INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

RODRIGO SIMÕES SINGH

Explorando Produtos Notáveis e Relações Algébricas: Uma Abordagem Visual Alinhada aos Registros de Representações Semióticas

IFSP
São Paulo
2024

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

Explorando Produtos Notáveis e Relações Algébricas: Uma Abordagem Visual Alinhada aos Registros de Representações Semióticas

RODRIGO SIMÕES SINGH

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho.

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

s617e Singh, Rodrigo Simões

Explorando produtos notáveis e relações algébricas: uma abordagem visual alinhada aos registros de representação semiótica / Rodrigo Simões Singh. São Paulo: [s.n.], 2024.

97 f.

Orientador: Henrique Marins de Carvalho
Co-orientador: Amari Goulart

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2024.

1. Matemática Visual. 2. Produtos Notáveis. 3. Teoria dos Registros de Representações Semióticas. 4. Mentalidades Matemáticas. 5. Sequência de Atividades. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

RODRIGO SIMÕES SINGH

Explorando Produtos Notáveis e Relações Algébricas: Uma Abordagem Visual Alinhada aos Registros de Representações Semióticas

Dissertação apresentada e aprovada em 02 de maio de 2024 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
IFSP – Campus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Thiago Porto De Almeida Freitas
UFCAT – Universidade Federal de Catalão
Membro da Banca

Prof. Me. Lucas Casanova Silva
IFSP – Campus São Paulo
Membro da Banca

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
DIRETORIA GERAL/CAMPUS SAO PAULO
Campus São Paulo, (11) 2763-7520, Rua Pedro Vicente, 625, CEP 01109-010, São Paulo (SP)

ATA DE DEFESA DE DISSERTACAO

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa da Dissertação intitulada **Matemática visual - produto notáveis e outras relações algébricas no Geogebra** apresentada pelo aluno **Rodrigo Simões Singh (SP3066827)** do Curs **MESTRADO PROFISSIONAL DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT (Campus São Paulo)**. Os trabalhos foram iniciados às **14:00** pelo Professor presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença	Aprovação/Conceito *(quando exigido)*
Henrique Marins de Carvalho (Orientador)	IFSP	presente	aprovado
Marcio Vieira de Almeida (Examinador Interno)	IFSP	presente	aprovado
Thiago Porto de Almeida Freitas (Examinador Externo)	UFCAT	presente	aprovado
Lucas Casanova Silva (Suplente Interno)	IFSP	presente	aprovado
Alexander Cruz de Souza (Suplente Externo)	Secretaria Estadual de Educação - MG	presente	aprovado

Observações:

a banca julgou o trabalho relevante para o campo de pesquisa no ensino de Matemática, fez a sugestão de alteração do título e recomendou correções e alterações que serão realizadas no prazo regulamentar.

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à argüição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

[x] Aprovado   [ ] Reprovado   Nota (quando exigido): _________

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

SÃO PAULO / SP, 02/05/2024

gov.br Documento assinado digitalmente
HENRIQUE MARINS DE CARVALHO
Data: 03/05/2024 18:15:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Henrique Marins de Carvalho

gov.br Documento assinado digitalmente
HENRIQUE MARINS DE CARVALHO
Data: 03/05/2024 18:16:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

p/ **Marcio Vieira de Almeida**

gov.br Documento assinado digitalmente
HENRIQUE MARINS DE CARVALHO
Data: 03/05/2024 18:45:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

p/ **Thiago Porto de Almeida Freitas**

Lucas Casanova Silva

Alexander Cruz de Souza

AGRADECIMENTOS

Queridos amigos, familiares e mentores,

É com imensa gratidão que dedico estas palavras a cada um de vocês, cujo apoio e presença foram fundamentais ao longo da minha jornada no mestrado.

Primeiramente, gostaria de expressar minha profunda gratidão ao IFSP por abrir as portas para esta oportunidade de crescimento acadêmico. O Instituto Federal de São Paulo não apenas me proporcionou uma experiência de excelência, mas também me ofereceu o ambiente propício para explorar e expandir meu conhecimento.

Ao Colégio Marista Arquidiocesano de São Paulo, minha segunda casa durante tantos anos, agradeço por permitir que eu aplicasse minhas atividades e realizasse minha pesquisa. Sua infraestrutura e apoio foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Henrique, meu orientador incansável, expresso minha sincera gratidão. Sua orientação sábia e encorajadora foi essencial para que eu pudesse percorrer este caminho com confiança e determinação.

Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, não tenho palavras suficientes para expressar minha gratidão. Obrigado por todo o amor, apoio e sacrifício que fizeram para me proporcionar oportunidades de crescimento acadêmico e pessoal.

E à minha esposa Kelly e filhos, Igor e Livia, que compreenderam meus momentos de ausência enquanto eu me dedicava a este trabalho, agradeço do fundo do meu coração. Esse apoio inabalável foi a força motriz por trás de cada palavra escrita nesta dissertação.

A cada um de vocês, meu mais profundo obrigado. Esta conquista não é apenas minha, mas de todos que contribuíram para o meu caminho até aqui. Que possamos continuar compartilhando nossas jornadas e celebrando nossas realizações juntos.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar o tema da Explorando Produtos Notáveis e Relações Algébricas: Uma Abordagem Visual Alinhada aos Registros de Representações Semióticas. A partir de dificuldades metodológicas enfrentadas no ensino da Matemática, especificamente em relação aos produtos notáveis, investigamos como uma Matemática mais visual pode ser útil para uma melhor compreensão do tema proposto. A pesquisa baseou-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e na abordagem Mentalidades Matemáticas, proposta por Jo Boaler. Nessa pesquisa, desenvolvemos, aplicamos e analisamos uma sequência de atividades para o ensino de produtos notáveis e suas formas de fatoração. Assim, por meio das referências e do resultado da aplicação, foi possível concluir que houve a apreciação da dinâmica diferenciada das atividades com o potencial de promover uma aprendizagem mais profunda e significativa. As respostas dos alunos refletem a importância de uma abordagem diversificada e inclusiva para o ensino da Matemática, que valoriza a variedade de registros de representação semiótica e promove uma educação Matemática mais envolvente e transformadora.

Palavras-chave: Matemática Visual; Produtos Notáveis; Geogebra; Teoria dos Registros de Representações Semióticas; Mentalidades Matemáticas; Sequência de Atividades.

ABSTRACT

The aim of this research was to investigate the topic of Exploring Notable Products and Algebraic Relations: A Visual Approach Aligned to Registers of Semiotic Representations. Based on methodological difficulties faced in the teaching of mathematics, specifically in relation to notable products, we investigated how a more visual mathematics can be useful for a better understanding of the proposed topic. The research was based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers and the Mathematical Mindsets approach proposed by Jo Boaler. In this research, we developed, we apply and analyzed a sequence of activities for teaching notational products and their factorization forms. Thus, through the references and the results of the application, it was possible to conclude that there was an appreciation of the differentiated dynamics of the activities with the potential to promote deeper and more meaningful learning. The students' responses reflect the importance of a diverse and inclusive approach to teaching mathematics, which values the variety of semiotic representation registers and promotes a more engaging and transformative mathematics education.

Translated with DeepL.com (free version)

Keywords: Visual Mathematics; Notable Products; Geogebra; Theory of Registers of Semiotic Representations; Mathematical Mindsets; Activity Sequence.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No âmbito de um programa de Mestrado Profissional em Matemática, é esperado que as dissertações tenham um forte vínculo com a prática docente. A experiência profissional do autor, com mais de 18 anos de dedicação ao ensino da Matemática em sala de aula, testemunhou de perto as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao tentar compreender e atribuir significado ao estudo de produtos notáveis e suas formas de fatoração. Sua preocupação central reside na observação de que a abordagem tradicional, baseada na memorização de fórmulas e procedimentos, muitas vezes impede os alunos de desenvolver uma compreensão profunda e uma análise flexível dos conceitos. Isso, por sua vez, contribui para a criação de obstáculos ao aprendizado e pode gerar aversão à disciplina. Esta experiência direta motivou a pesquisa presente nesta dissertação, buscando explorar abordagens alternativas que promovam uma compreensão mais significativa e duradoura dos produtos notáveis no contexto do ensino de Matemática. Tomando o aplicativo de geometria dinâmica Geogebra, associado à teoria de Raymond Duval e à abordagem proposta por Jo Boaler, identificou-se uma oportunidade de elaborar e propor uma sequência de atividades como alternativa na busca por soluções para os problemas de aprendizagem da Matemática.

Atualmente, a preocupação não se limita apenas à aprendizagem e ao ensino, mas também à forma como o conhecimento pode ser elaborado para ser ensinado e aprendido. Nas diversas pesquisas examinadas, com base nos diferentes registros de representação semiótica de Duval, analisa-se a aprendizagem e o ensino da Matemática em relação às características semióticas das representações Matemáticas. Além disso, nos diferentes estudos pesquisados sobre mentalidades Matemáticas de Boaler, propõe-se uma reflexão sobre a abordagem, ensino e percepção da Matemática ao longo do tempo.

Nesse sentido, é relevante elaborar uma sequência de atividades para o ensino dos produtos notáveis e suas formas de fatoração, pois pode-se mostrar que o uso dos diferentes registros de representações semióticas, aliado à abordagem proposta nas mentalidades Matemáticas no ensino-aprendizagem de produtos notáveis e suas formas de fatoração, permite compreender a importância de ensinar de várias maneiras um mesmo conteúdo em sala de aula. A utilização dessas abordagens pode ajudar os alunos a atingir a informação desejada, uma vez que cada mente pensa de maneira diferente e cada pessoa tem diferentes formas de aprender.

Em resposta à pergunta central sobre o impacto do uso de uma sequência proposta no aprendizado de produtos notáveis, considerando diferentes representações, e seu efeito na mudança de práticas e na relação dos alunos com o aprendizado de Matemática, o objetivo geral consistiu em investigar esse impacto e avaliar as mudanças decorrentes nas práticas e na relação com o aprendizado de Matemática.

Conforme afirma Jo Boaler, podemos estimular o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens e do ensino inovador (Boaler, 2018). É por este caminho que essa pesquisa buscará desvendar tudo o que temos em mãos e que podemos usar para impulsionar os alunos a aprenderem mais e com mais qualidade, atendendo às diversas demandas do mundo contemporâneo.

É importante buscar a criação de um ambiente de estudo no qual as crenças limitantes sobre o erro sejam totalmente contornadas ou ressignificadas, pois a visão antiga de que o erro é negativo ou algo a ser evitado é ultrapassada. Durante toda a vida, ninguém está isento de erros, e devemos mostrar aos alunos que errar faz parte do processo de aprendizado e deve ser encarado como construção de conhecimento (Boaler, 2018).

Os ambientes de sala de aula, especialmente nas aulas de Matemática, frequentemente transmitiam a ideia inatista do conhecimento, sugerindo que uma pessoa nasce com ou sem habilidade para a Matemática. No entanto, pesquisas no campo da neurociência, citadas por Jo Boaler, demonstram que essa visão é limitada e equivocada. Estudos, como o de Supekar et al. (2013), revelam que enquanto algumas pessoas podem memorizar fatos matemáticos com mais facilidade devido a diferenças no hipocampo, isso não se correlaciona com uma habilidade matemática geral ou inteligência superior. Além disso, a neurociência mostra que o cérebro é altamente plástico e capaz de mudar e crescer com a prática e o aprendizado, indicando que todos os estudantes têm potencial para aprender Matemática em altos níveis, independentemente de uma aptidão inata percebida. Ademais, a ênfase em testes cronometrados e na memorização de fatos matemáticos pode gerar ansiedade e desencorajar muitos estudantes, impedindo o desenvolvimento de uma compreensão profunda e flexível da matemática (Boaler, 2018). Portanto, a habilidade matemática não é fixa, mas pode ser desenvolvida com a educação apropriada, reforçando a importância de métodos de ensino que promovam a compreensão e a prática contínua.

De acordo com Boaler (2018), o peso combinado de todas as diferentes ideias errôneas sobre Matemática que prevalecem na sociedade é devastador para muitas crianças. Elas acreditam que a capacidade de aprender Matemática é um sinal de inteligência, que a Matemática é um dom e que, se não possuem esse dom, são ruins em Matemática e também são pessoas sem inteligência e incapazes de serem bem-sucedidas na vida.

Contudo, acreditamos que as abordagens de Boaler e as diferentes representações semióticas propostas por Duval permitem uma inter-relação de conteúdos que promove diferentes visões para um mesmo conceito e contribui para a transição do ensino tradicional para um ensino mais dinâmico. A consolidação dessa pesquisa é um diferencial imprescindível nos conhecimentos dos alunos, pois visa solucionar os problemas encontrados hoje em sala de aula quando se trata de Matemática, pois muitos não se interessam pela disciplina porque acreditam que não podem aprendê-la.

Nessa pesquisa, demonstramos como o referencial teórico respaldará o ensino dos Produtos Notáveis e seus processos de fatoração, e como o uso da Matemática visual e do programa Geogebra pode auxiliar os estudantes. Desvendamos e diagnosticamos como a semiótica se apresenta e se consolida; mostraremos a visão geral da técnica voltada para o ensino matemático e como ela pode ser aplicada de modo efetivo. Desenhamos os moldes para a criação de conteúdo significativo sobre o nosso tema proposto.

As informações sobre a semiótica são instrumento-chave para essa pesquisa, visto que ela define muitas das habilidades e conceitos necessários para ensinar e alcançar significativamente o outro, neste caso, os alunos.

A abordagem e avaliação desenvolvidas são baseadas na proposta de Boaler, chamada Mentalidades Matemáticas. Esse conceito foi utilizado sob diversos aspectos na pesquisa como fundamentação e orientação.

O que acontece com nosso cérebro quando visualizamos um determinado conceito em uma atividade Matemática? Como podemos combater os efeitos dos erros e criar um ambiente no qual a visualização faça parte do processo natural de aprendizagem? Sendo assim, a finalidade geral dessa pesquisa é tornar-se um instrumento útil para os leitores. Através do desenvolvimento das atividades propostas, possibilitamos aos estudantes, sujeitos desta pesquisa, avançar e compreender, a partir do uso e da visualização das ferramentas de um jogo criadas no software Geogebra, o objeto matemático: produtos notáveis e suas formas de fatoração.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Essa dissertação foi desenvolvida e embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na abordagem denominada Mentalidades Matemáticas de Jo Boaler e teve finalidade de elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática para o ensino de produtos notáveis e suas formas de fatoração.

A teoria de Duval foi construída a partir da verificação das dificuldades de conceitualização de estudantes e, assim, adota uma perspectiva cognitiva para aprofundar a compreensão dos alunos nos processos matemáticos. Neste trabalho, procuramos investigar se há e como se dá a mobilização de diferentes registros diante das propostas envolvendo os produtos notáveis.

Boaler propõe uma abordagem educacional para a Matemática que é holística, inclusiva e baseada na compreensão conceitual profunda. Em um ambiente de aprendizagem livre de estereótipos, todos os alunos são incentivados a acreditar em sua capacidade de alcançar um alto nível de proficiência Matemática. Essa abordagem, fundamentada em descobertas da neurociência, reconhece a plasticidade do cérebro e promove a ideia de que a inteligência e as habilidades Matemáticas podem ser desenvolvidas por qualquer pessoa, desafiando assim os mitos sociais de que o saber matemático é fruto de um talento inato reservado a alguns poucos privilegiados. Boaler enfatiza ainda a importância do registro visual de objetos matemáticos, que foi um aspecto importante da pesquisa.

Ao integrar as contribuições de Duval e Boaler, este trabalho buscou proporcionar uma visão abrangente e inovadora para o ensino de Matemática, especialmente no contexto dos produtos notáveis e suas formas de fatoração. Reconhecemos a importância de uma abordagem pedagógica que valorize tanto a compreensão conceitual profunda quanto a mobilização eficaz de diferentes registros de representação. Nas próximas seções, aprofundaremos nossa análise, explorando como essas teorias podem ser aplicadas na prática educacional e examinando os resultados de nossa investigação sobre a mobilização de registros no contexto específico dos produtos notáveis.

1.1. As mentalidades: a Matemática visual de Jo Boaler

O processo de aprendizagem de um determinado assunto é composto de múltiplas peculiaridades, variações essas que juntas compõe o aprendizado, ou seja, tem características e influências de diversas áreas, seja influência psicológica, social, cognitiva entre outras.

A conscientização dos professores a respeito dessas diversas vertentes e canais de influência dão a eles as ferramentas relevantes e extremamente necessárias para que construam e consolidem uma metodologia mais adequada ao processo de aprendizagem dos alunos, trazendo assim uma nova didática para as instituições de ensino. Uma dessas ferramentas do processo de aprendizagem está relacionada ao conceito de mentalidades proposto por Jo Boaler.

Para Boaler (2018) é crucial debater sobre a mentalidade de crescimento, que envolve a convicção de que a inteligência pode ser ampliada significativamente. Refletir sobre essa crença é fundamental, pois implica na ideia de que quanto mais se aprende, mais possibilidades se abrem na exploração dos caminhos matemáticos.

No entanto, para vencer décadas do fracasso do ensino da Matemática, é preciso fazer com que os alunos eliminem suas crenças limitantes e tenham novas crenças, crenças de crescimento sobre si mesmo e, também, crenças de crescimento a respeito da origem, da “natureza da Matemática”, além de entender qual o seu papel como aluno em relação a todo esse contexto. O aluno precisa enxergar que a aprender Matemática é uma transformação progressiva quantitativa e qualitativa e que precisa fazer sentido.

Para Maciel (2022), Boaler expõe em seu estudo que quando as crianças ainda são bem jovens, costumam gostar bastante de Matemática, afinal, durante muito tempo na infância delas as brincadeiras que mais deixam as crianças concentradas são as de construir e ordenar blocos coloridos, isso faz com que as crianças fiquem fascinadas com aquelas diferentes formas, e elas brincam alegremente fazendo repetitivos padrões, e esse contexto aponta as diferentes constatações de que elas são usuárias e pensadoras da Matemática natural.

No entanto, a alegria e o contentamento com que as crianças experimentam a Matemática na infância são rapidamente destituídos quando as abordagens não favorecem o aprendizado, em muitos a satisfação desaparece, e é substituída pelo medo, pavor e antipatia pela disciplina.

Verifica-se que quando eles começam a Matemática na fase escolar, eles são inseridos num contexto em que existe um aparato de métodos secos e complexos, ou seja, métodos que geralmente se concentram na memorização mecânica de fórmulas, procedimentos e algoritmos, que eles pensam que só devem aceitar e lembrar num momento de avaliação.

Maciel (2022), apoiada nos trabalhos de Boaler, também afirma que, para alterar essa mentalidade, é necessário estimular as crianças a se envolverem em atividades que envolvam quebra-cabeças, formas geométricas e números, incentivando-as a refletir sobre suas inter-relações. Nos primeiros anos escolares, devido ao sistema educacional histórico e estabelecido, os educadores tendem a se concentrar exclusivamente em métodos matemáticos formais, como adição, subtração, divisão e multiplicação de números.

De acordo com Boaler (2018), nessa etapa, as crianças tendem a abandonar abordagens Matemáticas flexíveis, adotando mentalidades fixas e procedimentais, onde realizam atividades sem compreender seu significado. Isso representa um momento crítico no qual educadores e pais devem apresentar a Matemática como um tema conceitualmente flexível, relacionado ao pensamento e à vida da criança. É essencial que ela entenda como aplicar seus conhecimentos de forma prática no futuro, mantendo essa conexão mental intacta, livre de conceitos sem sentido. O domínio inicial do trabalho numérico pelos pequenos exemplifica as duas mentalidades que podem ser desenvolvidas no futuro: a negativa, que leva ao fracasso, e a positiva, que resulta em sucesso e em um mundo repleto de oportunidades diversas.

Nesse contexto enfatizamos a relevância do educador compreender o processo de aprendizagem, podendo, desse modo, potencializar suas aulas para que elas sejam muito mais produtivas e que possibilitem aos alunos aprender no seu ritmo e com mais qualidade, e faremos isso no capítulo posterior a este que vai tratar dos diferentes registros de representações semióticas proposta por Raymond Duval.

Ainda de acordo com Boaler (2018), há três processos que ocorrem no cérebro quando aprendemos algo: 1) a formação de conexões entre os caminhos neurais, conhecidas neurologicamente como sinapses, que é a maneira como o cérebro se organiza para conectar informações e facilitar o aprendizado; 2) a criação de novos padrões mentais, nos quais o cérebro forma um caminho delicado para uma nova informação, que se fortalece com a repetição, garantindo sua consolidação na memória; 3) o fortalecimento de caminhos neurais existentes, ampliando nosso conhecimento e facilitando a assimilação de novas informações. Esse processo ocorre através da consolidação do estímulo dessas conexões com os conhecimentos prévios, atuando como facilitadores para a compreensão de novos assuntos.

No seu livro *Mentes sem barreiras,* Boaler (2020), demonstra que todas as pessoas sem distinção possuem a capacidade de aprender Matemática, desde que exercitem seus cérebros, ou seja, desde que desenvolvam essa habilidade de modo contínuo e da maneira correta. Para melhorar a compreensão do que estamos expondo aqui segue a figura 1, onde a autora explica como se aprende.

Figura 1: Esquema de como se aprende a partir de mentalidades Matemáticas.
Fonte: Próprio Autor, adaptado de Boaler (2020).

Na figura 1, é evidente que a memória de trabalho corresponde à memória de aprendizagem, responsável por receber os estímulos e as informações diversas que recebemos. Esses estímulos são constantemente recebidos pelo indivíduo e, em alguns casos, filtrados para dentro da memória de trabalho. Após esse processo, ocorre a assimilação, que associa as novas memórias às já existentes, formando uma nova memória, “quando aprendemos uma nova ideia, uma corrente elétrica dispara em nossos cérebros, passando por sinapses e ligando-se a diferentes áreas cerebrais”. (Boaler, 2018)

Esse é o processo mais fantástico que podemos compreender, pois ele mostra a capacidade de nossa mente de receber, codificar e armazenar informações mostrando que, o ser humano é o único ser capaz de fazer esse processo e isso não é uma capacidade destinada a apenas um grupo de pessoas, todos nós podemos aprender qualquer coisa com o estímulo correto.

De acordo com o exposto, essa corrente elétrica e as diferentes ligações em nossas áreas do cérebro vão constituir as sinapses se referindo aos pensamentos e raciocínios produzidos, dadas as conexões antigas e o encontro das novas memórias.

Após essa espécie de "choque" do conhecimento, surge uma nova compreensão e a memória de longo prazo se solidifica. Assim, é crucial entender o funcionamento do processamento do pensamento cognitivo, isto é, como os estímulos são recebidos, processados e convertidos em informações, pois esse acaba sendo uma ferramenta fundamental para entender a Matemática visual (Boaler, 2020).

Uma abordagem visual na educação Matemática emerge como uma estratégia essencial, dado que as imagens não apenas ilustram, mas também personificam objetos matemáticos de significado tangível para os alunos. Ao representarem esses objetos, as imagens se tornam pontes entre conceitos abstratos e a compreensão concreta, proporcionando um caminho acessível e envolvente para a assimilação do conhecimento matemático. Verificamos que as novas pesquisas sobre o cérebro humano nos mostram que ela inclusive melhora a racionalização lógica, estimula a criatividade e instiga o raciocínio dedutivo, ajudando na organização de informações e no desenvolvimento da capacidade de formalizar problemas. Boaler faz menção a estudos, citando Siegler e Ramani (2008), Berteletti e Booth (2015), Reimer (2005), Sowell (1989), Zimmermann e Cunningham (1991), entre outros, que evidenciam que o reconhecimento e a promoção de abordagens visuais resultam no desenvolvimento de diversas regiões cerebrais e na expansão do pensamento lógico.

Para Boaler (2018), a abordagem das Mentalidades Matemáticas refere-se à abordagem ativa do conhecimento de Matemática, na qual os alunos conseguem enxergar seu papel dentro do contexto matemático, como por exemplo: o de compreensão e o da busca de sentido naquela atividade. Verifica-se que é necessário fazer o aluno passar por experiências para que ele possa articular os mais diversos modos de conhecimento. A autora confirma em seu estudo que através da prática dos conhecimentos e dos exercícios com objetos, que se consegue explorar e desenvolver o máximo possível dos quatro lóbulos cerebrais: o frontal, o temporal, o parietal e o occipital. Para entendermos o que isso significa, vamos explicar o que cada um desses lóbulos faz dentro do cérebro humano (Maciel, 2022):

- **Lóbulo Frontal:** é o responsável por processar, sistematizar e organizar os pensamentos;
- **Lóbulo Temporal:** é o responsável pela audição e por algumas emoções do indivíduo;
- **Lóbulo Parietal:** é o responsável pelo tato, dor, temperatura e sistema gustativo e;

- **Lóbulo Occipital:** é o responsável pela visão.

Para compreender como os estímulos afetam as pessoas, e como atuam os lóbulos cerebrais, Boaler (2018) vincula a esse evento a psicogênese e se refere ao seguinte exemplo do processo de alfabetização: quando uma criança está tendo seu primeiro contato com as letras e a associação delas às imagens (psicogênese), é possível estimular sua aprendizagem de maneira dinâmica. Por exemplo, ao ensinar a letra "B", pode-se sugerir atividades como cheirar uma banana, criar histórias sobre ela e, em seguida, saborear a fruta. Essas ações ativam os quatro lóbulos cerebrais da criança, contribuindo para a aprendizagem da letra "B". Ao visualizar a banana, o lóbulo occipital é estimulado pela formação de imagens. Ao sentir o cheiro da banana e manipulá-la, o lóbulo parietal é ativado, o que estimula o processo de reorganização do pensamento, envolvendo o lóbulo frontal. Esse exemplo ilustra como o professor pode aproveitar situações do cotidiano para estimular os lóbulos cerebrais e promover a aprendizagem na sala de aula (Maciel, 2022).

Vemos com isso que a autonomia do indivíduo se dá por meio das potencializações de suas capacidades, não obstante, é através de elogios adequados que podemos estimular pessoas, dentro de uma sala de aula esse tipo de comportamento possibilita transmitir ao aluno o incentivo para a superação de suas limitações e o vencer de suas dificuldades.

Quando a aprendizagem Matemática se dá relacionada a esses tipos de conexões e pistas cerebrais, os alunos se sentem respeitados e o seu desenvolvimento vem naturalmente por meio do próprio convencimento de que eles por si mesmos são absolutamente capazes, o que é uma afirmação completamente verdadeira e não apenas uma suposição ou sugestão falsa.

Nesta situação, observamos que a mentalidade Matemática influencia uma abordagem dinâmica do conhecimento matemático, em que os alunos encaram seu papel como compreensão e atribuição de sentido. O conceito de senso numérico reflete uma compreensão sólida da Matemática, surgindo de uma mentalidade Matemática voltada para dar sentido aos números e às quantidades (Maciel, 2022).

É viável refletirmos sobre a formação do senso numérico nos alunos, não apenas devido ao fato de que o senso numérico constitui a base para a compreensão da Matemática em todos os níveis, mas também porque o senso numérico e a mentalidade Matemática evoluem em conjunto, e o desenvolvimento de um auxilia no aprimoramento do outro (Maciel, 2022).

Ainda citando Maciel (2022), temos exemplos dessa forma de abordagem: ao receberam um problema como o “21 - 6”, os alunos de alto desempenho facilitaram, ou melhor, simplificaram o problema mudando-o para “20 - 5”, no entanto, os alunos de baixo desempenho contaram para trás, começando aos 21 e em contagem regressiva, o que é difícil de fazer, já que desse modo estão mais propensos a erros.

Quando refletimos sobre o caso, constatamos que a discrepância entre os alunos que obtêm resultados elevados e aqueles com desempenho inferior não reside na falta de conhecimento matemático, mas que cada grupo interage com a Matemática de modos totalmente diferentes. Enquanto o grupo de alto desempenho aplica mais conceitos lógicos de raciocínio os outros estão mais presos, enrijecidos naquilo que eles conhecem, mas que não conseguem interpretar com autonomia em suas mentes.

Isso ocorre provavelmente porque foram direcionados para um caminho inadequado desde uma idade precoce, quando crianças, e todo o seu conhecimento é baseado na memorização de métodos e fatos numéricos, em vez de desenvolver uma interação flexível com os números (Maciel, 2022).

A interação com números faz a diferença. Saber desmembrar fórmulas, pensar livremente, de trás pra frente, de frente pra trás, saber e entender os porquês, o motivo de podermos fazer um determinado caminho com os números e entender que o resultado pode ser o mesmo, mas a relação de sentido que podemos encontrar pode ser muito diferente daquela pela qual estamos acostumados a encontrar, e isso é o que faz a Matemática ser tão bonita quando explorada e temos o dever de apontar esse caminho ao aluno, corrigindo tudo aquilo que já foi historicamente ensinado por décadas.

Para Maciel (2022), a compreensão da Matemática não deve se limitar a uma lista de métodos e regras; ela abrange muito mais do que isso. Ao incentivar os alunos com recursos visuais, é possível envolver não apenas uma, mas várias regiões do cérebro, facilitando assim uma aprendizagem mais completa e profunda, e é esse processo que vai trazer evolução ao nível de aprendizado.

Outro aspecto importante a ser considerado na educação Matemática, e um dos problemas mais comuns encontrados, é a aversão ao erro, o que reflete uma visão restrita. Boaler (2018) destaca a importância do "poder dos erros", uma informação crucial, já que muitas vezes nos sentimos mal quando cometemos erros matemáticos. A ideia de que todos devem realizar tarefas sem cometer erros não permite que os alunos reflitam sobre as situações apresentadas. Boaler (2018) salienta que devemos encarar o erro como parte natural do processo de aprendizagem, pois é através dele que o cérebro se desenvolve e aprende de forma mais eficaz. Assim, os erros são compreendidos como uma parte integrante do processo de aprendizagem, contribuindo para o crescimento cognitivo (Boaler, 2018).

Contudo, quando os alunos enxergam a Matemática como um vasto território repleto de quebra-cabeças ainda não resolvidos, onde podem livremente explorar, questionar e refletir sobre conexões, eles compreendem que seu papel é pensar, encontrar significado e evoluir. Ao perceberem a Matemática como um conjunto de conceitos interligados, tudo passa a fazer sentido para eles. Dessa forma, desenvolvem uma mentalidade Matemática sólida (Maciel, 2022).

Portanto é fundamental que se ensine Matemática usando como ferramenta a abordagem da visualização de imagens. Querendo trazer esse conhecimento para o ensino específico dos produtos notáveis, e suas fatorações, podemos utilizar elementos práticos e imagens para elucidar a prática para o aluno, afinal a mentalidade Matemática se manifesta em uma abordagem dinâmica do aprendizado, na qual o aluno deve entender completamente o processo em que está envolvido e este deve ser significativo para ele. Assim, a mentalidade Matemática emerge no indivíduo através dessa compreensão profunda, permitindo que um conteúdo específico tenha relevância para ele.

1.2. Registros de representações semióticas

Muitas vezes a representação de um mesmo objeto da Matemática se beneficia da inclusão de elementos visuais como desenhos, gráficos, figuras, tabelas e esquemas. Em termos de aprendizagem Matemática, a teoria dos registros de representação semiótica de Duval oferece uma valiosa contribuição.

Raymond Duval revelou, através de suas pesquisas em educação Matemática, que o uso da semiótica apresenta resultados extremamente positivos e vamos entender um pouco mais a respeito dessa teoria do autor.

De acordo com Machado (2003), os estudos de Raymond Duval tiveram a finalidade de expor toda essa relevância da semiótica dentro do estudo da Matemática. Já sabemos que essa é uma disciplina complexa e levar em consideração essa teoria para o estudo dela faz com que essa complexidade seja dirimida e a aprendizagem em Matemática seja mais eficiente.

A teoria desenvolvida por Raymond Duval aborda os obstáculos enfrentados pelos alunos na compreensão de conceitos matemáticos, utilizando uma perspectiva cognitiva para auxiliá-los a aprofundar seu entendimento dos processos matemáticos. Seus estudos enfatizam que é essencial que tenhamos um ensino baseado nos registros de representação semiótica para aprimorar a aprendizagem da Matemática.

Aperfeiçoar a Didática da Matemática foi o esforço proposto por Duval, e verificamos que nesse processo de ensino e aprendizagem ele teve bons resultados, os relatos de ensino com uso da semiótica se tornaram promissores e motivaram alunos a aprender mais e melhor.

Na época, o autor realizou um colóquio, ou seja, uma reunião de especialistas em Matemática que aconteceu para discutir e confrontar informações e opiniões pessoais sobre um determinado tema que era o uso da semiótica na Matemática.

Duval (2012) apresentou e divulgou um texto intitulado "Descrever, visualizar ou raciocinar: quais "aprendizagens primeiras'' da atividade Matemática?". Com essa questão, ele mais uma vez ressalta de maneira específica que o pensamento matemático vai além do simples ensino de números. Este é um convite ao raciocínio e, portanto, à aprendizagem na Matemática, ou seja, as representações semióticas devem ser utilizadas como o acesso direto aos conceitos matemáticos.

Assim, para o autor, descrever, raciocinar e visualizar na Matemática estão intimamente ligados ao uso de registros de representação semiótica. Portanto, é essencial que os alunos desenvolvam essas tarefas e habilidades, sendo nosso maior desafio compreender como fazê-lo. Isso é especialmente importante para aplicar toda a teoria estudada neste contexto específico, como nos produtos notáveis e suas fatorações.

De qualquer modo, se a Teoria de Raymond Duval tem sido aprofundada cada vez mais e, simultaneamente, os estudos em educação Matemática encontram apoio nesse direcionamento para explorar a complexidade do aprendizado em Matemática ou disciplinas exatas, então, entender como essa teoria foi desenvolvida e por que tem recebido tão ampla aceitação entre os pesquisadores em educação Matemática pode nos auxiliar na questão que vamos investigar. Até porque, esse é um modo de fundamentarmos o uso da semiótica também associada aos conceitos de Jo Boaler.

Para isso, é necessário entender os fundamentos do estudo de Duval e os princípios sobre os quais essa teoria é construída. A semiótica é a teoria que estuda as representações em geral, abrangendo os sinais em todas as suas formas e manifestações, sejam elas linguísticas ou não; é a área de estudo dedicada à análise de todos os signos, nos processos de significação presentes na natureza e na cultura.

Para Duval (2012), a representação semiótica no aprendizado da Matemática está principalmente ligada ao funcionamento cognitivo do aluno. Ou seja, o funcionamento cognitivo envolve todos os processos que são necessários para o aluno perceba, selecione, processe e armazene determinada informação, são atividades de inteira importância num complexo processo como a leitura, por exemplo, e como estamos falando de Matemática, seria como o aluno visualiza e interpreta os diversos símbolos matemáticos e consolida seu entendimento.

Ainda segundo Duval (2012), o pensamento está intimamente ligado às operações semióticas, o que implica que a compreensão e o entendimento são impossíveis sem acesso aos recursos proporcionados pelas representações semióticas. Além disso, as representações no âmbito da Matemática são cruciais, pois os objetos matemáticos, sendo inacessíveis à percepção direta, só podem ser compreendidos por meio de sua representação gráfica. É importante ressaltar que um mesmo objeto matemático pode ser representado de diferentes maneiras, dependendo da necessidade e do propósito de seu uso.

Por exemplo, no caso do trinômio do quadrado perfeito, pode-se utilizar um registro de representação linguística, como "o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo", um registro de representação simbólica ($x^2 + 2xy + y^2$), ou ainda, um registro de representação geométrica (Figura 2).

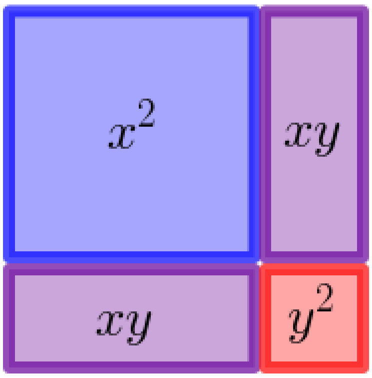


Figura 2: Quadrado da soma de dois termos.

Fonte: Próprio autor.

Em Matemática, usamos símbolos diversos para entendê-la melhor, e tal simbologia é uma parte intrínseca dela, como os sinais comuns de Matemática que conhecemos, e no geral, para representar a Matemática nós usamos os diversos sinais significativos dela, ou seja, a soma, a multiplicação e outros comandos para serem identificados é necessário que coloquemos lá no comando de cada exercício um símbolo que vai dizer e determinar do que exatamente nós estamos falando.

Desde a infância, o ser humano está familiarizado com os símbolos, que chamamos de signos, mas infelizmente no decorrer do tempo, vamos crescendo sem entender que a Matemática vai com o passar do tempo se tornando complexa, e que esses símbolos vão se aperfeiçoando para que haja um aumento do conhecimento matemático, e consequentemente não são somente os símbolos de mais ou de menos que deveremos compreender, mas outros diversos símbolos tão relevantes quanto eles que precisam ser incorporados em nossos conhecimentos para que possamos nos sair bem nessa disciplina.

Para o autor, o que muitos educadores discutem na atualidade, é que: muitos alunos têm dificuldade na Matemática básica e por isso não avançam, a dificuldade de se apreender os símbolos primários, muitas vezes é a causa de um aluno do ensino fundamental ou médio não avançar ou mesmo saber resolver uma equação do 2º grau por exemplo.

Além disso, a contribuição de Duval para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática reside em destacar a limitação de usar apenas um único método de representação semiótica para expressar um mesmo conceito matemático. Isso ocorre porque uma única abordagem não assegura a compreensão, ou seja, a aprendizagem.

Permanecer preso a apenas um método de representação implica em considerar essa representação como sendo o próprio objeto matemático. Portanto, para evitar a confusão entre o objeto e o conteúdo de sua representação, é necessário ter pelo menos duas representações, de forma que ambas sejam reconhecidas como retratando o mesmo conceito.

Distinguir entre um objeto e sua representação é, portanto, crucial para a compreensão da Matemática. Na Matemática, o estudo de um objeto e seu significado vão além de um simples cubo ou triângulo, e uma vez que esse conhecimento é transmitido ao aluno de modo claro e preciso ele poderá entender o fundamento básico da Matemática em sua essência.

Este aspecto é bastante significativo, a ponto de muitos autores de manuais escolares mais engajados no ensino destacarem repetidamente essa distinção em suas obras para os alunos. O que estamos enfatizando aqui é que o foco deve estar no objeto que está sendo representado, e não nas várias formas possíveis de representação semiótica desse objeto.

No entanto, as diversas representações semióticas de um determinado objeto matemático são verdadeiramente precisas. O que podemos verificar com essa afirmativa é que tanto a percepção quanto a experiência intuitiva de um objeto matemático podem não ser de modo imediato, como comumente acontece quando os objetos são reais ou físicos. Portanto, é nesse contexto que constatamos ser necessário lhes dar representantes.

Em contrapartida, a possibilidade de se fazer tratamentos a respeito dos objetos matemáticos vai depender do processo de representação semiótico que está sendo aplicado. Para tirar a prova disso, basta levarmos em conta o caso do cálculo numérico, pois, os métodos variam de acordo com o conjunto de ferramentas de escrita utilizadas. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na prática da Matemática.

As modificações que transformam uma representação em outra representação semiótica estão na existência da atividade Matemática, esse processo é motivo da Matemática existir. As dificuldades dos alunos para entenderem a Matemática vão acontecer exatamente por causa das diferenças e das complexidades dessas modificações. Para simplificar essa complexidade, é necessário examinar as representações semióticas não apenas em relação aos objetos ou conceitos matemáticos que elas representam, mas sim entender o funcionamento representacional específico do registro no qual são criadas.

Essa perspectiva pode ser considerada como uma contradição no pensamento cognitivo matemático, pois inicialmente sugere que a compreensão dos objetos matemáticos é fundamentalmente conceitual, mas em seguida destaca que é somente através de representações semióticas que as tarefas relacionadas a esses objetos se tornam viáveis. Esse paradoxo pode constituir um ciclo significativo de aprendizado. Como as pessoas que estão em processo de aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem acessar apenas as representações semióticas?

Então, quando há a impossibilidade de acesso aos objetos matemáticos, fora de todo o contexto das diferentes representações semióticas, é provável que ocorra confusão. Além disso, o oposto também é verdadeiro, pois como as pessoas podem adquirir habilidades em procedimentos matemáticos intimamente ligados às representações semióticas se elas não possuem um entendimento conceitual genuíno dos objetos que estão sendo representados?

Quando abordamos questões de Matemática e seus conceitos, essa contraposição ou paradoxo se torna ainda mais evidente, especialmente quando consideramos as representações semióticas como secundárias ou externas. Esse paradoxo cognitivo no ensino da Matemática não é reconhecido comumente, principalmente devido à maior ênfase nas representações mentais em comparação com as representações semióticas.

As representações "mentais" englobam as imagens e, de forma mais abrangente, os diversos conceitos que um indivíduo pode ter sobre um objeto, uma situação ou algo associado naquele momento. Por outro lado, as representações "semióticas" são produções formadas pelo uso de signos pertencentes a um sistema de representações que possuem seus próprios inconvenientes de significado e funcionamento.

Para começar a estudar e aprender essa complexa disciplina que é a Matemática, nós precisamos aprender a interpretar uma determinada figura, saber, por exemplo, como achar a área dela, mas antes de saber utilizar a fórmula é preciso entender o que significa a palavra área e mais saber a área do objeto em questão, e é claro que para um professor este é um assunto simples de fácil entendimento, mas para o aluno é aí que mora a confusão. Transpor tais barreiras no ensino é o grande desafio dos educadores.

Quando uma figura é apresentada com um enunciado em linguagem natural, uma fórmula algébrica ou um gráfico, estas representações semióticas mostram sistemas semióticos distintos. Geralmente, as representações semióticas são vistas como meros instrumentos para expressar representações mentais com o objetivo de comunicação, ou seja, torná-las visíveis ou acessíveis às pessoas. No entanto, essa perspectiva é equivocada quando percebemos que as representações não são apenas importantes para fins de comunicação, mas também são essenciais para a atividade cognitiva do pensamento.

Segundo Duval (2012), “a passagem de um enunciado em língua natural para uma representação em outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos”, e:

> é essencial, na atividade Matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações (Duval, 2012, p. 270)

Acredita-se que quando o aluno consegue transitar fluidamente entre essas representações, a aprendizagem se torna mais profunda e significativa.

Além disso, é importante reconhecer que as representações semióticas desempenham um papel crucial no desenvolvimento das representações mentais, pois estas últimas dependem da internalização das primeiras, da mesma forma que as representações mentais são uma internalização do que é percebido no mundo externo. Duval (2012).

Ao realizar diversas funções cognitivas, percebemos que a função de objetivação (particular), que é independente da função de comunicação (com os outros), e a função de manipulação não podem ser totalmente realizadas apenas pelas representações mentais (algumas atividades de manipulação estão diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, como por exemplo, o cálculo).

A geração de conhecimento envolve as representações semióticas que possibilitam interpretações substancialmente diversas de um mesmo objeto, já que podem atender a sistemas semióticos completamente distintos. Portanto, o avanço das ciências está associado ao desenvolvimento de sistemas semióticos cada vez mais especializados e desvinculados da linguagem natural.

Observamos também que um registro é uma área de mudança na representação semiótica de acordo com os fatores cognitivos que lhe são inerentes.

Por meio de dois exemplos de registros, como o registro de representações gráficas e o registro de figuras geométricas, descrevemos variações que são visualmente significativas para a compreensão de, respectivamente, um polinômio e uma representação geométrica para ele.

Qualquer solução de problema que envolva um desses objetos requer duas habilidades fundamentais: habilidade para gerar ou reconhecer, de forma espontânea, qualquer representação produzida nesses dois domínios de variação; capacidade de coordenar, em cada um desses domínios de variação, com outro domínio de variação: seja a expressão algébrica das relações para visualizar as funções ou a representação de uma fração para entender as configurações geométricas.

Quando focamos na primeira exigência, sabemos que é possível examinar, em relação ao tipo de registro a ser empregado, nas tarefas Matemáticas e na função cognitiva necessária para que o aluno possa realizar essas atividades de forma independente.

Desse modo, nesse contexto podemos ver que toda essa análise permite com que possamos fazer diferença entre os objetos e discriminar todos os sistemas de signos utilizados pela Matemática para fins de cálculo, raciocínio e exploração heurística intuitiva. Além disso, permite distinguir, na análise da resolução de um problema, dois tipos de mudanças na representação simbólica que são intrinsecamente distintas: as conversões e os processamentos. (Duval, 2012).

Assim, isso também torna possível entender por que a compreensão dos objetos e conceitos em Matemática começa apenas quando alguém consegue processar naturalmente dois registros de representação para um mesmo objeto. Essa abordagem nos proporciona os fundamentos de um modelo cognitivo de funcionamento do pensamento, que leva em conta os desafios conhecidos associados ao ensino da Matemática.

O professor, sabendo que esses dois registros de representação precisam ser desenvolvidos para que haja aprendizado real, deve se munir da técnica, ou seja, da semiótica. Por esse motivo é que estamos usando a semiótica para também fundamentar essa pesquisa.

As pesquisas de Duval evidenciam esse ponto, deixando claro que não é viável fingir que as representações semióticas estão meramente subordinadas às representações mentais. Isso se deve ao fato de que o desenvolvimento das representações mentais depende da internalização das representações semióticas, e somente estas últimas possibilitam o desempenho de certas funções cognitivas essenciais, como a função de tratamento (Duval, 2012).

Neste caso, são necessárias as representações por meio de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos e desenhos facilitam a comunicação entre o indivíduo e as atividades cognitivas do pensamento, possibilitando a utilização de diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático. É igualmente importante na compreensão da Matemática fazer uma clara distinção entre um objeto matemático e sua representação associada: “A compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação” (Duval, 2013, p. 21).

Segundo Duval (2012), as representações semióticas viabilizam a realização de determinadas funções cognitivas do pensamento por meio de dois elementos distintos: a "semiose", que envolve a criação e compreensão de uma representação simbólica do objeto matemático, e a "noesis", que diz respeito à compreensão conceitual do próprio objeto matemático. Duval (2012) ainda afirma que a noesis é inseparável da semiose:

> O paradoxo cognitivo do pensamento matemático e as dificuldades que resultam para sua aprendizagem se dão pelo fato de que não há noesis sem semiose enquanto houver vontade de ensinar Matemática, como se a semiose fosse uma operação desprezível em relação a noesis. (Duval, 2012, p. 270)

A apreensão conceitual só será alcançada quando o aluno conseguir articular os distintos registros de representação de um determinado conceito. A grande variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática, originam os registros e permitem a passagem de um para outro durante uma resolução da atividade Matemática. O que garante apreender o objeto matemático é a coordenação entre vários registros de representação (Rodrigues, 2008).

Segundo Duval (2003), para compreender determinado conceito da Matemática, é necessário coordenar pelo menos dois tipos diferentes de representações semióticas.

Para Souza (2021), para que o professor possa avaliar o progresso do pensamento matemático de seus alunos e determinar se eles compreenderam o objeto matemático abordado em seu ensino, é imprescindível possuir um entendimento dos princípios subjacentes aos Registros de Representação Semiótica.

Ao empregar esses princípios, é importante reconhecer a interação particular entre o pensamento, o registro e a atividade Matemática em questão. Durante a análise das representações do objeto matemático em estudo, isto é, dos registros elaborados pelos alunos, busca-se verificar se houve uma compreensão efetiva do objeto matemático almejado (Souza, 2021)

Como afirmam Almeida e Silva:

> Neste sentido, o interesse de Duval está, principalmente, no funcionamento cognitivo do aluno. Para ele, o pensamento é ligado às operações semióticas e, consequentemente, não haverá

> compreensão possível sem o recurso a essas representações. (Almeida; Silva, 2018, p. 704)

Almeida e Silva (2018) resumem que, de acordo com Duval (2016), os signos são fundamentais como ponto de partida, pois representam o elemento essencial para iniciar a atribuição de significado às produções; é nos registros de representações desses signos, isto é, nos Registros de Representação Semiótica, que se evidenciará o processo cognitivo realizado pelo intérprete, neste caso, o aluno, em relação a esse signo. Portanto, os Registros de Representação Semiótica não geram novos signos, mas sim elucidam a interpretação do signo trabalhado dentro de um sistema semiótico (Souza, 2021).

E por causa dos estudos de Duval, concluímos que esses dois tipos de registros semióticos são unidos, ou seja, é com veracidade que devemos afirmar que a *noesis* é inseparável da *semiose*. E o aprendizado matemático real vai acontecer por meio de duas ou mais representações simultâneas.

O dilema cognitivo presente no raciocínio matemático e as barreiras que surgem em sua aprendizagem derivam da necessidade de haver simultaneamente a compreensão conceitual (noesis) e a produção ou interpretação de signos (semiose). Enquanto persistir a ideia de ensinar Matemática como se a semiose fosse menos importante em comparação com a noesis, não alcançaremos melhorias significativas nos fundamentos do ensino.

Particularmente, a semiose que é o próprio conceito de representação semiótica já está sendo a base crucial de outros estudos que não somente a Matemática, justamente porque já entendemos que ela é essencial para o aprendizado.

Contudo, é essencial na prática da Matemática ser capaz de empregar vários tipos de representações semióticas (tais como figuras, gráficos, símbolos, linguagem natural, entre outros) ao longo de um mesmo processo, possibilitando a escolha de uma representação em vez de outra. Independentemente da conveniência na manipulação, a utilização de múltiplos registros parece ser uma condição indispensável para evitar a confusão entre os objetos matemáticos e suas representações, além de permitir que sejam reconhecidos em todas as suas formas possíveis. A coordenação dos diferentes registros de representação semiótica é crucial para uma compreensão conceitual dos objetos, garantindo que estes não sejam confundidos com suas representações e sejam identificados em todas as suas possíveis manifestações. É assim que uma representação desempenha efetivamente o papel de ser fiel ao objeto representado, proporcionando acesso genuíno a ele (Duval, 2012).

No funcionamento cognitivo do pensamento, essa ligação entre semiose e noesis é a chave da questão, e fundamentamos que ensinar por meio do conceito semiótico é o primeiro passo para se ensinar qualquer outra disciplina, incluindo a Matemática.

A compreensão da Matemática através da análise contínua das diversas atividades cognitivas envolvidas na interpretação dos signos requer a coordenação de múltiplos registros de representação, sendo este um requisito essencial para promover e estruturar um ensino que leve em consideração essa conexão crucial para o processo de aprendizagem cognitiva.

Nessa fase então, vamos aprofundar um pouco mais nosso estudo para essa ligação relevante e buscar entendê-la, pois a semiose e os registros de representação precisam ser entendidos para que essa pesquisa possa avançar.

Portanto, observamos que um sistema semiótico só pode ser considerado um registro de representação se permitir a realização das três atividades cognitivas essenciais relacionadas à interpretação dos signos.

A priori precisamos entender que a formação de uma representação precisa ser identificável.

Conforme Duval, a construção de uma representação semiótica reconhecível equivale à criação de um registro específico. Por exemplo: a formulação de uma frase (compreensível em uma língua natural estabelecida), a elaboração de um texto, a criação de uma figura geométrica, a concepção de um esquema, a formulação de uma fórmula, entre outros (Hauser, 2018).

Neste contexto exemplificado, a formação envolve a "seleção" de relações e informações do conteúdo a ser representado. Essa seleção é determinada por unidades e regras de formação específicas do registro cognitivo no qual a representação é criada. Assim, o desenvolvimento de uma representação pode ser equiparado à realização de uma tarefa descritiva (Duval, 2012)

É fundamental obedecer às regras semióticas, e a consolidação da representação deve seguir essas regras específicas, como as gramaticais para idiomas naturais, as regras de formação em sistemas formais e as restrições de construção para figuras, entre outras. O cumprimento dessas normas é crucial, pois sua função principal é garantir que a representação seja identificada e reconhecida adequadamente, além de possibilitar seu uso em procedimentos posteriores. Essas regras são diretrizes de conformidade, não de produção individual.

Portanto, podemos inferir que possuir conhecimento e entender as regras de conformidade não garantem automaticamente a competência necessária para formar representações. Em vez disso, indica apenas que o sujeito pode reconhecer diferentes conformidades. Nesse sentido, o reconhecimento por si só já é uma habilidade relevante.

Essa é a primeira fase do registro de representação e demonstra uma parte do sistema semiótico, sendo o exposto acima, apenas uma das três atividades cognitivas fundamentais para que a semiose aconteça.

A segunda atividade que precisamos expor é o que chamamos de “tratamento”. O termo parece simples de entender, e realmente o é. Pois, o tratamento consiste em lidar com uma representação semiótica no mesmo tipo de registro no qual foi originalmente criada, o que implica que o processo de tratamento ocorre internamente dentro de um único registro (Duval, 2012).

A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. A paráfrase é a reescritura de um trecho ou frase usando palavras diferentes, mas mantendo o mesmo significado original. A inferência, por outro lado, é o processo de deduzir informações ou significados que não estão explicitamente mencionados no texto. Portanto, embora ambos sejam métodos de interpretação textual, eles não são a mesma coisa.

Aplicando o mesmo raciocínio à Matemática, constata-se que o processo de cálculo constitui uma forma de tratamento característica das expressões simbólicas (como o cálculo numérico, algébrico, proposicional, entre outros). Ainda no âmbito do tratamento, destaca-se a reconfiguração, um procedimento específico aplicado às figuras geométricas, que desempenha um papel fundamental na exploração heurística do registro visual. Por sua vez, a anamorfose representa uma técnica de tratamento abrangente, aplicável a todas as representações figurativas, sendo que cada tipo de registro possui suas próprias regras distintas de tratamento. Essas regras incluem diretrizes de derivação, coerência temática, associações de contiguidade e semelhança, que variam significativamente de acordo com o tipo de registro. Por último, no contexto da linguagem natural, observa-se uma quantidade substancial de regras de conformidade, contrastando com um número limitado de regras de tratamento para a expansão discursiva de um enunciado completo (Duval, 2012).

A terceira atividade que precisamos expor é o que chamamos de “conversão”. O termo parece complexo, mas não é. A conversão de uma representação semiótica é o ato de transformar e refere-se à mudança da função de uma interpretação para outro registro, preservando completamente ou parcialmente o conteúdo da representação original. Essa "conservação" implica uma transformação externa ao registro inicial da representação a ser convertida. Um exemplo disso é a conversão de uma representação linguística para uma representação figural, conhecida como ilustração (Duval, 2012).

Vemos que para que a conversão se consolide mais regras precisam acontecer, até que cheguemos na tradução disso tudo. A tradução envolve a conversão de uma representação linguística de uma língua específica para outra representação linguística em uma língua diferente. Em seguida, temos a descrição, que consiste na conversão de uma representação não verbal, como esquemas, figuras ou gráficos, em uma forma linguística. É importante destacar que, nesse contexto, não devemos confundir essa situação com a descrição de um objeto ou situação que ainda não foram representados de forma semiótica, pois a seleção de características não segue as mesmas regras.

Segundo Rodrigues (2008), neste contexto, vemos que a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento. Esse fato pode ser facilmente verificado em uma situação muito simples, como por exemplo, o ato de realizar um cálculo numérico. O aluno pode efetuar uma soma efetuando a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária, e pode nem mesmo pensar em converter (Duval, 2012)

Em diversas ocasiões, quando é fundamental realizar essa conversão, como por exemplo, transformar a representação decimal de um número em sua forma fracionária, ou vice-versa, o estudante pode enfrentar dificuldades para executar ou até mesmo não conseguir realizar essa conversão.

Verificamos que em muitos casos este é o tipo de exemplo que é demonstrado justamente para explicar o motivo de diversos alunos do ensino médio chegar a este nível do ensino escolar e ainda assim não saberem calcular.

É importante notar que a expressão decimal, a expressão fracionária e a expressão com multiplicação por potências de 10 são distintas representações numéricas. Para efetuar a conversão entre elas, é necessário compreender a diferença entre o sentido e a referência dos símbolos ou signos. Na representação de um número, é crucial distinguir a significação operatória associada ao significante, de acordo com as regras do sistema de escrita numérica. As operações não possuem os mesmos significados para 0,25; 1/4 e 25.10^{-2} (Duval, 2012).

Não são os mesmos tratamentos que devem ser considerados para efetuar as adições 0,25 + 0,25 = 0,5 e 1/4 +1/4 = 1/2 e o número representado que não é o significante 0,25, nem o significante 1/4. De fato, ambas as expressões possuem significados operatórios distintos, embora representem o mesmo número. A conversão não deve ser confundida com outras duas atividades semelhantes, mas diferentes: codificação e interpretação. O que comumente chamamos de "interpretação" implica uma alteração no quadro teórico ou contexto. (Duval, 2012).

Esta mudança não implica mudança de registro. Já a “codificação” é a “transcrição” de uma representação em outro sistema semiótico diferente daquele que foi proposto inicialmente (Duval, 2012).

Devemos entender que essa transcrição ocorre por meio de uma sequência de "trocas", seguindo as regras de correspondência apropriadas ou utilizando listas de trocas previamente definidas. Essas substituições são aplicadas diretamente aos elementos que compõem a representação, sem considerar a estrutura da representação ou seu significado.

Para tornar isso mais compreensível, embora a atividade cognitiva de converter uma representação possa parecer de certa forma relacionada à interpretação ou codificação, percebemos que ela é independente e não pode ser simplificada dessa maneira. Isso ocorre porque não se baseia em analogias, como no caso da interpretação e, além disso, a conversão não pode ser realizada aplicando-se simplesmente regras de codificação (Duval, 2012).

Nesse contexto, sabe-se que não há e não pode haver regras de conversão como existem regras de conformidade e de tratamento. Duval (2011) ilustra essa explicação quando demonstra a conversão entre a expressão algébrica de uma dada relação e sua representação gráfica cartesiana, conforme a figura 3. Enquanto um pode até parecer com um código o outro se apresenta na expressão e o outro a forma gráfica.

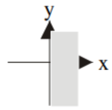
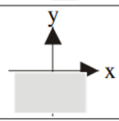
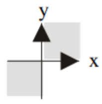
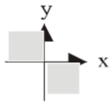
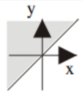
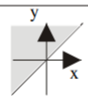
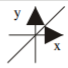
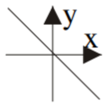
I	II	III	I → III Hachurar	III → II escolher a expressão
1......o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva	x >0		67%	51%
2......que tem uma ordenada negativa	y < 0		67%	61%
3......cuja abscissa e ordenada tem o mesmo sinal	xy > 0		56%	25%
4	xy ≤ 0			23%
5......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x sendo já traçada no gráfico) .	y > x		38%	38%
6......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x não sendo traçada no gráfico)	y > x		19%	25%
7......cuja ordenada é igual a abscissa	y = x		60%	75%
8......cuja ordenada é oposta a abscissa	y = - x		34%	58%

Figura 3: Conversão entre a expressão algébrica de uma relação (coluna II) e sua representação gráfica cartesiana (coluna III).

Fonte: Duval (2012).

Na figura 3 estão os resultados obtidos com alunos. Para a conversão III→II, havia apenas uma escolha entre várias expressões que correspondia ao gráfico hachurado: y = x, y > x, x > 0, y = – x, xy < 0, etc (Duval, 2012).

Este exemplo merece atenção, pois o sistema de representação gráfica oferece uma regra de codificação clara: um ponto corresponde a um par de números. Dessa forma, os valores específicos escolhidos tornam-se irrelevantes, pois qualquer par de números irá codificar um ponto no plano, independentemente da sua combinação.

Para Duval (2012), essa regra de codificação não é suficiente para mudar de registro, para passar, por exemplo, da expressão algébrica de uma relação (y = x, y = x^2) à representação gráfica correspondente.

A representação gráfica permite a marcação de múltiplos pontos, porém não possibilita traçar uma linha contínua, como uma reta ou uma parábola, sem a necessidade de interpolação e consideração da Lei da Gestalt de Continuidade. Essa limitação fica evidente ao tentar converter a representação gráfica de volta para uma expressão algébrica, exceto em casos simples de leitura de pontos do gráfico. Nessa conversão, é essencial discriminar claramente as unidades significativas de cada registro, tanto no aspecto visual do gráfico quanto na expressão algébrica, considerando as diversas oposições paradigmáticas que conferem significado aos símbolos utilizados, indo além de apenas representar um objeto (Duval, 2012).

Portanto, é evidente que a conversão e a codificação são conceitos claramente diferentes. A conversão de uma representação semiótica consiste na ação de alterá-la. Trata-se da transformação da função de uma interpretação para outro registro, mantendo totalidade ou parte do conteúdo da representação inicial, podendo ocorrer em diversos registros (Pauls, 2017).

A norma de codificação possibilita apenas duas ações: a interpretação de um par de números no gráfico, partindo de um ponto específico, ou a marcação de um ponto com base em um par de números. No entanto, a simples repetição dessas operações básicas não é o bastante para realizar a conversão entre as representações nos dois registros (Duval, 2012).

Os diversos estudos de Duval (2011) focaram em um mesmo objeto, e demonstraram conclusões interessantes sendo que a principal delas não está relacionada com as dificuldades dos alunos na compreensão e uso das representações, mas num fenômeno que ficou evidente e cuja característica crucial está exatamente na conversão das representações semióticas. E comprova com seus estudos que essa é a primeira fonte de dificuldades da maioria dos alunos para poder executar à compreensão da Matemática.

> Para o registro das representações gráficas cartesianas cuja utilização está longe de ser simples e evidente como se supõe no ensino, mas elas estabelecem um exemplo de ajuda à compreensão, não somente do que é um registro de representação semiótica, mas de como aplicar um tipo de análise para todos os registros utilizados em Matemática, incluindo-se aí, a língua natural. (Duval, 2012, p. 12)

Essa análise identifica as variáveis semicognitivas essenciais para orientar não apenas a estruturação das atividades em sala de aula, mas também para capacitar os alunos a resolver uma variedade de problemas, independentemente das circunstâncias e dos conceitos matemáticos abordados (Duval, 2012).

Embora apenas duas das três atividades cognitivas relacionadas à semiose tenham sido aplicadas no ensino até então - a formação de uma representação semiótica identificável e o tratamento - Duval demonstra, por meio de diversas análises, a melhoria do aprendizado, tanto na organização das sequências de ensino quanto na elaboração de questionários de avaliação.

A última das atividades cognitivas, que é a conversão, não foi descartada pelo autor. Ele verificou que, ao aplicar uma técnica tão eficiente quanto a semiótica, quando as bases são ensinadas de modo bem alicerçado e diferenciado, os resultados acontecem naturalmente.

Consideramos que, ao se analisar o trabalho de pesquisa de Duval, aceita-se que a conversão entre representações ocorre naturalmente, contanto que haja habilidade para criar representações em diferentes registros e realizar operações sobre elas. Por exemplo, ao construir um gráfico ou uma expressão e substituir valores numéricos nas variáveis, a conversão em si não contribui significativamente para a compreensão dos objetos ou conteúdos representados, pois seu resultado se resume a uma mudança de formato.

Essa perspectiva é defendida sob a condição de alcançar certa "autonomia" na atividade Matemática. No entanto, ela obscurece a característica essencial dessa atividade para a compreensão conceitual. Além disso, desconsidera o papel crucial que a conversão desempenha na aprendizagem para a conceptualização. Para compreender melhor esse aspecto, é importante analisar a amplitude da diversidade de registros de representação.

Duval mostra em seu estudo que se o registro de representação for muito bem escolhido, (e nesse caso quem irá escolher o registro a ser usado é o professor, pois é a este que é dada a incumbência de como abordar conteúdo para o aprendizado), então as representações destes registros serão realmente suficientes para permitir a compreensão do conteúdo conceitual representado.

Verificando essa premissa de Duval, contatamos que partiremos desse conceito para conseguir fazer com que os alunos compreendam e aprendam a produtos notáveis de modo mais fácil, pois não podemos simplesmente oferecer o conteúdo.

É necessário que o planejamento de aula se baseie num melhor formato de ensino, e se é desse modo que o funcionamento do cérebro processa as informações e as converte em aprendizado, é também esse o caminho a ser seguido pelo professor para conseguir efetivamente alcançar mais e mais alunos.

Entregar ao aluno as ferramentas certas, do modo certo e pronto para uso, vale a pena dizer um ditado popular muito conhecido que fala de não lhe entregar o peixe, mas ensinar a pescar, ensinar os segredos de se ir além em entender o simples funcionamento das coisas, mas também de fazê-las funcionar, tive um parente querido que pegava os brinquedos que tinha e os desmontava todos depois tentava montar e essa curiosidade o tornou um engenheiro reconhecido.

Duval coloca esse exemplo de modo claro e menciona que ele é justificado pela estrutura da figura 4, e que uma imagem mostra a representação como é apresentada habitualmente e se relaciona com a outra imagem em função da estrutura da significação dos signos, veja:

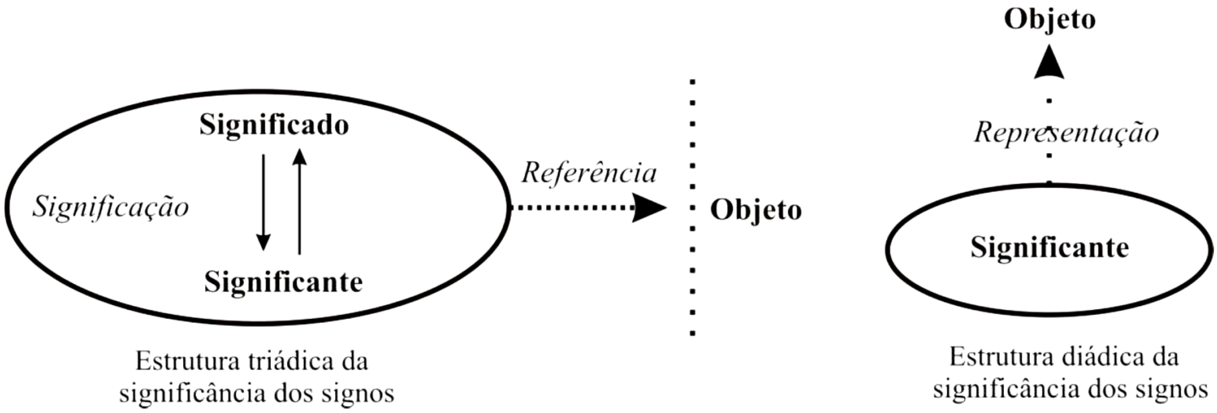


Figura 4: Estrutura Diádica e Triádica das Significâncias dos Signos.

Fonte: Duval (2011).

Verificando a figura acima construída por Duval, conseguimos constatar que é possível avaliar a oposição entre os dois tipos de signos. Significado e significante.

Ao analisarmos a figura 4 nesta primeira hipótese, podemos observar que os signos da estrutura triádica, como os signos linguísticos ou até mesmo as figuras, demonstram a relação de referência de duas maneiras distintas. Por um lado, a relação com um objeto é influenciada pela relação de significação, a qual é determinada pelo sistema da língua ou pelas leis da percepção visual. Por outro lado, a relação com o objeto torna-se uma possibilidade que só se concretiza no plano do discurso ou no plano de interpretação para as figuras (Duval, 2012).

Enfim, já se verificou em outros trabalhos sobre educação que a análise do discurso para o ensino de língua portuguesa é muito eficiente para melhorar o ensino da disciplina, e como vemos na menção de Duval e suas conclusões ele serve para alcançar bons níveis de compreensão do ensino de Matemática.

Os signos de estrutura diádica, como certas noções Matemáticas, incluindo notações de funções, vetores, operadores e outros, carecem de significação e consistem em uma relação direcionada a um objeto. Em geral, essas duas estruturas de significação não são claramente distinguíveis. No entanto, independentemente de serem diferenciadas ou não, não há dúvida de que o uso de signos ou representações semióticas de diferentes registros é suficiente para que sua significação opere cognitivamente nos indivíduos que estão recebendo o aprendizado (Duval, 2012).

Explicando melhor, o que queremos dizer é que a significação é o que se considera como fato reconhecido e ponto de partida, implícito ou explícito, de uma argumentação, é uma premissa, uma afirmação ou fato admitido sem necessidade de demonstração, e como consequência disso as operações de conversão de representação de um registro a outro parecem evidentes e negligenciadas em relação às operações de formação ou de tratamento das representações (Duval, 2012).

O entendimento segundo o qual a tarefa de conversão não causa maiores dificuldades acontece diretamente da hipótese anteriormente mencionada e da concepção que se produz da estrutura de representação que estamos observando. Essa primeira hipótese parece suficiente caso se refira apenas aos indivíduos que possuem especialidade na Matemática e que possuem bom domínio da atividade Matemática, por exemplo, os pesquisadores e educadores, porém não é suficiente quando nos referimos aos indivíduos que estão em curso de suas aprendizagens, como por exemplo, os alunos no geral, o que não nos permite inferir que a conversão de representações de um registro para outro possa ser uma causa significativa de dificuldades ou fracassos. Portanto, ao aceitá-la como uma evidência, as dificuldades e os fracassos observados podem ser atribuídos apenas à compreensão conceitual e não à transformação de representações (Duval, 2012).

Após essa análise, Duval apresenta uma segunda conjectura para alcançar uma compreensão completa de um conteúdo conceitual. Ele propõe que essa compreensão integral seja alcançada por meio da coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica, cuja coordenação se manifesta na rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Essa abordagem implica em uma nova descrição da estrutura das representações semióticas e de seu processo de funcionamento, conforme a figura 5.

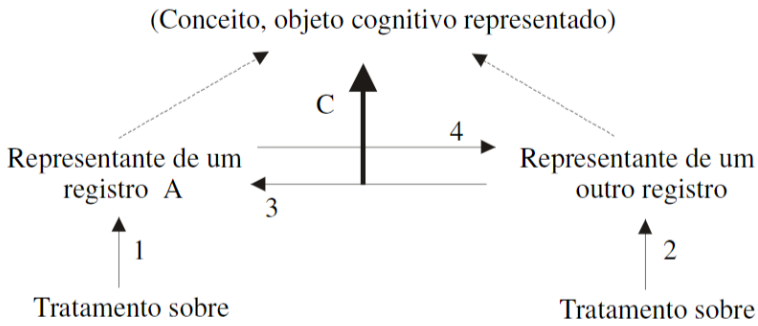


Figura 5: Hipótese fundamental de aprendizagem: Estrutura da representação em função de conceitualização.

Fonte: Duval (2012).

Na figura 5, observa-se que os pontos 1 e 2 dizem respeito às mudanças internas dentro de um registro, enquanto os pontos 3 e 4 estão relacionados às mudanças externas, ou seja, às conversões entre diferentes registros.

No esquema apresentado, o ponto C indica uma compreensão completa da representação, o que implica na coordenação de dois registros. As setas pontilhadas estabelecem a distinção convencional entre representante e representado. Este esquema aborda uma situação simplificada de coordenação entre dois registros; contudo, em certos contextos, como na álgebra linear, pode ser necessário coordenar pelo menos três registros distintos (Duval, 2012).

Da mesma forma, pode-se observar uma das características importantes da estrutura da representação: o representante de um registro pode ser interpretado como o representante de outro registro, como ocorre na relação entre texto e imagem. Isso sugere que não há setas específicas para os tratamentos distintos de cada registro, embora isso não descarte os casos de congruência ou "equivalência computacional". No entanto, a motivação para a mudança de registro depende do fato de que cada registro possui tratamentos específicos próprios (Araújo, 2019).

Essa coordenação está longe de ser intrínseca ou intuitiva. Portanto, ela não parece ser uma alternativa viável para ser amplamente adotada no contexto educacional, especialmente no ensino centrado em conceitos. Atualmente, podemos observar em todos os níveis de ensino que a maioria dos alunos tende a manter os registros de representação isolados, não reconhecendo o mesmo conceito nas diferentes representações presentes em sistemas semióticos distintos (Duval, 2012).

Esse isolamento persiste mesmo após o ensino de conteúdos matemáticos, onde os diversos registros são amplamente explorados e trabalhados com os alunos.

Embora a falta de coordenação não impeça o entendimento total, essa compreensão restrita ao contexto semiótico de apenas um registro não promove a transferência eficaz de conhecimento e prejudica as aprendizagens subsequentes. Isso resulta na utilização limitada ou mesmo na inutilidade dos conhecimentos adquiridos em outras situações em que deveriam ser aplicados.

Em definitivo, essa compreensão limitada a apenas um registro resulta em um trabalho sem direção, sem a capacidade de controlar o significado do que está sendo feito. A coordenação entre as imagens mentais e a linguagem natural, que é examinada por alguns psicólogos, não é mais adequada para garantir a coordenação dos diversos registros semióticos de representação que são empregados na Matemática (Duval, 2012).

A coordenação de muitos registros estudadas na segunda hipótese e na figura 5 é, portanto, fundamental que o esquema diádico de representação, admitido na primeira, esteja alinhado com um funcionamento cognitivo eficaz no sujeito, e que a dependência exclusiva de apenas um registro de representação pareça ser adequada apenas superficialmente (Duval, 2012).

Então, concluímos aquilo que as infinitas observações de Duval nos comprova, e que também nós professores temos ciência de que mesmos nos diferentes níveis de escolaridade, a efetividade da coordenação (de ao menos dois registros de representação semiótica) não se realiza de modo espontaneamente pela maior parte dos sujeitos (alunos), e que de modo algum se pode esperar a conscientização de um professor a respeito disso, se ele desconhecer a forte ligação existente entre noesis e semiose, pois como já foi dito anteriormente só haverá aprendizado real se essas duas estiverem caminhando juntas, separadas elas deixam suas lacunas e o ensino é pobre de resultados eficientes.

Entendendo isso, as condições de uma aprendizagem que leva em conta não só a noesis, mas principalmente a semiose, precisa entender que se a conceitualização implica em coordenação efetiva de registros de representação, o caminho crucial que leva a aprendizagem da base Matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos, ou somente a compreensão de noções, mas essa aprendizagem deve se pautar pela coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou por esta compreensão (Duval, 2012).

A coordenação de registros aparece como condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas, como em Matemática por exemplo. (Duval, 2012).

De fato, o ensino de Matemática é em geral organizado como se fosse a coordenação de diferentes registros de representações introduzidas, mas pelo que Duval (2012) constata, não é só isso. E definitivamente, o que importa não é a mudança de registro, mas os tratamentos realizados na representação após a mudança de registro. Sendo assim, a coordenação de registro não parece que deve se impor como uma das principais finalidades do ensino.

Além disso, não há garantia de que a simples proposição de exercícios de conversão local favoreceria a coordenação necessária para uma compreensão mais abrangente, que parece estar associada a uma consciência e compreensão mais amplas do que aquela permitida pelo trabalho em cada representação isoladamente. Diante disso, percebemos que uma abordagem de aprendizado que reconheça a íntima relação entre a noesis e a semiose deve capacitar os alunos a uma compreensão mais holística, para a qual são necessárias atividades de ensino mais específicas e direcionadas (Duval, 2012).

Neste cenário, Duval propõe três categorias de atividades distintas e necessárias. A primeira diz respeito à compreensão das representações semióticas; a segunda aborda a aprendizagem dos tratamentos específicos de uma determinada categoria de registros; e a terceira envolve o método de criação de representações complexas.

Por fim, seguindo e respeitando esses três tipos de atividades é que podemos ensinar melhor a Matemática, pois com os estudos matemáticos que Duval realizou a respeito da semiótica ele propõe essa base, junção da noesis e da semiose, como sendo algo efetivo à aprendizagem. E estes três tipos de atividades asseguram os diferentes resultados na compreensão dos conteúdos trabalhados em aula e consequentemente não simples resultados, mas resultados “positivos e efetivos”. Ademais agora que temos o conhecimento dos dois autores podemos elaborar a proposta didática para ensinar Produtos Notáveis e suas formas de fatoração e unir o ensino com as técnicas estudadas e o Geogebra que é um aplicativo de Matemática dinâmica.

A priori, seguindo a Teoria de Duval, temos que unir noesis e semiose e, para isso, vamos considerar as partes teórica e prática da elaboração do exercício articuladas. Podemos fazer isso com experimentação em sala de aula, visto que já sabemos que alguns alunos têm dificuldades em aprender Matemática e que outros simplesmente não gostam da matéria. Uma possível causa disso é a forma como apresentamos a disciplina a eles. Portanto, vamos introduzi-la de maneira mais interessante e com vínculos com a realidade do aluno.

Essa junção é um fator crucial que pode despertar novas sinapses na mentalidade do aluno, esses são novos registros de representação semiótica a respeito da disciplina, e apoiado no estudo de Duval, pois o autor concluiu que essa união melhorava os resultados a respeito do ensino, afinal a diversidade proposta pelas atividades práticas, gera a construção de outros objetos de representação e não somente os objetos do modo como já são conhecidos pela Matemática.

Desse modo, para alcançar resultados “diferentes e melhores” temos que utilizar os registros de representação semiótica e explorar a Matemática visual de Jo Boaler de modo conjunto. Isso implica criar métodos de ensino, significa estimular o aluno. A proposta é trazer o conteúdo de um modo diferente, sabendo que será o mesmo conteúdo da disciplina proposta pela BNCC ou outra diretriz curricular, mas em aula haverá uma abordagem diferente, explorando aspectos cognitivos importantes como planejar ações, projetar soluções, atribuir conceitos, interpretar e raciocinar, mas usando exemplos visuais.

Enfatizar as relações visuais trazendo estímulos para os alunos é um caminho para lhes ensinar algo que eles consideram difícil, mas porque não tem os registros certos em suas memórias para poder conseguir desenvolver um cálculo polinomial até o fim, inclusive com a devida análise crítica desse tipo de construção.

Duval (2009) sinalizava que a aprendizagem somente ocorre quando o aluno for capaz de mobilizar e coordenar vários registros de representação, sendo no mínimo dois ao mesmo tempo.

Todo conteúdo da pesquisa e experiências descritas e analisadas contribuíram para desenvolver a proposta de ensino voltada a aprendizagem de produtos notáveis focada no objetivo de articular diferentes registros de representação.

2 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Como já mencionado, o objetivo da pesquisa foi o desenvolvimento, aplicação e análise de uma sequência de atividades que possibilitasse aos estudantes, sujeitos desta pesquisa, compreender, a partir do uso das ferramentas de um jogo criadas no software Geogebra, o objeto matemático *produtos notáveis* e formas de fatoração de expressões polinomiais.

Essa pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP e teve seu parecer número 5.941.269 aprovado.

As atividades foram elaboradas para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, para a apreensão dos seguintes objetos de aprendizagem: multiplicação de polinômios; produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos; além da expressão do tipo $ax^2 + bx + c$, com seus métodos de fatoração: o trinômio do quadrado perfeito, a diferença de quadrados e soma e produto.

2.1 Conhecendo o jogo

Inicialmente fizemos a adaptação do jogo físico Algeplan, composto por peças de madeira usado para auxilio a aprendizado de operações de fatoração, para o Geogebra, utilizando a opção de criar ferramentas foram criadas as seguintes *peças algébricas*, conforme mostra a figura 6.

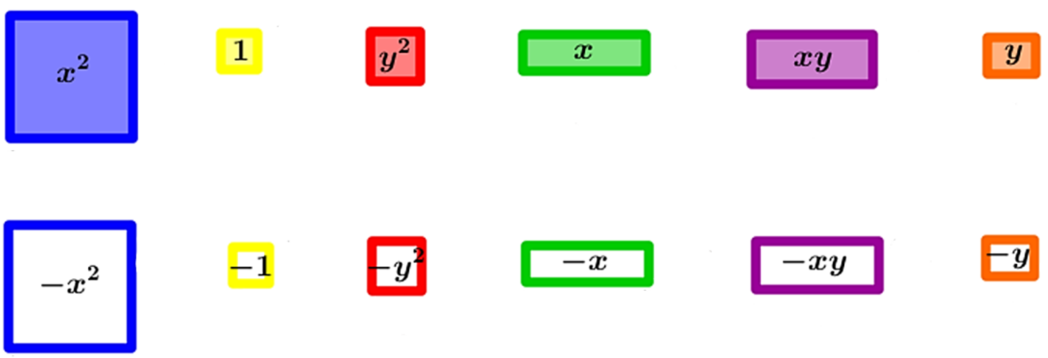


Figura 6: As peças algébricas do jogo Algeplan adaptadas para o geogebra.

Fonte: Próprio autor (2024).

Para indicar os *simétricos/opostos* usamos as peças sem preenchimento. Assim, a peça *positiva* é apresentada preenchida e a peça *negativa*, sem preenchimento. Nessas peças, devemos considerar que nos lados podem ser encostadas as peças com lados de mesma dimensão, por exemplo, na peça $-x^2$ podemos encostar as peças $-x$, x, x^2 e $-x^2$. Que fique claro que estamos tratando de um jogo e que não estamos falando de áreas de figuras com dimensões negativas, e sim de valores das peças.

As regras:

- Peças positivas e negativas de mesma cor se anulam/cancelam. Isso se deve ao fato de que $-x + x = 0$;

- Você pode usar pares de peças opostas para auxiliar no desenvolvimento das atividades, já que elas se anulam;

- Só podemos encostar duas peças do jogo quando o lado comum tiver a medida de mesmo tamanho;

- Quando multiplicamos uma peça positiva por uma peça negativa, devemos encaixar uma peça negativa;

- Quando multiplicamos uma peça positiva por uma peça positiva, devemos encaixar uma peça positiva;

- Quando multiplicamos uma peça negativa por uma peça negativa, devemos encaixar uma peça positiva;

- Para multiplicar, utilize o eixo multiplicativo, disponha as peças para representar cada um dos polinômios que serão multiplicados em cada direção.

Escolhendo as peças que foram criadas para o jogo, a barra de ferramentas do Geogebra foi configurada com as seguintes ferramentas, conforme a figura 7.

Figura 7: O menu do Geogebra adaptado para a atividade proposta.

Fonte: Próprio autor (2024).

Temos os seguintes botões:

- Botão 1: mover
- Botão 2: Eixo Multiplicativo;
- Botão 3: Quadrado de lados x representando, cada um, o monômio x^2;

- Botão 4: Quadrado de lados –x representando, cada um, o monômio $-x^2$;
- Botão 5: Quadrado de lados y representando, cada um, o monômio y^2;
- Botão 6: Quadrado de lados –y representando, cada um, o monômio $-y^2$;
- Botão 7: Quadrado de lados 1 representando, cada um, o monômio 1;
- Botão 8: Quadrado de lados –1 representando, cada um, o monômio –1;
- Botão 9: Retângulo, na posição horizontal, de lados x e y representando, cada um, o monômio xy;
- Botão 10: Retângulo, na posição vertical, de lados x e y representando, cada um, o monômio xy;
- Botão 11: Retângulo, na posição horizontal, de lados –x e –y representando, cada um, o monômio –xy;
- Botão 12: Retângulo, na posição vertical, de lados –x e –y representando, cada um, o monômio –xy;
- Botão 13: Retângulo, na posição horizontal, de lados x e 1 representando, cada um, o monômio x;
- Botão 14: Retângulo, na posição vertical, de lados x e 1 representando, cada um, o monômio x;
- Botão 15: Retângulo, na posição horizontal, de lados –x e –1 representando, cada um, o monômio –x;
- Botão 16: Retângulo, na posição vertical, de lados –x e –1 representando, cada um, o monômio –x;
- Botão 17: Retângulo, na posição horizontal, de lados y e 1 representando, cada um, o monômio y;
- Botão 18: Retângulo, na posição vertical, de lados y e 1 representando, cada um, o monômio y;
- Botão 19: Retângulo, na posição horizontal, de lados –y e –1 representando, cada um, o monômio –y;
- Botão 20: Retângulo, na posição vertical, de lados –y e –1 representando, cada um, o monômio –y.

Recomenda-se como estratégia inicial em todas as atividades a adoção de aulas expositivas dinâmicas que promovam a participação ativa dos alunos através do diálogo, explicação de questões e esclarecimento de dúvidas desde o início até o final de cada atividade. É crucial que os alunos compartilhem suas dúvidas com colegas e professores, permitindo assim que estes possam planejar intervenções adequadas para facilitar a aprendizagem e fornecer recursos para que os alunos possam acessar os conhecimentos matemáticos necessários para as atividades propostas.

A sequência de atividades que foi proposta está no APÊNDICE A e o arquivo do Geogebra preparado para a atividade pode ser acessado pelo link https://www.geogebra.org/classic/ztsjgqny. Neste capítulo vamos apresentar exemplos de cada atividade procurando mostrar como trabalhar com as representações algébricas no jogo e como essa proposta se relaciona com a teoria de Duval e a abordagem proposta por Boaler.

2.2 A sequência de atividades

Agora, vamos detalhar a proposta. A sequência elaborada possui quatro atividades, a saber:

- ❖ Atividade 1: Multiplicação de polinômios;
- ❖ Atividade 2: Fatorando um trinômio do quadrado perfeito;
- ❖ Atividade 3: Fatorando uma diferença de quadrados;
- ❖ Atividade 4: Fatorando um trinômio do tipo $x^2 + bx + c$ por soma e produto.

Descreveremos a seguir, com mais detalhes, cada uma das atividades propostas.

2.2.1 Atividade 1: multiplicação de polinômios

Na **atividade 1** abordamos a aplicação das regras de multiplicação entre termos de dois polinômios. Isso inclui representar os polinômios utilizando as peças algébricas, distribuir cada termo de um polinômio pelo outro, representando essa distributiva no Geogebra e, em seguida, somar os produtos resultantes, seguindo as regras do jogo. Além disso, exploramos estratégias para simplificar o resultado, como combinar peças semelhantes. Ao final, solicitamos aos alunos que escrevessem uma regra prática que possibilite chegar ao resultado sem a necessidade de utilizar as peças algébricas.

Para melhor entender a proposta, acompanhe a resolução da seguinte multiplicação:

$$(2x-1)\cdot(3x+5)$$

Passo 1: devemos iniciar escolhendo o botão 2 (Eixo multiplicativo) e clicar em qualquer ponto da janela de visualização, criando o eixo multiplicativo, conforme a figura 8.

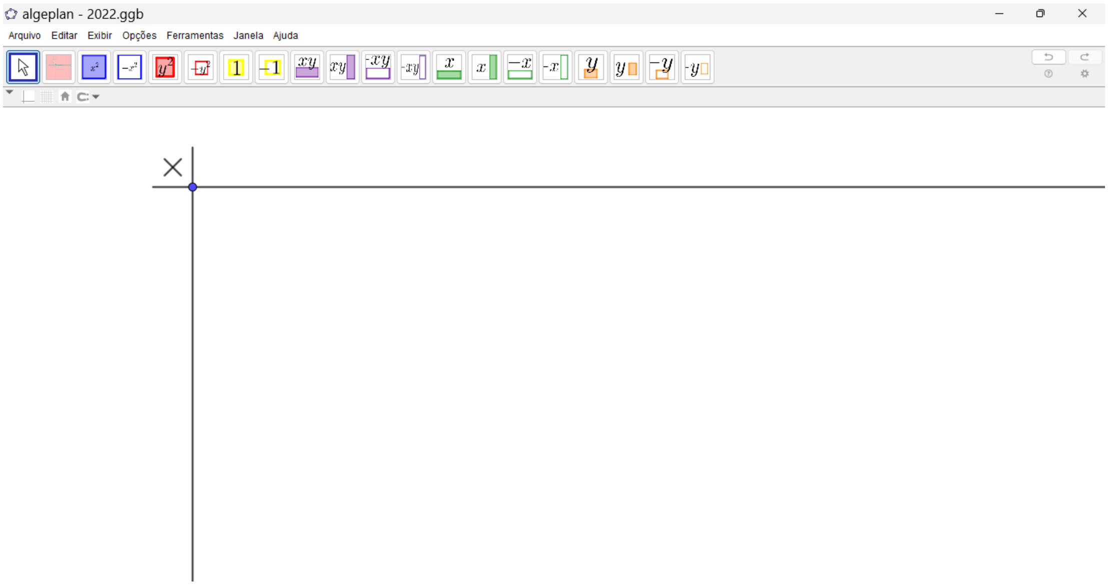


Figura 8: Passo 1 da resolução da multiplicação $(2x-1)\cdot(3x+5)$ proposta.
Fonte: Próprio autor (2024).

Passo 2: agora, com os botões 6, 7, 13 e 14, devemos dispor as peças representando cada um dos polinômios em cada uma das direções, como a multiplicação é comutativa, a direção em que cada um deles ficará não importa, conforme a figura 9.

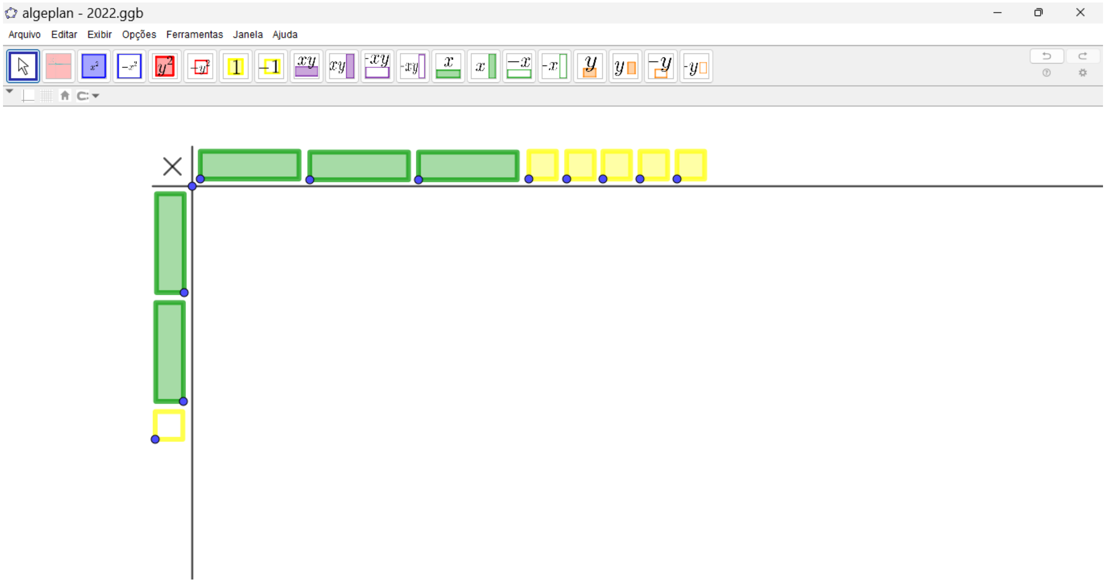


Figura 9: Passo 2 da resolução da multiplicação $(2x - 1) \cdot (3x + 5)$ proposta.

Fonte: Próprio autor (2024).

Passo 3: preenchendo o eixo multiplicativo com as peças que se encaixam, obedecendo a regra “só podemos encostar duas peças do jogo quando o lado comum tiver a medida de mesmo módulo” e utilizando as peças adequadas para esses encaixes: a peça que se encaixa com a primeira peça de cada direção (x e x) é a peça x^2, e assim, preenchemos os espaços adequados com essas peças; a peça que se encaixa com a primeira peça 1 da horizontal e com a primeira peça x da vertical é a peça x (vertical), e assim, preenchemos os espaços adequados com essas peças; a peça que se encaixa com a peça -1 da vertical e com a primeira peça x da horizontal é a peça $-x$ (horizontal), e assim, preenchemos os espaços adequados com essas peças; a peça que se encaixa com a primeira peça 1 da horizontal e com a peça -1 da vertical é a peça -1, e assim, preenchemos os espaços adequados com essas peças. Não sobrando espaços vazios que combinam peças que estão na horizontal e na vertical do eixo multiplicativo, finalizamos a multiplicação e temos o seguinte resultado, conforme mostra a figura 10.

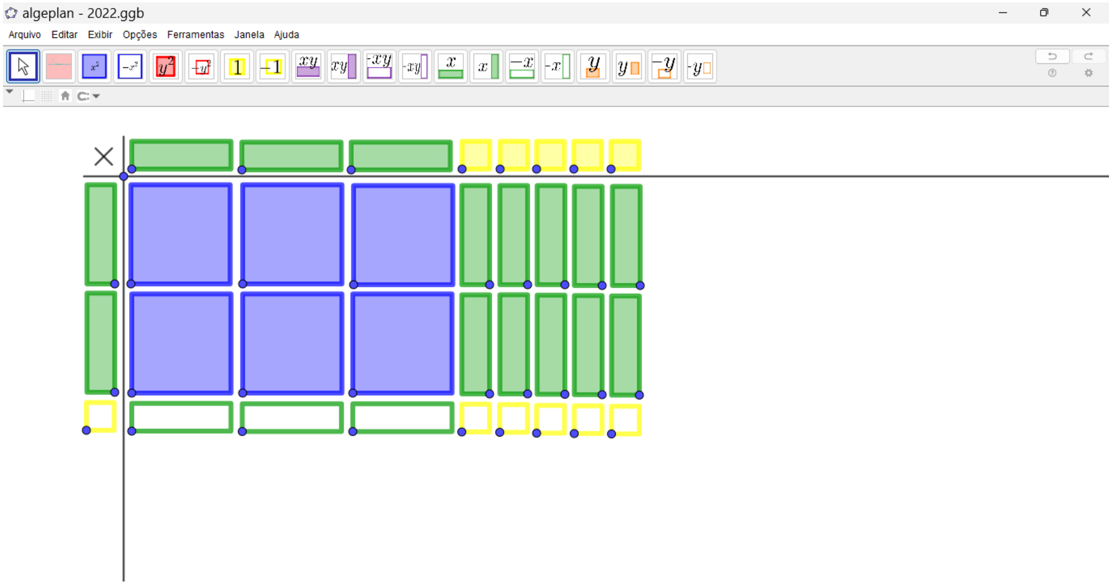


Figura 10: Passo 3 da resolução da multiplicação $(2x-1)\cdot(3x+5)$ proposta.

Fonte: Próprio autor (2024).

Passo 4: agora, analisando e agrupando peças semelhantes (mesma cor), escrevemos o resultado. Perceba que, conforme a regra “peças positivas e negativas de mesma cor se anulam/cancelam", três peças x eliminam três peças –x, conforme a figura 11.

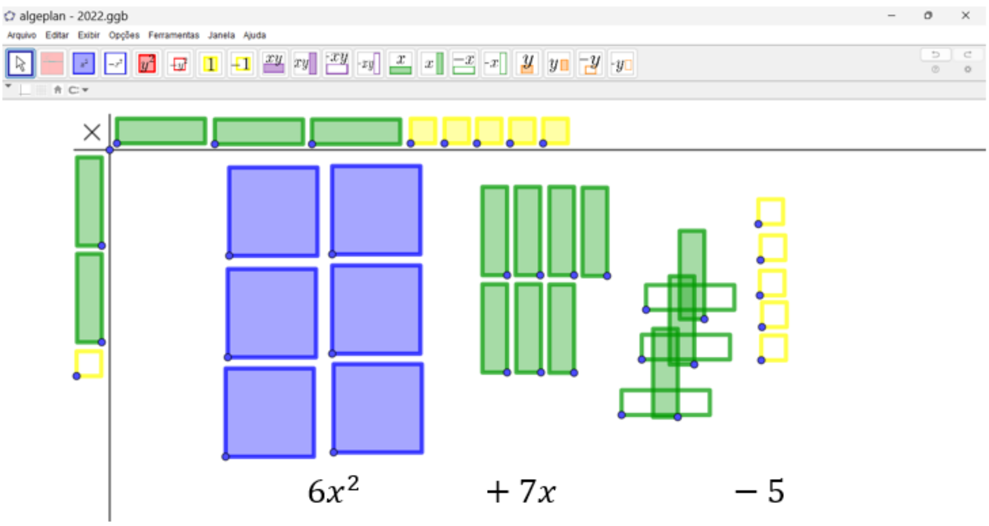


Figura 11: Passo 4 da resolução da multiplicação $(2x-1)\cdot(3x+5)$ proposta.

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, podemos escrever que:

$$(2x-1)\cdot(3x+5)=6x^2+7x-5.$$

2.2.2 Atividade 2: a fatoração de um trinômio do quadrado perfeito

Na **atividade 2** abordamos, utilizando as peças algébricas do jogo proposto, a identificação de expressões quadráticas que podem ser fatoradas como o quadrado de um binômio. Isso envolve reconhecer polinômios que se encaixam no padrão $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$, e aplicar uma regra de fatoração elaborada através da observação de padrões na resolução dos quadrados de binômios propostas, que é $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$, respectivamente. A técnica do trinômio do quadrado perfeito permite simplificar expressões complicadas em fatores mais simples e pode ser útil em várias áreas da Matemática, como na resolução de equações quadráticas e na simplificação de expressões algébricas.

Nessa atividade os alunos resolveram, utilizando as peças algébricas, alguns quadrados de binômios e buscaram padrões para criar uma regra prática para fatorar um trinômio do quadrado perfeito.

Para melhor entender a proposta, acompanhe a resolução do seguinte quadrado de um binômio:

$$(2x - 3)^2.$$

Utilizando a ideia da atividade 1, os alunos devem chegar ao trinômio resultante, conforme mostra a figura 12.

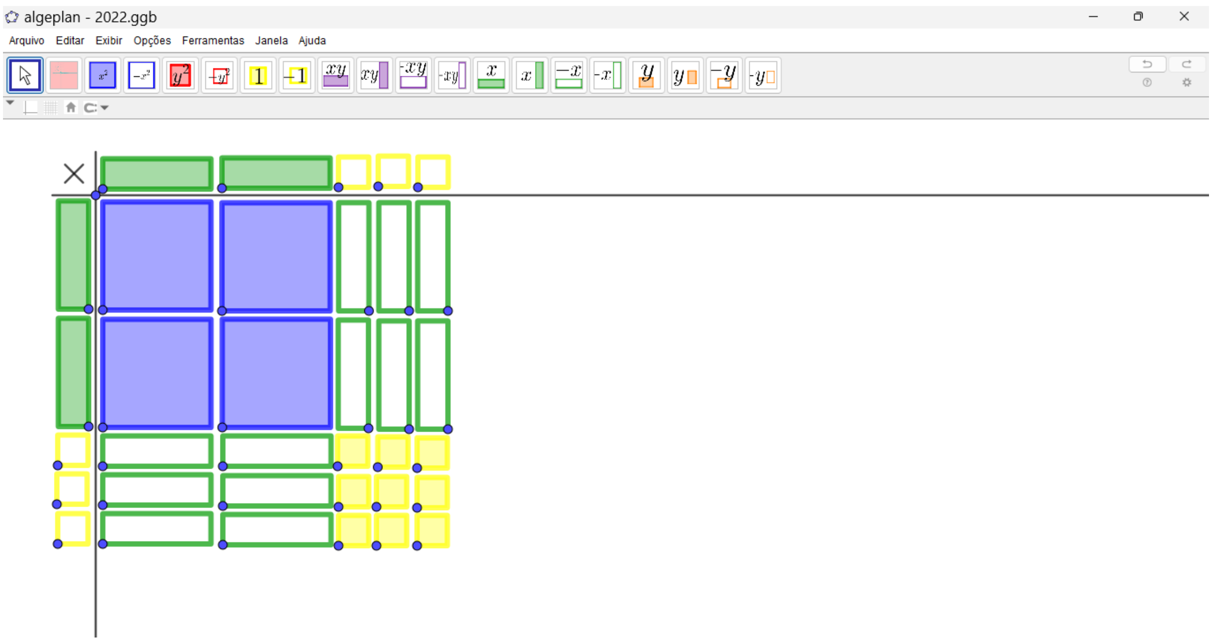


Figura 12: Resolução do produto notável $(2x - 3)^2$.

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, agrupando as peças semelhantes, podemos escrever que:

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Após a resolução de alguns quadrados de binômios, solicitamos aos alunos que escrevam uma regra prática que possibilite chegar ao trinômio do quadrado perfeito sem a necessidade de utilizar as peças algébricas e, também, uma regra para fazer o caminho inverso, ou seja, escrever qual quadrado de um binômio gerou determinado trinômio do quadrado perfeito. Por exemplo, para fatorar o trinômio $x^2 - 4x + 4$ os alunos criaram o eixo multiplicativo, e fizeram a disposição das peças formando um quadrado, conforme mostra a figura 13.

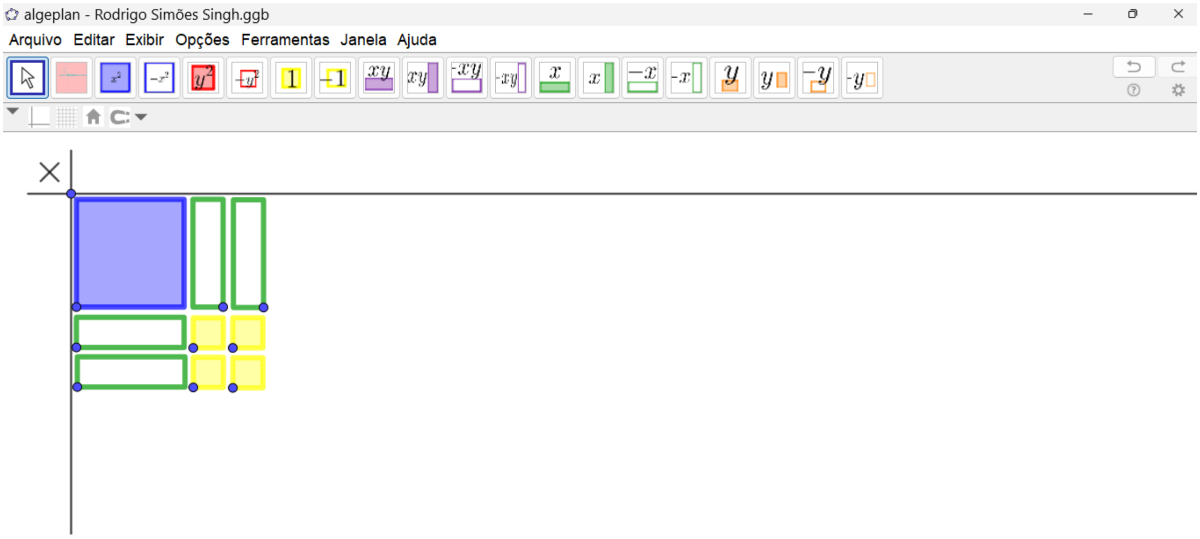


Figura 13: Fatoração do trinômio $x^2 - 4x + 4$.

Fonte: Próprio autor (2024).

Para escrever a forma fatorada desse trinômio, ou seja, a multiplicação que gera esse resultado, perceberam que o eixo multiplicativo deveria ser preenchido, na horizontal, com uma peça x (horizontal) e duas peças -1, já na vertical, deveriam preencher com uma peça x (vertical) e duas peças -1. Dessa forma, perceberam que a forma fatorada do trinômio $x^2 - 4x + 4$ é igual ao produto notável $(x-2)^2$.

2.2.3 Atividade 3: a fatoração de uma diferença de quadrados

Na **atividade 3** abordamos, utilizando as peças algébricas do jogo proposto, a identificação de expressões que podem ser fatoradas como a diferença entre dois quadrados. Essa técnica é aplicada quando o polinômio é da forma $a^2 - b^2$, onde a^2 e

b^2 são termos que representam quadrados perfeitos ou expressões que podem ser elevadas ao quadrado. A fatoração da diferença de quadrados é realizada utilizando a fórmula $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$. Essa técnica é útil para simplificar expressões algébricas complexas e também pode ser aplicada na resolução de equações e na manipulação de expressões Matemáticas em diversas áreas da álgebra e da Matemática aplicada.

Nessa atividade os alunos resolveram, utilizando as peças algébricas, alguns produtos da soma pela diferença de dois termos e buscaram padrões para criar uma regra prática para fatorar uma diferença de quadrados.

Para melhor entender a proposta, acompanhe a resolução do seguinte produto da soma pela diferença de dois termos: $(3x + y) \cdot (3x - y)$.

Utilizando a ideia da atividade 1, os alunos devem chegar ao binômio resultante, conforme mostra a figura 14.

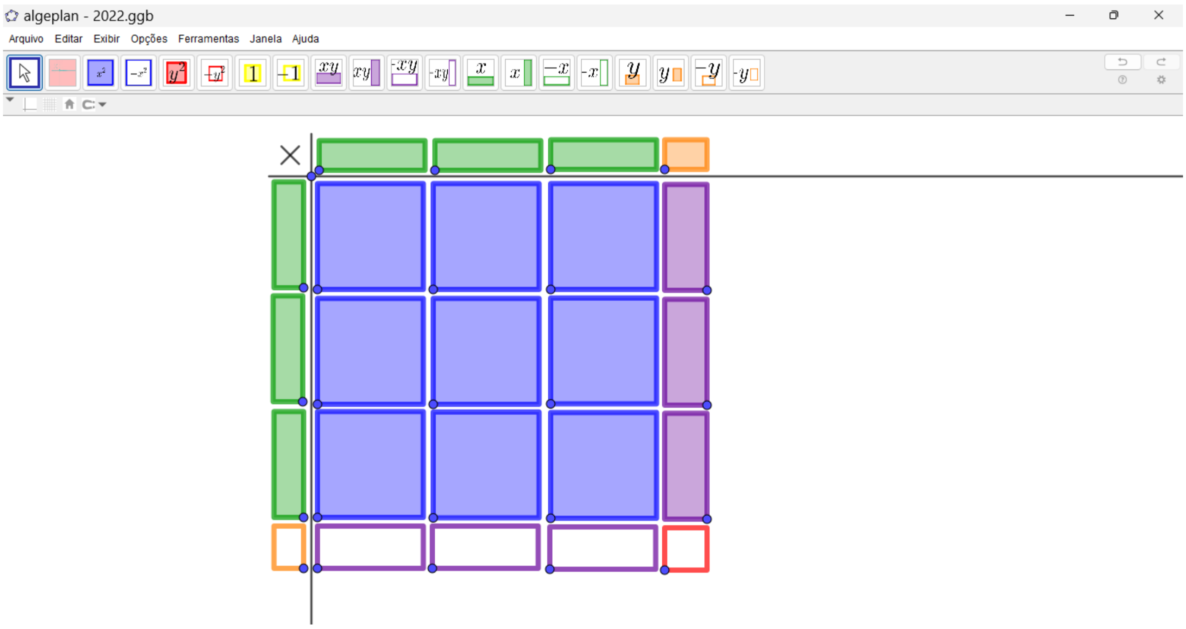


Figura 14: Resolução do produto notável $(3x + y) \cdot (3x - y)$.

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, agrupando as peças semelhantes, podemos escrever que:

$$(3x + y) \cdot (3x - y) = 9x^2 - y^2.$$

Após a resolução de alguns produtos da soma pela diferença de dois termos, solicitamos aos alunos que escrevam uma regra prática que possibilite chegar a diferença de quadrados sem a necessidade de utilizar as peças algébricas e, também, uma regra para fazer o caminho inverso, ou seja, escrever qual produto da soma pela diferença gerou determinada diferença de quadrados. Por exemplo, para fatorar o binômio $4x^2 - 9$ os alunos criaram o eixo multiplicativo, e fizeram a disposição das peças para formando um quadrado. Para isso, foi necessário o uso de peças auxiliares que se anulam, x e $-x$, pois só com as peças que representam o binômio não era possível formar um quadrado, conforme mostra a figura 15.

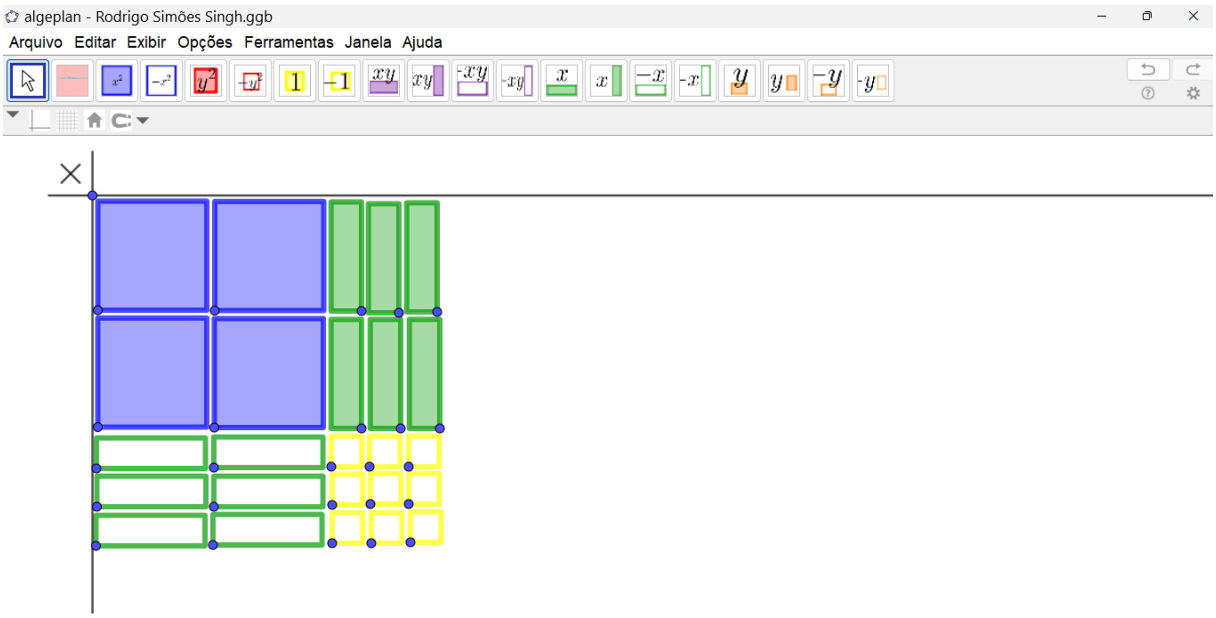


Figura 15: Fatoração do binômio $4x^2 - 9$.

Fonte: Próprio autor (2024).

Para escrever a forma fatorada desse trinômio, ou seja, a multiplicação que gera esse resultado, perceberam que o eixo multiplicativo deveria ser preenchido, na horizontal, com duas peças x (horizontal) e três peças 1, já na vertical, deveriam preencher com duas peças x (vertical) e três peças -1. Dessa forma, perceberam que a forma fatorada do binômio $4x^2 - 9$ é igual ao produto notável $(2x + 3) \cdot (2x - 3)$.

2.2.4 Atividade 4: Fatorando um trinômio do tipo ax² + bx + c por soma e produto

Na **atividade 4**, uma proposta de fatoração por soma e produto, abordamos, utilizando as peças algébricas do jogo proposto, a decomposição de expressões algébricas em fatores que possam ser multiplicados para produzir a expressão original. Essa técnica é frequentemente aplicada a polinômios quadráticos, nos quais a fatoração envolve encontrar dois números que, quando somados e multiplicados, resultam nos coeficientes da expressão original.

Nessa atividade os alunos, utilizando as peças algébricas, buscaram representar os termos de trinômios desse tipo no formato retangular, observando padrões da multiplicação, conforme a atividade 1. Após essa representação, escreveram o produto que gerou determinado trinômio e, relacionando os coeficientes dos trinômios e dos produtos obtidos, foram incentivados a criar uma regra prática para fatorar esse tipo de trinômio sem o uso das peças algébricas.

Para melhor entender a proposta, acompanhe a fatoração do seguinte trinômio desse tipo:

$$x^2 - 4x - 5$$

Utilizando a ideia da atividade 1 e, se preciso, fazer o uso de peças auxiliares que se anulam, como x e $-x$, os alunos devem chegar a uma disposição, na forma retangular, conforme mostra a figura 16.

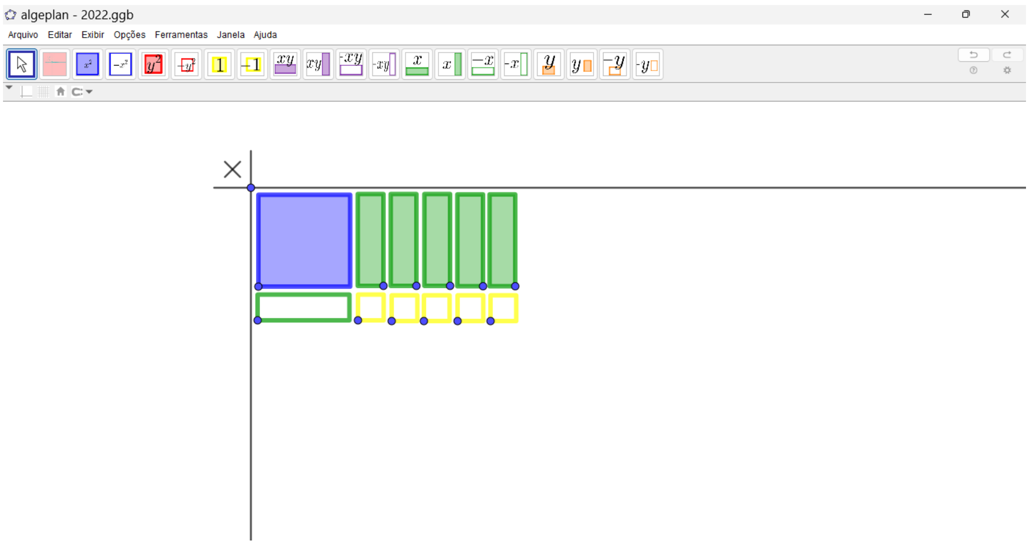


Figura 16: Disposição retangular do trinômio $x^2 - 4x - 5$.

Fonte: Próprio autor (2024).

Essa disposição poderia ter sido diferente, como a proposta na figura 17.

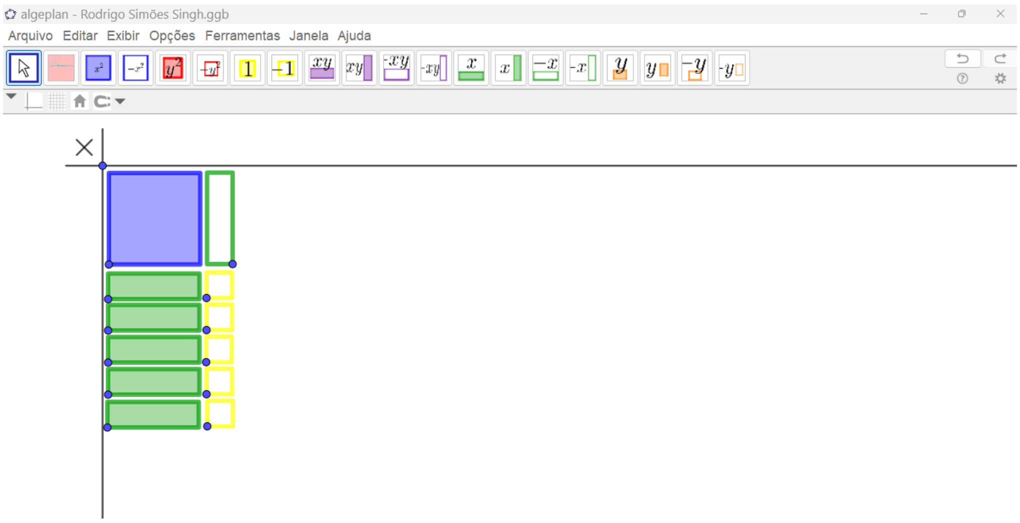


Figura 17: Disposição retangular alternativa do trinômio $x^2 - 4x - 5$.

Fonte: Próprio autor (2024).

Com essa representação, devemos preencher os eixos multiplicativos, observando quais peças seriam necessárias para obter a figura que foi formada. Assim, podemos escrever que $x^2 - 4x - 5 = (x - 1) \cdot (x + 5)$, conforme mostra a figura 18.

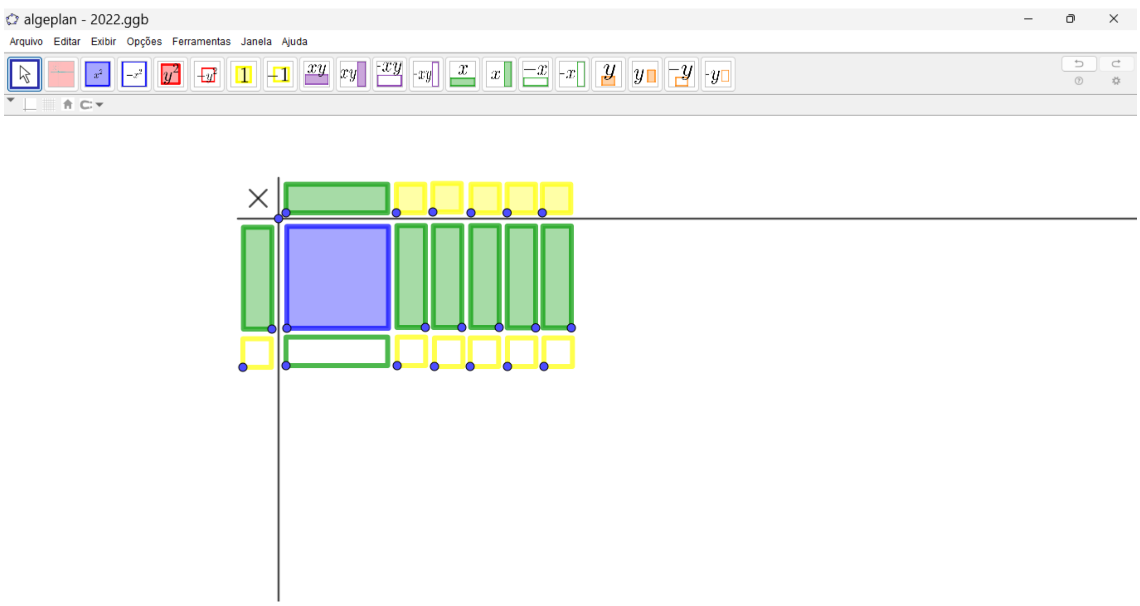


Figura 18: Fatoração do trinômio $x^2 - 4x - 5$.

Fonte: Próprio autor (2024).

Após a fatoração de alguns trinômios desse tipo, solicitamos aos alunos que escrevam uma regra prática que possibilite chegar ao produto que gerou determinado trinômio sem a necessidade de utilizar as peças algébricas.

2.3 Considerações sobre as propostas de atividades e análise a partir da fundamentação teórica

Nas atividades propostas, percebemos que frequentemente são mobilizadas mudanças de registro e que, em alguns casos, para escrever os resultados ou a multiplicação que gerou certo resultado é necessário o tratamento em determinado registro, até mesmo no momento da criação de regras a partir da observação de padrões os tratamentos e a mobilização de diferentes registros são evidentes, tanto na forma algébrica, como utilizando as peças do jogo.

Como por exemplo, na atividade 1, observe que, ao representar a multiplicação proposta no jogo, estamos realizando uma conversão de registros. Ao usar as peças do jogo para representar o resultado da multiplicação e agrupar peças semelhantes, estamos fazendo um tratamento nesse registro. Quando expressamos a resposta de forma algébrica, estamos realizando outra conversão e, ainda, quando estamos criando as regras e relacionando os termos dos polinômios (fatores da multiplicação) com os termos do produto resultante estamos realizando conversões de registros e tratamentos em um mesmo registro. A figura 19 mostra essas conversões e tratamentos descritos.

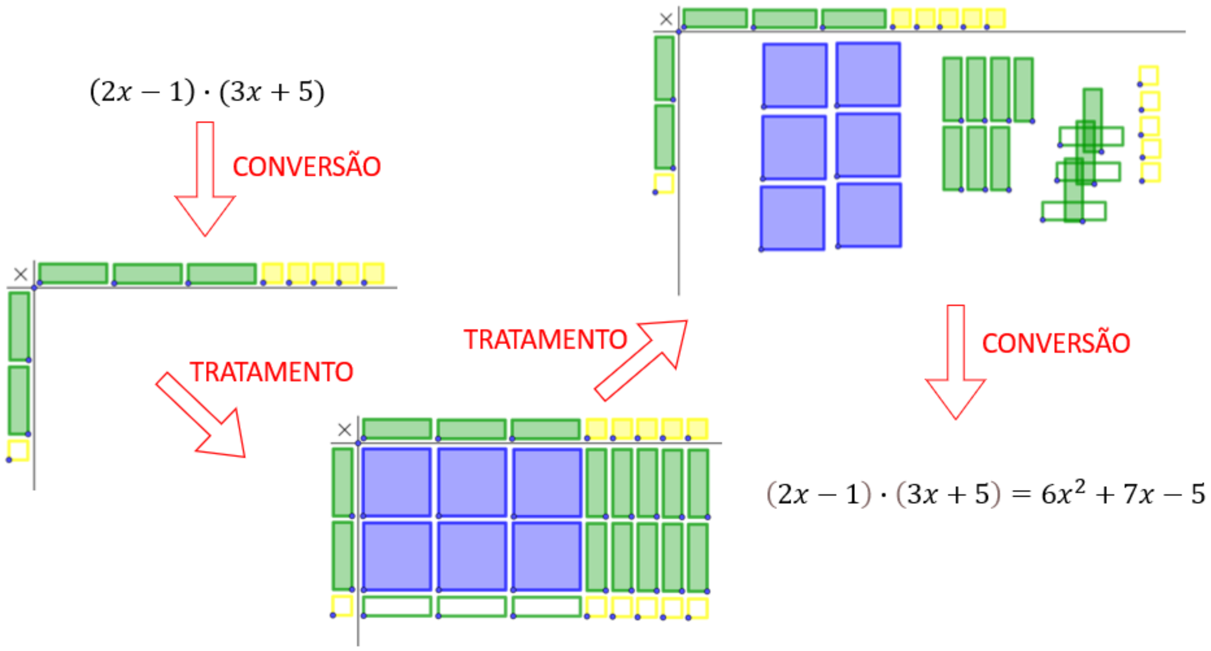


Figura 19: Conversões de registros e tratamentos em um mesmo tipo de registro

Fonte: Próprio autor (2024).

Após criarem regras para os diversos produtos notáveis e suas formas de fatoração, os alunos foram desafiados a aplicarem essas regras na resolução de exercícios, onde alguns deles envolviam uma abordagem iniciando com a representação visual, conforme figura 20, diferente do proposto na figura 19.

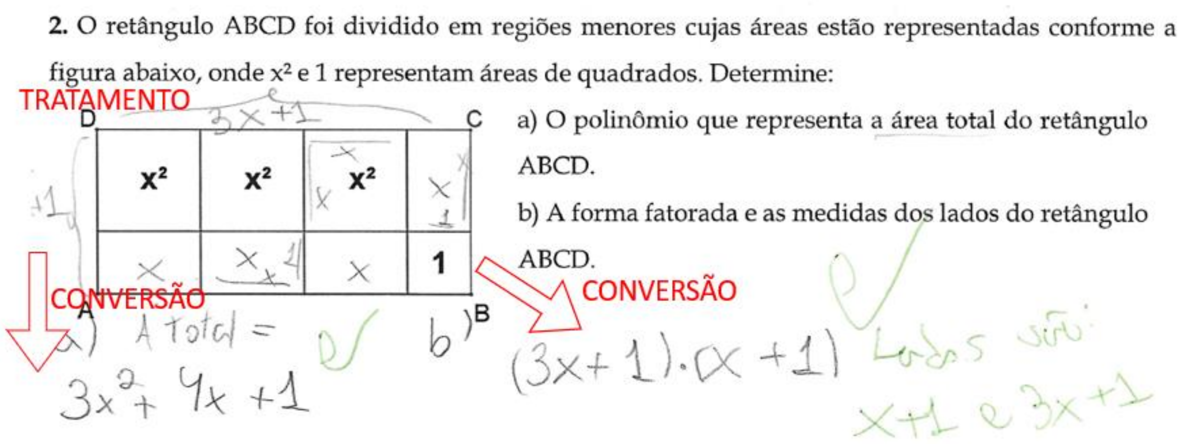


Figura 20: Conversões de registros e tratamentos em um mesmo tipo de registro

Fonte: Próprio autor (2024).

Além disso, a atividade proposta enfatiza métodos práticos para explorar conceitos matemáticos. Isso está alinhado com a abordagem de Boaler, que valoriza o aprendizado ativo com ênfase na descoberta de padrões e na exploração ativa por parte dos alunos reflete uma perspectiva construtivista da aprendizagem Matemática. Ao utilizar um jogo para representar as operações Matemáticas, os alunos podem experimentar conceitos de maneira mais envolvente, o que promove uma compreensão mais profunda e duradoura dos produtos notáveis e outras relações algébricas. Boaler argumenta que os alunos aprendem melhor quando estão engajados em atividades que os desafiam a pensar criticamente e a explorar conceitos por si mesmos, em vez de apenas receber instruções diretas do professor.

Ao encorajar os alunos a criar regras a partir de suas próprias observações e experiências, estamos seguindo o princípio fundamental da abordagem de Boaler, que valoriza a construção do conhecimento pelos próprios alunos. Nesse contexto, os alunos não apenas memorizam regras ou procedimentos, mas compreendem os fundamentos subjacentes por meio da experimentação e da descoberta ativa.

Ao permitir que os alunos sejam os protagonistas de seu próprio aprendizado e ao valorizar suas contribuições e descobertas, estamos promovendo um ambiente de aprendizagem que está alinhado com os princípios de Boaler, incentivando a curiosidade, a criatividade e a autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem Matemática.

A mobilização de diferentes registros de representação, como o icônico (usando as peças de um jogo para expressar padrões visualmente) e o simbólico (representação de forma algébrica), é frequentemente observada, tanto na representação da multiplicação utilizando peças de jogo quanto na expressão algébrica dos resultados e na criação de regras a partir da observação de padrões. Essa variedade de registros demonstra a aplicação dos conceitos de Duval sobre a transição entre diferentes formas de representação. Além disso, a ênfase nos métodos práticos e colaborativos na atividade está em consonância com a abordagem de Boaler, que valoriza o aprendizado ativo e a descoberta de padrões pelos alunos. Assim, a atividade proposta oferece uma experiência de aprendizado multifacetada que incorpora aspectos fundamentais tanto da teoria de Duval quanto da abordagem de Boaler, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa dos produtos notáveis e outras relações algébricas.

3 APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES

Com base nas questões orientadoras e na fundamentação teórica adotada para esta dissertação, neste capítulo, realizamos a apresentação e análise das respostas de 158 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental nas sequências de atividades propostas.

Antes dos alunos começarem a realizar cada uma das atividades, fornecíamos explicações sobre como utilizar os recursos do jogo para alcançar os objetivos propostos. Durante o desenvolvimento das atividades, realizamos intervenções, e os alunos solicitaram nossa participação para esclarecimentos, foi um momento de adaptação com cada uma das propostas que inicialmente apresentavam dificuldades, mas com o decorrer do desenvolvimento, o entendimento da dinâmica do jogo e a observação de padrões, as atividades tiveram um bom aproveitamento.

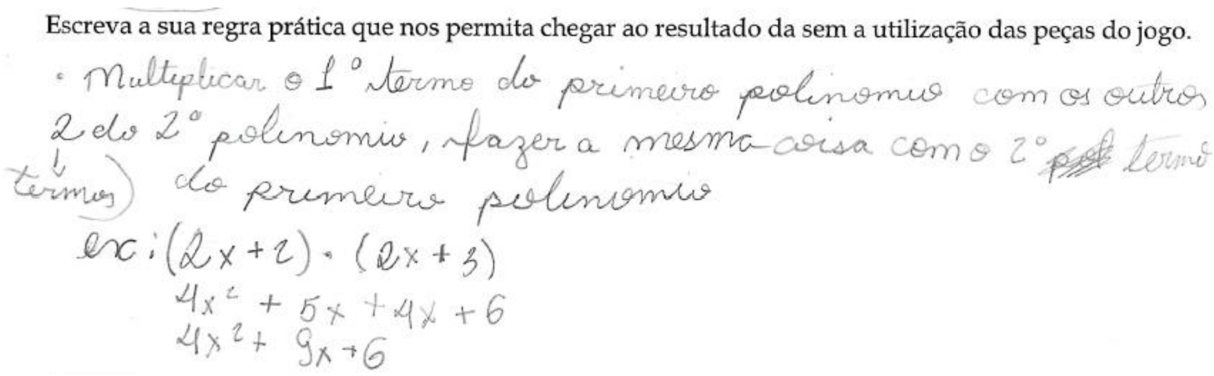
Inicialmente, não tínhamos planejado, porém, durante as atividades, os alunos colaboraram entre si, o que enriqueceu a proposta e facilitou a compreensão dos conceitos envolvidos. A interação possibilitou a troca de ideias, o compartilhamento de conhecimentos e a discussão de dificuldades. Por essas razões, a proposta demonstrou ser de grande importância para a aprendizagem da Matemática.

Nas próximas seções, vamos apresentar algumas respostas dos alunos sobre as propostas das atividades, mostrar dados de uma pesquisa sobre o que acharam das propostas e evidenciar momentos em que observamos o quanto a teoria de Duval, a abordagem proposta por Boaler e o recurso do jogo no Geogebra podem ser úteis para o ensino-aprendizagem dos produtos notáveis e outras relações algébricas.

3.1 Apresentação das respostas dos alunos nos itens da sequência de atividades proposta

3.1.1 Atividade 1 – Multiplicação de polinômios e produtos notáveis

Após desenvolver algumas multiplicações envolvendo polinômios com o uso das peças criadas no Geogebra, os alunos foram desafiados a criarem sua regra para a multiplicação de polinômios. Desta atividade apresentamos alguns resultados, conforme as figuras de 21 a 26.



Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

• Multiplicar o 1º termo do primeiro polinomio com os outros 2 do 2º polinomio, fazer a mesma coisa com o 2º ~~ter~~ termo do primeiro polinomio (termos)

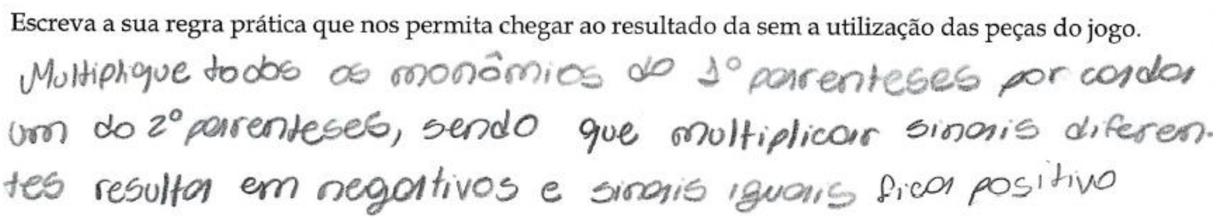
ex: $(2x+2)\cdot(2x+3)$

$4x^2 + 6x + 4x + 6$

$4x^2 + 9x + 6$

Figura 21: Resposta de um aluno sobre a regra criada para a multiplicação de polinômios.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

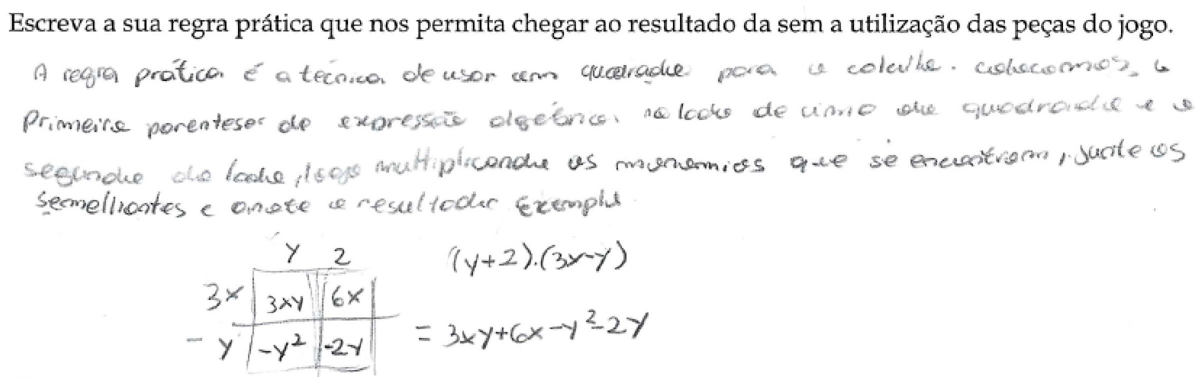


Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

Multiplique todos os monômios do 1º parenteses por cada um do 2º parenteses, sendo que multiplicar sinais diferentes resulta em negativos e sinais iguais fica positivo

Figura 22: Resposta de um aluno sobre a regra criada para a multiplicação de polinômios.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).



Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

A regra prática é a técnica de usar um quadrado para o calculo. colocamos o primeiro parenteses da expressão algébrica no lado de cima do quadrado e o segundo do lado, logo multiplicando os monomios que se encontram, junte os semelhantes e anote o resultado exemplo

$(y+2)\cdot(3x-y)$

	y	2
$3x$	$3xy$	$6x$
$-y$	$-y^2$	$-2y$

$= 3xy + 6x - y^2 - 2y$

Figura 23: Resposta de um aluno sobre a regra criada para a multiplicação de polinômios.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

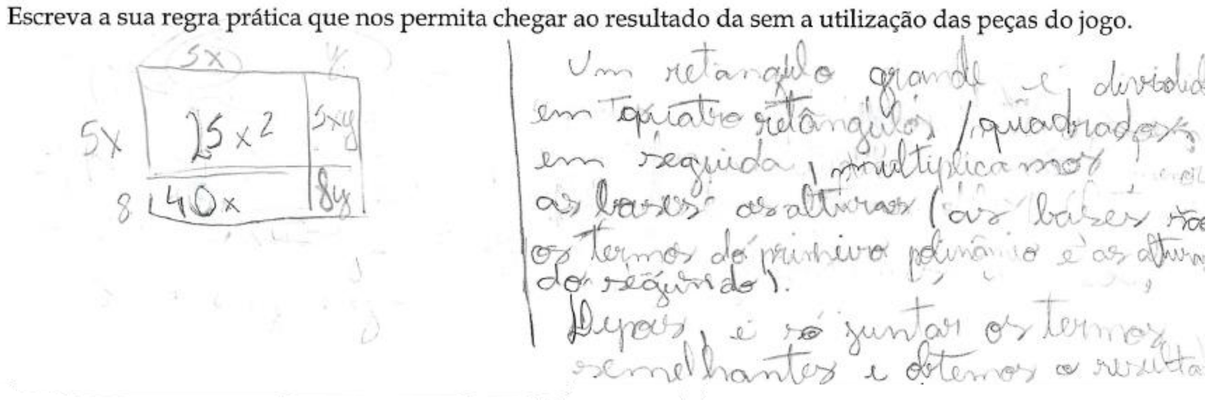


Figura 24: Resposta de um aluno sobre a regra criada para a multiplicação de polinômios.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

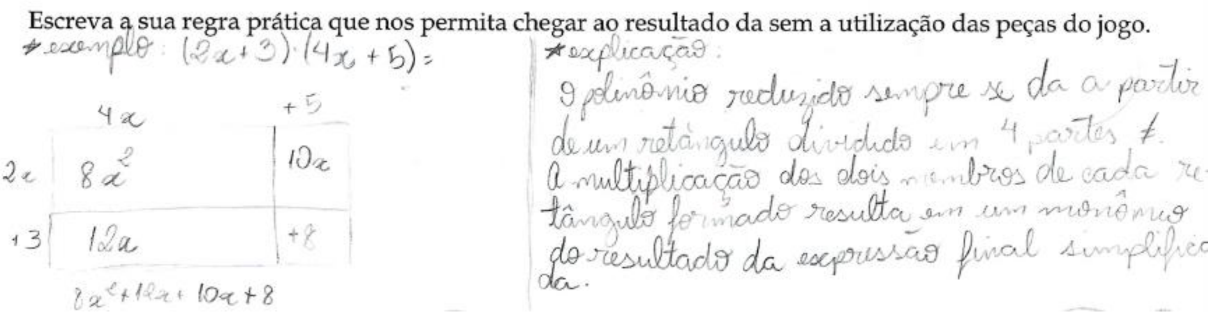


Figura 25: Resposta de um aluno sobre a regra criada para a multiplicação de polinômios.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

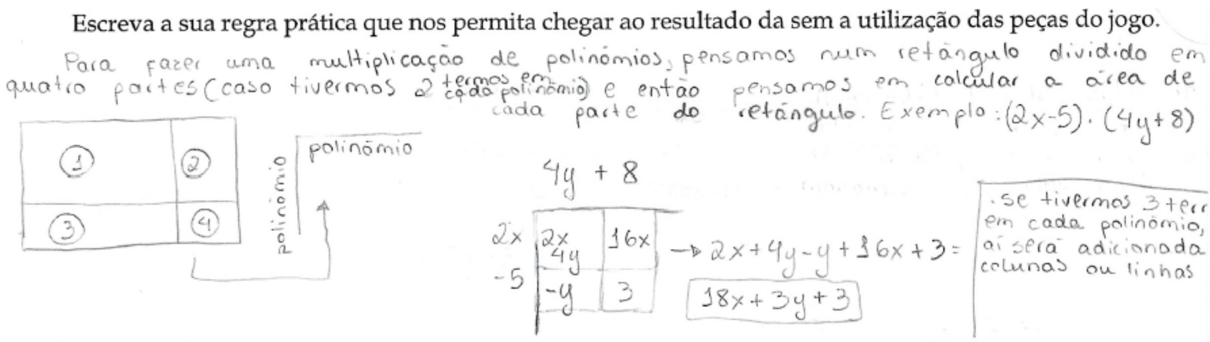


Figura 26: Resposta de um aluno sobre a regra criada para a multiplicação de polinômios.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Verificamos que o desenvolvimento mostrado nas figuras 21 e 22, tratam da propriedade distributiva da multiplicação, já comumente utilizada para o ensino da multiplicação de polinômios, porém essas regras foram criadas pelos alunos e organizadas com a intervenção do professor.

As figuras 23, 24, 25 e 26 apresentam uma proposta diferenciada do que é comumente visto, uma distributiva organizada de forma alternativa. Essa abordagem, concebida pelos alunos com a orientação do professor, oferece uma maneira de organizar a multiplicação de polinômios. Esta técnica, denominada pelos participantes de "tabelinha", segue uma estrutura semelhante à do jogo proposto, estabelecendo um eixo multiplicativo no qual os termos de um dos polinômios são dispostos na primeira linha e os termos do outro polinômio são dispostos na primeira coluna. Os resultados são obtidos multiplicando cada termo da primeira linha por todos os termos da primeira coluna, e os produtos são colocados nas células correspondentes da tabela. Para escrever o resultado da multiplicação dos polinômios, somam-se e agrupam-se os termos semelhantes, conforme exemplificado pelos alunos nas figuras correspondentes.

Este método ajuda a visualizar e organizar a multiplicação de polinômios, facilitando o processo e reduzindo a chance de erros. Ele também pode ser expandido para lidar com polinômios com mais termos, adicionando mais "linhas" e "colunas" conforme necessário, conforme propôs o aluno responsável pelo desenvolvimento da regra demonstrada na figura 26. Para ilustrar esse método segue a figura 27, onde fizemos, como exemplo, a resolução da multiplicação $(x+3y)\cdot(x+y-4)$.

$$(x+3y)\cdot(x+y-4) = x^2+4xy+3y^2-4x-12y$$

$\bullet$	x	$+y$	-4
x	x^2	$+xy$	$-4x$
$+3y$	$+3xy$	$+3y^2$	$-12y$

Figura 27: Resolução da multiplicação proposta.

Fonte: Próprio autor (2024).

A seguir, também após desenvolver algum produtos notáveis com o uso das peças criadas no Geogebra, apresentamos alguns resultados, para a criação de regras para o desenvolvimento dos produtos notáveis: o quadrado da soma, o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença de dois termos, por parte dos alunos, conforme as figuras 28, 29, 30 e 31.

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado sem a utilização das peças do jogo.

- Quadrado da soma de dois termos:

Faça o quadrado do 1º termo, depois multiplique os termos dentro do parenteses e multiplique por dois, após isso faça o quadrado do 2º termo

- Quadrado da diferença de dois termos:

Faça o quadrado do 1º termo, depois multiplique os termos dentro do parenteses e multiplique por dois, após isso faça o quadrado do 2º termo

- Produto da soma pela diferença de dois termos:

Multiplique o 1º termo do 1º parenteses com o 1º termo do 2º parenteses, após isso multiplique o segundo termo do 1º parenteses com o segundo termo do 2º parenteses.

Figura 28: Resposta de um aluno sobre a regra criada para os respectivos produtos notáveis.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado sem a utilização das peças do jogo.

- Quadrado da soma de dois termos:

a 1º termo
B 2º termo

$(A+B)^2 = a^2 + 2aB + B^2$

- Quadrado da diferença de dois termos:

a - 1º termo
B - 2º termo

$(a-B)^2 = a^2 - 2aB + B^2$

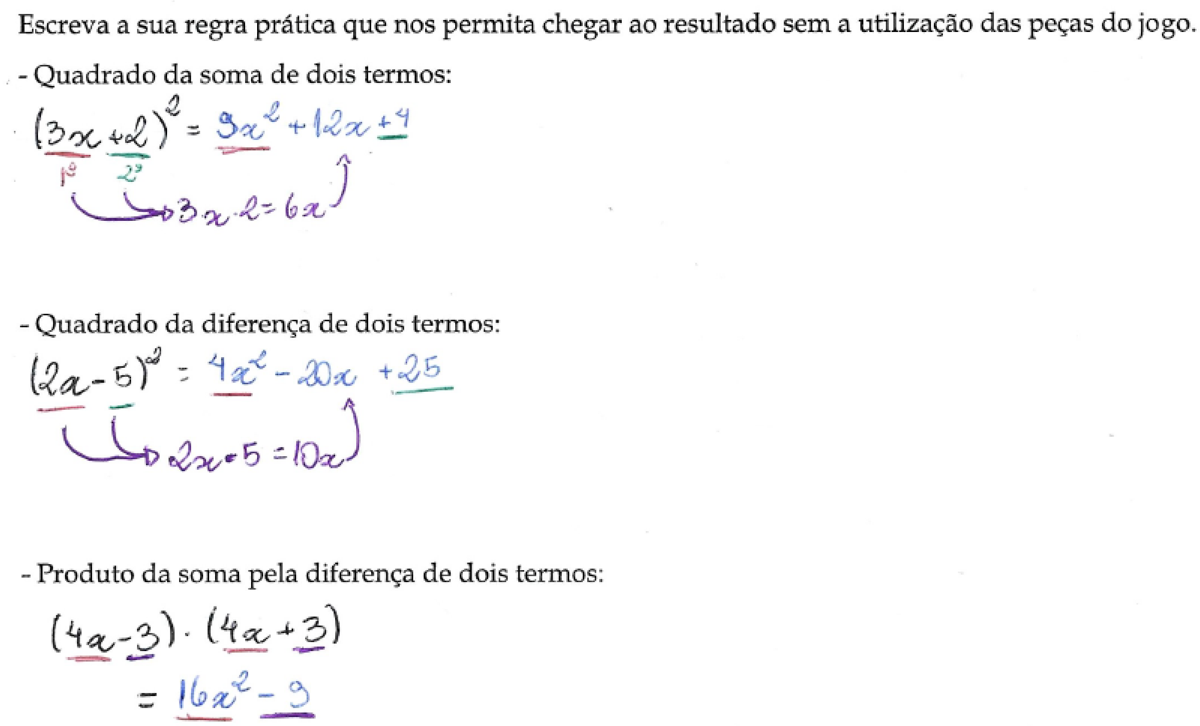
- Produto da soma pela diferença de dois termos:

a = 1º termo
B = 2º termo

$(a+B)\cdot(a-B) = a^2 - 2aB + 2aB + B^2$

Figura 29: Resposta de um aluno sobre a regra criada para os respectivos produtos notáveis.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).



Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado sem a utilização das peças do jogo.

- Quadrado da soma de dois termos:

$$\underbrace{(3x}_{1^{\circ}}\,\underbrace{+2)}_{2^{\circ}}{}^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$3x \cdot 2 = 6x$$

- Quadrado da diferença de dois termos:

$$(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

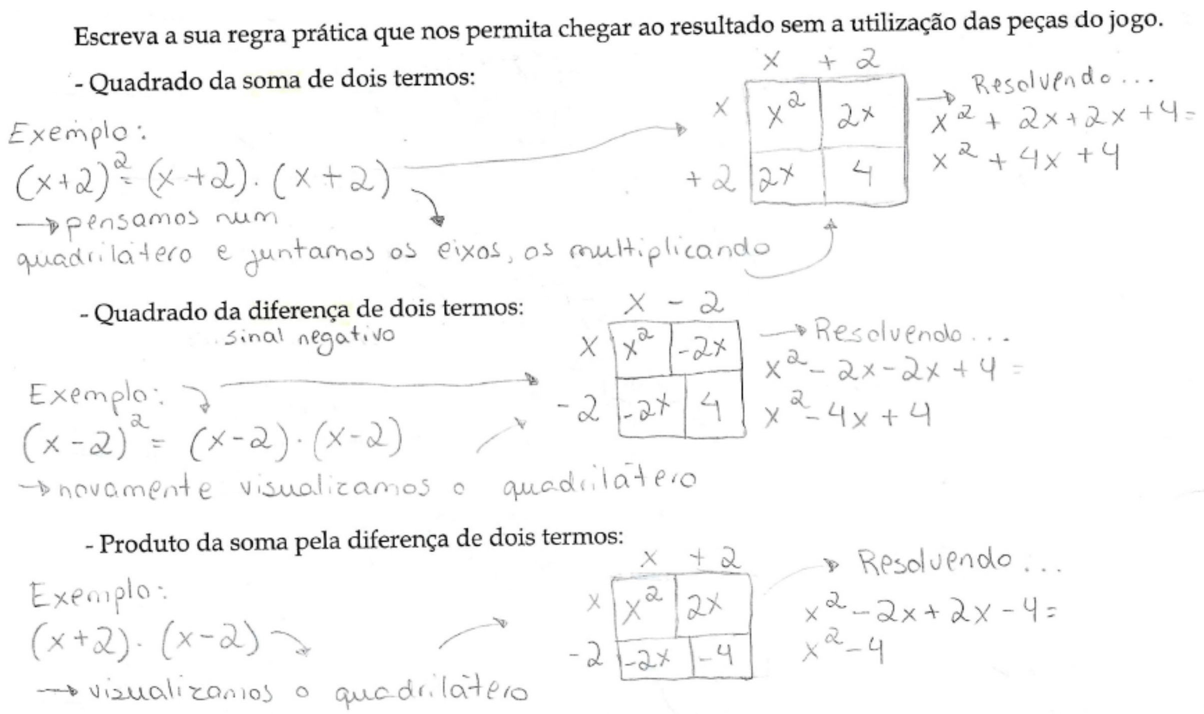
$$2x \cdot 5 = 10x$$

- Produto da soma pela diferença de dois termos:

$$(4x-3)\cdot(4x+3)$$
$$= 16x^2 - 9$$

Figura 30: Resposta de um aluno sobre a regra criada para os respectivos produtos notáveis.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).



Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado sem a utilização das peças do jogo.

- Quadrado da soma de dois termos:

Exemplo:

$(x+2)^2 = (x+2)\cdot(x+2)$

→ pensamos num quadrilátero e juntamos os eixos, os multiplicando

	x	$+2$
x	x^2	$2x$
$+2$	$2x$	4

→ Resolvendo...

$x^2 + 2x + 2x + 4 =$

$x^2 + 4x + 4$

- Quadrado da diferença de dois termos:

sinal negativo

Exemplo:

$(x-2)^2 = (x-2)\cdot(x-2)$

→ novamente visualizamos o quadrilátero

	x	-2
x	x^2	$-2x$
-2	$-2x$	4

→ Resolvendo...

$x^2 - 2x - 2x + 4 =$

$x^2 - 4x + 4$

- Produto da soma pela diferença de dois termos:

Exemplo:

$(x+2)\cdot(x-2)$

→ visualizamos o quadrilátero

	x	$+2$
x	x^2	$2x$
-2	$-2x$	-4

→ Resolvendo...

$x^2 - 2x + 2x - 4 =$

$x^2 - 4$

Figura 31: Resposta de um aluno sobre a regra criada para os respectivos produtos notáveis.

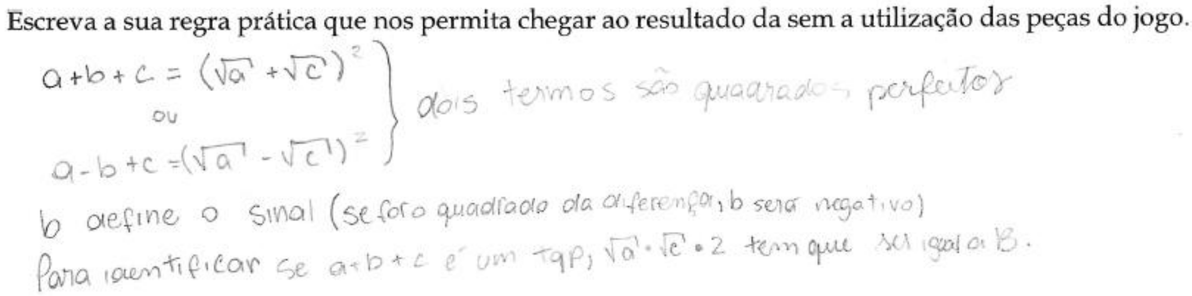
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Agora, verificamos que as regras criadas nas figuras 28, 29 e 30, tratam de variações das regras já conhecidas para o desenvolvimento desses produtos notáveis, porém essas regras foram criadas pelos alunos e organizadas com a intervenção do professor.

A figura 31 apresenta uma proposta diferenciada do que é comumente visto e faz uso da proposta da tabela, já discutida anteriormente, visualizando a disposição das peças do jogo para escrever a resposta de determinado produto notável.

3.1.2 Atividade 2 – Fatoração de um trinômio do quadrado perfeito

Após desenvolverem algumas fatorações envolvendo polinômios com o uso das peças criadas no Geogebra, os alunos foram desafiados a criar sua própria regra para fatorar um trinômio do quadrado perfeito. Desta atividade, apresentamos alguns resultados, conforme as figuras 32, 33, 34, 35 e 36.


Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

$a+b+c = (\sqrt{a} + \sqrt{c})^2$

ou

$a-b+c = (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2$

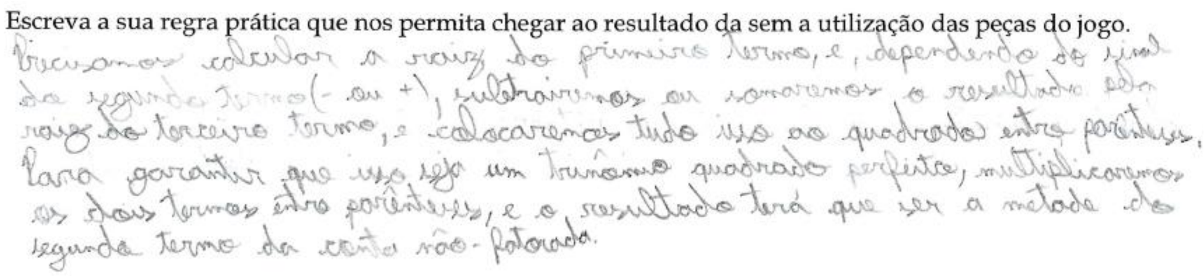
dois termos são quadrados perfeitos

b define o sinal (se for o quadrado da diferença, b será negativo)

Para identificar se $a+b+c$ é um tqp, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{c} \cdot 2$ tem que ser igual a B.

Figura 32: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do quadrado perfeito.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).


Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

Precisamos calcular a raiz do primeiro termo, e, dependendo do sinal do segundo termo (- ou +), subtrairemos ou somaremos o resultado pela raiz do terceiro termo, e colocaremos tudo isso ao quadrado entre parênteses. Para garantir que isso seja um trinômio quadrado perfeito, multiplicaremos os dois termos entre parênteses, e o resultado terá que ser a metade do segundo termo da conta não-fatorada.

Figura 33: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do quadrado perfeito.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

- a raiz quadrada de x^2 é igual a x.
- a raiz quadrada de 1 é igual a 1.
- o dobro da multiplicação entre x e 1 é igual a 2x
- sendo assim, o resultado fatorado é: $(x+1)^2$

Figura 34: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do quadrado perfeito.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

- fazer a √ do 1°, utilizando o 1° sinal que aparece com a √ do 3° e colocar o quadrado desque que o 2° termo seja = ao dobro do produto do 1° pelo 3° termo.

Figura 35: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do quadrado perfeito.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

eu penso na forma geométrica pela cabeça e escrevo a resposta
você considera a √ do 1 e 3 termo
q dá certo, e fazer 2. a multiplicação
do 1 e 3 e tem q dar o 2°

Figura 36: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do quadrado perfeito.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Verificamos que as regras descritas nas figuras 32, 33, 34, 35 e 36, tratam de variações das regras já conhecidas para a fatoração de um trinômio do quadrado perfeito. É claro que com a intervenção do professor possíveis erros foram esclarecidos, como por exemplo o que está descrito na figura 34 “a raiz quadrada de x^2 é igual a x”, trocando pela ideia de imaginar qual monômio que elevado ao quadrado resultasse em x^2 e, nesse momento, esclarecemos que $(x-1)^2 = (-x+1)^2$.

A figura 36 apresenta uma proposta um pouco diferenciada. Traz em seu texto que após a visualização na forma do jogo, escreve a forma fatorada.

3.1.3 Atividade 3 – Fatoração de uma diferença de quadrados

Nesta atividade, após desenvolverem algumas fatorações envolvendo polinômios com o uso das peças criadas no Geogebra, os alunos foram incentivados a criar uma regra para a fatoração de uma diferença de quadrados. Destacamos, conforme as figuras 37, 38, 39, 40 e 41, alguns desses resultados.

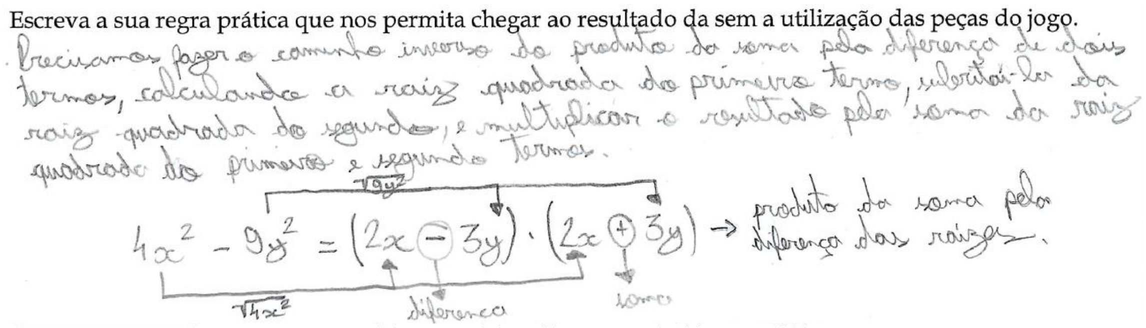


Figura 37: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar uma diferença de quadrados.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

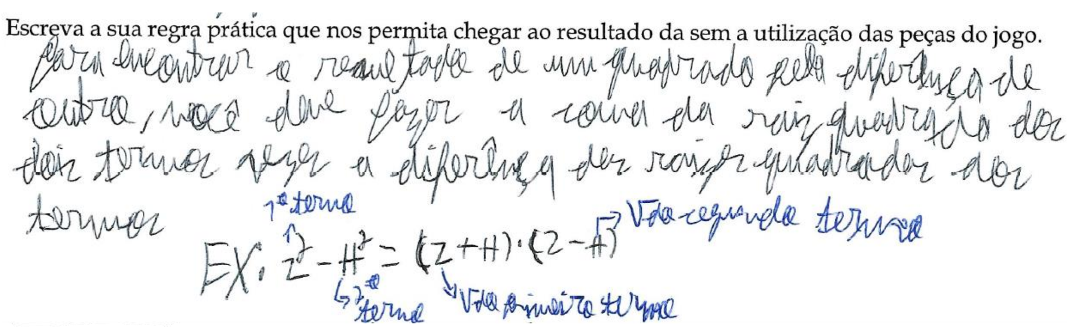


Figura 38: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar uma diferença de quadrados.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

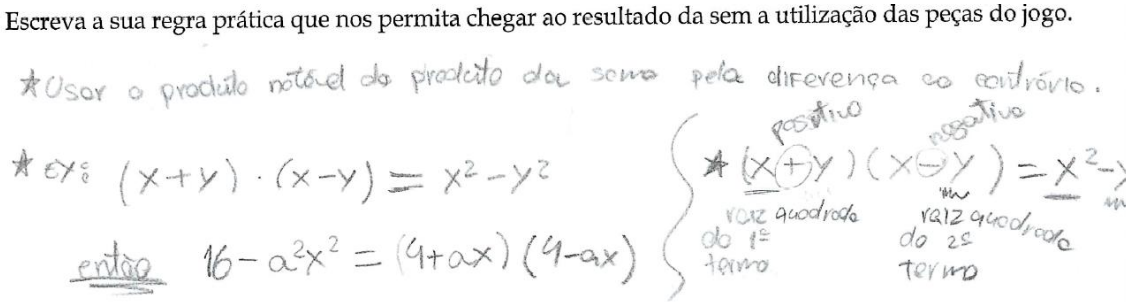
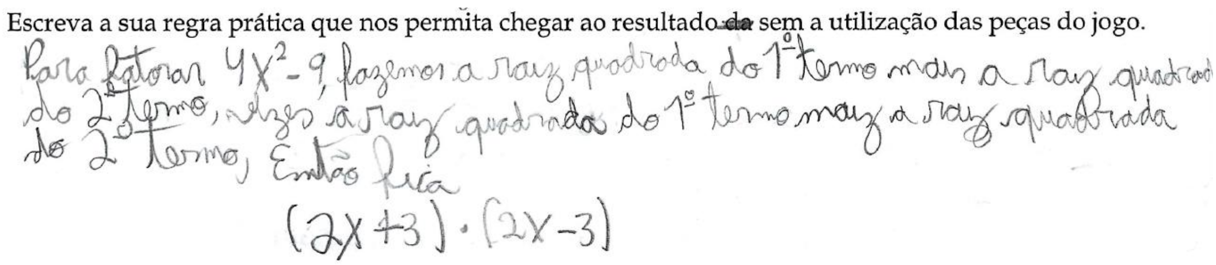


Figura 39: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar uma diferença de quadrados.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

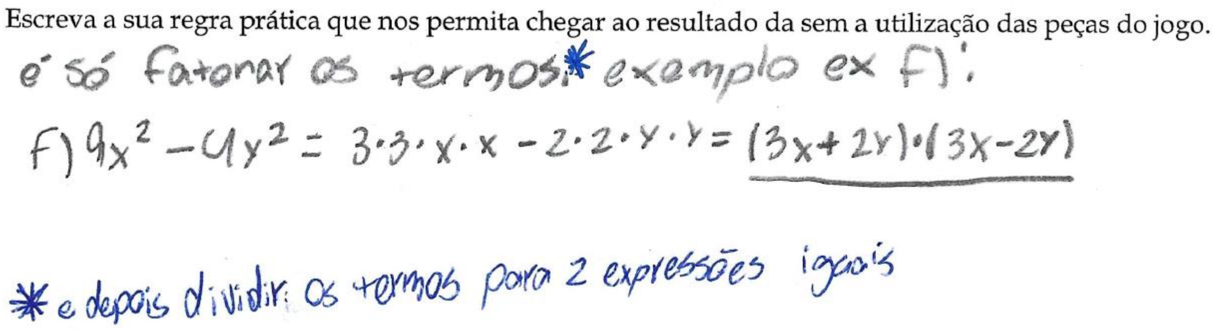

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado ~~da~~ sem a utilização das peças do jogo.

Para fatorar $4x^2 - 9$, fazemos a raiz quadrada do 1º termo mais a raiz quadrada do 2º termo, vezes a raiz quadrada do 1º termo mais a raiz quadrada do 2º termo, Então fica

$(2x+3)\cdot(2x-3)$

Figura 40: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar uma diferença de quadrados.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).


Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

é só fatorar os termos* exemplo ex f):

f) $9x^2 - 4y^2 = 3\cdot3\cdot x\cdot x - 2\cdot2\cdot y\cdot y = \underline{(3x+2y)\cdot(3x-2y)}$

* e depois dividir os termos para 2 expressões iguais

Figura 41: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar uma diferença de quadrados.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

As regras descritas nas figuras 37, 38, 39 e 40, tratam de variações das regras já conhecidas para a fatoração de uma diferença de quadrados, já a figura 41 apresenta uma proposta um pouco diferenciada. Traz em seu texto que ao escrever os termos do binômio em suas formas fatoradas completamente, devemos dividir os fatores de cada termo em dois grupos com fatores iguais, escrevendo a forma fatorada, conforme o exemplo que propôs.

3.1.4 Atividade 4 – Fatoração de um trinômio do tipo x² + bx + c

Na atividade 4 os alunos deveriam, através da observação do desenvolvimento dos itens propostos com o uso das peças criadas no Geogebra, criar uma regra para a fatoração de um trinômio do tipo $x^2 + bx + c$. Destacamos, conforme as figuras 42, 43, 44, 45 e 46, alguns desses resultados.

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

sera sempere x + ou - algo · x + ou - outra coisa
por exemplo $x^2 - 12x + 32 = (x-8) \cdot (x-4)$ a + desses 2 tem
que resultar em $-12x$ e o produto desses 2 precisa resultar em $+32$

Figura 42: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do tipo x² + bx + c.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

coloque x em cada parentes: $(x \quad) \cdot (x \quad)$
adicione os sinais mesmo $(x + \quad) \cdot (x + \quad)$
P entrara no segundo parentes $(x + \quad) \cdot (x + P)$
q entrara no primeiro parentes $(x + q) \cdot (x + P)$
para desenvolver [illegible] numeros que [illegible] c e que [illegible] b

Figura 43: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do tipo x² + bx + c.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

$x^2 + bx + c = x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$
ou seja, e' necessário encontrar dois números que, o
produto resulta em c, e sua soma resulta em b.

Figura 44: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do tipo x² + bx + c.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

$x^2 + Bx + C$

$(x+P)(x+Q)$

Você deve achar dois números (P e Q) que $P \cdot Q = C$ e $P + Q = B$. Desta forma, a fatoração será $(x+P) \cdot (x+Q)$

Figura 45: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do tipo x² + bx + c.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

Dps de pensar na forma geometrica que seria
comparar pensando se os 2 resultados multiplicados
entre si dão o 2º numero da conta original
e se eles somados dão o 1º número da
conta original

Figura 46: Resposta de um aluno sobre a regra criada para fatorar um trinômio do tipo x² + bx + c.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

As regras descritas nas figuras 42, 43, 44 e 45, tratam de variações das regras já conhecidas para a fatoração de trinômios do tipo proposto, já a figura 46 apresenta uma proposta um pouco diferenciada, propõe uma visualização da disposição das peças do jogo que representam esse trinômio para descrever sua forma fatorada.

3.2 Apresentação dos dados obtidos na pesquisa de opinião sobre a sequência de atividades proposta

No momento final da atividade, foi realizada uma pesquisa para avaliar o processo e suas propostas, dando a oportunidade para os alunos descreverem o que acharam, como se sentiram com essa proposta e possibilitar um momento para descreverem algumas questões que não foram observadas durante a aplicação da atividade. Desse questionário, respondido por 135 alunos, extraímos dados que serão apresentados a seguir.

Inicialmente, foram elaboradas duas questões para analisar se a proposta favoreceu, ou não, a aprendizagem e as relações dos alunos com a disciplina da Matemática. As figuras 47 e 48 mostram essas questões elaboradas e seus respectivos resultados.

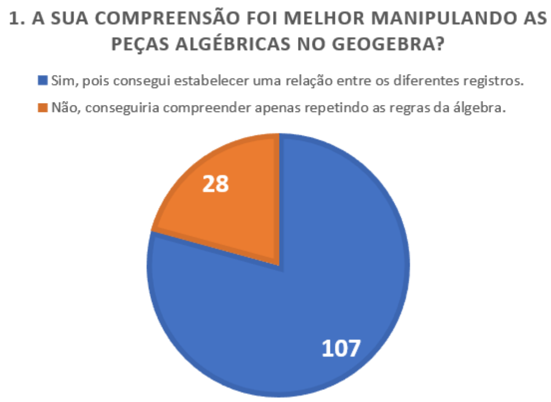


Figura 47: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 1 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Figura 48: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 2 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Com os registros realizados pelos alunos durante a realização das atividades e com as respostas obtidas nessas perguntas, podemos dizer que a fundamentação abordada neste trabalho, as diferentes representações propostas, a algébrica e as disposições com as peças, e uma abordagem visual, manipulável, favoreceram a maioria dos alunos a compreender melhor o conteúdo proposto, melhorou, inclusive, a maneira como se relacionam com a Matemática.

As questões de 3 a 11 foram elaboradas com o objetivo de compreender a experiência dos alunos ao utilizar o Geogebra para explorar conceitos matemáticos, especialmente polinômios, além de avaliar o nível de compreensão alcançado por meio dessa atividade prática e para fornecer *insights* sobre a eficácia da utilização dessa atividade no ensino de Matemática e se esta promoveu uma experiência de aprendizado mais significativa para os alunos.

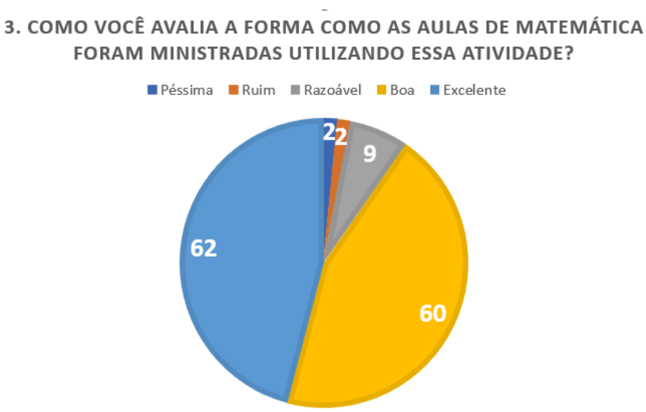


Figura 49: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 3 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

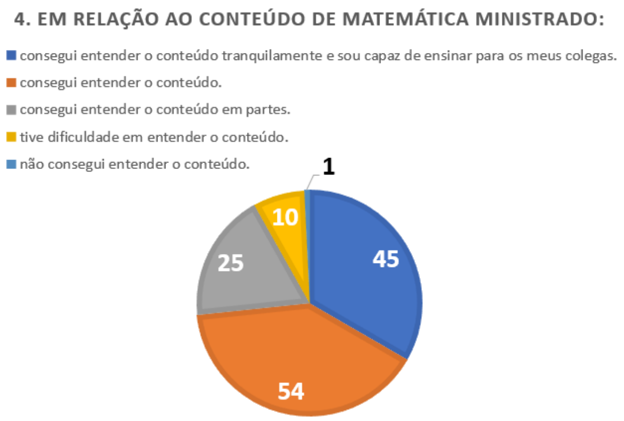


Figura 50: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 4 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A seguir estão alguns relatos, coletados em resposta a questão 5, escolhidos para destacar como foi trabalhar com as peças no Geogebra e relacionar com a representação simbólica desses polinômios.

> *"Muito bom, pois a matéria fica mais fácil imaginando as peças do jogo."*
>
> *"As peças me ajudaram muito para entender! E as representações que eu fiz também ajudaram muito."*
>
> *"Eu achei interessante porque as aulas envolvendo atividades desse tipo acabam prendendo mais a atenção."*
>
> *"Foi interessante, porque consegui associar as peças com o método da tabelinha."*
>
> *"Foram ótimas, pois ajudou bastante para criar as regras."*
>
> *"Consegui me estabelecer melhor e entender a regra mais rápido com as peças."*
>
> *"Achei mais fácil de entender com a utilização das peças."*

“É muito bom pois representa uma facilidade de entender o exercício. Com as peças é possível entender um padrão de como fazer SEM as peças.”

“As peças do Geogebra fizeram as aulas de Matemática mais divertidas, fazendo-nos pensar dos conceitos não apenas como qualquer outro, mas sim como um jogo.”

“As peças do Geogebra ajudaram na compreensão da regrinha”

“Foi legal, porque foi diferente e mais entretida do que uma aula normal.”

“Foi legal trabalhar com o Geogebra pois foi uma forma divertida de aprender Matemática.”

“Facilitou meu processo e me ajudou a entender as propostas visualmente.”

“Foi uma boa oportunidade de pensar de um jeito diferente. As regras ficaram mais fáceis de serem aprendidas, pois era simples e prático a operação no Geogebra então a aplicação das regras se tornava mais simples.”

“Ajudou a compreensão e visualização mais clara das regras.”

“Bem divertida e desafiadora no começo parece meio confuso quando olha pela primeira vez, porém depois de uns 10 minutos você já entende como funciona, como é prático.”

“Foi boa, até porque foi uma forma de aprender Matemática jogando um jogo e aprendendo facilmente.”

“Achei muito difícil resolver os exercícios com as peças do Geogebra. Me perdi um pouco e achei mais fácil usar a regra da conta naquele momento.”

“Horrível não entendi como funcionava e muito menos nao entendi como fazer as contas dessa forma”

Resumidamente, em relação à nossa primeira questão aberta vale observar que grande parte dos alunos expressaram uma recepção bastante positiva em relação ao uso das peças no Geogebra para compreender e relacionar-se com a representação simbólica dos polinômios. Eles destacaram que a visualização das peças facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos, tornando as aulas mais atraentes e envolventes. Muitos mencionaram que as peças os ajudaram a entender melhor as regras e os padrões envolvidos nos exercícios, tornando o processo de aprendizado mais fácil e rápido. Alguns alunos também destacaram a diversão e o desafio proporcionados pela abordagem do Geogebra, que permitiu aprender de forma mais prática e visual. Em resumo, o trabalho com as peças no Geogebra foi considerado uma experiência positiva, que proporcionou uma compreensão mais clara e uma abordagem mais envolvente para o aprendizado da Matemática.

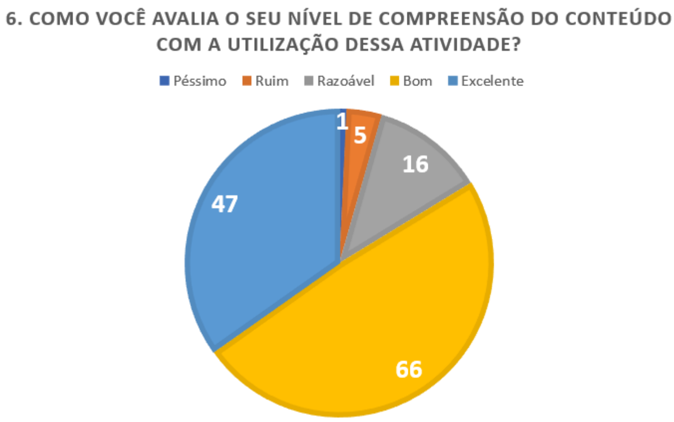


Figura 51: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 6 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

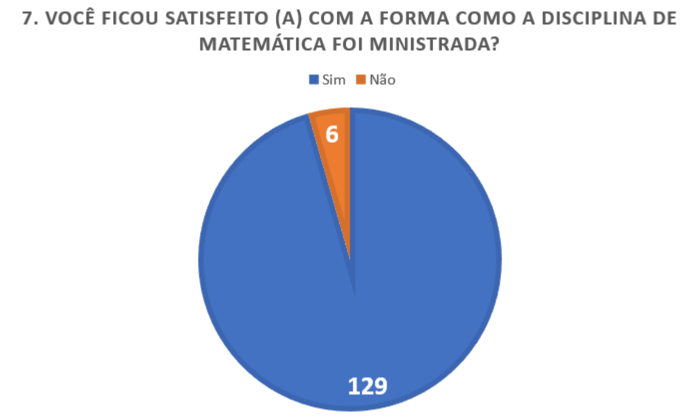


Figura 52: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 7 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Figura 53: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 8 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

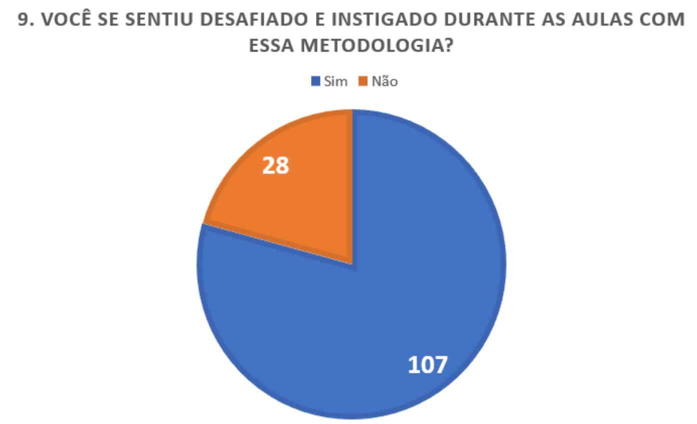


Figura 54: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 9 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

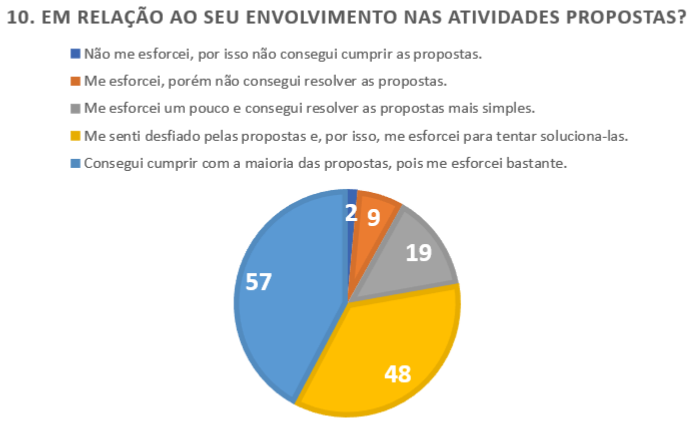


Figura 55: Resultados das respostas obtidas pela pergunta 10 do questionário aplicado ao final das atividades.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Em uma nova proposta de questão aberta, solicitamos para que os alunos comentassem a respeito da experiência que tiveram durante a realização das atividades, sobre a investigação de certos produtos notáveis e das diferentes técnicas de fatoração de polinômios. Seguem alguns relatos.

> *"Achei as formas de fatoração intrigantes e úteis, principalmente pois entendi o conteúdo nas primeiras tentativas, nos exercícios o que é bom e surpreendente pois normalmente demoro para compreender a matéria e sua maneira de realizar exercícios."*

> *"gostei bastante da proposta de termos que criar a regra por conta própria, acho que isso faz com que seja mais fácil de aprender a matéria. Acho que a matéria foi bem explicada nas atividades."*

> *"Na minha opinião, aprender com uma dinâmica diferente da de todos os dias, explorando novas técnica de aprendizado é algo que deixa os alunos curiosos e faz com que a gente explore e aprofunde melhor nos novos conceitos. Achei muito interessante a ideia de nosso professor."*

> *"Achei excelente a forma que ele aplicou essa matéria, de uma forma interativa e dinâmica, com exercícios para reforçar e ver se a gente está entendendo o conteúdo, os desafios eram difíceis, mas com um pouco de ajuda eles foram ficando mais fáceis e posso dizer que consegui aprender essa matéria de uma forma inesquecível."*

“Antes de jogar e utilizar as peças do Geogebra acabei me perdendo um pouco na matéria ainda mais os produtos notáveis, mas com o jogo percebi que era mais fácil do que eu imaginava, consegui entender o conteúdo e resolver as propostas feitas pelo professor.”

“Eu gostei bastante das atividades investigativas pois durante as resoluções do exercício eu ia me sentindo desafiada até enxergar um padrão.”

“Foi um desafio. Usar peças corretas, calcular, ajeitar…para, no final, valer a pena.”

“Conseguir entender o conteúdo de melhor forma com a Matemática visual.”

“A minha experiência foi bastante desafiadora, pois tenho bastante dificuldade na matéria e a atividade veio com uma proposta bem diferente e um pouco complicada, mas o Geogebra foi algo que ajudou bastante.”

“Adorei essa certa autonomia presente durante essas aulas, onde resolvíamos alguns exercícios com auxílio do jogo até conseguirmos enxergar algum tipo de padrão (desde os mais simples até os mais complexos) para que a resolução fosse possível sem dependência do Geogebra e que realmente aprendêssemos sobre.”

“Acho que o uso de atividades investigativas ajudou muito no aprendizado da matéria, deixando as aulas mais divertidas e desafiadoras, além da interatividade com os outros que foi muito legal.”

“Muito boas, consegui visualizar as regras sem sabê-las antes. Investigar foi muito bom. Facilitou entendermos as regras de forma visual.”

“Eu gostei bastante de trabalhar com essas atividades, me senti desafiada por ter que descobrir sozinha as regras de cada um e por

> *meio do Geogebra a atividade ficou bem mais fácil e mais divertida.”*
>
> *“Bem, essas atividades foram boas para eu mesmo descobrir as regras, mas como eu disse antes, um professor falando na lousa é melhor (minha opinião)”*
>
> *“Achei legal, mas complicada”*
>
> *“Não entendi como o funcionava, portanto nao sabia fazer as contas”*
>
> *“Não entendi o conceito do app em relação a fazer as contas, acharia melhor fazer as contas no papel sem utilizar nada digital”*

Analisando as respostas fornecidas à pergunta "Em relação ao seu envolvimento nas atividades propostas?", poucos não apreciaram a proposta por entender que o professor mostrando as regras na lousa sem propor a investigação seria melhor e que não viram sentido em fazer essa representação utilizando as peças do jogo. Em relação a isso, podemos entender que a proposta não fez sentido naquele momento, mas ter trabalhado com outras propostas de representação, fez com que os esses alunos tivessem uma outra possibilidade de visualizar essas relações e que, dependendo do momento, poderia fazer referência a essa proposta visual e até utilizar para fazer relações com conceitos e resoluções posteriores. Por outro lado, podemos observar uma tendência geral de apreciação e engajamento dos alunos com as atividades realizadas. Diversos alunos destacaram a forma desafiadora como as atividades foram conduzidas, ressaltando a dinâmica diferenciada em comparação com o ensino tradicional de Matemática. Muitos expressaram sua satisfação em explorar novas técnicas de aprendizado, enfatizando a curiosidade e o aprofundamento nos novos conceitos proporcionados pela abordagem adotada.

Além disso, várias respostas mencionaram a apreciação da autonomia concedida aos alunos durante as aulas, permitindo que eles descobrissem e criassem regras por conta própria, o que facilitou o aprendizado e tornou as atividades mais envolventes. A utilização do Geogebra como uma ferramenta visual e interativa também foi amplamente elogiada, destacando sua eficácia em tornar o conteúdo mais acessível e compreensível.

Outro aspecto relevante é a percepção dos alunos sobre o desafio apresentado pelas atividades, que foi visto como uma oportunidade de superação e aprendizado. Muitos expressaram que, mesmo enfrentando dificuldades iniciais, conseguiram compreender melhor os conteúdos abordados e se sentiram gratificados com os resultados alcançados.

As respostas refletem um alto nível de envolvimento e apreciação das atividades propostas, demonstrando que a abordagem adotada, baseada em diferentes registros de representações semióticas, investigações e uso do Geogebra, foi eficaz em estimular o interesse dos alunos, promover o aprendizado significativo e criar uma atmosfera de colaboração e descoberta na sala de aula.

Em suma, a sequência de atividades proposta, segundo análise das respostas obtidas, se relaciona com as teorias de Duval e com a abordagem proposta por Boaler. Em primeiro lugar, as respostas dos alunos destacam a importância de diferentes registros de representação semiótica, conforme discutido por Duval. Os alunos expressaram apreciação pela abordagem visual e interativa adotada nas atividades propostas, indicando que essa variedade de representações, incluindo o uso do Geogebra e a linguagem algébrica, contribuiu significativamente para seu entendimento dos conceitos matemáticos. Eles mencionaram como a visualização dos conceitos tornou o aprendizado mais acessível e estimulante, refletindo a ênfase de Boaler na utilização de uma Matemática mais visual, materiais manipulativos e tecnologia para promover a compreensão dos alunos.

Além disso, as respostas ressaltam a importância de ensinar aos alunos a reconhecer, interpretar e traduzir entre diferentes registros de representação, conforme preconizado por Duval. Os alunos descreveram como as atividades propostas os desafiaram a descobrir e criar regras por conta própria, permitindo-lhes desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Isso sugere que a abordagem adotada não apenas facilitou a visualização dos conceitos, mas também promoveu uma compreensão mais ampla e flexível da Matemática, como defendido por Boaler.

Portanto, as respostas dos alunos demonstram como a aplicação prática das teorias de Duval e da abordagem de Boaler contribuíram para uma experiência de aprendizado significativa, envolvente e eficaz desses conceitos da Matemática.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, concluímos nosso estudo com uma análise mais aprofundada das respostas dos alunos em relação à atividade proposta para o ensino de Matemática, considerando as teorias de Raymond Duval e a abordagem de Jo Boaler.

Inicialmente, delineamos como objetivo principal investigar o impacto do uso de uma sequência de atividades específicas no aprendizado de produtos notáveis, considerando diferentes representações, e avaliar as mudanças decorrentes nas práticas e na relação dos alunos com o aprendizado de Matemática.

Durante a execução das atividades, percebemos um engajamento significativo por parte dos alunos. Suas respostas revelaram uma receptividade positiva em relação ao uso das peças no Geogebra e à abordagem visual e interativa adotada. Muitos alunos expressaram que a visualização das peças facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos, tornando as aulas mais envolventes e estimulantes. Esta observação ressoou com os princípios de Duval, que enfatizam a importância da variedade de registros de representação semiótica na aprendizagem da Matemática.

Além disso, as respostas dos alunos destacaram a importância da autonomia concedida durante as atividades. Eles valorizaram a oportunidade de explorar e criar regras por conta própria, o que os incentivou a desenvolver uma abordagem mais investigativa e colaborativa para o aprendizado. Essa autonomia proporcionou uma experiência de aprendizado mais significativa, alinhada com os princípios de Boaler, que defende uma educação Matemática mais visual e inovadora.

Outro aspecto notável nas respostas dos alunos foi a apreciação da abordagem diferenciada das atividades em comparação com o ensino tradicional de Matemática. Muitos alunos destacaram a forma desafiadora como as atividades foram conduzidas, ressaltando a dinâmica diferenciada e estimulante proporcionada pela abordagem adotada. Esse reconhecimento demonstra a eficácia de estratégias inovadoras para engajar os alunos e promover um aprendizado mais profundo e significativo.

Ao relacionar essas observações com as teorias de Duval e Boaler, pudemos identificar como a variedade de registros de representação semiótica e a ênfase na autonomia e criatividade dos alunos contribuíram para uma experiência de aprendizado mais enriquecedora e eficaz. As atividades propostas não apenas facilitaram a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também promoveram o desenvolvimento de habilidades essenciais de pensamento crítico e resolução de problemas.

No entanto, a partir da experiência vivenciada durante este estudo, surgem novas questões que podem orientar futuras pesquisas. Por exemplo, seria interessante investigar mais profundamente como as características individuais dos alunos, tais como seus estilos de aprendizagem e níveis de habilidade Matemática, influenciam a eficácia dessa abordagem alternativa. Além disso, seria relevante explorar como adaptar essa abordagem para diferentes contextos educacionais, buscando ampliar seu impacto e aplicabilidade. Por exemplo, se não fosse possível utilizar o GeoGebra devido à falta de equipamentos ou estrutura tecnológica, uma alternativa seria construir as peças em cartolina, proporcionando uma experiência bastante semelhante à que tivemos.

Outra questão que surge é a avaliação a longo prazo dos efeitos dessa abordagem no desempenho dos alunos em Matemática e em sua atitude em relação à disciplina ao longo do tempo. Compreender se essa abordagem contribui para o desenvolvimento de habilidades Matemáticas duradouras e para uma visão mais positiva da Matemática entre os alunos seria fundamental para consolidar sua eficácia e relevância.

Em suma, embora tenhamos alcançado os objetivos estabelecidos inicialmente e observado resultados positivos, ou seja, destacando a importância de uma abordagem diversificada e inovadora no ensino de Matemática, que valorize a variedade de registros de representações semióticas e promova uma educação Matemática mais inclusiva e significativa, ainda há questões importantes a explorar e investigar. Esperamos que este estudo e estas novas questões sirvam de inspiração para pesquisas futuras e para que outros educadores possam explorar novas estratégias e metodologias em sala de aula, contribuindo para o contínuo desenvolvimento e aprimoramento das práticas de ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Samuel Alves de. **Ensino de radiciação com o uso do Geogebra**. Belém – PA, 2019.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. In: **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 696-726, ago. 2018. Mensal.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BOALER, Jo. **Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. Porto Alegre: Editora Penso, 2018.

BOALER, Jo. **Mente Sem Barreiras: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem**. Porto Alegre: Editora Penso, 2020.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et noésis**. 1993. (Préprint do livro publicado com o título “Sémiosis et pensée humaine”. Bern: Peter Lang, 1995). MORETTI, Méricles Thadeu, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus Editora, p.11-33, 2003.

DUVAL, R.Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**, Campo Mourão, v. 2, n. 3. p. 10-34, 2013.

DUVAL, Raymond. Structure du raisonnement déductif e apprentissage d la démonstration. In: **Educational Studies in Mathematics**, 22, p. 233-261, 1991. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In: **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu, 2012.

DUVAL, Raymond. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de Matemática. In: **Revemat**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 1-79, 2016. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu, 2016.

FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. In: **Bolema**, vol. 19, núm. 26, pp. 1-22, 2006.

GINEZ, Patrícia Costa. **Fenômeno de congruência e não congruência sobre a função exponencial em materiais didáticos**. Sorocaba – SP, 2020.

HAUSER, Leonardo Antonio de Carvalho. **A teoria dos registros de representação**

semiótica aplicada ao conceito de escala em livros didáticos de geografia. Maringá – PR, 2018.

JÚNIOR, Norval Baitello. Comunicação, mídia e cultura. In: **Revista da Fundação Saede**. V.12/no. 4. Out/Dez 1998. São Paulo. P. 11-16.

Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MACIEL, Clara de Melo. **Estado do conhecimento sobre a abordagem das mentalidades Matemáticas no processo de aprendizagem nos anos iniciais do ensino fundamental**. Cruz Alta – RS, 2022.

MARTINELLI, Diego da Silva Pinto. **Geometria analítica: articulando registros algébricos e geométricos com o grafeq**. Santa Maria – RS, 2017.

OLIVEIRA, Jader. **A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Modelagem de Problemas de Programação Linear**. Ebrapem, Curitiba – PR, 2016.

PAULS, Monika Penner. **Indicativos de conexões e afinidades entre o aprendizado da linguagem formal e a inserção à álgebra elementar: um ensaio sobre a superação de dificuldades por meio da semiótica e da afetividade ampliada**. Curitiba – PR, 2017.

RODRIGUES, Salete. **Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix**. São Paulo – SP, 2008.

SOUZA, Alexander Cruz de. **Uma análise do material do gestar ii à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. São Paulo – SP, 2021.

SUPEKAR, Kaustubh; SWIGART, Anna; TENISON, Caitlin; JOLLES, D Dietsje; ROSENBERG-LEE, Miriam; FUCHS, Lynn; MENON, Vinod. Neural predictors of individual differences in response to math tutoring in primary-grade school children. In: **PNAS**, v. 110, n. 20, p. 8230-8235, 2013.

VALLE, Laissa Figueiredo do. **Mathematical mindsets (mentalidades Matemáticas): uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem das Matemáticas**. São Paulo – SP, 2019.

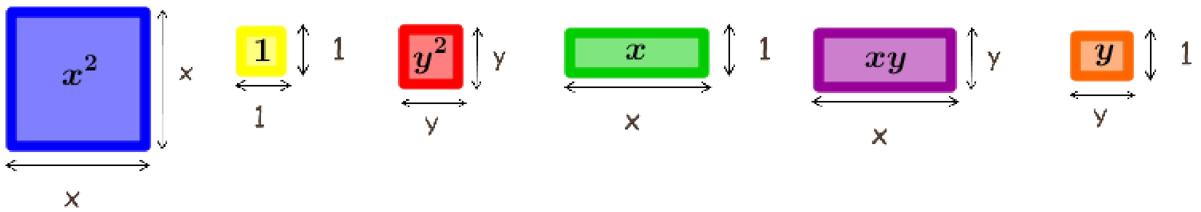
APÊNDICE A: A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PROPOSTA

MATEMÁTICA VISUAL - PRODUTOS NOTÁVEIS E OUTRAS RELAÇÕES ALGÉBRICAS NO GEOGEBRA – Parte 1

O objetivo principal dessa atividade é, com o uso de ferramentas criadas no GeoGebra, relacionar figuras geométricas planas (quadrados e retângulos) com a multiplicação de polinômios como forma de potencializar a compreensão dos conceitos envolvidos.

CONHECENDO O JOGO

As peças:



Quadrados**:**

- de lados x representando, cada um, a expressão x^2;

- de lados y, representando, cada um, a expressão y^2;

- de lados 1, representando, cada um, a expressão 1.

Retângulos**:**

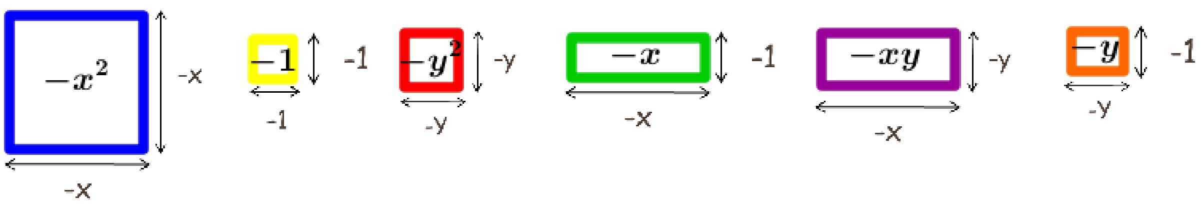
- lados x e y, representando, cada um, a expressão xy;

- de lados x e 1, representando, cada um, a expressão x;

- de lados y e 1, representando, cada um, a expressão y.

Observação:

Para indicar os “simétricos/opostos" usaremos as peças sem preenchimento. Assim, a peça “positiva” será preenchida e a peça de mesmas dimensões, mas sem preenchimento, será negativa. Nessas peças, devemos considerar as dimensões também negativas, por exemplo, a peça $-x^2$ possui dimensões -x e -x.



As regras:

- “*Elementos positivos e negativos de mesmo tipo se anulam/cancelam*". Isso se deve ao fato de que, por exemplo, $-x + x = 0$.

- Você poderá usar pares de peças opostas para auxiliar no desenvolvimento das atividades, já que elas se anulam.

- Só podemos encostar duas peças do jogo quando o lado comum tiver a medida de mesmo módulo.

Multiplicação de Polinômios

Acompanhe a resolução da seguinte multiplicação.

$(2x-1).(3x-5)=$

Agora, usando as peças algébricas, determine o polinômio reduzido representado em cada expressão.

a) $(x+y).(x-y)=$

b) $(2x-2).(2x-2)=$

c) $(x+3y).(x+3y)=$

d) $(y+2).(3x-y)=$

e) $(2x+3).(4x+5)=$

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

Utilizando a regra que você escreveu, resolva o seguinte exercício:

Simplifique as seguintes expressões:

a) $(a+5)\cdot(3a-2)=$

b) $(3x-y)\cdot(x+y-2)=$

c) $(x+y)\cdot(x-2y)-(2x+y)\cdot(x-y)=$

Os produtos notáveis

Usando as peças algébricas, determine o polinômio reduzido representado em cada expressão.

- Quadrado da soma de dois termos:

(Lembre-se que o quadrado pode ser escrito como a multiplicação de um fator por ele mesmo)

a) $(x+2)^2 =$

b) $(4y+1)^2 =$

c) $(3x+4)^2 =$

d) $(2x+3y)^2 =$

- Quadrado da diferença de dois termos:

(Lembre-se que o quadrado pode ser escrito como a multiplicação de um fator por ele mesmo):

e) $(x-3)^2 =$

f) $(3y-1)^2 =$

g) $(x-2)^2 =$

h) $(2x-3y)^2 =$

- Produto da soma pela diferença de dois termos:

i) $(x+3)\cdot(x-3) =$

j) $(2y+4)\cdot(2y-4) =$

k) $(x+2y)\cdot(x-2y) =$

l) $(3x+1)\cdot(3x-1) =$

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado sem a utilização das peças do jogo.

- Quadrado da soma de dois termos:

- Quadrado da diferença de dois termos:

- Produto da soma pela diferença de dois termos:

Utilizando essa regra, resolva os seguintes exercícios em seu caderno:

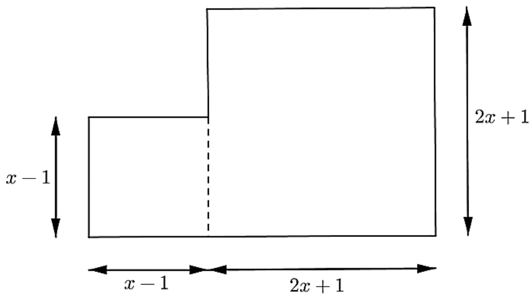
Jm terreno tem a forma da figura ao lado:

Determine o polinômio que representa:

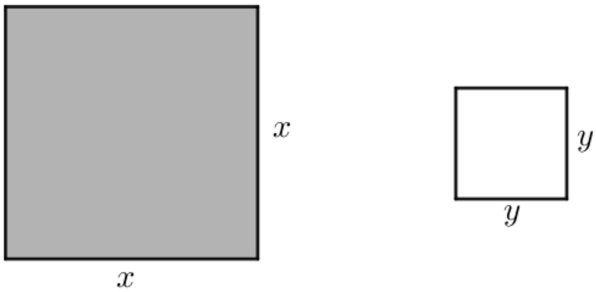
ırea do lote da esquerda.

ı área do lote da direita.

ı área do terreno.



2. Determine duas expressões que representam a diferença entre as áreas das seguintes figuras.



MATEMÁTICA VISUAL - PRODUTOS NOTÁVEIS E OUTRAS RELAÇÕES ALGÉBRICAS NO GEOGEBRA – Parte 2

***Fatoração de trinômios quadrados perfeitos*:** Fatorar (escrever como resultado da multiplicação de outros dois polinômios), usando as peças algébricas, os trinômios quadrados perfeitos.

a) x^2+2x+1

b) $4x^2-4x+1$

c) x^2+6x+9

d) $9x^2-12x+4$

e) $x^2-8x+16$

f) $x^2+2xy+y^2$

g) x^2-2x+1

h) $9x^2-18x+9$

i) $9x^2-6x+1$

j) $4x^2-4x+1$

k) $4x^2+12x+9$

Com a observação dos resultados, podemos concluir que quando os quadrados formados representam, de maneira geral, expressões do tipo ax² + bx + c a forma fatorada desta é (px + q)²

Fazendo comparações dos coeficientes obtidos nos itens e na forma geral, preencha a seguinte tabela:

ITEM	Valor de a	Valor de b	Valor de c	Valor de p	Valor de q
A					
B					
C					
D					
E					
F					
G					
H					
I					
J					
K					

Que relação existe entre p e o número a?

Que relação existe entre q e o número c?

Que relação existe entre o produto p.q e o número b?

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

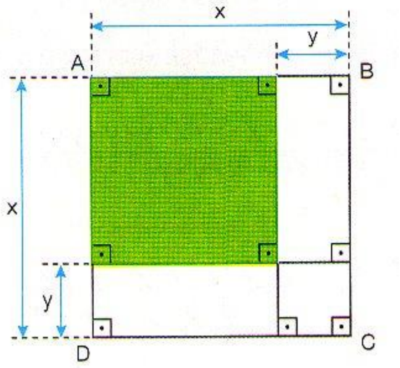
Agora, utilizando as regras que você escreveu, resolva os seguintes exercícios:

1. Em relação aos polinômios $x^2 + 20x + 100$; $4a^2 - 12\text{ab} + 9b^2$ e $25b^2 + 8b + 1$:

a) verificar se são trinômios quadrados perfeitos; e

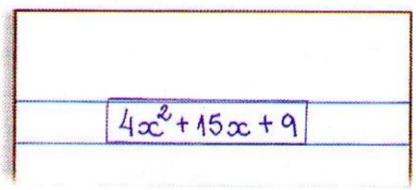
b) em caso afirmativo, fatorá-los.

2. Observe a parte escura do quadrado ABCD.



Dê a forma fatorada e a forma não fatorada do trinômio que representa a área dessa parte escura.

3. Considere o polinômio.



a) Qual monômio deve ser adicionado a esse polinômio para obtermos um trinômio do quadrado perfeito?

b) Qual a forma fatorada do trinômio obtido?

MATEMÁTICA VISUAL - PRODUTOS NOTÁVEIS E OUTRAS RELAÇÕES ALGÉBRICAS NO GEOGEBRA – Parte 3

Fatoração da diferença de quadrados: Fatorar, usando as peças algébricas, os trinômios.

a) $x^2 - y^2$

b) $x^2 - 1$

c) $4x^2 - 9$

d) $9x^2 - 16$

e) $x^2 - 9$

f) $9x^2 - 4y^2$

Com a observação dos resultados, podemos concluir que quando os quadrados formados representam expressões do tipo ax² - b² a forma fatorada desta é (p + q).(p – q).

Fazendo comparações dos coeficientes obtidos nos itens e na forma geral, preencha a seguinte tabela:

ITEM	Monômio ax²	Monômio b²	Valor de p	Valor de q

A				
B				
C				
D				
E				
F				

Que relação existe entre p e o monômio ax²?

Que relação existe entre q e o monômio b²?

Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

Agora, utilizando as regras que você escreveu, resolva os seguintes exercícios:

1. Fatore as expressões.

a) $a^2 - 1$

b) $4a^2 - 9b^2$

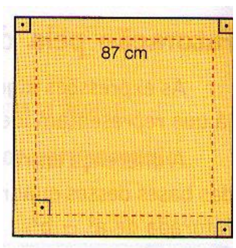
c) $-16 + 49m^{10}$

d) $-16y^2 + 9x^4$

e) $a^2b^2c^2 - m^2$

f) $\frac{1}{4x^6} - \frac{25}{9y^4}$

2. A folha de cartolina da figura tem 97 cm de lado. Renato quer diminuir o tamanho dessa folha deixando um quadrado de 87 cm de lado. Que área Renato vai retirar dessa folha? Resolva usando fatoração.



3. Observe o binômio.

$16m^4 - a^2$

a) Escreva uma forma fatorada desse polinômio.

b) Qual é o valor numérico desse binômio para $4m^2 + a = 40$ e $4m^2 - a = 8$

4. Observe a expressão dada.

$54a^4 - 6b^2$

a) Existe algum fator comum aos termos dessa expressão?

b) Colocando em evidência os fatores comuns, que expressão se obtém?

c) Qual é o valor numérico dessa expressão para $3a^2 + b = 4$ e $3a^2 - b = 2$?

5. Na figura, o lado do quadrado *ABCD* mede *m* e o lado do quadrado *CEFG* mede *n*.

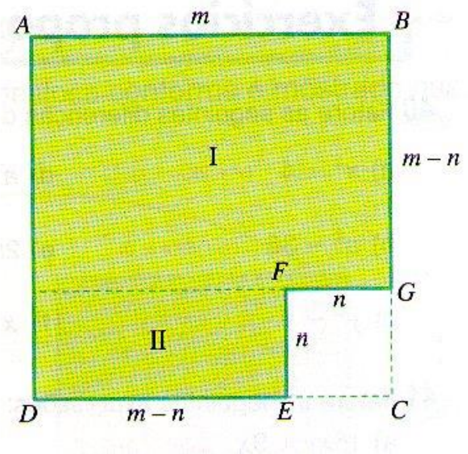
a) Escreva a área da parte escura como uma diferença de dois quadrados.

b) Determine a expressão que representa a área I.

c) Determine a expressão que representa a área II.

d) Determine o polinômio da soma das áreas I e II.

e) Fatora o polinômio encontrado no item d.



MATEMÁTICA VISUAL - PRODUTOS NOTÁVEIS E OUTRAS RELAÇÕES ALGÉBRICAS NO GEOGEBRA – Parte 4

***Fatoração de trinômios*:** Fatorar, usando as peças algébricas, os trinômios.

a) $x^2 + 3x + 2$

b) $x^2 + 7x + 6$

c) $x^2 + 6x - 7$

d) $x^2 + x - 2$

e) $x^2 - x - 2$

f) $x^2 - 3x + 2$

Com a observação dos resultados, podemos concluir que quando os retângulos formados representam expressões do tipo x² + bx + c a forma fatorada desta é (x +

p).(x + q).

Fazendo comparações dos coeficientes obtidos nos itens e na forma geral, preencha a seguinte tabela:

ITEM	Valor de b	Valor de c	Valor de p	Valor de q
A				
B				
C				
D				
E				
F				

Que relação existe entre p, q e o número c?

Que relação existe entre p, q e o número b?

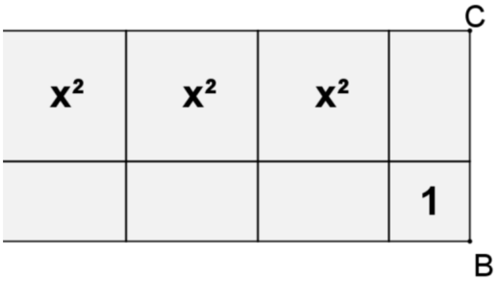
Escreva a sua regra prática que nos permita chegar ao resultado da sem a utilização das peças do jogo.

Agora, utilizando as regras que você escreveu, resolva os seguintes exercícios:

1. Um retângulo tem sua área representada pela expressão $x^2 + 5x - 14$. Determine os binômios que representam os lados desse retângulo.

Área
$x^2 + 5x - 14$

2. O retângulo ABCD foi dividido em regiões menores cujas áreas estão representadas conforme a figura abaixo, onde x^2 e 1 representam áreas de quadrados. Determine:



a) O polinômio que representa a área total do retângulo ABCD.

A forma fatorada e as medidas dos lados do retângulo ABCD.

3. Fatore os trinômios.

a) $x^2 + 8x + 15$

b) $x^2 + 7x - 18$

c) $x^2 - 12x + 36$

d) $x^2 - x - 12$

APÊNDICE B: QUESTIONÁRIO AVALIATIVO SOBRE A PROPOSTA

Projeto Matemática Visual - Produtos notáveis e outras relações algébricas.

Prezado(a) aluno(a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

A sua compreensão foi melhor manipulando as peças algébricas no GeoGebra?
( ) Sim, pois consegui estabelecer uma relação entre os diferentes registros.
( ) Não, conseguiria compreender apenas repetindo as regras da álgebra.

2. Você considera que a sua relação com a disciplina de Matemática foi modificada com essa atividade?
( ) Sim   ( ) Não

3. Como você avalia a forma como as aulas de Matemática foram ministradas utilizando essa atividade?
( ) Péssima ( ) Ruim ( ) Razoável ( ) Boa ( ) Excelente

4. Em relação ao conteúdo de Matemática ministrado:
( ) consegui entender o conteúdo tranquilamente e sou capaz de ensinar para os meus colegas.
( ) consegui entender o conteúdo em partes.
( ) tive dificuldade em entender o conteúdo.
( ) não consegui entender o conteúdo.

5. Como foi trabalhar com as peças no Geogebra e relacionar com a representação simbólica desses polinômios?
Conte um pouco mais.

6. Como você avalia o seu nível de compreensão do conteúdo com a utilização dessa atividade?
( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Razoável ( ) Bom ( ) Excelente

7. Você ficou satisfeito (a) com a forma como a disciplina de Matemática foi ministrada?
( ) Sim ( ) Não

8. Você gostaria que ter mais aulas como essas das quais você participou?
( ) Sim ( ) Não

9. Você se sentiu desafiado e instigado durante as aulas com essa metodologia?
( ) Sim ( ) Não

10. Em relação ao seu envolvimento nas atividades propostas?
( ) Não me esforcei, por isso não consegui cumprir as propostas.

( ) Me esforcei, porém não consegui resolver as propostas.
( ) Me esforcei um pouco e consegui resolver as propostas mais simples.
( ) Me senti desfiado pelas propostas e, por isso, me esforcei para tentar soluciona-las.
( ) Consegui cumprir com a maioria das propostas, pois me esforcei bastante.

11. Comente a respeito da experiência que você teve durante a realização das atividades, sobre a investigação de certos produtos notáveis e das diferentes técnicas de fatoração de polinômios. Escreva o que você achou sobre o uso de atividades investigativas para explorar e aprender os conceitos envolvidos? Conte um pouco mais.