



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e estatística

Angelo Benedito dos Santos

**Quadraturas: uma alternativa metodológica para o ensino de
área de figuras planas**

Rio de Janeiro

2024

Angelo Benedito dos Santos

Quadraturas: uma alternativa metodológica para o ensino de área de figuras planas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof.^a Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros

Coorientador: Prof. PhD. João Bosco Pitombeira de Carvalho

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S237

Santos, Angelo Benedito dos

Quadraturas: uma alternativa metodológica para o ensino de área de figuras planas / Angelo Benedito dos Santos. – Rio de Janeiro, 2024

100 f.: il.

Orientadora: Jeanne Denise Bezerra de Barros

Coorientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática - História - Teses. I. Barros, Jeanne Denise Bezerra de. II. Carvalho, João Bosco Pitombeira de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 514:37

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Angelo Benedito dos Santos

Quadraturas: uma alternativa metodológica para o ensino de área de figuras planas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em: 13 de dezembro de 2024

Banca Examinadora:

Prof.^a Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. PhD. João Bosco Pitombeira de Carvalho (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Danielle Gonçalves Teixeira
Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais - IBMEC

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

Primeiramente a Deus, pois sem Ele nada poderia ser feito e realizado.

À Nossa Senhora da Aparecida, que por sua poderosa Intercessão, está sempre comigo.

À minha mãe, sua luta e resiliência são inspirações para a minha vida.

Ao meu pai por me fazer um homem de luta.

Aos meus irmãos, minhas fontes de inspiração.

À minha amada esposa, que caminha comigo me incentivando sempre.

Aos meus queridos companheiros de PROFMAT, sem vocês nada disso seria possível.

Esse trabalho é de vocês!!!!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradecer Ao Bom, Amado e Misericordioso Deus por minha vida e pela vida de todos os envolvidos na construção deste sonho.

Agradeço à Nossa Senhora da Apresentação pois sempre esteve cuidando de tudo e intercedendo em cada detalhe e cada ação na elaboração deste projeto.

A minha amada mãe e meu pai, que me colocaram neste mundo. Sempre lutaram por mim e por meus irmãos. Esse momento é todo deles.

Aos meus irmãos e sobrinhos que são meus exemplos de vida e de fé. Àquela que sempre está comigo, nos momentos bons ou ruins, nas alegrias, nas conquistas, nas perdas, na viagem, no amor. Te amo demais minha esposa. Aos meus grandes amigos de PROFMAT UERJ, que estiveram comigo na luta das aulas para que pudéssemos todos conquistar este título.

Meus amigos de Escola Municipal Mário Penna da Rocha, Escola Municipal Itália, Colégio Estadual Hilton Gama, Paróquia Nossa Senhora da Apresentação, em Irajá, que sempre rezam por mim e por minha família, oração poderosa.

Preciso citar uma grande amiga que dedicou o seu tempo nas férias para me ajudar e, com muito carinho, incentivava e deixava sempre com mensagens positivas. Muito obrigado, amiga Mônica Almeida.

Não posso deixar de mencionar minha grande amiga Thaís Lins. Amiga de trabalho que além da recepção na escola, que foi incrível, era a minha parceira de ida e volta da UERJ e que era uma grande incentivadora. E como sempre dizíamos: "Ninguém larga a mão de ninguém aqui!!!".

Agradecer também a Professora Jeanne, que com seu vasto conhecimento, riqueza de detalhes, dedicação e empenho, não desistiu de mim e é responsável por esta obra. Sou eternamente grato.

Não tenho como citar todos os nomes que são fundamentais para a realização deste sonho. Rogo ao Bom Deus pela vida de cada um

Não temas, porque eu estou contigo;
não te assombres, porque eu sou teu Deus;
eu te fortaleço, e te ajudo,
e te sustento com a destra da minha justiça.

Pensamento, reflexão

Bíblia Sagrada. Is. 41,10

RESUMO

SANTOS, Angelo Benedito dos. Quadraturas: uma alternativa metodológica para o ensino de área de figuras planas. 2024. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Este trabalho de dissertação de mestrado investiga a potencialidade de integrar a história da matemática ensino das quadraturas de figuras planas para alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, dentro dos parâmetros da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O estudo destaca a relevância dos métodos clássicos de régua e compasso, retomando as práticas do Desenho Geométrico, com a possibilidade de aliar *softwares* de Geometria dinâmica, com o objetivo de revitalizar o ensino do conceito de área. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa, realizada através de um questionário para professores e de uma entrevista com uma docente que aplica esta técnica em suas aulas de Desenho Geométrico. Inicialmente, abordou-se a evolução histórica do conceito de quadratura, desde as civilizações antigas até o desenvolvimento dos métodos matemáticos modernos, a fim de construir uma base cultural e histórica para o ensino. As análises feitas nos deram a entender que a inclusão da História da Matemática auxilia a contextualizar e tornar mais significativo o aprendizado dos alunos. Uma outra observação foi sobre a utilização das técnicas realizadas no Desenho Geométrico, utilizando materiais como régua e compasso na solução de problemas que envolvam quadraturas de figuras planas. Sugere-se, portanto, uma formação continuada de professores, voltada para capacitá-los na introdução desses métodos e no uso dos instrumentos tradicionais e digitais, ajudando a transformar o ensino de matemática em um processo mais interativo e estimulante.

Palavras-chave: História da Matemática. Quadratura. Figuras Planas. Desenho Geométrico.

ABSTRACT

DOS SANTOS, A. B. S. Quadratures: A Methodological Alternative for Teaching Area of Plane Figures. 2024. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

This master's dissertation investigates the potential of integrating the history of mathematics into the teaching of quadratures of plane figures for elementary school and high school students, within the parameters of the National Common Curricular Base (BNCC). The study highlights the relevance of the classic methods of ruler and compass, resuming the practices of Geometric Drawing, with the possibility of combining dynamic geometry software, with the aim of revitalizing the teaching of the concept of area. The research had a qualitative approach, carried out through a questionnaire for teachers and an interview with a teacher who applies this technique in her Geometric Drawing classes. Initially, the historical evolution of the concept of quadrature was addressed, from ancient civilizations to the development of modern mathematical methods, in order to build a cultural and historical basis for teaching. The analyses made led us to understand that the inclusion of the History of Mathematics helps to contextualize and make more meaningful the students' learning. Another observation was about the use of techniques used in Geometric Drawing, using materials such as rulers and compasses to solve problems involving squaring plane figures. Therefore, it is suggested that teachers receive ongoing training, aimed at enabling them to introduce these methods and use traditional and digital instruments, helping to transform the teaching of mathematics into a more interactive and stimulating process.

Keywords: History of Mathematics. Quadratures. Flat Figures. Geometric Drawing.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Região atual aproximada da Mesopotâmia	23
Figura 2	Números triangulares	26
Figura 3	Números quadrados	26
Figura 4	Números pentagonais	27
Figura 5	Lúnula de Hipócrates	28
Figura 6	Relação entre a área dos círculos e seus diâmetros.....	29
Figura 7	Quadratura do Círculo	32
Figura 8	Quadratura do Círculo	32
Figura 9	Quadratura do Círculo	34
Figura 10	Triângulo retângulo equivalente ao círculo	35
Figura 11	Altar do falcão.....	37
Figura 12	Altar do fogo	37
Figura 13	Quadratura do retângulo	49
Figura 14	Quadratura do retângulo	50
Figura 15	Quadratura do trapézio	51
Figura 16	Quadratura do trapézio	52
Figura 17	Pergunta 1: Rede de atuação do docente.....	55
Figura 18	Pergunta 2: Disciplinas ministradas pelo docente.....	55
Figura 19	Pergunta 3: Tempo de atuação no ensino	56
Figura 20	Pergunta 7: Disciplinas em que o docente utilizou o conceito de quadraturas	58
Figura 21	Terreno retangular	60
Figura 22	Triângulo.....	60
Figura 23	Losango	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Quantitativos por portal e descritor: Quadraturas	18
Tabela 2	Quantitativos por portal e descritor: Quadratura de figuras planas	19
Tabela 3	Quantitativos por portal e descritor: Quadratura do círculo.....	19
Tabela 4	Geometria, competências e habilidades - 6º Ano	42
Tabela 5	Geometria, competências e habilidades - 7º Ano	43
Tabela 6	Geometria, competências e habilidades - 8º Ano	44
Tabela 7	Geometria, competências e habilidades - 9º Ano	45
Tabela 8	Plano de entrevista.....	62

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BDTD	Biblioteca Nacional de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ESA	Escola de Sargentos das Armas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	METODOLOGIA	18
2	QUADRATURAS: UM POUCO DE HISTÓRIA	21
2.1	Babilônios e Egípcios: Contribuições	21
2.2	Quadratura pelos gregos	24
2.3	Quadratura na Índia	36
3	ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL ATUALMENTE	38
3.1	Marcos regulatórios - 1997 até o momento	38
4	ATIVIDADES	46
4.1	Entrevista	46
4.2	Questionário Aplicado	53
4.3	Sequência de Atividades Escritas.....	59
	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS.....	70
	APÊNDICE - PDF Professora Kamilla Rodrigues	73
	ANEXO - Transcrição Entrevista	79

INTRODUÇÃO

*Que não se perturbe o seu rosto,
nem seu coração. Não temas esta doença
nem nenhuma outra, não fiques aflito,
não estou eu aqui, que sou sua mãe?
Você não está debaixo da minha sombra
e sob o meu cuidado?
Não sou eu a fonte da sua alegria?
Nossa Senhora de Guadalupe*

Sou Angelo Benedito dos Santos, fui aluno de escola pública por toda a minha vida, desde o ensino fundamental até os dias atuais, onde retornei para concluir o mestrado e, quem sabe o doutorado nesta universidade, que tenho com muito carinho, por ser parte importantíssima de minha vida.

A ideia para o desenvolvimento deste trabalho se dá a partir de conversas com os orientadores. Este tema chama a atenção pela possibilidade de se fazer um estudo da Geometria praticada nos tempos antigos até os dias atuais. A necessidade de se buscar alternativas para estimular os alunos para um maior interesse para estudar Matemática, mostrando o quanto ela se atualiza com o tempo e como a humanidade se adequava para pensar Matemática.

A presente pesquisa parte das provocações suscitadas pelo professor João Pitombeira sobre os métodos para determinar a área de uma figura plana sem conhecer os números reais da mesma, nas palavras do referido professor:

O que faria você para medir uma figura plana, sem dispor dos números reais, que nos permitem, por exemplo, afirmar que a área de um retângulo é sempre igual ao produto do comprimento da base pelo comprimento de sua altura? (Pitombeira, 2008, p. 15) [1] .

Nesse sentido, os inúmeros estudos sobre áreas de figuras planas chamam o nosso interesse para a pesquisa sobre a temática. Igualmente, estamos atentos às alternativas que possam somar à nossa prática de sala de aula, identificando métodos e atividades atrativas para os alunos. Esse movimento me traz a lembrança de minha trajetória como aluno do ensino público. Na Escola Municipal Gaspar Vianna e na Escola Técnica Estadual Juscelino Kubitschek encontrei grandes professores. Eles sempre buscavam soluções

diferenciadas para o ensino dos mais variados conteúdos de Matemática. A paixão e o fascínio por essa disciplina foram despertados por esses profissionais que marcaram a minha vida na Educação Básica.

Primeiramente, no Ginásio (hoje segundo segmento do Ensino Fundamental) onde a professora Neosilda sempre acreditou em meu potencial e me incentivou a alcançar voos maiores. Naquela época, graças a ela, consegui uma medalha de prata na Olimpíada de Matemática da escola.

Depois, no 2º grau (atual Ensino Médio) meus professores de Matemática, Física e Química, além das disciplinas técnicas, observavam a minha luta e meu esforço. Enquanto filho de pais separados, só contava com o apoio de minha mãe que trabalhava muito e não tinha condições de me acompanhar na vida escolar, mas procurava estar presente quando seu apoio era necessário. E esse apoio me fez chegar ao meu primeiro contato com uma universidade pública, no projeto Jovens Talentos para a Ciência, quando tive a oportunidade de vivenciar o meio acadêmico e foi parte importante para a minha segunda opção de curso superior: Engenharia Química. Chegada a hora de prestar o vestibular, fui aprovado nos dois cursos que tentei: Matemática e Engenharia Química. Cheguei a cursar duas importantes universidades do País: UERJ e UFRJ ao mesmo tempo, em turnos diferentes, manhã na UFRJ e noite na UERJ, mas o amor pela Matemática e a necessidade de conseguir me manter, procurando emprego, fizeram-me optar pela Licenciatura em Matemática. Ao longo do curso, consegui meu primeiro emprego público, trabalhando na Empresa Brasileira de Correios. Anos depois, a facilidade com a Matemática ajudou em duas importantes aprovações, uma para a Marinha do Brasil, na Escola de Aprendizes Marinheiros, e a outra para o Exército Brasileiro, na Escola de Sargentos das Armas (ESA). Se na primeira aprovação não ingressei na ESA, na segunda, quase abandonei a licenciatura para seguir carreira como militar. Mas novamente o amor pela Matemática e o apoio que tive nos Correios me fizeram optar por terminar o curso superior.

Logo após, diante de todas as dificuldades encontradas na rotina de trabalho e estudo, consegui concluir a graduação em março de 2008. No dia seguinte à minha colação de grau, tomei posse na primeira matrícula, na Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, onde tive o primeiro contato com a Educação de Jovens e Adultos e com os desafios da educação pública. Já no ano seguinte, começa um desafio maior: a posse na Prefeitura Municipal do Rio de Janeiro. Ali iniciava o trabalho com crianças e

adolescentes.

O desinteresse dos alunos pela disciplina foi tema de estudo recente Gritti e Predebon (2019) [2]. As autoras aplicaram questionários com questões fechadas e abertas sobre concepções a respeito da Matemática. O público escolhido para a pesquisa realizada por Gritti e Predebon (2019) é formado por treze alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do oeste catarinense. As autoras relatam os desafios do ensino de Matemática relacionando os diversos aspectos que precisam ser desenvolvidos na sala de aula. Elas citam o raciocínio e a concentração e sugerem que o professor deve trabalhar com o conhecimento prévio do aluno, de modo a trazê-lo para a participação nas aulas. Ao retomar o título do artigo, Gritti e Predebon (2019) descrevem as dificuldades em buscar meios de despertar um maior interesse dos estudantes na Educação Básica. As autoras citam César (2000) [3]:

[...] O insucesso escolar é um fenômeno de aparecimento precoce (manifesta-se os primeiros anos de escolaridade), cumulativo (quem já teve insucesso, no passado, tem mais probabilidades de o vir a ter novamente) e selectivo (pois não afecta de igual modo as crianças que vêm de diversos meios sócio - culturais) (Cesar *et. al*, 2000, p. 48 apud Gritti e Predebon (2019).

Um outro aspecto citado pelas autoras é o julgamento prévio de alguns conteúdos. Antes mesmo de serem trabalhados geram uma insegurança nos alunos que os tomam como assuntos complexos. Gritti e Predebon (2019) afirmam:

Na esfera de estudos sobre Matemática, um fator do rol de aspectos que levam ao insucesso é o fato do aluno julgar a Matemática como uma disciplina complexa, observando-se a insegurança de certos conteúdos, mesmo não tendo ainda sido trabalhados, e naturalizando o impedimento à aprendizagem (Gritti e Predebon, 2019, p. 4)

De acordo com o trecho acima, no tocante à Geometria, em nossas aulas, os alunos não têm o contato necessário e, quando tomam conhecimento da proximidade do trabalho com este assunto, começam com frases do tipo “isso é muito difícil” , “eu nem sei do que se trata”, “professor, tem como não dar essa matéria não?”

Segundo as autoras:

O professor como mediador deverá ter, portanto, conhecimento sobre as metodologias e tendências da Educação Matemática, desenvolvendo-as em sala de aula. É importante destacar a contribuição destas para o processo de ensino aprendizagem, assim o aluno tem vários caminhos que o levam a aprender, seja pelo envolvimento com a história do conteúdo, com a dinâmica de um jogo, um desafio investigativo ou fenômeno modelado (Gritti e Predebon, 2019, p. 5).

Em um mundo onde a grande maioria das atividades já está em meio digital, é impossível pensar em não trabalhar alternativas metodológicas sem a inserção da tecnologia no processo. Bem diferente de minha trajetória na educação básica e acadêmica, quando para se pesquisar e realizar exercícios complementares o aluno recorria a livros da biblioteca, sebos ou até mesmo os comprava, ou trocavam entre si.

Gritti e Predebon (2019) não reduzem sua abordagem a apenas apresentarem um diagnóstico. Elas descrevem algumas propostas para uma Matemática mais motivadora. Uma delas é o uso de recursos tecnológicos em sala de aula, tais como lousas interativas, *softwares* matemáticos, laboratórios informatizados, como uma perspectiva metodológica que pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem. Afirmam:

As tecnologias em sala de aula são excelentes auxiliares no trabalho do professor e, além disso, podem se construir numa ferramenta que possibilita ao aluno desenvolver habilidades e raciocínio, buscando informações e construindo novos conhecimentos acerca de um conteúdo estudado (Gritti e Predebon, 2019, p.6).

As autoras em diálogo com Braga (2015) [4] defendem a ideia do ensino da História da Matemática. O processo de aprendizagem é facilitado quando o aluno consegue compreender o desenvolvimento do saber em determinada época e contexto. Assim, citando Braga afirmam que:

O ensino de Matemática deve andar de mãos dadas com a sua história. Isto corrobora com o fato de utilizarmos a contextualização nas aulas da disciplina. Com isso, a História da Matemática, torna-se uma fundamental ferramenta no intuito de viabilizar melhores condições de desenvolver e ressignificar a disciplina de forma ampla e atraente. Tornando possível um maior despertar, por parte dos discentes, para a aprendizagem da matéria, fazendo com que os mesmos compreendam melhor como seus conceitos se desenvolveram. (Braga 2015, p. 7 apud Gritti e Predebon, 2019, p. 6)

Pela experiência em sala de aula, observamos dificuldades e desinteresse no hábito de estudo de nossos alunos. Especificamente, no conceito de área de figuras planas, os discentes apresentam dificuldades extremas em gravar fórmulas e aplicá-las na resolução de problemas e situações do cotidiano. Busco, com esta pesquisa, responder a duas questões: podemos relacionar, dentro das normas da BNCC (BRASIL, 2017) [5], a História da Matemática para abordar os conceitos de áreas de figuras planas? E os professores, atualmente, conseguem fazer esta abordagem? Sendo assim, definiu-se o objetivo geral: avaliar a possibilidade, dentro das normas da BNCC (BRASIL, 2017), de aplicar a História da Matemática ao conceito de área de figuras planas e verificar se professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio conseguem aplicar, utilizando régua e compasso e/ou *softwares* de Geometria dinâmica, a técnica de quadratura. Para tal, estamos amparados nos seguintes objetivos específicos:

- (1) Analisar a contribuição dos povos antigos na evolução da Geometria e o surgimento da técnica de quadratura de figuras planas.
- (2) Identificar nos documentos regulatórios a abordagem do conceito de quadraturas.
- (3) Investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas.
- (4) Elaborar a partir dos dados apresentados, situações onde a quadratura seja utilizada.
- (5) Julgar se a quadratura é uma alternativa para o ensino de área de figuras planas.

Definidos os objetivos gerais e específicos, partimos para a análise dos trabalhos acadêmicos que vão nortear esta pesquisa, como observamos no Capítulo 1. Após a apresentação da metodologia, analisamos a parte histórica da evolução da Geometria e bus-

camos descobrir escritos sobre o surgimento da quadratura, investigando os babilônios, egípcios, indianos e gregos, com grandes contribuições dadas por Pitágoras e Euclides com sua obra *Elementos*.

No Capítulo 3, analisamos os documentos regulatórios: Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [6], documento de 1998 desenvolvido pelo Ministério da Educação do Brasil, que oferecem diretrizes pedagógicas para o ensino básico e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017 com suas Unidades Temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. Listamos os objetos de conhecimento e habilidades que envolvem a Geometria, definida como uma unidade temática.

No Capítulo 4 realizamos uma conversa com a professora Kamilla Rodrigues. Kamilla é docente há 8 anos, formada pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Ela trabalha com a disciplina de Desenho Geométrico. A docente utiliza em suas aulas com as turmas de 9º ano do Ensino Fundamental II o conceito de quadraturas. Essa conversa foi a grande contribuição para o nosso objeto de estudo, dando origem a uma sugestão de atividades. Estas atividades estão apresentadas no Anexo A deste trabalho e podem servir para uma iniciação do conceito de quadraturas.

Nas Considerações Finais, fizemos uma reflexão acerca das investigações realizadas e sugerimos um olhar diferenciado para a Geometria e o Desenho Geométrico, com a utilização de materiais como régua e compasso.

A íntegra da entrevista realizada com a professora Kamilla Rodrigues, bem como o material gentilmente fornecido por ela, encontram-se no Apêndice A dessa dissertação.

O arquivo ANEXO DIGITAL, que acompanha esta dissertação, inclui a apresentação desta pesquisa à banca examinadora, além de uma das principais referências que possibilitaram a realização deste trabalho.

1 METODOLOGIA

Para esta dissertação, buscamos em um primeiro momento, definir o tema. Ao ser apresentado pela professora orientadora ao Professor João Bosco Pitombeira, em uma conversa inicial recebemos o seu artigo *Três Excursões pela História da Matemática*, onde após efetuar uma leitura atenta, foi definido o tema deste trabalho: Quadratura de figuras planas.

Definido o tema de pesquisa, foi dada a partida para a procura de materiais norteadores da nossa pesquisa e escrita. Livros, teses, dissertações e artigos acadêmicos já existentes foram buscados para dar início a nossa leitura. As obras acadêmicas contidas no banco de dados da CAPES, no catálogo de dissertações do Programa de Mestrado em Rede Nacional (PROFMAT) e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD). Para a seleção de material acadêmico a ser pesquisado nos trabalhos científicos já desenvolvidos para este tema, usamos como descritor inicial “Quadraturas”, dando origem à Tabela 1:

Tabela 1: Quantitativos por portal e descritor: Quadraturas

Pesquisa Bibliográfica Dados			
Produção Científica	BDTD	Periódicos Capes	PROFMAT
Dissertações	289	291	8
Teses	118	102	0

Apresentação dos dados colhidos nos portais pesquisados.

Fonte: O próprio autor.

Nesta tabela observamos o total de obras contidas nos bancos de dados sobre o tema quadraturas.

Esta primeira busca não foi satisfatória, pois incluiu obras em outras áreas do conhecimento, por exemplo, Física e Engenharia. Estabelecemos então um novo filtro “quadratura de figuras planas”. Apresentamos os resultados na Tabela 2:

Tabela 2: Quantitativos por portal e descritor: Quadratura de figuras planas

Pesquisa Bibliográfica Dados			
Produção Científica	BDTD	Periódicos Capes	PROFMAT
Dissertações	8	3	0
Teses	0	0	0

Apresentação dos dados colhidos nos portais pesquisados.

Fonte: O próprio autor.

Ao utilizar “quadratura do Círculo” como descritor, os resultados foram catalogados na Tabela 3:

Tabela 3: Quantitativos por portal e descritor: Quadratura do círculo

Pesquisa Bibliográfica Dados			
Produção Científica	BDTD	Periódicos Capes	PROFMAT
Dissertações	8	32	3
Teses	0	8	0

Apresentação dos dados colhidos nos portais pesquisados.

Fonte: O próprio autor.

Após o trabalho realizado acima, começamos a observar as atividades que nos ofereciam uma participação e interação de professores e alunos. Para falar sobre História da Matemática, as obras de Roque (2012) [7] e Roque e Carvalho (2012) [8] foram norteadoras de dessa pesquisa. Contribuíram também os trabalhos de Parreira (2017) [9], Soutier (2017) [10] que abordaram a Matemática praticada pelos egípcios, babilônios, gregos, indianos. As observações de Corrêa (2008) [11] acerca da obra *Os Elementos* de Euclides, foram citadas em nossa dissertação.

Foram realizadas pesquisas nos documentos regulatórios, com a finalidade de observar o que é citado sobre a História da Matemática e quadratura de figuras planas. As análises foram feitas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Base Nacional Comum Curricular. Após a pesquisa histórica e análise dos documentos regulatórios, foram realizadas pesquisas quantitativas e qualitativas nas obras selecionadas, com a finalidade de elaborar atividades que sugerem a utilização da técnica de quadraturas.

Inicialmente realizamos uma entrevista com a Professora de Desenho Geométrico

do Colégio Objetivo Kamilla Rodrigues. Kamila trabalha com Desenho Geométrico nesta escola para turmas de 6° ao 9° ano do Ensino Fundamental II. Conhecemos KamiLla através de uma aluna particular no Bairro de Botafogo. Em uma dessas aulas particulares, uma das dúvidas de aula era sobre quadraturas de figuras planas. Naquele momento tivemos o primeiro contato com alguém que trabalhava em sala de aula com essa técnica. Kamilla disponibilizou material próprio para análise e utilização. Este material, contendo algumas quadraturas de figuras como retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio e losango, está localizado na Seção 4.1, como exemplos inseridos na entrevista. A íntegra se encontra no Anexo B desse texto.

Após a entrevista com a docente, elaboramos um primeiro questionário de perguntas fechadas com professores das redes municipal, estadual e privada do Rio de Janeiro. Essas perguntas fazem referência a experiência profissional dos entrevistados, conhecimento do conceito de nosso objeto de estudo e se aplicam o conceito em sala de aula. Este questionário encontra-se no Capítulo 4, Seção 4.2.

Logo após, na Seção 4.3, deixamos uma sugestão de atividades baseadas no material disponibilizado pela professora entrevistada, e com base nas atividades realizadas nas dissertações de mestrado de Parreira (2017) [9] e Soutier (2017) [10].

Por fim, em nossas Considerações Finais, fizemos uma análise de nossas observações, com as conclusões acerca de nossos objetivos gerais e específicos. Que o leitor desta obra tenha uma interessante experiência neste conceito que pode fazer com que o aluno tenha uma visão diferenciada na resolução de problemas e situações problema que envolvam área de figuras planas.

No próximo capítulo, vamos observar uma análise histórica de como a Geometria era praticada nos povos antigos, desde os babilônios e egípcios até os gregos, passando pelos indianos e os seus altares geométricos.

2 QUADRATURAS: UM POUCO DE HISTÓRIA

Este capítulo visa verificar o seguinte objetivo específico "analisar a contribuição dos povos antigos na evolução da Geometria e o surgimento da técnica de quadratura de figuras planas". Para tal, nosso estudo passa pelos legados dos povos egípcios e babilônios. Pesquisamos também as importantes contribuições dos gregos, com seu rigor formal nas demonstrações, passando por importantes nomes como Euclides, Tales, Eudoxo, Arquimedes e Pitágoras e pelos povos indianos, com seus altares geométricos. No primeiro parágrafo do quarto capítulo de sua dissertação de mestrado, Corrêa (2008, p. 33) faz investigações acerca da origem dos primeiros registros sobre a determinação de áreas na História. Sem conclusões específicas, o autor cita povos anteriores aos babilônios e egípcios, que já utilizavam formas geométricas em decorações feitas de cerâmica, em ferramentas, em utensílios e também em jóias (Baron, 1985 apud Corrêa, 2008 p. 33). Neste capítulo vamos explorar os primeiros problemas de quadratura de figuras planas, analisando métodos geométricos utilizados por civilizações antigas. Vamos também mostrar como o entendimento do problema evoluiu fornecendo meios mais eficazes para a medição de áreas de figuras planas.

2.1 Babilônios e Egípcios: Contribuições

Roque e Carvalho (2012, p. 37) afirmam que a "Geometria" praticada pelos povos babilônios e egípcios era essencialmente métrica, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes. Para tanto, estes povos utilizavam propriedades geométricas de sólidos e de figuras planas sem justificativas desses resultados. Os autores comparam tal procedimento à Matemática praticada nas escolas nos dias de hoje. Corrêa (2008) reafirma citando Miguel e Brito (1996) [12]:

Na etapa da matemática prático - empírica, que se estendeu desde os tempos pré-históricos até por volta do século V a.e.C., a matemática apresentava-se como uma coleção de noções e regras isoladas obtidas diretamente da experiência, das necessidades da vida diárias e das técnicas de trabalho, sendo que a validade e a aceitação dessas regras assentavam-se no simples fato de elas darem certo, isto é, de conseguirem realizar de forma bem sucedida os objetivos imediatos visados por tarefas práticas. (Miguel e Brito, 1996 apud Corrêa, 2008, p. 27)

Corrêa (2008) cita a importância dos rios Nilo, Tigre e Eufrates sobre os povos Egípcios e Babilônios. Com relação aos egípcios, explica a importância do Nilo na determinação de áreas pelas constantes modificações de seu nível.

Na visão deste autor, as práticas sociais influenciavam a determinação de áreas que estavam ligadas ao pagamento de tributos ao rei e ao faraó, que os obrigavam a pagar pelo cultivo em suas terras. Qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra, isto é, que tenha perdido parte de seu território com o avanço do rio, poderia ir a Sesóstris¹ e expor-lhe a ocorrência; então o rei mandava homens seus observar e medir a extensão do decréscimo da terra para conceder ao detentor do lote uma redução do tributo proporcional à perda (Parreira, 2017, p. 40).

Roque e Carvalho (2012, p. 41) fazem um questionamento sobre a associação do cálculo de áreas no Egito antigo. Como resposta citam o procedimento para o cálculo de áreas e volumes. Exemplificando, mostram o problema número 6 do Papiro de Moscou², para mostrar que já naquele tempo a área do retângulo era calculada multiplicando-se a sua base por sua altura. Segue o exemplo:

Método para calcular um retângulo

Se lhe é dito, um retângulo de área $12 \overline{2} \overline{4}$ do comprimento.

Para o comprimento. Calcule $\overline{2} \overline{4}$ até obter 1. Resultado $1 \overline{3}$.

Calcule com estes $12, 1 \overline{3}$ vezes. Resultado 16.

Calcule [sua raiz quadrada]. Resultado 4 para o comprimento.

$\overline{2} \overline{4}$ é 3 para a largura. Os autores traduzem na linguagem moderna:

$$A = lb \text{ e } b = (\overline{2} \overline{4}) \implies 1 \times (\overline{2} \overline{4}) 1 = 12$$

mostram ainda que:

$$l \times l = 12 \div (\overline{2} \overline{4}) = 1 \overline{3} = 16$$

onde verificam que l é o comprimento igual a 4 e que a largura é 3 que correspondia à medida de $\overline{2} \overline{4}$.

Entretanto, os autores divergem da forma com que os egípcios calculavam a área

¹Sesóstris I ou Senuserete I foi o segundo faraó da XII dinastia do Egito. Governou a região por trinta e quatro anos (de 1920 A. E. C. a 1875 A. E. C.) após a morte do pai, Amenemés I, e foi um dos reis mais poderosos desta dinastia (<https://www.ancient-egypt-online.com/senusret-I.html>).

²O Papiro de Moscou também é chamado de Papiro Matemático de Golenishchev, em homenagem ao seu primeiro proprietário não-egípcio, o egiptólogo Vladimir Semenovich Golenishchev (1856-1947), que o comprou em 1892/93 em Tebas e que hoje é considerado um dos objetos mais importantes da coleção do Museu Estatal de Belas Artes de Pushkin, em Moscou (<https://www.obaricentrodamente.com/2022/03/os-problemas-10-e-14-do-papiro-matematico-de-moscou.html>).

do triângulo, pois discutiam se estes povos tomavam o cálculo da área pela metade da base vezes a altura ou se tomavam metade da base vezes um lado, neste caso, sendo válido somente se o triângulo for retângulo.

Os egípcios resolviam problemas sobre volumes de sólidos, calculavam áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras, e obtiveram valores aproximados para π . Seus estudos eram voltados à Arquitetura. Construíram as Pirâmides (por volta de 3000 A.E.C.), construíram barcos, barragens e canais utilizando seu conhecimento geométrico (Parreira, 2017).

Já os babilônios habitavam a região da Mesopotâmia, situada no Oriente Médio, agora ocupa o território que conhecemos por Iraque e algumas porções da Síria e da Turquia (Figura 1, Morey e Gomes, 2018) [13]. Escreviam em argilas usando uma ferramenta de metal ou madeira dura, denominada de cunha. Boa parte de seus textos matemáticos são encontrados em tábulas, placas de madeira, pedra ou outros materiais que eram utilizadas para estes registros.

Figura 1: Região atual aproximada da Mesopotâmia



Legenda: Mapa da Região Atual da Mesopotâmia

Fonte: <https://www.coladaweb.com/historia/mesopotamia>.

Estes povos, segundo Roque e Carvalho (2012) sabiam somar, subtrair, multiplicar e dividir, além de extrair raízes quadradas.

No conhecimento geométrico, os cálculos estão relacionados a questões hidráulicas

como medição de campos e construção de canais e diques (Corrêa, 2008). Estes povos estavam familiarizados, segundo o autor, com regras para calcular áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios com um dos lados perpendiculares às bases. Calculavam volumes de vários sólidos, por exemplo, cilindro e prismas retos, estes com bases retangulares e triangulares. As situações que envolviam estes cálculos de volume são contextualizadas em áreas como agricultura, construções civil ou militar, por exemplo. Calculavam volumes de muros, muralhas e barragens e o número de operários necessários para construí-los.

Entre os muitos registros dos povos babilônios, Roque e Carvalho (2012) citam o tablete YBC 7302 (Roque e Carvalho, 2012, p. 38), onde os mesopotâmios tinham uma concepção de círculo diferente da nossa. De acordo com o Axioma 3 de Euclides, o círculo é obtido traçando-se uma circunferência com um compasso. Já os babilônios consideravam o círculo como uma região limitada por uma circunferência.

Roque e Carvalho (2012) pregam cautela, sobre a Geometria utilizada pelos povos babilônios:

Apesar de ser bastante plausível a hipótese de que os procedimentos babilônios usavam raciocínios geométricos, seria precipitado concluir que, ao invés de possuírem uma Álgebra, eles fizessem Geometria. Como já sinalizamos, devemos ter cuidado ao aplicar as definições disciplinares que usamos hoje para caracterizar a Matemática dos povos antigos (Roque e Carvalho, 2012, p. 23) .

Na próxima seção, 2.2, falaremos um pouco sobre os gregos e suas importantes contribuições para a Geometria e o conceito de quadraturas.

2.2 Quadratura pelos gregos

Roque e Carvalho (2012) fazem uma comparação entre a Matemática realizada pelos babilônios e egípcios. Na visão dos autores, os babilônios e os egípcios praticavam uma Matemática marcada por cálculos e algoritmos, ao passo que os gregos a fundamentavam em demonstrações e argumentações consistentes, praticando assim uma Matemática mais teórica.

Não podemos falar em Grécia sem mencionar os grandes filósofos e matemáticos gregos. A história nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto,

que teria vivido nos séculos VII e VI A.E.C. com influência dos mesopotâmios e egípcios (Roque e Carvalho, 2012, p. 49). Tales tem grandes contribuições para a Matemática e um de seus feitos bastante conhecidos teria sido o cálculo da altura das pirâmides do Egito, a partir das semelhanças entre um de seus lados e a altura das sombras. Como transição entre as épocas de Tales e Euclides surge a Matemática Pitagórica. É frequente encontrarmos referências a Pitágoras como um dos principais matemáticos gregos (Roque e Carvalho, 2012 p. 52). Segundo os autores isso é questionável, evidências refutavam esta afirmação. Fundador da Escola Pitagórica, uma das mais influentes correntes filosóficas e científicas da Grécia Antiga, por volta do século VI A.E.C, Pitágoras possui importantes contribuições para a Matemática e Filosofia. Os pitagóricos consideravam os números como a essência de todas as coisas e defendiam que havia relações matemáticas fundamentais por trás de características naturais. Na filosofia, o núcleo do pensamento pitagórico baseava-se na ideia de que a realidade última é constituída por números e relações numéricas. Pitágoras e seus discípulos acreditavam que os princípios matemáticos podiam explicar os fenômenos do cosmos. O Teorema de Pitágoras é uma ilustração da importância dos números na compreensão do mundo físico. Além disso, os pitagóricos exploraram a harmonia musical, mostrando que intervalos musicais podiam ser expressos em termos de relações numéricas simples. A influência da Escola Pitagórica foi substancial e de longo alcance, ultrapassando os limites da matemática e filosofia para influenciar áreas como música, astronomia e ética. Mesmo após a morte de Pitágoras, suas ideias continuaram a ser desenvolvidas por seus seguidores e foram integradas ao pensamento de filósofos posteriores, como Platão. Pitágoras e seus discípulos exploraram profundamente a relação entre Aritmética e Geometria, vendo números e figuras geométricas como interligados. Através dessa relação, eles desenvolveram vários conceitos que seriam fundamentais para a Geometria, incluindo o estudo de proporções e médias. Neste sentido, Roque e Carvalho (2012) afirmam:

A concepção de Pitágoras sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e esta explicação é dada pelos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, elas consistem de números. Sendo assim, as propriedades aritméticas das coisas constituem o seu ser propriamente dito, e o ser de todas as coisas é o número (Roque e Carvalho, 2012, p. 54).

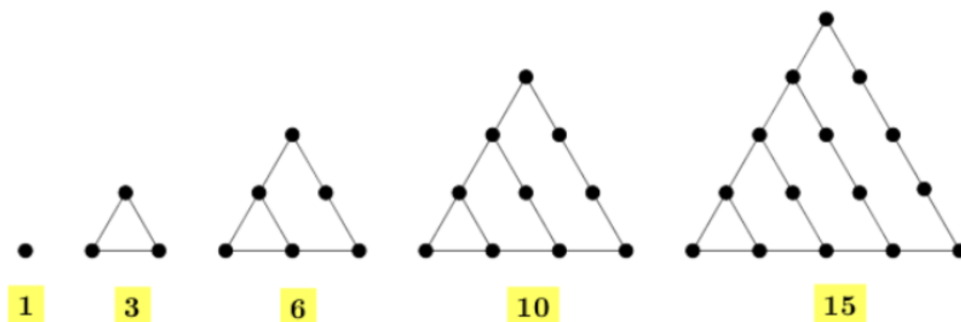
Essa relação de Pitágoras com a Geometria pode ser observada, segundo os autores,

pelos números triangulares, quadrados e pentagonais, os chamados números figurados. Estes eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que não tinham relação com a Matemática, mas remetiam a elementos discretos.

Os números triangulares podem ser associados aos números naturais 1, 3, 6, 10, 15, 21 de ordem $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Generalizando, atualmente os números triangulares (Figura 2) se apresentam da seguinte forma:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Figura 2: Números triangulares

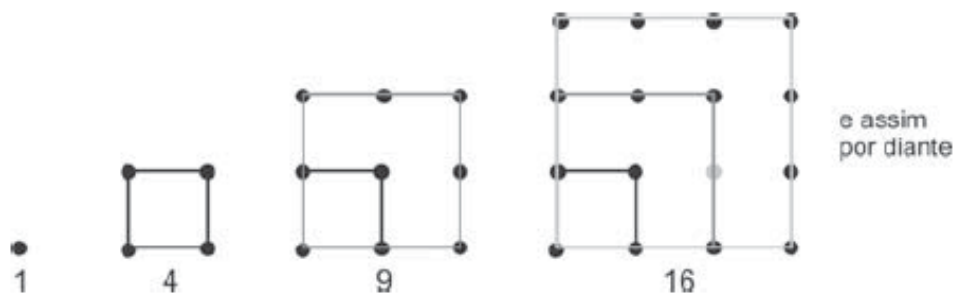


Legenda: Disposição dos números triangulares.

Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 55).

Já os números quadrados são associados aos números 1, 4, 9, 16, 25, $\dots$, de ordem $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Atualmente são representados por n^2 . Observe a Figura 3:

Figura 3: Números quadrados

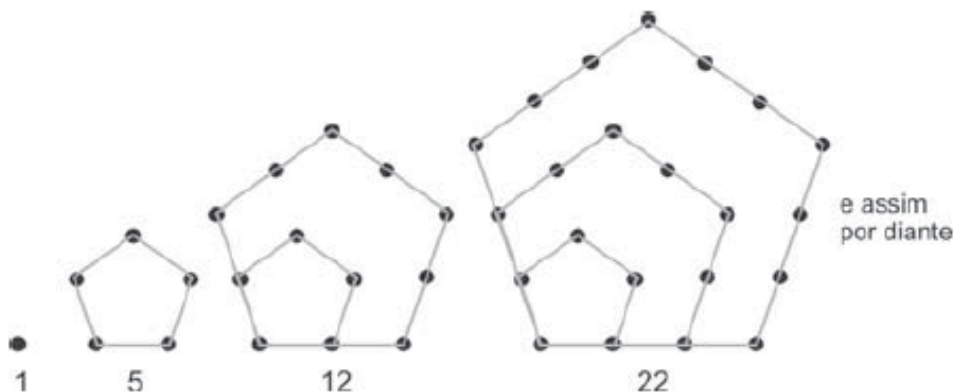


Legenda: Disposição dos números quadrados.

Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 55).

Os números pentagonais para $n = 1, n = 2, n = 3$ e $n = 4$ (Figura 4).

Figura 4: Números pentagonais



Legenda: Disposição dos números pentagonais.

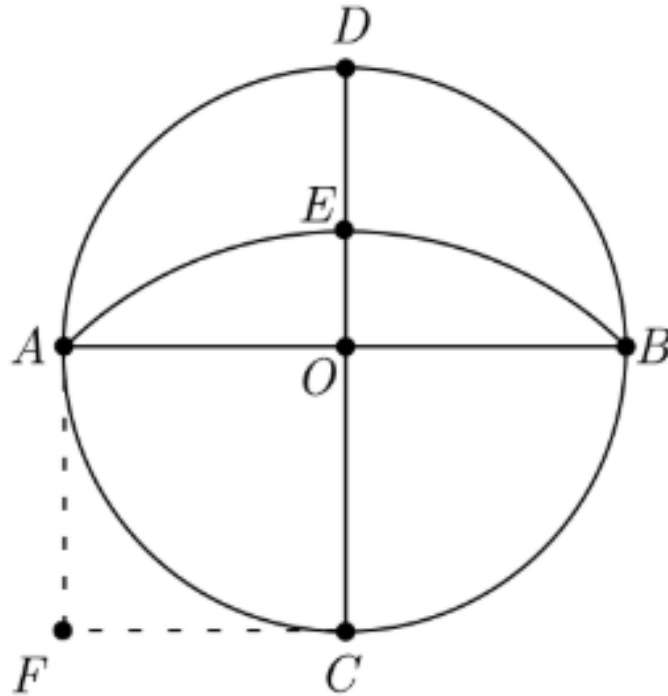
Fonte: Roque e Carvalho (2012, p. 55).

Algumas atribuições aos pitagóricos são questionáveis, tais como a descoberta das grandezas incomensuráveis e da autoria do teorema que leva o nome deste matemático. Não se conhece nenhuma prova do teorema "de Pitágoras" que tenha sido fornecida por algum pitagórico, afirmam Roque e Carvalho (2012, p. 57). Os autores afirmam ainda que este teorema não deveria ser um resultado geométrico. Passados alguns nomes de importância na observação da Matemática, na visão dos gregos, vamos agora observar alguns nomes de importante destaque para esta pesquisa.

Hipócrates de Quíos foi um matemático e geômetra grego do século V A.E.C., notável por ser um dos primeiros a fazer contribuições significativas no campo da Geometria. Ele é mais conhecido pelo seu trabalho nas quadraturas, particularmente a quadratura do círculo e da lúnula, que são esforços para encontrar áreas usando figuras geométricas conhecidas. Hipócrates era de Quíos, uma ilha grega. Ele viveu durante o período clássico da Grécia Antiga e é referido principalmente através do seu trabalho e de contribuições matemáticas. Suas obras influenciaram profundamente os desenvolvimentos posteriores em Geometria.

Soutier, citando Roque e Carvalho (2012), afirma que Hipócrates imaginou que se obtivesse êxito em quadrar as lúnulas, poderia ter sucesso na solução de um dos três problemas clássicos, no caso, a quadratura do círculo. Lúnulas são regiões delimitadas por um arco de círculo e a parte correspondente da borda de outro círculo (ver Figura 5).

Figura 5: Lúnula de Hipócrates



Legenda: Lúnula de Hipócrates.

Fonte: <https://bit.ly/lunulas-hipocrates>. Data do acesso: 10/11/2024.

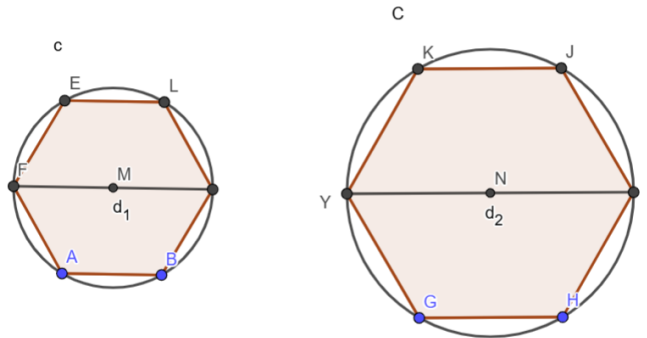
Corrêa (2008) observa a demonstração de um teorema importante para a quadratura de círculos, detalhado no livro *Elementos*, de Euclides, que diz que as áreas de círculos estão entre si como o quadrado de seus diâmetros.

Roque e Carvalho (2012) demonstram de maneira simplificada esta proposição em sua obra *Tópicos de História da Matemática* página 89. Segue a demonstração abaixo.

Sejam A_1 e A_2 , d_1 e d_2 respectivamente as áreas e os diâmetros dos círculos c e C da Figura 6. Vamos mostrar que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Figura 6: Relação entre a área dos círculos e seus diâmetros



Legenda: Círculos c e C

Fonte: O próprio autor.

Suponhamos, em primeiro lugar, que $\frac{A_1}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$ e que existe um polígono regular inscrito em c , com área P tal que $\frac{P}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Em verdade buscaremos uma contradição para esta última desigualdade.

Utilizando o resultado mostrado acima, temos que $A_1 - P$ é menor do que qualquer quantidade dada. Como $\frac{A_1}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$, temos também que $\frac{P}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Sendo Q a área do polígono inscrito em C e semelhante a P , sabemos, por propriedade dos polígonos inscritos, usando semelhança de triângulos, que $\frac{P}{Q} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Sendo assim, $\frac{P}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{P}{Q}$ e concluímos que $Q > A_2$. Mas Q é a área do polígono inscrito no círculo C de área A_2 , logo Q não pode ser maior do que A_2 .

Da mesma forma, suponhamos que $\frac{A_1}{A_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$ e que existe um polígono regular inscrito em C com área Q tal que $\frac{A_1}{Q} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$.

Utilizando este último resultado, temos que $Q - A_2$ é maior do que qualquer quantidade dada. Assim, como $\frac{A_1}{A_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$, temos também que $\frac{A_1}{Q} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Sendo Q a área do polígono inscrito em C e semelhante a P , por raciocínio análogo à demonstração anterior, temos que $\frac{P}{Q} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Sendo assim, $\frac{A_1}{Q} < \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{P}{Q}$ e concluímos que $A_1 < P$. Mas P é a área do polígono inscrito no círculo c de área A_1 , logo P não pode ser maior do que A_1 . A partir da dupla contradição mostrada acima, temos que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Corrêa (2008) apresenta dois casos de quadraturas de lúnulas, citando Baron (1985) [14]: a de um triângulo isósceles e de um hexágono. No primeiro caso, a lúnula é quadrável, ou seja, é possível de se encontrar um quadrado equivalente. Já no segundo caso, Hipócrates nunca conseguiu provar que a lúnula é quadrável. Embora não tenha resolvido a famosa quadratura do círculo (que provou ser impossível na forma exata), seus métodos e técnicas abriram caminho para posteriores desenvolvimentos em matemática. Hipócrates foi um dos primeiros a tentar resolver problemas geométricos complexos de forma rigorosa, usando o que hoje reconheceríamos como técnicas de integração. Ele desenvolveu métodos para transformar problemas de áreas complicadas em problemas mais simples que poderiam ser resolvidos com os conhecimentos disponíveis na época.

Eudoxo de Cnido foi um matemático e astrônomo grego do século IV A.E.C., reconhecido como uma das figuras mais importantes da matemática e da ciência na Grécia Antiga. Ele fez grandes avanços em várias áreas, incluindo Geometria, Astronomia e Filosofia. Estudou com os pitagóricos e depois se associou a Platão em Atenas. Também passou um período no Egito, onde adquiriu conhecimentos astronômicos. Eudoxo fundou uma escola em Cnido, onde ensinava matemática e filosofia, promovendo o desenvolvimento do pensamento científico e matemático. Ele desenvolveu uma teoria abstrata de proporções que permitia comparar de forma precisa as áreas e volumes de diferentes figuras geométricas. Essa teoria era essencial para o avanço matemático na resolução de problemas relacionados a quadraturas. Eudoxo é famoso pelo desenvolvimento do método da exaustão, uma técnica precursora do cálculo integral moderno. Esse método consistia em aproximar a área de uma figura curvilínea através da soma de áreas de figuras inscritas ou circunscritas cada vez menores. Utilizando esse método, Eudoxo conseguiu uma aproximação precisa da área de um círculo e volumes de sólidos.

Embora a quadratura exata do círculo não tenha sido resolvida até muito mais tarde (e provada impossível com régua e compasso), o método da exaustão de Eudoxo permitiu uma aproximação prática notavelmente precisa para a área do círculo. Corrêa (2008) citando Eves (2004) [15], define o método da exaustão:

[...] admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: se de uma grandeza qualquer subtrai-se também uma parte não menor do que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (Eves, 2004, p. 419 apud Corrêa, 2008, p. 38) [15].

Suas abordagens, matematicamente rigorosas, influenciaram gerações posteriores de matemáticos, incluindo Arquimedes.

Arquimedes foi um matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego que viveu por volta de 287 A.E.C. a 212 A.E.C. Ele é amplamente reconhecido por suas contribuições significativas para a Matemática e a Física, incluindo seus estudos revolucionários na Geometria e nas quadraturas.

Citando Katz (1998) [16], Corrêa (2008) diz que Arquimedes era engenheiro militar que utilizava seus conhecimentos matemáticos a serviço do rei Hierão. Criou máquinas de guerra que conseguiram conter ataques do exército romano sobre Siracusa durante meses.

A Matemática na Grécia antiga é amplamente reconhecida por sua abordagem rigorosa e fundamentada na lógica e demonstração. Seguindo por esta linha, Arquimedes foi o primeiro a apresentar uma prova rigorosa da área do círculo, usando dois métodos bastante utilizados na Matemática grega: *o método da exaustão*, de Eudoxo, e a *prova de redução ao absurdo*.

Em seu tratado, intitulado *A Medida do Círculo* [17], em sua proposição de número 1, Arquimedes faz uma equivalência entre a área do círculo e a área de um triângulo retângulo, onde um dos catetos desse triângulo é o comprimento da circunferência relativa ao círculo dado e o outro cateto, que contém o ângulo reto, é o raio deste círculo. Corrêa (2008) em sua dissertação de mestrado, faz referência aos estudos de Arquimedes:

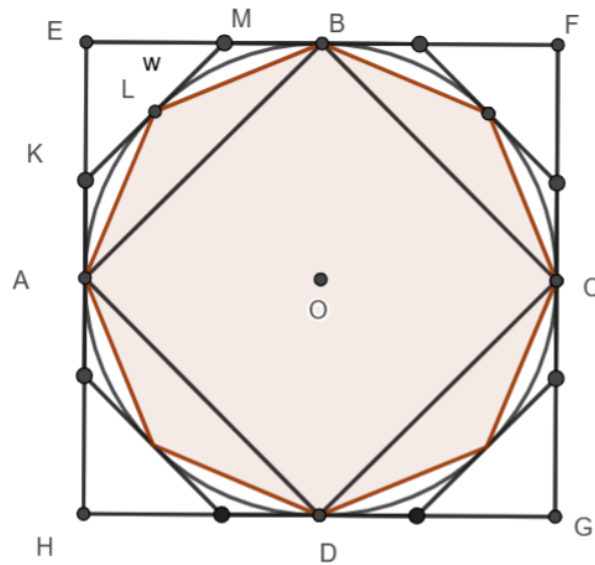
A área de Qualquer círculo é igual a área de um triângulo retângulo, no qual um dos lados, partindo do vértice cujo ângulo é reto, é igual ao raio, e o outro é igual a circunferência do círculo (Corrêa, 2008, p. 39) .

Para a análise dessa demonstração, utilizamos as obras de Corrêa (2008) e Soutier (2017), com o objetivo de mostrar um resultado para um estudo da quadratura do círculo.

Soutier (2017) afirma que como ideia principal para a demonstração, Arquimedes quer aproximar a área do círculo por áreas de polígonos inscritos e circunscritos, duplicando sucessivamente seus lados.

Sejam I_n e D_n , $n \geq 2$, os polígonos de 2^n lados, respectivamente, inscritos e circunscritos na circunferência. Assim teremos o quadrado inicial ABCD, os lados AL e LB do octógono regular inscrito; o quadrado circunscrito original, EFGH e o octógono regular circunscrito de lado KM.

Figura 7: Quadratura do Círculo

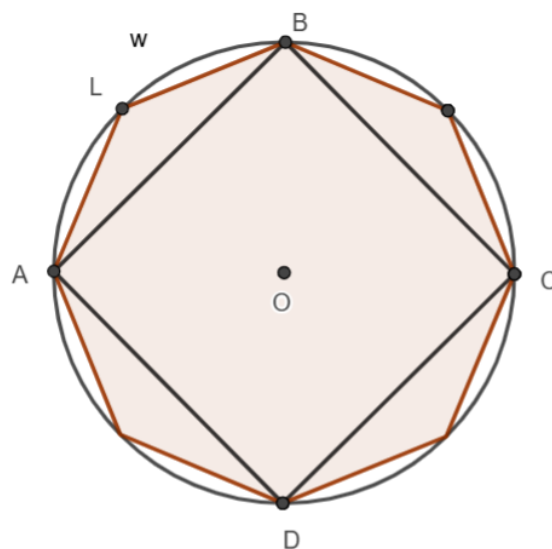


Legenda: Quadratura do Círculo por Arquimedes.

Fonte: O próprio autor.

Para efeitos de uma melhor organização e entendimento do leitor, vamos separar as figuras inscritas das figuras circunscritas, como mostramos na Figura 8.

Figura 8: Quadratura do Círculo



Legenda: Polígonos inscritos no círculo.

Fonte: O próprio autor.

Sejam W e T as áreas do círculo w e do triângulo, respectivamente. Inscrevemos no

círculo um quadrado, um octógono regular, e assim por diante, passando de um polígono regular de 2^n lados para o de 2^{n+1} lados ($n \geq 2$).

Seja I_n , ($n \geq 2$), o polígono de 2^n lados, inscrito no círculo. Mostraremos que não podemos ter $W > T$.

Suponhamos, inicialmente, que $W > T$. Assim, existe uma quantidade d tal que $d = W - T > 0$. De maneira geral, dado um polígono regular inscrito em um círculo, sua área é o produto de seu apótema por seu semi-perímetro. Aplicando este resultado ao polígono I_n , temos que sua área é igual à do triângulo retângulo de catetos iguais, respectivamente, ao apótema e ao perímetro do polígono regular de 2^n lados inscrito no círculo.

$$A_{I_n} = n \cdot \frac{OP}{2} \text{ e } T = l_n \cdot \frac{OP}{2} .$$

onde: l_n é o lado do polígono inscrito. $OP < r$ é o apótema (Figura 8).

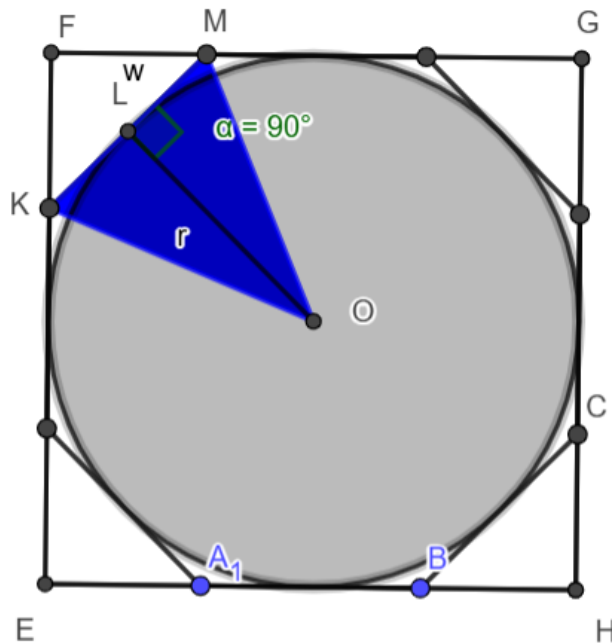
Mas os apótemas e os perímetros dos polígonos inscritos são sucessivamente menores que o raio e a circunferência do círculo, isto é, menores do que os lados correspondentes do triângulo de área T , concluímos que a área de I_n é menor que T para todo n . Assim $A_{I_n} < T < W$.

Agora, como A_{I_n} é menor que W , podemos obter uma quantidade $k_n = W - A_{I_n}$. Usando o Lema de Euclides, observamos que quando aumentamos o número de lados do polígono essa quantidade pode ser tomada menor que qualquer quantidade dada. Logo, sendo n suficientemente grande, podemos obter $k_n < d$.

Mas, como $A_{I_n} < T < W$; $d = W - T < W - A_{I_n} = k_n$, contradição. Logo, não podemos tomar $W > T$.

Supondo $W < T$, e seja D_n , ($n \geq 2$), o polígono de 2^n lados circunscrito (Figura 9).

Figura 9: Quadratura do Círculo



Legenda: Polígonos circunscritos.

Fonte: O próprio autor.

Assim existe uma quantidade e tal que $e = T - W > 0$. Essa quantidade e é o excesso do triângulo para o círculo. De maneira geral, dado um polígono regular circunscrito em um círculo, sua área é o produto de seu apótema por seu semiperímetro. Aplicando este resultado ao polígono D_n , temos :

$$A_{D_n} = n \cdot \frac{r}{l} \text{ e } T = r \cdot \frac{OL}{2} .$$

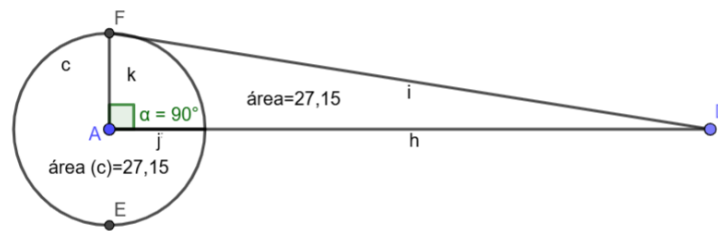
Mas os apótemas e os perímetros dos polígonos circunscritos são sucessivamente maiores que o raio e a circunferência do círculo, isto é, maiores do que os lados correspondentes do triângulo de área T , concluímos que $W < T < A_{D_n}$. Agora, como $A_{D_n} > W$, podemos obter $A_{D_n} = Y_n - W$. Usando o Lema de Euclides, observamos que quando aumentamos o número de lados do polígono, esta quantidade pode ser tornada maior que qualquer quantidade dada. Logo, sendo n suficientemente grande, podemos obter $Y_n > e$.

Mas, como $A_{Dn} < T < W$; $e = T - W < A_{Dn} - W = Y_n$, contradição. Assim, não podemos tomar $W < T$.

A primeira parte da demonstração negou que a área do círculo W fosse maior que o triângulo T , e a segunda parte negou que W fosse menor que T . Essa demonstração, chamada de demonstração por duplo absurdo, nos levou a afirmar que a hipótese inicial de que a área do círculo fosse diferente da área do triângulo fosse equivocada. Logo, temos que $W = T$ (veja a Figura 10).

Para a quadratura do círculo, basta então quadrar o triângulo retângulo equivalente, construção essa, realizada pelos gregos.

Figura 10: Triângulo retângulo equivalente ao círculo



Legenda: Triângulo retângulo.

Fonte: O próprio autor.

Euclides, frequentemente referido como o "Pai da Geometria", foi um matemático grego que viveu aproximadamente entre 300 A. E. C. e 275 A. E. C. em Alexandria, no Egito. Ele é mais conhecido por seu trabalho monumental intitulado *Os Elementos*, uma coleção de 13 livros que, segundo Roque e Carvalho (2012, p. 66), não podem ser vistos como uma compilação. Eles sistematizaram grande parte do conhecimento matemático da época. Pouco se sabe sobre a vida pessoal de Euclides. A maior parte do que sabemos sobre ele vem de referências posteriores a seu trabalho e influência. Ele floresceu em Alexandria, uma importante cidade acadêmica e cultural do período helenístico. Os *Elementos* se dividem em 3 grandes partes (Roque e Carvalho 2012, p. 67): A parte de Geometria plana, contida nos livros de I - VI; Aritmética, nos livros VII - IX e Geometria espacial, nos livros XI - XIII. Roque e Carvalho (2012) afirmam que os primeiros livros da importante obra de Euclides tinham como principais objetivos mostrar que diversas construções podem ser efetuadas somente com régua (não graduada) e compasso. Os estudiosos não chegaram a um consenso sobre o motivo de tal restrição. Nos livros I e II, observamos proposições a respeito da equivalência de áreas. Roque e Carvalho (2012) nos

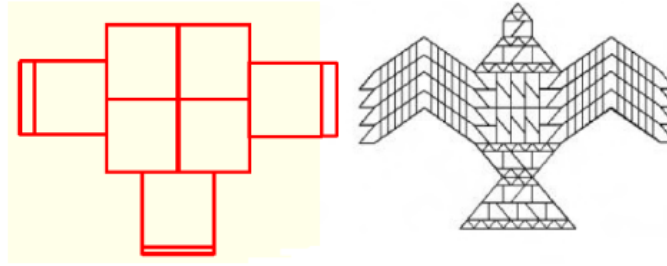
dão importantes demonstrações de proposições que nos chamam a atenção para a técnica de quadraturas. Tais proposições constam nas páginas 73 a 77 de *Tópicos de História da Matemática* (Roque e Carvalho, 2012)

2.3 Quadratura na Índia

A Geometria, tal como outras áreas da matemática, foi amplamente desenvolvida e estudada na antiga Índia. Parreira (2017) destaca a importante interação entre a matemática e outras disciplinas, como astronomia e arquitetura, e sublinha o caráter global e atemporal das descobertas matemáticas. Citando Gaspar (2003, p. 67 - 69) [18], Parreira (2017) afirma que a Geometria na Índia possuiu 3 períodos distintos: o primeiro evidenciado por uma geometria contida em cerâmicas, contendo círculos que se interceptam, quadrados, triângulos unidos pelo vértice, retângulos com os quatro lados encurvados, entre outros. O segundo período foi marcado, segundo a autora, pela relação das exigências teóricas na construção de altares de tijolos. No último período, demonstravam conhecimento sobre o teorema "de Pitágoras" e indiretamente tinham o conhecimento de equivalência de áreas, desenhando figuras de uma área dada e figuras de área igual de outras. Os matemáticos indianos desempenharam um papel significativo na evolução desta ciência contribuindo com conceitos e métodos que ainda são fundamentais hoje. Eles incluem regras geométricas para a criação de figuras com áreas específicas, e destacam o conhecimento avançado sobre figuras como quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, semicírculos, círculos, retângulos com um semicírculo sobre um lado que se ajustavam a dimensões ou áreas específicas.

Os antigos indianos associavam os deuses a quadrados e os humanos a retângulos. A associação de deuses gera um novo deus e isso os levou a buscarem a solução para resolver vários problemas geométricos. Um dos mais famosos e complexos altares indianos da época védica é o *Altar do Falcão* (Figura 11) cuja estrutura básica é formada por 7 quadrados. Outros altares, na forma circular como o *Sararathacakracit* e de quadrados, como o *Samuhaya*. Na Figura 11 o altar de fogo em forma de falcão é um dos exemplos.

Figura 11: Altar do falcão

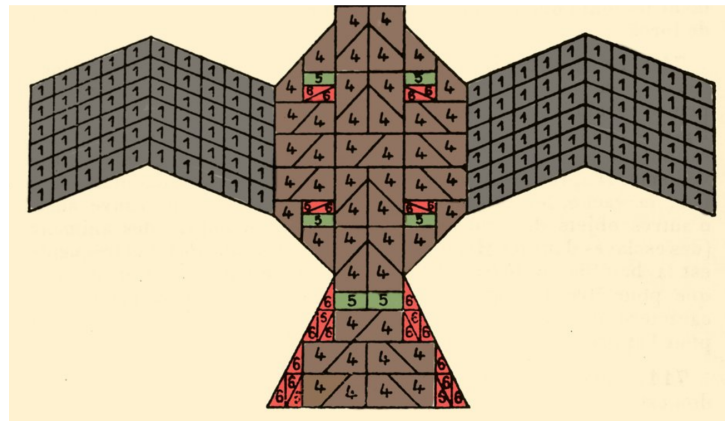


Legenda: O Altar do falcão.

Fonte: Parreira (2017, p. 41)

Datando de aproximadamente 800 A. E. C. a 200 A. E. C. (Plofker, 2008) [19], os Sulba-sutras são textos que contêm instruções para a construção de altares de sacrifício. Eles incluem regras geométricas para a criação de figuras com áreas específicas, e destacam o conhecimento avançado sobre figuras como quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, semicírculos, círculos, retângulos com um semicírculo sobre um lado que se ajustavam a dimensões ou áreas específicas.

Figura 12: Altar do fogo



Legenda: Geometria das Sulba - sutras: planta do altar de fogo em forma de falcão. Esquema matemático referente às regras de construção dos altares sacrificiais do período védico da Índia (1500-500 a.E.C.).

Fonte: Parreira (2017).

3 ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL ATUALMENTE

3.1 Marcos regulatórios - 1997 até o momento

Neste capítulo, mostramos o que dizem os documentos curriculares sobre a História da Matemática. Os documentos a serem utilizados foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base nacional comum curricular (BNCC).

Em seu artigo *“História da Matemática Prescrita em Documentos Curriculares Para o Ensino Fundamental: Relações com a Humanização do conhecimento Matemático”*, Machado e Trivizoli (2018) [20] destacam como a História da Matemática está presente nos documentos normativos da educação básica, e como podem contribuir para o ensino de matemática, fazendo conexão com a História e a humanização de seu processo de ensino aprendizagem.

As autoras citam as Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná. Em nosso trabalho, buscamos como fonte de pesquisa os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram publicados no ano de 1998 pelo Ministério da educação. A parte direcionada para a Matemática que trabalhamos deste documento é aquela voltada para o ensino fundamental II. No que diz respeito à História da Matemática, neste documento, até a sua publicação, era um ramo em construção e adquirindo importância na aprendizagem matemática, por entender-se que, de fato propicia um entendimento amplo acerca da trajetória dos conteúdos e métodos. Após a sua publicação, este documento abordou a História da Matemática como um caminho para se fazer Matemática e que pode ser um recurso eficaz no processo de ensino aprendizagem, trabalhando com diversas possibilidades e formas de ensinar facilitando o docente na construção de sua prática. Nos PCN (BRASIL, 1998) [6], observamos também o cuidado para que não confundam História da Matemática com uma simples memorização de acontecimentos e fatos. Machado e Trivizoli (2018, p. 168) levantam essa questão, citando os seguintes trechos dos PCN (BRASIL, 1998) [6]:

Assim, a História da Matemática é defendida como um recurso didático possibilitador do desenvolvimento de diversos conceitos que não podem ser reduzidos à mera memorização ou menção de trechos da História da Matemática situados no tempo e no espaço do programa dessa disciplina, como também um instrumento para contextualização e construção de estratégias para a resolução de problemas (...) permite reflexões sobre acasos, coincidências e convergências do espírito humano na construção do conhecimento acumulado pela humanidade (BRASIL, 1998, p. 42 - 80) [6].

As inúmeras possibilidades de ensino de História da Matemática são evidenciadas em maior grau nos PCN como afirmam as autoras:

Neste documento, evidenciamos com maior riqueza de possibilidades o ensino de matemática via perspectiva histórica como explicação dos porquês em sala de aula e do dinamismo na matemática (Machado e Trivizoli, 2018, p. 169).

Atualmente, os PCN defendem que o ensino da Geometria deve ser contextualizado, relacionando os conceitos geométricos com situações do cotidiano e outras áreas do conhecimento, promovendo a investigação, estimulando os alunos a explorar, formular hipóteses e testar ideias, utilizando diferentes recursos: materiais manipuláveis, softwares e outras tecnologias para enriquecer a aprendizagem. No desenvolvimento do raciocínio espacial, os PCN (BRASIL, 1998) propõem atividades que ajudem os alunos a visualizar e representar objetos em diferentes perspectivas. O Desenho Geométrico, tradicionalmente associado à construção de figuras utilizando régua e compasso, desempenha um papel fundamental na formação do pensamento lógico-matemático. Ele auxilia no desenvolvimento de habilidades como:

- (a) **Visualização espacial:** A capacidade de compreender e representar objetos em diferentes dimensões.
- (b) **Raciocínio lógico:** A habilidade de construir argumentos e deduções a partir de premissas.
- (c) **Resolução de problemas:** A aplicação de conhecimentos teóricos para encontrar soluções para situações desafiadoras.
- (d) **Precisão e rigor:** A importância de seguir procedimentos e normas estabelecidas.

No que diz respeito ao Desenho Geométrico, os PCN reconhecem a importância do Desenho Geométrico para o desenvolvimento integral do estudante. No entanto, a abordagem mudou ao longo dos anos.

- (i) **Décadas de 1970 e 1980:** O Desenho Geométrico era uma disciplina obrigatória, com foco nas construções precisas utilizando instrumentos específicos.
- (ii) **Décadas de 1990 e 2000:** Com a publicação dos PCN, houve uma reorientação do ensino da Geometria, com ênfase na compreensão de conceitos e na resolução de problemas, em detrimento da técnica pura. O Desenho Geométrico passou a ser integrado às aulas de Matemática, sendo utilizado como ferramenta para explorar e construir conhecimentos geométricos.

Em síntese, os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem e explicitam algumas alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 60).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), foi criada pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) no governo de Dilma Rousseff. Este documento, homologado em 2017, pelo então ministro da educação Mendonça Filho, é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2017, p. 7) [5].

A BNCC está organizada em três componentes principais para cada área do conhecimento: unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. As unidades temáticas são grandes tópicos ou áreas de conteúdo dentro de cada disciplina. Elas organizam o currículo e proporcionam uma estrutura que ajuda a garantir que todos os aspectos essenciais de uma disciplina sejam cobertos. Em nossa pesquisa observamos a parte de Geometria destas unidades.

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento

geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2017, p. 271).

Na página 272 da BNCC observamos que este documento faz referência à equivalência de áreas e quadratura de figuras planas, mostrando que é possível a tentativa de uma solução geométrica para o cálculo de área de figuras planas:

Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (BRASIL, 2017, p. 272).

Com relação aos objetos de conhecimento, eles são definidos como os conteúdos específicos associados a cada unidade temática. No que se refere à Geometria incluímos, como objetos de conhecimento, formas geométricas, ângulos e propriedades de figuras planas e espaciais. As habilidades descrevem o que os alunos devem ser capazes de fazer com o conhecimento adquirido. Elas estão sempre combinadas com os objetos de conhecimento e especificam as competências que devem ser desenvolvidas pelos estudantes. As habilidades estão formuladas com verbos no infinitivo como identificar, analisar, sintetizar e solucionar problemas.

No tocante à nossa pesquisa, as Tabelas Tabela 4, Tabela 5, Tabela 6 e Tabela 7 mostram como os componentes principais da BNCC são essenciais para a elaboração dessa pesquisa. Elas constam em nosso texto por acharmos importante mostrar quais as competências da BNCC (BRASIL, 2017) são utilizadas para o estudo do conceito de quadraturas, em verificação ao objetivo específico “Identificar nos documentos regulatórios

a abordagem do conceito de quadraturas ”. Essas tabelas encontram-se em nosso texto organizadas por anos do Ensino Fundamental II:

Tabela 4: Geometria, competências e habilidades - 6º Ano

Competências	Habilidades
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Legenda: Competências e habilidades. Geometria 6º ano

Fonte: BRASIL, 2017, p. 302 - 303

Tabela 5: Geometria, competências e habilidades - 7º Ano

Competências	Habilidades
A circunferência como lugar geométrico	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. (EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Legenda: Competências e habilidades. Geometria 7º ano

Fonte: BRASIL, 2017, p. 308 - 309

Tabela 6: Geometria, competências e habilidades - 8º Ano

Competências	Habilidades
Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Legenda: Competências e habilidades. Geometria 8º ano

Fonte: BRASIL, 2017, p. 314 - 315

Tabela 7: Geometria, competências e habilidades - 9º Ano

Competências	Habilidades
Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Legenda: Competências e habilidades. Geometria 9º ano

Fonte: BRASIL, 2017, p. 318 - 319

4 ATIVIDADES

No presente Capítulo, relatamos as atividades realizadas para a elaboração de nosso texto. Neste Capítulo, buscamos responder às questões mencionadas na Introdução de nosso texto: "podemos relacionar, dentro das normas da BNCC (BRASIL, 2017), a História da Matemática para abordar os conceitos de áreas de figuras planas? E os professores atualmente, conseguem fazer esta abordagem?". Além disso, buscamos a verificação dos seguintes objetivos específicos: "Investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas." e "Elaborar a partir dos dados apresentados, situações onde a quadratura seja utilizada". Para tanto, na Seção 4.1 realizamos uma entrevista com a professora Kamilla Rodrigues, que trabalha com o conceito de quadraturas em sua turma de 9º ano do Ensino Fundamental II no Colégio Objetivo, no Rio de Janeiro. Na Seção 4.2, elaboramos um questionário aplicado aos professores com a finalidade de atender ao objetivo específico mencionado acima. Por fim na Seção 4.3, elaboramos uma sequência de atividades que julgamos ser útil para a introdução do conceito de quadraturas. Em conjunto, disponibilizamos também um plano de entrevista, de modo a avaliar a sequência didática apresentada. Esperamos nesse capítulo, observar a verificação dos objetivos gerais e específicos que estão na Introdução desse texto e foram mencionados aqui neste Capítulo.

4.1 Entrevista

Nesta seção, buscamos verificar o objetivo específico "Investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas". Para tanto, foi realizada uma entrevista com a professora Kamilla Rodrigues, docente do Colégio Objetivo, escola da rede privada de ensino, localizada no bairro de Botafogo, zona sul da cidade do Rio de Janeiro. O contato com a professora se deu através de uma aluna de Kamilla, que atendíamos com aulas particulares. Em uma de nossas aulas, uma das dificuldades da aluna era justamente sobre o conceito de quadraturas. Gentilmente, por intermédio de nossa aluna, conseguimos o contato de Kamilla e ela gentilmente, aceitou participar dessa entrevista e contribuir para o nosso texto, relatando um pouco de sua prática em sala de aula, como introduz e desenvolve o conceito de quadraturas em

suas aulas, quais os recursos didáticos utilizados e quais os desafios e as potencialidades desse tipo de abordagem.

Kamilla atua na área de Desenho Geométrico no Ensino Fundamental II e Álgebra no Ensino Médio. Ela iniciou sua carreira docente em 2016. A docente contou que foi contactada para uma entrevista no colégio em que leciona até hoje, onde a coordenadora perguntou sobre sua experiência com Desenho Geométrico. A professora respondeu que não tinha experiência com a disciplina, tendo contato somente na universidade. A professora ressaltou a importância de diferenciar Desenho Geométrico de Geometria e Geometria Descritiva. Ela iniciou sua jornada com o Desenho Geométrico ainda na graduação em Matemática, quando cursou a Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). O fascínio pela disciplina, despertado por um professor da instituição, levou-a a se aprofundar nos estudos e a atuar como monitora dessa disciplina.

A troca de experiências com a professora Kamila foi enriquecedora. Durante a conversa, compartilhamos com a professora Kamilla como tivemos acesso ao seu material didático. Através de uma aluna particular, que também era sua estudante, acompanhamos de perto a metodologia utilizada por ela. A aluna, bastante dedicada, permitiu-nos observar como os conceitos eram apresentados e como ela resolvia as atividades propostas. Essa experiência foi fundamental para que pudéssemos compreender a profundidade do seu trabalho e da utilização da técnica de quadraturas desenvolvida por Kamilla.

A professora destaca a importância de trabalhar com os alunos desde os primeiros anos do Ensino Fundamental II, construindo uma base sólida em Geometria. Essa base é fundamental para a compreensão de conceitos mais complexos, como as quadraturas. Em sua prática pedagógica, usa o livro de Yamada (2007) [21] como referência principal, e relata que utiliza somente o sumário da referida obra além de ter materiais didáticos próprios elaborados durante o período da pandemia. A professora adapta os conteúdos aos diferentes níveis de conhecimento dos alunos oferecendo apoio extra aos estudantes que apresentam dificuldades.

Um dos pontos fortes da sua metodologia é a utilização de materiais manipuláveis, como régua, compasso e esquadros, que permitem aos alunos realizar as construções geométricas de forma ativa. Além disso, a professora utiliza o *software ActiveInspire* para realizar demonstrações e interagir com os alunos. Ao ser questionada sobre a utilização do *software GeoGebra*, a docente afirma que não trabalha, pois em sua disciplina

é obrigatório o uso da régua e do compasso e este aplicativo faz a construção direta sem trabalhar cada etapa com os alunos.

A introdução do conceito de quadraturas ocorre no 9º ano quando os alunos já possuem uma base sólida em Desenho Geométrico. Kamila explica que a escolha do 9º ano se justifica pela familiaridade dos alunos com os conceitos básicos e pelas habilidades desenvolvidas nos anos anteriores. A professora relata que sua sequência para o ensino de quadraturas começa com equivalência de áreas. Antes de entrar no conceito de equivalência, trabalha com média geométrica ou média proporcional, dando importância a esses assuntos. Seu primeiro dia de aula, segundo ela, é uma revisão de construções fundamentais da Geometria com a finalidade de relembrar aos seus alunos antigos, desde o 6º ano, e introduzir o conceito aos alunos novos na tentativa de deixá-los no mesmo nível de aprendizagem dos conteúdos tais como construções de retas perpendiculares, mediatrizes, retas paralelas, divisão de segmentos, Teorema de Thales, todas com régua, compasso e par de esquadros. Estes últimos são usados nas construções de segmentos proporcionais, pois com régua e compasso, explica ela, as construções ficam muito poluídas. A entrevistada trabalha também com os conceitos de média e extrema razão, proporção áurea, por exemplo. Cita um pouco da História da Matemática, para falar dos segmentos incomensuráveis, explicando o uso da proporção áurea, explicando que o resultado não tem um valor exato, fazendo com que eles percebam esses resultados.

A docente baseia sua prática no ensino de quadraturas nos conteúdos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionados à área de figuras planas. Estes conteúdos foram relacionados no Capítulo 2 , Seção 2.1.

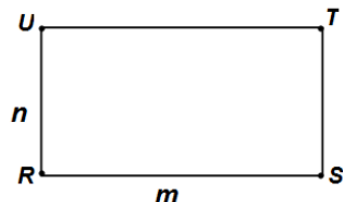
A docente utiliza uma abordagem gradual para o ensino de quadraturas, iniciando com figuras mais simples, como o retângulo. Ao trabalhar com a quadratura do retângulo, ela explora o conceito de média geométrica que já havia sido trabalhado anteriormente. No caso do triângulo, a professora enfatiza a importância da construção da mediatriz e da utilização da régua e compasso para garantir a precisão das construções.

A Figura 13 nos mostra o passo a passo para a quadratura do retângulo. Para tanto, ela utiliza a seguinte sequência de ações, utilizando régua e compasso:

Figura 13: Quadratura do retângulo

➤ **Quadratura do Retângulo**

Construir um quadrado ABCD equivalente ao retângulo RSTU dado.



1º Passo: Determinar a média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos m e n do retângulo, assim encontrando o valor de x , o lado do quadrado **AB**.

2º Passo: Com a ponta seca em **A** transferir o valor do de x para reta suporte, formando o ponto **C**, com ponta seca em **C** traçar um arco com a mesma medida de x para cima da reta suporte e com a ponta seca em **B** traçar o mesmo arco para cruzar-se com o arco anterior, o ponto de encontro deles é o ponto **D**.

3º Passo: Ligando todos os pontos ABCD, se constrói o quadrado ABCD equivalente ao retângulo RSTU.

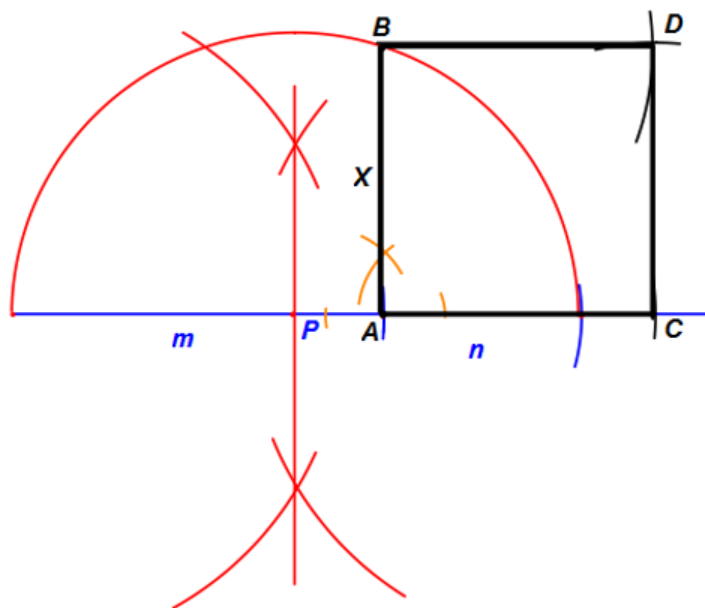
Legenda: Instruções para a quadratura do retângulo.

Fonte: PDF da atividade fornecido pela professora Kamilla Rodrigues.

- 1º Determinação da média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos m e n do retângulo, assim encontrando o valor de x , o lado do quadrado AB .
- 2º Transporte do segmento de medida x para a reta suporte que contém os segmentos m e n , formando o ponto C . Com a ponta seca do compasso no ponto C e abertura x e depois no ponto B com a mesma abertura x , forma-se no encontro dos dois arcos formados, o ponto D .
- 3º Ligando - se os pontos ABCD, constrói-se o quadrado ABCD, equivalente ao retângulo RSTU.

A Figura 14 nos fornece o resultado da sequência descrita acima::

Figura 14: Quadratura do retângulo



Legenda: Quadrado equivalente ao retângulo.

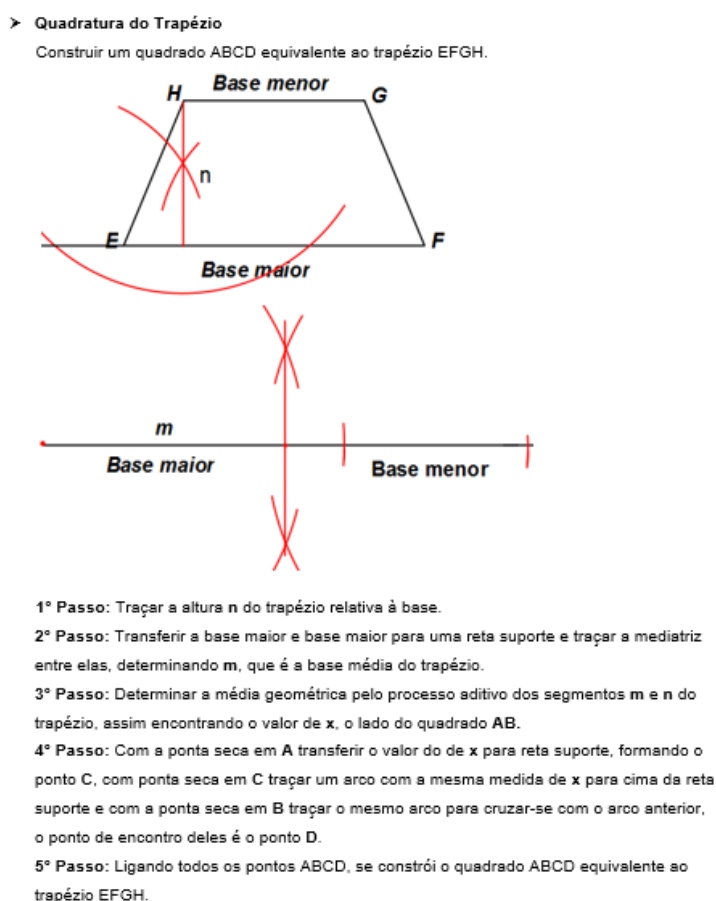
Fonte: PDF da atividade fornecido pela professora Kamilla Rodrigues.

Kamilla relatou que precisou lembrá-los da fórmula das áreas das principais figuras planas gerando uma resistência dos alunos por conta da utilização da Álgebra. Ela justificou para os discentes que eles estão vendo área de figuras planas desde o sexto ano e que precisava lembrar. As áreas revisadas pela professora são retângulo, triângulo, losango, trapézio e paralelogramo. Questionamos a docente se ela primeiro construía um retângulo equivalente e depois fazia a quadratura do retângulo. Sua resposta foi que não, ela utilizava a fórmula da área da figura. Por exemplo, cita área do triângulo, utilizando a média geométrica com a base e a metade da sua altura, utilizando a construção da mediatriz. Segundo a docente, os alunos já estão familiarizados com as construções citadas acima, pois tiveram aula no 6º ano de Desenho Geométrico. Kamilla algumas vezes chama a atenção dos alunos, nessa construção, pelo fato dos discentes tentarem a construção utilizando a régua, medindo o segmento e dividindo por dois. Continuamente, ela alertava aos alunos sobre a importância das construções de segmentos serem realizadas utilizando as técnicas de transporte de segmentos para a reta suporte que contém a base do triângulo utilizando somente a régua e o compasso.

Em suas aulas nas turmas de 8º ano, a professora retoma os conceitos de construção de retas perpendiculares. Outras construções citadas pela professora em nossa conversa

são o losango e o trapézio, construção considerada por ela um pouco mais trabalhosa, trabalhando com a fórmula: primeiro, a soma das bases, transportando para um reta suporte. Logo depois oferece aos alunos a opção de transformar a soma das bases em uma base média ou dividir a altura por dois. Observando um grau maior de dificuldade e a possibilidade de não caber no caderno de desenho, Kamilla sugere transformar o problema em duas etapas: primeiro fazendo a base média, transformando a soma da base maior com a base menor dividindo por dois, depois transportar a altura, fazendo então a média geométrica com a finalidade de se obter o lado do quadrado equivalente. De posse do lado deste quadrado, procedemos da mesma forma que as instruções relatadas acima, na construção do quadrado equivalente ao retângulo da Figura 13. O passo a passo dessa construção e o quadrado equivalente estão na Figura 15 e na Figura 16.

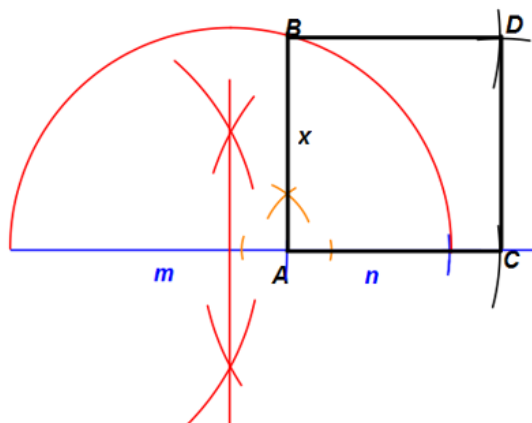
Figura 15: Quadratura do trapézio



Legenda: Quadratura do trapézio: instruções.

Fonte: PDF da atividade fornecido pela professora Kamilla Rodrigues.

Figura 16: Quadratura do trapézio



Legenda: Quadrado equivalente ao trapézio.

Fonte: PDF da atividade fornecido pela professora Kamilla Rodrigues.

A professora Kamilla incentiva a autonomia dos alunos propondo desafios que os levam a pensar de forma crítica e a buscar soluções criativas. Ao propor a quadratura de um hexágono, por exemplo, a professora observou que os alunos desenvolveram diferentes estratégias para resolver o problema como a divisão do hexágono em triângulos equiláteros e a transformação em trapézios. Destaca os benefícios do ensino de quadraturas através do Desenho Geométrico. Ao trabalhar com construções geométricas, os alunos desenvolvem um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos superando a simples memorização de fórmulas. A prática do Desenho Geométrico permite que os alunos visualizem e manipulem os objetos geométricos tornando o aprendizado mais concreto e significativo.

No tocante à avaliação, Kamilla utiliza uma variedade de instrumentos, incluindo provas escritas e obrigatórias que estão em concordância com o planejamento da escola, além trabalhos práticos. Os trabalhos práticos, como por exemplo o Trabalho de Aula Pontuado (TAP), permitem que os alunos demonstrem sua compreensão dos conceitos de forma mais criativa e significativa. A professora destaca a importância de relacionar os conteúdos de Desenho Geométrico com situações do cotidiano como a construção de modelos tridimensionais e a análise de estruturas arquitetônicas.

A docente relatou que realiza esse tipo de trabalho não só com as turmas de 9º ano, às quais ela ensina o conceito de quadraturas, mas realiza com todas as suas turmas de Desenho Geométrico. Por exemplo, nas turmas de 6º ano, trabalha com figuras espaciais, produzindo sólidos geométricos com jujubas que formam os vértices do poliedro. No

7º ano, contou que irá realizar um trabalho que mostra a importância do triângulo no dia a dia, mencionando a ideia do polígono rígido e mostrando o exemplo de grandes construções que são feitas com triângulos devido a essa rigidez. Kamila contou que os alunos no ano passado construíram a Golden Gate, ponte localizada em San Francisco, nos Estados Unidos da América. Eles utilizaram, segundo ela, palitos de churrasco e cola quente. Relatou também que a ponte suportou 12 Kg de massa. Gostou muito da construção, mostrando assim como é importante tratar de geometria na prática, no dia a dia. A professora observa que os alunos que estudam Desenho Geométrico com ela desenvolvem uma maior autonomia e confiança em suas habilidades matemáticas. Ao trabalharem com construções geométricas, os alunos aprendem a pensar de forma crítica e a resolver problemas de forma mais eficiente.

Ao abordar o tema das quadraturas, Kamilla reconhece a dificuldade de encontrar situações cotidianas que permitam uma contextualização direta. No entanto, ela acredita que a prática das construções geométricas e a exploração de diferentes tipos de figuras contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. A docente destaca os benefícios do ensino de quadraturas por meio do Desenho Geométrico. Ao trabalhar com construções geométricas, os alunos desenvolvem um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos, superando a simples memorização de fórmulas. A prática do Desenho Geométrico permite que os alunos visualizem e manipulem os objetos geométricos, tornando o aprendizado mais concreto e significativo.

A paixão da professora Kamilla pelo Desenho Geométrico é contagiante e contribui para criar um ambiente de aprendizagem mais motivador. Ao tornar as aulas mais dinâmicas e práticas, a professora desperta o interesse dos alunos e os incentiva a explorar diferentes formas de resolução de problemas.

Essa conversa foi um divisor de águas na realização deste projeto. As sequências didáticas realizadas por Kamilla foram inspiradoras para a elaboração de atividades com professores, que detalhamos nas próximas Seções.

4.2 Questionário Aplicado

Nesta seção, visando ainda atender aos objetivos específicos "Investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas". Analisamos as respostas dos docentes, via *Formulários Google*. Este instrumento foi

utilizado pela facilidade de um *feedback* imediato, de um maior compartilhamento e cooperação na sua criação. Concordando com Reis (2024, p. 62) [22], destacamos que a análise do conteúdo das questões apresentadas tem caráter qualitativo, buscando uma melhor abordagem ao professor, no tocante às atividades que serão apresentadas na próxima seção. Citando Godoy (1995) [23], Reis (2024, p. 62) [22] indica que por se tratar de uma pesquisa qualitativa, todo o processo de observação, interpretação e discussão dos dados foi elaborada pelo autor sem a necessidade de utilização de instrumentos para o tratamento estatístico:

[...] a pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo a medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo. (GODOY *et. al*, 1995 , p. 58 apud: Reis, 2024, p. 62) .

Da mesma forma, esta atividade apresentou perguntas fechadas, com seleção múltipla visando conhecer o participante, no tocante a sua experiência em sala de aula, seu contato com a Geometria e o Desenho Geométrico. Com isso , a análise, a observação e o tratamento dos dados foram realizados pelo autor. O questionário se encontra nos Anexos desta dissertação. Foram coletadas e analisadas respostas de um total de onze docentes. Não solicitamos os nomes no questionário, somente seus *e-mails*.

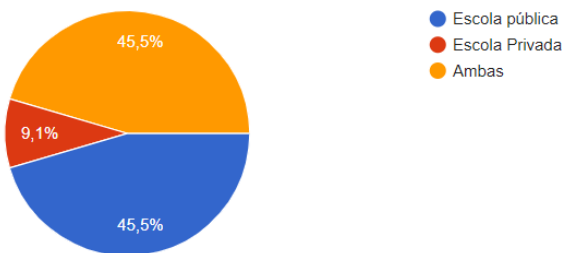
A primeira pergunta tem como objetivo verificar as redes de ensino nas quais o docente trabalha. A questão permite mais de uma resposta:

1. Você atua ou atuou em:

- Escola pública
- Escola Privada
- Ambas

As respostas coletadas geraram a Figura 17:

Figura 17: Pergunta 1: Rede de atuação do docente



Legenda: Análise das respostas da rede de trabalho do docente.

Fonte: O próprio autor.

De acordo com a Figura 17, a grande maioria dos docentes trabalha nas redes pública e privada, poucos docentes trabalham somente na rede privada.

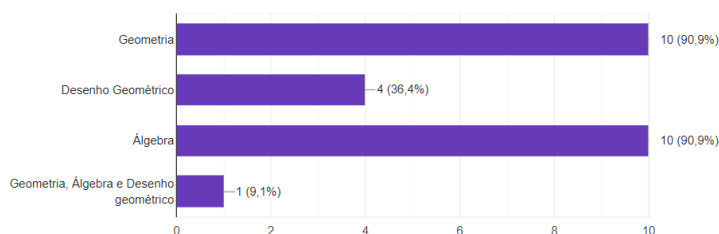
Na segunda pergunta, questionamos os docentes sobre o contato com as disciplinas de Álgebra, Geometria e Desenho Geométrico até o ano de 2023. Limitamos a este ano para que os dados de nossa pesquisa sejam analisados até o presente ano.

2. Marque as disciplinas que você já lecionou até 2023:

- Geometria
- Desenho Geométrico
- Álgebra

Observando o gráfico:

Figura 18: Pergunta 2: Disciplinas ministradas pelo docente



Legenda: Disciplinas já lecionadas pelo docente até 2023.

Fonte: *Google Forms*.

A análise desta pergunta nos permite perceber que os docentes lecionam somente as disciplinas de álgebra e geometria, porém, retomando à pergunta 1 aonde observamos

os docentes trabalhando nas redes pública e privada, em que álgebra e geometria não são tratadas como disciplinas e sim como uma das cinco unidades temáticas (BRASIL, 2017,p. 268-271) descritas na BNCC. Elas são relevantes para a realização de nosso estudo.

As duas perguntas seguintes se referem ao tempo de experiência em sala de aula do docente e em quais segmentos os docentes atuam ou já atuaram:

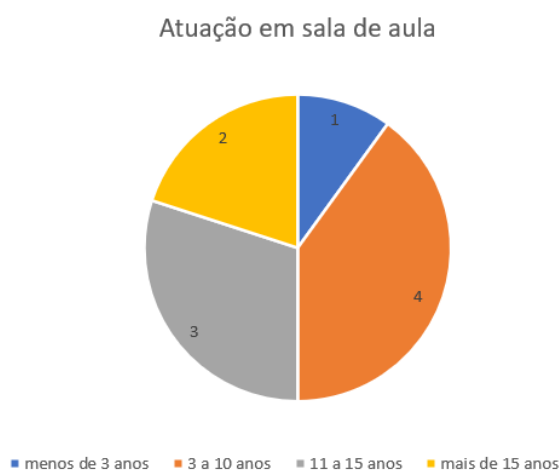
3. Quanto tempo em sala de aula?

- 3 a 10 anos
- 11 a 15 anos
- mais de 15 anos

4. Em quais séries você atua ou já atuou?

- Ensino Fundamental 2 (anos finais)
- Ensino Médio
- Ambas

Figura 19: Pergunta 3: Tempo de atuação no ensino



Legenda: Tempo de atuação em sala de aula do docente.

Fonte: O próprio autor.

A pergunta 3 (Figura 19) nos permite observar que a grande parte dos docentes acompanhou o surgimento da Base Nacional Comum Curricular, documento que atualmente regula o sistema de educação básica. Com relação aos segmentos de atuação do

docente, observamos que a maioria dos entrevistados, num total de 72,7 % atua no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, somente uma pequena parte, 9,1 %, atua somente no Ensino Fundamental II e 18,2 % atua somente no Ensino Médio. Com relação ao tempo de atuação do docente, levou-se em conta o tempo de pandemia para se definir o limite anterior, neste tempo, o processo de ensino aprendizagem foi realizado todo de forma remota e de forma híbrida. Este processo ficou comprometido, principalmente no ensino público, onde ocorreu um processo de priorização curricular. A priorização curricular consistiu em identificar e organizar os conteúdos mais importantes de um currículo escolar, focando nas habilidades e conhecimentos essenciais para o desenvolvimento dos estudantes. Essa prática se tornou ainda mais relevante durante a pandemia de COVID-19, quando as escolas precisaram se adaptar rapidamente ao ensino remoto e híbrido. Foi uma estratégia fundamental para garantir a continuidade do aprendizado e minimizar os impactos da crise na educação.

A próxima pergunta, estabelece um marco na continuidade de nosso questionário. A partir dela se o professor tivesse o conhecimento do conceito de quadraturas, seguia adiante, caso não tivesse poderia encerrar a sua participação. Todas as perguntas, até aqui, eram obrigatórias em seu preenchimento.

5. Conhece o conceito de quadraturas?

- sim
- não

Foi uma grata surpresa pois a maioria dos docentes, um pouco mais que 80% em algum momento já ouviu falar neste conceito. Somente um docente encerrou a sua participação no questionário.

No que se refere à utilização do conceito de quadraturas em sala de aula e em quais disciplinas o professor já ensinou o conceito de quadraturas, observamos as questões seguintes:

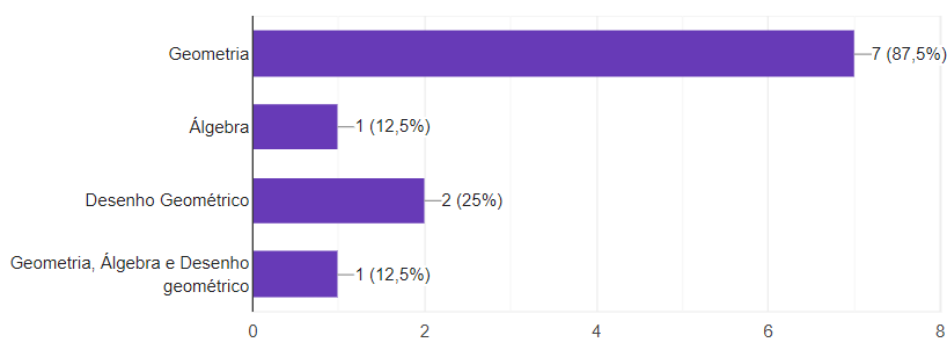
6. Usa ou já usou o conceito em sala de aula?

- sim
- não

7. Marque a(s) disciplina(s) em que já utilizou o conceito de quadraturas?

- Geometria
- Álgebra
- Desenho Geométrico
- Geometria, Álgebra e Desenho Geométrico

Figura 20: Pergunta 7: Disciplinas em que o docente utilizou o conceito de quadraturas



Legenda: Respostas dos docentes sobre as disciplinas em que utilizaram o conceito de quadraturas

Fonte: O próprio autor.

Observou-se, na pergunta 6, sobre a utilização em sala de aula do conceito de quadraturas, que 60% dos entrevistados respondeu que utiliza. Na questão seguinte, a observação é que as áreas de atuação do professor, na utilização do conceito de quadraturas, são Geometria e Desenho Geométrico, como mostra a Figura 20. Esse resultado era bastante esperado, após a conversa com a professora Kamilla (Seção 4.1) deste capítulo.

8. Quais materiais utiliza ou utilizou para a abordagem do conceito de quadraturas?

- Materiais manuais (régua, compasso, etc.)
- Recursos computacionais

Com relação aos materiais que o docente utilizou para a abordagem do conceito de quadraturas, observamos que todos os entrevistados utilizam materiais manuais como régua e compasso. Destes, apenas um utiliza também recursos computacionais (programas de Geometria dinâmica). A não utilização desses recursos computacionais aqui pode ser

entendida pela dificuldade em se ter disponíveis os recursos tecnológicos e a familiarização do docente no manuseio desses *softwares*.

9. Utilizou a História da Matemática como motivação inicial para o uso da quadratura?

- sim
- não

A maior parte dos docentes (um pouco mais que 60%) concorda que, para a abordagem do conceito de quadraturas, não podemos deixar de mencionar a História da Matemática.

Estes registros são bem esclarecedores, nos fazendo buscar um outro olhar para a prática da Geometria, e o Desenho Geométrico, com construções utilizando régua e compasso.

4.3 Sequência de Atividades Escritas

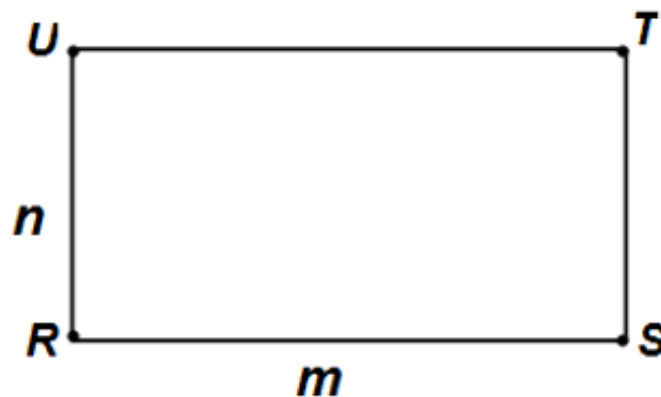
Um dos objetivos de nossa pesquisa foi elaborar, a partir dos dados apresentados, situações onde a quadratura seja utilizada. A sequência de três situações, onde sugere-se a utilização somente de régua e compasso para a sua solução, pode ser realizada com os professores e com alunos. A professora Kamilla Rodrigues, em seu plano de ensino, utiliza a técnica de quadraturas com as turmas de nono ano do Ensino Fundamental II, após os alunos, segundo ela, já estarem familiarizados com os conceitos já vistos de transporte de segmentos, construção de mediatrizes, retas perpendiculares, equivalência de áreas, construção de arcos, média proporcional. Estes conceitos foram vistos ao longo das séries do ensino fundamental. Não tivemos a possibilidade de aplicação destas atividades, visto que, pelo tempo de elaboração de nosso texto e disponibilidade dos professores, ficou difícil um momento que reunisse alguns docentes para esta atividade. Sendo assim, deixamos como uma sugestão a ser aplicada.

1. Um agricultor possui um terreno retangular e deseja gramá-lo apenas com uma placa. Entretanto, a empresa contratada oferece apenas placas quadradas de mesma área que o terreno. Com isso, o agricultor precisou alterar o formato na planta de seu terreno transformando-o do formato de um retângulo (Figura 21) para o de um quadrado, mantendo a mesma área. Sabendo que este agricultor dispõe de uma

régua e um compasso para construir a nova planta deste terreno, refaça a planta deste terreno. Logo após, responda:

- Descreva o passo a passo para a solução deste problema.
- Como você avalia a solução desta situação utilizando régua e compasso? E utilizando a solução algébrica?
- Indique a expressão que determina as medidas do terreno no novo projeto.

Figura 21: Terreno retangular



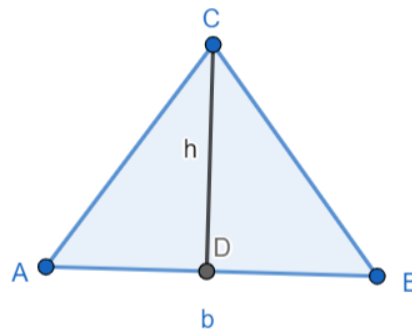
Legenda: Projeto inicial do agricultor - terreno retangular.

Fonte: PDF fornecido pela professora Kamilla Rodrigues

2. A partir da situação anterior, construir o quadrado equivalente às figuras abaixo:

(a)

Figura 22: Triângulo

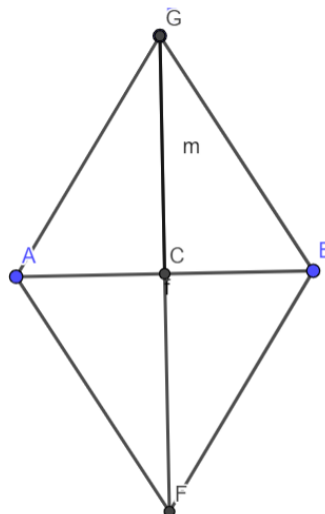


Legenda: Triângulo da situação 2.

Fonte: O próprio autor.

(b)

Figura 23: Losango



Legenda: Losango da situação 2.

Fonte: O próprio autor.

Esperamos na atividade 1 que o leitor seja capaz de concluir que o dono do terreno vai realizar a quadratura do retângulo da Figura 21, indicando no item (a) as etapas da quadratura do referido retângulo. Essas etapas podem ser observadas na Figura 13, na Seção 4.1. No item (b) queremos observar a opinião do participante no que diz respeito à comparação entre a solução algébrica e a solução geométrica da atividade do item (a). No item (c) esperamos que o participante seja capaz de encontrar uma expressão algébrica que determina as medidas do novo terreno.

Na segunda atividade, esperamos que o participante seja capaz de efetuar a quadratura da Figura 22 e da Figura 23 a partir da atividade anterior.

Após a sequência realizada, onde esperamos que o conceito de quadratura seja utilizado, o objetivo é buscar impressões de docentes das redes Pública e Privada de Educação no que diz respeito ao conhecimento do conceito de quadraturas e suas aplicações. Esta entrevista será conduzida a partir de perguntas estruturadas onde os entrevistados vão responder aos questionamentos elaborados pelo entrevistador a respeito da aula expositiva aplicada sobre quadraturas. Nessa sequência didática, os professores vão participar de algumas construções, utilizando régua e compasso, de figuras planas, cálculo de áreas destas figuras e utilização da técnica de quadraturas aplicadas a algumas delas.

Tabela 8: Plano de entrevista

Objetivo da Pergunta	Perguntas
Coletar informações dos entrevistados a respeito do conhecimento do conceito de quadratura de figuras planas.	Nossa atividade se propõe a utilizar o conceito de quadratura de figuras planas para uma alternativa de abordagem de técnicas antigas para se entender alguns conceitos que são aplicados sobre área de figuras planas. Antes desta aula, você conhecia o conceito de quadratura de figuras planas? Se sim, em que disciplina(s) você teve este contato?
Avaliar a abordagem inicial da sequência didática apresentada.	Durante a sequência didática apresentada, propusemos atividades que exigiam o conceito inicial de área de figuras planas. Na sua opinião, você acha que os alunos precisam deste conceito como uma abordagem inicial? O conceito de equivalência de áreas precisa ser abordado? Acha importante a utilização de situações problema para esta abordagem?
Analisar as observações que os entrevistados fizeram no processo de realização da sequência de atividades.	A sequência realizada utilizando régua e compasso, foi de fácil entendimento? Inicialmente, você utilizaria esses instrumentos? Pensaria algebricamente? Em uma escala de 1(péssima) a 5 (excelente), como você avalia a sua experiência na utilização do compasso na construção de figuras e solução de problemas? Que outras figuras planas você acredita que os alunos tenham facilidade para realizar estes tipos de atividades?
Buscar a opinião dos professores acerca da importância inserção da Geometria e do Desenho Geométrico no currículo do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio.	Na realidade do ensino público, como inserir no currículo a Geometria e o Desenho Geométrico, de forma que se tenha uma importância maior e que seja trabalhada desde o início do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio? Qual a importância, na sua opinião de se trabalhar a Geometria e o Desenho Geométrico com os alunos?
Considerações Finais	Em uma escala de 1(péssima) a 5 (excelente), como você avalia a experiência do uso de quadratura para o ensino de matemática e suas áreas afins?

Legenda: Perguntas Plano Entrevista.

Fonte: O próprio autor.

Com a sequência apresentada acima, conseguimos verificar o objetivo "elaborar a partir dos dados apresentados, situações onde a quadratura seja utilizada". Já no objetivo "julgar se a quadratura é uma alternativa para o ensino de área de figuras planas", devemos elaborar mais estudos, atividades e conclusões acerca da familiarização dos docentes com o tema apresentado e ainda uma melhor abordagem no tocante a utilização de instrumentos como régua e compasso, além de conceitos necessários para a utilização da técnica apresentada.

No próximo capítulo, tecemos algumas considerações acerca de nossa pesquisa de mestrado.

Conclusão

De acordo com o objetivo geral "avaliar a possibilidade, dentro das normas da BNCC (BRASIL, 2017), de aplicar a História da Matemática ao conceito de área de figuras planas e verificar se professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio conseguem aplicar, utilizando régua e compasso e/ou *softwares* de Geometria dinâmica, a técnica de quadratura", pudemos observar uma rica análise histórica do surgimento da geometria e da prática de quadratura entre os povos antigos. Desde civilizações como a egípcia e a babilônica, até os apogeu dos estudos geométricos na Grécia Antiga, como os realizados por Euclides e Arquimedes, observamos uma evolução significativa na compreensão e aplicação desses conceitos. A ancestral busca pela quadratura do círculo, um dos problemas clássicos da Antiguidade, exemplifica o desejo humano por respostas precisas e soluções algébricas para problemas geométricos complexos.

Diante dessa análise histórica, em relação ao objetivo específico "analisar a contribuição dos povos antigos na evolução da Geometria e o surgimento da técnica de quadratura de figuras planas", no Capítulo 2, na Seção 2.1 fizemos um estudo sobre a contribuição dos povos babilônios e egípcios, fazendo referência ao trabalho de Roque e Carvalho (2012, p. 37), onde os autores fazem uma comparação entre a "Geometria" praticada pelos gregos, fundamentada em demonstrações e argumentações consistentes, e a Geometria praticada pelos babilônios e egípcios, que utilizavam propriedades geométricas de sólidos e de figuras planas sem justificativas de resultados para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. A enorme contribuição dos gregos para a Matemática mereceu destaque na Seção 2.2 com as contribuições de Tales de Mileto, Pitágoras, Hipócrates de Quios, Eudoxo, Arquimedes e Euclides, com sua obra *Os Elementos*. Revimos na Seção 2.3, Os indianos e seus altares, que os levaram à busca de soluções de vários problemas geométricos. Grandes foram as contribuições desses povos. Assim, concluímos que este objetivo específico foi alcançado.

O segundo objetivo específico "identificar nos documentos regulatórios a abordagem do conceito de quadraturas" nos chamou a atenção ao analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2017) na busca de observar como a História da Matemática e a técnica de quadraturas são abordados. Com relação aos PCN (1998), Machado e Trivizoli (2018) nos alertam para que não utilizemos a História da Matemática como uma memorização de acontecimentos e fatos. Observamos que os PCNs abordam a História da Matemática como um caminho para pensar Matemática

com a possibilidade de trabalhar diversas formas de ensinar e facilitar o processo de ensino aprendizagem dos alunos e os docentes na construção de sua prática. Mencionamos o papel do Desenho Geométrico, por se achar importante a associação com régua e compasso. Importantes considerações foram feitas ao Desenho Geométrico no tocante ao desenvolvimento de habilidades como visualização espacial, raciocínio lógico, resolução de problemas, precisão e rigor. Foram observadas também mudanças na abordagem do Desenho Geométrico. Fizemos observações nas décadas de 1970 a 2000, onde o Desenho Geométrico era considerado uma disciplina com foco nas construções, utilizando instrumentos específicos que podemos entender que são régua e compasso. Nas últimas duas décadas, o Desenho Geométrico passa a ser integrado às aulas de Matemática, passando a exploração e construção de conhecimentos geométricos, saindo do foco das construções e utilização da régua e do compasso.

Ao analisar a Base Nacional Comum Curricular, nossa procura observou o que esse importante documento diz sobre Geometria, que é tratada como uma unidade temática de Matemática e suas Tecnologias. Na página 272 da BNCC (BRASIL, 2017) é feita uma referência à técnica de quadratura, ao citar a Geometria, como observamos no Capítulo 3. Este trecho nos chamou a atenção pois faz referência importante ao conceito de quadraturas e nos impulsionou a perceber importantes sequências de habilidades a serem observadas. Estas sequências de habilidades foram listadas no Capítulo 3, nas tabelas Tabela 4, Tabela 5, Tabela 6 e Tabela 7. Estas tabelas constaram em nosso texto para sinalizar quais competências e habilidades estão inseridas no estudo do conceito de quadraturas. Esta análise realizada nos possibilitou atingir este objetivo específico.

Em resposta a "investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas" foi realizada uma proveitosa conversa com a professora Kamilla Rodrigues, docente da rede privada de ensino, no colégio Objetivo. A conversa foi iniciada com a sua trajetória acadêmica, tempo de experiência profissional, onde a docente contou como foi empregada nessa instituição, começando como monitora. Nessa instituição, Kamilla teve o contato com o Desenho Geométrico, que é tratada como uma disciplina no Colégio Objetivo. A partir daí, muitos pontos foram observados pelo autor de forma muito proveitosa. Versando com objetivo específico "investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas", Kamilla tem contato importante com a Geometria, o Desenho Geométrico e a Álgebra,

pois trabalha com Desenho Geométrico com as turmas de Ensino Fundamental II e ministra aulas de Geometria e Álgebra para as turmas de Ensino Médio. Especificamente sobre o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas, a docente nos forneceu contribuição significativa ao relatar a sua metodologia de trabalho e sua sequência didática nas séries do Ensino Fundamental II. Importante ressaltar que as habilidades listadas na BNCC, mencionadas no Capítulo 3 dessa obra, são atendidas por Kamilla no Planejamento pedagógico desta escola. A docente relatou que produziu um material próprio durante o período da pandemia e como referência utilizou o livro *Desenho Geométrico* de Yamada (2007, vol. 1 a 4). Um ponto interessante que a professora nos chama a atenção é sobre a dificuldade de outros docentes no contato com o Desenho Geométrico e a manipulação de régua e compasso para atividades de construção. Kamilla aplica o conceito de quadraturas nas turmas de nono ano do Ensino Fundamental II e utiliza somente recursos manuais, como régua e compasso. Relatou que não utiliza o *GeoGebra* pois este *software* de Geometria dinâmica, segundo ela, não atende a sua metodologia de trabalho. O objetivo de Kamilla é fazer com que o aluno desenvolva a habilidade de manipular a régua e o compasso, instrumentos utilizados na construção de figuras e resolução de problemas.

Kamilla contagiou com suas experiências realizadas em sala de aula, com sua sequência didática e com outras experiências relatadas, em uma delas contou que em seus trabalhos extras pontuados, seus alunos contruíram uma réplica da Golden Gate, uma famosa ponte localizada nos Estados Unidos, com palitos rígidos de churrasco e a construção suportou doze quilogramas. Ela realiza estes trabalhos constantemente e sua abordagem construtivista, chama a atenção dos alunos, desperta o interesse deles e faz com que a docente seja muito bem vista tanto pelos alunos quanto pelos professores. Com relação à avaliação, pude inferir que a professora segue o programa da escola, que possui um trabalho pontuado, utilizando atividades diferenciadas como a mencionada no trecho acima. Gentilmente a professora nos cedeu um material que utiliza com seus alunos e nos deu um norte na realização de nossas atividades. Após esta proveitosa conversa, onde sua transcrição está na íntegra nos anexos desta obra, elaboramos um questionário, com a finalidade de se formular atividades que estimulem os professores a utilizar a técnica de quadraturas somente com régua e compasso, tendo uma visão diferenciada, sem a utilização da álgebra. Por causa do tempo para a captação e tratamento destas informações para serem anexadas nesta obra, esse questionário foi respondido por apenas onze participantes,

dentre eles, Kamilla também deu sua contribuição. As perguntas deste questionário, localizadas no capítulo anterior, mostrou-nos, em uma análise qualitativa, que a maioria dos professores trabalha nas redes pública e privada de ensino. Grande parte dos docentes, segundo esse questionário, ministram a disciplina de Geometria. Apenas dois participantes responderam que lecionam Desenho Geométrico. Devemos ter um olhar cuidadoso para essa pergunta, visto que tanto Geometria quanto Desenho Geométrico, não são tratados como disciplinas em muitas instituições de ensino. Vimos na conversa com Kamilla que o Colégio Objetivo trabalha desta forma, porém a grande maioria dos estabelecimentos de ensino utiliza as competências e habilidades da BNCC de forma que Geometria é tratada, como uma unidade temática, em Matemática e suas tecnologias assim como o Desenho Geométrico e a Álgebra passam a ser integrados às aulas de Matemática. Foram observados também o tempo de atuação e os segmentos de atuação dos professores. A maioria dos docentes tem mais de três anos de experiência e trabalham nos Ensinos Fundamental II e Médio. Perguntados sobre o conhecimento do conceito de quadraturas, foi constatado que a maioria possuía o conhecimento do conceito, somente um docente não conhecia. Grata surpresa neste momento. Esta pergunta foi um divisor, pois caso o docente não conhecesse o conceito, ele poderia encerrar a sua participação neste questionário.

De acordo com o gráfico, seis professores já aplicaram ou aplicam o conceito em sala de aula. Na pergunta seguinte observou-se que a aplicação do conceito foi em Geometria, com respostas também em Desenho Geométrico, onde uma destas respostas observamos que foi da professora citada em nossa pesquisa. No tocante a utilização de materiais para a abordagem deste conceito, a maior parte utiliza régua e compasso, com apenas um professor utiliza conceitos computacionais.

Ao serem questionados sobre a utilização da História da Matemática como motivação inicial para o uso de quadraturas a maioria respondeu positivamente, o que era esperado. Acredito na importância de manter relacionados História da Matemática para compreender e saber aplicar essa técnica. De acordo com todas as observações feitas, concluímos de forma satisfatória as respostas para este objetivo específico.

Atendendo o objetivo "elaborar a partir dos dados apresentados, situações onde a quadratura seja utilizada", criamos uma sugestão de atividades baseadas no material disponibilizado pela professora entrevistada Kamilla Rodrigues. Nesta sugestão, na primeira situação problema, esperamos que o participante seja capaz de utilizar a régua e

compasso para construir o quadrado referente ao retângulo dado, e determinar a medida do seu lado. Na outra situação indicamos outras duas figuras planas, triângulo e losango, em que a quadratura também seja realizada, utilizando ainda régua e compasso. Essas figuras foram construídas pelo autor no *software* GeoGebra.

Na sequência, elaboramos um plano de entrevista (Tabela 8) com perguntas abertas, onde o professor, após realizar a sugestão de atividades, seja capaz de responder de forma crítica às perguntas apresentadas, mostrando as suas impressões acerca da sequência didática.

Diante do exposto acima, em relação às duas perguntas contidas no capítulo Introdução desta obra, a História da Matemática não deve ser pensada somente como uma memorização de acontecimentos e fatos. Explorar a História da Matemática pode enriquecer o aprendizado, alinhando-se aos princípios da BNCC de contextualizar o conhecimento e promover um ensino interdisciplinar. Com a Evolução dos processos de ensino aprendizagem que exigem desafios maiores para os docentes, trazer uma abordagem inicial que prenda a atenção dos alunos, que, cada vez mais pouco se interessam. D' Ambrósio (2013) acredita que ao estudar a História da Matemática, nossos alunos podem compreender melhor como diferentes culturas contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento matemático, promovendo uma perspectiva mais global e inclusiva. Esta obra nos permitiu perceber que professores já são capazes de fazer esta abordagem.

Na presente análise, nosso objetivo foi avaliar a viabilidade, dentro das normas estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de integrar a História da Matemática à compreensão do conceito de quadraturas de figuras planas. Além disso, buscamos verificar a capacidade dos professores do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio de aplicarem, por meio de régua e compasso e *software* de geometria dinâmica, a técnica de quadratura.

Concluimos que é possível adotar uma abordagem diferenciada no ensino do conceito de área de figuras planas ao integrar a História da Matemática em sala de aula. Para que essa abordagem seja eficaz, é necessário que os educadores tenham um olhar diferenciado e estratégico desde o sexto ano do Ensino Fundamental. A introdução progressiva de conceitos iniciais que favoreçam construções geométricas elementares pode facilitar a compreensão dos alunos, preparando-os gradativamente para abordagens mais complexas ao longo do nono ano e durante o Ensino Médio.

Essa metodologia permite aos alunos não apenas calcularem áreas, mas também entenderem os fundamentos históricos e culturais que embasam essas técnicas. Com o uso de ferramentas como régua, compasso e *softwares* de geometria dinâmica, cria-se um ambiente de aprendizagem mais interativo e envolvente, tornando o ensino da matemática mais atraente e acessível.

Propomos, portanto, uma visão diferenciada que inclui a formação intensiva para os professores, capacitando-os a integrar a História da Matemática em suas aulas e a manipular com segurança as ferramentas tradicionais, como régua e compasso. Esse enfoque pedagógico visa proporcionar uma nova perspectiva sobre o processo de ensino, estimulando nos alunos a capacidade de construir, analisar e aplicar rigorosamente os conceitos geométricos.

Essa proposta está alinhada com os princípios da BNCC, que visam promover um ensino contextualizado, interdisciplinar e que respeite a diversidade cultural, incentivando o desenvolvimento de competências fundamentais nos alunos. Dessa forma, a integração da História da Matemática com práticas contemporâneas de ensino pode ser uma poderosa ferramenta educacional, que potencializa o aprendizado e fomenta uma apreciação mais rica e profunda da matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] CARVALHO, J. B. P. Três excursos pela história da matemática. *Intermat, Rio de Janeiro*, 2008.
- [2] PREDEBON, F. T.; GRITTI, P. O que desmotiva os alunos para aprender matemática? *CONTRAPONTO: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação*, v. 1, n. 1, p. 79–94, 2020.
- [3] AL., M. C. et. Interações sociais e matemática: Ventos de mudança nas práticas de sala de aula. In: MONTEIRO, C. et al. (Ed.). *Interações na Aula de Matemática*. Vi-seu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática, 2000.
- [4] BRAGA, E. Relevantes aspectos relacionados ao ensino de matemática. *Encontro Mineiro de Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora*, 2015.
- [5] BRASIL. *Ministério da Educação, Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>.
- [6] EDUCAÇÃO, M. da. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [7] ROQUE, T. M. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Editora Schwarcz - Companhia das Letras, 2012.
- [8] ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [9] PARREIRA, D. S. *Uma proposta de uso da História da Matemática como Recurso Didático no ensino de áreas*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional)), Uberaba, 2017.
- [10] SOUTIER, C. C. *O Problema da Quadraturas e Números Construtíveis: Possibilidades para o ensino da Geometria e Relações com a Álgebra*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional)), Londrina, 2017. Disponível em:

- <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-29112016-141932/pt-br.php>>.
- [11] CORRÊA, J. F. *Um Estudo Histórico sobre Quadraturas*. Dissertação (Dissertação (Mestrado)), Londrina, 2008.
- [12] MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores p. 73-106 (primeira parte: 73-89). *Zetetiké*, v. 5, n. 2, p. 73–106, 1997.
- [13] MOREY, B.; GOMES, S. C. Matemática mesopotâmica: história para o professor de matemática. *REMATEC*, v. 13, n. 27, 2018.
- [14] BARON, M. E.; BOS, H. J. M.; COELHO, J. R. B. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.
- [15] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008.
- [16] KATZ, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.
- [17] GRUDTNER, G. L.; BERTATO, F. M.; D'OTTAVIANO, I. M. L. A medida do círculo: Uma tradução do texto de arquimedes. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 21, n. 41, p. 1–13, 2021.
- [18] GASPAR, M. T. J. *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores*. Tese (Tese (Doutorado em Educação Matemática)) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2003. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/103508>>.
- [19] PLOFKER, K. *Mathematics in india*. [S.l.]: Princeton University Press, 2008.
- [20] MACHADO, S. R. A.; TRIVIZOLI, L. M. História da matemática prescrita em documentos curriculares para o ensino fundamental: Relações com a humanização do conhecimento matemático. *Revista Temporis [Ação]*, Universidade Estadual de Goiás, v. 18, n. 02, p. 159–178 de 250, 2018. Disponível em: <<http://www.revista.ueg.br/index.php/temporisacao/issue/archive>>.
- [21] YAMADA, C. F. K. *Desenho Geométrico. V. 1 – 4*. São Paulo: Scipione, 2007.

- [22] REIS, R. O. *O conceito de variável: um estudo de caso com docentes do ensino público básico*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional)), Rio de Janeiro, 2024.
- [23] GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *RAE - Revista de Administração de Empresas*, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57–63, 1995.

APÊNDICE - PDF Professora Kamilla Rodrigues

Nome: _____ N° _____

ENSINO
FUNDAMENTAL

TURMA: 9º ANO

MATERIAL DE APOIO

Data:
/ /

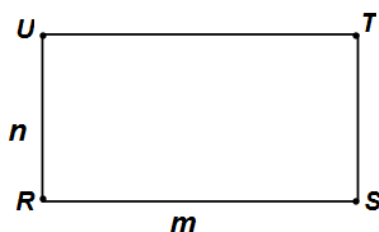


Disciplina:
DESENHO GEOMÉTRICO

Professora:
KAMILLA

➤ Quadratura do Retângulo

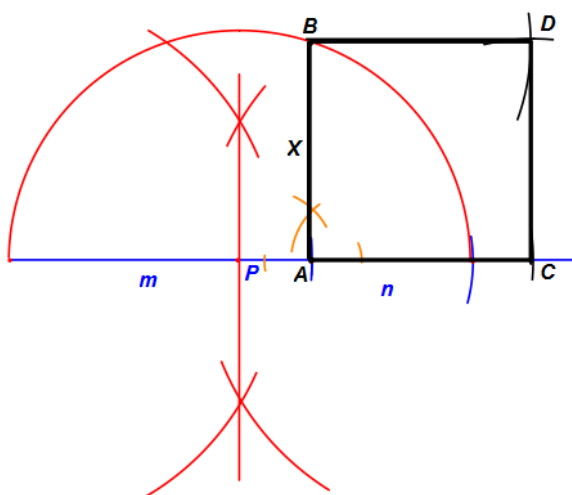
Construir um quadrado ABCD equivalente ao retângulo RSTU dado.



1º Passo: Determinar a média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos m e n do retângulo, assim encontrando o valor de x , o lado do quadrado AB .

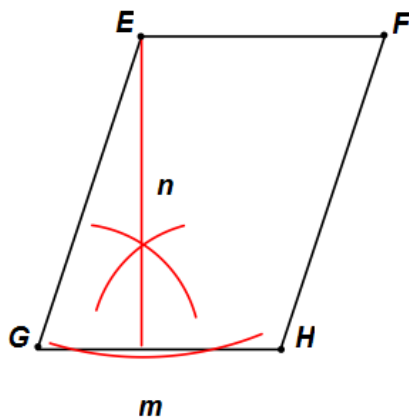
2º Passo: Com a ponta seca em A transferir o valor do de x para reta suporte, formando o ponto C , com ponta seca em C traçar um arco com a mesma medida de x para cima da reta suporte e com a ponta seca em B traçar o mesmo arco para cruzar-se com o arco anterior, o ponto de encontro deles é o ponto D .

3º Passo: Ligando todos os pontos ABCD, se constrói o quadrado ABCD equivalente ao retângulo RSTU.



➤ **Quadratura do paralelogramo**

Construir um quadrado ABCD equivalente ao paralelogramo EFGH dado:

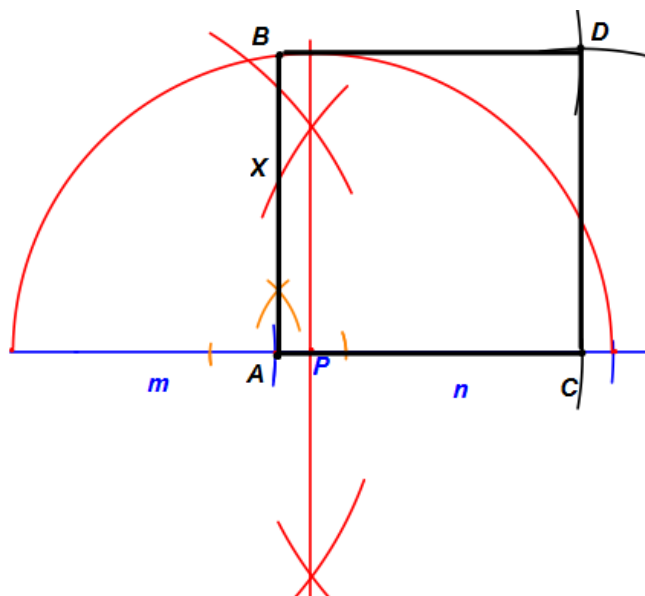


1° Passo: Traçar a altura n do paralelogramo relativa à base m .

2° Passo: Determinar a média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos m e n do paralelogramo, assim encontrando o valor de x , o lado do quadrado **AB**.

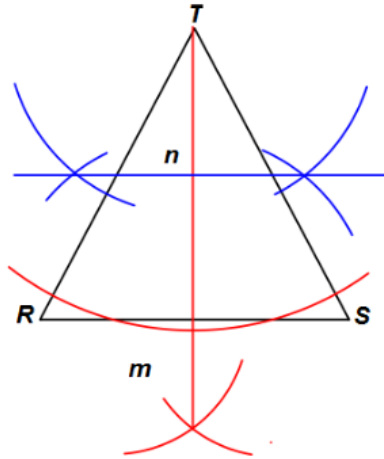
3° Passo: Com a ponta seca em **A** transferir o valor do de x para reta suporte, formando o ponto **C**, com ponta seca em **C** traçar um arco com a mesma medida de x para cima da reta suporte e com a ponta seca em **B** traçar o mesmo arco para cruzar-se com o arco anterior, o ponto de encontro deles é o ponto **D**.

4° Passo: Ligando todos os pontos ABCD, se constrói o quadrado ABCD equivalente ao paralelogramo EFGH.



➤ **Quadratura do triângulo**

Construir um quadrado ABCD equivalente ao Triângulo RST dado:



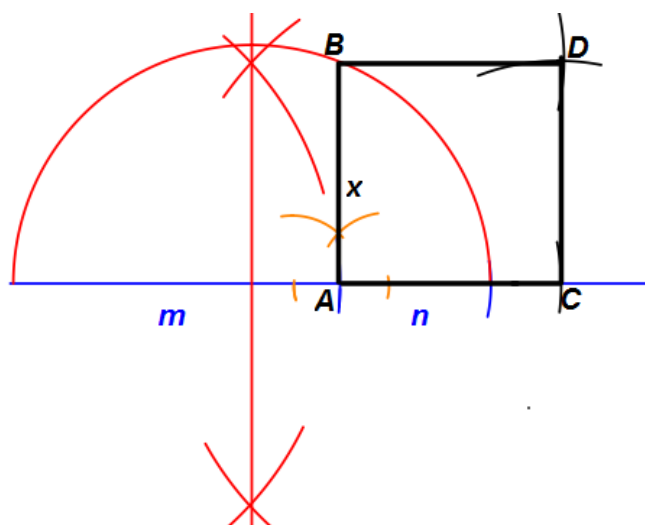
1° Passo: Traçar a altura do triângulo relativa à base **m**.

2° Passo: Traçar a mediatriz da altura, determinando **n**, que é a metade da altura.

3° Passo: Determinar a média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos **m** e **n** do triângulo, assim encontrando o valor de **x**, o lado do quadrado **AB**.

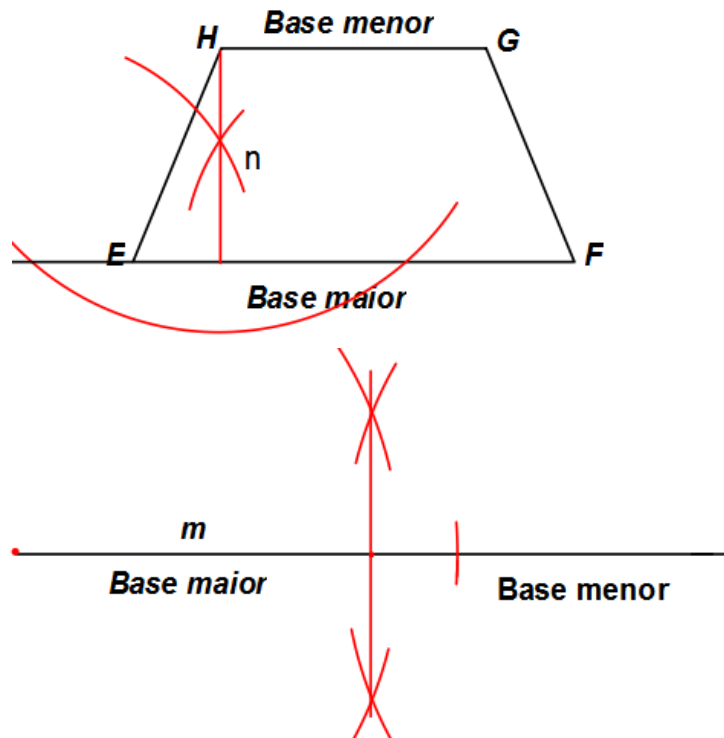
4° Passo: Com a ponta seca em **A** transferir o valor do de **x** para reta suporte, formando o ponto **C**, com ponta seca em **C** traçar um arco com a mesma medida de **x** para cima da reta suporte e com a ponta seca em **B** traçar o mesmo arco para cruzar-se com o arco anterior, o ponto de encontro deles é o ponto **D**.

5° Passo: Ligando todos os pontos ABCD, se constrói o quadrado ABCD equivalente ao triângulo RST.



➤ **Quadratura do Trapézio**

Construir um quadrado ABCD equivalente ao trapézio EFGH.



1º Passo: Traçar a altura n do trapézio relativa à base.

2º Passo: Transferir a base maior e base maior para uma reta suporte e traçar a mediatriz entre elas, determinando m , que é a base média do trapézio.

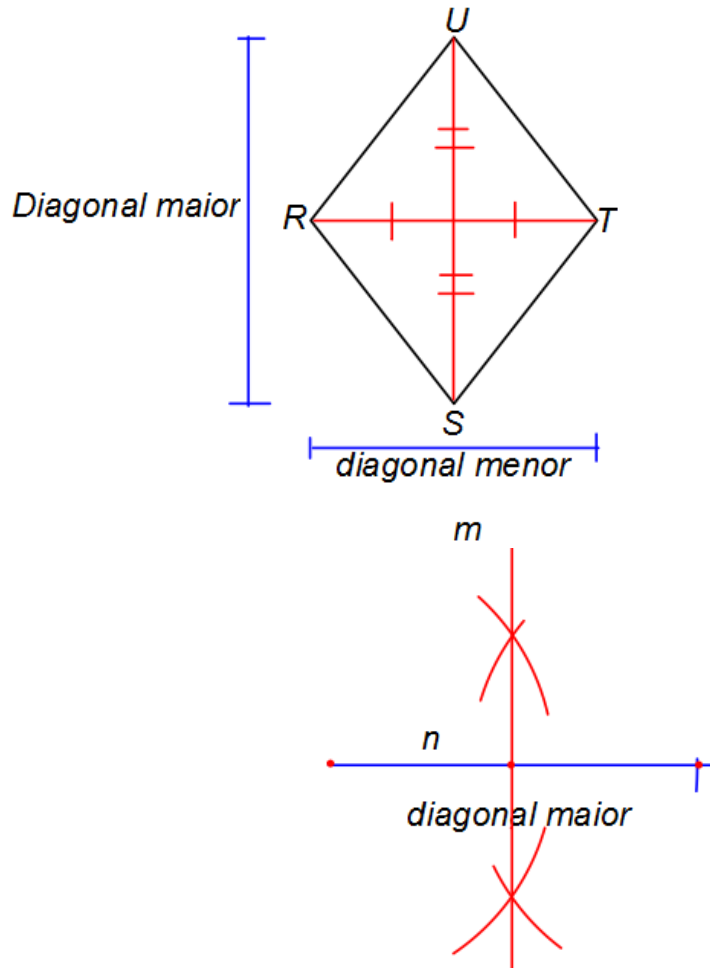
3º Passo: Determinar a média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos m e n do trapézio, assim encontrando o valor de x , o lado do quadrado **AB**.

4º Passo: Com a ponta seca em **A** transferir o valor do de x para reta suporte, formando o ponto **C**, com ponta seca em **C** traçar um arco com a mesma medida de x para cima da reta suporte e com a ponta seca em **B** traçar o mesmo arco para cruzar-se com o arco anterior, o ponto de encontro deles é o ponto **D**.

5º Passo: Ligando todos os pontos ABCD, se constrói o quadrado ABCD equivalente ao trapézio EFGH.

➤ **Quadratura do Losango**

Construir um quadrado ABCD equivalente ao losango RSTU.



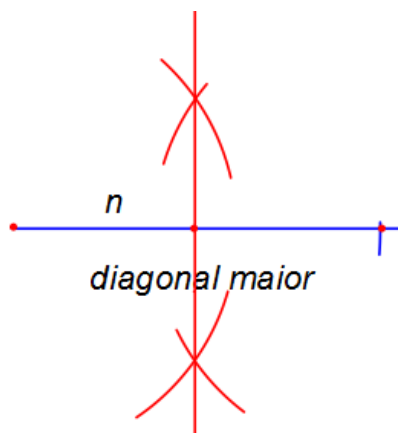
1° Passo: Traçar m , a diagonal menor do losango.

2° Passo: Traçar a diagonal maior e determinar sua metade, sendo n .

3° Passo: Determinar a média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos m e n do losango, assim encontrando o valor de x , o lado do quadrado **AB**.

4° Passo: Com a ponta seca em **A** transferir o valor do de x para reta suporte, formando o ponto **C**, com ponta seca em **C** traçar um arco com a mesma medida de x para cima da reta suporte e com a ponta seca em **B** traçar o mesmo arco para cruzar-se com o arco anterior, o ponto de encontro deles é o ponto **D**.

5° Passo: Ligando todos os pontos ABCD, se constrói o quadrado ABCD equivalente ao losango RSTU. .



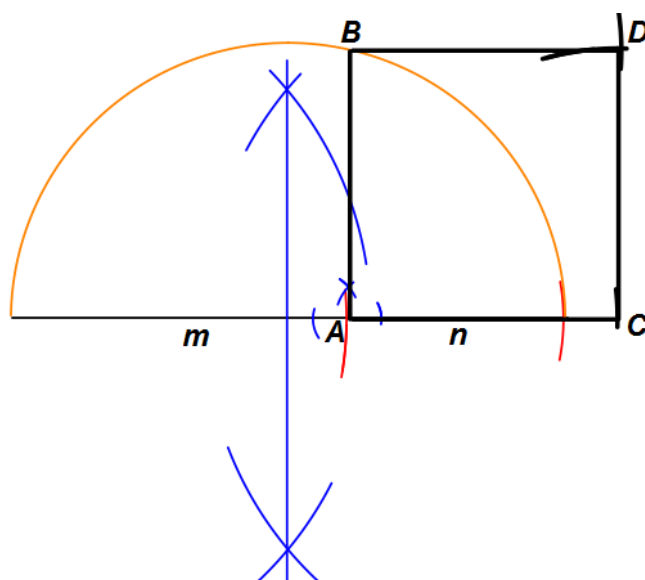
1° Passo: Traçar m , a diagonal menor do losango.

2° Passo: Traçar a diagonal maior e determinar sua metade, sendo n .

3° Passo: Determinar a média geométrica pelo processo aditivo dos segmentos m e n do losango, assim encontrando o valor de x , o lado do quadrado **AB**.

4° Passo: Com a ponta seca em **A** transferir o valor do de x para reta suporte, formando o ponto **C**, com ponta seca em **C** traçar um arco com a mesma medida de x para cima da reta suporte e com a ponta seca em **B** traçar o mesmo arco para cruzar-se com o arco anterior, o ponto de encontro deles é o ponto **D**.

5° Passo: Ligando todos os pontos ABCD, se constrói o quadrado ABCD equivalente ao losango RSTU. .



ANEXO - Transcrição Entrevista

Angelo: Começa deixando aparecendo aqui agora sim primeiramente me apresentar sou Angelo Benedito sou professor de matemática das redes estadual e municipal do Rio de Janeiro. Esse trabalho é única e exclusivamente para minha dissertação de Mestrado do programa PROFMAT da UERJ O tema é quadraturas quadratura de figuras planas alternativas pro Ensino de área de figuras planas e o motivo do meu contato com com a professora Kamilla se deu a partir de conhecer uma aluna ou ex-aluna

Kamilla: Não sei se ela é minha aluna agora só que eu não sou mais desenho geométrico para ela porque ela tá no ensino médio e lá onde eu trabalho a gente trabalha desenho geométrico do sexto ao nono ano lá a gente tem geometria mesmo separada de desenho geométrico tem um professor de matemática que ele dá álgebra e dá matemática toda como se fosse álgebra e geometria tem um professor de matemática financeira e tem o professor de desenho geométrico no caso a professora que sou eu eu trabalho apenas desenho geométrico com Fundamental e hoje ela tá no ensino médio aí eu trabalho álgebra com ela no ensino médio.

Angelo: Eu dava aula particular para ela e aí dava matemática e ela vinha também com as questões de desenho geométrico E por incrível que pareça tava no início da minha daquela pesquisa sobre a dissertação E aí quando eu vi o conceito eu falei gente é a luz, é a luz que eu preciso.

Kamilla: Aí lembro que ela comentou também comigo.

Angelo: Aí ela ela me mandou o seu contato Ela perguntou para ti se podia me mandar você autorizou aí me mandou e aí foi aonde eu consegui aquele primeiro contato.

Angelo : Aí como é que você ficou conhecendo o conceito de quadraturas?

Kamilla : Então se eu for te contar minha história com o desenho geométrico, geometria descritiva, eu Trabalho como professora desde 2015, oficialmente assinando a carteira 2016. Angelo:Uhum

Kamilla: E eu tava no final da minha faculdade e eu trabalhava com álgebra geometria no ensino fundamental dois. E aí foi em 2017 que eu entregando currículo aqui na na zona sul do Rio de Janeiro me ligaram de uma escola falaram: - Você pode vir para uma entrevista eu fui e aí quando eu fui para essa entrevista a coordenadora falou assim você sabe desenho geométrico? falei olha sei tenho assim fiz até a disciplina de desenho geométrico geometria descritiva, geometria tem vários nomes e aí eu falei assim sei mas

eu nunca dei aula e assim realmente é o mundo diferente do que você trabalha com o geometria. O aluno que não tem desenho geométrico geometria descritiva ele não tem a noção do que é trabalhar isso na sala de aula no ensino fundamental dois e aonde eu trabalho a gente prepara o aluno para para aprender a trabalhar com isso desde o sexto ano desde o mais básico a o que que é compasso o que que é régua para que que serve para de esquadros para que que serve o compasso do mais simples transporte de segmento, de transporte de ângulo, construção de ângulo com transferidor depois a gente ensina com o compasso divisão de segmentos em partes iguais com regra do deslizamento.

Angelo: Isso sim legal.

Kamilla: E eu tinha trabalhado o desenho geométrico na faculdade. Fiz a disciplina, Amei! Adorei meu professor também da UERJ.

Angelo: Eu fui da UERJ.

Kamilla: Eu me formei na UERJ também sim só que eu fiz o UERJ-FFP. E aí o meu professor de Maracanã. Então o meu professor da UERJ- FFP, o Cláudio, maravilhoso ele tem um livro de geometria descritiva e assim... eu adorava trabalhar isso com ele mas eu não pensei que a gente iria trabalhar assim tão de maneira tão profunda na escola e aí quem era o professor regente da turma é o é o professor era o professor Nei Trevas que ele seguia um livro E aí aconteceu que eu virei a monitora dele e aí eu tive assim tinha coisa que eu não lembrava que eu tinha que reestudar comecei a pesquisar a fundo e para relembrar de alguns conceitos porque eu nunca tinha dado aula disso. E aí em 2019, 2020, eu virei a professora Regente da turma porque ele foi pra área da coordenação e da tecnologia da escola e eu professora regente da turma e aí eu fui falei com ele olha a gente vai continuar seguindo o livro eu até esqueci o nome do livro depois eu posso até pegar para te mandar. Porque assim é um segmento que eu tenho do livro porque a escola tem a... A escola que eu trabalho é uma escola de rede então assim a gente segue a apostila de rede é o Colégio Objetivo em São Paulo, no Rio tem várias unidades do colégio objetivo e eu trabalho no Colégio Objetivo Botafogo. A parte de geometria do colégio Objetivo é muito simples sabe, é muito simples porque você trabalha essa geometria junto com a aula de álgebra de matemática que o professor tem cinco tempos na semana e ele separar vou dar três tempos de álgebra dois tempos de geometria. E aí eu entro um bônus, um up a mais então eles têm mais dois tempos de desenho geométrico além desses cinco tempos de álgebra, geometria e eu tenho só eu tenho mais dois tempos de desenho

geométrico. E aí eu trabalho um livro a parte que os alunos não têm acesso eu peguei esse livro como parâmetro que eu devo seguir mas eu construí o meu próprio material, eu tenho vários materiais onde na época da pandemia eu trabalhei muito e aí eu comecei a pegar vários livros e vários livros. Artigos também de mestrado peguei o livro desse meu professor e comecei a juntar na linguagem dos alunos fácil deles trabalharem então eu comecei a montar passo a passo de construções. Eu posso até te mandar o que eu tenho de quadratura passo a passo e aí eu coloco na linguagem deles para eles entenderem.

Angelo: Professora, eu vou te agradecer imensamente se você me mandar.

Kamilla: Sim posso. Posso te mandar e aí eu boto assim primeiro passo, segundo passo e eu falo que eles devem fazer só para dar uma luz para eles estudarem sozinhos. E aí quando eu começo a trabalhar o assunto de quadratura já é no nível mais elevado da minha turma que é o nono ano. O nono ano é o último ano de desenho geométrico então assim, quem é meu aluno desde o sexto ano assim eles sabem fazer muita coisa de desenho geométrico e quem é aluno novo ele fica bem perdido. E aí nessa escola tem a monitoria. A monitoria salva o aluno. Eu virei professora Regente da turma em 2019 ou em 2020, agora eu não lembro e eu continuei sendo monitora deles por que todo o professor de matemática sabe trabalhar desenho geométrico. Você falou assim você pode indicar para algum colega seu? Eu não tenho nenhum colega que saiba desenho geométrico Eu tenho um que é de Niterói, São Gonçalo alguma coisa assim. Ele até me pediu ajuda, falou: olha me chamaram para dar desenho geométrico tem algumas coisas que eu não sei você pode me dar ajuda?

Kamilla: Eu indiquei esses livros que eu comecei a ler para produzir material indiquei alguns artigos para ele também estudar para dar aula de desenho geométrico então assim eu não conheço lá onde eu trabalho tem três professores de matemática e tem um que é um colega meu de matemática ele já tem quase 70 anos, sessenta e brau, imagina ele fala eu não sei isso de desenho geométrico e tudo mais ele acha legal mas ele assim não sabe e tem até um professor que é mais novo do que eu e ele também fala Kamilla não sei não tem como. E aí quando eu virei professora Regente da turma, eu continuei como monitora também porque é o momento para eu dar aula de reforço para os alunos. E eu também sabia que a coordenação teria um pouco de dificuldade para achar professor de desenho geométrico.

Angelo: E assim eu vi que tive aquele contato com os seus trabalhos e achei

muitíssimo interessante porque assim eles sabem a sequência entendeu?

Angelo: Eles sabem a sequência eu via muito pela Cecília. Ela sabia a sequência e às vezes ela não tinha aquela coisa de aplicar ela não, não exercitava isso. Foi aonde o pai dela até me chamou e aí o que eu fazia com ela mesmo com a situação dela as dificuldades que ela tinha por conta do problema o que eu fazia com ela.

Angelo: Dizia para ela: Você faz. Eu deixava ela para fazer. E aí ia corrigindo uma coisa outra e lógico, por conta do trabalho de Mestrado eu tive que estudar para poder explicar para ela.

Kamilla: Você teve que estudar? Você também não sabia desenho geométrico?

Angelo: Não também não.

Angelo: Sabia claro, que sabia clicar alguma coisa. . .

Kamilla: Cada professor tem no seu particular. Por exemplo eu já tive aluno que veio com um professor particular e falou assim: Ah mas eu posso fazer uma perpendicular com par de esquadros. E aí eu falo: sim você pode porque o par de esquadro serve para traçar retas perpendiculares e paralelas. Falava para eles assim: ah mas você tá no oitavo ano faz reta perpendicular até o sexto sétimo a partir do sétimo, você só faz com compasso, aí vai dar particularidade de cada professor também.

Angelo: É! E aí eu procurava sempre fazer com ela da mesma forma que você fazia não mudava em nada. Dizia: Ó não faz desse jeito. Não foi assim que ela explicou? É assim e ela tinha uma característica dela que eu achava interessante: Ela descobria algumas soluções do jeito dela mas não sabia anotar. E aí eu falava você precisa colocar esse sabia anotar papel.

Kamilla: A Cecília é uma aluna muito inteligente sim, ela é muito inteligente mas é assim ela tem preguiça ela tem preguiça tanto que ela nunca ficou de ela não ficou de dependência em desenho geométrico porque quando ela via que tava apertando ela resolvia correr atrás do prejuízo enquanto ela não tava ali com a corda ali no pescoço ela falava: Ah deixa para lá não anotava não fazia eu pegava no pé dela pego até hoje que ela ainda é minha aluna. Pego até ela ficava assim ah não quero! Ah não vou copiar! Ah não vou fazer! Falava: Bora Cecília! Vai fazer sim! Bora Cecília! E aí ela não queria copiar não queria fazer nada mas quando ela se empenhava ela ia porque ela é inteligente.

Angelo: Ela não sabe a capacidade que ela tem cara.

Angelo: Essa ela é muito inteligente só tem preguiça mesmo isso mesmo pois é.

Assim eu até anotei algumas coisinhas aqui e também vendo pelo formulário.

Kamilla: Só um minutinho rapidinho que me ligaram aqui deixa eu só falar que eu tô em reunião!

Angelo: Tudo bem! Uhum! Sem problemas! Ver aqui. Tô vendo essas respostas também vai Kamila: Vai, pode falar!

Angelo: Então, eu vi aqui que você marcou as três competências da BNCC.

Kamila: Não eu na verdade eu não terminei de fazer. Ainda na verdade eu marquei assim duas. Eu não marquei as três porque assim, deixa explicar como eu inicio o nono ano: eu sigo o sumário desse livro que eu uso eu tenho que achar o nome dele gente sério eu tenho ele aqui o Sumário dele aqui no porque tá na escola onde eu trabalho mas eu tenho acho que o Sumário dele aqui no meu computador. Posso até achar depois vou até botar aqui para você.

Angelo: Não, depois você acha! Não precisa!

Kamila: Depois eu te mando. Então mas eu sigo assim o cronograma do livro, sabe e eu vou trabalhando no tempo dos alunos e da minha maneira. Eu, como eu já tô com esse nono por exemplo esse nono ano atual que eu tô trabalhando é uma turma que tem 40 alunos hoje em dia tá uma turma maior turma da escola é essa e dos 40 alunos eu acho que uns 25 já são meus alunos desde o sexto ano isso eles já estão com a geometria assim há muito tempo e outros 15 são alunos novos que tiveram dificuldade, mas assim eles foram muito bem eu tive assim um índice de aprovação agora para sem ter aluno na recuperação você acho que eu só tive de turma com 40 alunos, 10 que ficaram de recuperação muito sabe então assim é um bom índice.

Angelo: É índice bom eu concordo

Kamilla: Uhum claro, claro porque eu acho que dos alunos que ficaram vários nunca tiveram desenho geométrico na vida entendeu ?

Kamilla: E aí antes de eu entrar com conceito de quadratura eu tava falando sobre equivalência com eles tá equivalência e antes de entrar no conceito de equivalência eu entrei no conceito de média geométrica ou média proporcional.

Angelo: Precisa, não é?

Kamilla: Sim porque é necessário. E aí assim foi é tudo uma construção e antes eu falei com eles: gente no primeiro dia de aula quem é meu aluno antigo já sabe quem é novo não então vamos relembrar construções fundamentais da geometria quais são que

vocês usam comigo desde o sexto ano e continuam usando até hoje. E aí eu falei com eles que a gente ia estudar o ano inteiro ia precisar saber fazer retas perpendiculares com compasso mediatriz retas paralelas é essencial. E aí eu lembrei isso com eles e aí eu, eu trabalhei antes do conceito de com o teorema de Thales divisão de segmentos em partes proporcionais.

Angelo: Uhum.

Kamilla: E aí essa parte eu deixei eles fazerem com par de esquadros porque dividir em 20 partes iguais, 10,12 com compasso ia ficar muito poluído e então eles trabalharam com a regra do deslizamento, do deslizamento do par de esquadros. E aí depois disso eu trabalhei com eles é a média e extrema razão que a gente o segmento Áureo falei também um pouco disso com eles e aí falei também sobre a proporção Áurea isso tudo com eles. Essa parte aí da história e aí depois... oi?

Angelo: Não porque vai chegar em alguns momentos que as medidas são incomensuráveis. Então aí você vai vai precisar da...da... da... Média da Razão Áurea para poder chegar a eles e mostrar que Poxa isso aqui vai ser um resultado aproximado não vai ser um resultado certinho eles poderem perceber isso legal.

Kamilla: Sim aí depois eu comecei trabalhar com eles da... sobre a média geométrica porque eu já queria trabalhar quadratura e aí eu falei um pouco com eles eu falei olha vocês já devem ter visto com o Orlando sobre média, média aritmética média geométrica ou média proporcional que aí eu expliquei para eles a parte algébrica. E aí eu falei: ah a gente vai ter que botar raiz em desenho geométrico. Não sei que aí gente só tô explicando o que que é. E aí eles: Ah tá! Entendi. Aí já ficaram desesperados não gente, a gente não vai ter conta aqui em desenho geométrico. Gente tô explicando o que que é porque eu já queria trabalhar esse conceito aí depois que eu trabalhei isso eu fui pra equivalência aí primeiro eu comecei com equivalência entre triângulos. Triângulos sobre a mesma altura e base iguais e aí eu trabalhei dessa parte. Trabalhei com eles também triângulos com bases e alturas diferentes e aí quando eu trabalhei com eles a parte de Tales falando sobre divisão de segmentos em partes proporcionais eu ensinei a terceira e a quarta proporcional e pra gente trabalhar a questão de equivalência entre triângulos com bases e alturas diferentes pra gente achar a terceira medida a quarta medida no caso a gente teria que trabalhar com a quarta proporcional e eles acabam sempre pegando o conceito anterior e aí depois que eu trabalhei essa parte de equivalência eu falei olha agora a gente

vai trabalhar equivalência do quadrado que se chama quadratura são figuras que vão ter a mesma área de um quadrado e aí eu trabalhei as principais figuras geométricas planas. Eu trabalhei com a quadratura do retângulo que eles acharam super fácil porque eles já estavam acostumados com média geométrica. Eu usei o conceito da Média geométrica para achar o lado do quadrado e eu achando o lado do quadrado quando você já sabe fazer todos os outros lados, porque no oitavo ano eu ensinei a eles a fazer a construção de todos os quadriláteros quadrado retângulo, losângulo, trapézio. Então eles já sabiam fazer essas construções desde o oitavo ano e tendo um valor de um lado do quadrado eles saberiam fazer o quadrado inteiro.

Kamilla: Isso. E aí antes disso eu tive que relembrá-los da Fórmula é eles eu tenho que saber fórmula falei? Gente vocês trabalham fórmula de figuras planas desde o sexto ano ou menos então vocês já deveriam saber se vocês não sabem vamos vamos relembrar aqui... então foi meio que uma prévia.

Angelo: Você fez meio que uma prévia trouxe o conceito de área de figuras planas para depois trabalhar o conceito de quadraturas?

Kamilla: Isso aí isso aí. Ah muito bem tá! E aí eu relembrei com eles a área da do retângulo, do triângulo, do losango, do trapézio eu trabalhei... Foram essas quatro, não cinco, paralelogramo também. Paralelogramo falei também.

Angelo: Paralelogramo?

Kamilla: Uhum

Angelo: E você por exemplo no triângulo, no losângulo, no paralelogramo você retangularizava primeiro, ou não?

Kamilla: Direto pra quadratura então eu trabalhei a partir da fórmula da área por exemplo do retângulo como é que se calcula área do retângulo? Perguntava para eles base vezes altura então vocês vão fazer a média geométrica com a base e a altura do retângulo. Como é que se faz a área do triângulo base vezes altura dividido por dois então eles pegavam a base do triângulo e a altura eles dividiam por dois como eles dividiam por dois? Através da mediatriz eles já sabem desde o sexto ano o que divide um segmento em duas partes iguais eu falava: - Você não vai pegar régua vai medir vai fazer lá continha eu falava: —Isso aqui não é aula de álgebra não, não é matemática para você fazer continha é geometria. Então eu quero que você divida o segmento com compasso então eles já sabem que o que divide por dois era a mediatriz.

Angelo: A mediatriz

Kamilla: Então eu eu dava o triângulo eles pegavam a base transportavam por uma reta suporte uma reta de apoio e eles pegavam, eles tinham que fazer altura eles que faziam altura não dava altura aí como eles faziam altura? Através da perpendicular, porque eu ensinei no oitavo ano as cevianas do triângulo e ela sempre é perpendicular à base então eles tinham que fazer a perpendicular para transformar a altura e depois traçar a mediatriz. Traçando a mediatriz tinha o ponto médio, ponto médio para a extremidade tinha metade da altura aí eles pegavam essa metade transportavam para a reta suporte e faziam a média geométrica com a base e a metade da altura entendeu eles não... Angelo: retangularizavam.

Kamilla: Eles não transformaram em retângulo. Eu trabalhei tudo com base na fórmula da área. Por exemplo, o do losango era mais tranquilo, porque eu ensinei para eles que em todo losango as suas diagonais eram mediatrizes uma da outra, então eles não tinham a necessidade de traçar a mediatriz, bastava ligar os vértices opostos, então através da fórmula diagonal maior vezes a menor dividido por dois eles pegavam uma diagonal e a metade da outra e faziam a média geométrica achar o lado através do lado do quadrado eles faziam transporte de medidas e achavam a quadratura.

Kamilla: Do trapézio era a mais trabalhosa por que? Aí era que eles tinham mais preguiça de fazer porque eles tinham que fazer base maior mais base menor vezes a altura altura dividido por dois então o que que eu trabalhava com eles primeiro?

Kamilla: Você vai trabalhar o que tá dentro do parênteses. Então você vai fazer então a soma das bases transportava para a reta suporte das bases e eu falava: vocês podem transformar a soma das bases numa base média porque tanto faz dividir ou a altura por dois ou a soma das bases por dois das bases ia ficar muito grande b e não ia dar no caderno então eu falava assim para ele gente vamos fazer o seguinte: vamos transformar em duas etapas primeiro você faz a a base média transformava a base maior mais a base menor dividia por dois para depois transformar a altura, achava através da perpendicular e fazer a média geométrica. Também trabalhei tudo a partir da fórmula da dessas figuras planas e o que eu fiz esse ano fiz ano passado também como questão bônus. Eu ensinei esse conceito para eles e assim é uma turma muito boa essa turma desse ano é uma turma muito forte e aí eu botei a questão um bônus que foi determine a quadratura do hexágono. E eu não ensinei. E eu sei que eles são seres pensantes então eles tinham

que pensar ali pensar em como fazer em como fazer. E aí eu falei gente essa prova Vale 11. Vários alunos chegaram perto e teve um aluno que acertou.

Angelo: Cara, que legal!

Kamilla: Teve um aluno que pensou: eu tenho seis triângulos Angelo: Equiláteros.

Kamilla: Aham. Teve um aluno que pensou nisso. Teve um aluno que pensou em transformar o hexágono em um retângulo. Só que ele errou em uma bobeira e teve um aluno que pensou como eu pensei também, se você divide ali ao meio, você tem dois trapézios e aí quando você tem base maior mais a menor vezes a altura dividido por dois, você multiplica por dois, então você vai ter a base maior e a menor vezes a altura, faz a média geométrica disso. E aí teve um aluno que fez isso. Eu fiquei super feliz, vários alunos chegaram perto. Tiveram alunos que pegaram a régua, tá, mediram para ver, calcularam a calcularam a mão um monte de continha para fazer a área do hexágono e depois tentaram transformar um quadrado com a mesma área.

Angelo: Caramba! Dá mais trabalho!

Kamilla: Aí eu falei para eles: olha não tá errado mas como eu falei, toda a construção precisa de régua e compasso sempre, deixava isso na observação da prova falei a sua linha de raciocínio tá ótima, mas eu queria que você fizesse isso através da geometria não através da álgebra.

Kamilla: E aí ela: puxa professora mas eu acertei a área.

Kamilla: Eu falei: sim, mas era para você construir. E aí eu achei assim super legal a tentativa de todos os alunos. Vários deixaram em branco porque não era obrigatório mas assim, mais do que 10 tentaram fazer e assim eles foram super bem na linha de raciocínio deles e esse é o meu objetivo: fazer eles pensarem entendeu? Então achei assim super válido.

Angelo: E assim... os desafios que você encontra sempre que trabalha com com quadraturas?

Kamilla: Ah o desafio e eu falo para eles que como eu pego muito dessa parte de quadratura através da área não é... da fórmula da área alguns alunos eles decoram o passo a passo e eles esquecem do conceito. Aí eu falo assim para eles: gente se vocês estão entendendo o que vocês estão fazendo fica mais simples, fica mais fácil de você conseguir fazer a construção corretamente porque o conceito de construção geométrica é mediatriz, perpendicular, semicircunferência. Isso você já sabe bem desde o sexto ano, sétimo ano.

Vocês já estão sabendo fazer isso tudo a questão é você ter uma linha de raciocínio da sua construção e assim foi uma matéria muito tranquila de trabalhar porque como eu te falei a maioria dos alunos já são meus alunos mais antigos quem teve dificuldade foram os alunos mais recentes. Então assim, eu não achei um desafio muito grande trabalhar isso com eles porque da construção mesmo geométrica eles tinham uma facilidade muito grande entendeu?

Angelo: E assim, o que que você achou de vantagens desse tipo de abordagem para eles?

Kamilla: Ah então eu achei legal porque quando a gente trabalha, e hoje em dia eu trabalho no fundamental dois só com desenho geométrico já trabalhei como professora de geometria, de álgebra e no ensino médio trabalho com álgebra e não trabalho com desenho geométrico e eu vejo que é só decorar eles decoram a fórmula aplicam base vezes altura, base vezes altura dividido por dois e ali eles estão vendo realmente. E aí quando eu botei essa questão bônus e vi eles tentando ver outras maneiras, outras linhas de raciocínio para chegar nessa equivalência, eu vi que eles conseguiram entender isso.

Angelo: E eles desenvolvem a visão.

Kamilla: Cara conseguem a pensar, a ter a linha de raciocínio da geometria mesmo.

Angelo: Claro e eles acabam levando isso pra geometria espacial.

Kamilla: Uhum. E olha que eles nem vêm isso comigo, eles começam a ver geometria espacial com o professor de álgebra e geometria que é o Orlando e no desenho geométrico eu tento botar aqui uma linha de raciocínio eu falo com eles que quando a gente trabalha Geometria na sala de aula é muito abstrato, é algo muito abstrato eles não tá é só uma fórmula e quando a gente tenta explicar a fórmula o motivo da Fórmula eles acham chata essa é a questão eles acham chata quando eu fui falar para eles sobre a média geométrica e a média proporcional, eles quase piraram. Quando eu fui falar para eles sobre a quarta proporcional terceira proporcional produto dos meios igual ao produto dos extremos que isso não, não quero, não sei o que é. Aí quando você joga isso na geometria eles acham mais divertido não na geometria porque isso já é geometria quando eu jogo isso no desenho geométrico eles estão praticando o que tá ali na fórmula e eles acham isso super legal tanto que o pessoal lá de onde eu trabalho eles até brincam. Eles falam: assim nossa! Nunca vi uma professora de matemática ser tão querida e aí eu falo para ele gente não é só matemática não. Eu sou professora de desenho geométrico deles.

Angelo: Essa é a questão é e você faz com que eles tenham uma visão, com que eles pratiquem, que eles utilizem outros meios para poder fazer, para poder pensar também para poder construir e essa ideia da construção para eles quando eles chegam num resultado eles gostam.

Kamilla: Eu torno a geometria para eles um pouco mais concreta eu acho que na aula de geometria simples, fica muito abstrata a geometria euclidiana ali para eles. Ah tá ok fiz aqui um triângulo qualquer base vezes altura dividido por dois no por exemplo, no oitavo ano, no sétimo ano ensina eles a construírem um triângulo é o meu aluno do sétimo ano ele tem lá o que que é um triângulo equilátero, mas eles nunca mais esquecem porque eu mando eles com construírem um triângulo equilátero. E aí eles têm que saber os conceitos principais do triângulo equilátero. Eu mando eles construírem um triângulo isósceles eles têm que saber os conceitos do triângulo isósceles e a propriedade que eu falo para eles das cevianas num triângulo equilátero, da propriedade das cevianas num triângulo isósceles. Então eles ficam com aquilo ali na cabeça. Ou uma coisa que eu adoro trabalhar com eles e a condição de existência do Triângulo.

Angelo: Uhum.

Kamilla: Matemática, ele só tem que tomar um lado mas o outro ver se vai ficar maior do que o terceiro lado desenho geométrico eu falo faz aí o lado transporta, transporta outro lado com compasso. Ah professora eles não se cruzaram. Se não tem o cruzamento de dois arcos ou duas retas, você não tem o ponto. Você não tem o terceiro ponto não tem o triângulo por quê eles fariam isso na conta, mas aí fica mais concreto eles estão visualizando aquele conceito sabe então ao é o nosso desafio. Essa parte do desenho geométrico nunca pensei que eu iria trabalhar com essa parte da geometria e assim é uma parte muito legal, muito legal mesmo e eles levaram assim super de boa eles gostaram de trabalhar e aí eu falei para eles: olha gente, vocês não precisam decorar, vocês precisam entender por que que eu estou pegando a metade por que que eu estou fazendo a média geométrica para que que ela serve para achar o lado aí eu falei vocês querem que eu explique aqui quero aí eles não querem que a gente explique a parte teórica eles já não gostam muito porque eles gostam de colocar ali a mão na massa.

Angelo: Uhum! E você acha que com essa, com esse conceito, com esse método de trabalho houve uma melhora no desempenho deles?

Kamilla: Ah com certeza com certeza vários alunos assim que não tinham muita

dificuldade melhoraram tá não acho que é uma das partes mais trabalhosas na minha matéria com eles porque para ter essa matéria você precisa ter um conceito básico que a maioria tinha entendeu esse conceito básico e eu acho que vai ajudar os alunos até na aula do Orlando, quando ele pega a geometria ali e trabalha essa probleminha com área, com perímetro e fica mais fácil até deles compreenderem, trabalharem isso.

Angelo: As avaliações que você utiliza com eles e são todas quantitativas?

Kamilla: Sim eu eu tenho que seguir o aí esqueci o nome, calma é o projeto político pedagógico da escola e aí como é uma escola de rede eu tenho que seguir o sistema que é... assim o que é legal lá é que tem vários métodos para se avaliar o aluno lá tem a avaliação AV1 que é a primeira avaliação AV2 segunda avaliação e tem a avaliação formativa. A avaliação formativa ela é feita com trabalho para casa e um trabalho de aula. Esse trabalho de aula a gente pode trabalhar sim da maneira que a gente achar melhor então quando se tem tempo eu sempre gosto de fazer um trabalho diferenciado com os alunos quando tá na correria por exemplo, segundo bimestre uma correria enorme não conseguir fazer um trabalho diferenciado com eles que mal acabou, mal acabou AV1 menos de um mês já teve AV2, segunda chamada, logo depois boletim, recuperação... uma correria enorme mas, assim essa... esse trabalho que a gente chama de TAP, Trabalho de Aula Pontuado. Eu sempre gosto de colocar em prática o que a gente vê na sala de aula então assim, não só com o nono ano mas assim com todas as turmas por exemplo, no sexto ano quando eu vou falar sobre e figuras espaciais sólido geométrico sempre gosto de fazer aquela brincadeira da Jujuba. No sétimo ano esse ano ainda não fiz vou fazer agora no no terceiro bimestre quando eu vou ensinar a construção de triângulo eu gosto falar sobre a importância do triângulo nas nossas vidas que é o a figura geométrica uma das mais sólidas que tem. E aí eu gosto de falar sobre a sua rigidez aí eu boto alguns exemplos de grandes construções que a maioria delas são feitas com triângulos devido a sua rigidez porque se você pressiona ela continua ali intacta e aí eu gosto de pedir o trabalho concreto com eles e aí eu peço construções mesmo esculturas. E aí ano passado eu tive um grupo que eles imitaram a ponte lá dos Estados Unidos, esqueci o nome dela, São Francisco... não lembro isso. E aí eles fizeram a ponte com palitinho, sim nome eu esqueci o nome também é e eles fizeram ela com palitinho de churrasco com superbonder, cola quente, pintaram e começaram a botar peso em cima assim da ponte e a ponte aguentou até 12 kg. Foi assim super legal. E aí eles mostrando que ela não... ela continua ali muito rígida e com palitinho devido que

ela foi é toda construída com triângulos e assim achei super legal essa construção. Então gosto seme de fazer algo diferente com eles para mostrar essa aplicação do nosso dia a dia da geometria mas assim na quadratura eu acho assim que é um pouco mais difícil a gente trabalhar isso um pouco fora ali. . . .

Angelo: Do contexto.

Kamilla: É isso que eu ia falar. Essa parte do contexto é um pouco mais difícil.

Angelo: Ia te perguntar agora sobre isso.

Kamilla: É muito complicado, assim eu tento, assim pensar: gente, o que que eu vou trabalhar? O que que eu vou fazer? Porque assim tem algumas ideias que a gente acaba reciclando para os outros anos mas assim a questão da quadratura não consegui ainda trabalhar por exemplo no nono ano já consegui trabalhar com a homotetia é um assunto que eu trabalho também com eles e aí eu falo da câmara escura. E aí teve um trabalho da Feira da cultura que um grupo eu botei para fazer homotetia, trabalhar com o conceito de homotetia e eles fizeram a câmara escura fizeram uma caixa enorme. Ficou super legal e fizeram também a pequenininha com lata Ficou muito legal mas a quadratura é muito complicada.

Angelo: Muito, muito, muito difícil. Eu até a fazendo orientação tô fazendo orientação e ainda uma consultoria que me ajuda a ter as ideias, porque é complicado e aí ela: pô você precisa contextualizar isso, você precisa levar isso uma contextualização como é que você vai fazer isso?

Kamilla: E conseguiu?

Angelo: Claro que não. Eu estou pensando aqui uma coisa que eu fiz e assim eu. . . como eu trabalho com a educação pública isso é muito mais difícil.

Kamilla: Sim. Angelo: E aí eu peguei, uma peguei assim duas alunas que tem mais afinidade que elas sempre querem me ajudar aí eu peguei com elas e fui fazendo a um iniciozinho desse trabalho de quadraturas. Fui mostrando a área de figuras planas, fui fazendo algumas equivalências. E essas equivalências eu fiz com folha de A4, peguei a folha de A4 e aí eu fui mostrando a área do losango, a partir de uma folha de A4, supondo ela ser um retângulo, fazendo recortes. o que acontece aqui? Qual é a área do losango? Então a partir de uma folha de A4 supondo ela ser um retângulo fazendo recortes aí o que que acontece aqui? qual é a área do losango? Então a partir do do da área do retângulo ah dentro dessa folha eu consigo dois losangos e aí a os lados são as diagonais você reparou que

os lados da folha formam as diagonais elas são perpendiculares. E aí fui fazendo isso com elas para trazer pro conceito de Áreas. Aí depois fui mostrando essa coisa da quadratura fazendo construções com régua e compasso. E aí depois uma outra coisa que eu ainda não tinha comentado contigo ia te perguntar era sobre o geogebra porque aí eu fiz, fiz em cima fiz em cima essa a quadratura do retângulo por exemplo no geogebra mostrei para elas isso no geogebra. E aí elas conseguiram claro que com as suas dificuldades porque eram alunas do segundo ano do ensino médio e aí eu fiz como experiência assim elas entenderam, tiveram as suas dificuldades. Relatei todas as dificuldades para poder depois transcrever mas é um desafio é sinceramente, é muito um desafio. E quando você tem esse acompanhamento que você trabalha Poxa isso torna-se muito interessante, muito mesmo.

Kamilla: E se torna mais fácil para eles. Eu acho porque eles já tá eles já estão tendo um preparo e eu acho que assim, eu não teria essa didática para construir isso se não fosse seguindo a linha de pensamento desse livro sabe e vou te falar: eu nem sigo o que tá escrito eu sigo o Sumário só para me guiar entendeu, o caminho a parte do conteúdo eu faço um filtro para ficar mais na linguagem dos alunos.

Angelo: Entendi entendi e assim você consegue trabalhar no geogebra com eles?

Kamilla: Então eu eu sei trabalhar no geogebra só que como a minha matéria requer o uso obrigatório do compasso e da régua o geogebra não é válido para isso para mim por quê Porque o geogebra ele já vai e faz a construção direta. Eu vou pegar, vou pegar o mouse vou construir entendeu e aí eu uso outro aplicativo mas eu uso o quadro. Lá também todas as salas lá tem um aplicativo que eu tenho aqui, que ele se chama ó activeInspire que é um vou escrever aqui para você ó!

Angelo: Beleza. Kamilla: Aí eu acho que esse aqui é o studio porque tem alguns modelos desse aplicativo que não tem compasso. E aí para ter o compasso é uma versão paga e eu tenho ele por causa do compasso porque ficaria muito difícil explicar para os meus alunos fazendo a construção direto sem mostrar como eles fariam com compasso e régua. Eles não iriam aprender a fazer com compasso e régua se eu não estivesse fazendo com compasso e régua. Por isso que eu não uso o Geogebra porque como eu faço tudo com compasso e régua com eles eu tenho que ter compasso e régua para trabalhar com eles, entendeu? Ou eu faço no quadro, ou eu faço com esse aplicativo. E esse aplicativo eu não sei se... deixa eu ver aqui se eu consigo... eu vou abrir ele. Será que eu consigo compartilhar a tela com você?

Angelo: Consegue, consegue. Pode compartilhar.

Kamilla: Deixa eu abrir aqui... não sei se eu tenho algum salvo aqui de quadratura, vou até dar uma olhada aqui para te mostrar.

Angelo: Você falou que no Geogebra ele já te dá a quadratura.

Kamilla: Não, ele não me dá quadratura, mas ele não me dá para trabalhar com compasso.

Angelo: É.. não consegue. Você vai fazer o segmento, você vai montar o segmento, você vai fazer os segmentos proporcionais, você vai montar tudo...

Kamilla: Eu vou fazer a perpendicular, mas eu não vou estar com o compasso. Então eles vão falar: tá, mas como é que faz, entendeu?

Angelo: E aí você gosta de apresentar isso para eles porque senão vai se tornar muito mais fácil.

Kamilla: Sim também eles acham que é mais fácil trabalhar com o meu aplicativo e aí às vezes eu levo a minha mesa digitalizadora para a escola e falo: assim, pode tentar fazer aqui na minha frente. E aí eles falam: professora é mais trabalhoso. Ué vocês não acham mais fácil.

Angelo: Até bom saber disso porque só assim, é um campo tão amplo, mas também tão restrito que você não trabalha com eles. E assim, a minha experiência com isso... O que me levou a fazer esse trabalho? Até para você ficar sabendo, porque a minha ideia inicial para a minha tese, para a minha dissertação era a construção de espaços para o ensino de matemática e aonde o meu produto final seria uma construção de um laboratório. É nos moldes do laboratório sustentável de matemática, não sei se você conhece ele. Ele funciona numa escola estadual lá em Pedra de Guaratiba. Para você ter uma ideia, ele utiliza material reciclável. E aí minha ideia seria formar esse espaço na escola que eu trabalho, só que aí naquele momento a professora não achou a ideia muito interessante. E aí me passou para um outro professor, não sei se já escutou falar, João Bosco, João Bosco Pitombeira.

Kamilla: Não, não ouvi.

Angelo: Então, ele fala muito sobre a História da Matemática ele é um dos Pensantes sobre a História da Matemática. E aí eu falando com ele, ele me deu um livro que ele escreveu sobre as três construções impossíveis, que é a trisecção do cubo, a quadratura do círculo e ... qual era a outra?

Kamilla: Não trabalhei a quadratura do círculo. Ah não trabalhei.

Angelo: É com régua e compasso ela é impossível. Você só consegue coisas parecidas, a quadratura das lúnulas de Arquimedes, por Arquimedes que são construções aproximadas.

Kamilla: Ó! A única coisa, que eu trabalhei assim, próximo do círculo que eu faço é circunferências... tangente, a tangência de circunferências internas, externas, falo sobre lugar geométrico, que aí a circunferência é um dos lugares geométricos e falo também sobre a retificação da circunferência que é faz, determina o comprimento da circunferência através do seu diâmetro, porque se você for calcular o comprimento dela. E aí o pi não tem como você achar então a gente faz através do diâmetro dela que é três vezes o diâmetro mais um sétimo dele, entendeu? E aí para fazer isso você teria que dividir o diâmetro em sete partes iguais e aí a gente divide com a regra do deslizamento fazendo ali trabalhando com Tales também, não é, lados proporcionais e aí eles conseguem fazer a retificação da circunferência. Ó é esse aqui é o aplicativo, e aí ó deixa eu fixar aí eu tenho aqui a régua porque aí fica mais claro para eles, tá vendo? Ó, régua, compasso. E aí fica muito mais simples trabalhar assim com eles porque eles estão vendo eu utilizar régua eles vão ver utilizando compasso como se eles tivessem no caderno deles. Já no Geogebra não tem essa aplicação tão visual para eles. Eu posso até falar, mas vai ficar muito abstrato para eles. Mas até que no nono ano eu uso até pouco esse programa, sabia? Porque como é uma turma muito grande eu prefiro ficar em pé quando eu tô usando esse programa eu fico sentada com a minha mesa digitalizadora e tudo mais. Então prefiro ficar em pé, compasso e régua mesmo, e aí vou de mesa em mesa. “Ah, não entendi, não sei”, vou de mesa em mesa ou repito, entendeu? E aí eu prefiro trabalhar com esse aplicativo justamente por isso porque fica mais fácil de eles compreenderem, no Geogebra eu vou falar: faça o segmento de tantos centímetros, eu vou lá pegar o mouse, vou puxar, fiz. Faça a perpendicular, eu vou no Geogebra, vou traçar uma perpendicular e aqui não. Aqui eu falo para eles como é que a gente faz a perpendicular? Tem várias formas de se fazer, mas qual o jeito que eles mais gostam, a gente fala arco para um lado, arco para o outro, abre metade para cima, arco para baixo eles já sabem esse mecanismo. E aí só falando fica muito abstrato para eles.

Kamilla: Então eu tenho que pegar e tenho que fazer compasso, ó arco para um lado, arco para o outro, aí é uma coisa que assim... eu acho sensacional aí eu falo, você

só tem um ponto através do cruzamento de dois arcos. Então ali o arco da esquerda não tem. O que você faz? Aí todo mundo sabe: prolonga a reta. Por que você prolonga a reta? Por que a reta é infinita. Então assim, são os conceitos bem simples que eles acabam fixando por causa do desenho geométrico.

Angelo: Já tá terminando professora, seu tempo. aqui faltou só na verdade.

Kamilla: Oi! Vou parar só de compartilhar aqui. Fala.

Angelo: Você utilizaria, porventura, na educação pública, você tendo essa oportunidade, você também esse conceito.

Kamilla: Utilizaria, eu... eu acho que é como eu te falei a Matemática sai um pouco do visual deles, assim: ai, a Matemática é muito difícil, a Matemática para que que eu vou usar isso na minha vida? Essa é a pergunta deles e eu tento fazer com que eles consigam ver um pouco mais da matemática palpável, sabe. E eu acho que o Desenho Geométrico faz isso, eles enxergarem um pouco mais a matemática, tirar ela lá do mundo imaginário ou do campo do impossível, muito difícil, é só conta, conta, fórmula, conta, conta e ali para eles enxergarem um pouco até que... Ah, mas é só um conceito, mas tudo bem, mas ele tá vendo aquele conceito de maneira diferente, eu acho isso. E eu vou te falar, eu quero, vou fazer o mestrado, não sei qual tempo, mas quero. E aí eu acho que a minha família toda fala assim: Kamilla, você é a louca por Desenho Geométrico, por que você não faz uma especialização nisso que você trabalha, não sei!!! Que aí eu falo gente: Sim eu quero trabalhar, mas eu não tenho tempo.

Angelo: Na boa, você tem um material muito vasto para poder entregar muito vasto se eu fosse eu fazia inscrição agora pro profmat faria a prova do profmat e na boa, e faz isso porque é muito bom tá muito bom mesmo, muito bom mesmo. Eu tenho um professora você me salvou.

Kamilla: Vou te falar que isso qualquer coisa só eu vou demorar mas eu juro que eu vou responder a gente pode marcar outra reunião.

Angelo: Sim. assim essa reunião para mim já é pô, suficiente me ajudou muito em várias coisas o aplicativo, já tem um material para falar desses aplicativos. Tanto de um quanto do outro mostrar essas diferenças vou só te pedir se for possível encarecidamente você me mande o livro e algum material que você tenha.

Kamilla: Te mandar o nome dos livros e posso até mandar o material que eu tenho sim sim quadratura que já é da do Passo a Passo das construções sim eu se... Angelo:se

você pudesse me mandar hoje mesmo hoje mesmo eu tava aqui sentado construindo. Estava construindo alguma coisa e fiz a quadratura do retângulo.

Kamilla: Ó! Vou te mostrar aqui acho que eu tenho um deixa eu ver aqui aí não consigo compartilhar calma aí.

Angelo: Ah e eu vou te mandar você vai me mandar mas eu também vou te mandar umas dissertações que eu separei para a minha pesquisa para que você tenha material para depois você já construir a sua tese caso você queira trabalhar hein.

Kamilla: Não eu quero eu juro que eu quero muito só que é o que é engraçado, que agora até lembrei você falando disso eu tenho um professor que trabalha comigo nessa escola que é o Cássio e ele é sociólogo é professor de história ele é assim super estudado faz já faz já já é mestre tá no doutorado, ele fala Camila do céu Por que que você não tá fazendo mestrado vamos lá eu te ajudo vamos para e ele é da oeste também ele você tem que mostrar isso porque ele viu eu fazendo, por exemplo eu fiz agora o da semana passada eu fiz o MAG gincana entre oitavo e o sétimo ano sobre, eu não sei se você me tem lá no calculando até filmei sobre construção de ângulos com compasso. E aí era em dupla E aí eu e a dupla pular num pé só e eu falava ó gente eu vou falar o nome do ângulo e vocês vão pensando pulando no pé só e na volta vocês vão fazer e era uma competição quem conseguia fazer mais rápido esse ângulo de maneira correta e assim foi uma brincadeira que eu fiz com eles que eles foram a loucura e assim, é uma coisa que eu acabei fazendo eles estudarem porque eles querem vencer e foi muito doido aí o Cássio Ele olha para mim e fala assim: por que que você não tá botando isso em algum papel em algum lugar?

Angelo: Registra tudo na boa registra tudo, e e trabalha em cima porque cara se tem uma metal muito vasto muito vasto mesmo, você tem pronto.

Kamilla: Vou mostrar aqui ó eu tenho esse aqui E aí esse passo a passo, ao determinar a média geométrica pelo processo aditivo obviamente eu falo já diretamente aqui determinar a média geométrica pelo processo aditivo porque eles já sabem o que é média geométrica, porque eu Já ensinei anteriormente e eles já sabem como é que se faz média geométrica pelo processo aditivo, E aí então é tem um processo aditivo e subtrativo. E aí na quadratura Eu só trabalho com aditivo.

Angelo: Aditivo.

Kamilla: Então quando eu falo esse isso aqui no passo a passo obviamente é pro aluno que já tem um conceito, conhecimento básico, daquilo ali que eu tô trabalhando

né. Por isso que eu trabalho alguns conceitos antes e aí eu falo com eles e aí eles bota aqui o passo a passo e essa aqui foi a construção que eu fiz através do meu aplicativo, aí você vê aqui é a construção que eu fiz e mostro para eles e aí foi o que no oitavo ano, eu adoro ter feedback. Teve um aluno meu que falou: assim professora por que que a senhora não não faz o seguinte, você já tem o a plataforma, Por que você não coloca assim primeiro passo de azul e faz a construção de azul segundo passo de vermelho e bota a construção que a senhora fez de vermelho terceiro passo de verde para ele ver aonde que tá o passo a passo da construção a achei legal esse feedback e aí essa construção, aqui o passo a passo é para um aluno que não tem dificuldade quando eu vou explicar isso aqui eu vejo que é uma turma um pouco mais fraca eu não faço dessa maneira, boto o primeiro passo e já faço por exemplo o primeiro passo com eles no slide um exemplo faço a quadratura mediatriz semicircunferência, próximo passo perpendicular e vou fazendo com eles aos poucos Isso aqui é uma turma que já é um pouco mais avançada, tá? aí ó tem aqui do paralelogramo tá vendo aí tem o passo a passo e aí a quadratura tem do Triângulo, aqui ó que eu te falei que tem através da mediatriz da altura tá vendo eu peguei a base, e vou pegar a metade daquela altura e aí tem aqui também do trapézio que é do trapézio que a gente fala sobre a soma das bases para construir uma base média então aqui eu mostro para eles. E aí esse material eu até peço para a gráfica lá da escola imprimir para deixar com eles, e vou falar eles eles usam muito pouco, eles gostam de ver eu fazendo e eles pegam o jeito e tem alguns alunos que nem usam esse material de apoio. Mas eu acho que sim é importante para quando eles forem estudar sozinhos tanto que eu tenho alunos de desenho geométrico que eles ficam pedindo, professora por que você não grava vídeo no YouTube?, eu falo não tenho tempo, aí eles falam, porque não tem muito vídeo de desenho geométrico no Youtube.

Angelo: Porque eles são muito assim eles querem trabalhar muito com videoaula, agora é assim ah eu assisti uma videoaula. Eles têm uma visão, mas eles mesmo assistindo a videoaula, Eles não conseguem trabalhar com ela que é, você vê a videoaula, dá um pause e tenta fazer, vê videoaula dá o pause e tenta fazer, não tem isso entendeu então isso é complicado e assim, agora é a última mesmo, e você sente a resistência dos colegas com relação a aplicação de quadraturas do desenho geométrico?

Kamilla: O colega de trabalho?

Angelo: De trabalho ou até mesmo.

Kamilla: Da área da matemática?

Kamilla: Não não sinto não os meus colegas de trabalho às vezes a gente até acaba, eu gosto né, obviamente tô seguindo o Sumário desse livro que eu te falei né o cronograma dele mas às vezes, até acaba batendo com que o professor tá trabalhando de Orlando, e eu acho isso super legal que a gente acaba complementando né. Por exemplo agora no 9º ano ele falou sobre Pitágoras, triângulo pitagórico. E aí o meu próximo assunto é aplicação do teorema de Pitágoras eu falo sobre construção de quadrado e triângulos com números que tem raiz, e aí eu falo para eles, gente você não vai, eu vou pedir Construa um quadrado com três raiz de dois, não tem raiz de dois na régua, então como é que a gente acha, através de Teorema de Pitágoras. E aí eu ensino a eles a aquela construção do triângulo retângulo e você vai fazendo aquele ciclo né, raiz de dois, raiz de três, raiz de cinco vai fazendo né. E aí eu falo isso com eles né, eles falam: Ah não, não acredito Pitágoras de novo a gente acabou de ver isso e eu acho isso máximo porque a gente acaba completando o um que o outro tá fazendo né. Eles não tem a resistência, eles só falam, eu não sei desenho geométrico não dá para mim, e eu vou te falar, eu também não tinha Total domínio, eu tive que assim aprender muita coisa, eu tive que ver muita coisa, porque realmente é muito diferente, muito diferente obviamente a gente teve tudo que é tipo de Geometria na UERJ né como disciplina, mas de construção geométrica eu tive uma eu tive duas ou três até achei que eu tive bastante porque esse meu professor que me deu aula ele a especialização dele é nessa mais para construção. As outras não né, as outras eram geometria não euclidiana geometria euclidiana geometria analítica, mas para essa parte de construção a gente não tem tanto foco até tem como eu te falei eu tive duas ou três disciplinas disso, mas não é tanto foco. E aí quando você vai trabalhar em vários lugares tem para você trabalhar com compasso e régua no capítulo 10 do terceiro bimestre e é a única vez no ano que você vê o aluno usando compasso, régua, transferidor tanto que tem aluno para mim que fala ah na outra escola tava na lista de material transferidor e a gente nunca usou, porque não tá ali né, no cronograma da escola, que tem que trabalhar essa parte na matemática.

Entendeu então fica um pouco esquecida em algumas instituições, e outras não né eles dão, essa prioridade e eu acho super legal e o que me deixa contente e de ver que eu falo para eles, gente isso aqui não é só para você que vai querer ser arquiteto Engenheiro mas tem vários alunos que depois que eles tiveram aula comigo de geometria eles falam ,eu quero ser arquiteto por causa de você professora e eu fico muito feliz assim.

Angelo: Isso é muito legal é inspiração né cara.

Kamilla: Me encanta de tal maneira que eu fico assim extremamente realizada, tem um aluno meu que ele é muito bagunceiro, muito bagunceiro, muito muito bagunceiro. E aí um monte de gente fala dele, e aí eu falo, gente ele é bagunceiro, mas na minha aula ele faz tudo ele copia tudo ele fala professora eu quero ter aula por ele fala eu quero ser arquiteto por causa da tia Camila.

Angelo: Tá certo, é o nosso combustível né cara, é o nosso combustível você inspirar por mais que seja uma única pessoa ou um grupo de dois, três alunos você consegue ver que poxa meu trabalho tá sendo feito, meu trabalho tá atingindo alguém e isso é importante.

Kamilla: Verdade.

Angelo: E você só trabalha na rede objetiva?

Kamilla: Não, eu trabalho no ADN Master ali no Méier.

Angelo: Ah sim eu moro aqui no Méier.

Kamilla: Ah é mora no Méier? Só que ali no ADN Eu trabalho no ensino médio e não tem desenho geométrico.

Angelo: Não tem desenho geométrico né?

Kamilla: Não, não tem. Não são muitas escolas que trabalham com desenho geométrico que eu vejo assim né, são poucas, e escolas até que o Pedro II tem desenho geométrico.

Angelo: Tem sim.

Kamilla: A Cap tem também desenho geométrico.

Angelo: Cap Uerj.

Kamilla: Cap Ufrj tem, algumas escolas particulares tem e outras estão dentro ali da disciplina mesmo né, é o que eu falo para eles, gente tem aluno que me pergunta assim você é formada em desenho geométrico?, aí eu começo a rir.

Angelo: Pois é.

Kamilla: Pois é existe a faculdade de desenho geométrico, eu falo para ele gente, desenho geométrico é uma das ramificações da Matemática é como se a matemática fosse uma árvore e aí tem vários Galhos que aí tem a trigonometria, álgebra, álgebra linear, a geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, e tem desenho geométrico que é um desses galhos, dessa árvore que é a matemática. Ai eles, ah tá mas olha perguntaram tantas vezes, se eu gente não existe, E aí eu eles falam Você é professora de arte falei gente

eu não sei desenhar bem igual professora de arte, não tá só para deixar claro,e professora de arte não dá desenho geométrico.

Angelo: Bom professora não vou mais tomar o seu tempo,quero te agradecer imensamente pela rica entrevista, assim pela gama de informações que eu peguei aqui e te peço né, claro encarecidamente se for possível me envie o esse material para poder utilizar alguma coisa né na minha escrita, te peço também não perca essa oportunidade faça porque você já tem um trabalho muito bom, muito bom mesmo ,que vai inspirar pode deixar que com certeza vou citar seu nome na minha dissertação,preciso citar tenho essa necessidade,e não deixa de fazer a prova não para PROFMAT, porque vai valer muito a pena vai valer muito a pena, você pode ter certeza você já tem um material muito bom, você já tem o que você quiser seguir de area você vai conseguir seguir e vai conseguir entregar.Então pô aproveita,ah não tenho tempo, a gente não tem tempo mesmo mas, de um jeito ou de outro vai conseguir muita coisa e você já tem muita coisa,então agora é só reunir o material e entregar tá parabéns.

Kamilla: Obrigado.

Angelo: Ajudou muito vou parar aqui a gravação agora tá parando aqui a gravação.