



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PEDRO CUNHA BORGES

**A PROPORÇÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI  
CURIOSIDADES, MITOS E ALGUMAS VERDADES**

CATALÃO  
2024

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO****INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA**

Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, número 1120, - Bairro Setor Universitário, Catalão/GO, CEP 75704-020  
Telefone: - - <https://www.ufcat.edu.br>

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA)****TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT)**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Catalão (UFCAT) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFCAT), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFCAT é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o(a) autor(a) e o(a) orientador(a) Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

**1. Identificação do material bibliográfico**

Dissertação ou Tese? **Dissertação**

**2. Nome completo do autor: Pedro Cunha Borges**

Nome completo do(a) orientador(a): **Paulo Roberto Bergamaschi**

**3. Título do trabalho**

Título: *A PROPORÇÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: Curiosidades, mitos e algumas verdades*

**4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)**

Concorda com a liberação total do documento:  SIM  NÃO<sup>1</sup>

[<sup>1</sup>] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

**O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.**

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs.: Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor**



Documento assinado eletronicamente por **PAULO ROBERTO BERGAMASCHI, Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/07/2024, às 13:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Cunha Borges, Usuário Externo**, em 17/07/2024, às 17:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0083073** e o código CRC **3222E8D8**.

PEDRO CUNHA BORGES

**A PROPORÇÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI**  
CURIOSIDADES, MITOS E ALGUMAS VERDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof.º Dr. Paulo Roberto Bergamaschi

CATALÃO  
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Borges, Pedro Cunha  
A PROPORÇÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI  
[manuscrito] : CURIOSIDADES, MITOS E ALGUMAS VERDADES /  
Pedro Cunha Borges. - 2024.  
IC, 99 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2024.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Proporção. 2. Áurea. 3. Número de ouro. 4. Fibonacci. I. Bergamaschi, Paulo Roberto, orient. II. Título.

CDU 51

## ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 05 da sessão de Defesa de Dissertação de **Pedro Cunha Borges**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Ensino de Matemática**. **Aos vinte e nove dias do mês de maio de dois mil e vinte e quatro, às 10h**, por Webconferência via sistema Google Meet (<https://meet.google.com/btv-twnd-juk?authuser=0>), reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dr. Paulo Roberto Bergamaschi (PROFMAT/IMTec/UFCAT)**, orientador, **Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior (PROFMAT/IMTec/UFCAT)** e **Dr. Rogério Ferreira (UnB)**, para, em sessão pública, procederem a avaliação da Dissertação intitulada "*A PROPORÇÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: Curiosidades, mitos e algumas verdades*", de autoria de **Pedro Cunha Borges**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFCAT. A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente, que procedeu com a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada **aprovada**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora.

Obs.: "Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES nº 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:

Art. 2º A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."



Documento assinado eletronicamente por **PAULO ROBERTO BERGAMASCHI**, Professor(a) do **Magistério Superior**, em 29/05/2024, às 11:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **PORFIRIO AZEVEDO DOS SANTOS JUNIOR**, Professor(a) do **Magistério Superior**, em 29/05/2024, às 11:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ROGERIO FERREIRA**, **Usuário Externo**, em 29/05/2024, às 11:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0071187** e o código CRC **AF51ADF1**.

This was a triumph  
I'm making a note here:  
**HUGE SUCCESS**  
It's hard to overstate  
my satisfaction

GLaDOS (Portal, 2007)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu capacidade para escrever esse trabalho.

Agradeço aos meus pais, por terem me tido.

Agradeço a minha esposa Maria Eduarda, que participou ativamente da construção deste trabalho, buscando referências, revisando e me dando apoio.

Agradeço ao meu orientador Paulo Roberto Bergamaschi que tem um olhar sensacional.

Agradeço meu colega Valdir, que esteve presente em toda minha trajetória nesse curso e sempre me ajudou bastante.

Agradeço a Coca-Cola, que não me patrocina, mas me deu energia todos os dias.

Agradeço ao Geogebra, brabo demais.

## RESUMO

O presente trabalho, mediante a quantidade de materiais errôneos disponibilizados, tem como objetivo atuar como guia e mediador, trazendo reflexões acerca da Proporção Áurea e da Sequência de Fibonacci, a fim de precaver o leitor acerca dos erros, e contestar falácias famosas. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica feita em material impresso e disponibilizado na internet, buscando imparcialidade ao verificar diferentes pontos de vista. Serão apresentados alguns mitos e verdades sobre a presença e o uso da Proporção Áurea em famosas obras e monumentos históricos, pontuando aspectos que confirmam ou não seu uso. Observa-se que a matemática é harmônica, e se faz presente em diversas áreas da arte e história. Entretanto, a necessidade de harmonia e a sensação de beleza proporcionada por um padrão matemático, pode levar o observador a realizar correlações errôneas. Assim surge a necessidade de conceber ao leitor um olhar crítico e imparcial sobre o assunto abordado, apresentando seu contexto histórico-filosófico e trazendo a reflexão final de que são ferramentas matemáticas interessantes e úteis, porém não são as únicas e não são universais. Ao fim, são apresentadas algumas discussões acerca do uso da Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea no contexto escolar, propondo reflexões envolvendo aspectos da história matemática e sua interdisciplinaridade.

**Palavras-chave:** Proporção; Áurea; Número de ouro; Fibonacci.

## ABSTRACT

Given the amount of erroneous material available, this paper aims to act as a guide and mediator, providing reflections on the Golden Ratio and the Fibonacci Sequence, in order to warn the reader about errors and challenge famous fallacies. This is a bibliographical research carried out on printed material and material available on the internet, seeking impartiality when verifying different points of view. Some myths and truths about the presence and use of the Golden Ratio in famous works and historical monuments will be presented, highlighting aspects that confirm or deny its use. It is observed that mathematics is harmonious, and is present in several areas of art and history. However, the need for harmony and the feeling of beauty provided by a mathematical pattern can lead the observer to make erroneous correlations. Thus, the need arises to provide the reader with a critical and impartial view of the subject addressed, presenting its historical-philosophical context and bringing the final reflection that they are interesting and useful mathematical tools, but they are not the only ones and are not universal. Finally, some discussions are presented about the use of the Fibonacci Sequence and the Golden Ratio in the school context, proposing reflections involving aspects of mathematical history and its interdisciplinarity.

**Keywords:** Golden; Ratio; Golden number; Fibonacci.

## LISTAS DE (FIGURAS, FOTOGRAFIAS, GRÁFICOS, MAPAS, QUADROS, OUTROS)

Figura 1. Segmento Dividido na Proporção Áurea. ....	18
Figura 2. Casais de Coelhoos. ....	20
Figura 3. Passo 1, Retângulo de Fibonacci.....	26
Figura 4. Passo 2, Retângulo de Fibonacci.....	26
Figura 5. Passos 3 e 4, Retângulo de Fibonacci. ....	26
Figura 6. Passos 5 e 6, Retângulo de Fibonacci. ....	27
Figura 7. Retângulo de Ouro. ....	27
Figura 8. Construção do Segmento Áureo ....	30
Figura 9. Construindo o Retângulo de Ouro ....	32
Figura 10. Construção do Retângulo Áureo ....	32
Figura 11. Triângulo Áureo. ....	33
Figura 12. Propagação do Triângulo Áureo ....	34
Figura 13. Pentagrama Inscrito no Pentágono Regular.....	35
Figura 14. Triângulo Áureo no Pentágono Regular. ....	36
Figura 15. Número de Ouro no Pentágono.....	37
Figura 16. Autossimilaridade do Pentagrama Regular.....	37
Figura 17. Espiral Áurea no Retângulo Áureo. ....	38
Figura 18. Construção da Espiral Áurea (Passo 1).....	39
Figura 19. Construção da Espiral Áurea (Passo 2).....	39
Figura 20. Construção da Espiral Áurea (Passo 4).....	40
Figura 21. Construção da Espiral Áurea.....	40
Figura 22. Espiral no Triângulo Áureo.....	41
Figura 23. Espiral Retangular.....	41
Figura 24. Espiral Retangular (Primeiros passos). ....	42
Figura 25. Perpendicularidade de OB e AC ....	43
Figura 26. Dodecaedro Regular.....	44
Figura 27. Retângulos com a Proporção Áurea, interiores ao dodecaedro regular. ....	45
Figura 28. Icosaedro Regular.....	46
Figura 29. Regularidade do Icosaedro.....	46
Figura 30. Icosaedro inscrito no Dodecaedro.....	48
Figura 31. Dodecaedro Inscrito no Icosaedro.....	48

Figura 32. Construindo a razão entre a aresta do dodecaedro e icosaedro .....	49
Figura 33. Soma das diagonais do Triângulo de Pascal .....	60
Figura 34. Triângulo de Yang Hui .....	61
Figura 35. Triângulo de Pascal representado em uma versão posterior do <i>Chandaḥśāstra</i> .....	61
Figura 36. Tabuleiro de Hemachandra .....	63
Figura 37. Primeira e segunda possibilidade no Tabuleiro de Hemachandra. ....	63
Figura 38. Terceira possibilidade no Tabuleiro de Hemachandra.....	64
Figura 39. Quarta possibilidade no Tabuleiro de Hemachandra. ....	64
Figura 40. Árvore Genealógica do Zangão. ....	66
Figura 41. 6 Pentágonos Justapostos .....	68
Figura 42. Autossimilaridade Externa do Pentágono .....	68
Figura 43. Terceira Iteração da Ilustração de Dürer .....	69
Figura 44. Pentágono de Waclaw Sierpinski.....	69
Figura 45. Eu tenho razão.....	70
Figura 46. Proporção Áurea na tirinha da Figura 45. ....	70
Figura 47. Espiral de Fibonacci e Espiral Áurea .....	72
Figura 48. Aproximação na Espiral de Fibonacci e Espiral Áurea .....	72
Figura 49. Parthenon Grego .....	73
Figura 50. Planta do Templo de Osíron.....	74
Figura 51. Representação de Lawlor do Templo de Osíron.....	75
Figura 52. Pirâmide de Quéops .....	76
Figura 53. Ilustração da Pirâmide de Quéops.....	77
Figura 54. Modulor.....	80
Figura 55. Medidas de O Modulor 2 .....	81
Figura 56. O Homem Vitruviano.....	82
Figura 57. Proporção Áurea na Mona Lisa.....	82
Figura 58. Melancolia.....	83
Figura 59. Cabeça masculina no perfil com proporções. ....	85
Figura 60. (a) Esqueleto do Icosaedro Regular (b) Esqueleto do Dodecaedro Regular .....	85
Figura 61. Sacramento da Última Ceia.....	86
Figura 62. The Golden Ratio .....	87
Figura 63. Icosahedron .....	88
Figura 64. Tilia Americana.....	89

Figura 65. (a) Bromélia Imperial, (b) Echeveria Tobarensis.....	89
Figura 66. Dryas octopetala.....	90
Figura 67. (a) Maçã (b) Quiabo (c) Pervinca (d) Campanula carpatica. ....	91
Figura 68. Espiral Logarítmica.....	92
Figura 69. (a) Espiral Áurea na concha de Náutilo (b) Espiral Logarítmica na concha de Náutilo. ....	93
Figura 70. Concha de Náutilo com espiral do autor. ....	93
Figura 71. Galáxia NGC 6744.....	94
Figura 72. Via Láctea .....	94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Total de Coelhos.....	21
Tabela 2. Configurando a fórmula.....	22
Tabela 3. Coelhos após 96 meses.....	22
Tabela 4. Razão entre um número de Fibonacci e seu antecessor.....	28
Tabela 5. Paridade dos Números da Sequência de Fibonacci .....	50
Tabela 6. Soma dos números de Fibonacci .....	51
Tabela 7. Soma dos números de Fibonacci de índice ímpar. ....	53
Tabela 8. Soma dos números de Fibonacci de índice par.....	55
Tabela 9. Soma dos quadrados dos números de Fibonacci. ....	57
Tabela 10. $\varphi$ elevado a $n$ -ésima potência.....	62

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>2 NÚMERO DE OURO E A PROPORÇÃO ÁUREA.....</b>	<b>18</b>
2.1 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....	19
2.1.1 Uma abordagem gráfica da Sequência de Fibonacci .....	25
2.1.2 A Sequência de Fibonacci e o número $\varphi$ (fi) .....	28
2.2 ABORDAGENS GRÁFICAS RELACIONADAS À PROPORÇÃO ÁUREA. ....	30
2.2.1 Média e Extrema Razão (Segmento Áureo).....	30
2.2.2 Retângulo de Ouro .....	31
2.2.3 Triângulo Áureo .....	33
2.2.4 Pentágono Regular e Pentagrama.....	35
2.2.5 Espiral Áurea .....	38
2.2.6 Espiral retangular .....	41
2.2.7 O Dodecaedro e o Icosaedro .....	43
<b>3 CURIOSIDADES SOBRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO .....</b>	<b>50</b>
3.1 PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI .....	50
3.1.1 Paridade dos números da Sequência de Fibonacci.....	50
3.1.2 Somatório dos números da Sequência de Fibonacci .....	51
3.1.2.1 Somatório dos números da Sequência de Fibonacci de índices ímpares.....	53
3.1.2.2 Somatório dos números da Sequência de Fibonacci de índices pares.....	55
3.1.2.3 Somatório dos quadrados dos números da Sequência de Fibonacci .....	57
3.1.3 Dois números consecutivos da Sequência de Fibonacci são primos entre si .....	59
3.1.4 A Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal .....	60
3.1.5 Outras propriedades da Sequência de Fibonacci .....	62
3.2 O PROBLEMA DE HEMACHANDRA.....	63
3.3 O PADRÃO DE REPRODUÇÃO DAS ABELHAS E ZANGÕES.....	65

3.4 A AUTOSIMILARIDADE EXTERNA DO PENTÁGONO .....	67
<b>4 MITOS E VERDADES SOBRE A PROPORÇÃO ÁUREA.....</b>	<b>70</b>
4.1 A DIFERENÇA ENTRE A ESPIRAL DE FIBONACCI E A ESPIRAL ÁUREA.....	71
4.2 O PARTHENON EM ATENAS .....	73
4.3 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NAS PIRÂMIDES DO EGITO .....	74
4.4 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NO CORPO HUMANO .....	79
4.5 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NA ARTE .....	83
<b>4.5.1 Leonardo Da Vinci .....</b>	<b>84</b>
<b>4.5.2 Salvador Dali.....</b>	<b>86</b>
<b>4.5.3 Rafael Araujo.....</b>	<b>87</b>
4.6 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NA NATUREZA .....	88
<b>4.6.1 A filotaxia das plantas .....</b>	<b>88</b>
<b>4.6.2 O padrão espiralado da concha de Náutilo e das Galaxias.....</b>	<b>91</b>
<b>5 ABORDAGEM DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO FUNDAMENTAL E DISCUSSÕES.....</b>	<b>95</b>
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>97</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>98</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Ao se abordar temas simples e considerados bonitos, como a Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea, nota-se que a grande maioria busca por trabalhos em sua maior parte visuais, sem tomar notas sobre a veracidade e contexto do seu uso. Deste modo, a comunidade acadêmica possui grandes entusiastas no quesito apreciar e buscar padrões na natureza e no cotidiano, infelizmente gerando uma quantidade de materiais errôneos. Após uma breve leitura de alguns materiais é possível observar uma notável discrepância entre autores, onde afirmam a presença da Proporção Áurea em construções e obras de arte, ignorando aspectos históricos. Existem também artigos onde o retângulo de ouro é claramente deformado, alterando suas medidas, e escolhendo pontos arbitrários, quase aleatórios, para forçar seu encaixe em artefatos históricos e na natureza. Assim, como se pode filtrar aquilo que realmente apresenta fatos e propriedades, daquilo que apenas nos parece certo?

Ao levantar essa questão, o objetivo desse trabalho surge, para trazer uma série de observações em cenários da arte, história e arquitetura, abordando contextos históricos e conceitos matemáticos, tendo em vista atuar como guia e mediador, trazendo provas e reflexões acerca da Proporção Áurea e a Sequência de Fibonacci.

A estrutura do trabalho, apresenta em um primeiro momento os conceitos do número de ouro e da sequência de Fibonacci, ambos com abordagens gráficas. No Capítulo 2 são apresentadas outras formas que possuem a Proporção Áurea, além do comumente citado retângulo de ouro. Na seção 3.3 a Sequência de Fibonacci é associada a um padrão presente na natureza, assim como na seção 4.6.1 que aborda a presença da Razão Áurea na filotaxia de algumas plantas. Por fim, os capítulos finais apresentam uma série de comparações contendo mitos e verdades, e algumas reflexões sobre a cautela necessária para abordar o tema em questão. Há uma breve apresentação do tema em sala de aula, com reflexões e discussões acerca da história da matemática e sua interdisciplinaridade, apresentando sua fundamentação na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

O trabalho foi realizado a partir de uma pesquisa bibliográfica, em materiais impressos e encontrados na internet, e algumas construções do autor a partir da bibliografia utilizada, buscando verificar propostas de diferentes trabalhos com imparcialidade.

Este trabalho tem então como seu intuito apresentar ao leitor possíveis erros ao se abordar o assunto, assim como provar propriedades, analisar desde padrões da natureza a obras de arte e de arquitetura em diferentes culturas e períodos da história, além de contestar falácias

muito famosas. Ou seja, tem como objetivo atuar como guia e mediador, trazendo reflexões acerca da Proporção Áurea e da Sequência de Fibonacci, a fim de precaver o leitor acerca dos erros, e contestar falácias famosas. Por fim, espera-se que o leitor tenha ao fim da leitura, um olhar crítico e imparcial sobre o assunto abordado, tentando ao máximo fugir de aproximações numéricas e da pareidolia.

## 2 NÚMERO DE OURO E A PROPORÇÃO ÁUREA

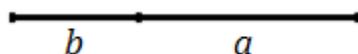
O número de ouro é assim chamado por representar o que alguns chamam de perfeição na matemática e na natureza, sendo este representado pela letra grega  $\varphi$  (leia-se “fí”), inicial do nome de Fídias, um célebre escultor da Grécia Antiga. Esta representação surgiu por sugestão de Mark Barr para homenagear o escultor (Lívio, 2006).

O número de ouro é um número irracional e pode ser obtido em um segmento de reta qualquer, bastando dividi-lo de maneira correta. Euclides de Alexandria (323-283 a.C.), no sexto livro de *Os Elementos* já estudava esse número e o chamava de média e extrema razão: "um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo".

Tentando explicar de maneira simples, a Proporção Áurea (também conhecida como razão áurea, número de ouro, número áureo, secção áurea e proporção de ouro) surge quando um segmento é dividido em duas partes, de modo que a parte mais longa, de comprimento  $a$ , dividida pela parte menor, de comprimento  $b$ , é igual ao tamanho total da linha (soma  $a + b$ ), dividido por  $a$ , a parte mais longa, resultando em aproximadamente 1,618, e com equacionamento representado da seguinte maneira:

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a}$$

Figura 1. Segmento Dividido na Proporção Áurea.



Fonte: Acervo pessoal.

Chamando  $\frac{a}{b}$  de  $x$ , com  $x \neq 0$ , teremos:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

As raízes dessa equação do segundo grau são:

$$x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656 \dots = \varphi \approx 1,618$$

e

$$x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339887498948482045868343656 \dots \approx -0,618$$

Como estamos falando de comprimento, a parte que nos interessa é somente a positiva, ou seja,

$$\frac{a}{b} = \varphi.$$

Posteriormente, muitas outras abordagens sobre a Proporção Áurea obtiveram sua notoriedade, fundamentando-se na proposição da média e extrema razão formulada por Euclides.

## 2.1 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de números proposta pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, possui o numeral 1 como o primeiro e o segundo termos da sequência, e os elementos seguintes são originados pela soma de seus dois antecessores, sendo ela infinita, como segue:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, \dots\}$$

Essa sequência é denominada Sequência de Fibonacci, em homenagem ao seu criador, e pode ser definida pela lei de recorrência  $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ , com  $X_0 = X_1 = 1$ , e  $n \geq 2$ .

A sequência de Fibonacci foi citada no livro Liber Abaci (1202) de Leonardo Fibonacci, embora ela já tivesse sido descrita por gregos, indianos e egípcios. Fibonacci considerou o crescimento de uma população idealizada (não realista biologicamente) de coelhos. Os números descrevem o número de casais na população de coelhos depois de  $n$  meses se for suposto que:

No primeiro mês existe apenas um casal de coelhos;

Os casais atingem a maturidade sexual ao fim de um mês;

O período de gestação de um coelho dura um mês;

Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;

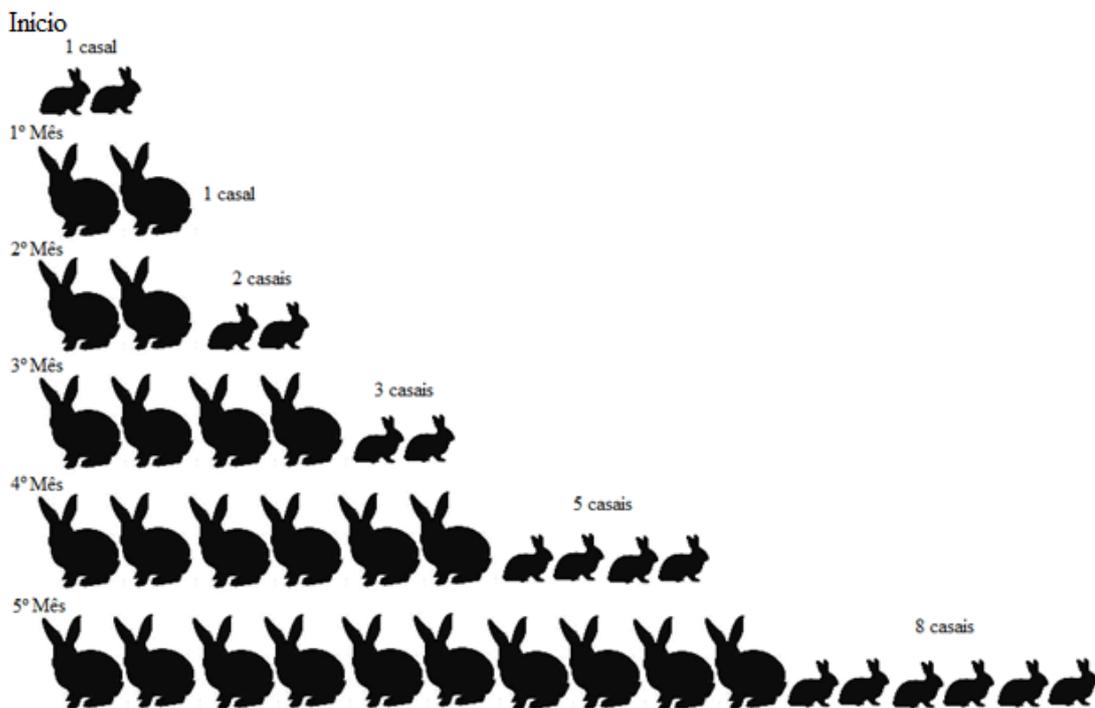
Todos os meses, após atingir a maturidade sexual, cada casal dá a luz a um novo casal;

Os coelhos nunca morrem.

O objetivo era responder a seguinte questão: quantos casais de coelhos vão existir após um ano?

Para a solução deste problema temos para início um casal de coelhos. Após o primeiro mês temos o mesmo casal de coelhos, porém agora atingiram a maturidade sexual. No segundo mês esse casal gera um casal, totalizando dois casais, sendo um casal adulto e um casal filhote. No terceiro mês o primeiro casal se reproduz novamente e o segundo casal atinge a maturidade sexual, totalizando três casais, dois casais adultos, e um casal filhote. No quarto mês ambos casais adultos se reproduzem, e o casal filhote do mês anterior atinge a maturidade sexual, totalizando três casais adultos, e dois casais filhotes e assim sucessivamente, como mostra a figura 2.

Figura 2. Casais de Coelhos.



Fonte: Acervo pessoal.

Se observarmos esse padrão, percebemos que, como o proposto é que os coelhos nunca morrem, no mês seguinte o total de casais de coelhos do mês atual se repete, acrescido do total de casais de coelhos do mês anterior, visto que os coelhos que eram filhotes, agora estarão prontos para reproduzir. Observe a Tabela 1 abaixo:

Tabela 1. Total de Coelhos.

	Casais de Coelhos Adultos	Casais de Coelhos Filhotes	Total de Casais de Coelhos
Início	0	1	1
1° Mês	1	0	1
2° Mês	1	1	2
3° Mês	2	1	3
4° Mês	3	2	5
5° Mês	5	3	8
6° Mês	8	5	13
7° Mês	13	8	21
8° Mês	21	13	34
9° Mês	34	21	55
10° Mês	55	34	89
11° Mês	89	55	144
12° Mês	144	89	233

Fonte: Acervo pessoal.

Logo, chegamos à solução do problema, 144 casais de coelhos adultos, 89 casais de coelhos filhotes, totalizando 233 casais de coelhos. Mas, e se fosse pedido o resultado após uma quantidade de meses maior? Seria viável fazer essas somas até chegarmos nesse valor? Utilizando um software de planilha eletrônica, podemos realizar esse cálculo se soubermos configurar uma fórmula para o mesmo. Tentaremos então resolver o seguinte problema: Supondo que tenham se passado 96 meses (8 anos), qual seria a quantidade de coelhos? A escolha da quantidade de meses é plausível, pois um coelho-europeu pode viver até 9 anos (108 meses).

Observando a Tabela 1 anteriormente disposta, a quantidade presente em Total de Casais de Coelhos sempre se repete na linha seguinte como Casais de Coelhos Adultos já que os filhotes levam apenas 1 mês para crescerem e os que já eram adultos não morrem, e a quantidade presente em Casais de Coelhos adultos sempre se repete na linha seguinte como Casais de Coelhos Filhotes, uma vez que os casais adultos sempre se reproduzem e o Total de Casais de Coelhos será sempre igual à soma de Casais de Coelhos Adultos e Casais de Coelhos

Filhotes dispostas na mesma linha. Assim, podemos facilmente configurar a expressão matemática.

A primeira linha será o mês inicial preenchida com 0, 1, 1, como mostra a Tabela 2, a segunda linha que será o primeiro mês aparecerá com as fórmulas =C1, =A1, =A2+B2. Uma vez configurado dessa maneira, basta arrastar a fórmula sobre toda a planilha eletrônica.

Tabela 2. Configurando a fórmula.

0	1	1
=C1	=A1	=A2+B2

Fonte: Acervo pessoal.

Omitindo as linhas da tabela afim de que a mesma represente apenas os resultados ao fim de cada ano, para que não ocupe muito espaço, chegamos ao resultado 83621143489848400000 na linha 97 como mostra a Tabela 3 abaixo:

Tabela 3. Coelhos após 96 meses.

144	89	233
46368	28657	75025
14930352	9227465	24157817
4807526976	2971215073	7778742049
1548008755920	956722026041	2504730781961
498454011879264	308061521170129	806515533049393
160500643816367000	99194853094755500	259695496911123000
51680708854858300000	31940434634990100000	83621143489848400000

Fonte: Acervo pessoal.

Vamos para uma solução mais generalizada do problema. Já foi dito anteriormente que essa sequência pode ser definida pela lei de recorrência  $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ , com  $X_0 = X_1 = 1$ , e  $n \geq 2$ , sendo  $X_0$  a quantidade total de casais de coelhos do mês zero (início),  $X_1$  a quantidade

total de casais de coelhos após o primeiro mês,  $X_2$  a quantidade total de casais de coelhos após o segundo mês, e assim sucessivamente até o  $n$ -ésimo mês  $X_n$ .

De acordo com o livro Matemática discreta, da coleção PROFMAT (2014), essa recorrência se trata de uma recorrência linear de segunda ordem, homogênea com coeficientes constantes, isto é, uma recorrência da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

onde  $q \neq 0$ . Pois se  $q = 0$ , a recorrência seria, na realidade, uma recorrência de primeira ordem. Dessa maneira, associaremos uma equação do segundo grau,  $r^2 - pr - q = 0$ , associada à equação de recorrência e chamada *equação característica*. A nossa suposição preliminar de que  $q \neq 0$  implica que 0 não é raiz da equação característica.

Para resolver essa recorrência de segunda ordem, dada por

$$X_n - X_{n-1} - X_{n-2} = 0,$$

primeiro encontramos as raízes da equação característica a ela associada, que é

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

As raízes são:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ou seja,

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Como temos duas raízes distintas, de acordo com o conteúdo descrito no livro Matemática discreta (Carvalho, 2014), sabemos que as soluções da recorrência são da forma:

$$X_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$$

Vamos encontrar essas soluções:

$$\begin{aligned}X_0 &= 1 \\X_0 &= C_1 \cdot r_1^0 + C_2 \cdot r_2^0 \\1 &= C_1 + C_2 \\C_1 &= 1 - C_2 \\X_1 &= 1 \\X_1 &= C_1 \cdot r_1^1 + C_2 \cdot r_2^1 \\1 &= C_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\end{aligned}$$

e substituindo  $C_1 = 1 - C_2$  na equação acima temos:

$$\begin{aligned}1 &= (1 - C_2) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \\2 &= 1 + \sqrt{5} - C_2 - C_2\sqrt{5} + C_2 - C_2\sqrt{5} \\2 &= 1 + \sqrt{5} - 2C_2\sqrt{5} \\C_2 &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}},\end{aligned}$$

e daí,

$$C_1 = 1 - C_2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}\right);$$

portanto,

$$C_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}.$$

Agora que temos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $r_1$ , e  $r_2$ , podemos encontrar a solução da equação de recorrência:

$$X_n = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$X_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$X_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$X_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

sendo que  $X_n$  diz a quantidade de coelhos passados  $n$  meses.

Utilizando a expressão para  $X_n$  acima encontrada, resolvemos agora o problema anteriormente proposto, onde se passam 96 meses.

$$X_{96} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{96+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{96+1}}{\sqrt{5}}$$

Para evitar cálculos tão dispendiosos, quanto fazer todas as 96 somas da recorrência, utilizamos o software WolframAlpha para realizar o cálculo das potências, chegando ao resultado:

$$X_{96} = 83\ 621\ 143\ 489\ 848\ 422\ 977$$

Mais de 83 quintilhões de Casais de Coelhos no total, podemos perceber também que houve uma diferença de 22 977 entre os casais de coelhos encontrados na planilha eletrônica e no WolframAlpha devido ao arredondamento feito pela planilha eletrônica.

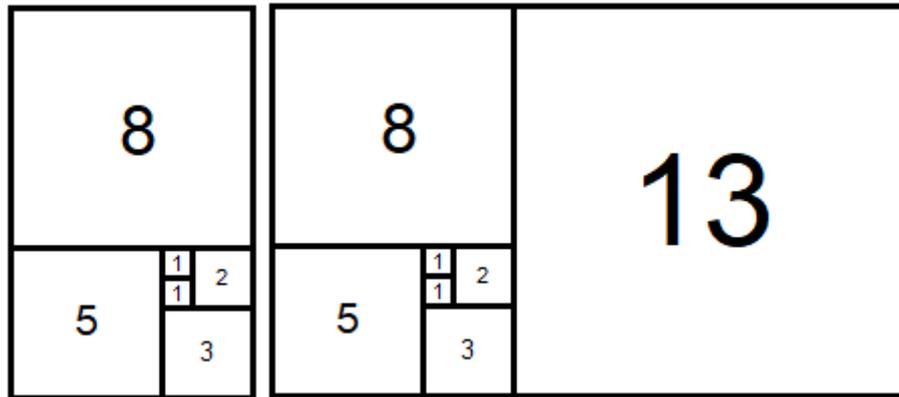
### 2.1.1 Uma abordagem gráfica da Sequência de Fibonacci

A Sequência de Fibonacci pode ser representada anexando quadrados e formando retângulos, seguindo o padrão mostrado nos passos abaixo.

Passo 1: Anexando dois quadrados com lado igual a 1, obtemos um retângulo com dimensões 2 por 1, sendo o lado maior do retângulo igual à soma dos lados dos quadrados, como exibido na figura 3.



Figura 6. Passos 5 e 6, Retângulo de Fibonacci.



Fonte: Acervo pessoal.

Como podemos perceber, obtemos como lado de cada quadrado a sequência de valores  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ , ou seja, a Sequência de Fibonacci. Além disso, quanto mais iterações fizermos, mais próxima a proporção (razão do lado maior pelo lado menor) deste retângulo ficará da proporção do Retângulo de Ouro (que é apresentado na seção 2.2.2 deste trabalho), e é exibido na Figura 7, que os gregos admiravam por sua beleza e suas qualidades consideradas mágicas.

Figura 7. Retângulo de Ouro.



Fonte: Acervo pessoal.

Semelhante ao Número de Ouro previamente citado neste trabalho, se dividimos o maior lado deste retângulo de ouro pelo menor lado, obtemos o número  $\varphi$ . De mesmo modo, se fazemos as mesmas razões, a construção apresentada anteriormente (Retângulo de Fibonacci) se aproxima do retângulo de ouro, e também do número  $\varphi$ .

### 2.1.2 A Sequência de Fibonacci e o número $\varphi$ (fi)

Depois de falarmos sobre a sequência de Fibonacci fica o questionamento, onde está a relação entre a sequência e o número de ouro? A razão entre um número da Sequência de Fibonacci e o seu imediatamente anterior na sequência, aproxima-se do número  $\varphi$  (fi), ou seja, é aproximadamente 1,6180339887499.

Segundo Pappas (1993): “[...] a proporção áurea está ligada a sequência de Fibonacci. O limite da sequência de razões dos termos consecutivos da sequência de Fibonacci - (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...,  $[F_{n-1} + F_{n-2}]$ , ...) - é a média áurea,  $\phi$ ” (PAPPAS, 1993, p. 106, tradução nossa). Observe que o  $n$ -ésimo termo dessa sequência,  $F_n$ , a partir de  $n = 3$ , é a soma dos dois termos imediatamente anteriores,  $F_{n-1}$  e  $F_{n-2}$ .

Seguindo os raciocínios esboçados anteriormente temos 21 termos da sequência  $X_n$ , dispostos na Tabela 4, e a razão entre o termo e o termo anterior na terceira coluna.

Tabela 4. Razão entre um número de Fibonacci e seu antecessor.

$n$	$X_n$	$\frac{X_n}{X_{n-1}}$	$n$	$X_n$	$\frac{X_n}{X_{n-1}}$
0	1		11	144	1,617977528
1	1	1	12	233	1,618055556
2	2	2	13	377	1,618025751
3	3	1,5	14	610	1,618037135
4	5	1,666666667	15	987	1,618032787
5	8	1,6	16	1597	1,618034448
6	13	1,625	17	2584	1,618033813
7	21	1,615384615	18	4181	1,618034056
8	34	1,619047619	19	6765	1,618033963
9	55	1,617647059	20	10946	1,618033999
10	89	1,618181818	21	17711	1,618033985

Fonte: Acervo pessoal.

Observe como os valores se aproximam cada vez mais de  $\varphi$  (fi); na vigésima primeira linha ( $n = 20$ ) temos uma aproximação de sete casas decimais.

Diante dessa aproximação, vamos apresentar uma demonstração matemática para esse fato, ou seja, que a razão entre  $X_n$  e  $X_{n-1}$  tende para  $\varphi$ . Sabemos que o  $n$ -ésimo termo da sequência ( $X_n$ ) é dado por

$$X_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{X_n}{X_{n-1}} &= \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \frac{\frac{1}{2} \left[ \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^n} \right]}{\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+\sqrt{5})^n (1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^n (1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+\sqrt{5})^n + \sqrt{5}(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n + \sqrt{5}(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] + \sqrt{5}[(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n]}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{5} \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{5} \frac{\left[ 1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \right]}{\left[ 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \right]} \right\} \end{aligned}$$

Note que  $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 0$ , de modo que  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n$  tende a zero quando  $n$  tende a infinito.

Portanto, a nova sequência formada  $(a_n) = \left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\right)$  é convergente, com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{X_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

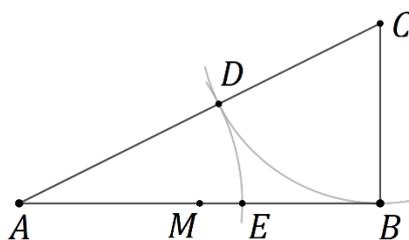
## 2.2 ABORDAGENS GRÁFICAS RELACIONADAS À PROPORÇÃO ÁUREA.

Comumente, a Proporção áurea é representada graficamente pelo Retângulo de Ouro apresentado anteriormente. Entretanto, existem outras construções geométricas nas quais podemos encontrar tal proporção, como no Triângulo Áureo e na razão entre o pentágono regular e o pentagrama. Algumas dessas são apresentadas nessa seção.

### 2.2.1 Média e Extrema Razão (Segmento Áureo)

Para dividirmos um segmento em média e extrema razão partimos de um segmento  $AB$  qualquer, dividido ao meio pelo ponto  $M$ . Traçamos por  $B$  uma perpendicular à  $AB$  e tomemos sobre essa perpendicular um ponto  $C$  tal que  $BC = BM$ . O encontro do segmento  $AC$  com o círculo de centro em  $C$  e raio  $BC$  é o ponto  $D$ . E por fim, o encontro do círculo de centro em  $A$  e raio  $AD$  com o segmento  $AB$  é o ponto  $E$ . Essa construção, ilustrada na Figura 8, dividirá o segmento  $AB$  em média a extrema razão.

Figura 8. Construção do Segmento Áureo



Fonte: Acervo pessoal.

De fato, temos que  $BM = BC = CD = \frac{AB}{2}$  e pelo Teorema de Pitágoras,

$$AC = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{AB\sqrt{5}}{2},$$

então,

$$AE = AD = AC - CD = \frac{AB\sqrt{5}}{2} - \frac{AB}{2}$$

e

$$BE = AB - AE = AB - \left( \frac{AB\sqrt{5}}{2} - \frac{AB}{2} \right) = \frac{3AB}{2} - \frac{AB\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AE} &= \frac{AE + BE}{AE} = 1 + \frac{BE}{AE} = 1 + \frac{\frac{3AB}{2} - \frac{AB\sqrt{5}}{2}}{\frac{AB\sqrt{5}}{2} - \frac{AB}{2}} = 1 + \frac{AB(3 - \sqrt{5})}{AB(\sqrt{5} - 1)} \\ &= 1 + \frac{(3 - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1)} = 1 + \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

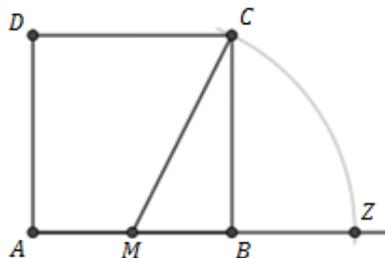
ou seja,

$$\frac{AB}{AE} = \varphi.$$

### 2.2.2 Retângulo de Ouro

Sabemos que o retângulo de ouro tem como a razão entre o maior e o menor lado o valor  $\varphi$ . Portanto, uma das maneiras de construí-lo é partir de um quadrado  $ABCD$  qualquer. Sendo assim, considerando o quadrado  $ABCD$ , marquemos sobre o lado  $AB$  o ponto médio  $M$ , e tracemos o segmento  $MC$ . Marquemos o ponto  $Z$ , intersecção do círculo de raio  $MC$  e centro em  $M$ , com o prolongamento de  $AB$ , como ilustra a figura 9.

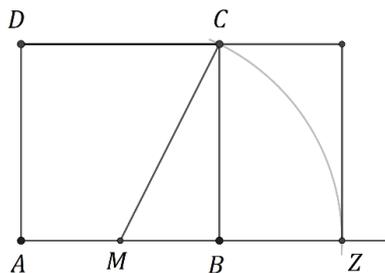
Figura 9. Construindo o Retângulo de Ouro



Fonte: Acervo pessoal.

Deste modo temos  $\frac{AZ}{AB} = \varphi$ , daí em diante se torna simples concluir a construção do retângulo de ouro. Basta traçar o prolongamento de  $DC$  até encontrar a perpendicular a  $AZ$ , passando por  $Z$  (Figura 10).

Figura 10. Construção do Retângulo Áureo



Fonte: Acervo pessoal.

Diante da construção apresentada, vamos verificar que a proporção entre o maior e o menor lado do retângulo é o número de ouro.

Chamemos  $AB$  de  $b$ , logo

$$AM = MB = \frac{b}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,  $MC^2 = BC^2 + MB^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ; portanto,  $MC = \frac{b\sqrt{5}}{2}$ , de modo que  $MC = MZ$  e  $AZ = AM + MZ = \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{5}}{2}$ , ou seja,  $AZ = b \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Assim, de fato, a razão entre o maior lado e o menor lado desse retângulo é o número  $\varphi$ , já que

$$\frac{AZ}{AD} = \frac{b \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{b} = \varphi.$$

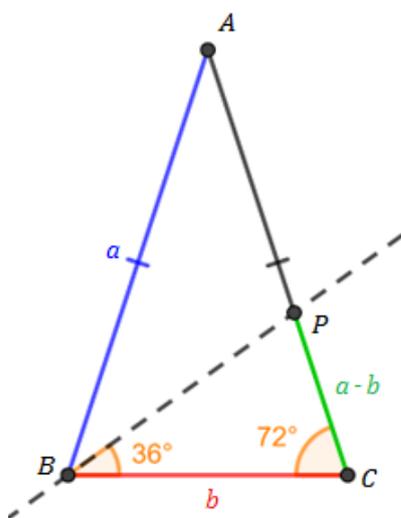
### 2.2.3 Triângulo Áureo

Historicamente, o número 3 é tido pelos pitagóricos como o número da harmonia, visto que é composto pela soma do número 1, considerado o gerador de todos os outros, com o número 2, que significa divisão (Lívio, 2006). Assim dizendo, o número 3 era o primeiro número real apresentando um “início”, “meio” e “fim”. A representação geométrica do número 3 é vista como um triângulo.

É chamado Triângulo Áureo todo triângulo isósceles, cujos ângulos internos são  $72^\circ, 72^\circ$  e  $36^\circ$ . Para a construção de um novo Triângulo Áureo interno ao Triângulo Áureo, traça-se a bissetriz de um dos ângulos de  $72^\circ$ , formando um novo triângulo com os mesmos ângulos internos do inicial, como exibido na figura 11, na qual o triângulo  $ABC$  é o triângulo de ouro inicial, sendo  $B\hat{A}C = 36^\circ$  e  $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 72^\circ$ . Considere  $AB = a$  e  $BC = b$ . O novo triângulo  $BPC$  é um triângulo de ouro, em que  $P\hat{B}C = 36^\circ$  (devido a bissetriz do ângulo  $A\hat{B}C$ ) e  $B\hat{C}P = B\hat{P}C = 72^\circ$ .

A medida desse último ângulo é obtida utilizando o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . E por fim, se  $BPC$  é um triângulo isósceles, então  $BP = BC = b$ . E, como  $A\hat{B}P = B\hat{A}P = 36^\circ$ , o triângulo  $ABP$  é isósceles de base  $AB$ . Daí  $AP = BP = b$ . Logo  $PC = AC - AP = a - b$ .

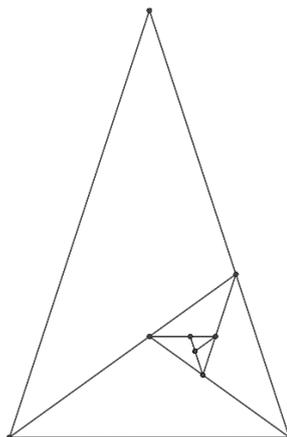
Figura 11. Triângulo Áureo.



Fonte: Acervo pessoal.

Continuando com esse raciocínio, a figura se propaga infinitamente, visto que a cada nova bissetriz traçada, dá origem a um novo triângulo isósceles com ângulos internos  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $36^\circ$ , como ilustrado na figura 12.

Figura 12. Propagação do Triângulo Áureo



Fonte: Acervo pessoal.

A proporção áurea pode ser encontrada ao realizarmos a razão entre certos segmentos. Por exemplo, no caso da figura 11, ao realizarmos as razões  $\frac{AB}{BC}$ ,  $\frac{AC}{PB}$ ,  $\frac{BC}{PC}$ , chegaremos ao número de ouro. Note que os triângulos  $ABC$  e  $BCP$  são semelhantes, assim como os demais triângulos gerados ao continuarmos a construção da figura partindo agora do triângulo  $BCP$ , e assim sucessivamente.

O ângulo  $B\hat{A}C$  mede  $36^\circ$ , enquanto os ângulos  $A\hat{B}C$  e  $A\hat{C}B$  medem  $72^\circ$ . Sendo assim, temos, pela lei dos senos, o seguinte:

$$\frac{b}{\text{sen}(B\hat{A}C)} = \frac{a}{\text{sen}(A\hat{C}B)} = \frac{a}{\text{sen}(A\hat{B}C)}$$

$$\frac{b}{\text{sen}(36^\circ)} = \frac{a}{\text{sen}(72^\circ)} = \frac{a}{\text{sen}(72^\circ)}$$

e, então, pelo seno da soma, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(72^\circ) &= \text{sen}(36^\circ + 36^\circ) = \text{sen}(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ) + \text{sen}(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ) \\ \text{sen}(72^\circ) &= 2 \cdot \text{sen}(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ). \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{b}{\text{sen}(36^\circ)} = \frac{a}{2 \cdot \text{sen}(36^\circ) \cdot \text{cos}(36^\circ)}$$

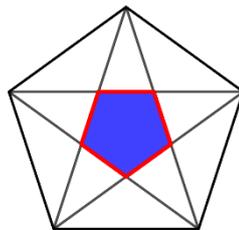
$$\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot \text{sen}(36^\circ) \cdot \text{cos}(36^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)}$$

$$\frac{a}{b} = 2 \cdot \text{cos}(36^\circ) = 1,61803 \dots = \varphi.$$

### 2.2.4 Pentágono Regular e Pentagrama

Chama-se de pentágono regular o polígono cujos cinco lados possuem medidas iguais e cujos cinco ângulos internos possuem medidas iguais. O pentagrama é formado pelas diagonais de um pentágono regular, e em seu centro, pode-se observar a formação de outro pentágono regular menor, como ilustrado na figura 13. O pentagrama era usado pelos Pitagóricos como símbolo de sua irmandade, chamando-o de “Saúde”.

Figura 13. Pentagrama Incrito no Pentágono Regular.



Fonte: Acervo pessoal.

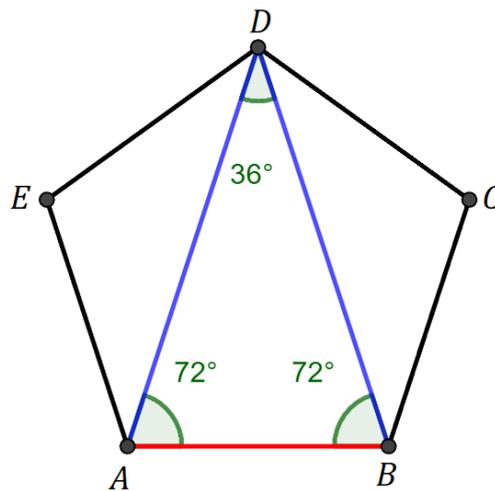
Essa progressão formada entre pentágono e pentagrama pode continuar com infinitas iterações entre os pentágonos gerados interiormente.

Ao tomarmos um lado do pentágono como base e traçarmos duas diagonais que se encontram no vértice oposto ao lado escolhido, teremos um triângulo isósceles como mostra a figura 14.

Sabe-se que o valor do ângulo interno de um pentágono regular é  $108^\circ$ . Assumindo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  e os ângulos da base de um triângulo

isósceles são congruentes, no triângulo  $ADE$  (figura 14) temos que os ângulos da base medem  $\frac{(180^\circ-108^\circ)}{2} = 36^\circ$ , o que corresponde aos ângulos  $E\hat{A}D$  e  $A\hat{D}E$ . Como o ângulo  $E\hat{A}B$  mede  $108^\circ$ , então o ângulo  $D\hat{A}B$  mede  $72^\circ$ . De modo semelhante o ângulo  $A\hat{B}D$  mede  $72^\circ$ . Assim, temos que os ângulos internos do triângulo  $ABD$  medem  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $36^\circ$ , ou seja, ele é um Triângulo Áureo.

Figura 14. Triângulo Áureo no Pentágono Regular.



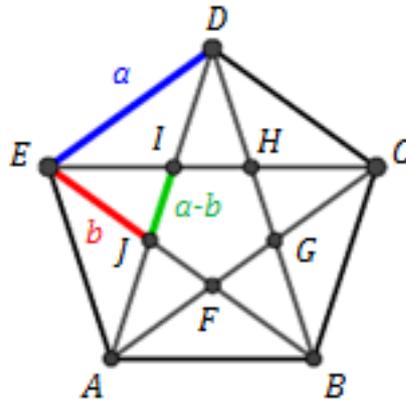
Fonte: Acervo pessoal.

É na razão entre o lado  $ED$  do pentágono maior  $ABCDE$  e o menor lado  $EJ$  do triângulo isósceles  $DEJ$ , ilustrado na figura 15, ou na razão entre o maior lado  $EJ$  do pequeno triângulo isósceles  $EIJ$  e o lado  $IJ$  do pentagrama menor  $FGHIJ$ , entre outras várias razões, que também se encontra o Número de Ouro, como foi mostrado na seção 2.2.3.

Observe, na figura 15, que os triângulos áureos  $CAE$ ,  $DJE$  e  $EIJ$  são semelhantes, e, portanto, vale a seguinte relação

$$\frac{EC}{ED} = \frac{ED}{EI} = \frac{EI}{IJ} = \varphi.$$

Figura 15. Número de Ouro no Pentágono.

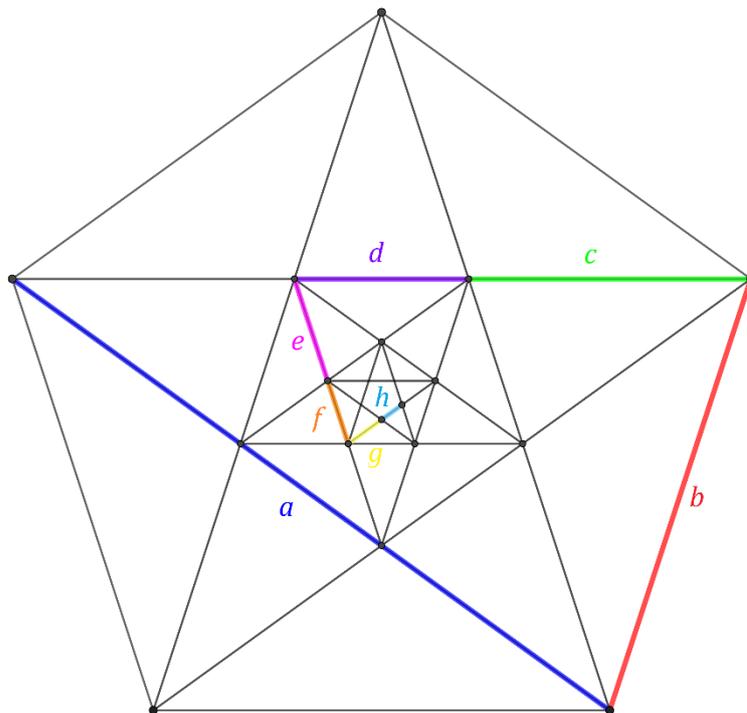


Fonte: Acervo pessoal.

Se novamente construirmos um pentagrama dentro do novo pentágono formado, percebemos a autossimilaridade da figura, como mostra a figura 16.

Podemos observar ainda que os segmentos  $a, b, c, d, e, f, g, h$  são  $\varphi$  vezes maiores que o seu sucessor (figura 16). Isso porque as razões  $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}, \frac{f}{g}, \frac{g}{h}$  são iguais a  $\varphi$ , uma vez que são razões entre lado maior e lado menor de triângulos áureos.

Figura 16. Autossimilaridade do Pentagrama Regular



Fonte: Acervo pessoal.

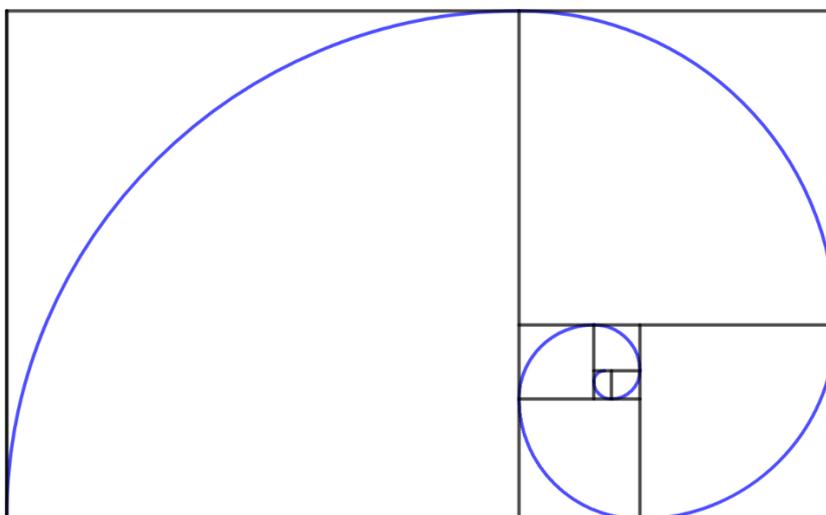
## 2.2.5 Espiral Áurea

A Espiral Áurea consiste em uma curva logarítmica, composta por uma sequência de quartos de circunferências, cada um desses quartos de circunferências desenhado em cada quadrado da sequência de retângulos áureos que vão sendo formados durante a construção. O centro de cada quarto de circunferência é um dos vértices do quadrado correspondente, conforme figura 17.

A espiral logarítmica causava tamanha admiração ao matemático Jacques Bernoulli, que pediu para que seu lema “Eadem mutato resurgo” (“embora mudado, ressurjo o mesmo”), que se refere à autossimilaridade das espirais, fosse escrito em sua lápide.

Segundo Huntley (1985, p. 101): “A espiral não possui ponto terminal: ela pode crescer para fora (ou para dentro) indefinidamente, mas seu formato não se altera.” Logo, entende-se que a espiral não altera seu formato, independentemente de sua variação de tamanho, sendo consequência de sua base, o Retângulo Áureo indicado na figura 17.

Figura 17. Espiral Áurea no Retângulo Áureo.

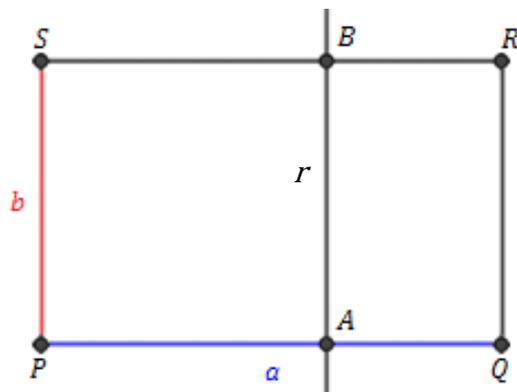


Fonte: Acervo pessoal.

Para a construção da Espiral Áurea iniciaremos com um retângulo  $PQRS$  de medidas  $PQ = SR = a$  e  $PS = QR = b$ , sendo que a razão  $\frac{a}{b}$  equivale a  $\varphi$ . Marquemos sobre o lado  $PQ$  um ponto  $A$  de forma que a distância entre  $A$  e  $P$  seja igual a  $b$ . E pelo ponto  $A$  tracemos uma

perpendicular  $r$  ao lado  $SR$ . Chamemos de  $B$  o ponto obtido entre a intersecção do lado  $SR$  e essa perpendicular, formando assim um quadrado de medida  $b$ , como exhibe a figura 18.

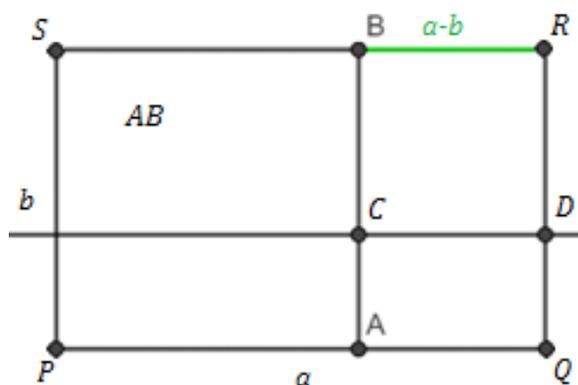
Figura 18. Construção da Espiral Áurea (Passo 1).



Fonte: Acervo pessoal.

No passo seguinte, repetiremos o processo sobre o novo retângulo formado  $ABRQ$ , usando o lado  $AB$ , e o comprimento  $a - b$ , obtendo os pontos  $C$  e  $D$ , como ilustra a figura 19.

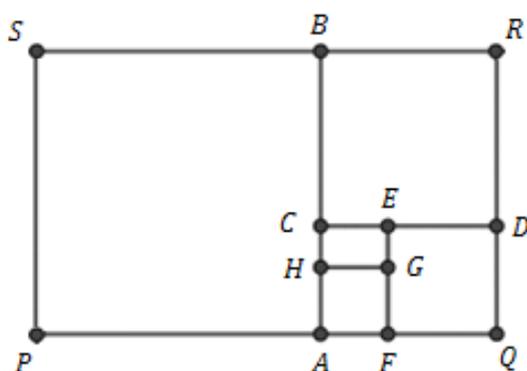
Figura 19. Construção da Espiral Áurea (Passo 2).



Fonte: Acervo pessoal.

Se continuarmos esse processo infinitamente, teremos sempre novos retângulos áureos sendo formados, cada vez menores, como ilustra a figura 20.

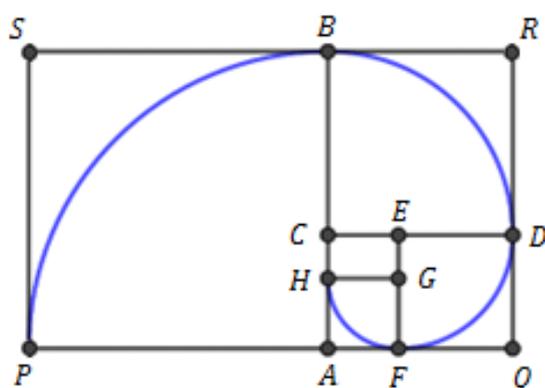
Figura 20. Construção da Espiral Áurea (Passo 4).



Fonte: Acervo pessoal.

Façamos então a espiral. Partindo do vértice  $P$  do primeiro quadrado  $PABS$  tracemos um quarto de círculo com centro em  $A$  e raio  $PS$ , seguido da construção de um quarto de círculo com centro em  $C$  e raio  $CB$ , no quadrado  $CDRB$ , um quarto de círculo com centro em  $E$  e raio  $ED$ , no quadrado  $EDQF$ , e assim sucessivamente como exhibe a figura 21.

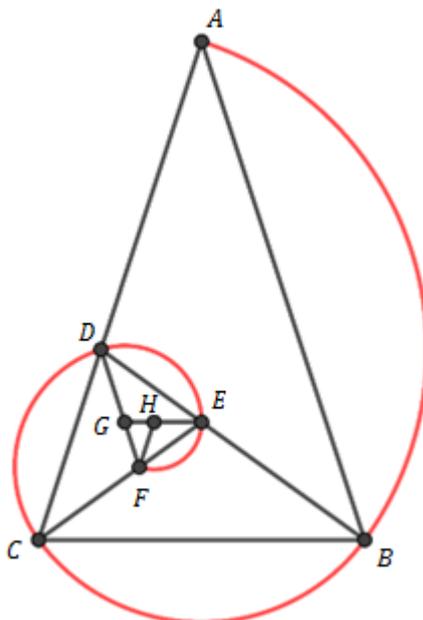
Figura 21. Construção da Espiral Áurea.



Fonte: Acervo pessoal.

A Espiral Áurea também pode ser encontrada no Triângulo Áureo da seguinte maneira: Ligue sucessivamente, os vértices dos triângulos áureos, através de arcos de circunferência, cujos centros são os pontos que dividem um dos lados dos sucessivos triângulos áureos na Proporção Áurea, como pode ser observado na figura 22.

Figura 22. Espiral no Triângulo Áureo.

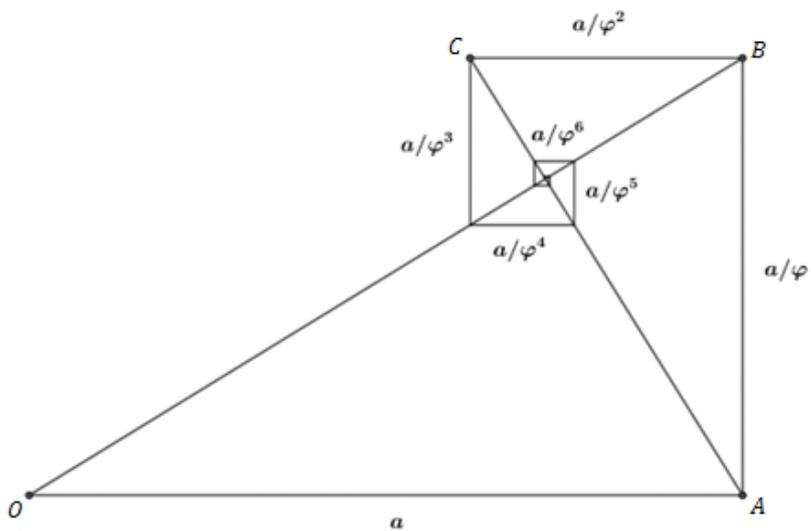


Fonte: Acervo pessoal.

### 2.2.6 Espiral retangular

Muito semelhante à construção da Espiral Áurea, a Espiral Retangular (figura 23) também traz propriedades interessantes. Vejamos sua construção logo abaixo.

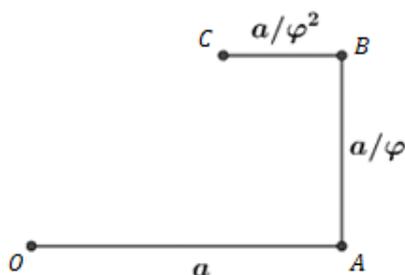
Figura 23. Espiral Retangular.



Fonte: Acervo pessoal.

Façamos um segmento de reta  $OA$  com comprimento qualquer  $a$ , e em seguida um segmento  $AB$  de medida  $\frac{a}{\varphi}$  perpendicular a  $OA$ . Partindo do ponto  $B$ , tracemos agora um segmento  $BC$  perpendicular a  $AB$  de comprimento  $\frac{a}{\varphi^2}$ , como mostra a figura 24.

Figura 24. Espiral Retangular (Primeiros passos).



Fonte: Acervo pessoal.

Agora basta continuar seguindo esse padrão para construirmos a espiral, construindo segmentos sempre perpendiculares ao anterior, e de comprimentos  $\frac{a}{\varphi}, \frac{a}{\varphi^2}, \frac{a}{\varphi^3}, \frac{a}{\varphi^4}, \dots, \frac{a}{\varphi^n}, \dots$ .

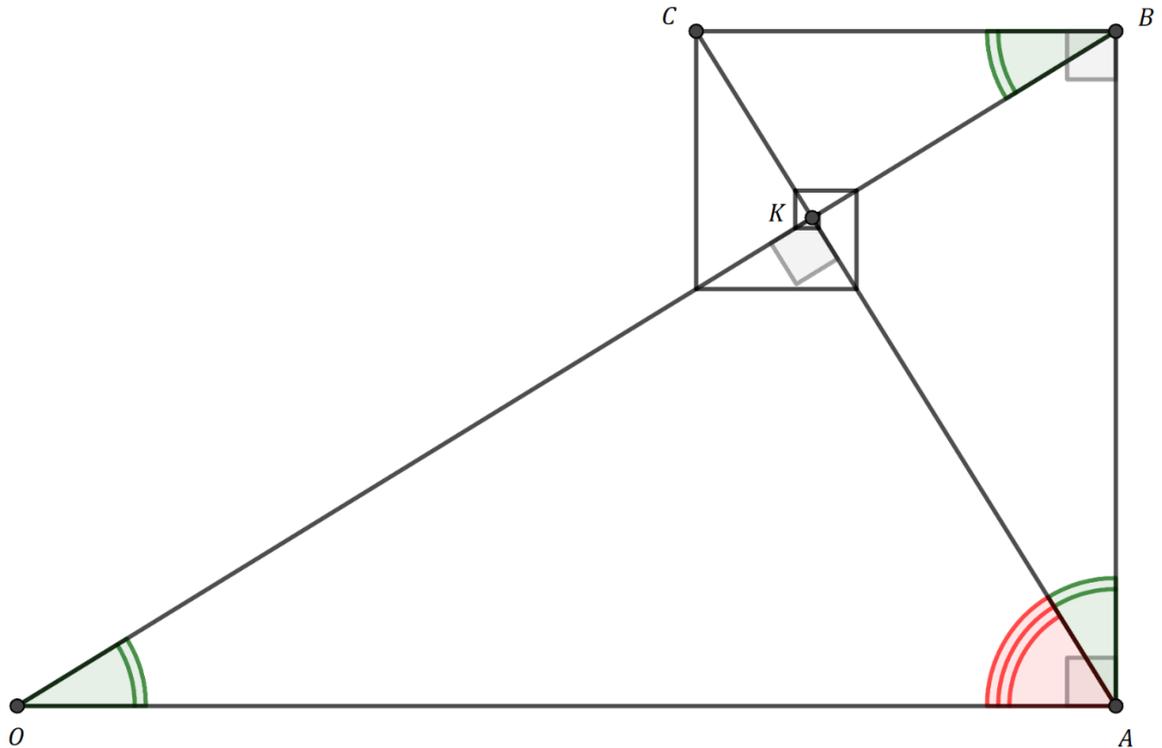
Das propriedades observáveis podemos citar:

- Se um ponto extremo desses segmentos perpendiculares construídos recai sobre o segmento  $OB$ , o ponto extremo do segmento perpendicular seguinte recai sobre  $AC$ , e o mesmo vale para a recíproca;
- $OB$  e  $AC$  são mutuamente perpendiculares:

De fato, observe que  $\frac{OA}{AB} = \varphi = \frac{AB}{BC}$  e que  $O\hat{A}B = 90^\circ = A\hat{B}C$  (figura 25). Assim, pelo caso LAL, os triângulos  $OAB$  e  $ABC$  são semelhantes. Portanto,  $C\hat{A}B$  é congruente a  $B\hat{O}A$ . Seja  $K$  o ponto de interseção de  $OB$  e  $AC$ . Tem-se  $K\hat{O}A + K\hat{A}O = B\hat{O}A + C\hat{A}O = C\hat{A}B + C\hat{A}O = 90^\circ$ . Dessa forma, pela soma dos ângulos internos de um triângulo ser  $180^\circ$ , tem-se, no triângulo  $KOA$ , que o ângulo  $O\hat{K}A$  é reto, o que acarreta que  $OB$  e  $AC$  são perpendiculares.

- O polo da espiral (centro), se aproximará cada vez mais da intersecção entre  $OB$  e  $AC$ ;
- Cada novo segmento gerado, forma com partes dos segmentos  $OB$  e  $AC$  um triângulo retângulo, sendo semelhantes, e representando a metade de um retângulo áureo;

Figura 25. Perpendicularidade de OB e AC



Fonte: Acervo pessoal.

- Se fizermos  $a = 1$ , o comprimento da espiral, ou seja, a soma de todos segmentos  $\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi^2}, \frac{1}{\varphi^3}, \frac{1}{\varphi^4}, \dots, \frac{1}{\varphi^n}, \dots$  tende a  $\varphi$ . De fato, a soma desses termos é uma progressão geométrica infinita de razão  $\frac{1}{\varphi}$ . Então, a soma é  $\frac{\frac{1}{\varphi}}{1 - \frac{1}{\varphi}} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{\varphi}{\varphi(\varphi - 1)} = \frac{\varphi}{\varphi^2 - \varphi} = \varphi$ . Aqui usamos o fato que  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ , já que  $\varphi$  é solução da equação característica associada à equação de recorrência proveniente da sequência de Fibonacci, como visto na seção 2.1.

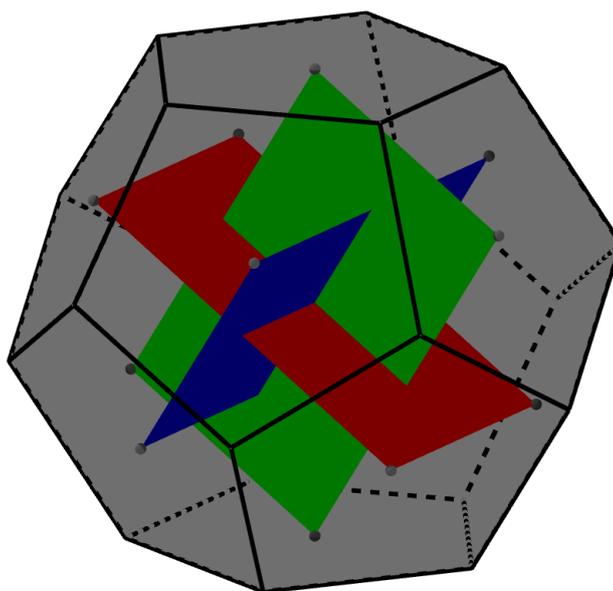
### 2.2.7 O Dodecaedro e o Icosaedro

Hipasos de Metaponto foi provavelmente a primeira pessoa a publicar sobre a esfera dos doze pentágonos, conhecido comumente como dodecaedro, um sólido Platônico constituído por doze pentágonos regulares. É contado que Hipasos descobriu que a Razão Áurea não se tratava de um inteiro, nem da razão entre dois inteiros, indo contra a comunidade pitagórica que acreditava que a natureza e a vida poderiam ser representadas por números inteiros (Lívio,

2006). Em algumas escritas, o fundador da escola síria de Neoplatonismo, Iâmblico (c. 245-325 d.C.) diz que Hipasos de Metaponto foi lançado ao mar, morto por afogamento, pelo descontentamento da comunidade pitagórica por sua descoberta da incomensurabilidade, conceito este que pode ser definido como algo que não pode ser medido em importância ou grandeza. Duas quantidades são comensuráveis quando a razão entre elas é um número racional (um número que pode ser expresso como o quociente de dois números inteiros). Assim, as grandezas serem incomensuráveis significa que a razão entre elas não pode ser expressa como a razão entre dois números inteiros, ou seja, não é racional. Desse modo, a descoberta da incomensurabilidade, apresentou à comunidade pitagórica o que chamamos de números irracionais.

O dodecaedro (figura 26) é um sólido Platônico que, segundo Platão, representa o universo, ou o cosmos. Seu nome se dá por causa de suas doze faces, todas sendo polígonos regulares (no caso do dodecaedro regular) e congruentes entre si. Cada vértice do dodecaedro está conectado a três arestas e três faces, totalizando 20 vértices, 30 arestas e 12 faces. O dodecaedro regular é um caso especial, onde todas as faces são pentágonos regulares idênticos. Esse sólido geométrico tem diversas propriedades matemáticas interessantes e é frequentemente utilizado em contextos geométricos e matemáticos.

Figura 26. Dodecaedro Regular

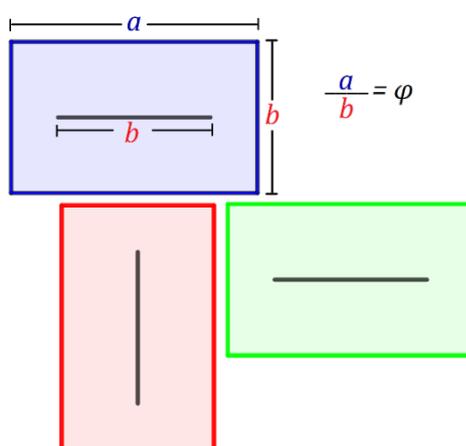


Fonte: Acervo pessoal.

No centro deste dodecaedro ilustrado na figura 26, temos três Retângulos Áureos (como os da figura 27), que podem ser usados de apoio para a construção da figura, os quais tem seus 12 vértices no centro das 12 faces do dodecaedro, segundo Huntley (1985):

Os centróides dos doze lados pentagonais do dodecaedro são divisíveis em três grupos coplanares de quatro. Esses quadrângulos situam-se nos cantos de três retângulos áureos colocados simétrica e mutuamente perpendiculares, tendo como ponto comum o centróide do dodecaedro. (HUNTLEY, 1985, p.44)

Figura 27. Retângulos com a Proporção Áurea, interiores ao dodecaedro regular.



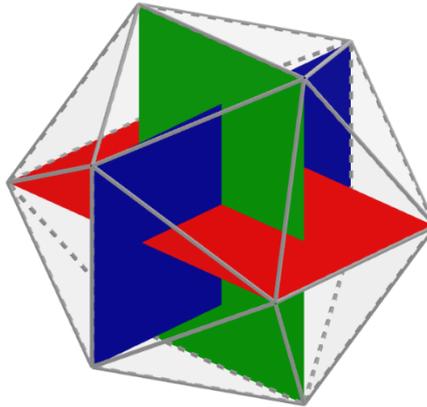
Fonte: Acervo pessoal.

Esses Retângulos Áureos são ortogonais entre si, tendo o ponto central do dodecaedro em comum aos 3 retângulos, os traços em preto no centro de cada retângulo da figura 27 representam onde ficam as interseções entre um retângulo e outro.

O icosaedro (figura 28) é um poliedro com vinte faces. Assim como o dodecaedro, o icosaedro pode ser regular ou irregular. No caso do icosaedro regular, todas as faces são triângulos equiláteros idênticos. Cada vértice do icosaedro está conectado a cinco arestas e cinco faces, totalizando 12 vértices, 30 arestas, e 20 faces.

No centro da ilustração do Icosaedro, na figura 28, temos os mesmos retângulos áureos presentes na construção do dodecaedro, mas desta vez os 12 vértices dos retângulos são também os 12 vértices do Icosaedro, e a ligação entre esses vértices formam suas 30 arestas e suas 20 faces triangulares. Segundo Huntley (1985, p. 44), “O apelo estético dos temas [...] não pode ser posto em dúvida. Quer possamos explicá-lo ou não, o fato de terem sido apreciados por seis gerações de homens é evidência suficiente.”

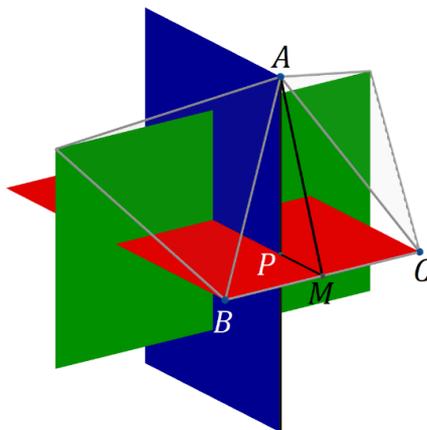
Figura 28. Icosaedro Regular



Fonte: Acervo pessoal.

Portanto, para mostrarmos que os 12 vértices desses retângulos formam um icosaedro regular, basta provarmos que os triângulos que compõe a face do sólido, além de isósceles (de lados  $AB = AC$ , que já sabemos pela simetria da figura 29) são também equiláteros. Como utilizamos retângulos áureos, sabemos que os retângulos tem lado menor  $b$ , e lado maior  $\varphi b$ , portanto  $AP = \frac{\varphi b}{2}$ ,  $BC = b$  e  $BM = MC = \frac{b}{2}$ . Além disso, sendo  $O$  o ponto comum aos três retângulos áureos, então  $OM = \frac{\varphi b}{2}$ , por ser metade do lado maior do retângulo áureo vermelho e  $OP = \frac{b}{2}$ , por ser a metade do lado menor do retângulo áureo azul. Assim,  $PM = OM - OP = \frac{\varphi b}{2} - \frac{b}{2}$ .

Figura 29. Regularidade do Icosaedro



Fonte: Acervo pessoal.

Para o triângulo  $APM$ , tem se

$$AP^2 + PM^2 = AM^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}b - \frac{b}{2}\right)^2 = AM^2$$

$$AM^2 = \frac{\sqrt{5} + 3}{8}b^2 + \frac{3 - \sqrt{5}}{8}b^2$$

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

E para o triângulo  $ABM$ , tem se

$$AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$\frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 = AB^2$$

$$AB = b.$$

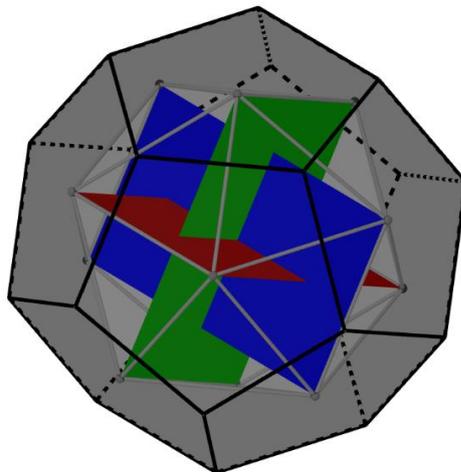
Ou seja,  $AB = BC$ . De modo semelhante, provamos que  $AC = BC$ . Logo, o triângulo  $ABC$  é equilátero.

Ao relacionarmos a ideia de construção do Dodecaedro e do Icosaedro, percebemos que o Icosaedro pode ser facilmente inscrito no Dodecaedro como na figura 30. Para tanto, basta observar que os vértices do icosaedro são os centros das faces do dodecaedro (centros dos doze pentágonos regulares).

A partir da concepção acima, podemos tirar inúmeras razões, dentre elas, uma comentada em Lívio (2006), em que a razão entre a aresta do Icosaedro (inscrito no dodecaedro) e a aresta do Dodecaedro é  $\frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}$ . Outras, tais como

[...] um dodecaedro com aresta de comprimento um (o segmento da junção de duas faces) tem a área total da superfície igual a  $15\varphi\sqrt{3 - \varphi}$  e um volume de  $5\varphi^3/(6 - 2\varphi)$ . De modo semelhante, um icosaedro com uma aresta de comprimento unitário tem um volume de  $5\varphi^5/6$ . (LÍVIO, 2006, p.88)

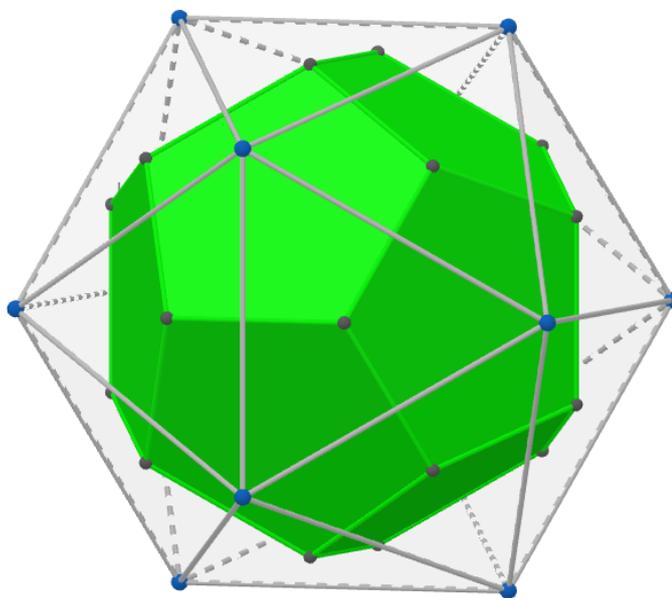
Figura 30. Icosaedro inscrito no Dodecaedro



Fonte: Acervo pessoal.

Podemos ainda construir a partir dos centros das faces de um icosaedro, um dodecaedro regular (figura 31).

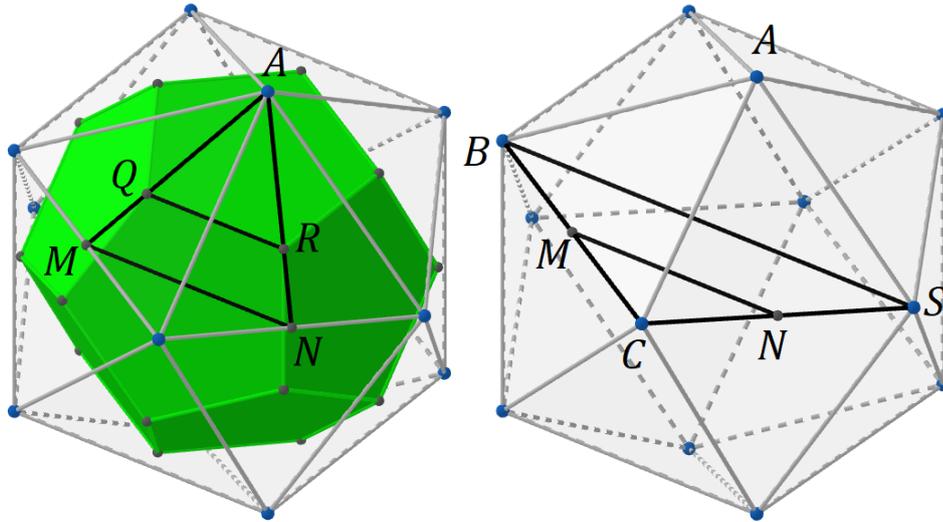
Figura 31. Dodecaedro Inscrito no Icosaedro



Fonte: Acervo pessoal.

Este por sua vez tem na razão entre as arestas dos dois sólidos  $\frac{\varphi}{3}$ , como mostramos a seguir.

Figura 32. Construindo a razão entre a aresta do dodecaedro e icosaedro



Fonte: Acervo pessoal.

$M$  e  $N$  são pontos médios das arestas  $BC$  e  $CS$ , respectivamente. Os pontos  $Q$  e  $R$  são centros de duas faces vizinhas do icosaedro, logo  $QR$  é uma das arestas do dodecaedro inscrito no icosaedro, como exibido na figura 32. Sabemos também que os triângulos  $AMN$  e  $AQR$  são semelhantes,  $BS$  tem a mesma medida do maior lado de um dos retângulos de ouro da construção do icosaedro, ou seja  $BS = \varphi b$  e de acordo com o teorema da base média  $MN = \frac{BS}{2} = \frac{\varphi b}{2}$ , como ilustra o triângulo  $BCS$ .  $MQ$  e  $NR$  são apótemas das faces triangulares do icosaedro, logo, vale a razão  $\frac{AQ}{AM} = \frac{2}{3}$ , e, conseqüentemente,  $\frac{QR}{MN} = \frac{2}{3}$ ; portanto

$$\frac{QR}{\frac{\varphi b}{2}} = \frac{2}{3},$$

de modo que

$$QR = \frac{\varphi b}{3}.$$

Como a aresta do icosaedro é exatamente  $b$ , a razão entre a aresta do dodecaedro (inscrito no icosaedro) e a aresta do icosaedro é, de fato,  $\frac{\varphi}{3}$ .

### 3 CURIOSIDADES SOBRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

A Sequência de Fibonacci, junto ao Número de Ouro, faz-se presente em diversos aspectos da ciência e do cotidiano. Neste capítulo trazemos propriedades e associações interessantes, podendo estas serem comprovadas ou pelo menos conhecidas pelo leitor.

#### 3.1 PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Observando a simplicidade da Sequência de Fibonacci é possível notar certas propriedades simples como a paridade dos números ou interações entre elementos próximos, e outras mais complicadas envolvendo somas infinitesimais. Deste modo, nessa subseção algumas delas são apresentadas.

##### 3.1.1 Paridade dos números da Sequência de Fibonacci

Sabemos que a Sequência de Fibonacci se inicia com dois números ímpares consecutivos, sendo eles 1 e 1, e como o termo seguinte é dado pela soma dos dois imediatamente anteriores, temos que o terceiro termo é par obviamente, pois a soma de dois números ímpares sempre resulta em um número par, e o termo que sucede é ímpar, pois é a soma de um número ímpar com um número par e por sua vez, o sucessor deste, também é ímpar, pois é a soma de um número par com um número ímpar, voltando, assim, à situação inicial, em que temos dois números ímpares seguidos, ou seja, a paridade se repete a cada três termos conforme é apresentado na Tabela 5 para melhor compreensão.

Tabela 5. Paridade dos Números da Sequência de Fibonacci

$n$	$X_n$	Paridade	$n$	$X_n$	Paridade
0	1	Ímpar	4	5	Ímpar
1	1	Ímpar	5	8	Par
2	2	Par	6	13	Ímpar
3	3	Ímpar	7	21	Ímpar

Fonte: Acervo pessoal.

### 3.1.2 Somatório dos números da Sequência de Fibonacci

Primeiro observemos o que acontece com a soma dos termos da sequência de Fibonacci na Tabela 6 a seguir.

Tabela 6. Soma dos números de Fibonacci

$n$	$X_n$	$\Sigma$	$S_n$
0	1	1	1
1	1	1+1	2
2	2	1+1+2	4
3	3	1+1+2+3	7
4	5	1+1+2+3+5	12
5	8	1+1+2+3+5+8	20
6	13	1+1+2+3+5+8+13	33
7	21	1+1+2+3+5+8+13+21	54
8	34	1+1+2+3+5+8+13+21+34	88
9	55	1+1+2+3+5+8+13+21+34+55	143
10	89	1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89	232
11	144	1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144	376

Fonte: Acervo pessoal.

Podemos perceber comparando a sequência  $(S_n)$  com a sequência de Fibonacci  $(X_n)$ , que o termo  $S_n$  é igual a  $X_{n+2} - 1$ , isto é,

$$S_0 = 1 = 2 - 1 = X_2 - 1 = X_{0+2} - 1, \quad S_1 = 2 = 3 - 1 = X_3 - 1 = X_{1+2} - 1$$

e, de modo geral,

$$S_n = \sum_{i=0}^n X_i = X_{n+2} - 1$$

ou

$$S_n = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n = X_{n+2} - 1$$

A prova que aqui apresentamos é por indução.

Primeiramente, para  $n = 0$ , temos

$$S_0 = \sum_{i=0}^0 X_i = 1 = X_2 - 1 = X_{0+2} - 1$$

o que mostra que a afirmação é verdadeira para  $n = 0$ . Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $n = k$ ,  $k \geq 0$ , ou seja,

$$S_k = \sum_{i=0}^k X_i = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_k = X_{k+2} - 1$$

Essa é a nossa hipótese de indução (H.I). Verifiquemos que é verdadeira para  $n = k + 1$ . De fato,

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} X_i = \sum_{i=0}^k X_i + X_{k+1} = X_{k+2} - 1 + X_{k+1} = X_{k+1} + X_{k+2} - 1$$

Na penúltima igualdade usamos a hipótese de indução ( $\sum_{i=0}^k X_i = X_{k+2} - 1$ ). Sabemos também pela definição da Sequência de Fibonacci, vista na seção 2.1, que

$$X_{k+1} + X_{k+2} = X_{k+3},$$

de modo que

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} X_i = X_{k+3} - 1 = X_{(k+1)+2} - 1$$

o que mostra que a afirmação é verdadeira para  $n = k + 1$ , ou seja, verdadeira para todo  $n$ , donde concluímos que

$$S_n = \sum_{i=0}^n X_i = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n = X_{n+2} - 1$$

para todo  $n$ .

### 3.1.2.1 Somatório dos números da Sequência de Fibonacci de índices ímpares

Primeiro observemos o que acontece com a soma dos  $q$  termos de índices ímpares da sequência de Fibonacci, na Tabela 7, a seguir.

Tabela 7. Soma dos números de Fibonacci de índice ímpar.

$q$	$n$	$X_n$	$\Sigma$	$S_q$
1	1	1	1	1
2	3	3	1+3	4
3	5	8	1+3+8	12
4	7	21	1+3+8+21	33
5	9	55	1+3+8+21+55	88
6	11	144	1+3+8+21+55+144	232
7	13	377	1+3+8+21+55+144+377	609
8	15	987	1+3+8+21+55+144+377+987	1596
9	17	2584	1+3+8+21+55+144+377+987+2584	4180
10	19	6765	1+3+8+21+55+144+377+987+2584+6765	10945

Fonte: Acervo pessoal.

Observando este padrão podemos perceber que  $X_1 + X_3 + X_5 + \dots + X_{2q-1} = X_{2q} - 1$ , ou seja, ao realizarmos a soma até o  $q$ -ésimo termo de índice ímpar, obtemos como resultado o  $q$ -ésimo termo de índice par subtraído de 1 unidade.

Vamos então provar matematicamente o proposto:

$$S_q = \sum_{i=1}^q X_{2i-1} = X_1 + X_3 + X_5 + \cdots + X_{2q-1} = X_{2q} - 1$$

Provemos o resultado por indução finita. Façamos  $q = k$  com  $k \in \mathbb{N}$  e  $k > 0$ .

O resultado é válido para  $k = 1$ , pois

$$S_1 = 1 = 2 - 1 = X_2 - 1$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para  $q = k, k > 0$ , sendo essa a nossa hipótese de indução, ou seja, suponhamos que seja válido

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_{2i-1} = X_1 + X_3 + X_5 + \cdots + X_{2k-1} = X_{2k} - 1$$

Provemos agora que o resultado é válido para  $q = k + 1$ . De fato,

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_{2i-1} = \sum_{i=1}^k X_{2i-1} + X_{2(k+1)-1} = X_{2k} - 1 + X_{2(k+1)-1} = X_{2k} - 1 + X_{2k+1}$$

Na penúltima igualdade usamos a hipótese de indução. Reorganizando os termos, temos

$$X_{2k} - 1 + X_{2k+1} = X_{2k} + X_{2k+1} - 1$$

E, pela definição da Sequência de Fibonacci, sabemos que  $X_{2k} + X_{2k+1} = X_{2k+2}$ , logo:

$$\begin{aligned} X_{2k} + X_{2k+1} - 1 &= X_{2k+2} - 1 \\ X_{2k} + X_{2k+1} - 1 &= X_{2(k+1)} - 1 \end{aligned}$$

de modo que

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_{2i-1} = X_{2(k+1)} - 1$$

como queríamos provar.

### 3.1.2.2 Somatório dos números da Sequência de Fibonacci de índices pares

Primeiro observemos o que acontece com a soma dos  $p$  termos de índices pares da sequência de Fibonacci, na Tabela 8, a seguir.

Tabela 8. Soma dos números de Fibonacci de índice par.

$p$	$n$	$X_n$	$\Sigma$	$S_p$
0	0	1	1	1
1	2	2	1+2	3
2	4	5	1+2+5	8
3	6	13	1+2+5+13	21
4	8	34	1+2+5+13+34	55
5	10	89	1+2+5+13+34+89	144
6	12	233	1+2+5+13+34+89+233	377
7	14	610	1+2+5+13+34+89+233+610	987
8	16	1597	1+2+5+13+34+89+233+610+1597	2584
9	18	4181	1+2+5+13+34+89+233+610+1597+4181	6765

Fonte: Acervo pessoal.

Se observarmos o padrão disposto em  $S_p$  percebemos que são sempre números de Fibonacci de índice ímpar, então podemos dizer que  $X_0 + X_2 + X_4 + \dots + X_{2p} = X_{2p+1}$ , ou seja, se contarmos o  $X_0$  como o primeiro Número de Fibonacci de índice par, o resultado das somas sucessivas dos dez primeiros números de índice par será igual ao décimo número de índice ímpar, e assim de maneira análoga para os outros números.

Vamos, então, provar matematicamente o proposto:

$$S_p = \sum_{i=0}^p X_{2i} = X_0 + X_2 + X_4 + \cdots + X_{2p} = X_{2p+1}$$

Provemos o resultado por indução finita. Façamos  $p = k$  com  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \geq 0$ .

Podemos ver que o resultado é válido para  $k = 0$ , já que

$$S_0 = \sum_{i=0}^0 X_{2i} = X_0 = 1 = X_1$$

Como hipótese de indução, temos

$$S_k = \sum_{i=0}^k X_{2i} = X_0 + X_2 + X_4 + \cdots + X_{2k} = X_{2k+1}$$

A partir disto, mostremos que o resultado é válido para  $p = k + 1$ :

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} X_{2i} = \sum_{i=0}^k X_{2i} + X_{2(k+1)} = X_0 + X_2 + X_4 + \cdots + X_{2k} + X_{2(k+1)}$$

Pela hipótese de indução  $X_0 + X_2 + X_4 + \cdots + X_{2k} = X_{2k+1}$ , logo:

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} X_{2i} = X_{2k+1} + X_{2(k+1)}$$

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} X_{2i} = X_{2k+1} + X_{2k+2}$$

E pela definição do Sequência de Fibonacci  $X_{2k+1} + X_{2k+2} = X_{2k+3}$ , logo:

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} X_{2i} = X_{2k+1} + X_{2k+2} = X_{2k+3}$$

Ou seja,

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} X_{2i} = X_0 + X_2 + X_4 + \dots + X_{2k} + X_{2(k+1)} = X_{2(k+1)+1}$$

como queríamos provar.

### 3.1.2.3 Somatório dos quadrados dos números da Sequência de Fibonacci

Primeiro observemos o que acontece com a soma dos quadrados dos  $n$  primeiros termos da sequência de Fibonacci, na Tabela 9 a seguir.

Tabela 9. Soma dos quadrados dos números de Fibonacci.

$n$	$X_n$	$(X_n)^2$	$\Sigma$	$S_n$
0	1	1	1	1
1	1	1	1+1	2
2	2	4	1+1+4	6
3	3	9	1+1+4+9	15
4	5	25	1+1+4+9+25	40
5	8	64	1+1+4+9+25+64	104
6	13	169	1+1+4+9+25+64+169	273
7	21	441	1+1+4+9+25+64+169+441	714
8	34	1156	1+1+4+9+25+64+169+441+1156	1870
9	55	3025	1+1+4+9+25+64+169+441+1156+3025	4895
10	89	7921	1+1+4+9+25+64+169+441+1156+3025+7921	12816

Fonte: Acervo pessoal.

Dessa vez o padrão fica difícil de ver, mas o que acontece é

$$(X_0)^2 + (X_1)^2 + (X_2)^2 + \dots + (X_n)^2 = X_n \cdot X_{n+1},$$

ou seja, a soma dos quadrados dos  $n$  primeiros termos da Sequência de Fibonacci é igual ao produto do  $n$ -ésimo termo pelo seu sucessor.

$$S_n = \sum_{i=0}^n (X_i)^2 = (X_0)^2 + (X_1)^2 + (X_2)^2 + \cdots + (X_n)^2 = X_n \cdot X_{n+1}$$

Chamemos  $n = k$  com  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \geq 0$ .

Para  $k = 0$ , a afirmação é válida, pois

$$S_0 = \sum_{i=0}^0 (X_i)^2 = (X_0)^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = X_0 \cdot X_1$$

Suponhamos, como hipótese de indução, que seja válido para  $n = k$ , ou seja, que valha a seguinte condição

$$S_k = \sum_{i=0}^k (X_i)^2 = (X_0)^2 + (X_1)^2 + (X_2)^2 + \cdots + (X_k)^2 = X_k \cdot X_{k+1}$$

Mostremos, então, que a afirmação é válida para  $n = k + 1$ .

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (X_i)^2 = (X_0)^2 + (X_1)^2 + (X_2)^2 + \cdots + (X_k)^2 + (X_{k+1})^2$$

Pela hipótese de indução sabemos que

$$(X_0)^2 + (X_1)^2 + (X_2)^2 + \cdots + (X_k)^2 = X_k \cdot X_{k+1}$$

logo:

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (X_i)^2 = X_k \cdot X_{k+1} + (X_{k+1})^2 = X_{k+1} \cdot (X_k + X_{k+1})$$

Pela definição da Sequência de Fibonacci sabemos que  $X_k + X_{k+1} = X_{k+2}$ , logo:

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (X_i)^2 = X_{k+1} \cdot (X_{k+2})$$

como queríamos provar.

### 3.1.3 Dois números consecutivos da Sequência de Fibonacci são primos entre si

Mostremos que um número da Sequência de Fibonacci e seu sucessor são primos entre si, ou seja, o máximo divisor comum entre eles é 1,  $mdc(X_n, X_{n+1}) = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Observe que  $mdc(X_0, X_1) = 1$ ,  $mdc(X_1, X_2) = mdc(1, 2) = 1$  e  $mdc(X_2, X_3) = mdc(2, 3) = 1$ . Suponha agora  $mdc(X_n, X_{n+1}) = 1$  como hipótese de indução.

Utilizaremos o princípio de indução para mostrar que  $mdc(X_{n+1}, X_{n+2}) = 1$ . Sabemos ainda que  $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ , logo:

$$mdc(X_{n+1}, X_{n+2}) = mdc(X_{n+1}, X_{n+1} + X_n)$$

O Lema de Euclides, descrito no livro de MA 14, Aritmética, da coleção PROFMAT, afirma o seguinte:

“Sejam  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ . Se existe  $mdc(a, b - na)$ , então  $mdc(a, b)$  existe e  $mdc(a, b) = mdc(a, b - na)$ ”.

Assim, utilizando esse lema com  $n = 1$  e a hipótese de indução, temos

$$mdc(X_{n+1}, X_{n+1} + X_n) = mdc(X_{n+1}, X_{n+1} + X_n - X_{n+1}) = mdc(X_{n+1}, X_n) = 1$$

ou seja,

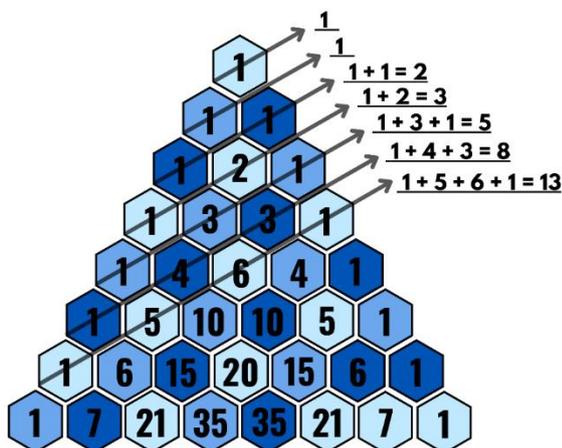
$$mdc(X_{n+1}, X_{n+2}) = mdc(X_{n+1}, X_n) = 1$$

Portanto, pelo princípio de indução, de fato,  $\text{mdc}(X_n, X_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

### 3.1.4 A Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

O *Traité du Triangle Arithmétique* (Tratado sobre o Triângulo Aritmético) de Pascal, escrito em 1654, pelo matemático e filósofo francês Blaise Pascal (1623-1662), descreveu uma apresentação tabular conveniente para coeficientes binomiais que ele nomeou triângulo aritmético, chamado atualmente de triângulo de Pascal. Somando as diagonais do Triângulo de Pascal, evidenciamos a Sequência de Fibonacci, como podemos observar na figura 33 a seguir.

Figura 33. Soma das diagonais do Triângulo de Pascal

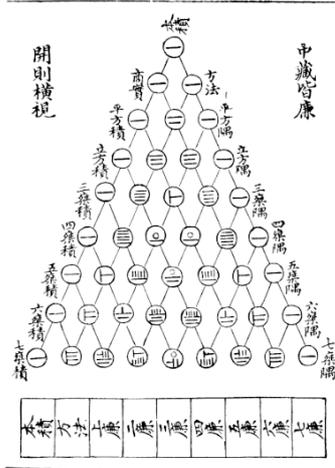


Fonte: Acervo pessoal.

Entretanto, o Triângulo de Pascal tem sua origem anterior à Blaise Pascal. Alguns registros relatam que o matemático chinês Jia Xian desenvolveu uma representação triangular para os mesmos coeficientes no século XI que pode ser encontrada na figura 34. Ademais, apenas teve sua popularidade através do matemático Yang Hui, que teve seu nome dado ao modelo proposto por Jia Xian (Enciclopédia Britânica, 2023).

Figura 34. Triângulo de Yang Hui

圖方蔡七法古

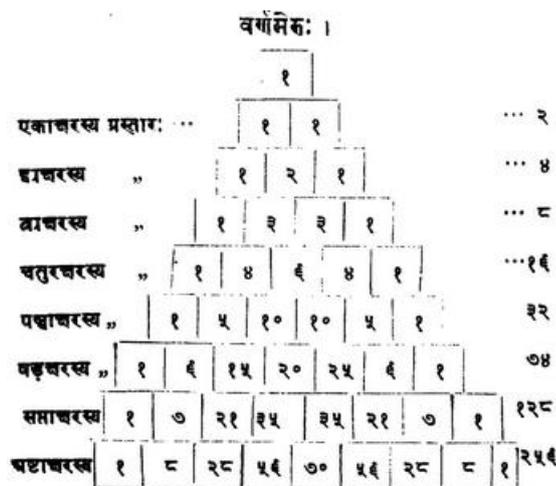


Fonte: Yáng Huī (楊輝) (1238–1298)

Acharya Pingala foi um antigo poeta matemático indiano, autor do *Chhandahśāstra* (Um Tratado sobre Prosódia) e trazia aproximadamente no século III-II a.C. uma representação do triângulo de pascal (Gopal, 2023). (Figura 35).

O trabalho de Pingala também inclui material relacionado aos números de Fibonacci, chamado *mātrāmeru*.

Figura 35. Triângulo de Pascal representado em uma versão posterior do *Chandahśāstra*



Fonte: Janakinath Kabyatirtha & Brothers.

### 3.1.5 Outras propriedades da Sequência de Fibonacci

1. Sendo quatro elementos consecutivos  $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}$

1.1 O quadrado do produto dos extremos mais o quadrado do dobro do produto dos meios é igual a um quadrado perfeito.

$$(X_n \cdot X_{n+3})^2 + (2 \cdot X_{n+1} \cdot X_{n+2})^2 = m^2$$

1.2 O produto dos extremos menos o produto dos meios será sempre  $-1$  ou  $1$ .

$$X_n \cdot X_{n+3} - X_{n+1} \cdot X_{n+2} = (-1)^n$$

2. Ao escolher um número da Sequência de Fibonacci de  $n$ -ésima ordem, basta fazer a diferença entre os quadrados de seu sucessor e de seu antecessor, para obter o  $(2n + 1)$ -ésimo termo da sequência, isto é,

$$X_{2n+1} = (X_{n+1})^2 - (X_{n-1})^2$$

3. Tomando o produto entre o  $n$ -ésimo termo e o número  $\varphi$ , somado ao antecessor desse  $n$ -ésimo termo, como pode ser observado na tabela 10, temos o número de ouro elevado à potência  $n + 1$ , isto é,

$$\varphi^{n+1} = X_n \cdot \varphi + X_{n-1}$$

Tabela 10.  $\varphi$  elevado a  $n$ -ésima potência

$n$	$X_n$	$\varphi^{n+1}$	$X_n \cdot \varphi + X_{n-1}$	$X_n \cdot \varphi + X_{n-1} \approx$
1	1	$\varphi^2$	$1 \cdot \varphi + 1$	2,618033989
2	2	$\varphi^3$	$2 \cdot \varphi + 1$	4,236067977
3	3	$\varphi^4$	$3 \cdot \varphi + 2$	6,854101966
4	5	$\varphi^5$	$5 \cdot \varphi + 3$	11,09016994
5	8	$\varphi^6$	$8 \cdot \varphi + 5$	17,94427191

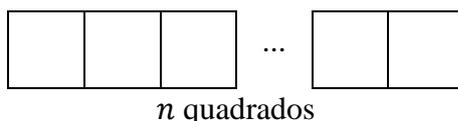
Fonte: Acervo pessoal.

### 3.2 O PROBLEMA DE HEMACHANDRA

Como mencionado previamente, precedendo ao livro Liber Abacci (1202), a sequência de números 1, 1, 2, 3, 5, ... foi mencionada por outras culturas, segundo P. Singh de Raj Narain College, em Bihar, na Índia, essa sequência de Fibonacci já era conhecida na Índia há séculos, por Virahanka (entre 600 e 800 d.C.), Gopala (antes de 1135 d.C.) e Hemachandra (cerca de 1150 d.C.). Dentre estas abordagens, o matemático indiano Acharya Hemachandra Suri (1088-1172 d.C.) apresentou a sequência como solução de um problema semelhante ao seguinte:

Para preencher um tabuleiro linear, com  $n$  quadrados, usando dois tipos de peças: Peças pequenas que ocupam 1 espaço e peças grandes que ocupam 2 espaços, como ilustra a figura 36 a seguir.

Figura 36. Tabuleiro de Hemachandra



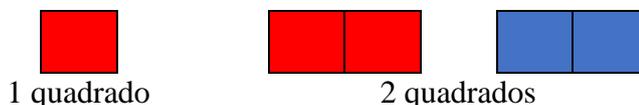
Peças:



Fonte: Acervo pessoal.

Para solucionar este problema, vamos primeiro entender o padrão de preenchimento dos quadrados em tabuleiros de tamanhos específicos. Para preencher um tabuleiro de um quadrado, temos apenas uma maneira, preenchendo-o com uma peça pequena. Para preencher um tabuleiro de dois quadrados, temos duas maneiras, duas peças pequenas, ou uma grande como ilustra a figura 37.

Figura 37. Primeira e segunda possibilidade no Tabuleiro de Hemachandra.



Fonte: Acervo pessoal.

Para preencher um tabuleiro de três quadrados, temos três opções, que são: três peças pequenas, ou uma peça pequena e uma peça grande, ou ainda uma peça grande e uma peça pequena como mostra a figura 38.

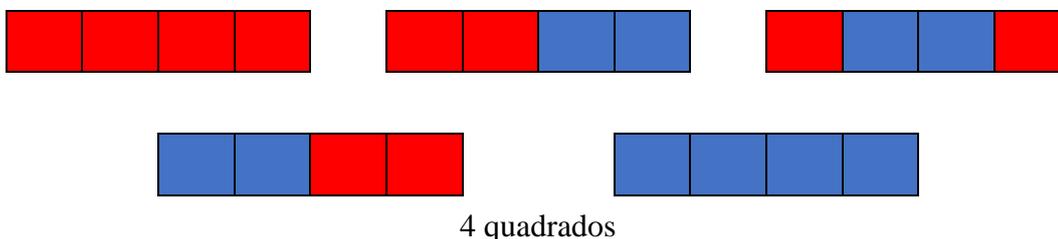
Figura 38. Terceira possibilidade no Tabuleiro de Hemachandra.



Fonte: Acervo pessoal.

Para preencher um tabuleiro de quatro quadrados, temos cinco opções distintas: quatro peças pequenas; ou duas peças pequenas e uma grande; ou uma peça pequena, uma grande e outra pequena; ou uma peça grande e duas pequenas; ou ainda duas peças grandes, como mostra a figura 39, e assim sucessivamente.

Figura 39. Quarta possibilidade no Tabuleiro de Hemachandra.



Fonte: Acervo pessoal.

Tentando perceber um padrão, suponhamos um tabuleiro com  $n$  quadrados e denotemos por  $X_n$  a quantidade de maneiras de preencher esse tabuleiro. Podemos iniciar o preenchimento do tabuleiro de dois modos: ou iniciamos com uma peça pequena, preenchendo o primeiro quadrado, ou iniciamos com uma peça grande, preenchendo os dois primeiros quadrados. Se cobrirmos o primeiro quadrado com uma peça pequena, logo sobrarão  $n - 1$  quadrados para serem preenchidos, ou seja, a quantidade  $X_{n-1}$  de maneiras de se preencher os  $n - 1$  quadrados restantes. Mas se cobrirmos os dois primeiros quadrados com uma peça grande, restarão  $n - 2$  quadrados para serem preenchidos, que é exatamente a quantidade  $X_{n-2}$  de maneiras que se tem para preencher os  $n - 2$  quadrados que restarão. Logo, o número  $X_n$  de possibilidades totais será sempre a soma do número de possibilidades do primeiro modo ( $X_{n-1}$ ) com o número

de possibilidades do segundo modo ( $X_{n-2}$ ), que dá a recorrência previamente apresentada na seção 2.1:

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2}.$$

Portanto, as quantidades de possibilidades de alocação das peças para cada tabuleiro são respectivamente  $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, X_n = X_{n-1} + X_{n-2}\}$ .

Este mesmo problema pode ser proposto de forma diferente, algo semelhante ao seguinte exemplo: Uma criança deseja subir uma escada de  $n$  degraus, podendo subir um ou dois degraus de cada vez. De quantas maneiras diferentes ela poderá subir essa escada?

Para a resolução do problema temos que se a escada possui um degrau, obviamente só há 1 maneira de subir. Se a escada possui dois degraus, ela poderá subir um degrau de cada vez, ou os dois degraus de uma vez só, totalizando 2 maneiras. Se a escada possui três degraus, ela poderá subir um degrau de cada vez, um degrau seguido de dois degraus, e dois degraus seguido de um degrau, totalizando 3 maneiras. Assim, sucessivamente, para as demais quantidades de degraus, formando novamente a Sequência de Fibonacci que tem como solução geral

$$X_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

como mostrado na seção 2.1.

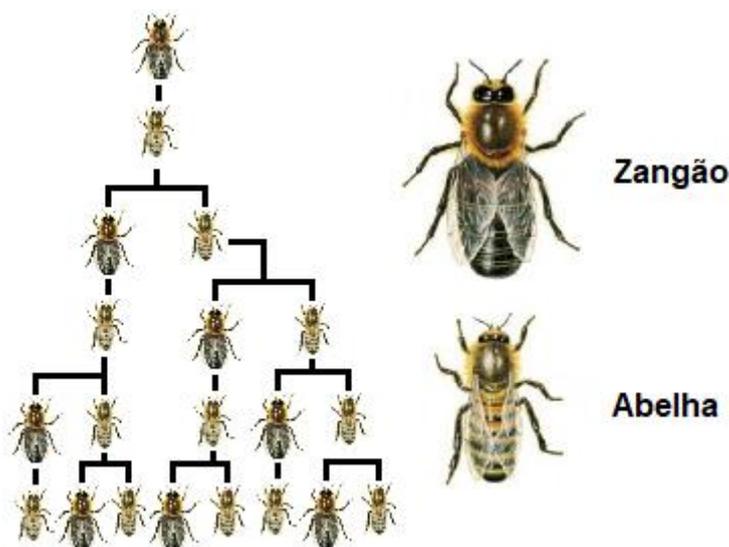
### 3.3 O PADRÃO DE REPRODUÇÃO DAS ABELHAS E ZANGÕES

A relação entre a reprodução das abelhas e a sequência de Fibonacci é um tema fascinante, mas é importante esclarecer que essa relação nem sempre é direta ou absoluta. É essencial notar que essa relação não é universal em todas as colmeias de abelhas e nem todas as observações se alinham perfeitamente com a sequência de Fibonacci. Nesta seção abordamos um padrão de reprodução específico, e a relação com a quantidade de antepassados relacionados da seguinte forma: para a reprodução de um zangão (espécime macho da abelha), precisamos apenas de um ovo não fertilizado, ou seja, apenas que uma abelha (fêmea) bote o ovo, mas para

a produção de uma abelha precisamos que um zangão fertilize o ovo de uma abelha. Desta forma, notamos o padrão a seguir.

Na primeira geração de antepassados o zangão terá apenas uma mãe, porém essa mãe precisa de um pai e uma mãe, sendo esses os avós do zangão inicial. O avô por sua vez precisa apenas de uma mãe, e a avó precisa de uma mãe e de um pai, totalizando 3 bisavôs, e assim sucessivamente como mostra a figura 40.

Figura 40. Árvore Genealógica do Zangão.



Fonte: Acervo pessoal.

Dessa forma podemos prever quantos antepassados um zangão tem  $n$  gerações anteriores, esse padrão reproduz a Sequência de Fibonacci, como mostramos a seguir:

Chamemos de  $X_n$  a quantidade de antepassados da  $n$ -ésima geração, de  $M_n$  a quantidade de antepassados machos da  $n$ -ésima geração e de  $F_n$  a quantidade de antepassados fêmeas da  $n$ -ésima geração. Assim, temos

$$X_n = M_n + F_n$$

Partindo da ideia que tanto um zangão quanto uma abelha precisam de uma mãe, o número de abelhas da geração anterior é exatamente a quantidade de antepassados atual:

$$F_{n+1} = X_n.$$

Tendo em mente que apenas as abelhas precisam de pai, o número de zangões da geração anterior é exatamente a quantidade de abelhas atual:

$$M_{n+1} = F_n$$

Deste modo a quantidade de antepassados  $X_n$  é dada por

$$X_{n+1} = F_{n+1} + M_{n+1}.$$

Logo,

$$X_{n+1} = X_n + F_n.$$

Como este padrão se trata de uma recorrência, podemos dizer que

$$F_n = X_{n-1},$$

chegando a

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1},$$

ou seja,

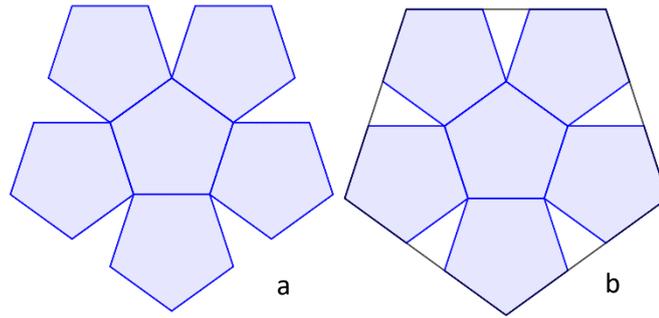
$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$$

que é a Sequência de Fibonacci.

### 3.4 A AUTOSIMILARIDADE EXTERNA DO PENTÁGONO

Falamos na seção 2.2.4 sobre a autossimilaridade do pentágono, porém olhando para ele internamente. Nesta seção abordamos de outra maneira, anexamos 5 pentágonos regulares ao pentágono central externamente, como mostra a figura 41 (a).

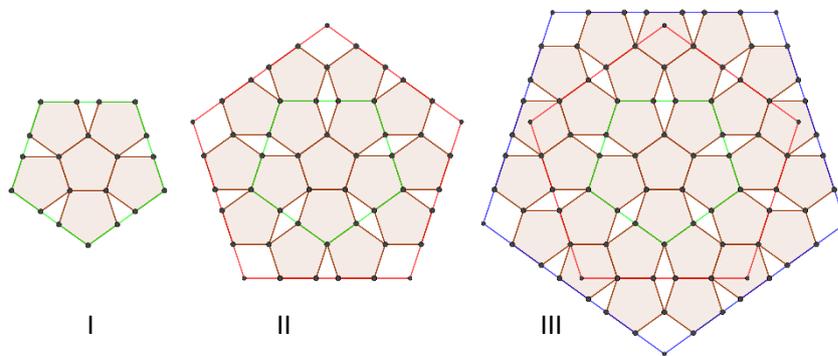
Figura 41. 6 Pentágonos Justapostos



Fonte: Acervo pessoal.

Se ligarmos os vértices externos dos pentágonos, figura 41 (b), vemos a formação de um novo pentágono maior, e cinco (nesta primeira iteração) Triângulos Áureos entre os pentágonos azuis, e se continuamos este processo vemos algo como na figura 42, não tendo nenhuma relação aparente entre os comprimentos dos novos pentágonos, ou a quantidade de pentágonos, ou a quantidade de triângulos e o número de ouro, apenas a formação de vários triângulos áureos.

Figura 42. Autossimilaridade Externa do Pentágono



Fonte: Acervo pessoal.

Outra iteração interessante é a do pintor e matemático Albrecht Dürer (1471 - 1528) que diz algo semelhante a: Você pode juntar seis pentágonos (figura 41 a) para construir um pentágono maior, com cinco buracos na forma de Triângulos Áureos. Seis desses pentágonos, por sua vez, formam juntos um pentágono ainda maior (apresentado mais vazões), e assim por diante. A figura que ele cita é algo semelhante a figura 43.

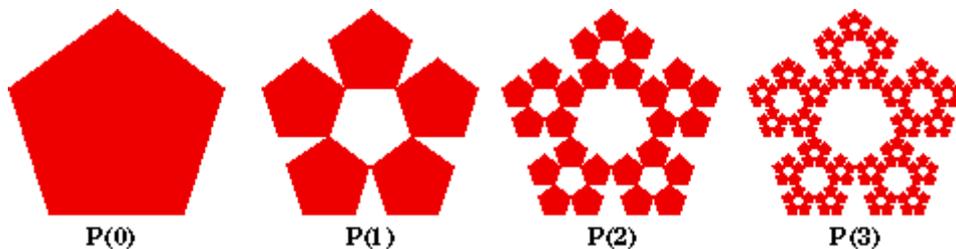
Figura 43. Terceira Iteração da Ilustração de Dürer



Fonte: Acervo pessoal.

Esta figura 43 pode ser confundida com um *Pentaflake*, o pentágono de Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), e difere na maneira que é construída. O fractal *Pentaflake* tem sua construção partindo de um pentágono regular ( $P(0)$  na figura 44), e traçando-se as suas diagonais, obtendo-se assim um novo pentágono regular em seu centro, e traçando-se, em seguida, as diagonais desse novo pentágono e estendo-as até o lado do pentágono anterior, formando-se cinco triângulos isósceles. Retirando-se esse pentágono do centro e os cinco triângulos isósceles tem-se uma nova figura como a  $P(1)$  da figura 44. Essa construção se repete a cada um dos cinco pentágonos que restaram ( $P(2)$  da figura 44) e assim sucessivamente.

Figura 44. Pentágono de Waclaw Sierpinski



Fonte: Larry Riddle, Agnes Scott College.

#### 4 MITOS E VERDADES SOBRE A PROPORÇÃO ÁUREA

Figura 45. Eu tenho razão.



Fonte: Humor com ciência, 2019.

A figura 45 referencia o filme O Sexto Sentido (1999) com o diálogo “Eu vejo o número de ouro. Com que frequência? O tempo todo.” satirizando a pareidolia, ou a busca de certas pessoas pela Razão Áurea, e se você está se perguntando se a tirinha realmente tem a proporção, a resposta é sim, o autor fez isso propositalmente.

Figura 46. Proporção Áurea na tirinha da Figura 45.



Fonte: Humor com ciência, 2019.

Apesar do misticismo e numerismo em que a Razão Áurea está envolta, há fatos que podemos comprovar acerca dela, e evidências que nos fazem discordar de certos aspectos que não passam de falácias. Deve-se, então, agir de maneira cautelosa com as peculiaridades desta razão, pois ainda que muita coisa seja justificada, isto não impede que novos autores continuem repetindo as falácias. O matemático George Markowsky, em seu artigo “Equívocos sobre a Razão Áurea” de 1992, explica:

Se você se dispõe a medir uma estrutura complicada como uma pirâmide egípcia, você terá rapidamente na mão uma grande abundância de comprimentos para brincar. Se você tiver paciência suficiente para fazer malabarismos com esses números, você certamente obterá muitos valores que coincidem com importantes datas históricas ou números nas ciências. Como você não está limitado por nenhuma regra, seria estranho se a “verdade” da razão áurea não se encaixasse com sucesso considerável. (Markowsky, 1992, p.5).

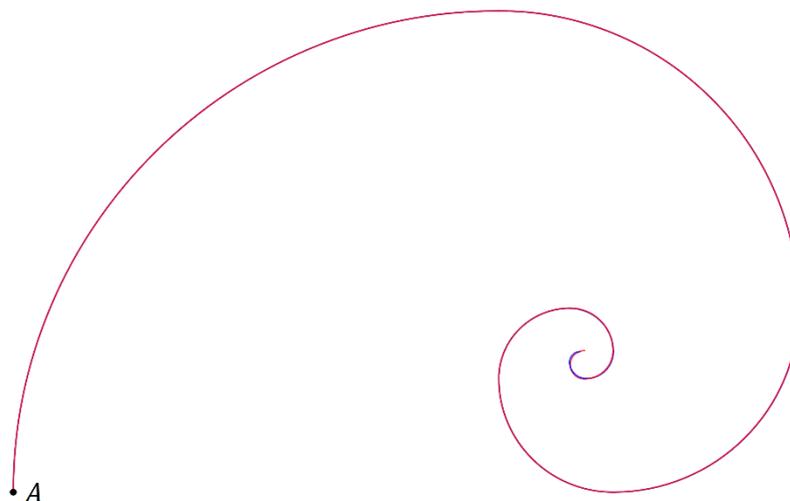
Se observarmos bem, podemos encontrar aproximações da proporção áurea, ou de qualquer outra proporção, e qualquer outro número em muitos lugares, o que não dá a certeza de que as proporções foram feitas intencionalmente, e não são apenas o próprio observador buscando por elas. Devemos então nos perguntar se há provas do uso da razão áurea e se para o contexto da época já se falava da proporção, se não apenas será uma crença sem fundamento.

Embora a proporção áurea seja intrigante e tenha sido aplicada em muitos campos, é importante não superestimar sua importância ou aplicabilidade universal. É uma ferramenta útil, mas não é a única maneira de alcançar beleza ou harmonia visual.

#### 4.1 A DIFERENÇA ENTRE A ESPIRAL DE FIBONACCI E A ESPIRAL ÁUREA

Ao abordarmos este assunto, devemos agir cuidadosamente ao apresentarmos a Espiral de Fibonacci e a Espiral Áurea, pois se tratam de duas coisas parecidas, porém distintas. A figura 47 a seguir ilustra a nona iteração da Espiral de Fibonacci (em vermelho) e a nona iteração da Espiral Áurea (em azul) construída a partir de quartos de círculos, justapostas no ponto final da construção finita da Espiral de Fibonacci, e no ponto inicial da construção da Espiral Áurea, o ponto *A*.

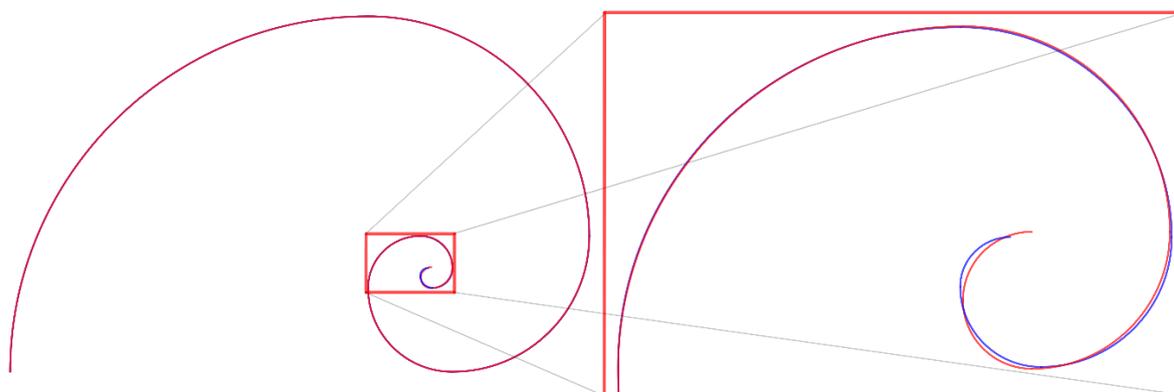
Figura 47. Espiral de Fibonacci e Espiral Áurea



Fonte: Acervo pessoal.

Se observarmos bem, quase não há discrepância entre as duas espirais, mas se aproximarmos a imagem do que seriam os passos iniciais da construção da Espiral de Fibonacci, percebemos a diferença, como mostra a figura 48. Isso acontece pois nos valores iniciais da Sequência de Fibonacci, a razão de um termo com seu imediatamente anterior dista um pouco do valor exato de  $\varphi$ , ora sendo maior e outrora menor, como mostra a Tabela 4 deste trabalho, na seção 2.1.2.

Figura 48. Aproximação na Espiral de Fibonacci e Espiral Áurea



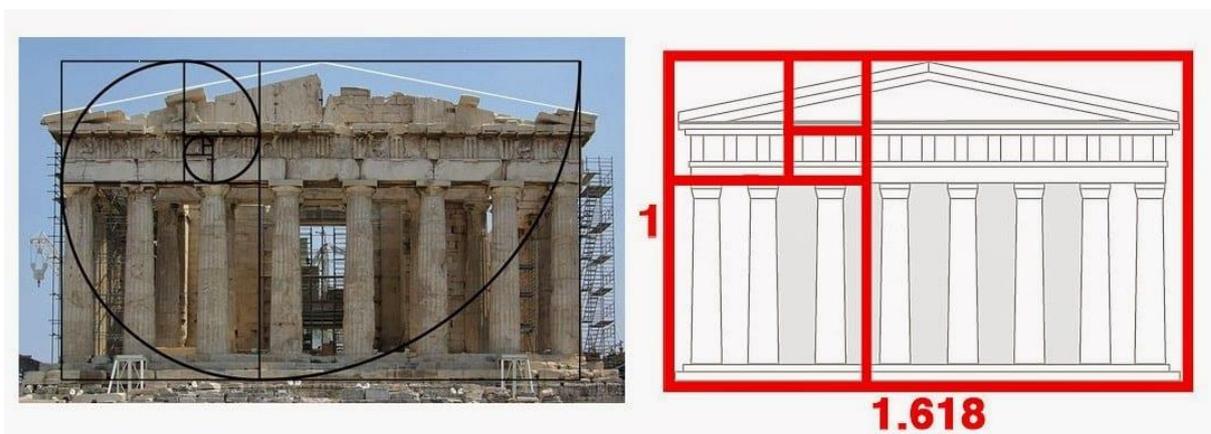
Fonte: Acervo pessoal.

Logo, podemos concluir que são dois conceitos que apesar de parecidos, apresentam diferenças, tendo a Espiral Áurea a presença da Razão Áurea em todas as etapas, enquanto a Espiral de Fibonacci contém apenas aproximações.

#### 4.2 O PARTHENON EM ATENAS

O Parthenon (“o lugar da virgem” em grego) foi construído por Fídias na Acrópole de Atenas (o nome “acrópole” designa a parte alta de cidades da antiguidade), na Grécia, que foi parcialmente destruído em 1687 durante um ataque dos venezianos a Atenas, durante uma guerra com os turcos. O lugar era usado para armazenar pólvora nesta época, a explosão deixou ainda sua estrutura básica intacta. O surgimento da presença da razão áurea no Parthenon já foi por várias vezes discutido, no artigo publicado por George Markowsky (1992), intitulado *Misconceptions about the Golden Ratio*. Markowsky fala sobre as proporções da obra, e a aproximação destas razões, chegando à razão de 2,25, e até mesmo tentando usar as medidas do ápice da estilóbata chegaríamos à razão de 1,71, um pouco distante da razão áurea, o que mesmo assim não nos impede de ver imagens como as da figura 49 e artigos que afirmam existir esta proporção, ainda que fique um degrau, ou uma ponta da estrutura para fora do retângulo, características essas que são ignoradas pelos entusiastas da razão áurea.

Figura 49. Parthenon Grego



Fonte: LIMA, Larissa Ariel, 2020

As dimensões do Parthenon variam dependendo das fontes, onde entra o malabarismo numérico para se aproximar da razão áurea, utilizando-se de pontos de referência que podem favorecer a aproximação. Não é improvável que os escultores da época tenham se baseado em alguma proporção, mas deve-se tomar cuidado ao generalizar.

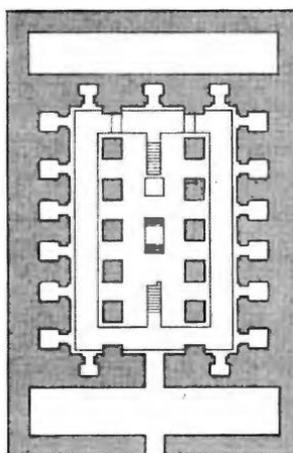
Assim, a razão áurea foi usada na construção do Parthenon? Embora o contexto histórico nos mostre que a construção do Parthenon foi após a descoberta dos irracionais pela comunidade pitagórica, não se pode confirmar a utilização da proporção áurea.

#### 4.3 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NAS PIRÂMIDES DO EGITO

Inúmeras especulações sobre construções egípcias são feitas por historiadores, com questionamentos sobre como suas construções eram realizadas, a organização e disposição de materiais. Dentre os questionamentos, é comum encontrarmos autores buscando afirmar que a proporção áurea se fazia presente em construções, e que os egípcios a usavam conscientemente. Entretanto, ainda não se tem uma prova concreta do conhecimento da razão áurea na época em questão.

O Templo Osíriion, considerado um memorial do rei Seti I, cujo design pressupõe-se que tenha sido feito para representar o mito de Osíris, morto por irmão Seth, que espalhou seus pedaços. Assim, após sua esposa Ísis recolher seus pedaços, transformou-se em rei do submundo. A planta do templo, vista na figura 50, apresenta uma coluna central e dez outras colunas quadradas. (Lívio, 2006).

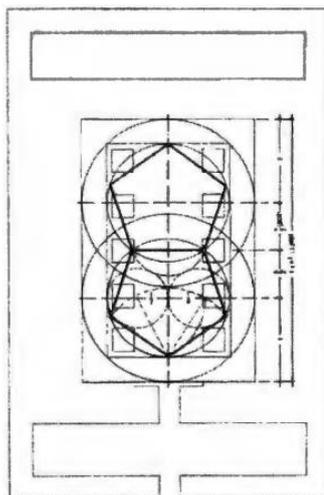
Figura 50. Planta do Templo de Osíriion



Fonte: Lívio, 2006.

Robert Lawlor, em sua obra “Geometria Sagrada: filosofia e prática”, publicada em 1982, apresenta a ideia de que a geometria do templo está contida nas proporções áureas. Assim em sua obra, Lawlor apresenta análises geométricas semelhantes à figura 51 para reforçar seu argumento. Também em sua obra é possível notar que o autor dá ênfase no uso do pentagrama como símbolo da transformação do rei em estrela após sua morte.

Figura 51. Representação de Lawlor do Templo de Osírión



Fonte: Lívio, 2006.

Infelizmente, as análises de Lawlor não se apresentam convincentes de nenhum modo, visto que suas ilustrações trazem uma interpretação forçada da geometria do templo, utilizando marcações arbitrárias e pontos não óbvios, de maneira conveniente para apresentar dois pentágonos em uma área que, na verdade, mostra-se claramente um retângulo. É importante evidenciar que a razão áurea é quase impossível de ser provada em construções egípcias, apenas por medidas e ilustrações (Lívio, 2006).

A construção egípcia de maior fama entre historiadores certamente é a pirâmide de Khufu (figura 52). Também conhecida como a Grande Pirâmide ou Pirâmide de Quéops, essa construção desperta em matemáticos e historiadores inúmeras especulações e teorias a respeito de sua construção e uso. O inglês Jhon Taylor tinha consigo muitas convicções a respeito da presença de propriedades matemáticas na construção da pirâmide.

Figura 52. Pirâmide de Quéops



Fonte: Djehouty, Wikimedia Commons, 2015.

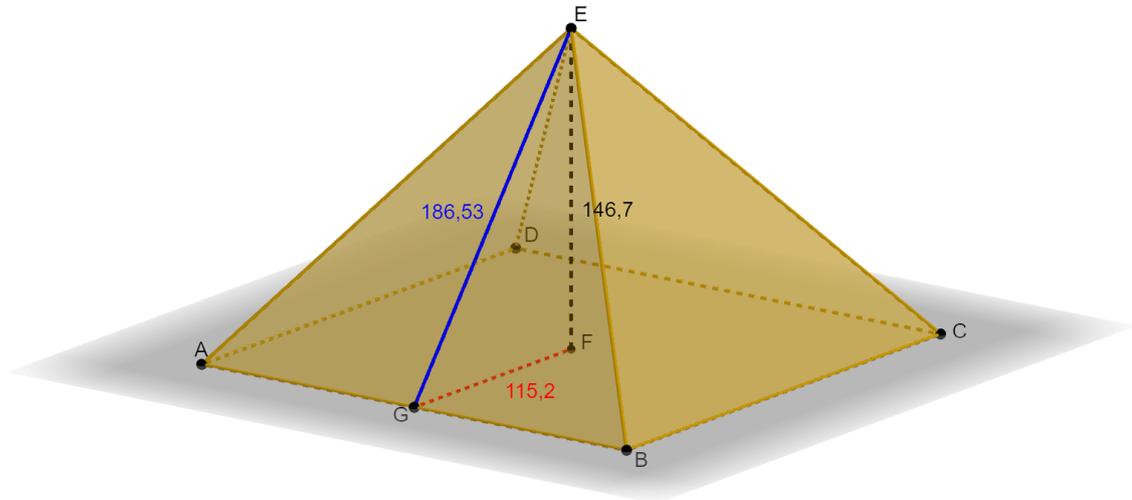
O contexto da época mostra os britânicos com a ideia de que eram descendentes das tribos perdidas de Israel. Partindo dessa influência, Taylor traz a ideia de que a medida da pirâmide era a mesma do chamado cúbito bíblico, que consiste em aproximadamente 25 polegadas britânicas. Nessa mesma época era dito que o cúbito foi a medida usada por Noé na construção da Arca, assim como na construção do Templo de Salomão.

O astrônomo Charles Piazzi Smyth, fortemente inspirado pela obra de Jhon Taylor, afirmava que a Grande Pirâmide teve seu projeto utilizando polegadas como medida, e sendo obra de uma inspiração divina, concluiu que a polegada era a unidade de medida dada por Deus. Posteriormente, Smyth foi chamado, por Leonard Cottrel, de o “Grande Piramidiota”.

Assim, ao retomarmos a ideia de que a Grande Pirâmide foi construída com o cúbito bíblico, Martin Gardner (1957), diz que: "Heródoto afirma que a Pirâmide foi construída de forma que a área de cada face fosse igual à área de um quadrado cujo lado fosse igual à altura da Pirâmide". Se tomarmos verdadeira a suposição de Gardner, então teremos a proporção áurea na Pirâmide de Quéops.

O francês Midhat J. Gazalé (1999) nos apresenta em sua obra a seguinte afirmação: “Disseram que o historiador grego Heródoto aprendeu com os sacerdotes egípcios que o quadrado da altura da Grande Pirâmide é igual à área da sua face lateral triangular.” Fazendo uso de sua fala, observa-se então que a razão entre a altura de sua face triangular e metade do lado da base apresentam a proporção áurea (figura 53).

Figura 53. Ilustração da Pirâmide de Quéops



Fonte: Acervo pessoal.

A Pirâmide de Quéops originalmente tinha a base quadrada com arestas medindo 230,4 metros, e altura igual a 146,7 metros. Para encontrarmos a área de sua face triangular é necessário encontrar a altura da face (apótema da pirâmide), e para isto usaremos o Teorema de Pitágoras, onde G é ponto médio de AB, e EF é a altura da pirâmide, logo  $EG^2 = GF^2 + EF^2$ , então  $EG \approx 186,53 m$ .

A área da face lateral da pirâmide é dada por:

$$\frac{230,4 \cdot 186,53}{2} = 21.488,256 m^2$$

O quadrado da altura da pirâmide é:

$$146,7^2 = 21.520,89 m^2$$

Levando em consideração a afirmação de Gazalé, percebemos que são valores aproximados, e fazendo a razão entre EG e FG, temos

$$\frac{186,53}{115,2} = 1,619$$

algo bem próximo a  $\varphi$ .

Se tomarmos como objeto de estudo as grandes pirâmides, apenas a Pirâmide Quéops apresenta a proporção com uma boa aproximação. A pirâmide de Miquerinos tinha originalmente a base retangular de medidas 102,2 metros e 104,6 metros, e altura igual a 65 metros, logo apresenta faces de áreas diferentes. Nas razões feitas de maneira semelhante à Pirâmide de Quéops, encontramos 1,618030849 em relação à face de maior base o que nos leva novamente a uma boa aproximação, porém se levarmos em consideração o outro lado da base da pirâmide, teremos como razão 1,595188384.

Entretanto, a fala de Heródoto apresenta várias divergências, sendo apresentada de diferentes maneiras, onde se pode observar a influência de autores sobre ela (Lívio, 2006). Além disso, as medidas da pirâmide apresentadas não são precisas e sofrem alterações de um texto para outro. Portanto, pode-se concluir que não existe nada que comprove a existência da razão áurea e nem o conhecimento da mesma na construção da Grande Pirâmide.

O número  $\varphi$  não foi o único a ser estudado na piramidologia. A teoria que o número  $\pi$  estava presente na construção, surgiu por volta de 1838 em “Carta de Alexandria sobre a evidência da implicação prática da quadratura do círculo, na configuração da grande pirâmide do Egito” (H. Agnew, 1838), onde afirmavam que a razão entre a circunferência da base pela altura da pirâmide era de  $2\pi$ . No Papiro Rhind é informado que os egípcios do século XVII a.C. tinham um valor aproximado de  $\pi$  e por isso, se colocarmos as duas teorias apresentadas,  $\pi$  teria vantagem, já que não existe nenhuma comprovação do conhecimento do número  $\varphi$  naquela época.

Se observarmos a teoria de Kurt Mendelssohn em “The Riddle of the Pyramids” (1975), a maneira com que os egípcios faziam suas medições, usando cordas e nós, é bem provável que medidas próximas de  $\pi$  foram utilizadas, semelhante ao que fazemos hoje com o compasso, prendendo uma das pontas, girando a outra ponta numa extensão fixa ao redor da ponta presa. Outra possibilidade, é o uso de tambores rolantes com um cúbito de diâmetro para medir o comprimento da base da pirâmide, logo os cúbitos de altura estariam diretamente relacionados com  $\pi$  dos “cúbitos rodados” para fazer a base da pirâmide. A aproximação que os egípcios tinham de  $\pi$  aparece no problema 50 do Papiro Rhind, que tenta determinar a área de um campo em formato circular. A solução de Ahmes sugere: "Tire 1/9 do diâmetro e eleve ao quadrado o resto." Logo os egípcios aproximavam  $\pi$  por  $256/81 = 3,16049\dots$  algo bastante próximo de 3,14159... (Lívio, 2006), o que nos leva a crer que propositalmente, ou não, a presença de  $\pi$  é plausível.

Alguns egiptólogos afirmam a existência de fatos que comprovam que não existe presença nem da Razão Áurea, nem de  $\pi$  (nem mesmo acidentalmente). Essa teoria é baseada no conceito do *seked*, uma medida de inclinação dos lados da pirâmide, ou melhor dizendo quanto era necessário mover horizontalmente para cada cúbito vertical. Cálculos como este estão presentes no Papiro Rhind, e estão descritos no livro de Richard J. Gillings, *A Matemática no tempo dos faraós*. Se observarmos as nove teorias examinadas por Roger Herz-Fischler em seu artigo publicado no periódico *Cruces Mathematicorum* em 1978, a teoria do *seked* é provavelmente a correta, porém, sintase livre para acreditar em qualquer uma das teorias.

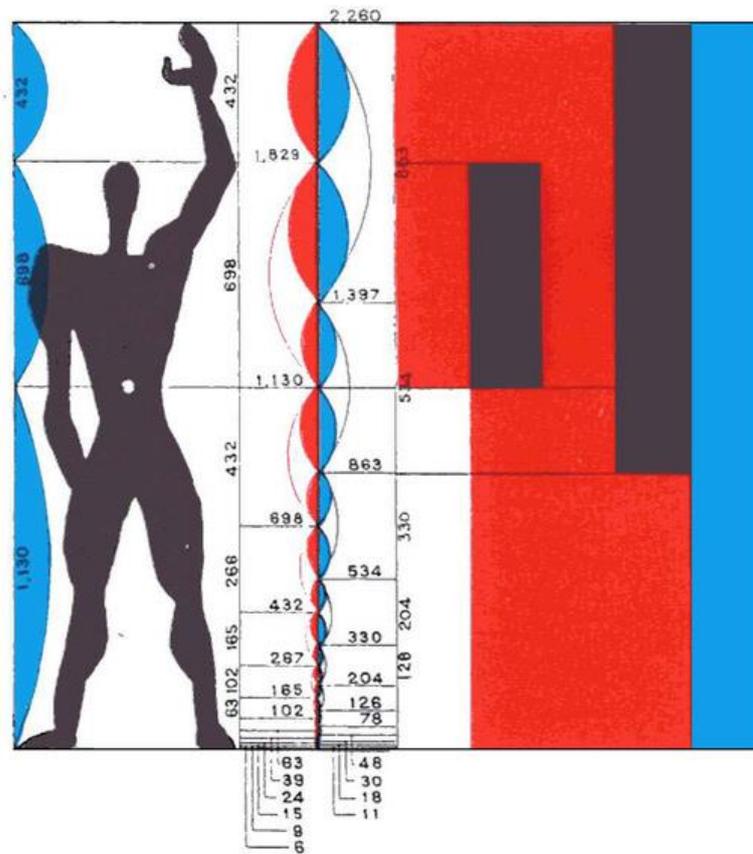
#### 4.4 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NO CORPO HUMANO

Quando se trata do corpo humano, algumas pessoas acreditam que certas partes seguem a proporção áurea. Um exemplo frequentemente citado é a relação entre a altura total de uma pessoa e a altura do umbigo. De acordo com essa interpretação, a distância entre o topo da cabeça e o umbigo é aproximadamente 1,618 vezes menor do que a distância do umbigo até os pés, e por consequência, a altura total da cabeça aos pés é 1,618 vezes maior que a distância do umbigo até os pés.

O arquiteto, urbanista, naturalizado francês, Charles-Edouard Jeanneret-Gris, conhecido pelo pseudônimo de Le Corbusier buscou uma proporção padronizada nomeada por ele de “Modulor” (figura 54). Segundo John Summerson em “A linguagem clássica da arquitetura” (1982), “[...] nos primeiros anos da Segunda Guerra Mundial, Le Corbusier criou o sistema que se chamou Modulor. Modulor é uma palavra composta a partir de *module*, ou seja, unidade de medida, e *section d’or* ou *secção de ouro*”. A suposição era que Modulor fornecia uma proporção aproximada do corpo humano que poderia ser aplicada na arquitetura e na mecânica. Segundo Lívio (2006),

Um homem medindo seis pés (cerca de 1,83 m) parecendo um pouco com o familiar logotipo do “homem do Michelin”, com seu braço erguido (até uma altura de 2,26 m, foi inserido em um quadrado. A razão entre a altura do homem (183 cm) e a altura de umbigo (no ponto médio de 113 cm) foi escolhida precisamente em uma razão áurea. A altura total (dos pés até o braço levantado) também estava dividida em uma razão áurea (em 140 cm e 86 cm) no nível do pulso de um braço solto para baixo. Os dois quocientes (113/70) e (140/86) foram subdivididos em dimensões ainda menores de acordo com a série de Fibonacci. Na versão final do Modulor, duas escalas de dimensões de Fibonacci interespiralantes foram, portanto, introduzidas (“as séries vermelha e azul”) (LÍVIO, 2006, p. 198)

Figura 54. Modulor



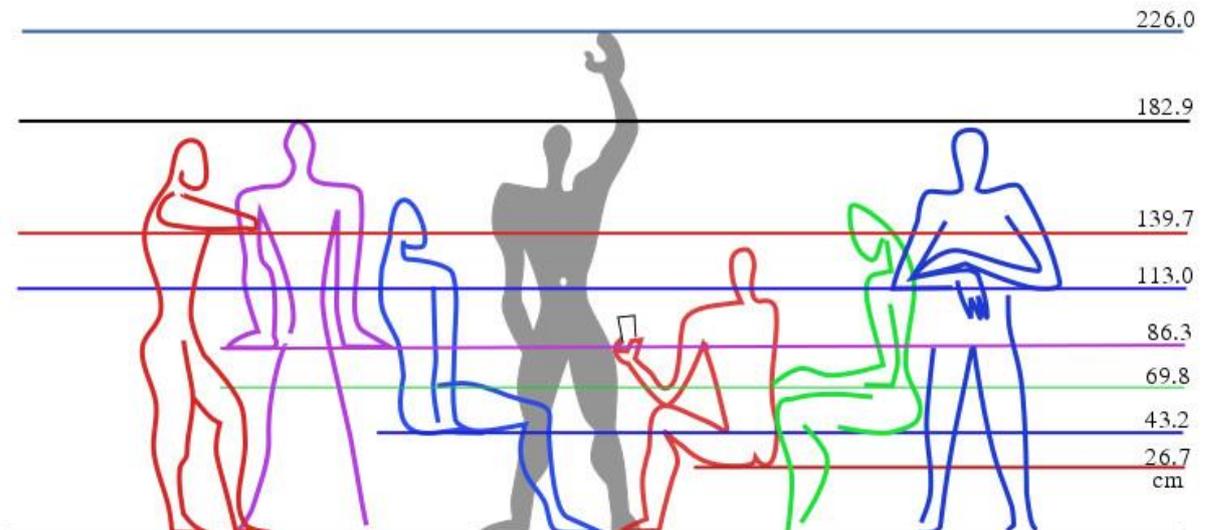
Fonte: Arellano, Mónica, 2019.

Embora Le Corbusier tivesse opiniões completamente céticas com relação a proporção áurea antes de 1927, foi em 1931, após a publicação de Matila Ghyka - *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (a estética de proporções na natureza e nas artes), que, publicamente, esta opinião mudou.

[...] Le Corbusier podia apreciar a ânsia pitagórica por uma harmonia alcançada por razões de números. Ele escreveu: “Mais que esses trinta anos passados, a seiva da matemática fluíu através das veias do meu trabalho, seja como arquiteto, seja como pintor, pois a música está sempre presente dentro de mim.” (LÍVIO, 2006, p. 197)

Em 1948, Le Corbusier lançou o Modulor, e em 1955 o Modulor II, que trazia proporções semelhantes a figura 55.

Figura 55. Medidas de O Modulor 2



Fonte: Arellano, Mónica, 2019.

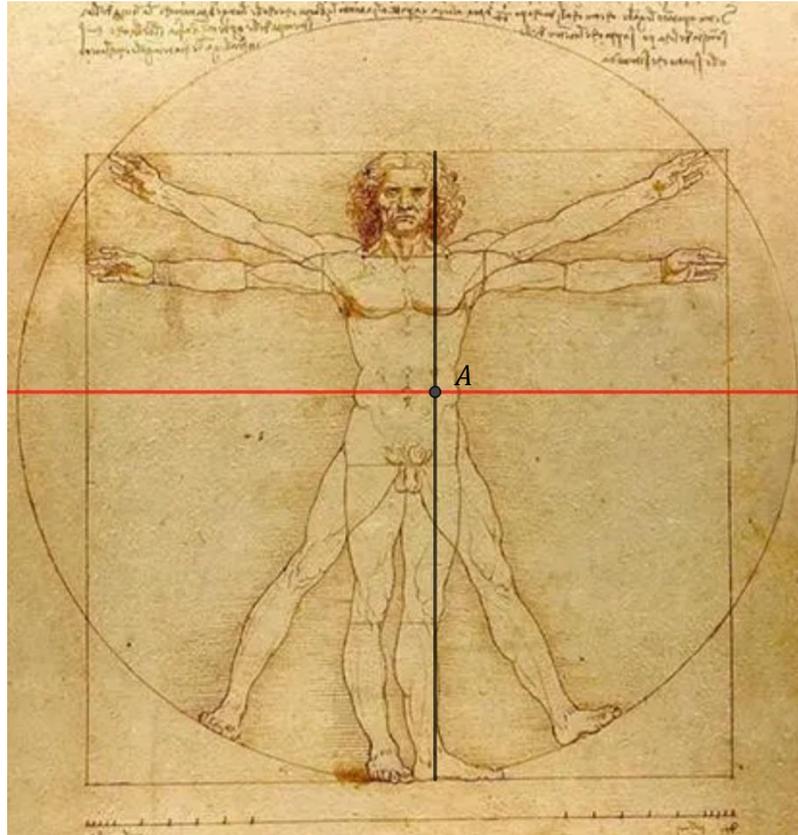
A ideia é que o Modulor daria proporções harmoniosas a tudo, maçanetas, assentos, gabinetes, espaços urbanos, edifícios, voltando-se para uma ideia de padronização na arquitetura. No entanto, as medidas apresentadas pelo Modulor não remetem a proporções exatas aplicáveis a todo ser humano.

Leonardo Da Vinci é citado por utilizar a proporção áurea em suas obras, dentre elas o Homem Vitruviano (figura 56). Entretanto, o físico Donald E. Simanek em seu artigo “Fibonacci Flim-Flam” (2010), explica que na relação entre o comprimento dos pés e a cabeça e dos pés até o umbigo, apresentada previamente, há pequenas discrepâncias na medida. Logo, se fosse do interesse de Da Vinci, com pequenas alterações ele poderia encaixar o umbigo na proporção áurea, mas não o fez. Ao que parece, ele apenas queria relacionar o homem a um círculo e a um quadrado. Também não foi deixada no texto nenhuma menção do número  $\varphi$ , ou da proporção áurea, o que nos leva a crer que não era essa a intenção.

Na figura 56 a linha preta inserida está dividida na proporção áurea pelo ponto A, e a linha vermelha fica perpendicular à linha preta, que passa um pouco acima do umbigo, evidenciando que não há proporção áurea nestas medidas.

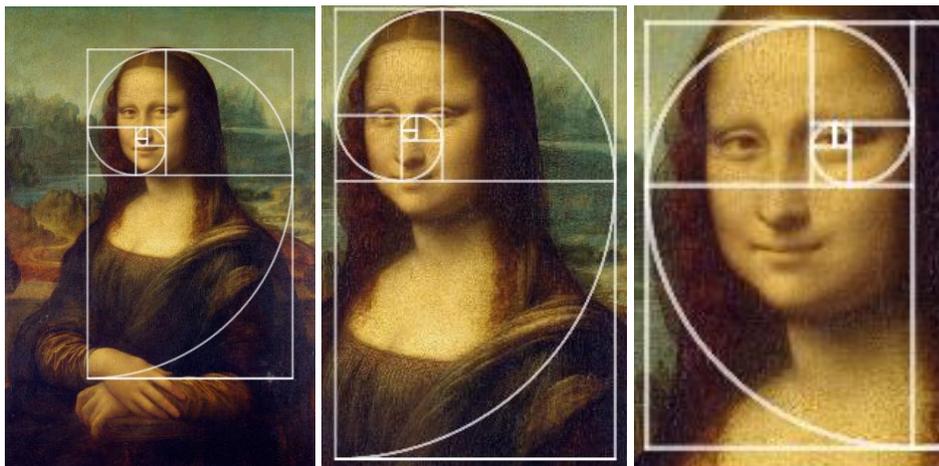
A “Mona Lisa”, tela pintada entre 1503 e 1505 pelo artista Leonardo Da Vinci, é alvo da procura pela Proporção Áurea. Basta tentar encontrar algum enquadramento da proporção áurea no quadro que você encontrará. Alguns exemplos estão na figura 57, fato este que não prova que foi colocado ali propositalmente.

Figura 56. O Homem Vitruviano



Fonte: DA VINCI, Leonardo, 1490, 35 x 26 cm. (Editado)

Figura 57. Proporção Áurea na Mona Lisa



Fonte: DA VINCI, Leonardo. **Mona Lisa**. 77x53 cm.



A partir de Sérusier, temos também o escultor italiano Jacques Lipchitz com seus traços cubistas. Mais à frente, no século XX, temos Le Corbusier inserindo a Razão Áurea em sua obra *O Modulor* (publicada entre 1943 e 1950), e na arquitetura de Paris. Albrech Durer, pintor alemão, também demonstrava ter conhecimento sobre a razão áurea. Seu conhecimento matemático pode ser observado na gravura *Melancolia* (1514) (figura 58) onde observa-se alguns sólidos geométricos, um compasso, entre outros.

Embora a proporção áurea seja vista em muitas obras de arte famosas e estruturas arquitetônicas notáveis, não pode ser tida como o único elemento que as torna grandes. A criatividade, a expressão pessoal e outros princípios de design também desempenham papéis fundamentais.

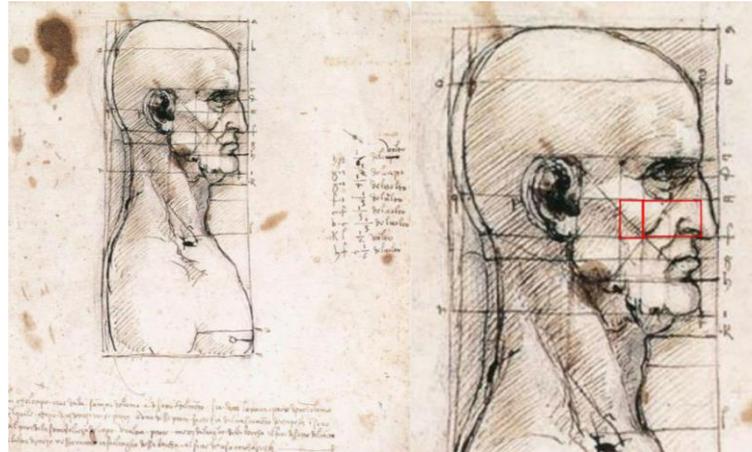
#### 4.5.1 Leonardo Da Vinci

Leonardo di Ser Piero da Vinci (1452-1519), nascido na Itália, foi um polímata, que teve seu grande destaque como pintor, mas se manteve grandioso nas mais diversas áreas, como engenharia, anatomia, música e botânica. Da Vinci é conhecido por suas obras, sendo as mais famosas *Mona Lisa* e *A Última Ceia*.

[...] Leonardo encontrou Pacioli pela primeira vez em 1496, na Corte de Milão. O septuagésimo primeiro capítulo de *Divina* (o final da primeira parte do livro) foi, nas palavras de Pacioli: "Terminado nesse dia de 14 de dezembro, em Milão, em nosso tranqüilo ano de 1497." A primeira versão (e aquela cuja autenticidade é certa) da "Virgem dos Rochedos" foi, portanto, concluída cerca de dez anos antes que Leonardo tivesse a oportunidade de ouvir diretamente de fonte segura sobre a "proporção divina". Assim, a afirmação de que Leonardo usava a Razão Áurea na "Virgem dos Rochedos" significa acreditar que o artista adotou essa proporção antes mesmo de começar sua colaboração com Pacioli. Embora isto não seja impossível, não existe evidência que sustente esta interpretação. (LÍVIO, 2006, p. 188)

Isso significa que não há provas que Da Vinci usou a Proporção Áurea em suas obras? Em 1490 vemos Da Vinci relacionar as feições humanas a retângulos (figura 59), e encontramos até mesmo alguns retângulos próximos do Retângulo Áureo em seus esboços, mas feitos de modo grosseiro, o que nos leva a crer que não foi algo proposital, vemos que as linhas formadas não são retas como as feitas com régua.

Figura 59. Cabeça masculina no perfil com proporções.

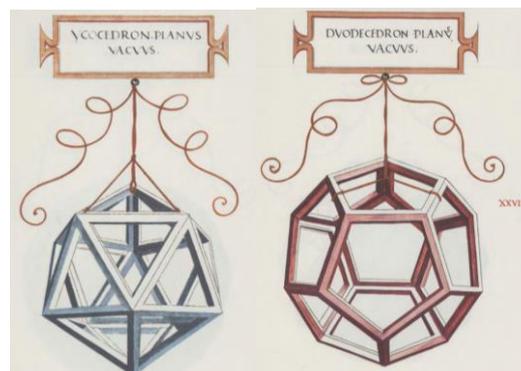


Fonte: DA VINCI, Leonardo. 280x222 cm. (Editado)

Nas obras feitas após 1496, temos: A última ceia (pintada entre 1493 e 1498), Salvator Mundi (possivelmente pintado entre os anos 1490 e 1500), Mona Lisa ou La Gioconda (pintado entre 1503 e 1506), A Virgem e o Menino com Santa Ana (foi executada em 1510), São João Batista (entre os anos 1513 e 1516), destas, apenas Mona Lisa é apontada por conter as Proporções Áureas, mas são tantas as especulações e controvérsias sobre esse enquadramento, que tornam fáceis as conclusões precipitadas.

Mas há ilustrações (figura 60) que podemos afirmar com certeza que a proporção foi intencional. Elas estão no livro *Divina proportione* (1509), escrito por Luca Pacioli, e ilustrado por Leonardo da Vinci. O título do livro se refere a Divina Proporção e suas aplicações, o escritor creditava a Leonardo Fibonacci como a fonte para a matemática contida no livro, e acreditava que a Razão Áurea era a manifestação do próprio Deus.

Figura 60. (a) Esqueleto do Icosaedro Regular (b) Esqueleto do Dodecaedro Regular



Fonte: Pacioli, 1509.

#### 4.5.2 Salvador Dalí

Salvador Dalí (1904-1989) foi um proeminente pintor surrealista espanhol conhecido por suas obras excêntricas e imaginativas. Nasceu em Figueres, na Catalunha, Espanha. O repertório artístico de Dalí incluía pintura, escultura, fotografia, cinema, entre outros. Algumas de suas obras mais famosas incluem "A Persistência da Memória", que apresenta os icônicos relógios derretendo, e "Os Elefantes".

Na obra A Última Ceia, ou Sacramento da Última Ceia (figura 61), Dalí retrata Jesus e seus doze discípulos celebrando a mais famosa Santa Ceia. Jesus parece translúcido, pois não apresenta sombra e aponta para cima, onde vemos um dodecaedro e uma figura humana de braços abertos, podendo representar o Espírito Santo, ou até mesmo Deus. Todos os discípulos estão com a cabeça abaixada de maneira que seus rostos não são vistos, um deles tem uma toga amarela, diferente dos outros, podendo ser Judas ou Pedro. A pintura tem dimensões 166,7 x 267 cm, e apresenta padrões de simetria, como se estivesse espelhada. Dalí pintou sua obra com uma influência particularmente forte de Leonardo Da Vinci, que pintou A última ceia, e seguiu alguns princípios matemáticos derivados de seu estudo do Renascimento. Apesar de alguns autores afirmarem o uso da Razão Áurea no quadro, não afirmaremos neste trabalho que ele o fez, mas existem fortes indícios. O autor das obras conta que “Querida materializar o máximo de instantâneo luminoso e pitagórico baseado na comunhão celestial do número doze: doze horas do dia – doze meses do ano – doze pentágonos do dodecaedro – doze signos do zodíaco ao redor do sol – doze apóstolos em torno de Cristo”.

Figura 61. Sacramento da Última Ceia

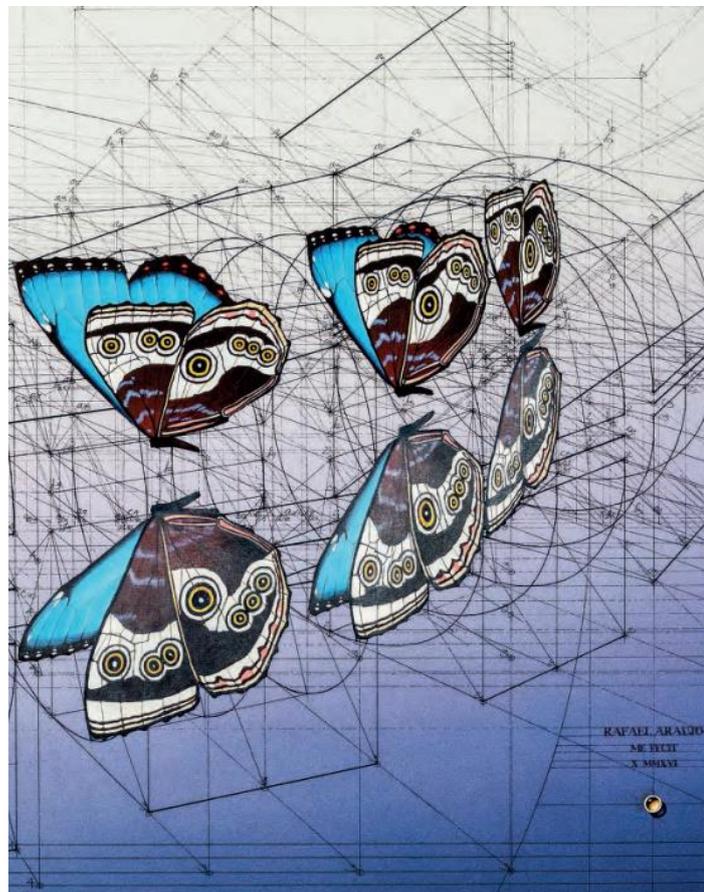


Fonte: DALÍ, Salvador, 1955, 166,7 x 267 cm.

### 4.5.3 Rafael Araujo

Nascido em Caracas na Venezuela, o arquiteto e ilustrador Rafael Araujo, produz ilustrações a mais de 40 anos usando lápis, compasso, régua e transferidor. De maneira a fugir do acabamento digital, de acordo com o autor em uma entrevista para o site ArchDaily “Cada desenho é um algoritmo exato, no qual a graça do design depende da qualidade e dos parâmetros utilizados”. Rafael Araujo publicou um livro chamado Golden Ratio Coloring Book, e também produziu ilustrações para o livro *The Golden Ratio* (Meisner, 2018), como a figura 62.

Figura 62. The Golden Ratio



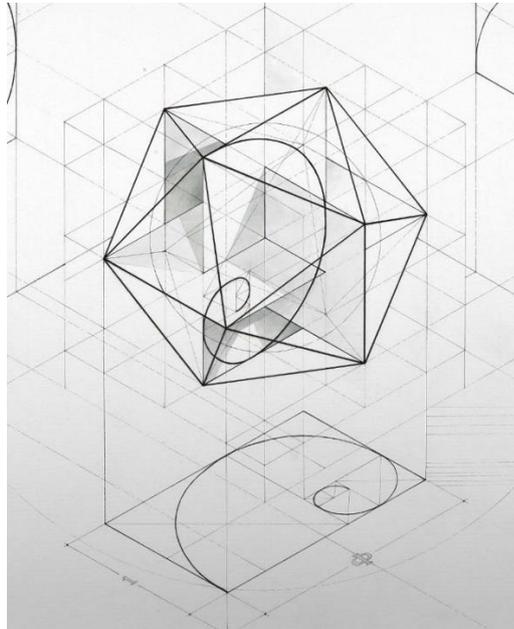
Fonte: Meisner (2018, p. 2)

Na Figura 63 podemos notar fortemente a presença da Razão Áurea em seu processo de construção, tendo a Espiral Áurea em perspectiva logo abaixo de um Icosaedro, contendo as medidas  $1 \times \varphi$ , e o mesmo retângulo aparece de outras perspectivas dentro do sólido.

Nestes casos podemos assumidamente dizer que o artista faz uso de Proporções Áureas, mas também não evita outros tipos de proporções, sempre buscando aplicá-las com harmonia.

Podemos ver em alguns trabalhos a presença de outras ferramentas como por exemplo, a Espiral Logarítmica.

Figura 63. Icosahedron



Fonte: Araujo, Rafael (2022).

## 4.6 A PRESENÇA DA RAZÃO ÁUREA NA NATUREZA

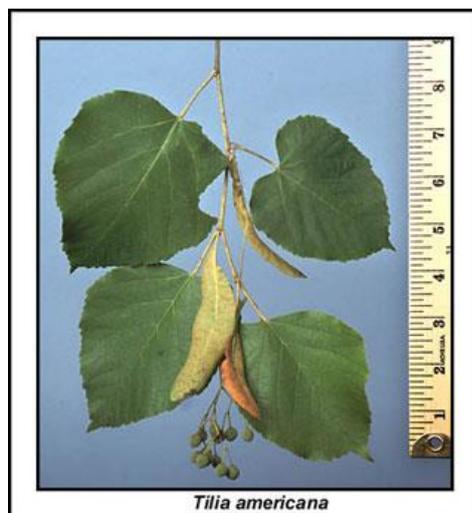
### 4.6.1 A filotaxia das plantas

Muitas vezes, as plantas exibem padrões de filotaxia (padrão de distribuição das folhas ao longo do caule) que se aproximam da sequência de Fibonacci. Algumas plantas têm folhas dispostas de tal forma, que o número de voltas completas em torno do caule para chegar a uma folha sucessiva segue a sequência de Fibonacci. Isso acontece, pois as folhas não sobrepõem umas às outras, já que isso impediria as folhas de baixo de receberem a luz do Sol e a umidade.

Nas tílias americanas, as folhas aparecem geralmente em dois lados opostos (correspondendo a metade de uma volta em torno dos ramos), o que é conhecido como razão filotáxica  $\frac{1}{2}$  (figura 64). Na amoreira, a passagem de uma folha para a seguinte envolve um terço de uma volta (razão filotáxica  $\frac{1}{3}$ ). A macieira tem folhas a cada  $\frac{2}{5}$ , a pereira tem folhas a

cada  $\frac{3}{8}$ . Todas as frações acima são razões de membros “alternados” da Sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), ou seja  $\frac{F_n}{F_{n+2}}$  (Lívio, 2006).

Figura 64. Tilia Americana



Fonte: Larry Korhnak, University of Florida

Uma das descobertas dos irmãos Bravais, em 1837 (Lívio, 2006), foi que novas folhas avançam mais ou menos no mesmo ângulo em volta da planta, e que este ângulo (conhecido como o ângulo de divergência) em geral é próximo de 137,5 graus (que as vezes é chamado de Ângulo Áureo), e acaba sendo próximo, também, da razão  $8/21$ . Nesse tipo de planta vemos as folhas bem distribuídas de forma que não sobrepõem umas às outras, como as plantas rosuladas (figura 65). Se fizermos  $\frac{360}{\phi}$  obtemos aproximadamente 222,5 graus que é o ângulo replementar de 137,5 graus, se o ângulo de divergência fosse por exemplo, um múltiplo de 360, as folhas começariam a se sobrepor, deixando partes vazias sem nenhuma folha.

Figura 65. (a) Bromélia Imperial, (b) Echeveria Tobarensis



Fonte: Roberto Verzo, Juliana Yata

Outra presença da Sequência de Fibonacci está nos *parastichies* de pinha e no Abacaxi, como aponta Lívio (2006, p. 131), quando diz que

Os abacaxis de fato fornecem uma manifestação verdadeiramente bela de filotaxia baseada em Fibonacci. Cada camada hexagonal na superfície de um abacaxi é parte de três espirais diferentes. A maioria dos abacaxis tem cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação crescente na sua superfície. Todos esses são números de Fibonacci.

Um exemplo clássico da presença da Sequência de Fibonacci, é o girassol. Se observarmos os girassóis, nota-se que as sementes estão dispostas em espirais. Isso é considerado uma forma de otimização para as plantas maximizarem a exposição ao sol e a eficiência na embalagem das sementes. A contagem dessas espirais em cada direção muitas vezes resulta em números de Fibonacci. Geralmente as espirais tem em um sentido 34 espirais, e em outro 55 espirais, podendo variar com quocientes de números de espirais de 89/55 e 144/89. Todos esses números são razões dos Números de Fibonacci com termos imediatamente anteriores (Lívio, 2006).

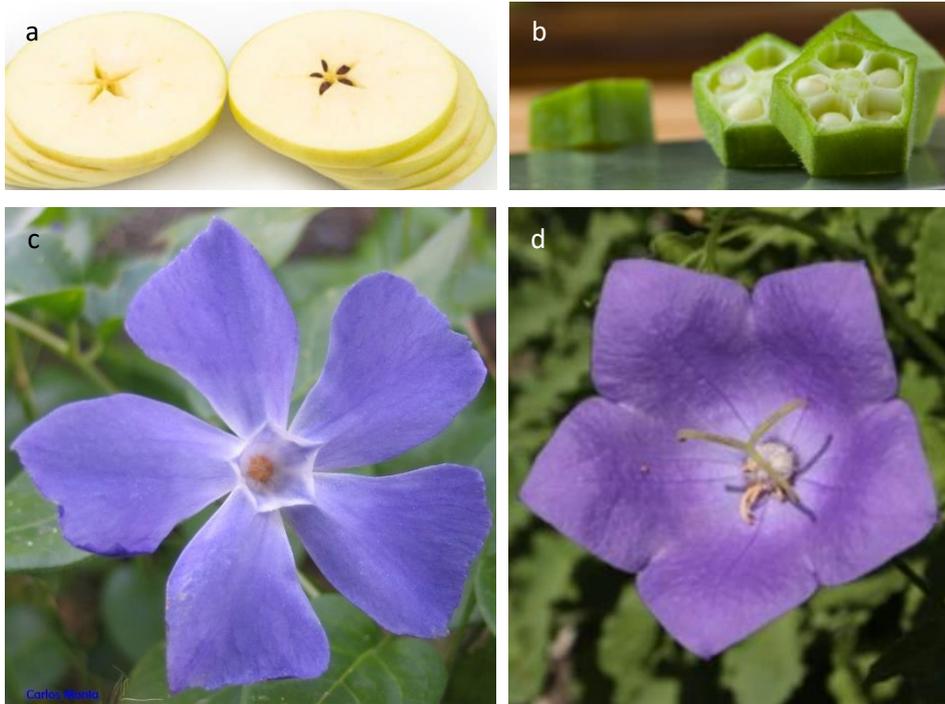
No caso das pétalas de algumas flores, como lírios que apresentam três pétalas, rosas que em sua maioria apresentam cinco, rosáceas que algumas vezes apresentam oito e algumas margaridas com treze pétalas, o número de pétalas corresponde a um número da Sequência de Fibonacci. Um exemplo pode ser encontrado na *Dryas octopétala*, uma rosácea, também chamada de dríade-de-oito-pétalas (figura 66) cuja flor apresenta oito pétalas, o que é pouco comum em rosáceas.

Figura 66. *Dryas octopetala*



Vemos também algumas flores de 5 pétalas, frutas, verduras e legumes de padrão pentagonal serem relacionadas ao pentagrama e ao pentágono, formas que facilmente podem ser relacionadas ao número  $\varphi$ .

Figura 67. (a) Maçã (b) Quiabo (c) Pervinca (d) Campanula carpatica.



Fonte: iStock, Aala images, Carlos Manta, Rukki Media

A correlação entre o número de pétalas ser um número da Sequência de Fibonacci não é uma regra rígida, e existem muitas outras razões pelas quais o número de pétalas pode variar. Fatores genéticos, ambientais e evolutivos também desempenham um papel na determinação do número de pétalas de uma flor.

Em resumo, embora haja uma associação ocasional entre o número de pétalas de algumas flores e a Sequência de Fibonacci, não é uma regra universal e existem muitas exceções.

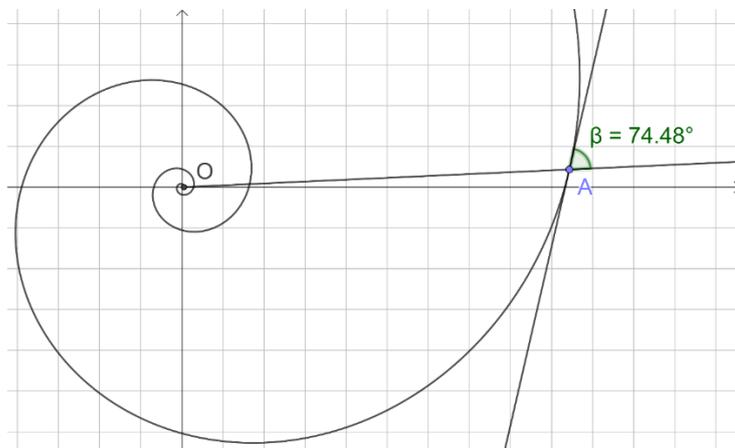
#### 4.6.2 O padrão espiralado da concha de Náutilo e das Galaxias

“A concha do molusco Nautilus é, talvez, o exemplo mais famoso nesse assunto, mas hoje sabemos que ela não é uma espiral áurea, como já mostrado por Clemente Falbo no artigo ‘Espirais da concha do mar’ publicado na Science. A confusão ocorre porque

ela se encaixa na categoria de espiral logarítmica, na qual a espiral áurea também se encontra”. (PECK, 2007)

Caso tentemos enquadrar a concha de Náutilo na espiral áurea, é notado que raramente o formato ficará perto da espiral. Isso acontece pois o Náutilo cresce de acordo com o conceito da espiral logarítmica, como a espiral apresenta na figura 68. A espiral áurea é uma espiral logarítmica, mas nem toda espiral logarítmica é uma espiral áurea.

Figura 68. Espiral Logarítmica

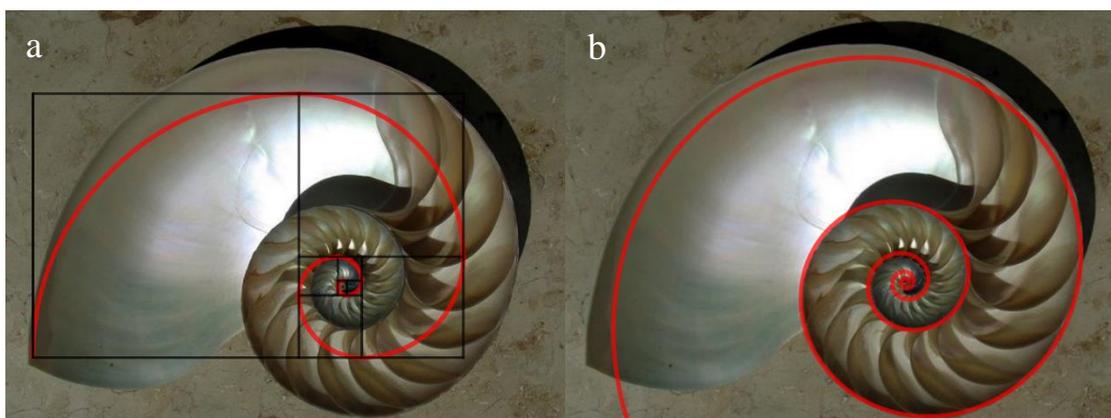


Fonte: Acervo pessoal.

A Espiral Logarítmica foi estudada por Jacob Bernoulli (1655-1705) que a chamou de *Spira Mirabilis* (Espiral Maravilhosa). O nome Espiral Logarítmica é usado pois a sua expressão com coordenadas polares é dada por  $r(\theta) = R \cdot e^{\theta \cdot \cot(\alpha)}$ , onde  $R$  é o raio associado a  $\theta = 0$  e  $\alpha$  é a amplitude da espiral. Se a amplitude for  $90^\circ$  a espiral será um círculo. No exemplo da figura 68 acima  $\alpha = 74,5^\circ$  e  $R = 0,1$ , a espiral é por vezes chamada de Espiral Equiangular, isso se dá pelo fato de que quanto mais afastada do ponto central  $O$ , mais próximo o ângulo formado entre a tangente à curva com a reta de origem em  $O$  ficará da amplitude, ângulo representado como  $\beta$  na figura 68, se tornando aos poucos um ângulo constante.

É comum vermos imagens semelhantes a figura 69 (a) serem usadas como exemplo da Espiral Áurea na natureza, mas observe como a concha se adequa melhor ao formato da Espiral Logarítmica, observe este exemplo da espiral logarítmica encontrado sem muito esforço, com  $\alpha = 80,72^\circ$  e  $R = 0,1$  na figura 69 (b).

Figura 69. (a) Espiral Áurea na concha de Náutilo (b) Espiral Logarítmica na concha de Náutilo.

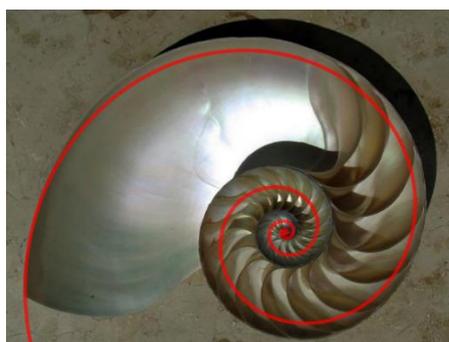


Fonte: Chris 73 (Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported license)/ Wikipedia's Mathematics Portal) (Editado)

Utilizando de malabarismo numérico, poderíamos dizer até que a expressão que melhor se adequa a concha seria (figura 70):

$$r(\theta) = \frac{1}{\varphi^8} \cdot \varphi^{\frac{\theta}{\varphi}}$$

Figura 70. Concha de Náutilo com espiral do autor.



Fonte: Chris 73 (Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported license)/ Wikipedia's Mathematics Portal) (Editado)

O fato é que a beleza da Razão Áurea está na simplicidade. A expressão acima não nos permite ver beleza por se tratar de algo tão complexo, que não mantém certa naturalidade.

A formação e evolução das galáxias espirais (figura 71) ainda são áreas ativas de pesquisa na astronomia. Acredita-se que os braços espirais sejam regiões de formação estelar,

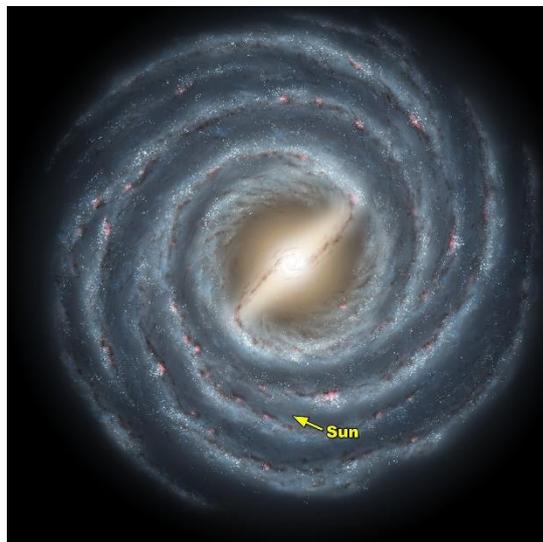
onde novas estrelas nascem a partir do gás interestelar. A influência da gravidade, campos magnéticos e interações com outras galáxias também desempenham papéis importantes na determinação da estrutura final de uma galáxia espiral.

Figura 71. Galáxia NGC 6744



Fonte: NASA.

Figura 72. Via Láctea



Fonte: NASA.

Essa característica espiral das galáxias está presente na nossa galáxia, a Via Láctea (figura 72), e é uma das muitas formas fascinantes que astrônomos estudam para entender a natureza e a evolução do universo. É comum vermos essa característica ser relacionada a Espiral Áurea, onde geralmente a semelhança não existe. Assim, é mais provável encontrar um padrão da Espiral Logarítmica que se encaixe.

## **5 ABORDAGEM DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO FUNDAMENTAL E DISCUSSÕES**

No contexto educacional fundamentado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a aplicação da Sequência de Fibonacci no Ensino Fundamental Anos Finais, faz complemento às habilidades e objetos de conhecimento previstos. É esperado que o aluno solucione problemas envolvendo o conjunto dos números naturais, inteiros e racionais. Entretanto, é previsto também a abordagem de números irracionais: “Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais”. (BRASIL, p. 269)

De acordo com a BNCC, componente curricular matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, prevê de acordo com a EF07MA14 que “Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura” (BRASIL, 2018, p. 307). Ademais, a habilidade EF07MA15, consiste em “Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.” (BRASIL, 2018, p. 307).

Em uma abordagem ao componente curricular matemática do oitavo ano do Ensino Fundamental, é possível localizar a habilidade EF08MA11, que se resume em “Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes” (BRASIL, 2018, p. 313).

Ao inserir a Sequência de Fibonacci no âmbito escolar, é importante que o professor se atente inicialmente à apresentação da sequência e suas propriedades de formação. Após o primeiro momento, é importante que o professor faça uso da história matemática visto que, por D’Ambrósio (2009, p. 29) ela é “[...] fundamental para se perceber como as teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas [...]”.

No contexto histórico-matemático, o tema abordado possui características que remetem ao eurocentrismo, referindo-se à tendência de atribuir uma ênfase excessiva à contribuição europeia para o desenvolvimento da matemática, enquanto subestima ou até mesmo ignora as contribuições de outras culturas e civilizações. Historicamente, muitos currículos de matemática e livros didáticos têm sido dominados por uma narrativa eurocêntrica, que destaca os feitos de matemáticos europeus como Descartes, Newton, Euler e outros, enquanto negligencia as realizações de matemáticos de outras partes do mundo.

Em contrapartida ao eurocentrismo, a matemática é uma disciplina global, e várias civilizações antigas e contemporâneas, como os egípcios, babilônios, indianos, chineses, árabes e muitas culturas indígenas ao redor do mundo, fizeram e fazem contribuições significativas para o desenvolvimento da matemática. Essas contribuições incluem avanços em áreas como álgebra, geometria, trigonometria, cálculo, e teoria dos números.

Superar o eurocentrismo na matemática requer reconhecer e valorizar as contribuições matemáticas de diferentes culturas e civilizações. O ambiente escolar se faz excelente ponto de partida para a abordagem e discussão do tema. Assim, incorporar essas perspectivas diversas nos currículos escolares e materiais de ensino seria de grande importância. Isso não apenas oferece uma visão mais precisa e inclusiva da história da matemática, mas também ajuda a promover a diversidade e a equidade no ensino e na aprendizagem da disciplina.

Por fim, inclusão da Sequência de Fibonacci no ambiente escolar, pode ser vista a partir de inúmeras perspectivas, apresentando ao professor possibilidades de interdisciplinaridade, além de abordar a aprendizagem ativa e o uso de mídias digitais em sala de aula. Por se tratar de uma sequência famosa, existem histórias, especulações, teorias e estudos que buscam aplicá-la nos mais diversos aspectos da vida cotidiana, arte e história.

Ao conhecer toda a história por trás desta tão enigmática sequência, e algumas especulações a respeito de sua relação com a proporção áurea e o número  $\varphi$ , espera-se que o aluno desenvolva um olhar crítico investigativo, participando ativamente do estudo. Assim, o professor deve conduzir discussões em sala de aula, como escreve Franco (2021):

[...] indagar o aluno se o conteúdo teórico apresentado foi útil, o que ele pode levar para o seu cotidiano; se consegue visualizar a matemática com mais facilidade nos objetos, principalmente a proporção áurea. E assim, o professor poderá fazer qualquer outro questionamento durante a discussão. Este deve ser o momento da reflexão dos resultados que podem ser alcançados com a proposta. (FRANCO, 2021, p. 20)

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando abordamos o tema Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci, procurando sua presença na natureza de maneira natural, notamos que são muitos os casos onde elas não se encaixam. Em alguns casos isolados é possível notar sua presença, mas nem sempre de maneira perfeita, o que traz a necessidade de uma certa tolerância na hora de tratar os dados.

O que podemos afirmar é que a razão áurea se apresenta de maneira muito mais filosófica, histórica e artística. O que torna seu estudo mais curioso, é a narrativa misteriosa de desvendar o que é real e onde ela está presente.

Ao discutir a proporção áurea, é essencial ter em mente alguns cuidados para garantir uma compreensão precisa e evitar equívocos, assim, é importante contextualizar corretamente o conceito da proporção áurea. Ela pode estar presente na natureza, arte, arquitetura e até mesmo em alguns aspectos da anatomia humana, o que não significa que sempre estará. Embora a proporção áurea seja fascinante e amplamente discutida, é importante evitar generalizações exageradas ou aplicação inadequada do conceito. Nem todos os elementos na natureza ou na arte seguem estritamente essa proporção. Proporções que resultam no número 1,6 podem aparecer frequentemente, número este que está bem próximo do estudado neste trabalho.

Devemos reconhecer a importância histórica da proporção áurea em várias culturas e seu papel na estética e no design ao longo do tempo. Ao abordar o tema, seja em um trabalho acadêmico, seja na pesquisa, seja em sala de aula, é importante apresentar exemplos relevantes para facilitar a compreensão do tema, e ter em mente que a criatividade muitas vezes transcende as limitações de qualquer fórmula matemática. No contexto escolar, a aplicação da Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea, incluindo seu aspecto histórico, apresenta grande contribuição à comunidade acadêmica e a formação de indivíduos com pensamento crítico e olhar investigativo.

Existem diferentes pontos de vista sobre a aplicação e relevância da proporção áurea em diferentes contextos, portanto, estar disposto a discutir e considerar diferentes perspectivas de um mesmo tema, ou aspecto, é importante. Por fim, pode-se afirmar que a proporção áurea é uma ferramenta conceitual e matemática valiosa, mas não é o único princípio estético e conceitual a ser considerado.

## REFERÊNCIAS

AGNEW, H. C. **A Letter from Alexandria on the Evidence of the Practical Application of the Quadrature of the Circle: In the Configuration of the Great Pyramids of Gizeh.** R. and JE Taylor, 1838.

ARAUJO, Rafael. **GOLDEN RATIO/ICOSAHEDRON.** 22 set. 2022. Instagram: @rafaelaraujo2222. Disponível em: <https://www.instagram.com/p/Ciz8UMAO2vE/>. Acesso em: 27 dez. 2023.

BERTATO, F. M. **A "De Divina Proportione" de Luca Pacioli:** tradução anotada e comentada. Campinas: UNICAMP, 2010.

BRAMLY, Serge. **Leonardo da Vinci.** 1452-1519 (Trad. Henrique de Araújo Mesquita) Rio de Janeiro: Imago, v. 3, 1989.

CASTRO, Eduardo Andrade Barbosa de. **Spira Mirabilis: tradução comentada de um conto de ficção científica de Samuel R. Delany.** 2021.

CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A. C. **Matemática discreta.** SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

FRANCO, Amaury da Costa. **A PROPORÇÃO ÁUREA NA FOTOGRAFIA:** uma proposta de ensino. 2021. 29 f. Monografia (Especialização) - Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, Campos Belos, 2021.

GARDNER, Martin. **Fads and Fallacies in the Name of Science.** Courier Corporation, 1957.

GAZALÉ, Midhat J. **Gnomon: From pharaohs to fractals.** Princeton University Press, 1999.

GOPAL, T. V. **Logical Foundations for Reasoning in Cyber-Physical Systems.** Oriental Journal of Computer Science and Technology, v. 16, n. 1, p. 01-11, 2023.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. 298 p.

HOSCH, William L. **"Pascal's triangle".** Encyclopedia Britannica, 23 Dec. 2023, <https://www.britannica.com/science/Pascals-triangle>. Acessado em 24 abril de 2024.

HUNTLEY, H.E. **A Divina Proporção:** um ensaio sobre a beleza na matemática. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

IMBROISI, Margaret; MARTINS, Simone. **A Última Ceia, Salvador Dalí. História das Artes,** 2024. Disponível em: <<https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/a-ultima-ceia-salvador-dali/>>. Acesso em 01 Jan 2024.

LIMA, Larissa Ariel. Número de ouro – O que é, representação e contribuição. **Segredos do Mundo**, Goiás, 12 de abril de 2020. Disponível em: <https://segredosdomundo.r7.com/numero-de-ouro/>. Acesso em: 16 de dezembro de 2023.

LÍVIO, Mario. **Razão Áurea**: a história de Fi, um número surpreendente. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MARKOWSKY, George. Misconceptions about the Golden Ratio. **The College Mathematics Journal**, p. 2-19, 01 jan. 1992.

MEISNER, Gary B. **The Golden Ratio**: the divine beauty of mathematics. Nova York: Race Point Publishing, 2018.

MENDELSSOHN, Kurt. **The Riddle of the Pyramids**. Westport: Praeger Publishers, 1975.

PACIOLI, L. **De Divina Proportione**. Em F. Bertato, A "**De Divina Proportione**", de Luca Pacioli: tradução anotada e comentada. Campinas: UNICAMP, 2010.

PAPPAS, Theoni. **The JOY of MATHEMATICS**: discovering mathematics all around you. San Carlos, CA: Wide World Publishing, 1993.

PECK, Akkana. **The Fibonacci Spiral and the Nautilus**. 2007. Disponível em: <<http://www.shallowky.com/blog/science/fibonutilus.html>>. Acesso em 31 dez. 2023.

SIGLER, Laurence. **Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation**. Springer Science & Business Media, 2003.

SIMANEK, Donald. **Fibonacci Flim-Flam**. 2010. Disponível em: <<https://webcitation.org/5nDtkyeKW?url=http://www.lhup.edu/~dsimanek/pseudo/fibonacc.htm>>. Acesso em 25 dez. 2023.

SINGH, P. **The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India**. *Historia Mathematica*, v. 12, n. 3, p. 229-244, 1985.

SUMMERSON, John. **A linguagem clássica da arquitetura**. Martins Fontes, 1982.