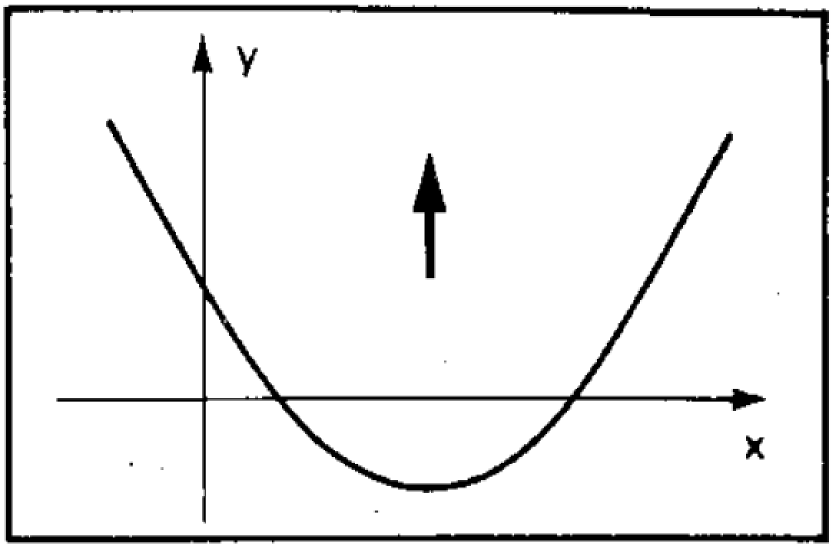
É importante notar o ponto denotado por V na figura. Ele é chamado de vértice da parábola.

Quando $a > 0$, *a parábola tem concavidade voltada para cima.* Não iremos definir precisamente este conceito para os alunos, mas apenas mostraremos o que significa graficamente.

Note que o vértice V será um ponto de mínimo da função. Ao contrário, quando a < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo e o seu vértice V é um ponto de máximo.

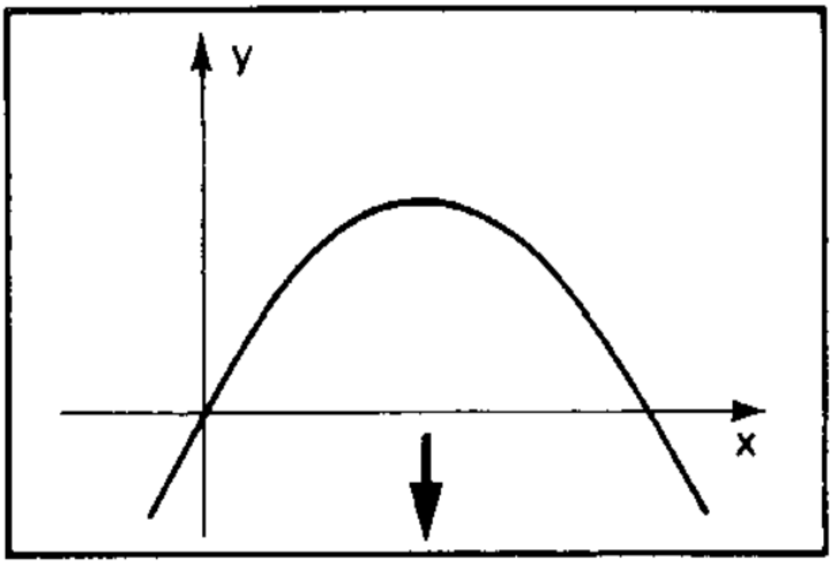
A constante real c indica a ordenada do ponto onde a parábola corta o eixo y.

Figura 29 – Parábola com $a > 0$



Fonte: extraída do site: (GUZMAN, 2023)

Figura 30 – Parábola com $a < 0$



Fonte: extraído do site: (GUZMAN, 2023)

Vamos, a seguir, determinar as coordenadas do vértice V da parábola que representa a função quadrática. Inicialmente, iremos calcular as *raízes da equação quadrática*, ou seja, os números x tais que a altura da parábola é zero. Pela *fórmula de Baskharam* temos que

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; i = 1, 2.$$

Notamos que a coordenada x_s do vértice V está no meio entre estas raízes, portanto x_s é igual à semi-soma das raízes da função $x_s = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, logo:

$$x_s = -\frac{b}{a} \tag{5.1}$$

Para encontrarmos a ordenada do ponto V, basta calcularmos y na expressão $y = ax^2 + bx + c$ com $x = x_s$ obtendo

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}, \tag{5.2}$$

onde usamos a notação estândar *delta*: $\Delta = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Como o simulador podemos explorar outras representações, as vezes mais uteis, da função quadrática, como por exemplo a representação na forma:

$$y = a(x-h)^2 + k \tag{5.3}$$

Sendo que h e $k \in \mathbb{R}$. Podemos variar h e k no simulador e observar o que acontece.

Uma terceira forma de se explorar a função do segundo grau, que o simulador possibilita, é a sua forma :

$$y = \frac{(x-h)^2}{4p} + k, \tag{5.4}$$

onde podemos alterar os valores de p, h e k, alterando assim o gráfico.

Iremos propor o seu uso pelo professor e aluno para fazer manipulações com o intuito de levar a turma a algumas conclusões interessantes. Percebendo que, de forma idêntica ao caso das funções do primeiro grau, os coeficientes das funções quadráticas mudam o gráfico da função, e que é possível prever como o gráfico de uma parábola mudará se os coeficientes forem alterados. É possível identificar o vértice, o eixo de simetria, as raízes e o eixo diretriz para o gráfico de uma equação quadrática. Podemos usar a forma de vértice de uma função quadrática, equação 5.4), para descrever o gráfico da função, descrever a relação entre foco e diretriz e a parábola resultante, além de prever o gráfico de uma parábola com foco e diretriz.

Claro que a abordagem irá depender de outros fatores, como por exemplo o tempo, visto que na maioria das vezes os professores possuem um cronograma apertado para dar conta de um currículo muito extenso. Assim, fica a critério de cada profissional a abordagem com maior ou menor abrangência. Assim como nos estudos anteriores, iremos sugerir uma sequência de perguntas para direcionar o estudo dos alunos, visando obter um melhor aproveitamento.

Com a ajuda do simulador *PhEt*, é possível visualizar o gráfico da função $y = x^2$. Observando o gráfico obtido abaixo, podemos notar que a função passa pela origem, tem sua concavidade voltada para cima e é simétrica em relação ao eixo y.

Tabela 3 – Sequência didática sobre função afim.

Questionário de função quadrática
Aluno:
1- A partir da visualização do gráfico $y = x^2$, quais características podem ser observadas no gráfico ?
2- No gráfico de $y = ax^2$, ao escolhermos um valor $0 \le a \le 1$ teremos qual comportamento para o gráfico gerado?
3- Ao escolhermos um valor $a < 0$, qual mudança é verificada no gráfico?
4- Quando se varia o coeficiente b diferente de zero, mas mantendo $c = 0$, quais são as alterações no gráfico?
5- Se tomamos por exemplo: $-5 \le b \le 5$, qual será o comportamento das funções quadráticas geradas?
6- Agora, fazendo o contrário, ou seja, fazendo $b = 0$ e $c \neq 0$, quais alterações podem ser observadas nos gráficos?
7- Faça alguns exemplos de gráficos com b e $c \neq 0$.
8- Para o caso da expressão $y = a(x-h)^2 + k$ o que acontece com o gráfico para valores de $h \neq 0$ e $k = 0$.
9- Para o caso inverso do apresentado acima, ou seja $h = 0$ e $k \neq 0$, qual é o novo comportamento do gráfico?
10- Se somente o valor de a for alterado, mantendo h fixado e $k = 0$, o que podemos verificar sobre o comportamento do gráfico na equação $y = a(x-h)^2 + k$?
11- Para a equação $y = ((x-h)/4p)^2 + k$, o que acontece quando mantemos h e k iguais a 0 e variamos p?
12- Caso alteremos somente o valor de k, qual é o comportamento observado pelo gráfico?
13- Se a alteração for somente no valor de h, quais observações podemos fazer?

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

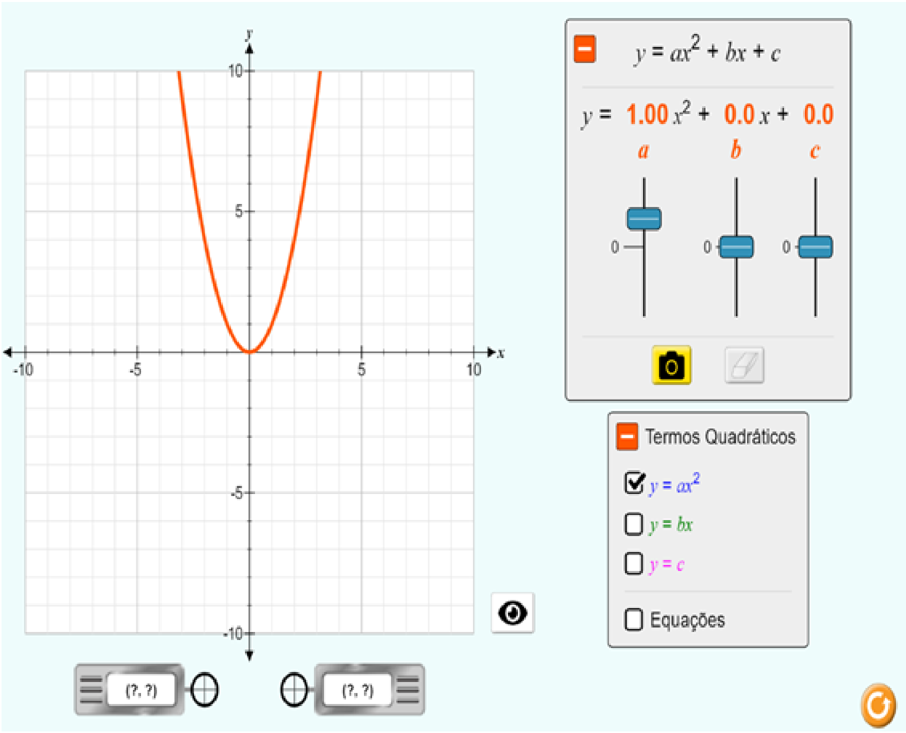
Vale lembrar que em relação ao simulador, temos a possibilidade de congelar a imagem do gráfico com o qual estamos trabalhando, como se fosse uma foto da função. Para fazer isso, basta clicar no ícone à esquerda da imagem 32 com isso, podemos usar esse recurso para comparar o gráfico em questão com algum outro gráfico que, por acaso, venha a ser construído.

O ícone desse recurso trás uma imagem de uma máquina de fotografia. A ideia é usar o gráfico fotografado como parâmetro para os próximos gráficos. Repare que o gráfico muda de cor e, caso se queira, pode-se retirar o gráfico fotografado na tela, basta clicar no ícone da borracha 33.

Aproveitando os recursos podemos fazer a construção abaixo: Pode ser sugerido para os estudantes que eles façam testes para alguns valores dos parâmetros, por exemplo:

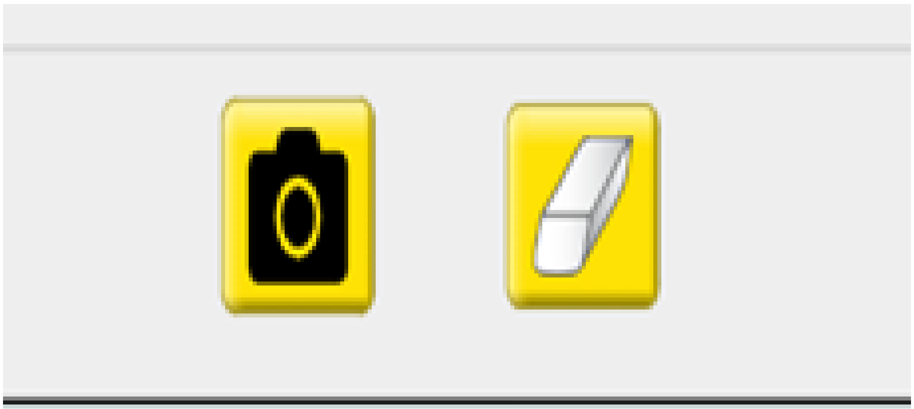
Fixamos b e c e variamos a: Começando inicialmente $a = 1$ o aluno pode observar que acontece quando variamos a entre 0 até 1, mantendo b e c iguais a zero. Ao fazer uso do simulador, podemos mostrar que nessas condições o gráfico crescerá mais lentamente, aumentando a

Figura 31 – $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pelo próprio auto

Figura 32 – Borracha para destaque

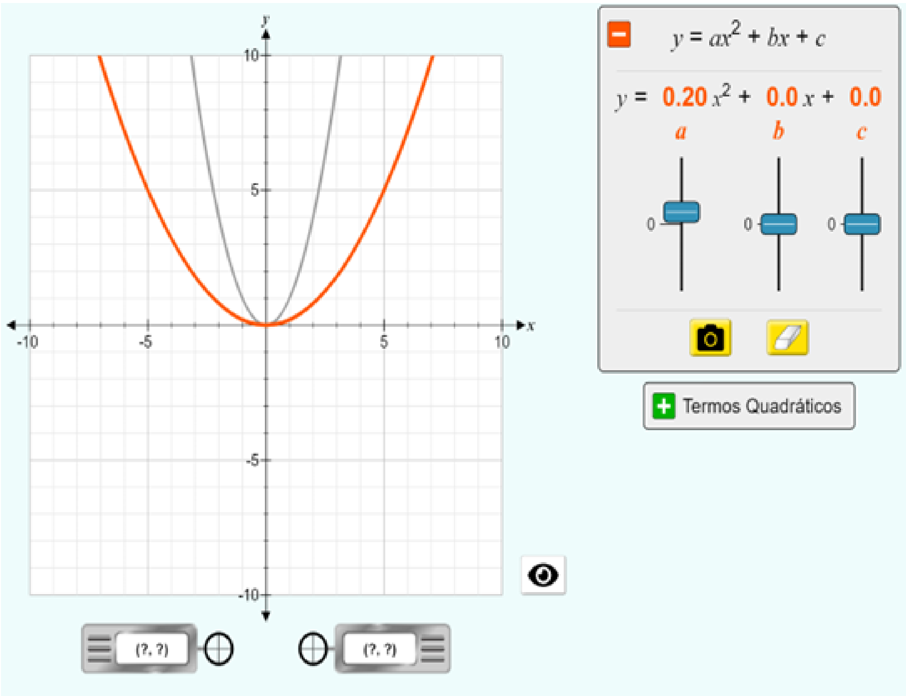


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

concavidade conforme o valor de a diminui 33 . Ou seja, quanto mais próximo de zero, maior será a concavidade. Depois de discutir os exemplos acima, teremos respondido as questões três do questionário sobre funções quadráticas.

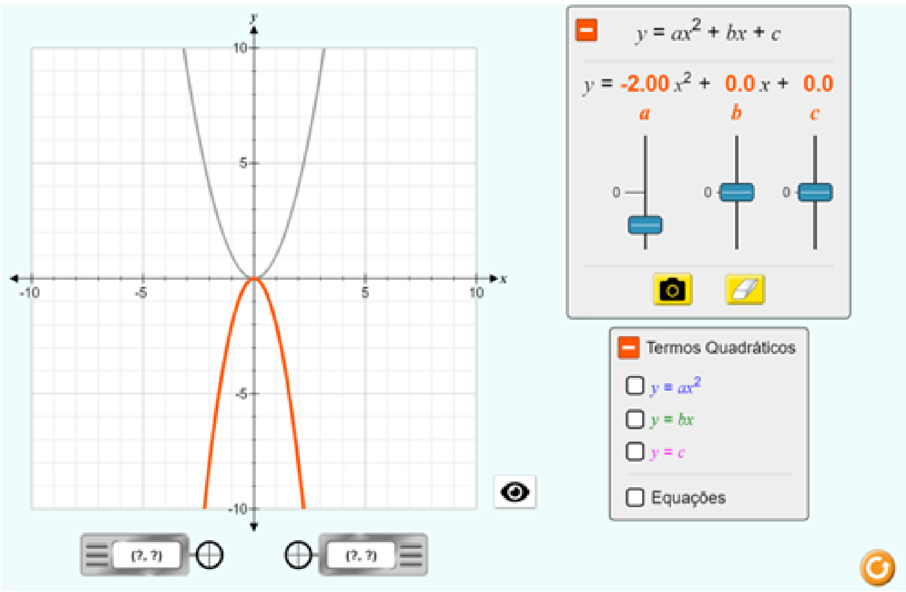
Tomamos valores negativos para a e fixamos b e c: No próximo passo, o valor de a será negativo e continuaremos a manter b e c nulos. Dessa forma, avançaremos ainda mais nos conceitos de função quadrática, percebendo que com um valor negativo teremos as seguintes características para o gráfico 34.

Figura 33 – Gráfico de $y = 0.2x^2 + 0x + 0$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 34 – Gráfico da função $y = -2x^2 + 0x + 0$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Com alguns exemplos, fica fácil perceber que quando o valor de a for menor que zero, o gráfico da função quadrática terá sua concavidade voltada para baixo, enquanto que, se a for maior que zero, sua concavidade será voltada para cima. Com isso, a pergunta, três do questionário estará respondida.

Fixamos c e variamos a e b: Agora, vamos pensar em relação aos casos onde $b \neq 0$, mantendo ainda $c = 0$. Percebemos, assim, por meio de alguns exemplos particulares mostrar, que o gráfico será transladado para a direita ou esquerda em relação à origem. Isso pode ser demonstrado pelo professor bastando que seja resolvido a equação a seguir:

$$ax^2 + bx = 0 \tag{5.5}$$

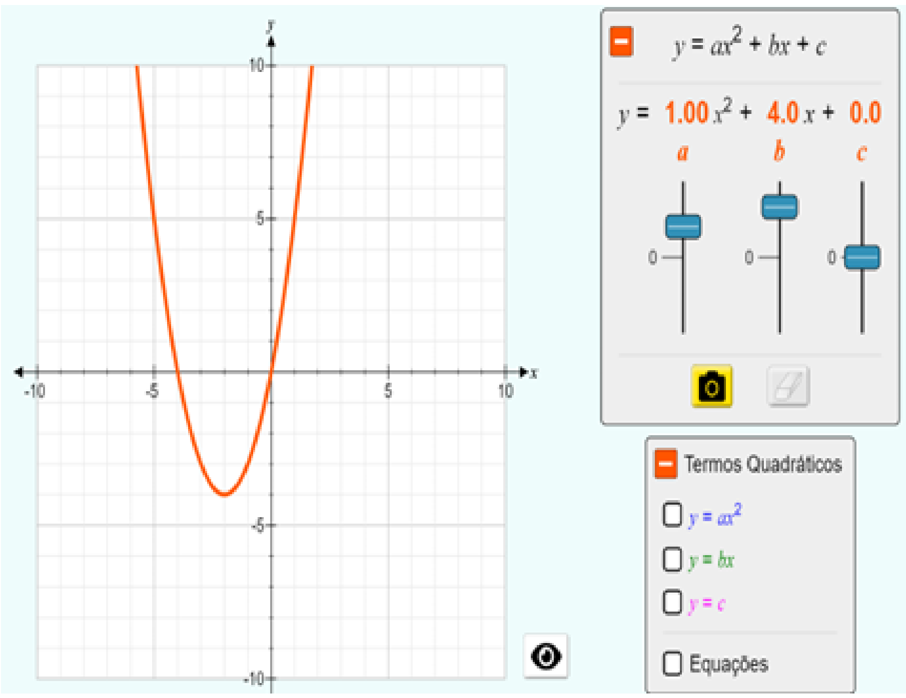
Para solução acima teremos como raiz da equação:

$$x = 0 \ ou \ x = \frac{-b}{a}$$

Fixamos a e c e variamos b :

Uma questão que pode ser abordada com os estudantes é fazê-los perceber que o vértice de uma parábola pode percorrer um caminho ao longo do plano, um caminho que também tem um formato parabólico. Para isso, basta alterar o valor de b, mantendo a e c fixos. Com isso, responderemos à questão cinco da tabela.

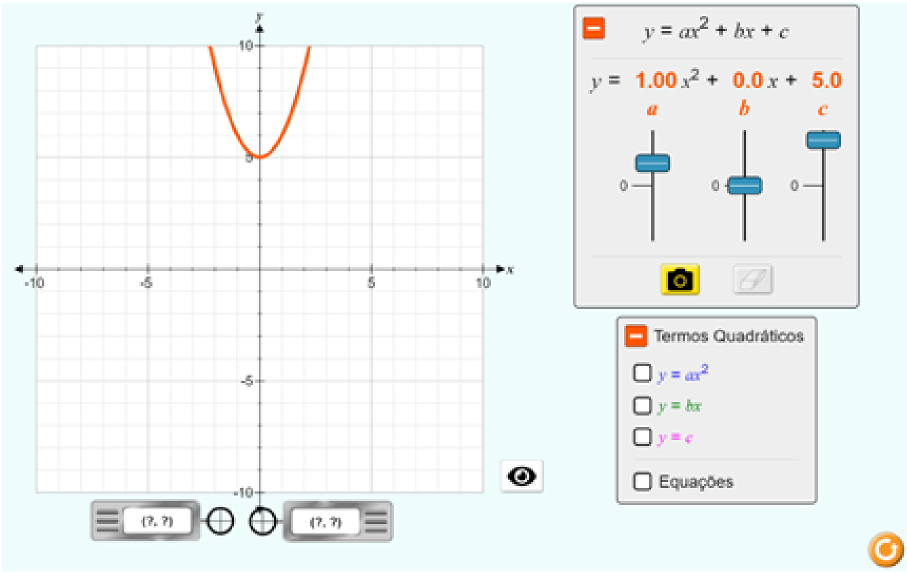
Figura 35 – Gráfico da função $y = 1x^2 + 4x + 0$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Se, por sua vez, fizermos $c \neq 0$ e $b = 0$, teremos condições para analisar o caso 6 do questionário. Assim, perceberemos que c tem a capacidade de transladar o gráfico para cima

Figura 36 – Gráfico da função $y = 1x^2 + 0x + 5$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

se c for positivo e para baixo se c for negativo, sendo o ponto de interseção do gráfico com o eixo y igual ao valor de c. Isso pode ser explicado pela resolução da equação.

$$f(x) = ax^2 + c \tag{5.6}$$

Sendo $x = 0$, teremos a seguinte solução $f(0) = a.0 + c$,portanto $f(0) = c$. O simulador permite que seja visualizado, através do gráfico gerado, o efeito do deslocamento que o coeficiente c causa no gráfico. Para facilitar essa visualização, sugerimos que sejam feitos exemplos com valores positivos e, posteriormente, negativos para c.

Após a análise cada caso individualmente, iremos abordar o caso geral, onde teremos a função do segundo grau em sua forma completa, ou seja, com todos os coeficientes, possibilitando assim a verificação de cada termo atuando conjuntamente.

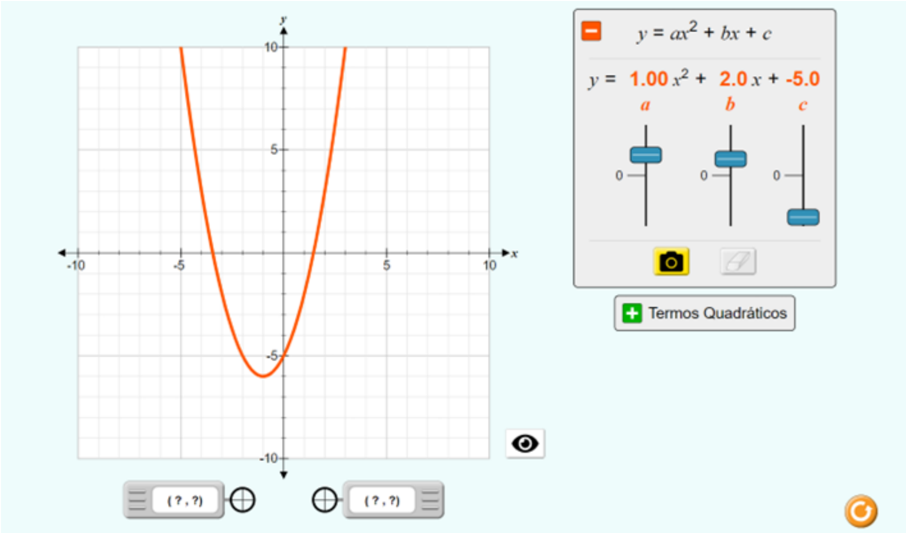
Podemos ainda explorar a possibilidade de verificar pontos importantes do gráfico, como por exemplo, o vértice, as raízes e o eixo de simetria.

Analisando o gráfico para o caso:

$$y = \frac{(x-h)^2}{4p} + k \tag{5.7}$$

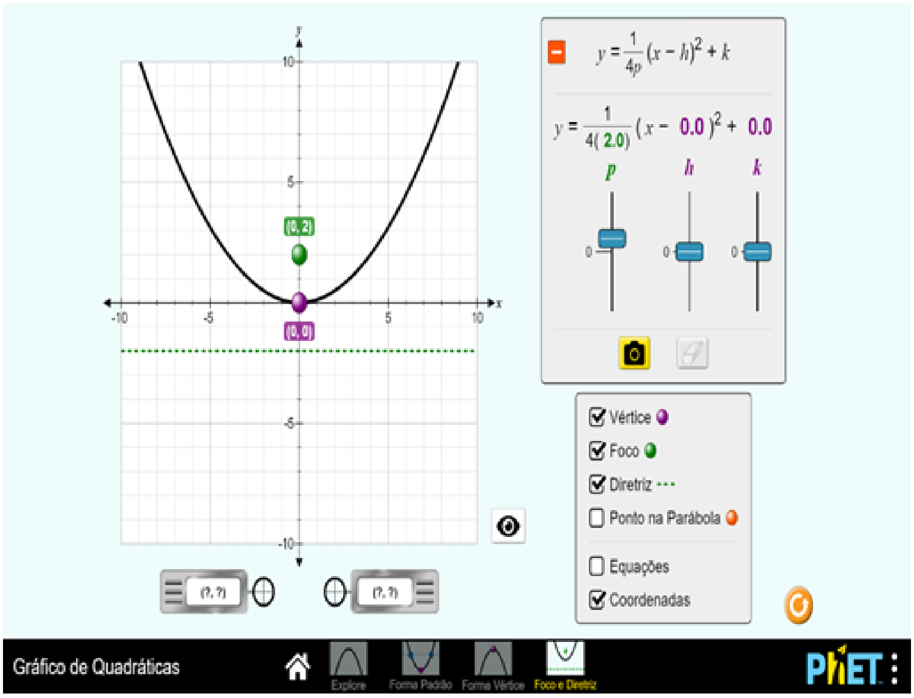
Para este caso o simulador possibilita ter uma visão dos elementos da parábola e a manipulação de seus parâmetros. As próximas figura permitem a visualização dos parâmetros que podem ser verificados e alterados.

Figura 37 – Gráfico da função $y = 1x^2 + 2x - 5$



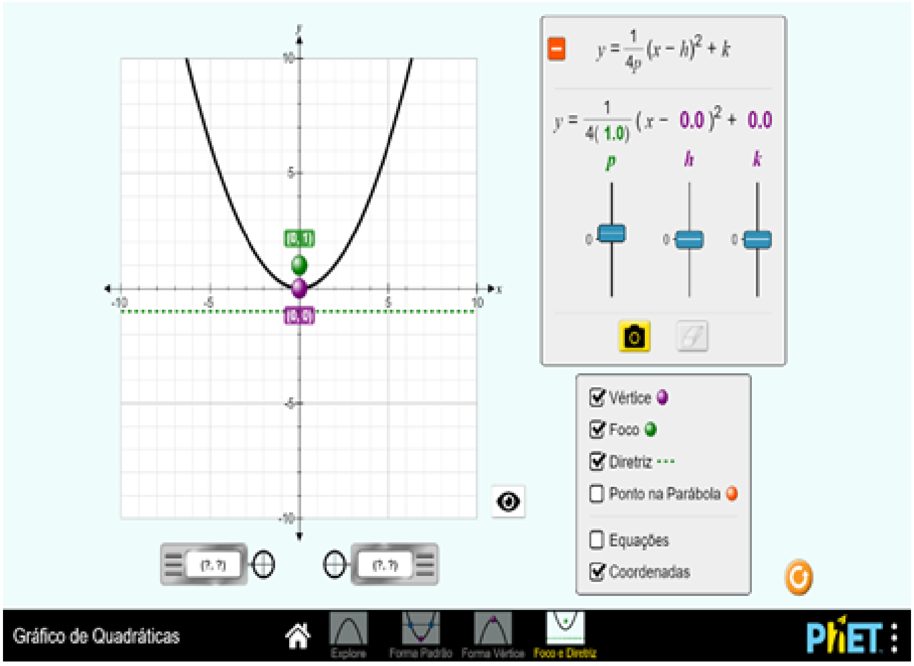
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 38 – Gráfico da função $f(x) = \dfrac{(x-0)^2}{4 \times 2} + 0$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 39 – Gráfico da função $y = \frac{(x-0)^2}{4 \times 1} + 0$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Fixamos h e k e variamos p:

Vamos ver o que acontece quando h e k forem ambos iguais a zero. Portanto, para $p \neq 0$, ficará evidente que p é o foco da parábola. Vamos testar o caso em que p seja maior que zero. Utilizaremos alguns valores positivos para k e vamos tentar perceber quais são as alterações provocadas na parábola quando os diferentes valores de p forem tomados como sugerido. A situação está mostrada nas figuras 38 ,39 e 40.

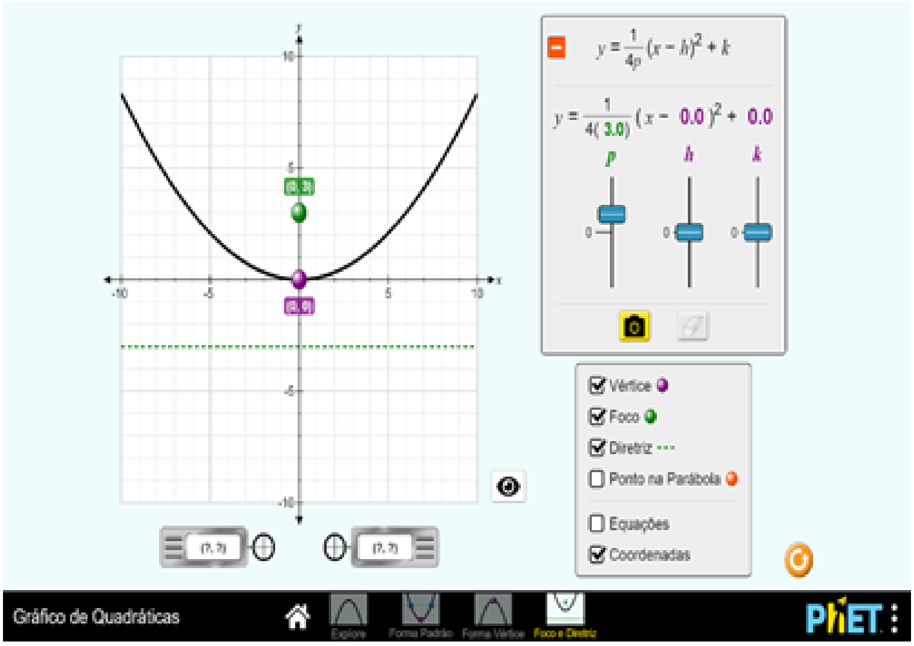
O estudante irá perceber que com o aumento de p, teremos um aumento na abertura da concavidade da parábola, ficando a concavidade voltada para cima. Pegando como sugestão os mesmos valores em módulo, porém sendo os valores negativos, teremos algumas parábolas com concavidade voltada para baixo. E agora a ideia é que os estudantes percebam que essa é a influência que p causa, ou seja, além de aumentar a abertura da concavidade, ele é capaz de fazer com que o sentido da concavidade mude, como mostrado na figura 41 e 43.

Fixamos k e variamos p e h:

Outra análise que pode ser feita é para o caso de p e h serem diferentes de zero, mas mantendo k igual a zero. O professor pode sugerir que os estudantes adotem alguns valores para h, possibilitando visualizar as alterações que h proporciona na função.

Com exemplos como os mencionados acima, o estudante conseguirá entender que quando o valor de h for positivo, o gráfico se desloca para a direita. Se for feito o mesmo procedimento anterior, ou seja, adotar valores negativos para h, ajudará o estudante a perceber

Figura 40 – Gráfico da função $f(x) = \dfrac{(x-0)^2}{4 \times 3} + 0$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

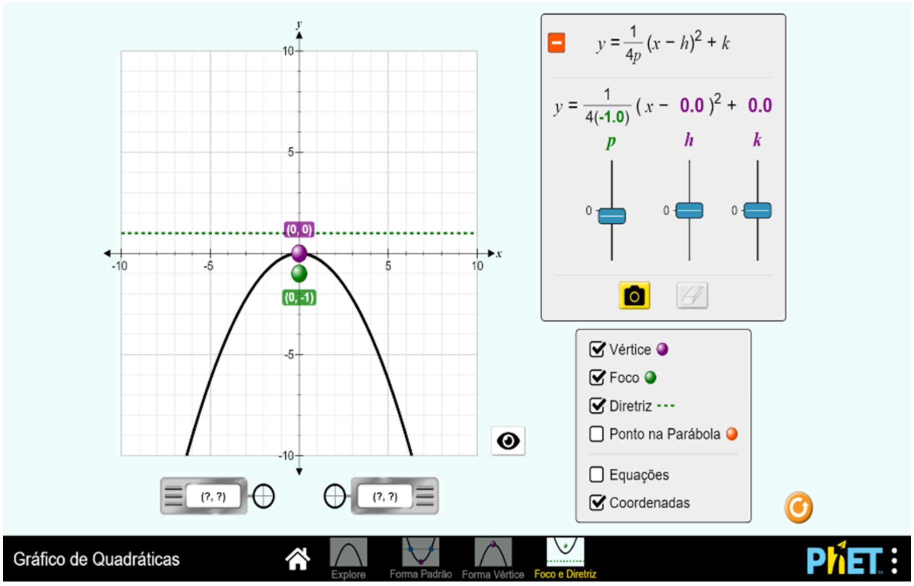
que o gráfico, em vez de ser deslocado para a direita, será deslocado para a esquerda 44, 45 e 46 .

Testando valores para k :

Analisada o parâmetro k; lançar alguns valores para k também pode ser interessante.

Assim que efetuarmos os alguns exemplos acima, o estudante terá percebido que a constante k faz com que o gráfico da função seja deslocado para cima, se k for positivo, e caso ele seja negativo, fará com que o gráfico seja deslocado para baixo. Podemos observar nas figuras 47 e 48 .

Figura 41 – Gráfico da função $y = \dfrac{(x-0)^2}{4\times(-1)} + 0$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 42 – Gráfico da função $y = \dfrac{(x-0)^2}{4\times(-2)} + 0$

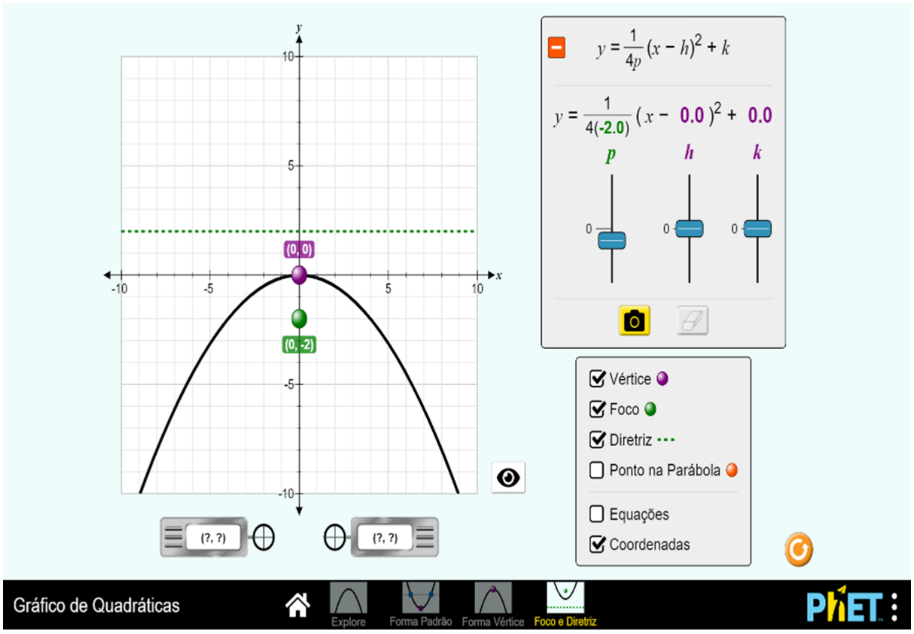
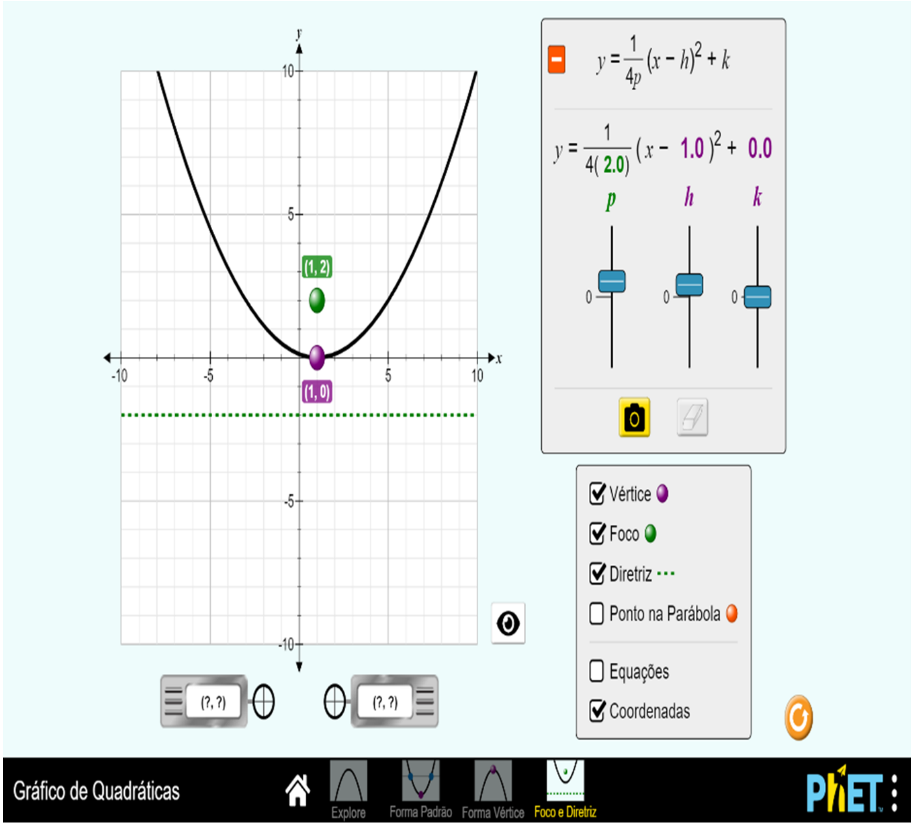


Figura 43 – Enter Caption

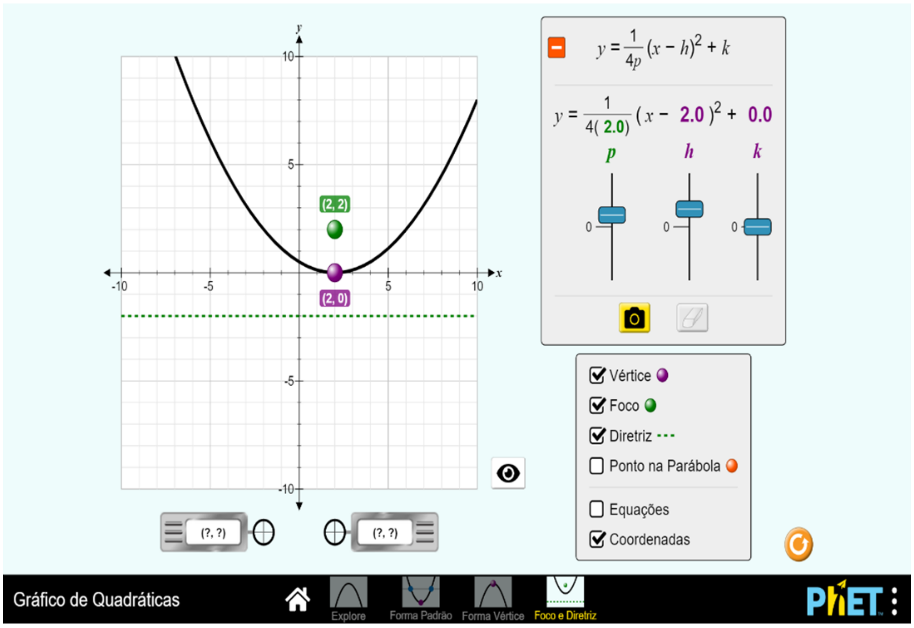
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 44 – Gráfico da função $f(x) = \dfrac{9(x-1)^2}{4\times 2} + 0$



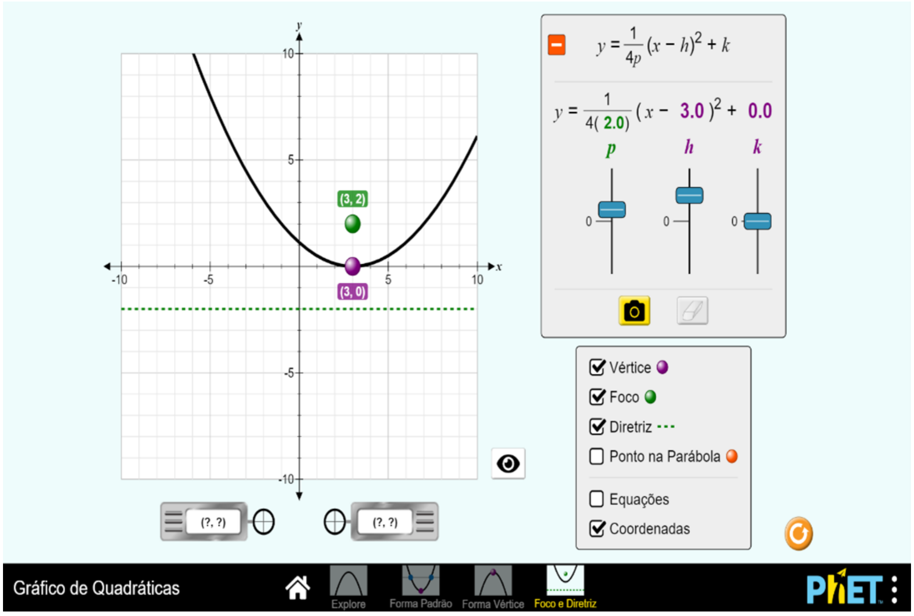
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 45 – Gráfico da função $y = \dfrac{(x-2)^2}{(4\times 2)} + 0$



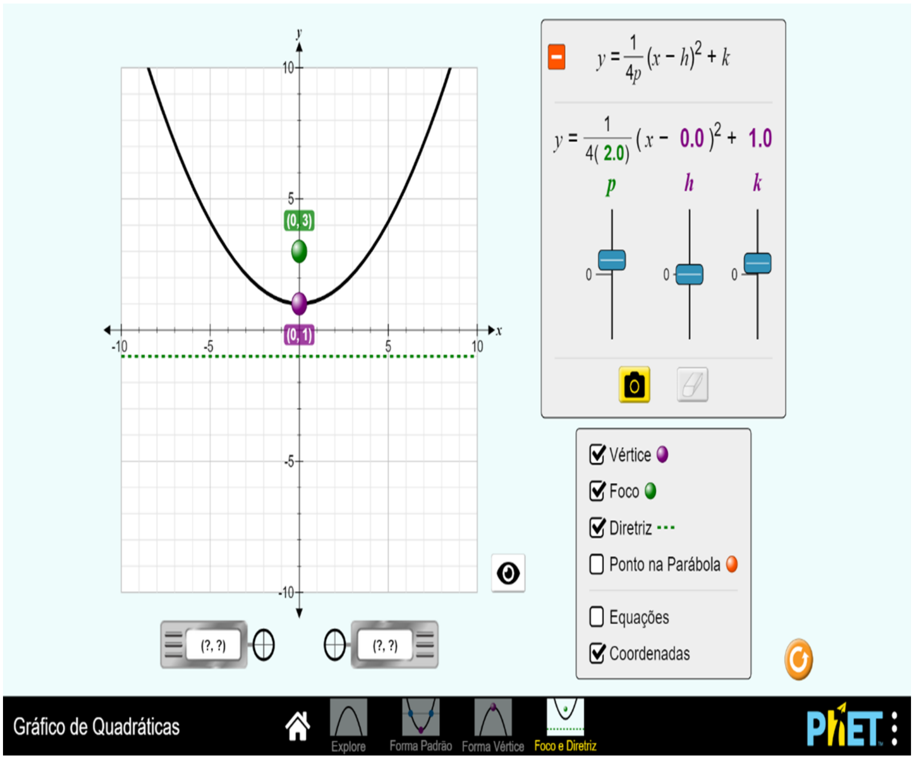
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 46 – Gráfico da função $y = \dfrac{(x-3)^2}{(4\times 2)} + 0$



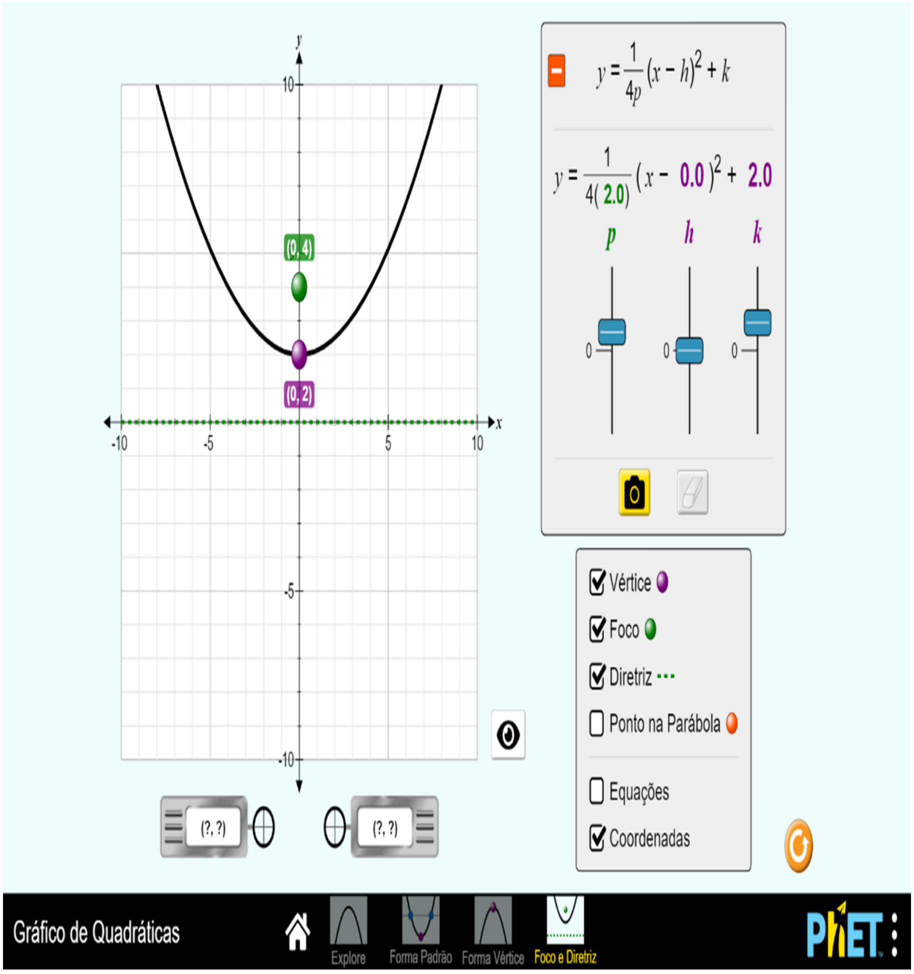
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 47 – Gráfico da função f(x) $= \dfrac{(x-0)^2}{4\times 2} + 1$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 48 – Gráfico da função $y = \frac{(x-0)^2}{4 \times 2} + 2$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

6 Trigonometria

6.1 Apanhado histórico da trigonometria

A trigonometria que no seu sentido literal quer dizer medida das partes de um triângulo, tem seus primeiros registros por volta do terceiro milênio antes de Cristo.

Os egípcia já utilizavam a ideia de “seqt” de um ângulo por volta de 1700 antes de cristo, quando aborda problemas envolvendo pirâmides, sendo que o “seqt” para eles equivale, para nós hoje, ao que chamamos cotangente.

Para a construção de pirâmides, os egípcios faziam com que o ângulo de inclinação fosse constante e igual a 52º. Também era comum entre algumas civilizações, como os gregos, babilônios e os próprios egípcios, a construção de relógios de sol, em que a ideia consistia basicamente em uma haste (gnômon do grego) fincada verticalmente no chão. A projeção da sombra da haste no chão é o que permitia avaliar as estações do ano, por exemplo.

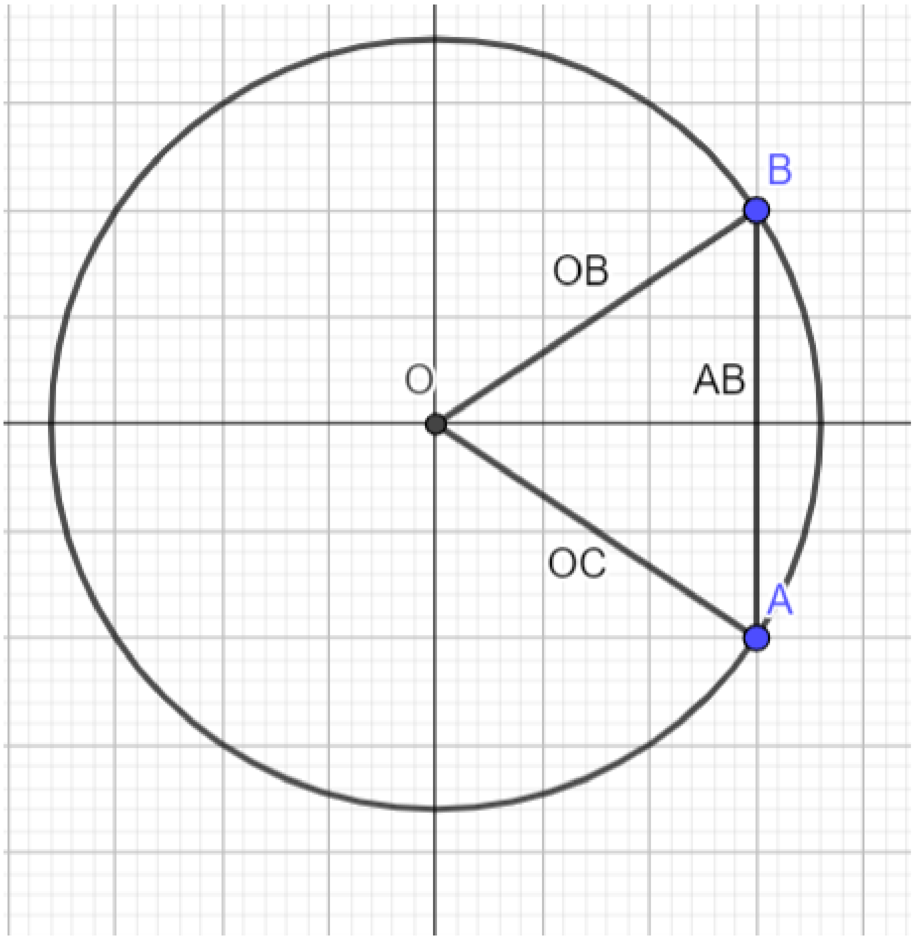
Deve-se mencionar que a trigonometria como conhecemos hoje, só foi possível depois do desenvolvimento da notação algébrica, visto que um bom domínio e a utilização de seus conceitos, requer uma notação mais sofisticada.

Os primórdios da trigonometria foram suficientes para contribuir, por exemplo, para o desenvolvimento do conhecimento astronômico. A aplicação dos conhecimentos trigonométricos na astronomia trouxe grandes avanços, tornando possível determinar as posições dos corpos celestes por meio de algumas funções angulares específicas. Essas brilhantes descobertas foram feitas por Hiparco de Niceia (século II a.C.). Hiparco escreveu a respeito do comprimento de cordas. Lembrando que definimos corda na matemática como um segmento de reta que une dois pontos de uma curva. Especificamente em geometria analítica e na teoria dos círculos, a corda é o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de uma circunferência. Apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor de seu comprimento, pode-se calcular seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é justamente esse valor, ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendido por um ângulo x é $2 \times \sin\dfrac{x}{2}$

$$\widehat{AOB} = x \qquad r = OB \qquad \sin(x/2) = \frac{AB}{2} \tag{6.1}$$

Hiparco gostava de trabalhar com base 60, pois, assim era possível ter muitos divisores,facilmente decomposto num produto de fatores, o que facilita os cálculos, devido a essa preferência fez com que ele dividi-se o círculo em 360 partes, sendo que cada parte ele chamou de 1º grau.

Figura 49 – Corda de um arco



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A obra de Hiparco foi preservada e ampliada por Ptolomeu(séc II d. c.), os escritos da obra de Ptolomeu *O Almagesto* um compendio de astronomia de treze livros, sendo possível encontrar em seu escritos uma tabela de cordas dos ângulos de 0º até 180º escritos de 0,5º em 0,5º.

Importantíssimos passos foram dados para o desenvolvimento da Matemática na Europa do século XIV. Entre os matemáticos que contribuíram com os avanços da trigonometria está François Viète, que construiu uma extensa tabela trigonométrica, com até 13 algarismos para os ângulos escritos em incrementos de 1º grau. Tal tabela foi usada até recentemente.

Além disso, Viète foi um dos primeiros a aplicar transformações algébricas à trigonometria. Sua notação só foi superada posteriormente por Descartes (1596-1650). Quando nos referimos as aplicações da trigonometria, não podemos deixar de mencionar sua ocorrência na música. Neste sentido, as primeiras descobertas foram feitas por Pitágoras, que percebeu que a altura do som emitido por uma corda é inversamente proporcional ao seu comprimento, ou seja, quanto menor a corda, mais grave é o som. No entanto, um marco decisivo neste campo só foi atingido no século XIX, através do trabalho de Jean Baptiste Joseph Fourier

Figura 50 – Jean Baptiste Joseph Fourier

Fonte: Extraído do site: (Sá, 2013)

(1768-1830). Filho de um alfaiate, ficou órfão aos 8 anos de idade e ingressou na escola militar local. Ele tornou-se professor na própria escola onde estudou. Seu brilhantismo logo ganhou notoriedade e ele veio a ocupar a cadeira de análise na escola Politécnica de Paris.

Fourier conseguiu mostrar que o som pode ser traduzido em uma equação, que é representada pela expressão abaixo:

$$a_1 \sin b_1 t + a_2 \sin b_2 t + a_3 \sin b_3 t + \ldots \tag{6.2}$$

a expressão é chamada serie de Fourier.

Suas teorias foram posteriormente comprovadas por Hermann von Helmholtz (1821-1894). Outro dos responsáveis por levar a trigonometria para os domínios da análise foi Isaac Newton, no século XVIII, e isso foi possível devido ao uso por Newton de séries de potências como a do exemplo abaixo:

$$\sin(x) = x - \frac{x_3}{3!} + \frac{x_5}{5!} - \frac{x_7}{7!} + \ldots \tag{6.3}$$

A trigonometria assume sua forma atual com Leonhard Euler (1707-1783) que adota a medida do raio de um círculo como unidade de ângulo (radianos) e define as funções trigonométricas como aplicadas a um número, e não mais a um ângulo, como era feito até então, em 1748.

A grande contribuição de Euler foi escrever uma função E, chamada de função de Euler, que associa um número a um ponto do círculo, permitindo a ideia de seno, cosseno e tangente serem vistas dentro de um círculo.

A função de Euler $E:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, que possibilita encontrar $sen(x)$ e $cos(x)$ como funções de uma variável real x, abriu as portas da Análise Matemática e possibilitou inúmeras aplicações na Física. O tratamento analítico das funções trigonométricas está no livro Introductio in Analysin Infinitorum, de 1748, considerado a obra-chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de um número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário, ou também o número definido pela série:

$$\sin x = x - \frac{x_3}{3!} + \frac{x_5}{5!} - \frac{x_7}{7!} + \ldots$$

Não podemos deixar de mencionar a famosa identidade de Euler, ligando a trigonometria à função exponencial:

$$E^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

6.2 Marco Teórico

6.2.1 Trigonometria no triângulo

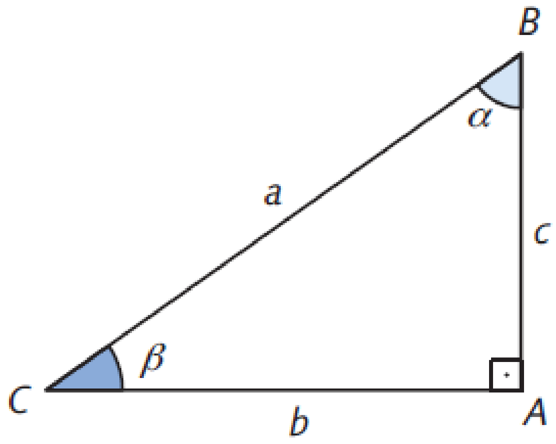
Para desenvolver os principais conceitos da trigonometria, que serão abordados neste capítulo, partiremos dos conceitos básicos, como ângulo, grau e radiano. Tais conceitos serão introduzidos sem maiores preocupações, pois assumimos que são de domínio dos discentes, dado que este capítulo é indicado para estudantes da terceira série. Os conceitos não intuitivos ou que ainda não foram vistos pelos estudantes do terceiro ano serão definidos de modo mais cuidadoso. Atualmente, chamamos de trigonometria o ramo da matemática que estuda as relações entre os ângulos e os lados dos triângulos. Nesta seção, iremos estudar primeiramente as relações trigonométricas no triângulo retângulo, ou seja, aquelas que envolvem os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo.

Em relação ao ângulo α, o lado AC é o cateto oposto, e o lado AB é o cateto adjacente. Em relação ao ângulo β, o lado AB é o cateto oposto e o lado AC é o cateto adjacente. As razões seno, cosseno e tangente são chamadas razões trigonométricas. Com essas razões, podemos determinar o comprimento de um lado do triângulo retângulo, sabendo a medida de um ângulo e o comprimento de outro lado. Também podemos determinar a medida de um ângulo sabendo o comprimento de dois dos lados.
Em todo triângulo retângulo, podemos considerar as seguintes razoes entre os comprimentos dos seus lados:

- a razão do cateto oposto ao ângulo reto e a hipotenusa é chamada seno do ângulo:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Figura 51 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

- a razão do cateto adjacente ao ângulo reto e a hipotenusa é chamada cosseno do ângulo agudo:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

- a razão do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo reto é chamada tangente do ângulo agudo:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

6.2.2 Funções trigonométricas

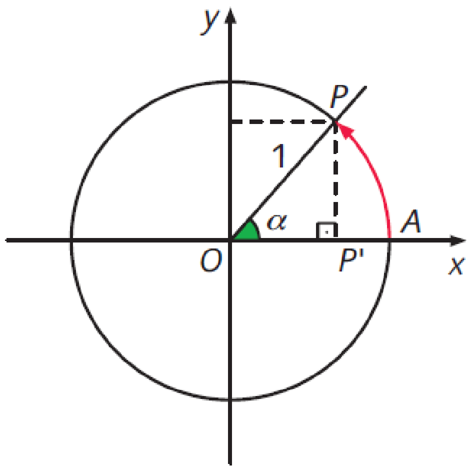
Com a ajuda do simulador, algumas ideias serão ampliadas, oferecendo uma forma alternativa de reforçar ou até mesmo apresentar esse conteúdo aos estudantes. Entre os conteúdos apresentados, temos a generalização das relações trigonométricas, seno e cosseno de um arco.

6.2.2.1 Seno e cosseno de um arco

Na circunferência trigonométrica estão representados um ângulo central com medida α e um ponto correspondente P sobre a circunferência, figura 52.

- $\overset{\frown}{AP}$:arco cujo ângulo central tem medida α.
- $\overline{PP'}$: perpendicular ao eixo x
- $\overline{OP}$: raio da circunferência ($r = 1$)
- OP’P : triângulo retângulo

Figura 52 – Circunferência Trigonométrica



Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

Utilizando as razões seno e cosseno no triângulo OP'P , temos:

$$\sin\alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{PP'}{1} = PP'$$

$$\cos\alpha = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

Portanto,$\sin\alpha$ corresponde à ordenada do ponto P (corresponde à medida da distância da projeção de P no eixo y à origem) e $\cos\alpha$ corresponde à abscissa do ponto P (corresponde à medida da distância da projeção de P no eixo x à origem). Dizemos que o eixo y é o eixo dos senos e x, o eixo dos cossenos.

6.2.2.2 Variação do sinal de seno e de cosseno

Na circunferência trigonométrica, de acordo com o quadrante em que se encontra a extremidade P do arco, o valor do seno e do cosseno pode ser positivo ou negativo.

Podemos resumir o quadro anterior da seguinte forma:

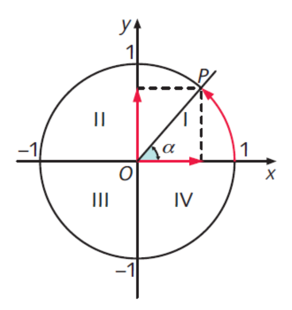
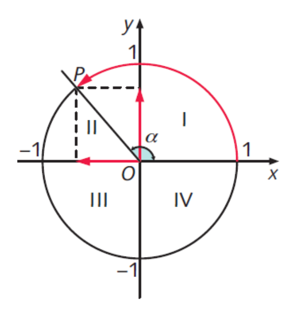
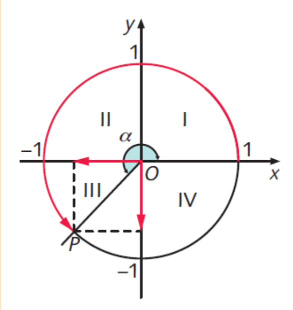
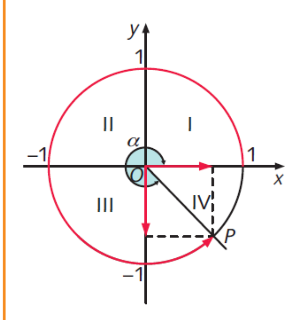
6.2.2.3 Tangente de um arco

Vamos considerar, na circunferência trigonométrica abaixo, uma reta t, com a mesma orientação do eixo y, tangente a circunferência no ponto A, um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$, e o ponto T obtido na interseção da reta tangente t e $\overrightarrow{OP}$.

Utilizando a razão tangente no triângulo retângulo OTA, temos:

$$\tan\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Figura 53 – Tabela de sinais do seno e do cosseno no círculo

1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
			
sen $\alpha > 0$ cos $\alpha > 0$	sen $\alpha > 0$ cos $\alpha < 0$	sen $\alpha < 0$ cos $\alpha < 0$	sen $\alpha < 0$ cos $\alpha > 0$

Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

Figura 54 – Resumo dos sinais do seno e cosseno

Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

A fim de ampliar o conceito de tangente de um arco trigonométrico, vamos considerar a reta t sendo o eixo das tangentes. Desse modo, o valor da tangente de α corresponde à ordenada do ponto T sobre o eixo das tangentes, que pode ser positivo, negativo ou nulo.

6.2.2.4 Variação do sinal da tangente

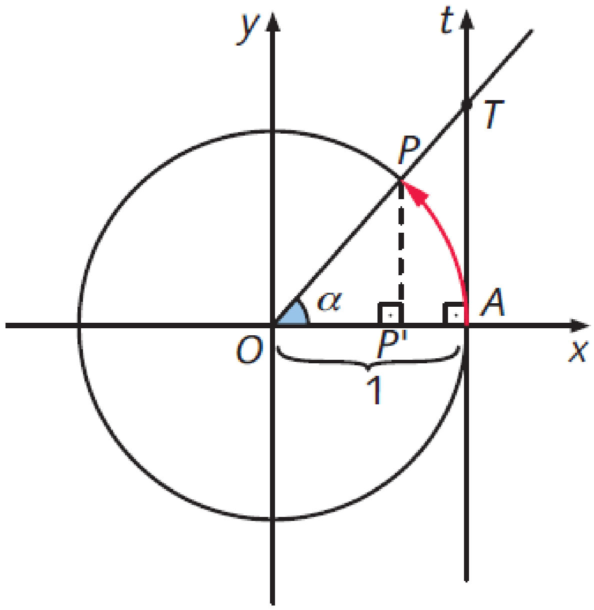
Na circunferência trigonométrica, de acordo com a posição da extremidade P do arco, o valor da tangente pode ser positivo ou negativo.

De modo geral, de acordo com o quadrante, temos para a tangente os sinais representados ao lado.

6.2.2.5 Função seno

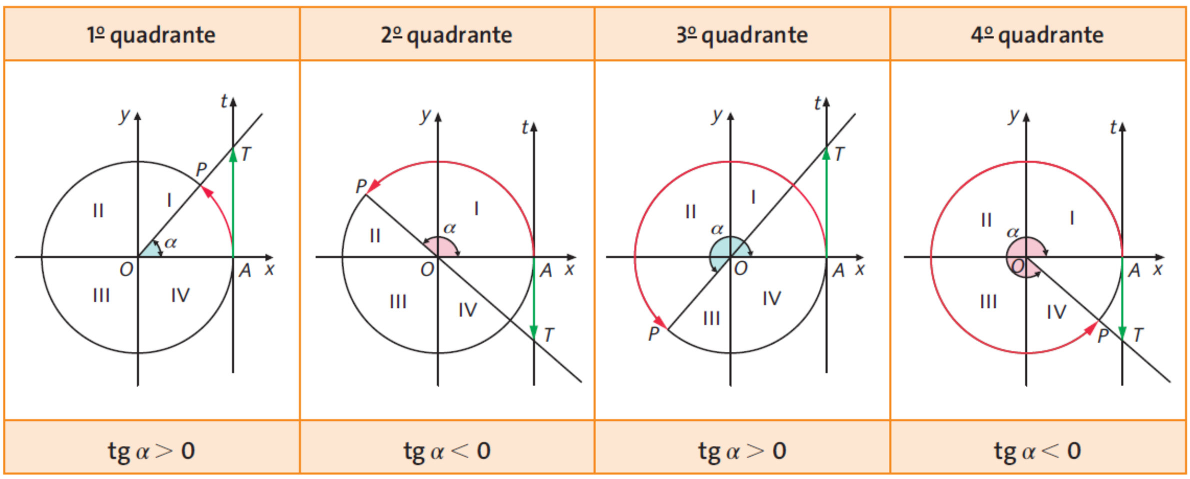
Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo com medida de abertura x radianos(ou de um arco com medida angular x radianos).

Figura 55 – Tangente de um arco



Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

Figura 56 – Sinais da tangente



Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

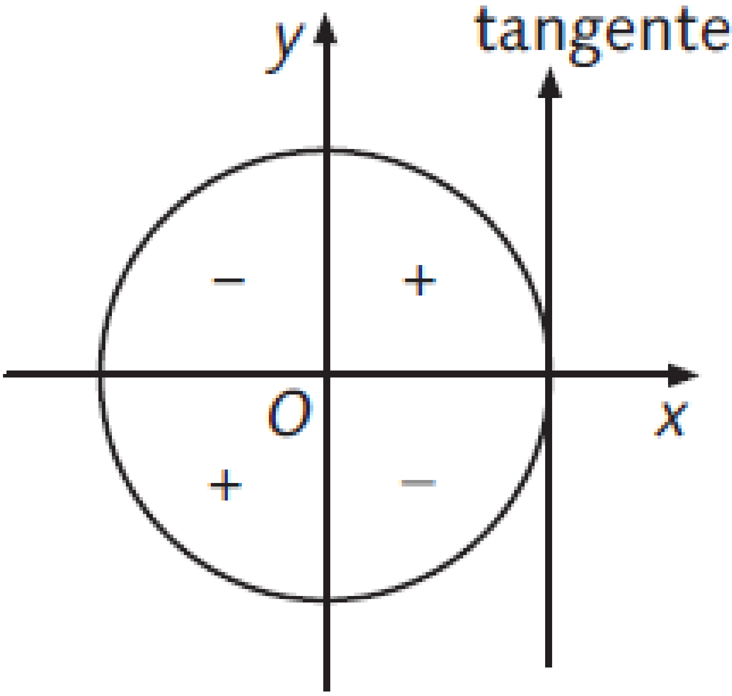
A função trigonométrica seno é a função real de variável real que associa, a cada número real x, o valor real $\sin x$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sin x$$

A função seno possui um conjunto de valores possíveis para sua imagem que varia entre o intervalo [-1,1], ou seja $-1 \leq \sin x \leq 1$, para todo x real, tal que $x \in \mathbb{R}$.

Figura 57 – Resumo do quadro de sinais da tangente



Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

Observação: A imagem da função seno corresponde à projeção da extremidade do arco sobre o eixo vertical, denominado eixo dos senos.

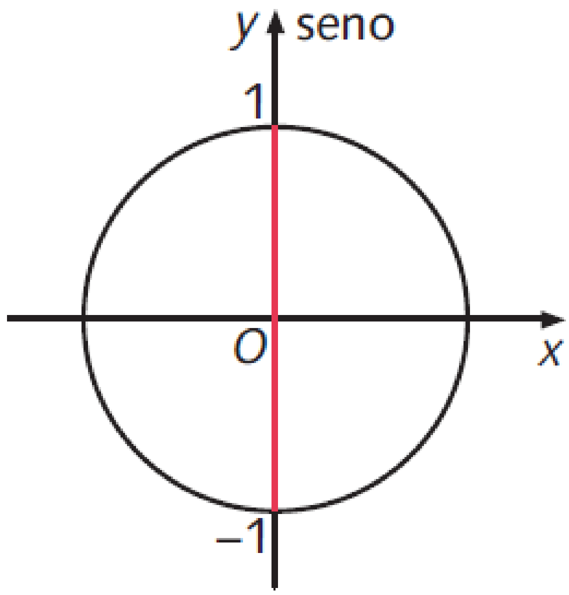
6.2.2.6 Gráfico da função seno

Vamos ilustrar o gráfico da função seno. Para isso, vamos construir uma tabela e, com base nela, traçar o gráfico.

x	$f(x) = \sin x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

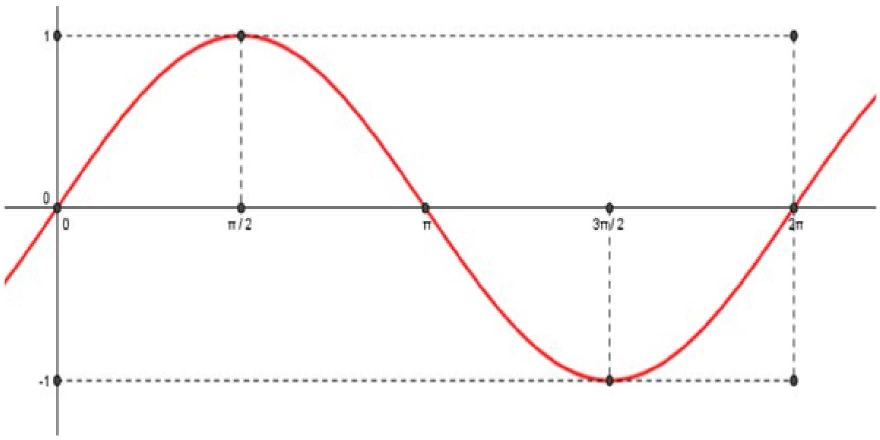
Tabela 4 – função seno

Figura 58 – Imagem da função seno representada na circunferência trigonométrica



Fonte: Extraído do site: (ANDRADE et al., 2020)

Figura 59 – $f(x) = \sin(x)$



Fonte: Extraído do site:(Sá, 2013)

6.2.2.7 Função cosseno

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do cosseno de um ângulo com medidas de abertura x radianos(ou de um arco com medida angular x radianos).

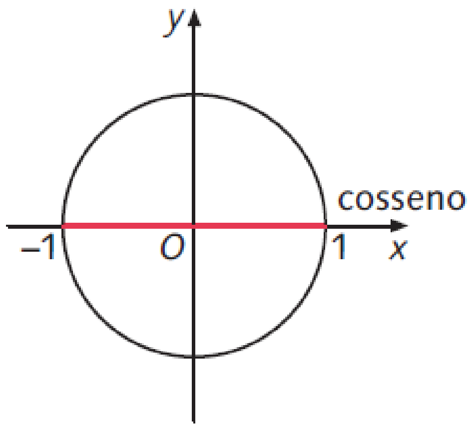
A função trigonométrica cosseno é a função real de variável real que associa, a cada número real x, o valor real $\cos x$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

Observação: O conjunto imagem da função cosseno corresponde à projeção da extremidade do arco sobre o eixo horizontal,denomina-do eixo dos cossenos.

Figura 60 – Imagem da função cosseno representada na circunferência trigonométrica



Fonte: Extraído do site:(Sá, 2013)

6.2.2.8 Gráfico da função cosseno

Vamos ilustrar o gráfico da função cosseno. Para isso, vamos construir uma tabela e, com base nela, traçar o gráfico.

x	$f(x) = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Tabela 5 – função cosseno

6.2.2.9 Função tangente

Dado um número real x, tal que:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

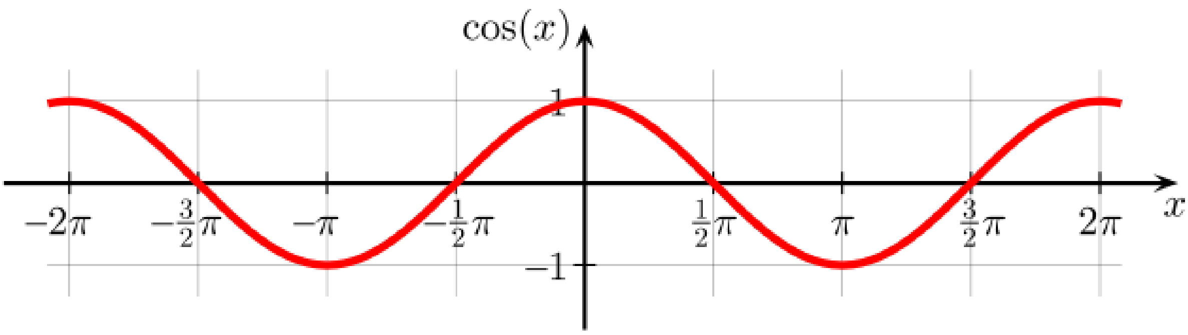


Figura 61 – Gráfico da função cosseno

Fonte: Extraído do site:(Sá, 2013)

,

Seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta OP e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x(e indicamos $\tan x$ a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{AT}$.

6.2.2.10 Gráfico da função tangente

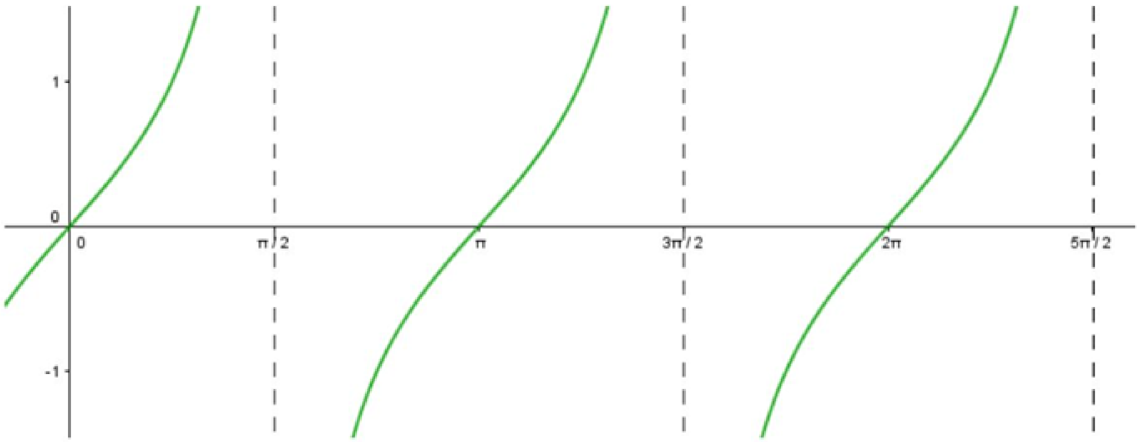
Vamos ilustrar o gráfico da função tangente. Para isso, vamos construir uma tabela e, a partir dela, o gráfico:

x	$f(x) = \tan x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
2π	1

Tabela 6 – função tangente

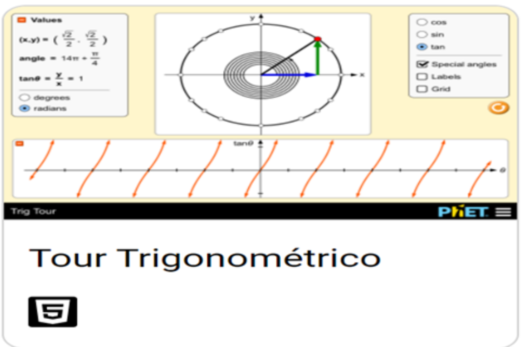
Os conceitos que foram apresentados acima, podem ser apresentados usando através da janela chamada “tour trigonométrico” no simulador *PhEt*. Basta clicar no ícone apresentado na figura 63.

Figura 62 – $f(x) = \tan(x)$



Fonte: Extraído do site:(Sá, 2013)

Figura 63 – Tour Trigonométrico

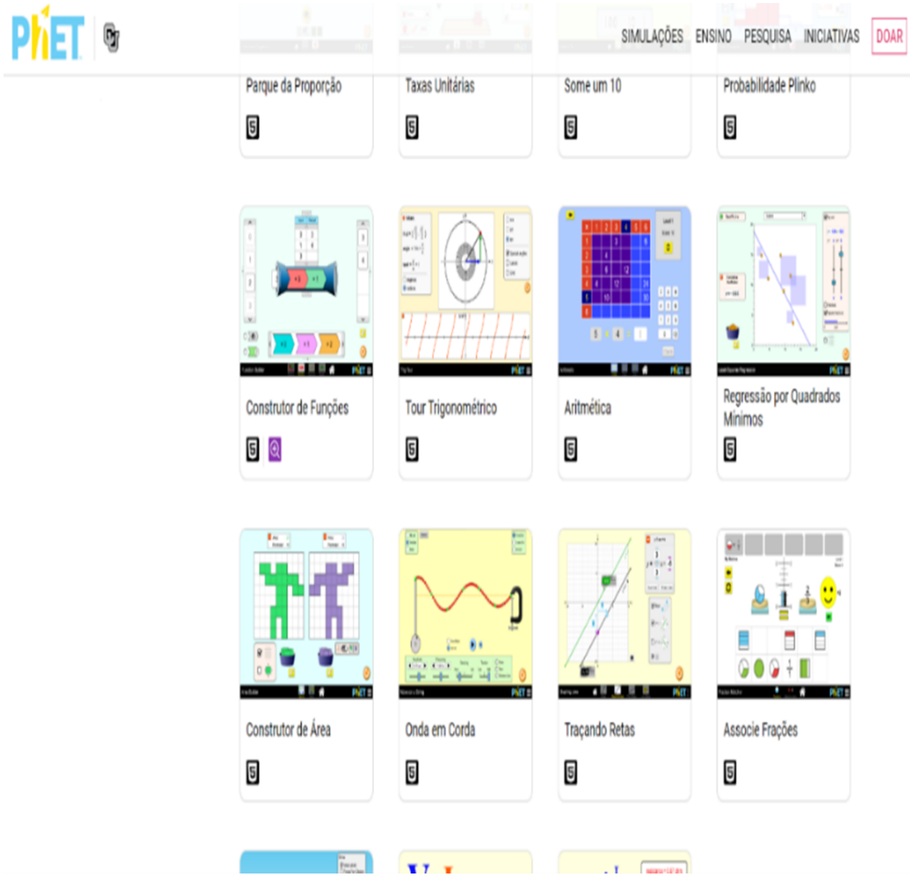


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A janela apresentada possibilita visualizar as opções de simulação, bastando, então escolher a que trata das funções trigonométricas. 64.

Vale lembrar que as funções trigonométricas, conforme apresentadas no simulador *PhEt*, deixam a desejar se comparadas com outros programas como o Geogebra ou mesmo o Desmos. Ainda assim, a possibilidade de manipulações, tendo um grande apelo visual que surge quando o ponto sobre o círculo trigonométrico de sua janela é movimentado e também outras características que podem ser visualizadas ao analisar os recursos apresentados, torna viável sua utilização como forma de apresentação de alguns conceitos da trigonometria. Primeiramente, iremos mostrar como cada função é mencionada no simulador *PhEt*. O programa oferece uma visão como a apresentada na figura 65.

Figura 64 – Opções de trabalho no simulador *PhEt*



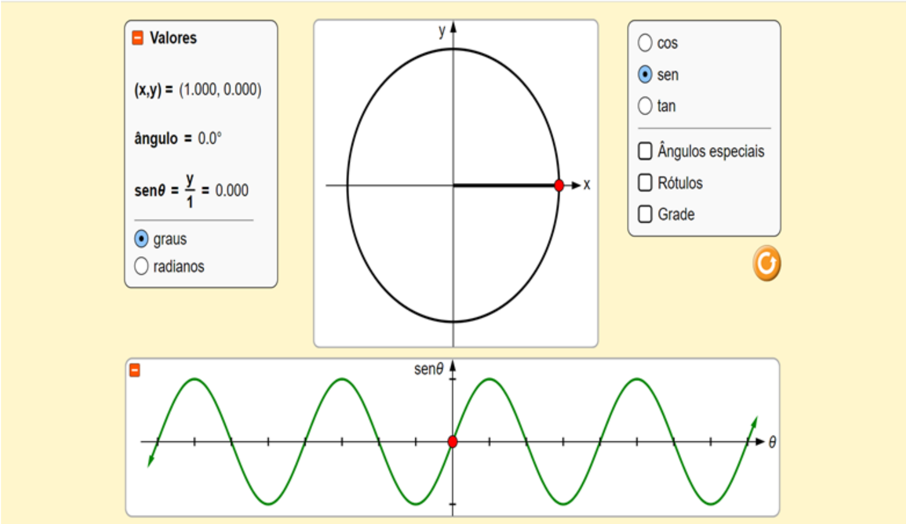
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

O quadro superior esquerdo do simulador destacado na figura acima possibilita ao usuário observar as coordenadas do ponto em um sistema de referência cartesiano, como mostrado na figura, além do ângulo que o ponto faz ao percorrer o círculo, podendo ser expresso em graus ou em radianos, de acordo com a escolha do usuário. O estudante também poderá escolher a função que será analisada. No caso a seguir, a função selecionada no exemplo foi a função seno.

Outro aspecto interessante a ser destacado é o próprio círculo em si, que contém um ponto na extremidade do raio, em vermelho, permitindo interação direta com o usuário. Ao usar o mouse, é possível mover o ponto no sentido horário ou anti-horário e observar as variações decorrentes no gráfico apresentado na parte inferior da mesma página, que contém o círculo. Através dessa interação, o usuário poderá verificar como as funções:seno, cosseno ou tangente, de acordo com a escolha feita anteriormente tem sua imagem alterada. 67.

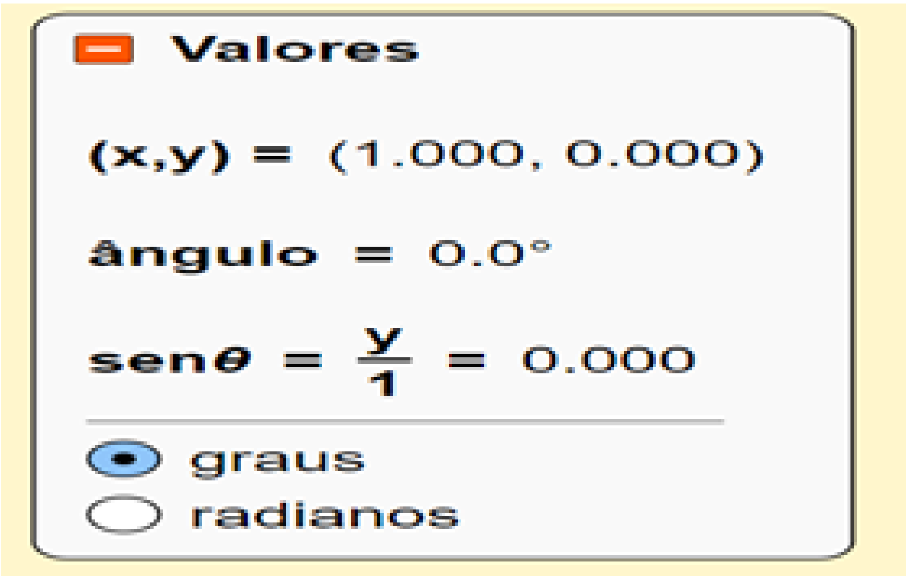
A terceira caixa de interação apresenta a possibilidade de o estudante escolher a função que será analisada, podendo optar entre as funções seno, cosseno e tangente, como mencionado anteriormente. A interface também permite que o usuário acione a opção do botão de grade, que mostrará uma grade e também poderá apresentar um rótulo com os

Figura 65 – $f(x) = \sin x$



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

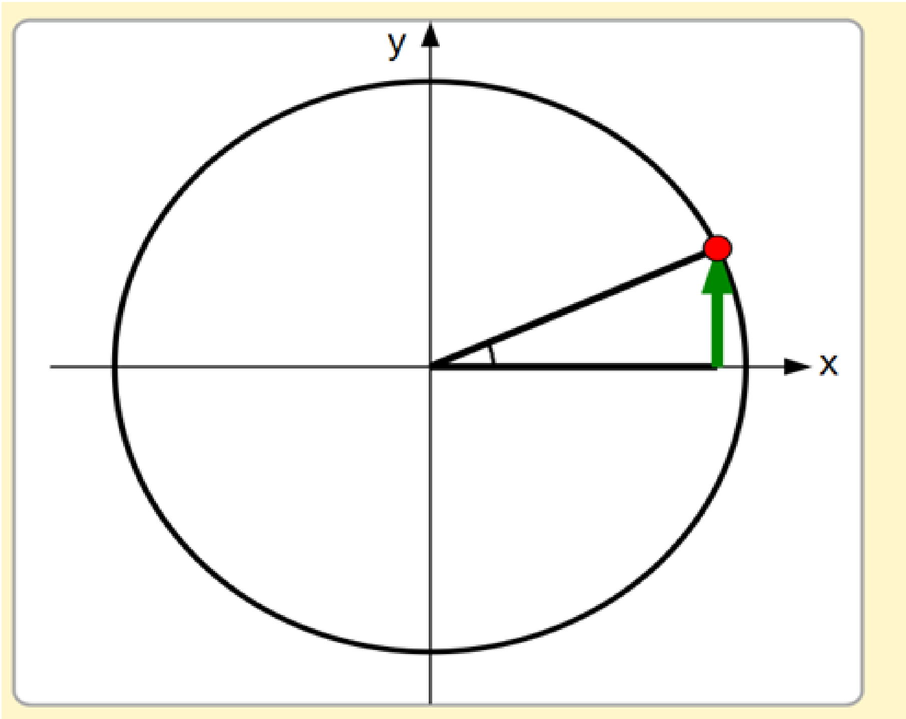
Figura 66 – Escolha ângulos ou radianos



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

valores extremos das coordenadas do círculo. Por fim, ao selecionar a opção dos ângulos especiais, serão destacados no círculo e no gráfico em análise os valores correspondentes aos ângulos especiais. Por último, podemos mencionar o gráfico da função em si, que é apresentado logo abaixo das três caixas, como mostrado na figura68.

Figura 67 – Circulo trigonométrico



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

6.2.2.11 Função seno usando simulador *PhEt*

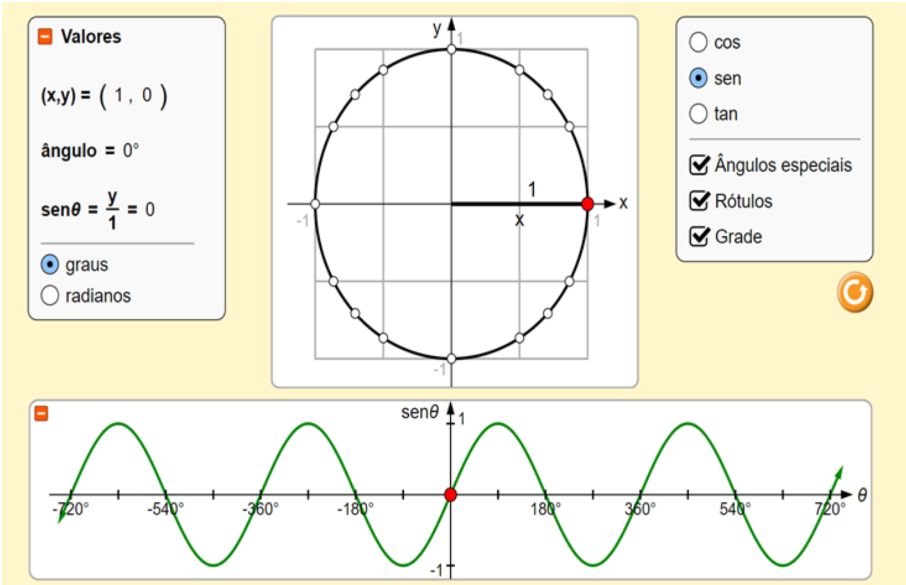
A primeira função a ser analisada usando o simulador é a função seno, e essa análise é feita de forma muito simples com o simulador. O usuário só precisa mover o ponto vermelho sobre o círculo, como mostram as figuras 69.

Observe que qualquer movimento feito no ponto no círculo resulta em um movimento correspondente no gráfico, e vice-versa, isto e, qualquer movimento feito no gráfico implica em um movimento equivalente no ponto no círculo. Com essa compreensão em mente, pretende-se levar o estudante a perceber que ao variar um ponto no domínio da função seno, representado pelo ponto sobre o círculo, cria-se uma correspondência entre o ângulo correspondente e o valor associado para a altura y do ponto, como pode ser observado no caso do seno pela seta vertical mostrada na figura 72.
De forma interativa e intuitiva, pretende-se levar ao estudante a entender a noção da função seno.

6.2.2.12 Função cosseno usando *PhEt*

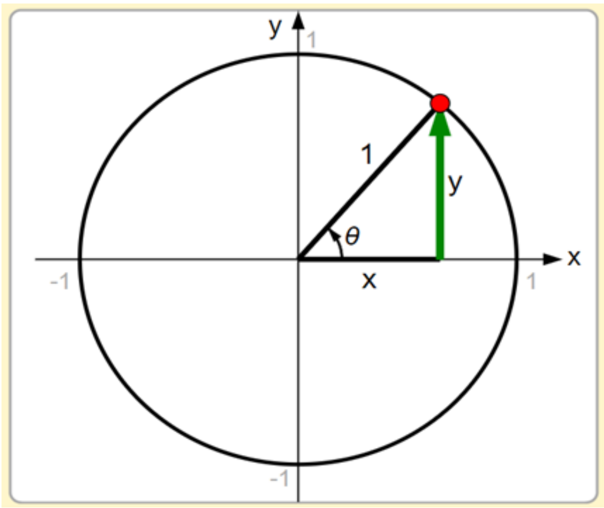
A próxima função é o cosseno, que se apresenta no círculo como a seta horizontal com cor azul, sobre o eixo OX. Observa-se ainda que a cor usada para a função cosseno é diferente, pois enquanto o seno se apresenta com uma cor verde escura, a função cosseno, por sua vez, é apresentada em uma cor azul escura, o presente apelo visual, ajuda o discente

Figura 68 – Visão geral de uma representação



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 69 – Função seno apresentada no Simulador *PhEt*



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

a perceber as particularidades de cada função, figura 73.

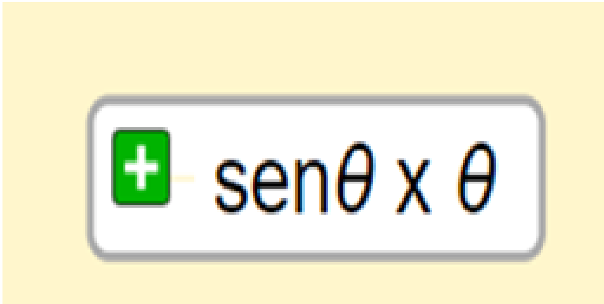
Ao clicar no botão acima, ele se expande e a janela assume o formato da figura 75.

6.2.2.13 Função tangente usando *PhEt*

Para finalizar as funções trigonométricas básicas, iremos mostrar como o *PhEt* apresenta a função tangente.

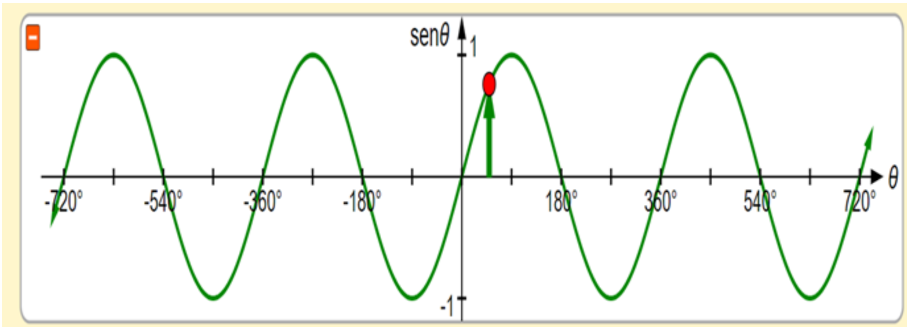
Ao clicar no botão da figura 76, ocorre sua expansão e a janela fica no formato da figura 78

Figura 70 – Botão com opção da função seno



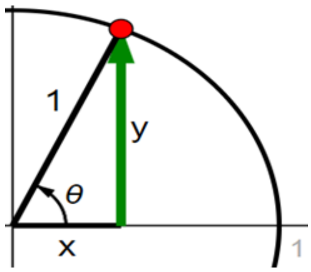
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 71 – Função seno



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

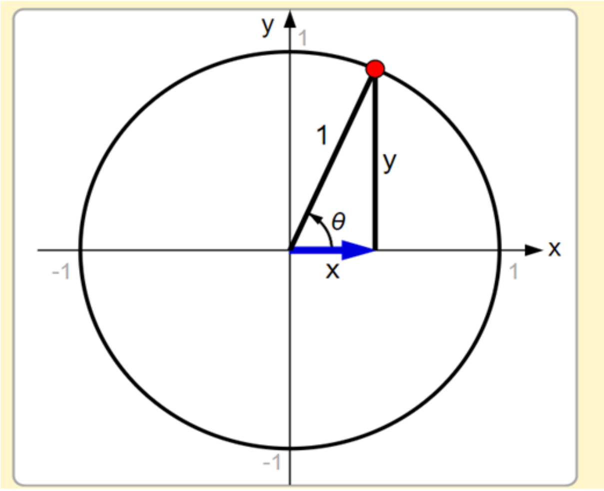
Figura 72 – Variações do seno



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

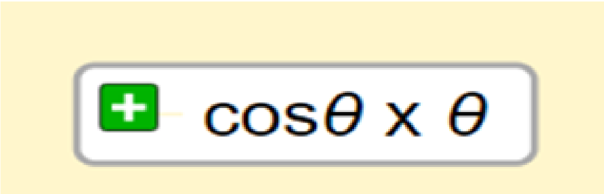
Basta que, de forma idêntica à apresentada anteriormente, coloquemos alguns ângulos e observemos como fica o comportamento do gráfico.

Figura 73 – Cosseno de um ângulo θ



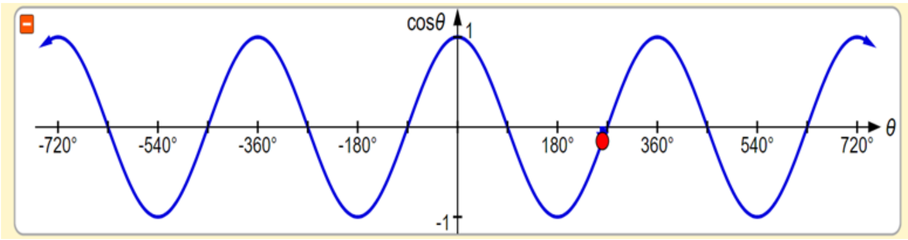
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 74 – Botão com opção da função cosseno



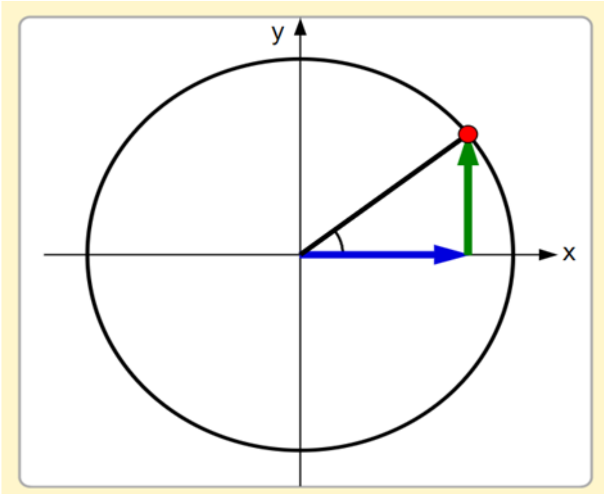
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 75 – $f(x) = cos(x)$



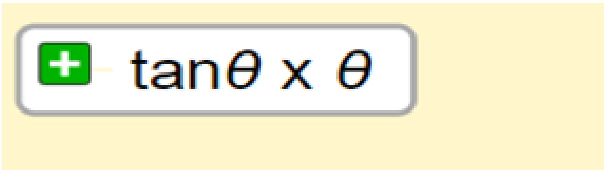
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 76 – tangente de θ



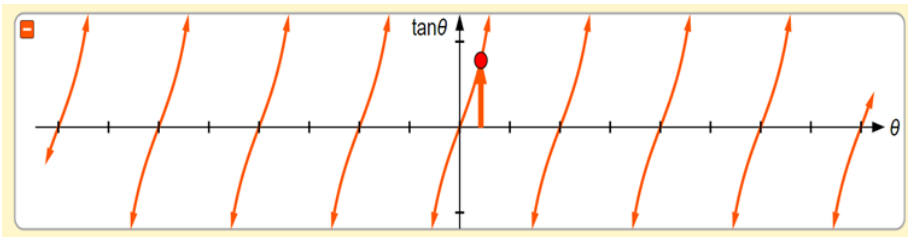
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 77 – Botão com opção da função tan



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 78 – $f(x) = \tan(x)$



7 Considerações finais

A ideia para este trabalho surgiu enquanto eu cursava a disciplina de recursos computacionais no ensino médio de matemática ofertada pelo Profmat, onde tive a oportunidade de usar o simulador *PhEt* como parte de um trabalho apresentado na referida disciplina. Portanto, a proposta aqui é mostrar uma alternativa que poderá tornar as aulas de matemática mais atraentes, visto que isso se faz necessário, uma vez que nossos estudantes estão tendo acesso à tecnologia cada vez mais cedo, e o uso dessas tecnologias é muito atrativo.

Como o simulador permite tirar o estudante da zona de conforto, tornando-o assim o principal agente de sua aprendizagem. Vale lembrar que o simulador está sempre passando por atualizações, as quais são responsáveis pela melhoria e enriquecimento de novas abordagens de conteúdo. Só para se ter uma ideia, somente no período de escrita deste trabalho, duas novas opções de simulação foram criadas. No entanto, apesar de todos os esforços, alguns recursos do simulador deixam a desejar. Por exemplo:

Até o presente momento, só temos a opção, caso queira trabalhar com frações, de apresentar o conceito de equivalência de frações. Não sendo possível, portanto, trabalhar com o conceito das quatro operações, o que tornaria muito mais proveitoso o tópico em questão. Outra coisa que poderia ser revista é o fato de que os coeficientes das funções afim e quadrática não são manipulados de forma direta, como ocorre em outros aplicativos. Ainda em relação às funções, mas agora se referindo às funções trigonométricas, só é possível visualizar as funções seno, cosseno e tangente e ainda assim essas funções já aparecem de forma direta, não sendo possível montá-las, como ocorre nos casos das funções afim e quadráticas.

Com o objetivo de auxiliar os colegas professores de matemática, foram produzidos alguns vídeos para apresentar os recursos disponíveis no simulador. Os vídeos não abordam definições ou conceitos matemáticos em si, uma vez que têm como público-alvo os professores de matemática. O foco dos vídeos é apresentar o simulador e oferecer sugestões para trabalhar alguns conteúdos que normalmente fazem parte do currículo do ensino médio. Assim que for criado um canal do Profmat no youtube os vídeos serão disponibilizados.

Referências

ANDRADE, T. M. et al. Matemática interligada–geometria espacial e plana. São Paulo: Editora Scipione, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 63, 64, 65, 66, 67 e 68.

BEZERRA, J. Toda Matéria. 2014. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/historia-dos-numeros-origem-e-evolucao-dos-numeros/>. Acesso em: 18 de janeiro de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 35.

BLANCO, R. A. Tresando. 2010. Disponível em: <https://tresando.com/2010/07/28/leibniz-e-a-substancia-do-mundo/>. Acesso em: 18 de janeiro de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

DICASDECALCULO. Acesso em: 19 de janeiro de 2024. Disponível em: <https://www.dicasdecalculo.com.br/conceito-de-funcao-contexto-historico/>. Citado 7 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34, 35, 36 e 37.

GUZMAN, H. J. Gráfico da função quadrática. 2023. Disponível em:https://br.neurochispas.com/algebra/dominio-e-imagem-das-funcoes-quadraticas/. Acesso em:19 de janeiro de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

Sá, R. História da Trigonometria. 2013. Disponível em:https://www.infoescola.com/matematica/historia-da-trigonometria/.Acesso em 28 de Janeiro de 2024. Citado 5 vezes nas páginas 61, 68, 69, 70 e 71.

TEIXERA, A. Divulgados os resultados do Pisa 2022. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022. Acesso em 14 de Março de 2024. Citado na página 16.

VIANNA, R. Aprendendo fração. 2020. Disponível em:http://fracaoaprendendo.blogspot.com/2017/04/historia-da-fracao.html. Acesso em:19 de janeiro de 2024. Citado na página 21.

YOUNG, G. D. Diagrams in ancient egyptian geometry: Survey and assessment. Historia Mathematica, Volume 36, Issue 4, Pages 321-373, 2009. Citado na página 19.

APÊNDICE A – Título do Apêndice

Texto referente ao apêndice.