

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ



Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT



ANA CLAUDIA HOTT PAIVA RICARDO

FRACTAIS NO ENSINO DE POLINÔMIOS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre(a) em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Maurício Reis e Silva Júnior - UFSJ (Orientador)

Prof. José Eloy Ottoni - UFSJ

Prof. Rogério Casagrande - UFJF

Ouro Branco
fevereiro 2024

FRACTAIS NO ENSINO DE POLINÔMIOS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA

Ana Claudia Hott Paiva Ricardo ¹

Maurício Reis e Silva Júnior ²

Gilcélia Regiane de Souza ³

Resumo:

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma introdução dos Fractais no Ensino Médio, com enfoque na abordagem prática de conceitos matemáticos, principalmente aqueles relacionados às operações com polinômios, com a exploração de processos iterativos, fórmulas gerais e algoritmos e estímulo ao uso de tabelas. Essa iniciativa objetiva fornecer uma perspectiva visual e recursiva para a compreensão de padrões, fundamentando-se na propriedade de autossimilaridade dos fractais. Adaptada aos requisitos da BNCC, essa abordagem prática é um exemplo de estratégia pedagógica inovadora na aprendizagem matemática.

Palavras-chave:

Fractais, Polinômios, autossimilaridade, recursividade

Abstract: This work aims to present an introduction on fractals at high school level, with focus the practical approach of mathematical concepts, specially those related to polynomial operations, exploring iterative process, general formulae and algorithms and incentive to the use of tables. This initiative aims to provide a visual and recursive perspective for the understanding of patterns, based on the self-similarity property of fractals. Adapted to the requirements of the BNCC, this practical approach is an example of an innovative pedagogical strategy in mathematical learning.

Keywords:

Fractals, Polinomials, self-similarity, recursivity

1 Introdução

No cenário atual da educação matemática, destaca-se uma crescente busca por estratégias pedagógicas inovadoras que visam tornar as aulas mais envolventes e eficazes no processo de ensino-aprendizagem. Uma possível estratégia pedagógica é a utilização de processos ilustrativos, que

¹ Aluna de Mestrado do PROFMAT, Turma 2020, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP), anaclaudiahott72@gmail.com

² Professor Orientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, mreis@ufs.edu.br

³ Professor(a) Coorientador(a), Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, gilcelia@ufs.edu.br

possam surgir como resultado da aplicação de conceitos sendo estudados pelos alunos em sala de aula. Nessa linha de atuação, um tópico matemático de grande apelo visual seriam os fractais. Élvia Mureb afirma[1], que:

A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, [...] e estímulo ao uso de tabelas .

Nesse contexto, o presente trabalho apresenta uma proposta de introduzir os fractais como ferramenta visual, especialmente focalizada na abordagem prática de conceitos matemáticos, notadamente aqueles relacionados às operações com polinômios. Para isso é necessário que a introdução de fractais no ambiente educacional também forneça uma perspectiva visual e recursiva para a compreensão de padrões matemáticos complexos. A propriedade de autossimilaridade dos fractais pode ser usada para ilustrar um processo algébrico recursivo com polinômios.

A proposta pedagógica consiste na utilização da recursividade do binômio de Newton e seu apelo visual ilustrado pelo Triângulo de Pascal. Pretende-se com isso mostrar como um processo recursivo resulta na propriedade de autossimilaridade de uma estrutura fractal. A atividade proposta não se limita à ampliação da compreensão dos fundamentos matemáticos, mas se estende à consolidação de habilidades nas operações com polinômios, melhorando a percepção dos estudantes sobre a recursividade e a estruturação dos fractais. A abordagem prática incentiva os alunos a investigarem os padrões visuais nos coeficientes do Triângulo de Pascal, culminando na identificação de um padrão análogo ao fractal.

Segundo Margarida Milani[2], quando há trabalhos e pesquisas realizadas utilizando fractais no ensino médio e fundamental, pode-se abordar alguns conceitos que auxiliam os estudantes a aprender melhor e desenvolver habilidades que podem ser abordados destacando, (sic) “... Intuição, Lógica, razão, Dedução, Fórmulas, Processos Iterativos (algoritmos), Padrões Numéricos [...] entre outros.”

A atividade proposta não se limita a atender aos requisitos curriculares, mas alinha-se à filosofia da Base Nacional de Comum Curricular (BNCC) ao promover uma abordagem que vai além da teoria, incentivando os alunos a explorarem conceitos como intuição, lógica, dedução e processos iterativos.

Dessa forma, a introdução aos fractais no ensino de polinômios, embora desafiadora, representa uma oportunidade inovadora para promover uma educação mais dinâmica e motivadora. Ao estimular a aplicação prática de conceitos matemáticos, essa abordagem visa não apenas aprimorar a compreensão dos alunos, mas também prepará-los para enfrentar desafios e desenvolver habilidades essenciais para o século XXI.

2 Fractais

2.1 Fractais definidos por Autossimilaridade

Uma definição rigorosa de Fractais pode ser demasiadamente complexa para o escopo desse trabalho. Como alternativa, será apresentada uma definição menos formal, que facilitará o entendimento dos conceitos e processos a serem explorados.

Definição 2.1.1 (Autossimilaridade). *A representação gráfica de um conjunto de pontos possui autossimilaridade se características globais relacionadas à dispersão espacial e propriedades estatísticas desses pontos são as mesmas em regiões que representam subconjuntos desses pontos.*

Basicamente, essa definição de autossimilaridade pretende trazer a ideia de que a ampliação gráfica, *zoom*, de uma região de uma figura autossimilar mostrará uma imagem que pode não ser idêntica à figura original, mas apresenta estruturas e elementos gráficos com disposições semelhantes. A Figura 1 mostra a autossimilaridade em um gráfico gerado por computador, se assemelhando a uma folha.

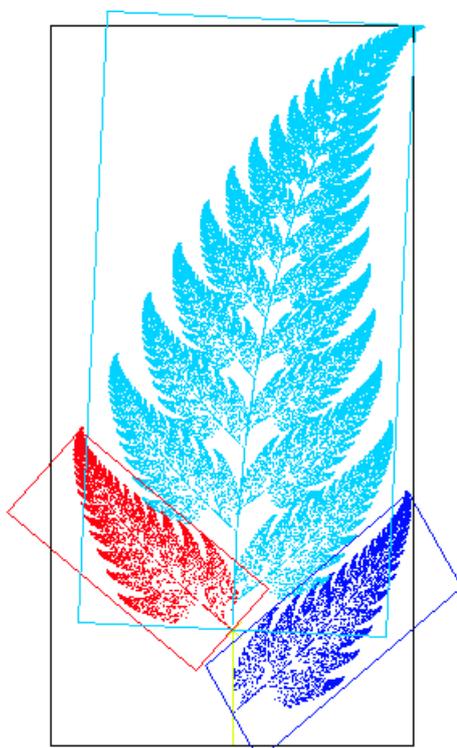


Figura 1 – Folha Autossimilar. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>

Também no escopo desse trabalho, a seguinte definição de fractal será usada:

Definição 2.1.2 (Figura Fractal). *A representação gráfica de um conjunto de pontos que apresenta autossimilaridade é chamada de Fractal.*

A produção da autossimilaridade nos fractais muitas vezes está associada a processos recursivos ou repetitivos. Ao realizar iterações de um processo específico, como por exemplo, ao dividir uma imagem em partes menores e aplicando um processo recursivo a essas partes, pode-se gerar a autossimilaridade. Cada divisão subsequente mantém características semelhantes à estrutura original, resultando em uma repetição de padrões em diferentes níveis de ampliação[3].

A autossimilaridade[2] pode ser observada em diversos aspectos naturais, desde o desenvolvimento das plantas até a anatomia humana, como ramificações dos rios, a estrutura vegetal e até mesmo em padrões aparentemente caóticos, como os gráficos de algumas funções matemáticas.

Essa propriedade dos fractais possibilita sua classificação com base nos métodos de formação[4]. Os fractais podem ser agrupados em diferentes categorias, incluindo aquelas definidas por relações de

recorrência, como exemplificado pelo Conjunto de Mandelbrot. Além disso, há os fractais aleatórios, gerados por processos estocásticos, introduzindo uma dimensão de aleatoriedade em contraste com os determinísticos. Outra categoria é representada pelos fractais provenientes do ponto fixo de um sistema dinâmico de passo discreto.

2.2 Processos Recursivos e Autossimilaridade

Definição 2.2.1 (Processo Recursivo). *Um processo é considerado recursivo se a iteração em um dado passo depende apenas dos resultados dos passos anteriores submetidos aos mesmos processos que o geraram.*

Um bom exemplo de processo recursivo é aquele utilizado para se definir a sequência de Fibonacci.

Definição 2.2.2 (Sequência de Fibonacci). *A sequência de números inteiros denominada Sequência de Fibonacci apresenta seus dois primeiros termos como sendo 1 e 1 e os termos seguintes são obtidos pela soma dos dois termos anteriores.*

Mediante o processo recursivo descrito acima, a seguinte sequência é obtida: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$

A série de Fibonacci é uma série recursiva por que cada termo na sequência é calculado em função de seus antecessores imediatos. Esse padrão recursivo aparece em diversos aspectos da natureza e da tecnologia, e inclusive no próximo exemplo de processo recursivo, que é a Máquina Copiadora de Múltiplas Reduções (MCMR), pois essa máquina opera por meio de transformações geométricas e iterações retroalimentadas para produzir imagens.

2.3 Máquina Copiadora de Múltiplas Reduções

A Máquina Copiadora de Múltiplas Reduções é uma máquina conceitual que serve como um exemplo de processo recursivo capaz de gerar fractais a partir das três operações: reduções, translações e rotações da imagem original[5]. Essa máquina possui um sistema complexo que opera com base em princípios de transformações geométricas (translação, redução e rotação) e retroalimentação iterativa para gerar imagens, e possui uma série de lentes de redução, cada uma delas responsável por reduzir e dividir as mesmas imagens várias vezes. A figura 2 mostra uma imagem que foi gerada pela MCMR, onde aparecem seis imagens, sendo a primeira formada por três retângulos e a última será um formato de um fractal.

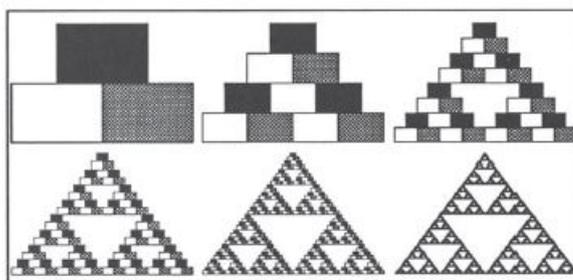


Figura 2 – Processo de redução de 3 retângulos, finalizando com um fractal (canto inferior direito), reproduzida de [5].

Todas as imagens da figura 2 foram obtidas mediante cópia, redução e translação. O processo começa com uma imagem original de três retângulos. Dessa imagem original serão feitas três imagens reduzidas (etapa de redução).

Essas novas imagens reduzidas serão posicionadas no formato de um triângulo (etapa de translação), gerando a primeira iteração da imagem original, formando uma imagem com 9 retângulos. Assim se iniciará um novo processo recursivo, utilizando a imagem com 9 retângulos. Dessa imagem serão feitas três imagens reduzidas (etapa de redução). Esses 9 retângulos menores serão posicionadas no formato de um triângulo(etapa de translação), gerando a segunda iteração da imagem original, formando uma imagem com 27 retângulos. Essa imagem com 27 retângulos menores passará pelo mesmo processo recurssivo (gerar 3 cópias reduzidas e colocá -las no formato do triângulo), gerando uma imagem com 81 retângulos. Cada nova imagem gerada, passará pelo mesmo processo com as etapas de redução e translação, gerando uma série de iterações.

Essa série de iterações da MCMR continua até que as cópias resultantes se aproximem de um padrão ou estrutura geométrica específica, como um fractal. Observa-se que uma máquina recursiva pode produzir figuras fractais quando a autossimilaridade é intrínseca ao processo, como foi no exemplo que gerou a figura 2.

3 Fractais Clássicos

Os fractais, estruturas matemáticas complexas com propriedades de autossimilaridade em várias escalas, representam um campo fascinante na matemática moderna. Este capítulo explora três exemplos notáveis de fractais: o conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch, seguindo o exposto em [5]. Ao observar e analisar suas construções, propriedades e conexões com conceitos matemáticos fundamentais, busca-se entender essas estruturas fractais e suas características.

3.1 Conjunto de Mandelbrot

O matemático Benoît Mandelbrot é conhecido como o pioneiro no estudo e descrição dos fractais nos anos 1970. Ele usou o termo "fractal" em 1975 para descrever formas geométricas fragmentadas e irregulares que se repetem em diferentes escalas, que podem surgir da representação de processos em diversas áreas como biologia, física, astronomia e finanças.

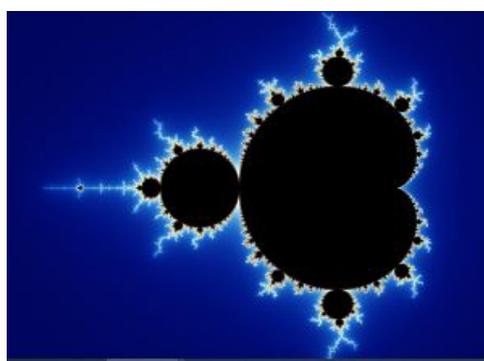


Figura 3 – Representação do conjunto de Mandelbrot no plano complexo. Figura retirada de <https://revistapesquisa.fapesp.br/o-pai-dos-fractais/>.

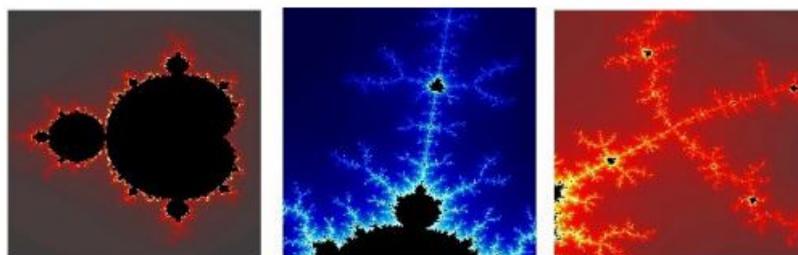


Figura 4 – Autossimilaridade observar as bordas do Conjunto de Mandelbrot, reproduzido de [6].

O conjunto de Mandelbrot é um conjunto de pontos num plano complexo que possuem uma propriedade específica relacionada à sua estabilidade em sistema dinâmico, como será detalhado a seguir. A representação gráfica desse conjunto no plano complexo, gerada por computador, é uma figura fractal que exhibe círculos ornamentados com extremidades espinhosas, espirais e filamentos, ilustrando a complexidade infinita dos fractais, como pode ser visto na figura 3. A autossimilaridade dessa figura fractal pode ser vista na figura 4.

Para definir o conjunto de Mandelbrot, é necessário definir o que é um mapa recursivo e o que é a órbita de um ponto por um mapa.

Definição 3.1.1 (Mapa Recursivo). *Um mapa recursivo é uma função definida em um domínio cuja imagem está contida nesse domínio, de modo que elementos da imagem podem ser usados de maneira a fazer um processo recursivo, adaptado de [?, ?]*

Definição 3.1.2 (Órbita de um ponto por um mapa). *A sequência de elementos $\{e_i\}$ de um mapa recursivo f obtida a partir de um ponto inicial e_0 é chamada órbita desse elemento e_0 por f , adaptado de [?, ?].*

Por exemplo, a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2 + 2i$ pode ser usada como mapa recursivo. Aplicando recursivamente f ao ponto 0, obtém-se a seguinte sequência numérica: $\{2i, -4 + 2i, 12 - 14i, \dots\}$. Nesse exemplo, f é o mapa recursivo e a sequência numérica obtida é a órbita da origem por f . Outro exemplo: a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^3 + 1$ também pode ser usada como mapa recursivo. Aplicando a recursivamente f ao ponto $1 - 2i$, obtém-se a seguinte sequência numérica: $\{-15 - 16i, 8145 - 7304i, \dots\}$.

O conjunto de Mandelbrot é uma coleção de pontos no plano complexo. Esses pontos são obtidos a partir de um mapa recursivo definido pela família de funções complexas a um parâmetro c , dada por: $f_c(z) = z^2 + c$. A seguinte definição para o conjunto de Madelbrot foi adaptada de [7]:

Definição 3.1.3 (Conjunto de Madelbrot). *Seja f_c a família de funções complexas a um parâmetro c dada por $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$. Se a órbita da origem por uma função f_c permanece sempre limitada com módulo menor ou igual a 2, então o parâmetro c dessa função é um elemento do conjunto de Mandelbrot:*

$$M = \{c \in \mathbb{C} | f_c^n(0) \leq 2\}. \quad (1)$$

Uma fórmula prática para a órbita da origem por uma função f_c pode ser obtida:

$$z_0 = f_c(0) = c \quad (2)$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (3)$$

Por essa fórmula, o conjunto de Mandelbrot pode ser definido como os valores de z_0 para os quais $\max\{|z_n|\}_{n=0}^{\infty} \leq 2$. O processo de construção do conjunto consiste em aplicar essa fórmula repetidamente para cada ponto c no plano complexo. Inicia o processo de verificação para cada um dos valores de c , e se a sequência resultante z_n permanecer limitada, pode se dizer que esse ponto pertence ao Conjunto de Mandelbrot[8].

A seguir segue um exemplo de ponto que pertence ao Conjunto de Mandelbrot, fazendo uma simulação para verificar se o ponto $c = -1$ pertence ao Conjunto de Mandelbrot. Aplicando a recorrência $z_{n+1} = z_n^2 + c$, sendo $z_0 = 0$, obtém-se os seguintes valores:

$$z_1 = z_0^2 - 1 = -1$$

$$z_2 = z_1^2 - 1 = 0$$

$$z_3 = z_2^2 - 1 = -1$$

$$z_4 = z_3^2 - 1 = 0$$

...

Como observa-se que para os pontos, $c = -1$, os valores de z_n ficam variando entre 0 e -1, nesse caso, esse ponto pertence ao conjunto de Mandelbrot. Dessa forma, de acordo com a figura 3, os pontos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot serão coloridos de preto.

A seguir, serão apresentados alguns pontos para verificar se pertencem ao conjunto de Mandelbrot:

- Para $c = 2$, os valores para z_n tendem ao infinito:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 + 2 = 2 \\ z_2 &= z_1^2 + 2 = 6 \\ z_3 &= z_2^2 + 2 = 38 \\ z_4 &= z_3^2 + 2 = 1446 \\ &\dots \end{aligned}$$

Nesse caso, os pontos não pertencem ao conjunto de Mandelbrot, pois o valor de z_n tende ao infinito.

- Para $c = 0.1i$, os valores para z_n ficam limitados, ou seja:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 + 0,1i = 0,1i \\ z_2 &= z_1^2 + 0,1i = 0,002i - 0,0099 \\ z_3 &= z_2^2 + 0,1i = -0,0000396i + 0,00009401 \\ &\dots \end{aligned}$$

Como o valor de z_n não tende ao infinito, os pontos pertencem ao conjunto de Mandelbrot.

- Para $c = 2 + i$, os valores para z_n tendem ao infinito, ou seja:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 + 2 + i = i + 2 \\ z_2 &= z_1^2 + 2 + i = 5i + 5 \\ z_3 &= z_2^2 + 2 + i = 51i + 12 \\ z_4 &= z_3^2 + 2 + i = 205i - 2595 \dots \end{aligned}$$

Nesse caso, c não pertence ao conjunto de Mandelbrot, pois o valor de z_n tende ao infinito

3.2 Conjunto de Cantor

A definição do Conjunto de Cantor, pode ser vista em [9]:

Definição 3.2.1 (Conjunto de Cantor). *O conjunto de Cantor K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo: retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.*

3.2.1 Construção do conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é gerado através de um intervalo inicial, por exemplo, o intervalo de 0 a 1 na reta numérica. A Figura 5 mostra as primeiras iterações feitas para construção do Conjunto de Cantor. Na primeira iteração, deve-se dividir esse intervalo em 3 partes iguais, e retirar-se o intervalo do meio. Na próxima iteração, sobram dois intervalos, onde cada um desses intervalos, será dividido em 3 partes iguais, e retira-se o intervalo do meio de cada. Assim, sobram 4 intervalos, esses serão divididos em 3 partes iguais, retirando o intervalo do meio de cada um. Esse processo, dividir em 3 partes iguais e retirar intervalo do meio, será feito infinitamente[5].

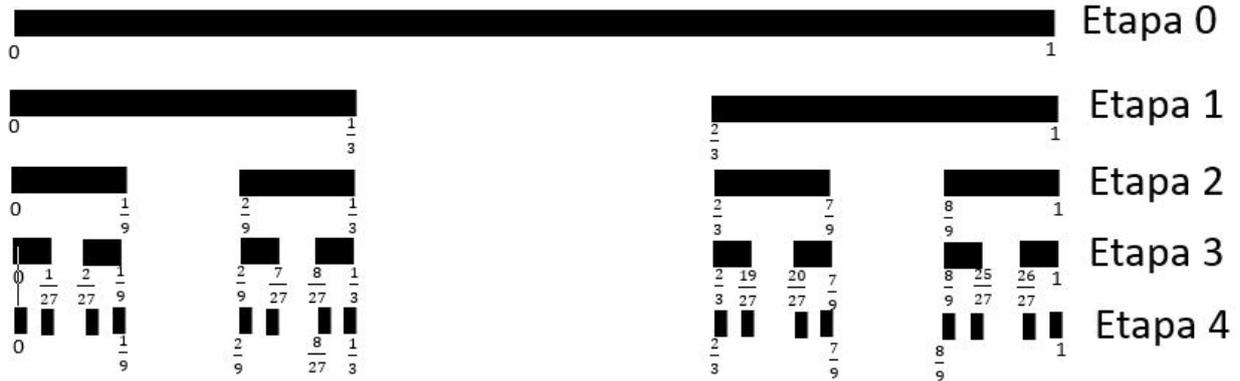


Figura 5 – Construção do Conjunto de Cantor.

A representação do conjunto de Cantor K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido retirando os intervalos abertos, do seguinte modo:

A ETAPA 1 mostrada na Figura 5 do conjunto de Cantor, pode ser representada pela união dos intervalos fechados:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Na ETAPA 2, é retirado o terço médio aberto de cada um destes intervalos. Sobra então:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Se os intervalos abertos forem chamados de $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, sendo que esses intervalos foram retirados ao longo do processo, o conjunto de Cantor K , pode ser interpretado como a união abaixo:

$$K = [0, 1] - \cup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

Pode-se verificar que o conjunto de Cantor é um conjunto fechado, resultado da união dos fechados $[0, 1]$ e $(\mathbb{R} - \cup I_n)$.

Outro processo de identificar as partes da construção do Conjunto de Cantor pode ser feito da seguinte forma: no início, após a primeira etapa, as duas partes criadas são nomeadas como ‘E’ e ‘D’, representando esquerda e direita. Após a segunda etapa, cada uma dessas partes é subdividida novamente: a parte ‘E’ da etapa inicial é dividida em ‘EE’ e ‘ED’, e o mesmo acontece com a parte ‘D’. Isso continua gerando um padrão de etiquetas como ‘EE’, ‘ED’, ‘DE’, ‘DD’ e assim por diante[5].



Figura 6 – Construção do Conjunto de Cantor.

A Figura 6, mencionada no texto, resume essas três primeiras etapas da construção do Conjunto de Cantor. A ideia é que cada etiqueta, composta por uma sequência de letras, representa uma parte específica do conjunto. Para gerar a escrita dessas letras, a convenção de leitura da esquerda para a direita, assim como se faz com os números no sistema decimal. Isso significa que cada letra tem uma posição específica na sequência, de forma semelhante aos dígitos decimais em um número, EEE EED EDE EDD DEE DED DDE DDD. Essas etiquetas de sequências finitas identificam situações específicas na construção do Conjunto de Cantor. Quanto mais longa a sequência de letras, mais avançada será a etapa de iteração e menor o intervalo representado. A natureza fractal do Conjunto de Cantor está baseada na sua construção iterativa, onde a retirada dos intervalos gera outro intervalo que se assemelha ao original em várias escalas. Essa autossimilaridade é uma característica fundamental dos fractais. Portanto, observando o Conjunto de Cantor, a existência de diferentes tamanhos de infinito é nítida, mas também mostra autos similares dos fractais na matemática, onde a reprodução de padrões semelhantes ocorre em diferentes níveis de escala, um dos principais fundamentos dos fractais.

3.3 Curva de Koch

Helge von Koch foi um renomado matemático sueco que se destacou em sua carreira como professor e pesquisador na área de matemática pura. Em 1904, ele introduziu a Curva de Koch como uma maneira de ilustrar conceitos matemáticos complexos de forma acessível, conforme [3].

3.4 Construção da Curva de Koch

A curva de Koch possui autossimilaridade e por isso é considerada um fractal. Sua construção é feita a partir de um processo recursivo, como descrito a seguir. A partir de uma linha reta, a curva de Koch é gerada dividindo-se cada segmento em três partes iguais, substituindo o terço do meio por um triângulo equilátero e removendo sua base. A Figura 7 mostra três etapas, a primeira etapa que aparece na figura mostra a reta já dividida e com o triângulo equilátero sem base. Na próxima etapa, cada lado desse triângulo é dividido em três partes, e é substituído o terço do meio por um triângulo equilátero e removendo sua base e isso acontece também em outros dois segmentos. Na última etapa, o mesmo processo será feito em todos os segmentos[3]. A cada iteração, cada parte da curva se assemelha a uma versão reduzida da curva completa, mantendo a mesma forma básica, mas com mais detalhes e complexidade. Isso significa que, ao ampliar diferentes proporções da curva, observamos padrões semelhantes, repetidos em diferentes escalas, característica marcante

dos fractais.

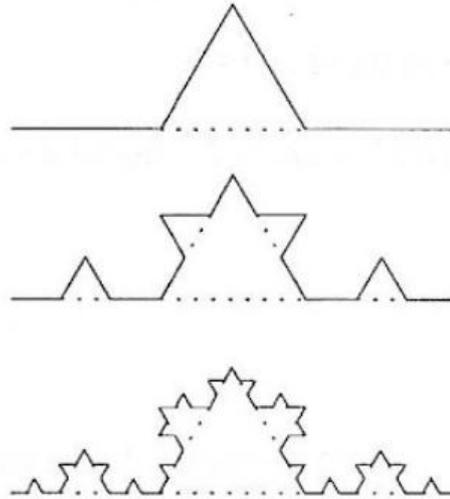


Figura 7 – Construção da Curva de Koch.

Analisando a Curva de Koch, é possível observar que em cada iteração, as características da curva, como o número de segmentos, o comprimento de cada segmento e o comprimento total da curva, podem ser registradas e acompanhadas ao longo do processo iterativo. Observe a Tabela 1:

Tabela 1 – Fórmulas do Comprimento da Curva de Koch

ITERAÇÕES	QUANT. DE SEG.	COMPR. DOS SEG.	COMPR. TOTAL DA CURVA
0	1	$\frac{\ell}{3^0} = \ell$	$\ell = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \ell$
1	4	$\frac{\ell}{3^1} = \frac{\ell}{3} \ell$	$4\frac{\ell}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1 \ell$
2	$4 \cdot 4 = 4^2$	$\frac{\ell}{3 \cdot 3} = \frac{\ell}{3^2}$	$4 \cdot 4 \frac{\ell}{3^2} = 4^2 \frac{\ell}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \ell$
3	4^3	$\frac{\ell}{3^3}$	$4 \cdot 4 \cdot 4 \frac{\ell}{3^3} = 4^3 \frac{\ell}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \ell$
4	4^4	$\frac{\ell}{3^4}$	$4^4 \frac{\ell}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \ell$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	4^n	$\frac{\ell}{3^n}$	$4^n \frac{\ell}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$

Por indução matemática pode-se provar a generalização do comprimento total da Curva de Koch é:

$$C_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \ell, \text{ para } n \geq 0$$

3.5 Floco de Neve de Koch

De acordo com [3], ao construir sobre cada lado de um polígono regular a sua curva de Koch, é gerado o que é chamado de Ilha de Koch. Desse modo, surge a Ilha de Koch, também conhecida como Floco de Neve de Koch.

3.5.1 Construção Floco de Neve de Koch

O Floco de Neve de Koch é uma estrutura fractal que se desenvolve a partir de um processo iterativo aplicado a um triângulo equilátero. Esse processo consiste em aplicar a curva de Koch em cada lado do triângulo original. Na Figura 8, pode-se observar a construção do Floco de Neve de Koch. Essa construção é feita da seguinte forma: começa com um triângulo equilátero e em cada lado desse triângulo será feita o processo de construção da curva de Koch, ou seja, dividindo-se cada lado em três partes iguais, substituindo o terço do meio por um triângulo equilátero e removendo sua base. Assim, em um dos lados do triângulo equilátero original aparece uma detalhe da Curva de Koch. Já na próxima etapa, em cada um dos segmentos que surgiram será feito o processo de construção da curva de Koch infinitamente, originando o Floco de Neve de Koch.

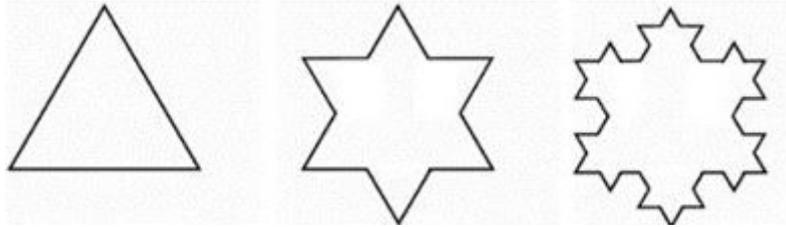


Figura 8 – Construção do Floco de Neve de Koch.

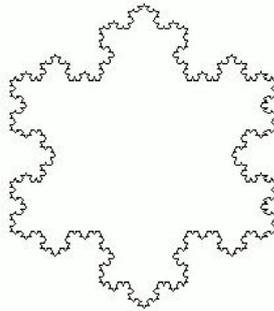


Figura 9 – Floco de Neve de Koch.

Analisando, o Floco de Neve de Koch observando somente um lado do primeiro triângulo equilátero, será acrescentado um triângulo equilátero menor de área Δ , e que equivale a um $1/9$ da área inicial A , isso pode ser melhor entendido observando a Figura 10[3]. Essa iteração será feita em todos os quatro segmentos da lado observado. Assim, na última imagem da Figura 10 mostra que foram acrescentados quatro pequenos triângulos equiláteros com áreas iguais a $4 \cdot \frac{1}{9}$ da área da figura anterior, ou seja, então obtendo $\Delta + 4 \cdot \frac{1}{9}\Delta$,

A Figura 10 foi baseada na ilustração de [3] para ser confeccionada. Na próxima etapa, de acordo com a última imagem da Figura 10, foram gerados 16 segmentos menores. Assim, será acrescentado uma área de 16 triângulos equiláteros e cada um deles com uma área de $1/9$ da área anterior. Então teremos uma área de:

$$\text{Área} = \Delta + 4 \cdot \frac{1}{9}\Delta + 16 \cdot \frac{1}{9}\Delta = \Delta + 4 \cdot \frac{1}{9}\Delta + 4^2 \cdot \frac{1}{9}\Delta = \Delta + \frac{4}{9}\Delta + \frac{4^2}{9}\Delta$$

A medida que as iterações da acontecem infinitamente, a área do Floco de Neve de Koch poderá ser escrita da seguinte maneira [3]):

$$\text{Área} = \left[1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9} + \frac{4^3}{9} + \frac{4^4}{9} + \dots + \frac{4^n}{9} + \dots \right] \Delta$$

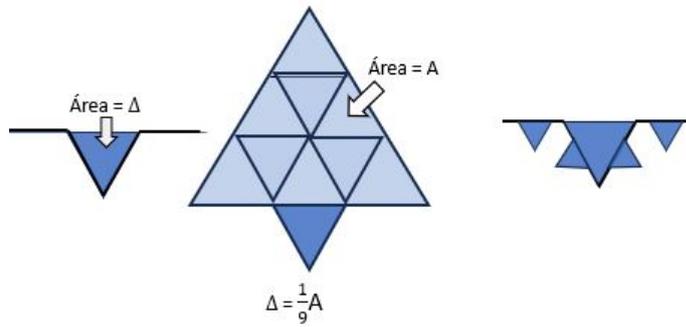


Figura 10 – Visualização das áreas do Floco de Neve

Analisando a área encontrada percebe-se que a mesma é a soma de uma progressão geométrica infinita de razão $4/9$ multiplicada por Δ , assim a área poderá ser escrita:

$$\text{Área} = \frac{1}{1 - 4/9} \cdot \Delta = \frac{9}{5} \Delta$$

Como foi feito a área de somente um dos lados do triângulo equilátero, agora incluir a área com 3 lados do triângulo original.

$$\text{Área do Floco de Neve de Koch} = A + 3 \cdot \frac{9}{5} \Delta = A + 3 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{9} A = \frac{8}{5} A$$

3.6 Triângulo e Tapete de Sierpinski

Waclaw Sierpinski foi um matemático polonês do final do século XIX e início do século XX. Ele nasceu em Varsóvia, em 1882, e é conhecido por suas contribuições em várias áreas da matemática, incluindo teoria dos números, análise matemática, teoria dos conjuntos [15]. Sierpinski foi um dos primeiros no estudo dos fractais e sua pesquisa nesse campo muito importante da geometria fractal. Ele desenvolveu estudos sobre as formas geométricas que possuíam autossimilaridade infinita, uma característica marcante dos fractais. As criações de conjuntos fractais mais marcantes são: o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski.

3.7 Construção do Triângulo de Sierpinski

A Figura 11 mostra as etapas de construção do Triângulo de Sierpinski, e começa com um triângulo equilátero no plano ($n=1$). No triângulo, são identificados todos os pontos médios dos lados, e cada ponto médio é interligado, formando-se quatro triângulos equiláteros no interior. E desses triângulos formados se retira o central, como aparece em $n = 2$. Depois, em cada um dos triângulos, esse processo é repetido com os três triângulos restantes, gerando ainda mais triângulos menores, e o processo continua infinitamente[3].

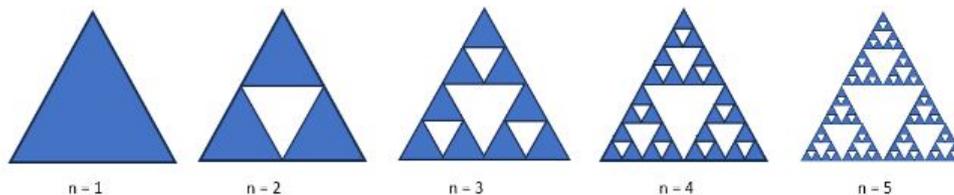


Figura 11 – Evolução da construção do Triângulo de Sierpinski.

A cada etapa, o triângulo inicial é dividido em triângulos menores, com cada forma geométrica gerada, representando uma versão reduzida dos anteriores. O resultado é um fractal com propriedades de autossi-

milaridade, onde o padrão geral se repete em diferentes escalas. Pode-se destacar algumas propriedades na evolução da construção do Triângulo de Sierpinski. Uma dessas propriedades é a observação da quantidade de triângulos formados em cada etapa, conforme avança-se no processo de construção. Como o Triângulo de Sierpinski é feito utilizando, a recursividade que em cada o triângulo na próxima etapa será dividido em três triângulos menores e retirado o central, então a quantidade de triângulos que permanecem serão:

- $n = 1$: 1 triângulo
- $n = 2$: 3 triângulos
- $n = 3$: 9 triângulos
- $n = 4$: 27 triângulos
- $n = 5$: 81 triângulos

Assim, pode-se desenvolver a área de cada etapa, da seguinte maneira

- $n = 1$: 1 triângulo \Rightarrow Área = S
- $n = 2$: 3 triângulos \Rightarrow Área = $3\frac{1}{4}S$
- $n = 3$: 9 triângulos \Rightarrow Área = $9\frac{1}{4}\frac{1}{4}S = \frac{3^2}{4^2}S = \left(\frac{3}{4}\right)^2 S$
- $n = 4$: 27 triângulos \Rightarrow Área = $27\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}S = \frac{3^3}{4^3}S = \left(\frac{3}{4}\right)^3 S$
- $n = 5$: 81 triângulos \Rightarrow Área = $81\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}S = \frac{3^4}{4^4}S = \left(\frac{3}{4}\right)^4 S$

Então pode-se deduzir que total de cada etapa pode ser observada como sendo:

$$\text{Área} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} ; \text{ com } n \geq 1.$$

Outra maneira que pode-se gerar o Triângulo de Sierpinski, é através de outras iterações como o Jogo do Caos. Neste jogo, os jogadores exploram a geometria de um triângulo a partir de um ponto de referência inicial. Começando com um ponto de referência, um jogador escolhe um vértice do triângulo e calcula o ponto médio entre esse vértice e o ponto de referência inicial. O próximo passo será determinado jogando um dado, o número que aparecer. Caso for o número 5, por exemplo, será usado o lado oposto, ou seja, o número 1 será o próximo vértice e determina o ponto médio entre esse vértice e o último ponto de referência previsto. Este processo se repete até que um dos pontos médios esteja localizado dentro do triângulo formado pelas escolhas anteriores. Este momento marca o fim do jogo, revelando uma dinâmica fascinante dos pontos médios dentro do triângulo original [5].

3.7.1 Construção do Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski é um exemplo de um fractal, que é um objeto matemático com estruturas repetitivas em diferentes escalas. Ele faz parte da coleção matemática de Sierpinski [3]. A Figura 12 mostra as etapas de construção do Tapete de Sierpinski. Para criar esse tapete, inicia-se com um quadrado e o divide em nove partes iguais, formando uma grade de 9 quadrados menores e depois remove-se o quadrado central dessa grade, deixando oito quadrados menores, isso pode ver em $n = 1$. O processo continua em cada um dos 8 quadrados menores restantes, repetindo o mesmo procedimento, dividindo-os em 3 por 3 quadrados e removendo o quadrado central de cada um desses quadrados, como em $n = 2$. Esse processo é repetido várias vezes, ou seja, sempre removendo os quadrados centrais dos quadrados menores restantes. À medida que esse procedimento é repetido infinitamente, o resultado é um padrão fractal que se assemelha a um tapete, daí o nome "Tapete de Sierpinski". O tapete de Sierpinski possui um processo recursivo do semelhante ao conjunto de Cantor, pois ele estende essa idéia de remoção iterativa de partes centrais de um objeto geométrico (segmento) para uma estrutura bidimensional (um quadrado subdividido em quadrados menores)[10].

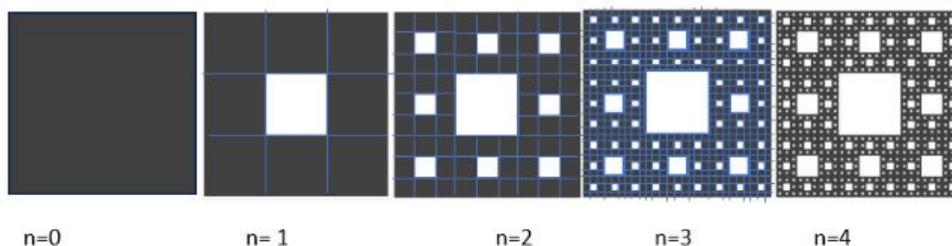


Figura 12 – Etapas da construção do tapete de Sierpinski.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE PRÁTICA

Um estudo formal do assunto de fractais do ponto de vista matemático exige uma compreensão de determinadas definições e estruturas que não se fazem presentes no currículo normal de ensino fundamental e médio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2023). Na presente proposta, não se pretende ensinar um nível aprofundado de Geometria Fractal para o estudante. Entretanto, aspectos fundamentais de uma geometria fractal podem ser abordados e os resultados gráficos associados podem ser apreciados e usados como estímulo ao aprendizado dos estudantes do ensino médio. As atividades propostas para a sala de aula, portanto, pretendem usar aspectos da geometria fractal de maneira indireta, e seus resultados como estímulos. A adequação da tarefa consiste em identificar um tópico de matemática que já faça parte da BNCC e que possa surgir em processos de obtenção de fractais.

4.1 Triângulo de Pascal como um fractal

Nesta atividade, o principal objetivo é estimular os estudantes a executar um algoritmo de maneira intuitiva, com o propósito de aprofundar suas compreensões das funções matemáticas em um contexto mais abrangente. Destacam-se as relações de recorrência e os efeitos que elas desempenham na formação de uma estrutura final, permitindo que os alunos observem o mecanismo de autossimilaridade presente tanto no Triângulo de Pascal quanto no Triângulo de Sierpinski. Além disso, os conceitos fundamentais, como divisibilidade e produtos notáveis serão revistos. Ao abordar essas questões, a atividade visa atingir diversos objetivos interconectados. Em primeiro lugar, aprimorar a compreensão dos fundamentos matemáticos, garantindo que os alunos assimilem os conceitos essenciais relacionados à expansão de polinômios, coeficientes binomiais e sua relação com o Triângulo de Pascal. Além disso, o Triângulo de Pascal se torna uma aplicação concreta da álgebra e uma ferramenta auxiliar.

4.1.1 Objetivos

De maneira geral, a atividade visa melhorar a compreensão dos fundamentos matemáticos, fazendo com que os alunos se habituem à manipulação de polinômios, mediante sua expansão e consequente obtenção dos coeficientes binomiais da n ésima potência de uma soma algébrica. Como objetivos específicos relacionados ao tópico de polinômios, que é parte do conteúdo de matemática para o ensino médio, a atividade irá abordar:

1. Potências de uma soma algébrica;
2. Coeficientes da expansão binomial;
3. Funções genéricas a partir de algoritmos;
4. Autossimilaridade como consequência de um processo iterativo;

5. Induzir os estudantes a executar um algoritmo de maneira intuitiva, e assim promover sua compreensão sobre funções matemáticas num sentido mais amplo;
6. Mostrar as relações de recorrência e seus efeitos no aparecimento de uma estrutura final, com consequente observação do mecanismo de autossimilaridade presentes no triângulo de Pascal e no triângulo de Sierpinski;
7. Rever temas básicos como a divisibilidade e produtos notáveis.

4.1.2 Desenvolvimento da atividade

Nessa atividade serão feitas expansões de polinômios com consequente identificação de seus coeficientes no triângulo de Pascal e posteriormente sua relação com o triângulo de Sierpinski a partir da coleção de divisores de cada coeficiente. No início da tarefa, os estudantes são instruídos a registrar o polinômio inicial na folha de exercícios, conforme definido a seguir:

$$P_0(x) = 1. \tag{4}$$

Assim, inicia-se o processo de multiplicação dos polinômios por $Q(x) = 1 + x$ e, ao mesmo tempo, em uma folha à parte, os alunos são orientados a manter anotações de todos produtos obtidos durante a atividade. O processo recursivo implica na repetição dessa operação para gerar os resultados subsequentes. O primeiro produto seria obtido pela multiplicação de $P_0(x)$ por $Q(x)$, ou seja:

$$P_0(x)Q(x) = P_1(x) = 1 + x \tag{5}$$

Em seguida, continuando a atividade, o polinômio $P_1(x)$ obtido pela equação 5 será multiplicado por $Q(x) = 1 + x$, obtendo:

$$\begin{aligned} P_1(x)Q(x) &= (1+x)(1+x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2 = P_2(x) \\ P_2(x)Q(x) &= (1+x)^2(1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1+x)^3 = P_3(x) \\ P_3(x)Q(x) &= (1+x)^3(1+x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 = (1+x)^4 = P_4(x) \\ &\vdots \\ P_{n-1}(x)Q(x) &= (1+x)^{n-1}(1+x) = P_n(x) \end{aligned}$$

À medida que a atividade é desenvolvida, pode-se perceber o processo recursivo, pois, para se conseguir o próximo produto de polinômios, é necessário utilizar o resultado anterior multiplicado por $Q(x)$. Em outros termos, $P_n(x) = P_{n-1}(x)Q(x)$. Agora os coeficientes de x em $P_n(x)$ precisam ser identificados e coletados. Isso significa agrupar os diversos termos relacionados a x em graus variados, e colecionar os coeficientes. Os coeficientes devem ser registrados em uma folha a parte onde os alunos documentam seus resultados de acordo com a expansão do polinômio $P_n(x)$. A Tabela 2 a seguir é um modelo que pode ser usado para o registro dos coeficientes:

Tabela 2 – Tabela de coeficientes dos polinômios

P_0													
P_1													
P_2													
P_3													
P_4													
P_5													
P_6													
P_7													
P_8													

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A idealização desse trabalho baseia-se em tornar mais acessível o ensino dos conceitos básicos de operação de polinômios aos alunos do Ensino Médio. Desta forma, inicialmente, usa-se o Triângulo de Pascal como ferramenta visual e recurso didático, pois com ele pode-se explorar a recursividade do binômio de Newton e a relação com a autossimilaridade dos fractais. Durante a trajetória deste trabalho, percorreu-se desde a exploração da autossimilaridade presente em estruturas naturais, como as folhas, até a definição matemática dos fractais. Ao abordar a série de Fibonacci, percebe-se como um processo recursivo simples pode resultar em uma sequência cuja razão entre termos consecutivos se aproxima da proporção áurea. Em seguida, com a introdução da Máquina de Cópia de Múltiplas Reduções (MCMR) e das Máquinas Retroalimentadas Aleatórias, nota-se que estruturas complexas podem surgir a partir de processos iterativos e/ou aleatórios. Outro exemplo de fractais criados por processos recursivos, é o Conjunto de Mandelbrot, pois ilustra de forma clara a complexidade específica desses padrões. Desta forma, a proposta pedagógica elaborada neste trabalho não se limita apenas ao atendimento dos requisitos curriculares, mas alinha-se à filosofia da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois ao estimular a curiosidade dos alunos, promove-se a exploração de conceitos como intuição, lógica, dedução e processos iterativos. A atividade prática proposta, representa uma contribuição para área da educação, principalmente no ensino de matemática, tendo como ponto de partida o Triângulo de Pascal, que oferece uma abordagem diferenciada na introdução de conceitos dos padrões de um fractal. Essa abordagem diferenciada pode ser vista quando se oferece uma experiência colaborativa e visual, na qual estudantes têm a oportunidade de compreender conceitos matemáticos abstratos, desenvolvendo habilidades investigativas. A expansão binomial e recursividade quando é apresentada com práticas e meios visuais é um exemplo de contextualização de conceitos matemáticos abstrato, isso não apenas torna o conteúdo de fractais mais acessível para os alunos, mas, também, os incentiva a descobrir padrões, promovendo uma aprendizagem mais autônoma. Adicionalmente, a coesão entre teoria e prática é fortalecida ao integrar o programa Excel como uma ferramenta de exploração visual. Essa inclusão destaca a importância da tecnologia como uma estratégia integral para melhorar o aprendizado dos alunos. Assim, a natureza visual e iterativa da atividade não apenas desperta o interesse dos alunos, mas, também, mantém um alto nível de engajamento, isso destaca a importância de abordagens dinâmicas e criativas no processo educacional, criando um ambiente propício ao aprendizado. Ao estabelecer a aplicação prática dos fractais, que conecta o Triângulo de Pascal ao Triângulo de Sierpinski, não apenas se consolida a compreensão de conceitos matemáticos, mas os educadores, também, ganham a oportunidade de explorar, junto aos alunos, a presença dos fractais em diversas disciplinas, além de destacar a existência deles na natureza. Essa abordagem não apenas solidifica a relevância da matemática em diferentes contextos, mas, também, proporciona uma compreensão mais ampla e integrada, contribuindo para uma educação mais abrangente e contextualizada.

Em síntese, esta atividade prática não apenas explora a matemática, mas também se torna uma ferramenta útil para os educadores, tornando o ensino mais interessante e relevante. Destacando a importância de abordagens criativas e tecnológicas, ele oferece uma visão de futuro do ensino de matemática, preparando os alunos não apenas para os desafios acadêmicos, mas também para viverem em uma sociedade sempre em mudança.

Agradecimentos

Agradeço sinceramente a Deus por todas as graças alcançadas, que tornaram possível minha trajetória . Reconheço Sua proteção constante em todos os dias da minha vida.

Expresso minha profunda gratidão a meus pais, Inês e Djalma, cujo apoio ao longo de toda minha vida é inestimável. Estou convicta de que todas as minhas conquistas refletem a dedicação e o amor presentes na educação que me proporcionaram. Sem a orientação e o apoio de vocês, não seria a pessoa que sou hoje. Também quero expressar minha gratidão a Hélio, meu marido, pela compreensão das necessidades do percurso.

À minha fonte de inspiração, meus filhos Marina, Matheus e Ana Laura, agradeço pelo incentivo e parceria ao longo de todos os anos do meu mestrado.

Meus sinceros agradecimentos estendem-se a todos os meus professores, cujo conhecimento repassado foi fundamental. Agradeço pela dedicação em ensinar, pela paciência e compreensão demonstradas ao enfrentarmos as dificuldades, especialmente durante o período desafiador do afastamento social causado pela pandemia de COVID-19. Um agradecimento especial ao meu orientador, Maurício Reis e Silva Júnior, cuja dedicação e apoio a este trabalho foi um exemplo inspirador pelo entusiasmo pela profissão.

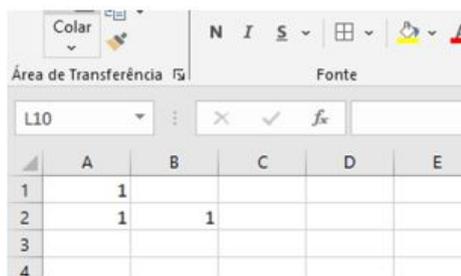
Por fim, mas não menos importante, agradeço aos meus colegas de curso, Lucas, Cérculo, Nathalia e Paulinetti, que caminharam ao meu lado. Agradeço pelos momentos de estudo e união, com destaque para minha amiga Ivani, que muitas vezes me motivou a não desistir. Sentirei saudades de todos vocês.

5 Anexo 1

Neste anexo, será apresentada uma complementação à atividade proposta no Capítulo 4 usando o EXCEL. A seguir segue o passo a passo para aplicação da atividade no EXCEL. Todas as figuras deste capítulo foram feitas pela autora.

Como inserir as fórmulas no EXCELL?

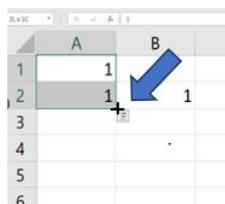
Inicia com a digitalização dos coeficientes que foram obtidos das duas primeiras linhas da Tabela 4.1 . Esses coeficientes serão digitalizados nas linhas 1 e 2, conforme a Figura 14.



	A	B	C	D	E
1	1				
2	1	1			
3					
4					

Figura 14 – Figura mostrando tabela com primeiros coeficientes digitados.

Agora, com a ajuda de um mouse, as células A1 e A2 serão selecionadas. Após a seleção, aparecerá a alça de preenchimento como mostra a Figura 15:



	A	B
1	1	
2	1	1
3		
4		
5		
6		

Figura 15 – A Figura mostra a alça de preenchimento (sinal +)

O aluno deve clicar na alça de preenchimento e arrastá-la até a linha 22 ⁴. Nesse momento, ficar atento para manter a seleção na coluna A (Figura 16).

Próximo passo, clicando na célula B3, e digitar o seguinte comando(Figura 17):

= A2+B2

Com essa fórmula, a célula B3 será uma soma. Essa soma poderá ser repetida para as outras células usando a alça de preenchimento. Após a digitação de qualquer fórmula deve-se apertar a tecla ENTER, para que a planilha aceite o comando.

Para preencher a tabela com a fórmula de soma de coeficientes, deve-se seguir os seguintes passos: Clicar na célula B3, acionar a alça de preenchimento e arrastá-la até a célula V22(Figura 18).

⁴ Dúvida de como utilizar a alça de preenchimento, poderá acessar o vídeo no site: <<https://www.youtube.com/watch?v=8bE71JVxEOQ> >

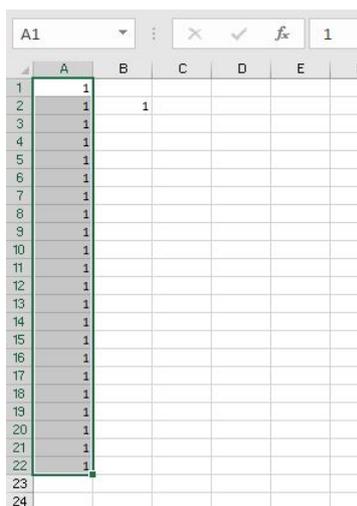


Figura 16 – A Figura mostra a coluna A que foi preenchida com o mesmo valor.

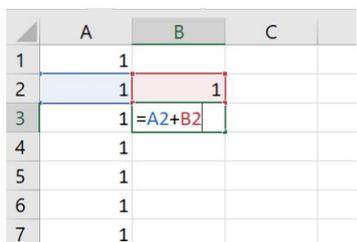


Figura 17 – A Figura mostra como aparecerá a fórmula na digitação.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	
1	1																						
2	1	1																					
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	0	0	0	0	0	0	0	
16	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	0	0	0	0	0	0	
17	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1	0	0	0	0	0	
18	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1	0	0	0	0	
19	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	0	0	0	
20	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	0	0	
21	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1	0	
22	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264	20349	5985	1330	210	21	1	
23																							

Figura 18 – A Figura mostra tabela preenchida até V22.

- Como colorir as células?

Para colorir somente os números ímpares, será utilizado uma função que se chama FORMATAÇÃO CONDI-CIONAL.

Primeiro, deve-se clicar na barra de ferramentas o ícone Formatação Condicional (Figura 19). Segundo passo, aparecerá uma tela com várias informações como mostra a Figura 20.

Nessa tela mostrada na Figura 20, existe as opções de 'Selecione um Tipo de Regra', nessa parte deverá clicar



Figura 19 – Ícone de Formatação Condicional

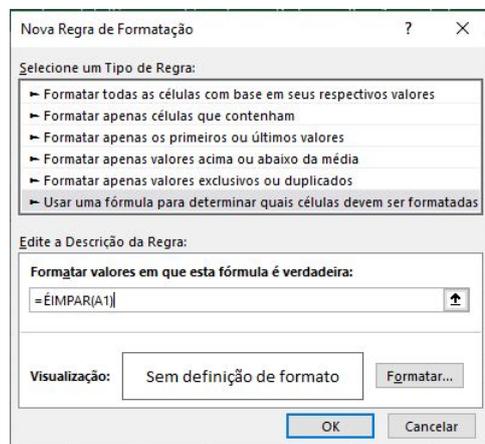


Figura 20 – A Figura mostra a tela Nova Regra de Formatação.

em ‘Usar uma fórmula para determinar quais células devem ser formatadas’. Assim que clicar aparecerá uma aba: ‘Formatar valores que esta fórmula é verdadeira’, logo abaixo terá um espaço para digitar o comando: =ÉÍMPAR(A1) (Figura 20)

Depois clicar em ‘Formatar’ como mostra na Figura 20, selecionando a opção FONTE, e a cor desejada(Figura 21). A Figura 22 mostra o início da construção do Triângulo de Sierpinski, após a utilização dos

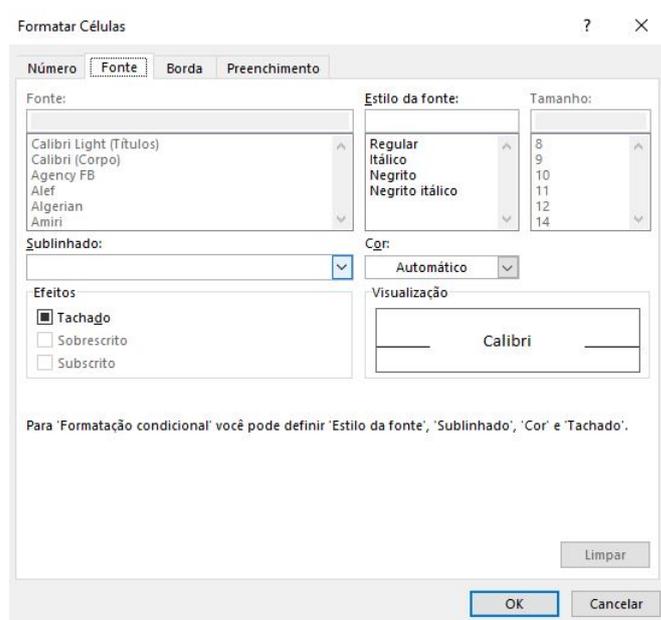


Figura 21 – Janela de formatação de cor para célula A1.

procedimentos (partindo da célula A1).

1	1E+00																		
2	1E+00	1E+00																	
3	1E+00	2E+00	1E+00																
4	1E+00	3E+00	3E+00	1E+00															
5	1E+00	4E+00	6E+00	4E+00	1E+00														
6	1E+00	5E+00	1E+01	1E+01	5E+00	1E+00													
7	1E+00	6E+00	2E+01	2E+01	2E+01	6E+00	1E+00												
8	1E+00	7E+00	2E+01	4E+01	4E+01	2E+01	7E+00	1E+00											
9	1E+00	8E+00	3E+01	6E+01	7E+01	6E+01	3E+01	8E+00	1E+00										
10	1E+00	9E+00	4E+01	8E+01	1E+02	1E+02	8E+01	4E+01	9E+00	1E+00									
11	1E+00	1E+01	5E+01	1E+02	2E+02	3E+02	2E+02	1E+02	5E+01	1E+01	1E+00								
12	1E+00	1E+01	6E+01	2E+02	3E+02	5E+02	5E+02	3E+02	2E+02	6E+01	1E+01	1E+00							
13	1E+00	1E+01	7E+01	2E+02	5E+02	8E+02	9E+02	8E+02	5E+02	2E+02	7E+01	1E+01	1E+00						
14	1E+00	1E+01	8E+01	3E+02	7E+02	1E+03	2E+03	2E+03	1E+03	7E+02	3E+02	8E+01	1E+01	1E+00					
15	1E+00	1E+01	9E+01	4E+02	1E+03	2E+03	3E+03	3E+03	3E+03	2E+03	1E+03	4E+02	9E+01	1E+01	1E+00				
16	1E+00	2E+01	1E+02	5E+02	1E+03	3E+03	3E+03	8E+03	6E+03	5E+03	3E+03	1E+03	5E+02	1E+02	2E+01	1E+00			

Figura 22 – Visualização inicial do Triângulo de Sierpinski.

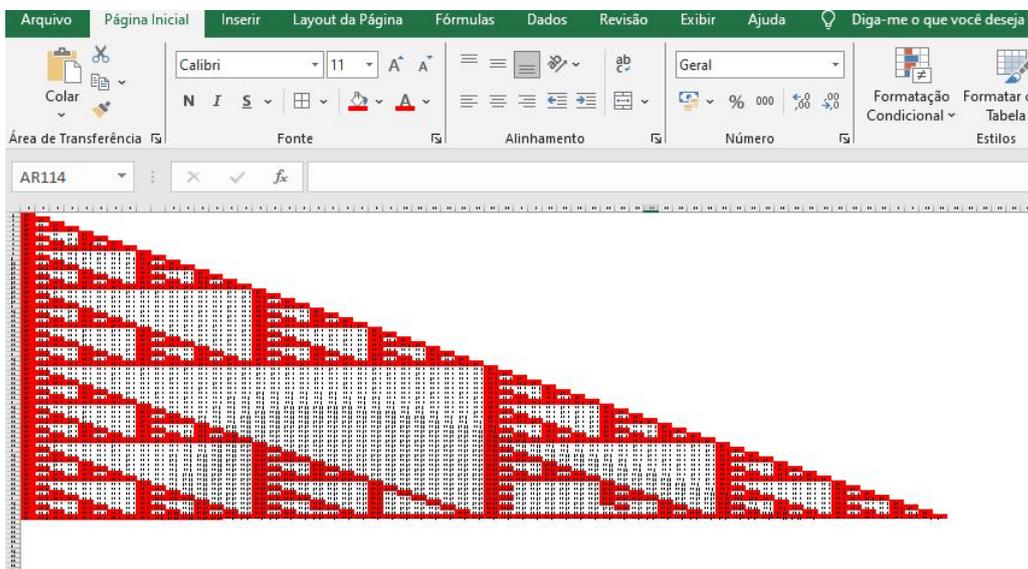


Figura 23 – Triângulo de Sierpinski gerado através de uma tabela.

Na Figura 23, é possível visualizar o Triângulo de Sierpinski que foi gerado aplicando as orientações até a linha 64.

Referências

- [1] Sallum, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática. N o 57, 2o quadrimestre, 2005.
- [2] Milani, Margarida. Fractais, Pipas tetraédricas e Origami. CRV, 2022.
- [3] Barbosa, Ruy Madsen. Descobrimo a Geometria Fractal para sala de aula , Autêntica, 2005
- [4] Alves, C. M. F. S. J. Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. 2007. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.
- [5] Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar. Fractals for the Classroom, V.1. Springer, 1991.
- [6] Farias, Mailson Alves. Fractais: uma abordagem introdutória. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/19655/1/MailsonAlvesFarias_Dissert.pdf. Acesso em: 25 jan. 2024.
- [7] Karas, Elizabeth Wegner. Tópicos de Matemática 2: Fractais Professora. Disponível em: https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ensino/fractais/Julia_Mandelbrot.pdf. Acesso em: 01 fev. 2024.
- [8] Araújo, Jerrimar Moraes de. Teoria Matemática Implícita na Geometria Fractal: construindo fractais com a ferramenta computacional Asymptote. Disponível em: <http://repositorio.ufr.br:8080/jspui/handle/prefix/722>. Acesso em: 16 fev. 2024.
- [9] Medeiros, Dandara Oliveira. Conjunto de Cantor. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/jspui/handle/riufal/7535> Acesso em: 25 jan. 2024.
- [10] Ervolino, Lucas de Lima. Os Fractais Articulados à Teoria do Caos: Uma Possibilidade de Ensino na Educação Básica. 2023. Disponível em: https://sca.profnat-sbm.org.br/profnat_tcc.php?id1=7271&id2=171056776. Acesso em: 01 fev. 2024.
- [11] Ministério da Educação. *Base Nacional Comum*. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI Acesso em: 01 fev. 2023.
- [12] Planos de Curso do Currículo Referência de Minas Gerais 2024. Disponível em: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg> Acesso em: 01 jan. 2024.
- [13] Nunes, Raquel Sofia Rebelo. *Geometria Fractal e Aplicações*. 2006. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica_artigos/dissertacao_nunes.pdf Acesso em: 10 jan. 2024.
- [14] Sousa, Tiago Alves de. *Passeio na Sequência de Fibonacci*. 2012. Disponível em: <https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/890/1/PDF%20-%20Tiago%20Alves%20de%20Sousa.pdf>.
- [15] Marleide, Eliane Darella; Cardoso, Coan; Palhoça, Rosana Camilo da Rosa. História da Matemática. Editora UnisulVirtual, 2011
- [16] Devaney, Robert L. *First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Edição de julho de 2014