



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Isabele Souza Brito

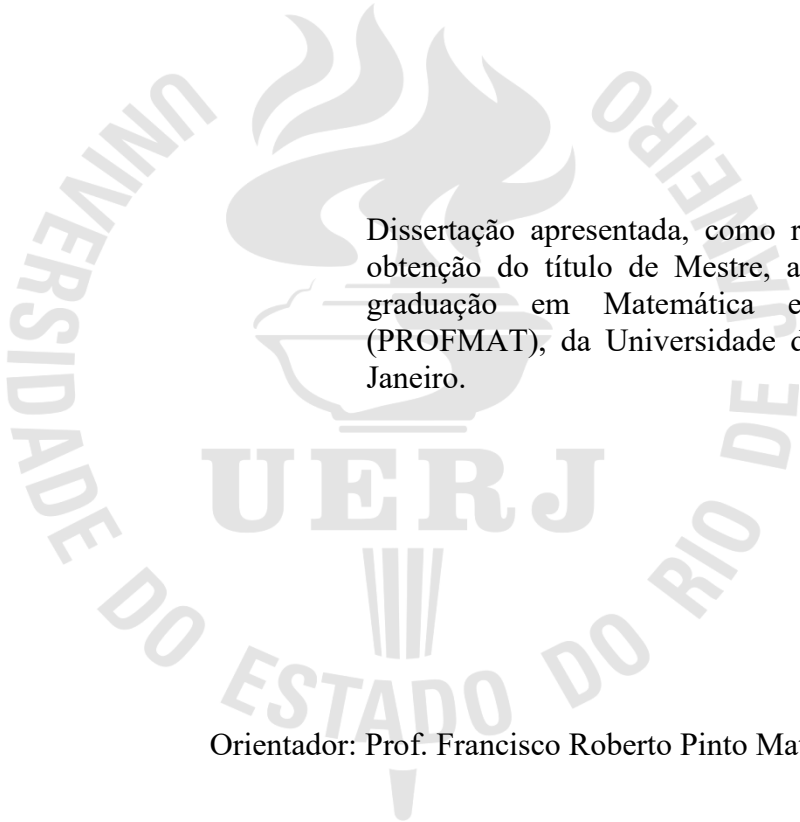
Explorando propriedades de polígonos com GeoGebra

Rio de Janeiro

2025

Isabele Souza Brito

Explorando propriedades de polígonos com GeoGebra



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Francisco Roberto Pinto Mattos

Rio de Janeiro

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B862 Brito, Isabele Souza.
Explorando propriedades de polígonos com GeoGebra / Isabele Souza Brito – 2025.
148 f. : il.

Orientador: Francisco Roberto Pinto Mattos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Polígonos – Métodos de ensino – Teses. 2. GeoGebra (Programa de computador) – Teses. I. Mattos, Francisco Roberto Pinto. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada fonte.

Assinatura

Data

Isabele Souza Brito

Explorando propriedades de polígonos com GeoGebra

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em: 15 de dezembro de 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - CAP-UERJ

Prof.^a Dra. Christine Sertã Costa

Colégio Pedro II

Prof.^a Dra. Gabriela dos Santos Barbosa

Faculdade de Educação da Baixada Fluminense - UERJ

Rio de Janeiro

2025

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação aos meus alunos que são uma grande inspiração e à minha filha, que tornou esse trabalho ainda mais importante na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por conceder-me a força e a sabedoria necessárias para trilhar e construir esta jornada.

À minha família, que é a base de tudo, pelo apoio e por me inspirar a jamais desistir dos meus sonhos, cultivando a resiliência em minha vida. Em especial, à minha mãe, Marieta, ao meu pai, Tibúrcio, e principalmente à minha irmã, Mikaelle, que é um verdadeiro espelho e fonte de incentivo em meu crescimento pessoal e profissional. E, claro, a minha filha Alice, esse presente divino recebido durante o curso do Mestrado, que a cada olhar renova minhas energias e me impulsiona.

Ao Professor Francisco Roberto Pinto Mattos, meu orientador, que com sua paciência e sabedoria, nunca desistiu de mim. Sua incansável ajuda e a inspiração para o tema deste trabalho, que me acompanha desde a graduação, foram fundamentais para a realização desta dissertação.

Minha gratidão se estende aos amigos que me acompanharam desde o pré-vestibular, e que foram fundamentais na construção da adulta que sou hoje, em especial Luisy e Hérica, por sempre me lembrarem do meu potencial.

Aos queridos amigos do mestrado – Angelo, Thaís, Felipe, Priscila e André – que, sem dúvidas, representaram uma base sólida e essencial para atravessarmos juntos esta desafiadora etapa de nossas vidas.

No ambiente profissional, agradeço imensamente aos meus colegas de trabalho, especialmente Marcos Madureira, Camila Pelaes, Alexandre Mitre, Carmen, Soraia e Fernanda, cuja compreensão e apoio foram essenciais para conciliar meus horários de trabalho, estudos e os cuidados com minha filha. Minha gratidão também aos amigos e às equipes de professores, como Ana Beatriz, Luana Correia e Arilton, Karina, Helena que sempre estiveram dispostos a oferecer um abraço e palavras de encorajamento neste caminho por vezes turbulento.

E, de forma muito especial, aos meus alunos, de mais de uma década em sala de aula. Esta dissertação é por eles e para eles, a materialização de um esforço contínuo para oferecer o melhor em educação e inspirar a curiosidade pelo conhecimento. Eles são a razão e a inspiração de todo o meu fazer pedagógico.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

Paulo Freire

RESUMO

BRITO, Isabele Souza. **Explorando propriedades de polígonos com GeoGebra**. 2025. XX f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

A implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as persistentes dificuldades dos estudantes nos conteúdos de Geometria Plana evidenciam a necessidade de sequências didáticas que articulem investigação matemática e uso pedagógico de tecnologias digitais. Esta dissertação tem como objetivo geral conceber e fundamentar, em termos teórico-metodológicos, uma sequência de atividades investigativas com o software GeoGebra para a exploração de propriedades de polígonos por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Especificamente, analisa fundamentos da Geometria Plana e sua presença em documentos curriculares, discute o papel das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação e da Geometria Dinâmica no ensino de Matemática, propõe roteiros de atividades investigativas com GeoGebra e examina desdobramentos pedagógicos esperados. Adota-se uma abordagem qualitativa, caracterizada como estudo de design pedagógico, baseada em revisão bibliográfica, análise de PCN e BNCC, sistematização de resultados clássicos sobre polígonos e elaboração do produto educacional “Desvendando o segredo dos polígonos”. Como principais contribuições, destacam-se a organização de um núcleo conceitual de Geometria Plana articulado às habilidades da BNCC e a construção de uma sequência de tarefas com potencial para favorecer a formulação de conjecturas, a argumentação e o raciocínio investigativo dos estudantes com mediação do GeoGebra. Conclui-se que o material proposto oferece subsídios concretos para o trabalho de professores da escola pública com polígonos em ambiente de geometria dinâmica, embora se reconheça como limitação a ausência de aplicação empírica sistemática. Sugere-se que estudos futuros realizem ciclos de pesquisa de design que investiguem a implementação da sequência em turmas reais, analisando produções dos alunos e intervenções docentes.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria Plana. GeoGebra. Tecnologias Digitais. Atividades investigativas.

ABSTRACT

BRITO, Isabele Souza. Exploring properties of polygons with GeoGebra. 2025. XX leaves. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

This dissertation addresses the persistent difficulties students face in Plane Geometry and the demand, intensified by the Brazilian National Common Core Curriculum (BNCC), for teaching approaches that integrate mathematical investigation and digital technologies. Its main goal is to design and theoretically ground a sequence of investigative activities using the GeoGebra software to support the exploration of polygon properties by students in the final years of elementary school. Specifically, the study (i) analyses fundamental concepts of Plane Geometry and their presence in official curricula, (ii) discusses the role of Digital Information and Communication Technologies and Dynamic Geometry in Mathematics Education, (iii) proposes detailed investigative tasks with GeoGebra focused on polygons, and (iv) examines the pedagogical developments expected from their implementation. Methodologically, it is a qualitative design study based on literature review, analysis of curriculum documents, systematization of classical geometric results and the development of the educational product “Unveiling the Secret of Polygons”. The main contributions are the organization of a conceptual core of Plane Geometry aligned with BNCC skills and the construction of a coherent task sequence with potential to foster conjecturing, argumentation, and investigative reasoning mediated by GeoGebra. The dissertation concludes that the proposed material offers concrete support for public school teachers working with polygons in dynamic geometry environments, while acknowledging as a limitation the absence of systematic empirical application. Future research should conduct design-based cycles with real classes, analysing students’ productions and teacher interventions.

Keywords: Mathematics Education; Plane Geometry; Polygons; GeoGebra; Dynamic Geometry; Investigative activities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Fluxograma da Evolução dos Paradigmas do Ensino da Geometria.....	29
Figura 2 - A 5ª Competência Geral da BNCC: Uso crítico e Ético das TDIC.....	33
Figura 3 - Marcos Históricos da Inserção das Tecnologias Digitais na Educação Matemática.	36
Figura 4 - Desafios Intrínsecos das Tecnologias Digitais.....	37
Figura 5 - Interface principal do GeoGebra mostrando as janelas de Álgebra e Geometria.	46
Figura 6 - Barra de ferramentas do GeoGebra com opções de construção.....	47
Figura 7 - Exemplo de manipulação de um vértice de um triângulo no GeoGebra.....	48
Figura 8 - Valores dos ângulos de um triângulo sendo atualizados dinamicamente no GeoGebra.....	49
Figura 9 - Página inicial do GeoGebra.org.....	52
Figura 10 - Página de pesquisa de materiais didáticos no GeoGebra.org.....	52
Figura 11 - Exemplo de material didático disponível na plataforma GeoGebra.org... ..	53
Figura 12 - Página inicial do GeoGebra Classroom.....	53
Figura 13 - Interface do GeoGebra Classroom para acompanhamento de alunos.....	54
Figura 14 - Metodologia da Aprendizagem Baseada na Investigação.....	61
Figura 15 - Infográfico representando a integração entre ABI, ABRP e GeoGebra....	67
Figura 16 - Triângulos congruentes $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com indicação dos lados e ângulos correspondentes.....	70
Figura 17 - Ângulo externo ($\angle ACD$) de um triângulo $\triangle ABC$ e seus ângulos internos não adjacentes.....	74
Figura 18 - Construção auxiliar para a desigualdade triangular em $\triangle ABC$	78
Figura 19 - Representação do axioma das paralelas, evidenciando a unicidade da reta paralela que passa por um ponto fora de uma dada reta.....	81
Figura 20 - Classificação e relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.....	84
Figura 21 - Distância entre duas retas paralelas e equidistância de pontos.....	86
Figura 22 - Propriedades fundamentais de um paralelogramo, ilustrando lados, ângulos e diagonais.....	89

Figura 23 - Segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo ($\triangle ABC$), paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.	90
Figura 24 - Ilustração do Teorema de Tales, mostrando a proporcionalidade dos segmentos determinados por retas paralelas em duas transversais.	92
Figura 25 - Triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, ilustrando a preservação dos ângulos e a proporcionalidade dos lados correspondentes.	94
Figura 26 - Representação geométrica do Teorema de Pitágoras, mostrando a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.	98
Figura 27 - Relações métricas em um triângulo retângulo, ilustrando a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos.	99
Figura 28 - A circunferência de centro O e raio r como lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto dado.	101
Figura 29 - A mediatriz de um segmento AB como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de suas extremidades.	101
Figura 30 - A bissetriz de um ângulo AOB como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de seus lados.	102
Figura 31 - Diagrama de Venn dos quadriláteros notáveis e suas relações de inclusão.	103
Figura 32 - Exemplos de quadriláteros notáveis: retângulo, losango, quadrado e trapézio isósceles, respectivamente.	104
Figura 33 - Configuração inicial do triângulo ABC no GeoGebra para exploração dos ângulos.	118
Figura 34 - Triângulo sendo manipulado, evidenciando a alteração dos valores dos ângulos individuais.	118
Figura 35 - Verificando a constância da soma dos ângulos internos após manipulação.	120
Figura 36 - Explorando um triângulo retângulo e confirmando a soma dos ângulos.	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comparativo crítico das abordagens para o ensino de Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	25
Tabela 2 - Potencialidades, limitações e alternativas pedagógicas para o uso das TDIC no ensino de Geometria.....	41
Tabela 3 - Relação entre funcionalidades do GeoGebra e o design das atividades investigativas com polígonos.	56
Tabela 4 - Síntese das Etapas para Resolver Problemas (Polya, 1978)	63
Tabela 5 - Elementos considerados na análise a priori das atividades investigativas	112
Tabela 6 - Síntese da análise a priori da Atividade 1	116
Tabela 7 - Registro das medidas dos ângulos internos em diferentes tipos de triângulos	121
Tabela 8 - Critérios de acompanhamento da Atividade 1	124
Tabela 9 - Síntese da análise a priori da Atividade 2	129
Tabela 10 - Critérios de acompanhamento da Atividade 2	135
Tabela 11 - Possibilidades de ampliação do produto educacional com atividades no GeoGebra.....	138

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABI – Aprendizagem Baseada na Investigação

ABRP – Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

EF08MA14 – Habilidade de Matemática da BNCC para o 8º ano do Ensino Fundamental (Geometria: propriedades de quadriláteros mediadas por congruência de triângulos)

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PDA's – Personal Digital Assistants (assistentes digitais pessoais, como smartphones, tablets e computadores portáteis)

PNE – Plano Nacional de Educação

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RA – Realidade Aumentada

RV – Realidade Virtual

TDIC – Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

TDs – Tecnologias Digitais

TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação

UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	16
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
1.1	Geometria Plana	20
1.2	Geometria Plana nos Documentos Oficiais	23
2	TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA	31
2.1	As TDIC nos Documentos Oficiais	32
2.2	A importância das Tecnologias digitais de informação e comunicação no Ensino	35
2.3	Potencialidades, limites e condições de uso das TDIC no ensino de Geometria	39
3	GEOMETRIA DINÂMICA.....	43
3.1	O GeoGebra.....	45
3.2	Os recursos online do GeoGebra: comunidade e materiais didáticos.....	51
4	METODOLOGIAS ATIVAS.....	58
4.1	Aprendizagem Baseada na Investigação.....	60
4.2	Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas	62
5	FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA PLANA	69
5.1	Congruência de triângulos	69
5.2	Desigualdades Geométricas	72
5.2.1	<u>Ângulo externo e soma dos ângulos internos</u>	73
5.2.2	<u>Relação entre lados e ângulos opostos</u>.....	77
5.2.3	<u>Desigualdade triangular</u>	78
5.3	O Axioma das Paralelas e propriedades de retas paralelas	80
5.3.1	<u>Axioma das paralelas e unicidade</u>.....	81
5.3.2	<u>Ângulos determinados por uma transversal</u>.....	83
5.3.3	<u>Corolários sobre soma de ângulos</u>	85
5.3.4	<u>Distância entre paralelas</u>	86
5.4	Paralelogramo e resultados associados	87
5.4.1	<u>Definição e propriedades básicas</u>.....	88
5.4.2	<u>Segmento que liga pontos médios e feixes de paralelas</u>	89
5.4.3	<u>Teorema de Tales como síntese</u>	91
5.5	Semelhança de triângulos.....	93

5.5.1	<u>Definição e razão de semelhança</u>	93
5.5.2	<u>Casos de semelhança de triângulos</u>	94
5.5.3	<u>Aplicações e articulação com GeoGebra</u>	95
5.6	Relações métricas em triângulos retângulos	96
5.6.1	<u>Teorema de Pitágoras</u>	97
5.6.2	<u>Projeções, altura e média geométrica</u>	98
5.7	Lugares geométricos	100
5.7.1	<u>Exemplos fundamentais</u>	101
5.8	Quadriláteros notáveis	103
5.8.1	<u>Retângulo</u>	104
5.8.2	<u>Losango</u>	105
5.8.3	<u>Quadrado</u>	106
5.8.4	<u>Trapézio e trapézio isósceles</u>	106
5.8.5	<u>Síntese e papel dos quadriláteros notáveis</u>	108
6	ATIVIDADES INVESTIGATIVAS DE GEOMETRIA PLANA COM GEOGEBRA – PRODUTO EDUCACIONAL	110
6.1	Análise a priori das atividades investigativas	111
6.2	Atividade 1 – A missão: desvendar o segredo dos triângulos	114
6.2.1	<u>Análise a priori da Atividade 1 – Soma dos ângulos internos de um triângulo</u>	114
6.2.2	<u>Síntese da análise a priori da Atividade 1</u>	116
6.2.3	<u>Roteiro da Atividade 1 para o aluno: A missão – desvendar o segredo dos triângulos</u> 117	
6.2.4	<u>Critérios de acompanhamento da Atividade 1</u>	124
6.2.5	<u>Síntese analítica da Atividade 1</u>	125
6.3	Atividade 2 – Noções iniciais de quadriláteros com GeoGebra	126
6.3.1	<u>Análise a priori da Atividade 2 – Noções iniciais de quadriláteros com GeoGebra</u> 126	
6.3.2	<u>Síntese da análise a priori da Atividade 2</u>	128
6.3.3	<u>Roteiro da Atividade 2 - Noções iniciais de quadriláteros com GeoGebra</u>	130
6.3.4	<u>Critérios de acompanhamento da Atividade 2</u>	135
6.3.5	<u>Síntese analítica da Atividade 2</u>	137
6.4	Possibilidades de ampliação do produto educacional	138
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	141
	REFERÊNCIAS	144

INTRODUÇÃO

Minha trajetória profissional como professora de Matemática nas redes pública e privada, com atuação especialmente no ensino de Geometria, levou-me a buscar estratégias que favorecessem a compreensão conceitual e o raciocínio investigativo dos estudantes. Nesse percurso, o software GeoGebra, apresentado ainda na graduação, tornou-se uma ferramenta central em minhas práticas, sobretudo no contexto da pandemia de Covid-19, quando o ensino remoto evidenciou simultaneamente as limitações de abordagens tradicionais e o potencial das tecnologias digitais para mediar a aprendizagem e sustentar propostas mais exploratórias em aulas de Matemática. Nesse cenário, a dificuldade recorrente dos estudantes em compreender e investigar propriedades de figuras geométricas planas, em particular polígonos, emergiu como um desafio pedagógico central e motivador desta pesquisa.

Essa experiência didática evidenciou uma lacuna persistente no ensino tradicional de Geometria: muitos estudantes encontram dificuldades em transpor representações estáticas para uma compreensão dinâmica e intuitiva das propriedades geométricas. Esse desafio, associado ao caráter frequentemente abstrato e lógico-dedutivo da disciplina, reforçou a necessidade de ferramentas que mediem a construção de significados de forma mais visual, interativa e investigativa. Nesse contexto, o GeoGebra, enquanto ambiente de Geometria Dinâmica, mostrou-se particularmente promissor ao possibilitar a manipulação e a visualização em tempo real de figuras planas, favorecendo a formulação, o teste e a revisão de conjecturas sobre propriedades de polígonos.

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) têm se consolidado como elementos indispensáveis no contexto educacional contemporâneo (Maia, Gondim & Vasconcelos, 2023; Sousa, 2022), conforme preconizado por diretrizes curriculares nacionais como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), que enfatiza a importância de desenvolver a capacidade de compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica e ética. Nesse cenário, a inserção de softwares como o GeoGebra no ensino de Matemática não apenas alinha a prática pedagógica às demandas atuais, mas também oferece subsídios para o desenvolvimento de competências essenciais, como o raciocínio investigativo, a resolução de problemas e a argumentação matemática, especialmente no ensino de Geometria Plana nos anos finais do Ensino Fundamental.

Diante do exposto, esta dissertação propõe-se a conceber, fundamentar e analisar, em termos teórico-metodológicos, uma sequência de atividades investigativas com o software GeoGebra, voltada à exploração de propriedades de polígonos – com ênfase em triângulos e quadriláteros – para alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais em contexto de escola pública. A intenção não é avaliar empiricamente o “impacto” desse uso em aprendizagem mensurável, mas discutir seu potencial pedagógico à luz de referenciais da Educação Matemática, das TDIC e do ensino de Geometria Plana. Nessa perspectiva, o estudo busca contribuir para a qualificação de práticas de sala de aula que integrem visualização, experimentação e argumentação, em consonância com as competências e habilidades previstas na BNCC para Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

Embora a literatura já apresente diversos trabalhos sobre o uso do GeoGebra no ensino de Geometria e reconheça benefícios como maior facilidade de visualização, engajamento dos estudantes e apoio à compreensão conceitual (Maltempi & Mendes, 2016; Alves & Soares, 2003; Maia, Gondim & Vasconcelos, 2023), ainda se observa uma lacuna quanto à elaboração de propostas sistematizadas que tomem a exploração investigativa de propriedades de polígonos como eixo central de desenvolvimento do raciocínio investigativo, em turmas de anos finais do Ensino Fundamental, especialmente em escolas públicas. Esta dissertação busca justamente preencher parte desse vazio, ao articular uma revisão teórica sobre Geometria Plana, TDIC e Geometria Dinâmica com a concepção de um produto educacional desenhado para ser desenvolvido com o GeoGebra em aulas de Matemática, em futuras aplicações sob uma lógica de pesquisa de design (design-based research).

Dessa forma, o problema que orienta esta dissertação pode ser assim enunciado: como conceber e fundamentar, em termos teórico-metodológicos, uma sequência de atividades investigativas com GeoGebra que favoreça a exploração de propriedades de polígonos por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, em contexto de escola pública?

Com base nesse problema, estabelece-se como objetivo geral conceber, fundamentar e analisar, em termos teórico-metodológicos, uma sequência de atividades investigativas com o GeoGebra para a exploração de propriedades de polígonos, com ênfase em triângulos e quadriláteros, voltada a alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais em contexto de

escola pública. Para alcançar esse objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- analisar os fundamentos da Geometria Plana, explorando a tensão entre o ideal matemático e as aproximações do concreto e do digital, bem como sua evolução nas diretrizes curriculares nacionais (PCN e BNCC);
- discutir o papel das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e da Geometria Dinâmica no contexto do ensino da Matemática;
- propor e desenvolver roteiros de atividades investigativas com o GeoGebra, focadas na exploração de propriedades de polígonos para alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais;
- analisar e discutir desdobramentos pedagógicos esperados das atividades propostas, com base nos pressupostos teóricos estabelecidos.

A presente pesquisa adota uma abordagem qualitativa, caracterizando-se como um estudo de design pedagógico, voltado à concepção e fundamentação de atividades investigativas. É importante frisar que, embora o produto educacional seja integralmente desenvolvido nesta dissertação, sua aplicação prática e a coleta de dados empíricos não se inserem no escopo deste trabalho, sendo projetadas para etapas futuras de pesquisa sob a perspectiva da pesquisa de design em Educação Matemática.

Além desta introdução, a dissertação está organizada em seis capítulos. O Capítulo 1, “Fundamentação Teórica”, aborda os fundamentos epistemológicos da Geometria e analisa criticamente as propostas curriculares para o ensino da disciplina. O Capítulo 2, “Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no Ensino da Matemática”, explora o papel das tecnologias na educação e sua inserção nos documentos oficiais. O Capítulo 3, “Geometria Dinâmica”, detalha as funcionalidades do GeoGebra e seu potencial pedagógico como ferramenta para o ensino de Geometria. O Capítulo 4, “Metodologias Ativas”, discute abordagens pedagógicas centradas no aluno, como a Aprendizagem Baseada na Investigação e a Resolução de Problemas, que sustentam as atividades propostas. O Capítulo 5, “Fundamentos da Geometria Plana”, revisita conceitos e teoremas geométricos essenciais para a compreensão dos polígonos. O Capítulo 6, “Atividades Investigativas de Geometria com GeoGebra”, detalha a concepção e o design dos roteiros de atividades. Finalmente, as “Considerações Finais” encerram o trabalho, consolidando as contribuições teóricas e metodológicas e apontando para pesquisas futuras, incluindo a aplicação do produto educacional desenvolvido.

Embora o produto educacional tenha sido concebido para o trabalho com turmas de 7º ano do Ensino Fundamental da rede pública municipal do Rio de Janeiro, o referencial teórico-metodológico adotado e o conjunto de resultados de Geometria Plana que o sustentam foram organizados de modo a dialogar com toda a etapa dos anos finais (6º ao 9º ano). Assim, entende-se que a sequência investigativa e o repertório conceitual sistematizado podem ser adaptados e aprofundados em diferentes séries, em consonância com as habilidades de Geometria previstas na BNCC para o Ensino Fundamental – Anos Finais e com os currículos oficial e local, especialmente naquilo que envolve o estudo de polígonos, triângulos, quadriláteros, proporcionalidade e o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação.

Nesse contexto, a dissertação cumpre a função de explicitar os fundamentos teórico-metodológicos, as escolhas curriculares e os princípios de design que orientaram a construção de um recurso educacional em Geometria Plana apoiado no GeoGebra, direcionado ao Ensino Fundamental – Anos Finais. O recurso educacional propriamente dito consiste em um conjunto de roteiros de atividades investigativas, organizados em módulos sobre triângulos e quadriláteros notáveis, acompanhados de construções dinâmicas em GeoGebra, disponibilizados por meio de links e arquivos digitais anexados a esta dissertação. Em consonância com as orientações recentes do PROFMAT, a dissertação e o recurso educacional articulam-se de modo que o texto escrito descreve, discute e exemplifica o processo de concepção do material e sua potencial aplicação em sala de aula.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo atende ao primeiro objetivo específico da pesquisa, ao sistematizar os fundamentos da Geometria Plana e sua evolução nas diretrizes curriculares nacionais (PCN e BNCC) que orientam o design da sequência de atividades investigativas com o GeoGebra. Na Seção 1.1, apresenta-se um panorama histórico-epistemológico da Geometria Plana, destacando conceitos estruturantes e o movimento do empirismo ao rigor dedutivo que informam o ensino desse conteúdo nos anos finais do Ensino Fundamental. Na Seção 1.2, discutem-se as orientações dos documentos curriculares brasileiros (especialmente PCN e BNCC), explicitando competências, habilidades e expectativas de aprendizagem pertinentes ao estudo de polígonos, triângulos e quadriláteros notáveis. Ao articular esses referenciais, evidencia-se o nexo entre fundamentos teóricos, prescrições curriculares e escolhas didático-metodológicas que, nos capítulos posteriores, orientam a construção do recurso educacional e as atividades investigativas propostas com o GeoGebra.

1.1 Geometria Plana

A Geometria Plana, um dos pilares mais antigos da matemática, teve suas origens profundamente enraizadas nas necessidades práticas das civilizações antigas. Seu nome, do grego "geo" (terra) e "metron" (medida), reflete sua gênese ligada à agrimensura, à construção e à astronomia. Nos vales do Nilo e da Mesopotâmia, egípcios e babilônios desenvolveram conhecimentos geométricos empíricos para resolver problemas cotidianos, como a demarcação de terras após as cheias do rio e a construção de grandes estruturas como pirâmides e zigurates. Suas "receitas" para calcular áreas, volumes e ângulos eram eficazes, mas desprovidas de demonstrações lógicas formais, baseando-se mais na observação e na indução (Eves, 1969).

A transição de uma geometria puramente empírica para uma disciplina dedutiva e abstrata foi o grande legado dos matemáticos gregos, que iniciaram uma busca por justificativas racionais para as proposições observadas. Figuras como Tales de Mileto (c. 624-546 a.C.) são frequentemente consideradas os precursores, creditado com a introdução da ideia de prova geométrica. Posteriormente, a Escola Pitagórica (c. 570-495 a.C.), além de

sua famosa contribuição sobre o teorema que leva seu nome, explorou as relações numéricas inerentes às formas geométricas, conectando a aritmética à geometria e aprofundando o estudo teórico dos polígonos e suas propriedades (Boyer, 1991).

O ápice dessa formalização clássica foi alcançado por Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.), com sua monumental obra "Os Elementos". Esta compilação sistemática e dedutiva organizou o conhecimento geométrico de sua época a partir de um conjunto conciso de definições, postulados (axiomas) e noções comuns. A partir desses fundamentos, Euclides demonstrou logicamente centenas de teoremas, estabelecendo um modelo de rigor, exatidão e universalidade que influenciaria o pensamento científico e matemático por mais de dois milênios (Euclides, c. 300 a.C.). "Os Elementos" não apenas codificou a Geometria Plana, mas também delimitou os conceitos fundamentais de pontos, linhas, planos e figuras geométricas, conferindo-lhes um estatuto de entidades abstratas e ideais.

Ao longo dos séculos seguintes, a Geometria Plana continuou a exercer uma profunda influência em diversas áreas do conhecimento. Na arte, a compreensão da perspectiva e da proporção geométrica foi crucial, desde os afrescos romanos até as inovações renascentistas de artistas como Piero della Francesca e Leonardo da Vinci. Na arquitetura, os princípios geométricos são a base de projetos estruturais e estéticos, desde as catedrais góticas até as construções modernistas. Na ciência, a geometria foi fundamental para o desenvolvimento da astronomia (noções de esferas celestes), da física (trajetórias de corpos em movimento) e da cartografia (representação de superfícies terrestres). A precisão de suas construções e a beleza de suas formas continuaram a inspirar o pensamento humano.

Apesar da dominância euclidiana, o questionamento de um de seus postulados, o quinto (o postulado das paralelas), levou a um dos mais significativos desenvolvimentos modernos na área: a descoberta das Geometrias Não-Euclidianas no século XIX por matemáticos como Carl Friedrich Gauss, János Bolyai e Nikolai Lobachevsky. Embora estas explorem espaços curvos, sua gênese está na reflexão profunda sobre os fundamentos da geometria plana. Paralelamente, o século XVII viu o advento da Geometria Analítica, com René Descartes, que unificou a álgebra e a geometria ao permitir a representação de figuras geométricas por equações. Essa abordagem revolucionou a maneira de estudar a Geometria Plana, abrindo novas fronteiras para a sua exploração e aplicação em diversas disciplinas científicas e tecnológicas, preparando o terreno para a era digital em que vivemos hoje (Boyer, 1991). Assim, a Geometria Plana, longe de ser um campo estático, demonstrou uma

capacidade notável de evolução e adaptação, mantendo sua relevância e centralidade no pensamento matemático.

Essa trajetória histórica da Geometria, do empírico ao dedutivo, e sua posterior formalização e expansão para o campo analítico, estabelece um pano de fundo essencial para a compreensão dos desafios pedagógicos contemporâneos. A complexidade crescente dos conceitos e a dificuldade de visualização de suas propriedades abstratas exigem novas abordagens didáticas.

Essa necessidade de repensar o ensino de Geometria também tem sido diagnosticada por pesquisas em Educação Matemática no contexto brasileiro. Pavanello (1993), ao analisar o abandono do ensino de Geometria no Brasil, evidencia que esse campo foi gradualmente marginalizado nos currículos, com a aritmética e a álgebra assumindo maior centralidade, sobretudo nas escolas públicas. Já Lorenzato (1995) argumenta que duas causas centrais dessa situação são a fragilidade da formação geométrica de muitos professores e a forma fragmentada e descontextualizada com que a Geometria é apresentada em grande parte dos livros didáticos, o que compromete o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Estudos posteriores reforçam esse diagnóstico ao apontar dificuldades persistentes no trabalho com polígonos, ângulos e relações métricas nos anos finais do Ensino Fundamental, bem como a necessidade de propostas que articulem exploração, visualização e argumentação em Geometria (Almouloud, 2004; Souza, 2014). Nessa perspectiva, ambientes de Geometria Dinâmica e outras tecnologias digitais têm sido discutidos na literatura como recursos potentes para favorecer a construção de significados em Geometria, desde que integrados a sequências didáticas intencionalmente planejadas (Maltempi; Mendes, 2016).

Nesse contexto, os elementos discutidos nesta seção orientam o desenho das tarefas do produto educacional, especialmente no que se refere à exploração de polígonos: (i) propor explorações que evidenciem propriedades e invariâncias (como a soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros ou as propriedades de simetria em polígonos regulares); (ii) favorecer a dedução informal a partir de construções dinâmicas, medidas e registros sistemáticos; e (iii) conduzir a passagem do empírico (observação e manipulação) ao argumento (conjeturas e justificativas visuais) de forma apropriada ao nível de

desenvolvimento dos estudantes do 7º ano, utilizando para isso as ferramentas de Geometria Dinâmica.

1.2 Geometria Plana nos Documentos Oficiais

A evolução histórica da geometria, marcada pela transição do empirismo para o rigor dedutivo, inspira diretamente as orientações apresentadas nos documentos curriculares nacionais. Neste capítulo, defendemos que o ensino de geometria deve ser dinâmico, investigativo e conectado à realidade dos estudantes, tomando como contexto um percurso que vai do Egito antigo às propostas contemporâneas da BNCC. É nesse contexto que a integração de ambientes digitais, como o GeoGebra, torna-se não apenas uma possibilidade, mas uma forte diretriz, pois oferece meios para superar as limitações do ensino tradicional e concretizar o protagonismo estudantil, tão fortemente defendido pelas novas diretrizes

A construção de um currículo de Matemática no Brasil tem sido um processo dinâmico, refletindo as transformações pedagógicas, sociais e tecnológicas. No contexto da Geometria Plana, dois documentos normativos se destacam por sua influência seminal: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997 e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017. A análise crítica e comparativa desses documentos é fundamental para compreender a evolução das intencionalidades pedagógicas e as expectativas em relação ao ensino e aprendizagem da geometria.

Os PCNs (1997) apresentaram uma abordagem para o ensino da Geometria Plana caracterizada por sua flexibilidade e integração. Inserida no bloco de conteúdos "Espaço e Forma", a geometria era concebida para ser desenvolvida de maneira progressiva ao longo dos ciclos do Ensino Fundamental. O documento incentivava uma pedagogia exploratória, com o uso de materiais concretos e a observação do ambiente para fomentar a percepção espacial. A contextualização e a resolução de problemas eram estratégias centrais, visando um desenvolvimento gradual do raciocínio geométrico, partindo do visual para o dedutivo. Embora os PCNs já mencionassem o potencial do uso de tecnologias, como *softwares* de geometria dinâmica, essa menção era de caráter mais sugestivo e menos prescritivo, refletindo o cenário tecnológico da época (BRASIL, 1997). Conteúdos específicos como triângulos, quadriláteros, polígonos regulares, ângulos, simetria, congruência e semelhança

eram abordados, mas com maior liberdade para o educador adaptar a profundidade e a sequência.

A BNCC (2017), por sua vez, introduziu uma estruturação mais detalhada e padronizada para o ensino da Geometria Plana, que se encontra predominantemente na unidade temática "Geometria". Este documento estabelece um conjunto claro de competências e habilidades específicas, codificadas por ano escolar, o que representa um avanço significativo em termos de explicitação dos objetivos de aprendizagem a nível nacional. A BNCC mantém a relevância de diversos conceitos euclidianos fundamentais, como polígonos, construção de retas paralelas e perpendiculares, noções de ângulos e as condições de existência, congruência e semelhança de triângulos, promovendo também a prática de demonstrações simples. Contudo, ela também incorpora de forma mais explícita e sistêmica conteúdos que não faziam parte dos "*Elementos*" de Euclides, refletindo a modernização da matemática. Exemplos incluem o Plano Cartesiano e a Geometria Analítica, a construção de figuras semelhantes por ampliação e redução em malhas quadriculadas, e a representação de sistemas de equações no plano cartesiano. A BNCC demonstra uma maior ênfase na integração de tecnologias digitais, exigindo que os professores "compreendam, utilizem e criem tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética" (BRASIL, 2017), posicionando as TDIC como ferramentas essenciais e objeto de estudo.

Autores como Maltempi & Mendes (2016), ao analisarem a integração de TDIC na educação matemática, destacam que uma simples prescrição curricular não garante impacto prático sem a devida formação docente e infraestrutura. Lopes (2015) ressalta a necessidade de uma abordagem crítica e contextualizada, especialmente em realidades educacionais marcadas pela escassez de recursos. Bonizário et al. (2023) alertam para as contradições entre as potencialidades indicadas nas diretrizes e os desafios cotidianos da escola pública brasileira, como acesso desigual à internet e equipamentos. Esses desafios são particularmente relevantes para a presente dissertação, que se propõe a desenvolver um produto educacional para esse contexto, buscando maximizar o potencial das tecnologias digitais, como o GeoGebra, mesmo diante de tais limitações.

A comparação entre PCNs e BNCC revela uma evolução de uma abordagem mais flexível e integrada para uma mais estruturada e detalhada, com habilidades claramente definidas e uma progressão ano a ano. Ambas convergem na valorização da

contextualização, da resolução de problemas e do desenvolvimento do raciocínio geométrico. No entanto, a BNCC distingue-se pela maior explicitação do papel das tecnologias digitais e pela inclusão de conteúdos mais contemporâneos. É importante notar, contudo, que, mesmo representando um marco importante na atualização curricular, o avanço exponencial das tecnologias pode significar que, em alguns aspectos, mesmo uma base tão recente como a BNCC já enfrente desafios para se manter plenamente atualizada. A dinâmica de desenvolvimento de *softwares*, aplicativos e abordagens didáticas digitais é tão acelerada que exige uma constante reflexão e adaptação pedagógica por parte dos educadores para transpor as lacunas e maximizar o potencial das ferramentas emergentes. Esta observação sublinha a necessidade de uma contínua formação docente e de uma flexibilidade na implementação curricular para acompanhar o ritmo da inovação tecnológica, elementos que serão aprofundados nas discussões subsequentes sobre as TDIC.

A seguir, a Tabela 1 apresenta um comparativo detalhado das abordagens para o ensino de Geometria Plana e Espacial nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destacando a evolução das diretrizes e o aprofundamento de determinados aspectos.

Tabela 1 - Comparativo crítico das abordagens para o ensino de Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Aspecto	PCNs (1997)	BNCC (2017)
Organização Curricular	Dividido em ciclos (1º ao 4º ciclo), com abordagem mais flexível e generalista.	Dividido por anos escolares (1º ao 9º ano), mais estruturada e prescritiva, com habilidades específicas e codificadas.
Abordagem Didática	Foco na exploração, contextualização e integração a outros blocos de conteúdo.	Mais estruturada e prescritiva, foco em competências e habilidades; progressão detalhada ano a ano. Valoriza contextualização e resolução de problemas.
Conteúdos de	Estudo geral de	Estudo mais específico: classificação

Aspecto	PCNs (1997)	BNCC (2017)
Polígonos	polígonos, incluindo triângulos e quadriláteros. Introdução gradual.	(número de vértices, medidas de lados e ângulos), paralelismo e perpendicularidade; com propriedades detalhadas.
Conteúdos de Ângulos	Conceitos básicos nos anos iniciais, aprofundamento nos finais.	Progressão mais detalhada: noção, usos, medida e construção; incluindo relações entre ângulos.
Conteúdos de Triângulos	Abordagem geral das propriedades (incluindo congruência e semelhança).	Abordagem mais aprofundada: condições de existência, congruência e semelhança; com ênfase em construções.
Conteúdos de Quadriláteros	Estudo das propriedades básicas.	Aprofundamento nas propriedades e relações entre os tipos de quadriláteros.
Circunferência e Círculo	Introdução aos conceitos básicos.	Estudo mais aprofundado, incluindo relações métricas.
Simetria	Abordagem introdutória.	Estudo mais sistemático, incluindo diferentes tipos de simetria (axial, central).
Transformações Geométricas	Mencionadas de forma geral.	Abordagem mais detalhada, incluindo translação, rotação e reflexão.
Área e Perímetro	Conceitos introduzidos gradualmente.	Progressão mais estruturada, com fórmulas e aplicações.

Aspecto	PCNs (1997)	BNCC (2017)
Teorema de Pitágoras	Introduzido nos anos finais.	Abordagem mais aprofundada, incluindo demonstração e aplicações.
Geometria Analítica	Noções básicas de geometria analítica plana nos anos finais.	Introdução estruturada, incluindo plano cartesiano (associação de vértices a pares ordenados), representação de sistemas de equações de 1º grau e coordenadas no plano.
Construções Geométricas	Mencionadas, com uso de instrumentos básicos (régua, compasso).	Atenção específica às construções (retas paralelas e perpendiculares, figuras semelhantes), com uso de softwares.
Geometria Espacial (3D)	Abordagem focada em sólidos geométricos.	Inclui prismas e pirâmides (planificações, relações entre vértices, faces e arestas) dentro da unidade de Geometria.
Demonstrações Geométricas	Implícita no desenvolvimento do raciocínio dedutivo.	Incentivo a demonstrações simples; maior ênfase em habilidades de argumentação e demonstração.
Uso de Tecnologias Digitais	Mencionada como recurso, de forma geral e menos enfatizada.	Integrada de forma explícita e crítica, incluindo softwares de geometria dinâmica; ênfase no desenvolvimento de competências digitais e no pensamento computacional.

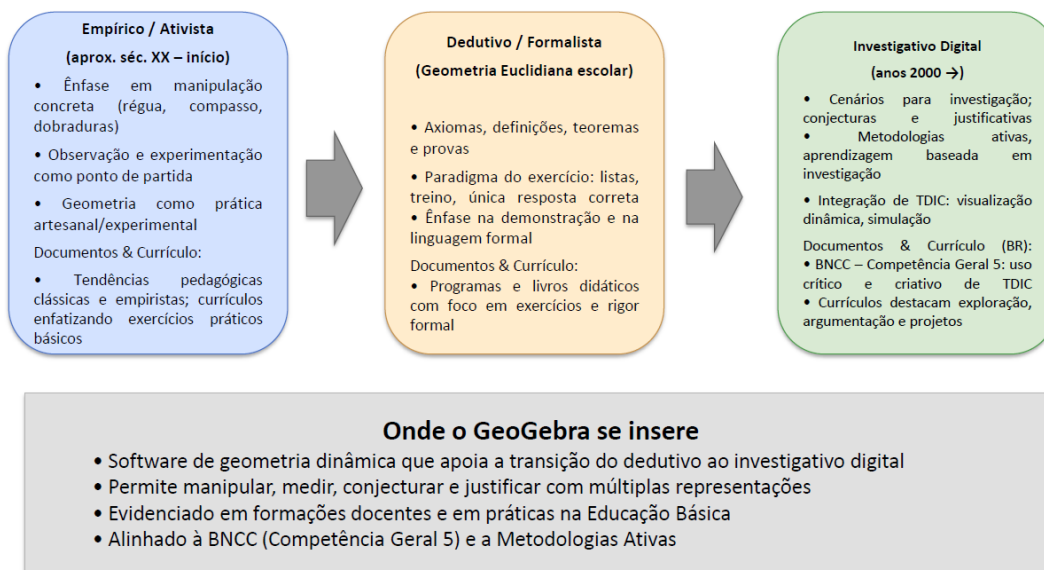
Aspecto	PCNs (1997)	BNCC (2017)
Raciocínio Geométrico	Desenvolvimento gradual, da percepção visual ao pensamento dedutivo.	Foco no desenvolvimento do pensamento científico, crítico e criativo; raciocínio investigativo.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

Observações importantes:

1. Os PCNs apresentam uma abordagem mais flexível e generalista, permitindo que os educadores adaptem o conteúdo conforme necessário.
2. A BNCC oferece uma progressão mais detalhada e estruturada, com habilidades específicas para cada ano escolar.
3. Ambos os documentos enfatizam a importância da resolução de problemas e da contextualização no ensino da geometria plana.
4. A BNCC incorpora mais explicitamente o uso de tecnologias digitais no ensino da geometria plana, refletindo os avanços tecnológicos ocorridos entre a publicação dos dois documentos.
5. A BNCC apresenta uma maior ênfase em habilidades de argumentação e demonstração geométrica, especialmente nos Ensino Fundamental – Anos Finais.
6. Enquanto os PCNs abordam a geometria plana de forma mais integrada com outros conteúdos matemáticos, a BNCC tende a especificar mais claramente as habilidades relacionadas à geometria plana.

Evolução dos Paradigmas de Ensino da Geometria Plana



Referências-chave: Skovsmose (paradigma do exercício e cenários de investigação); Ponte et al. (aulas investigativas); ABInV/UNICAMP; BNCC (Competência Geral 5); pesquisas sobre GeoGebra em formação docente e na prática.

Figura 1 - Fluxograma da Evolução dos Paradigmas do Ensino da Geometria.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Esta comparação mostra como o ensino da geometria plana evoluiu entre os dois documentos, refletindo mudanças nas abordagens pedagógicas e nas demandas educacionais ao longo do tempo.

O alinhamento aos documentos curriculares se materializa em: (i) objetivos de aprendizagem vinculados às habilidades EF07MA21, EF07MA22, EF07MA23; (ii) critérios de sucesso e indicadores observáveis (registros, conjecturas, validações, comunicação matemática); e (iii) planejamento exequível na rede pública (tempo de aula, recursos e planos alternativos de implementação).

A passagem do paradigma do exercício para cenários de investigação, conforme Skovsmose (2000), e a compreensão do papel docente na condução de investigações matemáticas, conforme Ponte et al. (1998), sustentam a concepção do GeoGebra como ambiente de exploração, registro e discussão de propriedades geométricas. Na articulação com a BNCC, especialmente nas habilidades EF07MA21, EF07MA22 e EF07MA23, esses princípios orientam o design dos roteiros de atividades investigativas apresentados no Capítulo 6.

Dessa forma, o recorte adotado neste estudo toma como contexto direto de desenvolvimento e análise as turmas de 7º ano do Ensino Fundamental, momento em que

conceitos básicos de Geometria Plana – como propriedades de triângulos, paralelismo, ângulos e polígonos – são formalmente trabalhados e em que se abrem possibilidades significativas para a exploração de atividades investigativas com apoio do GeoGebra. Esse recorte, porém, é entendido como representativo das demandas formativas presentes em toda a etapa dos anos finais: o produto educacional e a discussão teórico-metodológica aqui desenvolvidos dialogam com objetivos de aprendizagem que se estendem ao 8º e ao 9º anos, permitindo que a sequência proposta seja articulada e ampliada em percursos formativos mais longos, em alinhamento com a organização da Matemática na BNCC para o Ensino Fundamental – Anos Finais.

Os resultados de Geometria Plana apresentados nesta fundamentação e as orientações dos documentos curriculares, em especial da BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental, constituem o núcleo conceitual e curricular que orienta o design do recurso educacional desenvolvido nesta dissertação. A seleção de propriedades de triângulos e quadriláteros, de desigualdades geométricas e de relações métricas foi guiada pelas habilidades previstas para o 7º e o 8º anos na unidade temática Geometria, bem como pelas demandas de uso de tecnologias digitais apontadas nos documentos oficiais. A sequência de atividades investigativas com o GeoGebra, detalhada no Capítulo 6, busca articular esses fundamentos a práticas de sala de aula que favoreçam a exploração, a visualização dinâmica e a construção de argumentos pelos estudantes.

2. TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A sociedade contemporânea vivencia uma intensa globalização, marcada por avanços significativos nas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), que impactam diretamente o cotidiano dos jovens (Lima, 2021). A integração dessas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem torna as aulas mais atrativas e permite que os alunos construam conhecimentos de forma mais autônoma e significativa, promovendo uma cultura popular modernista (Martinsi, 2008 apud Lima, 2021). Com seus mecanismos de busca, as TDIC proporcionam acesso rápido a informações atualizadas, demonstrando sua eficácia no processo educacional e contribuindo significativamente para o ensino (Almeida, 2003 apud Lima, 2021; Kenski, 2007). No contexto da Educação Matemática, essas tecnologias são percebidas como um recurso indispensável para transformar a dinâmica de sala de aula, especialmente na Geometria, onde a visualização e a manipulação de conceitos abstratos são cruciais para a compreensão e para a promoção de uma aprendizagem investigativa, alinhando-se diretamente à proposta deste trabalho na exploração de polígonos.

O grande desafio atual é repensar as metodologias de ensino, adaptando-as à era digital. Para além da mera combinação de métodos tradicionais e inovadores, é fundamental que as TDIC impulsionem o aprendizado, oferecendo técnicas e procedimentos que transcendam as atividades rotineiras de sala de aula. As escolas devem preparar os alunos para enfrentar novas situações, transformando-os em seres inovadores e interativos, capazes de ir além do manuseio técnico para uma compreensão crítica dos efeitos e implicações do uso da tecnologia (Almeida, 2003 apud Lima, 2021; Serafim; Sousa, 2011 apud Lima, 2021; BRASIL, 1998).

A inclusão das TDIC nas instituições de ensino exige articular projeto pedagógico, currículo e formação docente, entendendo o currículo como construção viva e narrativamente mediada pelas tecnologias digitais (Almeida; Valente, 2011, 2012; Gouvêa, 2001).

Nesse contexto, a formação continuada do professor é crucial. Conforme Imbernón (2000) e Sandholtz et al (1997), a formação efetiva ocorre quando os docentes percebem os benefícios das TDIC na aprendizagem dos alunos, evoluindo desde a exposição inicial até a inovação em suas práticas. A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, (Brasil, 2017)

reforça essa exigência, demandando que os professores compreendam, utilizem e criem tecnologias digitais de forma crítica e significativa em suas práticas pedagógicas.

Em conclusão, a inclusão das TDIC na educação representa um estímulo significativo para o aprendizado. Seu uso adequado torna o aluno mais ativo e responsável pelo processo de aprendizagem, promovendo uma construção de conhecimento dinâmica e interativa. Portanto, é essencial que as escolas e os governos invistam em tecnologias e na formação docente para criar espaços educacionais propícios à apropriação do conhecimento e à inovação pedagógica.

2.1 As TDIC nos Documentos Oficiais

No contexto das transformações tecnológicas e sociais contemporâneas, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) assumem papel central na educação. Esta seção examina como as TDIC são abordadas nos principais documentos oficiais da educação brasileira, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores e o Plano Nacional de Educação (PNE), destacando suas implicações para o ensino e a aprendizagem.

A BNCC, publicada em 2017, é um dos documentos mais importantes para a educação básica no Brasil. Ela estabelece competências e habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo de sua trajetória escolar. As TDIC são mencionadas de forma significativa na BNCC, especialmente na 5ª competência geral, que trata do uso crítico e ético das tecnologias digitais:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2017).

Essa competência é visualmente representada na Figura 2 a seguir, que destaca a centralidade do uso crítico e ético das TDIC. Essa exigência se traduz na necessidade de integrar ferramentas digitais na prática pedagógica de matemática, permitindo aos estudantes não apenas o acesso, mas a construção e exploração de conceitos geométricos de maneira ativa e investigativa, como será evidenciado nas atividades com polígonos propostas neste trabalho.



Figura 2 - A 5ª Competência Geral da BNCC: Uso crítico e Ético das TDIC.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Além disso, as TDIC são integradas em várias áreas do conhecimento, como Linguagens, Matemática e Ciências da Natureza, enfatizando seu uso como ferramenta de aprendizagem e objeto de estudo.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores, publicadas em 2019, também destacam a importância das TDIC na formação docente. As competências gerais incluem o domínio das TDIC como uma habilidade essencial para os professores:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas docentes, como recurso pedagógico e como ferramenta de formação, para comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e potencializar as aprendizagens. (Brasil, 2019)

Saber comunicar-se com todos os interlocutores: colegas, pais, famílias e comunidade, utilizando os diferentes recursos, inclusive as tecnologias da informação e comunicação. (Brasil, 2019)

O Plano Nacional de Educação (PNE) 2014-2024, embora utilize o termo TIC, inclui metas relacionadas às tecnologias digitais. A Meta 5, Estratégia 5.3, por exemplo, menciona

a seleção, certificação e divulgação de tecnologias educacionais para alfabetização de crianças (Brasil, 2014). A Meta 7, Estratégia 7.15, visa universalizar o acesso à internet de alta velocidade nas escolas da rede pública de educação básica promovendo a utilização pedagógica das tecnologias da informação e comunicação.

O PNE também reconhece que as tecnologias podem ser utilizadas para avançar o processo educacional de diversas maneiras. Um trecho do documento destaca que as tecnologias podem ser usadas para errar menos e como mecanismos de troca de experiências entre os educadores. Além disso, o texto menciona que, embora o uso de tecnologias na educação não seja um conceito novo, a abordagem atual privilegia o uso das TDIC de forma mais integrada e focada, visando enriquecer o ensino e a aprendizagem (Brasil, 2014).

Outro externou a ideia de que se podem utilizar as tecnologias para errar menos e usar tais mecanismos como troca de experiências, havendo a possibilidade de esses recursos tecnológicos serem utilizados para avançar o processo educacional; e, finalmente, outro demonstrou que o assunto já se apresentou em outras épocas com movimentos que propiciaram cursos a distância e pela TV, mas que a questão que ora se apresenta, de forma diferente, passa a ser focada privilegiando o uso de tecnologias da informação e da comunicação (Brasil, 2014).

O PNE também aborda a importância do uso de tecnologias na formação docente. As estratégias do PNE incentivam a formação continuada dos professores, incluindo o desenvolvimento de competências tecnológicas. O documento sugere que os educadores devem ser capacitados para utilizar as TDIC de forma significativa em suas práticas pedagógicas, promovendo um ambiente de aprendizagem mais interativo e dinâmico. Além disso, o PNE destaca a necessidade de incentivar o uso de recursos tecnológicos para o compartilhamento de experiências profissionais entre os professores, promovendo a colaboração e a troca de conhecimentos (Brasil, 2014).

Trabalhar coletivamente, participar das comunidades de aprendizagem e incentivar o uso dos recursos tecnológicos para compartilhamento das experiências profissionais (Brasil, 2014).

O Programa de Inovação Educação Conectada, instituído pelo Decreto Nº 9.204/2017, visa promover o uso pedagógico de tecnologias digitais na educação básica. O programa objetiva universalizar o acesso à internet de alta velocidade e fomentar o uso pedagógico de tecnologias digitais (Brasil, 2017). O Programa de Inovação Educação Conectada é uma iniciativa ambiciosa que busca transformar a educação no Brasil, integrando as tecnologias digitais ao cotidiano escolar e preparando os alunos para os desafios do futuro.

A análise dos documentos oficiais revela uma evolução na forma como as tecnologias são incorporadas ao currículo escolar. Enquanto os documentos mais antigos

mencionam as tecnologias de forma mais geral, os documentos mais recentes, como a BNCC e as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores, adotam uma abordagem mais detalhada e específica, utilizando o termo TDIC. Essa evolução reflete a crescente importância das tecnologias digitais na sociedade contemporânea e a necessidade de preparar os alunos para um mundo cada vez mais digitalizado. A integração das TDIC no currículo escolar visa não apenas melhorar o processo de ensino-aprendizagem, mas também desenvolver competências essenciais para a vida no século XXI.

Portanto, a análise dos documentos oficiais confirma a crescente importância das TDIC na educação brasileira. A BNCC, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores, o PNE e outros documentos refletem a necessidade de integrar as tecnologias digitais no processo educacional, preparando os alunos para os desafios e oportunidades do mundo digital. Essa evolução na forma como as tecnologias são incorporadas ao currículo escolar demonstra um compromisso contínuo com a modernização e a melhoria da qualidade da educação no Brasil.

2.2 A importância das Tecnologias digitais de informação e comunicação no Ensino

A educação matemática tem uma longa história de interação com as tecnologias digitais, que se intensificou ao longo das décadas. Desde a introdução da calculadora de quatro operações em 1967 até a liberação da Internet para uso público no Brasil em 1995, esses marcos tecnológicos propiciaram uma diversificação de práticas pedagógicas e incentivaram pesquisas em Educação Matemática (Maltempi, 2016), com marcos que delineiam essa trajetória, como se observa na Figura 3 a seguir.

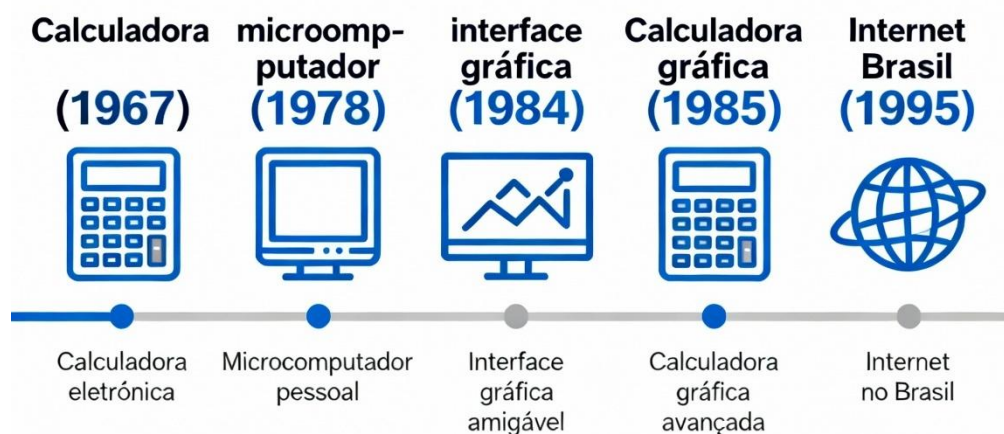


Figura 3 - Marcos Históricos da Inserção das Tecnologias Digitais na Educação Matemática.

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

É interessante observar que, embora essas tecnologias não tenham sido originalmente desenvolvidas para a educação, elas foram adaptadas e estudadas por educadores preocupados com o ensino e a aprendizagem de matemática. Esse desenvolvimento tecnológico propiciou uma diversificação de práticas pedagógicas e incentivou pesquisas em Educação Matemática, analisando o uso das Tecnologias Digitais (TDs) e adaptando teorias existentes para incluir o professor, o aprendiz e a comunidade educativa (Maltempi, 2016).

Diversas pesquisas destacam a relevância do uso das TDs nas aulas de matemática. Clements et al. (2013) e Hoyles e Lagrange (2010) apontam que as TDs têm potencialidades significativas, como gerar múltiplas representações do conhecimento (por exemplo, visualizar uma função algebricamente, graficamente e tabelada simultaneamente), oferecer feedback imediato, proporcionar interatividade e colaboração, além de facilitar a autoria e o desenvolvimento de projetos. Essas características tornam as TDs ferramentas valiosas que podem transformar a sala de aula (Maltempi, 2016).

No entanto, as TDs também apresentam desafios intrínsecos que dificultam seu uso. Koehler e Mishra (2009) identificam a plasticidade, a instabilidade, a opacidade e a parcialidade das TDs como fatores que podem complicar sua integração no ambiente educativo. A plasticidade refere-se à maleabilidade da ferramenta, que pode ser usada de muitas formas; a instabilidade à sua constante evolução e desatualização; a opacidade à dificuldade de compreender seu funcionamento interno; e a parcialidade ao fato de representarem apenas uma faceta da realidade ou do conceito matemático. Essas

características indicam que as TDs precisam ser manejadas de forma crítica e reflexiva pelos educadores (Maltempi, 2016), cujos desafios intrínsecos são sintetizados na Figura 4.

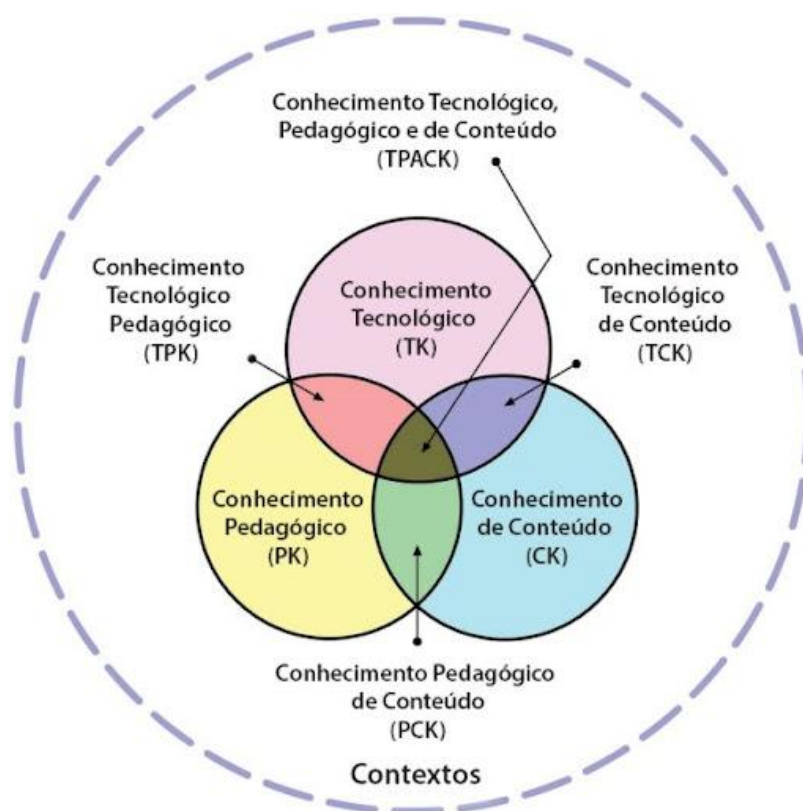


Figura 4 - Desafios Intrínsecos das Tecnologias Digitais

Fonte: Koehler e Mishra (2009).

Para Maltempi (2016), os softwares de matemática dinâmica mostram que restringir o ensino da matemática aos cálculos é perpetuar uma abordagem limitada. Historicamente, essa visão centrada nos cálculos impediu avanços cognitivos e tecnológicos. O ensino de matemática deve, portanto, incluir a modelagem de problemas e a interpretação de resultados, exigindo um conhecimento mais conceitual e relacional, que é mais alinhado com os desafios do cotidiano. As TDs viabilizam um ensino de matemática mais coerente e prático, afastando-se da estrutura hierárquica tradicional que se foca apenas na dificuldade dos cálculos (Wolfram, 2010 *apud* Maltempi, 2016). Na Geometria, essa abordagem é particularmente relevante, pois softwares dinâmicos permitem ir além da memorização de fórmulas de áreas e volumes, focando na compreensão das propriedades das figuras, como polígonos, e na relação entre seus elementos, promovendo a exploração e a conjectura.

Apesar das vantagens das TDs, o modelo educacional atual, reforçado por exames de avaliação e uma formação de professores antiquada, impede o pleno potencial dessas tecnologias. A história nos mostra que a adoção de novas tecnologias é inevitável e

irreversível, como exemplificado pelo movimento dos Luditas no século XIX. Portanto, é essencial desenvolver novos entendimentos que beneficiem a educação escolar (Maltempi, 2016).

Segundo Lopes (2015), a tecnologia está presente em todos os setores sociais, incluindo as instituições educativas. No entanto, ainda existe um paradoxo quanto ao conceito de tecnologia, que pode causar divergências, mas também ampliar as suas finalidades no ensino e na formação de professores. A tecnologia deve ser objeto de estudo, revelando suas potencialidades pedagógicas, principalmente na educação tecnológica. Uma visão crítica e contextualizada da tecnologia é necessária para que os professores possam refletir sobre suas práticas e adquirir conhecimentos, habilidades e atitudes que transformem a realidade educativa (Lopes, 2015).

Os cursos de formação de professores devem adotar uma nova perspectiva sobre a educação, vendo os professores como construtores de sua formação e ação docente. A tecnologia, integrada ao ensino, pode criar espaços de participação e reflexão, promovendo uma educação transformadora tanto no âmbito educacional quanto social. Esse processo deve ser realizado em conjunto com alunos e a escola, configurando-se como um elemento fundamental da formação de professores (Lopes, 2015).

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) desempenham um papel crucial no Ensino Fundamental, contribuindo significativamente para a modernização e melhoria da qualidade do ensino. A integração das TDIC no currículo escolar é essencial para preparar os alunos para os desafios do século XXI, promovendo o desenvolvimento de competências e habilidades que são fundamentais para a vida pessoal e profissional.

As TDIC são ferramentas poderosas para o desenvolvimento de diversas competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Elas permitem que os alunos adquiram habilidades digitais, que são essenciais em um mundo cada vez mais tecnológico. Além disso, as TDIC facilitam o desenvolvimento de competências como a resolução de problemas, o pensamento crítico, a criatividade e a colaboração. A utilização de tecnologias digitais no ensino fundamental ajuda a contextualizar o conhecimento, tornando o aprendizado mais significativo e relevante para os estudantes (Brasil, 2017).

A integração das TDIC no Ensino Fundamental também promove a interdisciplinaridade e a contextualização do conhecimento. As tecnologias digitais

permitem a criação de ambientes de aprendizagem mais dinâmicos e interativos, onde os alunos podem explorar conteúdos de diferentes áreas do conhecimento de forma integrada. Isso está alinhado com os princípios pedagógicos da identidade, diversidade e autonomia, da interdisciplinaridade e da contextualização, que são adotados como estruturadores dos currículos. As TDIC facilitam a articulação entre os conteúdos e o contexto dos estudantes, aproximando o ensino das finalidades propostas para a etapa de ensino, conforme estabelecido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (Brasil, 1996).

Outro aspecto importante das TDIC no Ensino Fundamental é a promoção da inclusão digital e da equidade. O acesso às tecnologias digitais é fundamental para garantir que todos os alunos tenham as mesmas oportunidades de aprendizagem. As TDIC podem ser utilizadas para reduzir as desigualdades educacionais, proporcionando recursos e ferramentas que permitem a personalização do ensino e o atendimento às necessidades individuais dos estudantes. Além disso, as tecnologias digitais podem ser utilizadas para promover a inclusão de alunos com necessidades especiais, oferecendo recursos acessíveis e adaptados (Brasil, 2014). No contexto das escolas públicas, onde a autora atua, a superação dos desafios de acesso e infraestrutura para as TDIC é crucial para democratizar o ensino de matemática, especialmente na geometria, onde a manipulação visual é um diferencial para a compreensão conceitual. Em suma, as TDIC são essenciais para o Ensino Fundamental, contribuindo para o desenvolvimento de competências e habilidades, promovendo a interdisciplinaridade e a contextualização do conhecimento, e garantindo a inclusão digital e a equidade. A integração das tecnologias digitais no currículo escolar é fundamental para preparar os alunos para os desafios do século XXI, proporcionando uma educação de qualidade e alinhada com as demandas da sociedade contemporânea.

A relevância das TDIC para o ensino da matemática, em particular, ganha contornos ainda mais nítidos na Geometria, onde softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, oferecem um ambiente singular para a exploração de conceitos abstratos, conforme será aprofundado no próximo capítulo.

2.3 Potencialidades, limites e condições de uso das TDIC no ensino de Geometria

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), quando incorporadas ao ensino de Matemática, podem ampliar as possibilidades de visualização,

experimentação e investigação de conceitos geométricos. No caso específico da Geometria, softwares de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, permitem que figuras sejam construídas, manipuladas e analisadas em tempo real, favorecendo a observação de regularidades e a formulação de conjecturas.

Entretanto, é necessário evitar uma compreensão ingênua do papel das tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem. O uso do GeoGebra, por si só, não garante uma prática investigativa, tampouco assegura a aprendizagem dos estudantes. Uma atividade pode utilizar tecnologia e, ainda assim, permanecer presa a uma lógica meramente demonstrativa ou reprodutiva, caso o estudante apenas siga comandos ou observe uma construção pronta realizada pelo professor.

Nessa perspectiva, o dinamismo da aula não está apenas no software utilizado, mas na natureza da tarefa proposta, na mediação docente e nas possibilidades oferecidas aos estudantes para observar, levantar hipóteses, testar conjecturas, registrar conclusões e justificar matematicamente suas descobertas. Essa compreensão dialoga com Skovsmose (2000), ao diferenciar o paradigma do exercício dos cenários para investigação. Para o autor, o deslocamento em direção a cenários investigativos pode favorecer que os estudantes se envolvam em processos de exploração, reflexão e argumentação.

Do mesmo modo, a perspectiva de Ponte et al. (1998) contribui para compreender que investigar em Matemática não significa, necessariamente, resolver problemas sofisticados, mas envolver os estudantes em situações nas quais possam formular questões, explorar possibilidades, produzir conjecturas, testá-las, reformulá-las e justificá-las de modo fundamentado. Esse processo é especialmente relevante para o ensino de Geometria, pois permite que a observação visual seja articulada à argumentação matemática.

No contexto da escola pública, essa discussão torna-se ainda mais importante, pois a presença das TDIC encontra limites concretos, como ausência de laboratório de informática, internet instável, poucos equipamentos disponíveis ou desigualdade no acesso dos estudantes a dispositivos digitais. Assim, a proposta desta dissertação não considera o GeoGebra como condição única para a aprendizagem, mas como uma mediação possível. O caráter investigativo das atividades pode ser preservado por meio de estratégias híbridas, que combinem projeção coletiva, trabalho em duplas ou grupos, registros impressos, construções com régua e transferidor e momentos de discussão coletiva.

A Tabela 2 sintetiza algumas potencialidades das TDIC no ensino de Geometria, bem como limitações possíveis em contextos escolares e alternativas pedagógicas para preservar o caráter investigativo das atividades.

Tabela 2 - Potencialidades, limitações e alternativas pedagógicas para o uso das TDIC no ensino de Geometria

Dimensão	Potencial das TDIC/GeoGebra	Limitação possível em escolas públicas	Alternativa pedagógica
Visualização	Permite observar variações em tempo real, favorecendo a percepção de propriedades geométricas.	Ausência de laboratório, internet instável ou poucos aparelhos disponíveis.	Uso projetado pelo professor, exploração coletiva e registros impressos das observações.
Investigação	Favorece o teste rápido de conjecturas por meio da manipulação dinâmica das figuras.	Risco de o estudante apenas manipular objetos sem refletir sobre as relações matemáticas envolvidas.	Roteiros com perguntas orientadoras, tabelas de observação e socialização das conclusões.
Autonomia	Permite que o estudante explore diferentes configurações e compare resultados.	Dificuldade inicial no uso dos comandos do software.	Tutorial curto, comandos mínimos, trabalho em duplas e mediação entre pares.
Argumentação	Ajuda a identificar invariantes geométricos, como soma de ângulos, paralelismo, congruência e proporcionalidade.	Possibilidade de confundir evidência visual com demonstração matemática.	Solicitar justificativas escritas, comparação entre diferentes casos e discussão coletiva das conjecturas.
Inclusão	Pode ampliar o acesso a representações dinâmicas de objetos geométricos.	Desigualdade de acesso digital entre estudantes e escolas.	Planejamento híbrido com GeoGebra, papel, régua, transferidor, malhas impressas e

Dimensão	Potencial das TDIC/GeoGebra	Limitação possível em escolas públicas	Alternativa pedagógica
			debate em grupo.
Avaliação formativa	Permite acompanhar estratégias, registros e dificuldades dos estudantes durante a exploração.	Nem sempre há recursos para acompanhamento individual em tempo real.	Uso de rubricas simples, registros no caderno, discussão oral e produção de sínteses coletivas.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

A análise apresentada na Tabela 2 evidencia que a integração das TDIC ao ensino de Geometria precisa ser compreendida de modo situado. Em escolas com maior infraestrutura, o GeoGebra pode ser utilizado individualmente ou em pequenos grupos, ampliando as possibilidades de exploração autônoma. Em escolas com menos recursos, o mesmo princípio investigativo pode ser mantido por meio de atividades projetadas, registros impressos e discussões conduzidas pelo professor. Desse modo, a contribuição pedagógica das tecnologias digitais não reside apenas na presença do recurso, mas na forma como ele é incorporado ao planejamento didático.

Assim, esta dissertação assume uma posição crítica em relação às TDIC: elas são relevantes quando ampliam as possibilidades de investigação matemática, mas não substituem a intencionalidade pedagógica, a mediação docente e a necessidade de argumentação. O GeoGebra é entendido, portanto, como um ambiente favorável à exploração de propriedades geométricas, desde que articulado a tarefas que convidem o estudante a formular conjecturas, testar hipóteses e justificar matematicamente suas conclusões (SKOVSMOSE, 2000; PONTE et al., 1998).

3. GEOMETRIA DINÂMICA

A Geometria, um dos pilares fundamentais da matemática, tem sido tradicionalmente abordada no ambiente escolar por meio de representações estáticas e bidimensionais. Figuras desenhadas em cadernos e lousas, embora essenciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, frequentemente limitam a compreensão dos conceitos abstratos e das relações dinâmicas entre os elementos geométricos. Contudo, o avanço tecnológico das últimas décadas impulsionou o surgimento de ferramentas que revolucionaram essa abordagem, permitindo a exploração de fenômenos geométricos de maneira interativa e manipulável. Nesse cenário, a Geometria Dinâmica (GD) emerge como um campo promissor, alterando o paradigma do ensino e aprendizagem da matemática ao oferecer um ambiente virtual onde a manipulação direta e a visualização em tempo real tornam-se centrais para a construção do conhecimento.

A Geometria Dinâmica, enquanto conceito, transcende a mera digitalização de construções. Ela representa uma filosofia pedagógica que valoriza a experimentação, a conjectura e a investigação. Os softwares de Geometria Dinâmica, por sua vez, são as ferramentas que materializam essa filosofia. Conforme apontam Alves e Soares (2003), esses programas computacionais fornecem uma interface intuitiva para a criação e manipulação de pontos, linhas, círculos, polígonos e outras figuras, permitindo que o usuário observe instantaneamente as consequências de suas ações. Essa dinamicidade facilita a compreensão de propriedades e relações, como a invariância de certas características mesmo sob transformações, algo que as ferramentas estáticas tradicionais não conseguem simular. Ao contrário de um estudo passivo, onde o aluno apenas observa as figuras, a Geometria Dinâmica convida à ação, à exploração e à descoberta (Barbosa, 2003). Esta abordagem é especialmente potente para a exploração de propriedades de polígonos, permitindo que os estudantes visualizem como a alteração de um vértice pode afetar ângulos e lados, mas não necessariamente as relações fundamentais que definem a figura.

No contexto da Educação Básica, as potencialidades dos softwares de Geometria Dinâmica são notáveis. A experiência em sala de aula revela que muitos alunos enfrentam dificuldades na abstração de conceitos geométricos. A visualização interativa proporcionada por essas ferramentas, especialmente em tópicos como a soma dos ângulos internos de um triângulo, as propriedades de polígonos regulares ou as transformações isométricas, pode ser

um diferencial crucial. A capacidade de mover vértices, alterar dimensões e rotacionar figuras em tempo real ajuda a solidificar o entendimento, transformar o "ver" em "compreender" e superar barreiras cognitivas. Tal abordagem fomenta um ambiente de aprendizagem investigativo e exploratório, no qual o estudante se torna protagonista na construção do seu próprio conhecimento, indo muito além da memorização de fórmulas e propriedades.

Dentre os diversos softwares disponíveis no campo da Geometria Dinâmica, como o Cabri Geometry, o Cinderella e o Desmos, o GeoGebra destaca-se como uma das ferramentas mais acessíveis e completas para o ensino de matemática em todos os níveis, desde a Educação Básica até o Ensino Superior. Sua popularidade e abrangência, que integram geometria, álgebra, cálculo, planilhas e estatísticas em uma única plataforma (GeoGebra, s.d.), justificam o foco aprofundado que será dado a ele neste capítulo. Estudos como o de Maia, Gondim e Vasconcelos (2023) reforçam a relevância do GeoGebra na literatura acadêmica, evidenciando seu uso crescente e seu potencial para uma aprendizagem significativa em geometria. Particularmente para a exploração de polígonos, o GeoGebra oferece uma combinação única de gratuidade, interface intuitiva e capacidade de visualização dinâmica que o torna a ferramenta ideal para as atividades propostas neste trabalho, especialmente no contexto de escolas públicas com recursos limitados.

Diante deste cenário, este Capítulo 3 tem como objetivo explorar o conceito de Geometria Dinâmica e analisar as funcionalidades e o potencial pedagógico dos seus softwares, com ênfase no GeoGebra. É importante frisar que este capítulo se concentra na discussão das ferramentas e abordagens pedagógicas, e não na metodologia de pesquisa empírica, que se situa em etapas posteriores deste estudo. Para tanto, a seção inicial apresentará a definição e as características gerais da Geometria Dinâmica. Em seguida, a Seção 3.1, intitulado "O GeoGebra", detalhará as particularidades do software, sua interface e recursos específicos que o tornam uma ferramenta valiosa no ensino da matemática. Na sequência, a Seção 3.2 abordará a vasta rede de recursos online e a comunidade que a plataforma GeoGebra oferece, como facilitadores do processo de ensino-aprendizagem. Os insights obtidos neste capítulo servirão como base sólida para a discussão das Metodologias Ativas nos capítulos subsequentes, demonstrando como a GD não é apenas uma ferramenta tecnológica, mas um elo vital entre a teoria pedagógica e a prática da investigação em sala

de aula, pavimentando o caminho para a proposição de atividades que transformam o aprendizado da matemática.

No contexto desta dissertação, esse panorama da Geometria Dinâmica se concretiza em um recorte específico: o estudo de propriedades de polígonos por estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública municipal, com apoio do software GeoGebra. Tal recorte dialoga diretamente com as habilidades previstas na BNCC para esse ano de escolaridade, como EF07MA21, EF07MA22 e EF07MA23, que recomendam o uso de softwares de geometria dinâmica para reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias, explorar circunferências como lugares geométricos e verificar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Nesse sentido, a discussão desenvolvida neste capítulo fundamenta teoricamente o uso do GeoGebra no produto educacional apresentado no Capítulo 6, no qual essas habilidades são mobilizadas por meio de atividades investigativas com polígonos.

3.1 O GeoGebra

Dentre o vasto repertório de softwares de Geometria Dinâmica, o GeoGebra solidificou-se como uma ferramenta de excelência e abrangência no cenário educacional matemático global. Criado por Markus Hohenwarter a partir de 2001, com a visão de integrar diversas áreas da matemática em um ambiente intuitivo e dinâmico, o GeoGebra rapidamente ascendeu à proeminência devido à sua natureza de software livre e de código aberto, fator que o torna acessível a um público ampliado em escala global (GeoGebra, s.d.). Ele representa uma convergência singular de Geometria, Álgebra, Planilhas, Gráficos (Funções), Estatística e Cálculo, todas interconectadas em uma única plataforma. Essa integração fluida não apenas simplifica a transição entre diferentes representações matemáticas, mas também fomenta uma compreensão holística e relacional dos conceitos.

A interface do GeoGebra é concebida para ser intuitiva e interativa, oferecendo um ambiente de construção que simula o manuseio de objetos matemáticos. Por meio de comandos simples ou ferramentas gráficas, é possível criar desde pontos e retas até polígonos complexos, funções, equações e tabelas de dados. O grande diferencial, e o que o alinha diretamente com o conceito de Geometria Dinâmica, é sua capacidade de

dinamicidade: qualquer alteração em um elemento da construção — seja o arrastar de um ponto, a modificação de uma variável ou a translação de uma figura — é instantaneamente refletida em todas as suas representações conectadas.

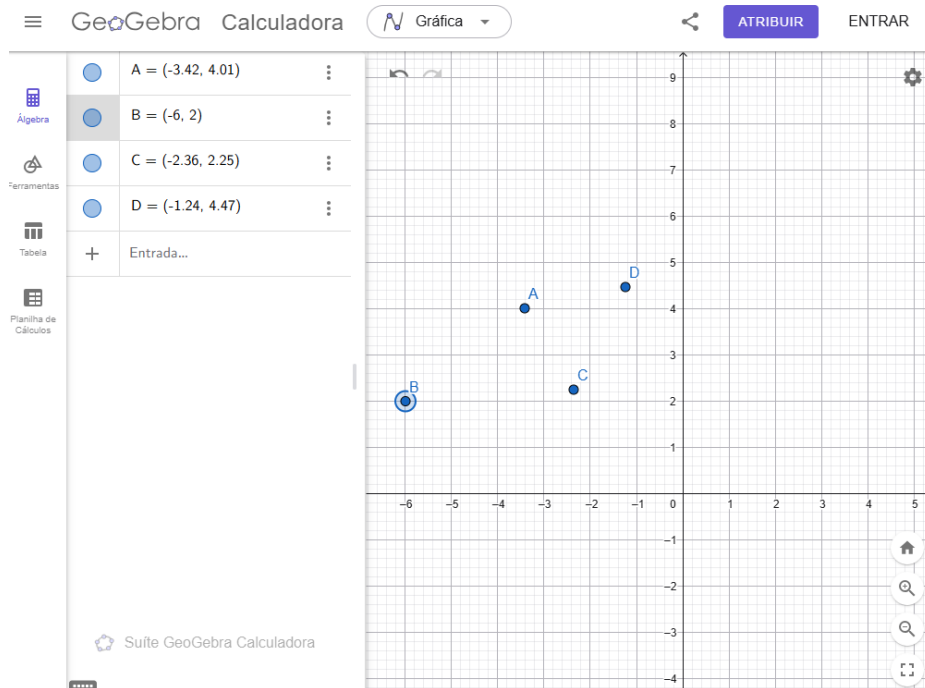


Figura 5 - Interface principal do GeoGebra mostrando as janelas de Álgebra e Geometria.

Fonte: Elaboração própria autora (2025).

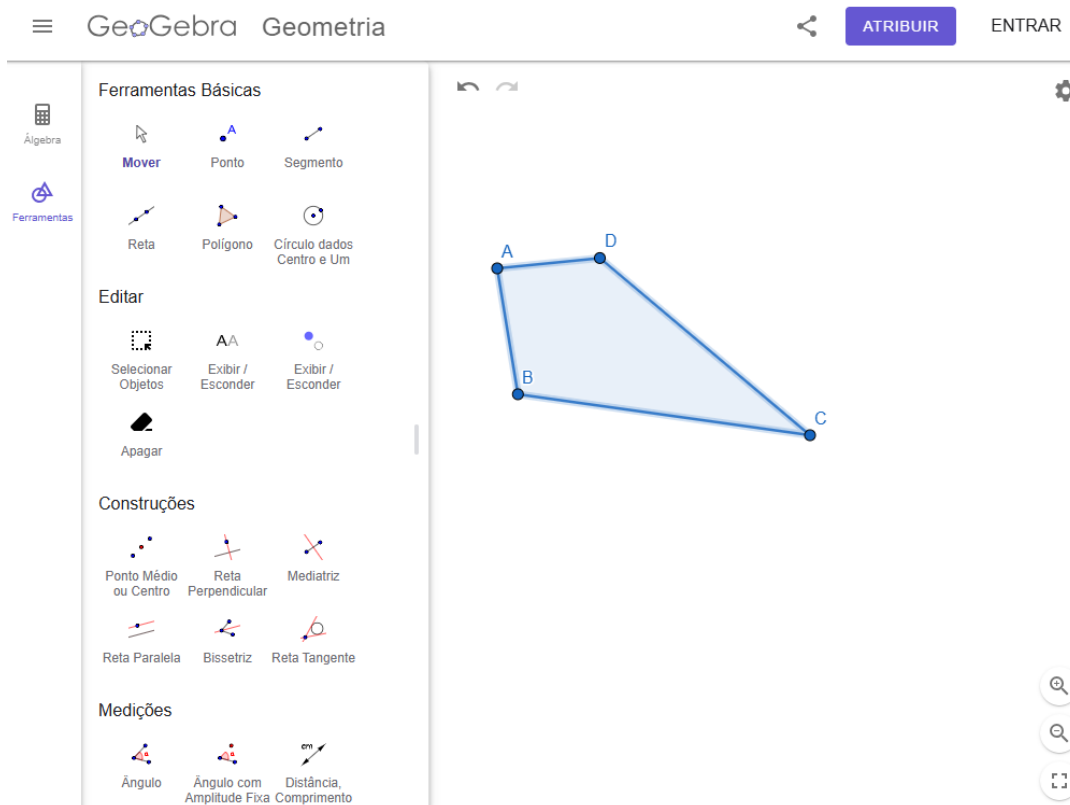


Figura 6 - Barra de ferramentas do GeoGebra com opções de construção.

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

Essa funcionalidade interativa permite que os usuários observem em tempo real como as relações geométricas e algébricas se mantêm ou se alteram sob transformações, concretizando os "recursos e potencialidades" dos *softwares* de Geometria Dinâmica (Alves & Soares, 2003). Por exemplo, ao construir um triângulo e arrastar seus vértices, a soma de seus ângulos internos na janela de álgebra permanece constante em 180° , permitindo ao aluno visualizar e inferir a validade de um teorema de forma empírica.

O potencial pedagógico do GeoGebra, especialmente na Educação Básica, é vasto e transformador. Na vivência em sala de aula, observa-se que uma das maiores barreiras para os estudantes é a abstração dos conceitos geométricos. O GeoGebra atua como uma ponte eficaz, permitindo a visualização concreta de ideias abstratas. Consideremos a exploração das propriedades de polígonos: um aluno pode construir um quadrado e, ao tentar "deformá-lo" arrastando seus vértices, notará que apenas os ângulos internos permanecem retos e os lados iguais a figura mantém a classificação de quadrado. Esse processo ativo e exploratório, impulsionado pela manipulação direta, transcende a mera memorização de definições.

Do ponto de vista teórico, essa passagem do GeoGebra de simples artefato tecnológico a instrumento de pensamento matemático pode ser compreendida à luz da noção de gênese instrumental (RABARDEL, 1995; TROUCHE, 2003). Nessa perspectiva, o software, enquanto artefato, apenas oferece um conjunto de possibilidades de ação; ele se torna instrumento quando o sujeito, ao interagir com a ferramenta em situações didáticas específicas, desenvolve esquemas de uso que articulam técnicas de manipulação com significados matemáticos. A forma como o professor organiza as tarefas, seleciona as ferramentas do GeoGebra, orienta a exploração e conduz a discussão coletiva é decisiva nesse processo, pois condiciona que esquemas de uso se consolidarão: se restritos à manipulação mecânica de objetos ou se voltados à identificação de invariantes, à formulação de conjecturas e à construção de argumentos.

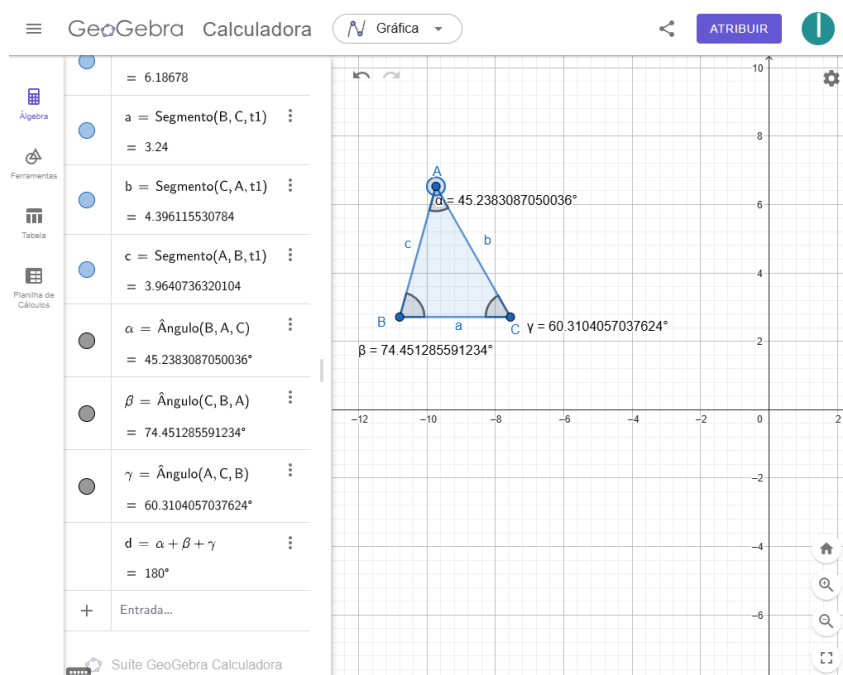


Figura 7 - Exemplo de manipulação de um vértice de um triângulo no GeoGebra.

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

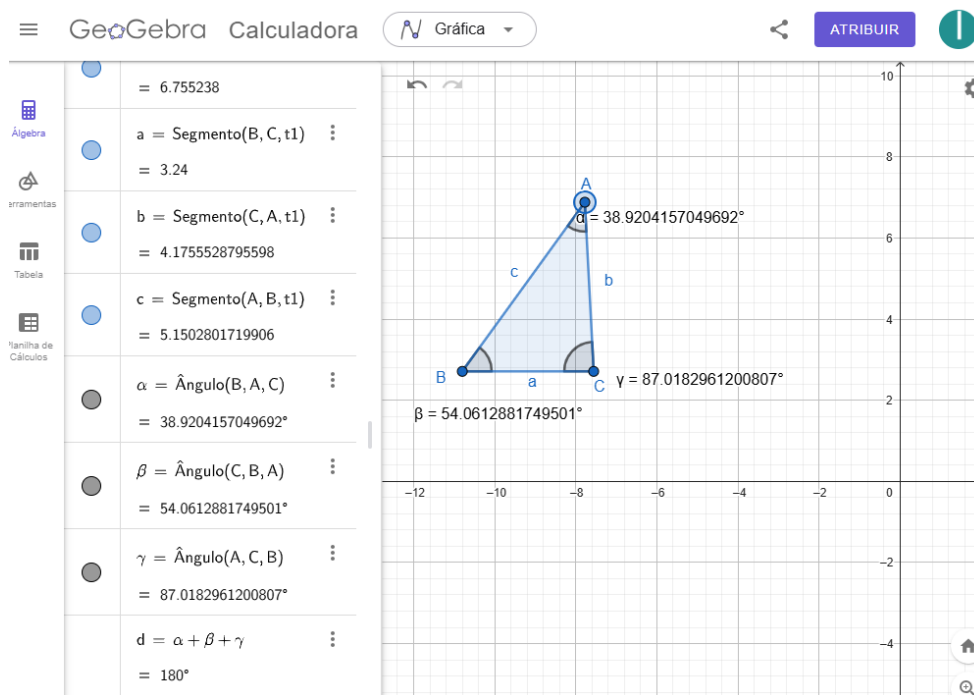


Figura 8 - Valores dos ângulos de um triângulo sendo atualizados dinamicamente no GeoGebra.

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

Essa abordagem estimula a experimentação e a formulação de conjecturas, características centrais de uma aprendizagem significativa. Os estudantes deixam de ser meros receptores de informações e se tornam protagonistas de seu próprio conhecimento, testando hipóteses, observando padrões e validando suas descobertas. Como destacam Maia, Gondim e Vasconcelos (2023), a interatividade do GeoGebra favorece a aprendizagem investigativa, impulsionando a construção do pensamento crítico e analítico. Além disso, a capacidade de gerar demonstrações visuais de teoremas complexos, como o Teorema de Tales ou o Teorema de Pitágoras, torna a lógica por trás das provas mais acessível e intuitiva, rompendo com a percepção da geometria como uma disciplina puramente dedutiva e desprovida de sentido prático.

A utilização do GeoGebra também contribui significativamente para o aumento da motivação e do engajamento dos alunos. A oportunidade de interagir com os objetos matemáticos, de ver as mudanças em tempo real e de criar suas próprias construções transforma o aprendizado em uma experiência mais atraente e relevante. Essa abordagem dinâmica reflete a necessidade de "reorganizar o pensamento dos alunos", oferecendo uma forma mais fluida e intuitiva de interagir com os conceitos matemáticos, que se alinha com os desafios do cotidiano (Maia, Gondim & Vasconcelos, 2023).

Para além do impacto direto nos estudantes, o GeoGebra representa uma ferramenta valiosa para a formação continuada e o desenvolvimento profissional de professores. Pesquisas na área (Dantas; Lins, 2017; Souza, 2016; Zampiere; Javaroni, 2018) têm evidenciado o potencial do software para auxiliar educadores a revisitar conceitos, explorar novas abordagens didáticas e criar materiais pedagógicos inovadores. Do ponto de vista da educadora atuante no Ensino Básico, o GeoGebra pode ser um catalisador para a inovação pedagógica, permitindo que os professores experimentem, desenvolvam e implementem metodologias ativas que antes seriam impraticáveis com os recursos tradicionais. Ele não apenas aprimora a compreensão do conteúdo por parte do professor, mas também o capacita a desenvolver aulas mais dinâmicas e participativas.

Embora as potencialidades do GeoGebra sejam evidentes, sua implementação plena em ambientes educacionais, especialmente em escolas públicas, não está isenta de desafios. Questões como o acesso equitativo a dispositivos tecnológicos (computadores, tablets ou smartphones) e a conectividade de internet estável são obstáculos que precisam ser superados. Além disso, a simples disponibilidade da ferramenta não garante sua eficácia pedagógica. A formação docente continuada é crucial para que os educadores possam integrar o GeoGebra de forma significativa ao currículo, transformando-o de um mero recurso tecnológico em um pilar para uma aprendizagem investigativa e contextualizada, alinhada às propostas das metodologias ativas.

Estudos recentes sobre o uso do GeoGebra no ensino de Geometria apontam, contudo, que o simples acesso à ferramenta não garante práticas pedagógicas inovadoras ou investigações matemáticas ricas. Revisões sistemáticas, como a de Maia, Gondim e Vasconcelos (2023), mostram que muitas experiências relatadas ainda se aproximam de um uso demonstrativo, em que o professor controla o software para ilustrar propriedades já conhecidas, mantendo o estudante em papel predominantemente passivo.

Outro risco recorrente diz respeito a atividades centradas apenas no “arrastar pontos” ou na exploração empírica de figuras, sem que haja problematização, explicitação de invariantes e estímulo à argumentação. Nesses casos, o GeoGebra pode acabar reforçando uma visão operacional da Geometria, na qual o aluno manipula objetos sem necessariamente compreender as propriedades que os sustentam. A literatura sobre integração de artefatos digitais no ensino de Matemática enfatiza que é a combinação entre o design das tarefas, a mediação docente e a organização das discussões coletivas que transforma o software em

um instrumento efetivo de pensamento matemático, e não apenas em um recurso tecnológico atrativo.

Em síntese, as características inerentes ao GeoGebra – dinamicidade, interatividade e capacidade de visualização – o posicionam como uma ferramenta indispensável para a aplicação de metodologias ativas, como a Aprendizagem Baseada na Investigação e a Resolução de Problemas, que serão abordadas em profundidade em capítulos subsequentes. Sua aptidão para criar um ambiente onde a matemática é explorada de maneira concreta e manipulável faz do GeoGebra um componente estratégico na construção de atividades investigativas em geometria, pavimentando o caminho para uma educação matemática mais significativa, engajadora e alinhada às demandas do século XXI na Educação Básica.

3.2 Os recursos online do GeoGebra: comunidade e materiais didáticos

Para além das poderosas funcionalidades inerentes ao software GeoGebra discutidas no subcapítulo anterior, a plataforma *online* GeoGebra.org configura-se como uma extensão vital e um ecossistema robusto que amplifica significativamente o potencial pedagógico da ferramenta. Não se trata apenas de um software instalável, mas de uma comunidade global e um repositório dinâmico de conhecimento que transforma a experiência de ensino e aprendizagem da matemática, oferecendo suporte contínuo para educadores e estudantes.

O site do GeoGebra funciona como uma vasta e acessível biblioteca digital, que transcende a ideia de um mero banco de dados para se consolidar como um ambiente colaborativo de Recursos Educacionais Abertos (REAs). Nele, estão hospedados mais de 1 milhão de recursos educativos gratuitos, que são constantemente criados e compartilhados por uma comunidade global de educadores (GeoGebra, s.d.). A diversidade desses materiais é notável, abrangendo todos os níveis de ensino e uma ampla gama de tópicos matemáticos, desde a geometria elementar até conceitos avançados de cálculo e estatística.

GeoGebra Materiais ▾ Calculadoras ▾ Entrar na Tarefa 

Ferramentas e recursos do GeoGebra

Ensine e aprenda matemática de uma forma mais inteligente


GeoGebra é mais do que um conjunto de ferramentas gratuitas para fazer matemática. É uma plataforma para conectar professores e alunos entusiasmados e oferecer a eles uma nova maneira de explorar e aprender sobre matemática.

[Iniciar calculadora](#) [Recursos da Comunidade](#)



Figura 9 - Página inicial do GeoGebra.org




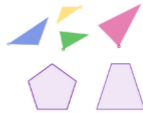
Fonte: Elaboração própria autora (2025)

GeoGebra Entrar na Tarefa Entrar no sistema 

Materiais Didáticos da comunidade

Encontre mais de 1 milhão de atividades gratuitas, simulações, exercícios, aulas e jogos para matemática e ciência!

Materiais em Destaque EXIBIR TODOS

 <p>CONGRESO INTERNACIONAL DE GEOGEBRA Córdoba, 9 al 12 de noviembre de 2023</p> <p>ATIVIDADE Congresso Internacional Agustín Carrillo de Alb...</p>	 <p>ATIVIDADE Círculos no triângulo Diego Lieban</p>	 <p>Pêndulo de Newton</p> <p>ATIVIDADE Pêndulo de Newton Diego Cardoso Nunes</p>	 <p>ATIVIDADE Montando figuras Diego Lieban</p>
---	--	---	---

Estadística Aritmética

Figura 10 - Página de pesquisa de materiais didáticos no GeoGebra.org

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

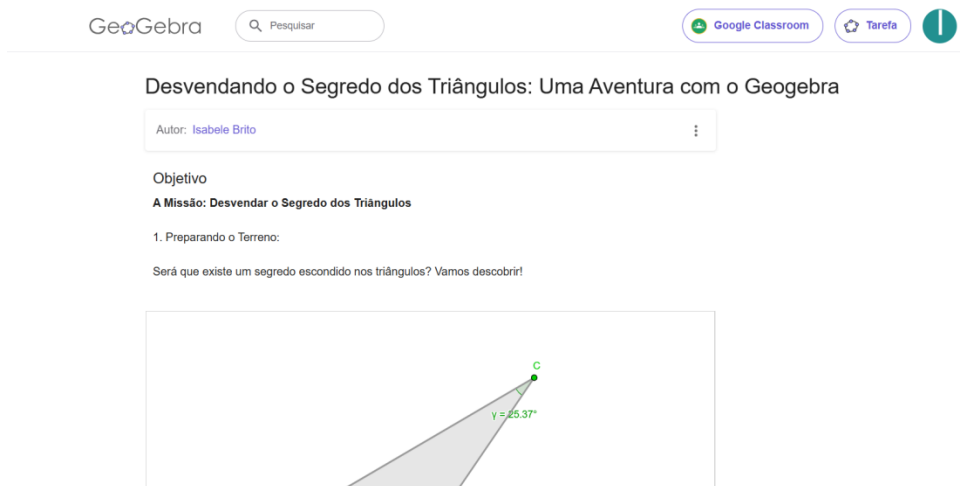


Figura 11 - Exemplo de material didático disponível na plataforma GeoGebra.org.

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

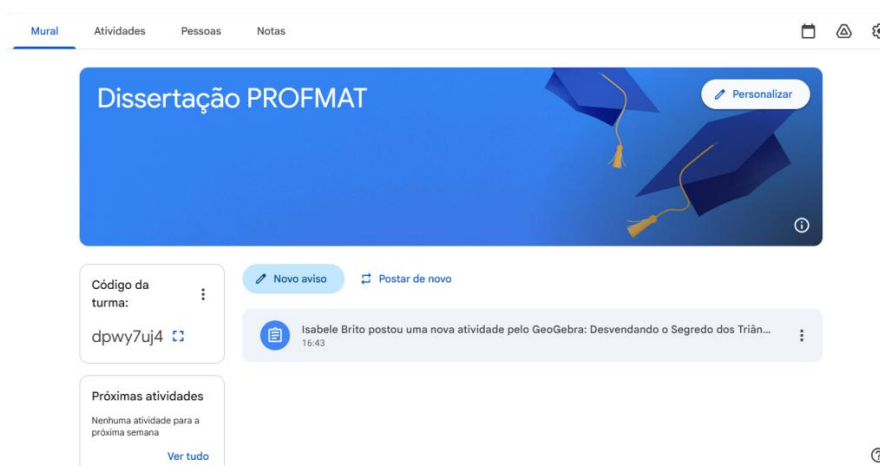


Figura 12 - Página inicial do GeoGebra Classroom.

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

Entre os tipos de recursos disponíveis, destacam-se:

- **Applets Interativos:** São mini-aplicativos dinâmicos que permitem a exploração de conceitos específicos, como a manipulação de gráficos de funções, a simulação de movimentos geométricos ou a visualização de teoremas. Sua natureza interativa convida à experimentação ativa por parte do aluno.
- **Lições e Atividades Completas:** Estruturas pedagógicas mais elaboradas, que integram texto explicativo, imagens e múltiplos applets, guiando o estudante por um percurso de aprendizagem de forma interativa e autodirigida.

- Folhas de Atividades (Worksheets): Materiais que propõem desafios e problemas a serem resolvidos com o auxílio do GeoGebra, estimulando a investigação e o pensamento crítico.
- Ferramentas de Avaliação e Gestão: Recursos como o GeoGebra Classroom e o GeoGebra Task permitem que professores criem salas de aula virtuais, distribuam atividades, monitorem o progresso dos alunos em tempo real e forneçam feedback personalizado, otimizando a gestão do processo educativo.

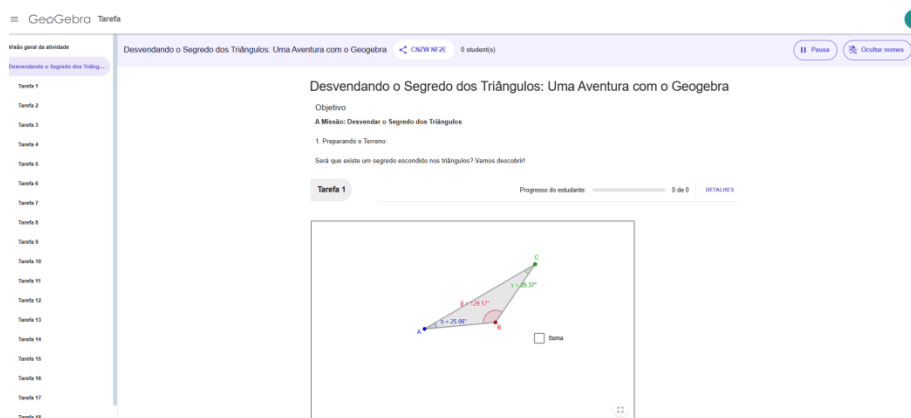


Figura 13 - Interface do GeoGebra Classroom para acompanhamento de alunos.

Fonte: Elaboração própria autora (2025)

A disponibilidade e a colaboração em torno desses recursos online geram impactos pedagógicos significativos para todos os atores do processo educativo:

- Para os professores: O acesso a um vasto acervo de materiais prontos e frequentemente revisados pela comunidade otimiza o tempo de planejamento, permitindo que o educador foque na adaptação e mediação pedagógica, em vez de investir exaustivamente na criação de atividades do zero. Minha experiência como professora do Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio me permite constatar que a plataforma é uma fonte inesgotável de inspiração, possibilitando a descoberta de novas abordagens e estratégias didáticas que podem ser adaptadas para o contexto específico de cada turma. Esse ambiente de compartilhamento também se traduz em uma forma contínua de desenvolvimento profissional, ao expor os educadores a diversas maneiras de explorar conceitos e aplicar a ferramenta.
- Para os estudantes: A natureza interativa e visual dos materiais online do GeoGebra promove uma aprendizagem mais engajadora e autodirigida. Alunos podem revisar conceitos, explorar dificuldades em seu próprio ritmo

ou avançar em temas de interesse, utilizando os *applets* e lições disponíveis fora do ambiente de sala de aula. A gratuidade e a acessibilidade desses recursos contribuem diretamente para a inclusão digital e educacional, oferecendo oportunidades equitativas de acesso a conteúdo de alta qualidade para um número crescente de estudantes.

Apesar da riqueza e do potencial do ecossistema online do GeoGebra, sua plena utilização enfrenta desafios. A conectividade à internet e a disponibilidade de dispositivos em ambientes escolares, especialmente em regiões menos favorecidas, podem limitar o acesso a esses recursos. Além disso, a vastidão do repositório pode, paradoxalmente, dificultar a localização de materiais específicos e de alta qualidade, exigindo do professor uma curadoria atenta. Nesse contexto, o desenvolvimento de recursos originais e contextualizados, como as Atividades com *applets* interativos que serão o produto desta dissertação, representa um caminho promissor para suprir lacunas e superar parte desses desafios, incentivando o compartilhamento de conteúdo relevante dentro da comunidade.

Em suma, a plataforma *online* do GeoGebra transcende o conceito de um mero *software*, consolidando-se como uma comunidade de aprendizagem colaborativa e um recurso indispensável para o ensino e aprendizagem da matemática no século XXI. Ao disponibilizar um vasto acervo de materiais interativos e ferramentas de gestão pedagógica, ela não só apoia a prática docente, como também incentiva a inovação e a construção coletiva do conhecimento. Essa rede de suporte *online* é fundamental para a viabilização de metodologias ativas e atividades investigativas em geometria, as quais serão aprofundadas nos próximos capítulos desta dissertação, reforçando a ponte entre a teoria e a prática educacional.

Em termos do desenho global desta pesquisa, o Capítulo 3 cumpre papel central no atendimento ao segundo objetivo específico da dissertação, qual seja, discutir o papel das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, em particular da Geometria Dinâmica, no ensino da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Ao analisar as potencialidades e os limites do GeoGebra, bem como o ecossistema de recursos disponíveis em sua plataforma online, o capítulo oferece o enquadramento teórico necessário para o planejamento das atividades investigativas com polígonos que compõem o produto educacional apresentado no Capítulo 6. No capítulo seguinte, essa discussão é aprofundada à luz das metodologias ativas, com destaque para a Aprendizagem Baseada na Investigação,

que fornece os princípios pedagógicos orientadores do design das tarefas desenvolvidas nesta dissertação.

Tabela 3 - Relação entre funcionalidades do GeoGebra e o design das atividades investigativas com polígonos.

Funcionalidade do GeoGebra	Possibilidades didáticas no estudo de polígonos	Tipo de evidência esperada nas atividades do Capítulo 6
Arraste de vértices e pontos livres com preservação das relações de construção entre objetos.	Permite que o estudante explore famílias de polígonos que preservam determinadas condições (por exemplo, quadriláteros com lados opostos paralelos ou triângulos isósceles), identificando invariantes e contraexemplos de forma dinâmica	Registro de conjecturas sobre propriedades que se mantêm sob o movimento (por exemplo, “a soma dos ângulos internos não muda”, “lados opostos continuam paralelos”), acompanhadas de justificativas empíricas e de tentativas de argumentação mais formal, em consonância com a habilidade EF07MA23 da BNCC.
Ferramentas de medida de segmentos, ângulos, perímetros e áreas atualizadas em tempo real.	Favorece a observação de padrões numéricos e geométricos em diferentes configurações de polígonos, explorando relações entre medidas (por exemplo, relação entre ângulo externo e interno, ou entre lados e perímetro) e apoiando a transição da	Tabelas, registros e descrições produzidas pelos alunos que associem a variação de medidas à preservação de certas propriedades, indicando que eles reconhecem regularidades e começam a generalizá-las em forma de regras ou proposições.

	experimentação para a generalização.	
Acesso a materiais compartilhados na plataforma GeoGebra.org e uso do GeoGebra Classroom para monitoramento em tempo real da resolução das atividades pelos estudantes.	Apoia o planejamento e a gestão das aulas investigativas, permitindo ao professor acompanhar as estratégias adotadas pelos alunos, identificar dificuldades recorrentes e intervir de forma mais focalizada durante as explorações com polígonos.	Registros do professor (notas de campo, capturas de tela, relatórios da plataforma) que indiquem padrões de raciocínio dos estudantes, dificuldades comuns na formulação de conjecturas e avanços na argumentação ao longo das atividades.

Fonte: Elaboração pela autora (2025).

4. METODOLOGIAS ATIVAS

É notório que a sociedade contemporânea exige cidadãos capazes de pensar criticamente, resolver problemas complexos e adaptar-se a novos contextos, habilidades que transcenderam a mera memorização de conteúdo. Nesse cenário, as metodologias ativas têm ganhado destaque no panorama educacional, contrastando nitidamente com o modelo tradicional de ensino. Este, por vezes, assume uma postura tecnicista, na qual o professor detém o monopólio do saber e o conhecimento é transmitido de forma fragmentada, característica que Paulo Freire (2002) tão apropriadamente denominou "educação bancária". Tal abordagem, pautada na repetição e na ausência de conexão com a realidade dos alunos, limita o desenvolvimento pleno das capacidades cognitivas e sociais.

No contexto desta pesquisa, a opção por metodologias ativas não é genérica, mas responde diretamente ao problema delineado na Introdução: as dificuldades recorrentes dos estudantes em compreender propriedades de polígonos para além de definições e exercícios algorítmicos, especialmente em turmas de 7º ano do Ensino Fundamental da rede pública. Ao articular Aprendizagem Baseada na Investigação (ABI) e Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) com o uso do GeoGebra, busca-se criar condições didáticas para que os estudantes passem de uma relação predominantemente estática com as figuras geométricas para uma experiência dinâmica, exploratória e argumentativa, em consonância com as competências e habilidades previstas na BNCC para a área de Matemática. Assim, este capítulo tem por finalidade explicitar o quadro pedagógico que sustenta o desenho das atividades propostas no produto educacional, estabelecendo o "como" metodológico que dialoga com os objetivos geral e específicos da pesquisa.

Para superar essas limitações, as metodologias ativas emergem como uma alternativa pedagógica que coloca o aluno no epicentro do processo de aprendizagem, transformando-o em sujeito ativo e corresponsável pela construção do seu conhecimento. Essa mudança de paradigma é particularmente relevante para o ensino de Matemática. Tradicionalmente, a Matemática é vista por muitos estudantes como uma disciplina abstrata, complexa e, por vezes, descontextualizada, o que gera receios e desafios significativos. No entanto, como ciência que promove o raciocínio lógico, a resolução de problemas e o desenvolvimento de estratégias, a Matemática se beneficia grandemente de abordagens que incentivem a experimentação, a investigação e a colaboração. Conforme pontuam Oliveira, Oliveira e

Santos (2021), as metodologias ativas são essenciais para tornar o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental mais dinâmico, participativo e relevante.

Ainda, a eficácia das metodologias ativas é exponencialmente potencializada pela integração das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC). Em um mundo imerso em avanços tecnológicos, especialmente entre os jovens (Lima & Araújo, 2021), a mera combinação de métodos tradicionais com ferramentas digitais não é suficiente; é fundamental que as TDIC atuem como catalisadores para a construção de conhecimento. Maltempi e Mendes (2016) argumentam que as tecnologias digitais são indispensáveis para um ensino de matemática mais coerente e prático, capaz de superar a limitação de um ensino focado apenas em cálculos. As TDIC, com sua capacidade de gerar múltiplas representações, oferecer feedback imediato e promover a interatividade, tornam as metodologias ativas mais dinâmicas, visuais e engajadoras (Kenski, 2007; Carneiro, Figueiredo & Ladeira, 2020; Bonizário et al., 2023). Elas permitem que o professor "reflita sobre o ensino e adapte suas práticas para melhor integração tecnológica" (Gouvêa, 1999 apud Oliveira, 2013), transformando a sala de aula em um ambiente de descoberta e colaboração.

Como discutido no Capítulo 2, a BNCC atribui à Matemática o compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, enfatizando a resolução de problemas, a formulação e a testagem de conjecturas, bem como o uso de recursos tecnológicos na exploração de conceitos e na comunicação de ideias (BRASIL, 2018). Nesse cenário, o GeoGebra constitui um exemplo paradigmático de TDIC que potencializa a construção de significados em Geometria: ao permitir a manipulação dinâmica de objetos, a visualização de invariantes e a experimentação de casos particulares, o software cria condições para a emergência de cenários de investigação e tarefas de resolução de problemas que ultrapassam o paradigma do exercício, em sintonia com as orientações curriculares nacionais.

É fundamental reconhecer, contudo, que a integração das TDIC não é isenta de desafios ou de resultados que, à primeira vista, podem parecer "erros". Como bem observa Koehler e Mishra (2009), as tecnologias digitais podem apresentar características como "plasticidade, instabilidade, opacidade e parcialidade", o que significa que nem sempre o que se busca será entregue de forma imediata ou intuitiva. A Matemática, em sua essência, lida com ideias de exatidão e abstração, enquanto a representação concreta, seja física ou digital, sempre envolverá um grau de aproximação. Essa intrínseca diferença entre o ideal

matemático e sua manifestação prática se torna, no ambiente das metodologias ativas, uma poderosa ferramenta pedagógica. Os resultados inesperados ou as "falhas" na manipulação de softwares como o GeoGebra não são meros obstáculos, mas sim convites à reflexão, à reformulação de hipóteses e à compreensão mais profunda dos conceitos, explorando a nuance entre o abstrato e o representado.

Este capítulo se propõe a explorar o universo das metodologias ativas, com foco especial na Aprendizagem Baseada na Investigação (ABI) e na Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP). Serão discutidos seus fundamentos teóricos, suas aplicações na Educação Matemática e, crucialmente, a sinergia com o uso de TDIC, como o GeoGebra, que potencializam o alcance dessas abordagens, inclusive transformando as dificuldades em oportunidades de aprendizado. É importante ressaltar que este capítulo se dedica à fundamentação das metodologias pedagógicas que guiam o desenvolvimento do produto educacional desta dissertação, não à coleta ou análise de dados empíricos, que será um desdobramento futuro da pesquisa.

4.1 Aprendizagem Baseada na Investigação

A Aprendizagem Baseada na Investigação (ABI), também conhecida como ABInv, representa uma abordagem pedagógica que coloca o aluno no papel de um pequeno cientista, engajado na exploração de fenômenos, na formulação de perguntas e na busca ativa por respostas. Diferente do ensino tradicional, onde o conhecimento é transmitido de forma linear, a ABI estimula a curiosidade inata dos estudantes, incentivando-os a levantar hipóteses, a planejar e executar investigações, a analisar dados e a comunicar suas descobertas. Embora não haja uma única definição para a aprendizagem ativa, seus princípios vêm sendo desenvolvidos desde a segunda metade do século XX (Bertrand, 1998). Valente et al. (2014) aprofundam o conceito de ABInv, destacando-a como um processo que visa desenvolver a autonomia do aluno na construção do saber.

Pedaste et al. (2015), citados por Albuquerque, Santos e Giannella (2017), descrevem o ciclo da ABI em fases que, embora possam variar em nomenclatura, geralmente incluem: Orientação (introdução ao problema/tópico), Conceituação (formulações de questões de pesquisa e hipóteses), Investigação (planejamento e execução), Conclusão (análise e interpretação de dados) e Discussão (comunicação e reflexão). Esse processo cíclico e

iterativo permite que o aluno não apenas adquira conhecimento, mas também desenvolva habilidades meta-cognitivas cruciais. A Figura 14 ilustra essa metodologia da Aprendizagem Baseada na Investigação.

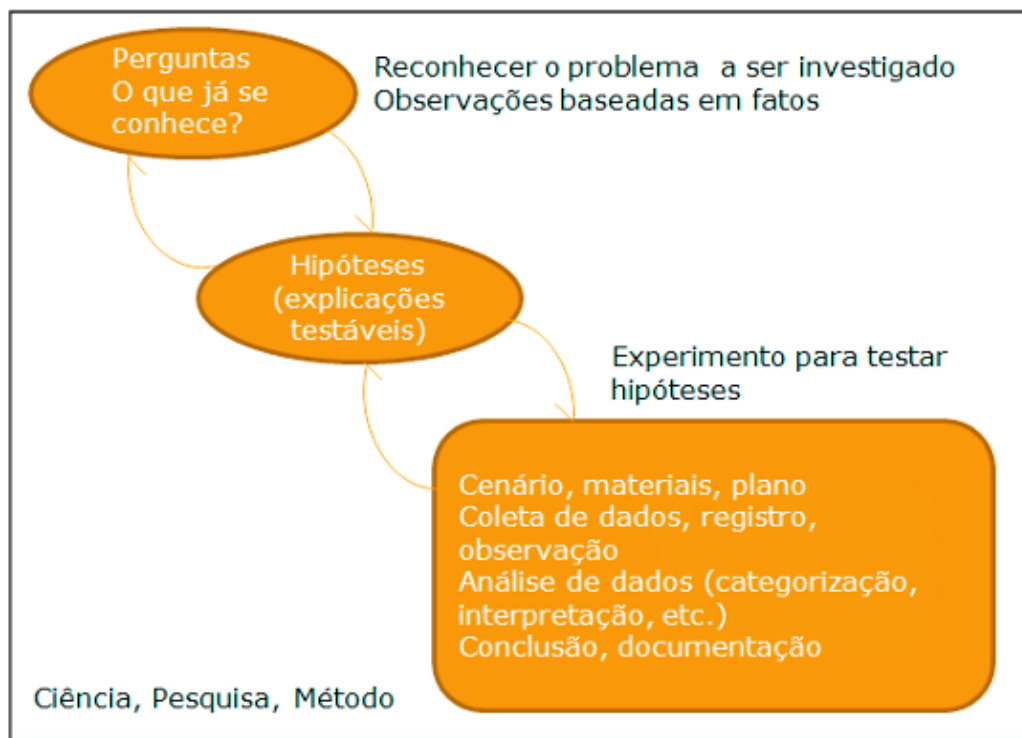


Figura 14 - Metodologia da Aprendizagem Baseada na Investigação

A ABI é particularmente relevante para o ensino e aprendizagem de Matemática e Geometria, áreas que se beneficiam imensamente da exploração e descoberta. Na Geometria, por exemplo, em vez de o professor simplesmente apresentar uma propriedade de um polígono, a ABI convida o aluno a investigar essa propriedade. A capacidade de mover vértices, alterar ângulos e observar as consequências dessas mudanças em tempo real permite que o estudante "veja" a matemática em ação, solidificando a compreensão de conceitos abstratos. Para a exploração de polígonos, a ABI com o GeoGebra pode desafiar os alunos a descobrir a soma dos ângulos internos de um triângulo, a relação entre lados e ângulos em um quadrilátero, ou as propriedades de simetria em polígonos regulares, transformando essas investigações em experimentos dinâmicos.

Nesse contexto, o papel das TDIC, e em particular do GeoGebra, torna-se fundamental. O GeoGebra é a ferramenta ideal para a ABI em Matemática, pois oferece um

ambiente interativo onde o aluno pode realizar suas investigações de forma prática e visual. As funcionalidades de geometria dinâmica do software permitem que os estudantes:

- **Manipulem figuras geométricas:** Alterem dimensões, posições e orientações de polígonos, círculos e outros elementos, observando o que permanece constante e o que varia. Por exemplo, ao arrastar os vértices de um triângulo, os alunos podem observar diretamente como os ângulos individuais mudam, mas a soma total permanece inalterada, evidenciando uma propriedade fundamental dos polígonos.
- **Formulem e testem hipóteses:** Ao observar um padrão, podem rapidamente verificar sua validade em diferentes configurações. Neste ponto, é crucial entender que, por vezes, uma conjectura pode não se confirmar plenamente na representação digital, seja por uma imprecisão da ferramenta ou por uma limitação da hipótese. Essa "não-conformidade" é, na verdade, um rico momento de aprendizado, que impulsiona o aluno a refinar sua compreensão ou a buscar explicações para a discrepância entre a ideia e a aproximação concreta.
- **Visualizem relações abstratas:** A interconexão entre as janelas de geometria, álgebra e cálculo permite que o aluno associe representações visuais a expressões algébricas e dados numéricos, tornando a abstração mais acessível.

Essa mediação tecnológica transforma a ABI de uma abordagem que poderia ser complexa e demorada com recursos tradicionais em uma experiência ágil e rica em feedback imediato. A ABI mediada por TDIC como o GeoGebra prepara os alunos para um pensamento mais crítico e analítico, incentivando a curiosidade, a autonomia e a capacidade de argumentação – habilidades essenciais não apenas para a formação matemática, mas para a vida em sociedade.

4.2 Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas

A Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) é uma abordagem metodológica de grande relevância na Educação Matemática, que vai além da simples aplicação de fórmulas para desenvolver o raciocínio e a criatividade. A importância das

análises e discussões sobre o trabalho de George Polya, considerado o precursor dos estudos nessa área, é fundamental. Mendes (2009) destaca que Polya foi pioneiro ao abordar os modos de planejar e resolver problemas matemáticos, ressaltando que o professor deve "incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e praticar" (Polya, 2006, p. 4 apud Marin & Araújo, 2016). Polya (2006) enfatiza a necessidade de o professor evitar a ideia de que os problemas matemáticos são isolados, incentivando a conexão com conhecimentos prévios e a exploração de semelhanças e diferenças entre problemas.

Polya (2006 apud Marin & Araújo, 2016) propôs quatro etapas fundamentais para a resolução de problemas, sintetizadas na Tabela a seguir:

Tabela 4 - Síntese das Etapas para Resolver Problemas (Polya, 1978)

FASE	SUGESTÃO DE PERGUNTAS AUXILIADORAS
1ª Fase Compreensão do Problema	<ul style="list-style-type: none"> → O que se pede no problema? → Quais os dados e as condições do problema? → É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama? → É possível estimar a resposta?
2ª Fase Elaboração de um Plano	<ul style="list-style-type: none"> → Qual é o seu plano para resolver o problema? → Que estratégia você tentará desenvolver? → Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este? → Tente organizar os dados em tabelas e gráficos. → Tente resolver o problema por partes.
3ª Fase Execução do Plano Elaborado	<ul style="list-style-type: none"> → Execute o plano elaborado, verificando passo a passo. → Efetue todos os cálculos indicados no plano. → Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.
4ª Fase Verificação da Solução	<ul style="list-style-type: none"> → Examine se a solução obtida está correta. → Existe outra maneira de resolver o problema? → É possível usar o método empregado para resolver problemas

	semelhantes?
--	--------------

Fonte: MARIN e ARAÚJO, 2016.

A ABRP é amplamente reconhecida como um recurso metodológico que possibilita a participação ativa do aluno, promovendo a interpretação e articulação de ideias, a aplicação de conhecimentos anteriores e o estabelecimento de relações entre experiências anteriores e novas situações (BRASIL, 1997). Esta abordagem, como destaca Dante (2009 apud Marin & Araújo, 2016), desenvolve o raciocínio produtivo e o envolvimento com aplicações práticas da Matemática.

Na Geometria, a ABRP se manifesta na abordagem de desafios que exigem a visualização espacial, a aplicação de propriedades de figuras e a construção de argumentações lógicas. O GeoGebra, neste cenário, torna-se uma ferramenta poderosa que potencializa cada uma das etapas de Polya:

- **Compreensão do problema:** Em problemas geométricos, a visualização da situação é fundamental. O GeoGebra permite a construção dinâmica da configuração do problema, auxiliando na identificação dos dados e da incógnita de forma concreta, especialmente quando a descrição envolve figuras complexas ou relações espaciais. Por exemplo, para um problema que envolve a determinação da área de um polígono irregular, o GeoGebra pode ajudar a visualizar a decomposição em figuras mais simples ou a aplicação de coordenadas.
- **Estabelecimento de um plano:** Ao simular diferentes abordagens para um problema, o GeoGebra oferece um "laboratório" onde hipóteses podem ser testadas rapidamente. Por exemplo, para um problema que envolve encontrar um ponto com uma propriedade específica, o aluno pode manipular objetos e observar o comportamento das relações até identificar um padrão ou uma estratégia para a construção. Isso pode ser aplicado para testar se um quadrilátero é um paralelogramo ao mover seus vértices e observar a manutenção das propriedades de paralelismo dos lados opostos.

- Execução do plano: Uma vez estabelecido o plano, o GeoGebra permite a construção precisa dos elementos e a realização de medições, auxiliando na verificação dos passos e na identificação de possíveis erros de forma imediata. É aqui que a crítica se torna pedagógica: a ocorrência de um resultado inesperado ou uma construção que não se concretiza como o previsto no GeoGebra deve ser encarada não como um fracasso, mas como uma etapa essencial do processo de aprendizagem. O "erro" computacional ou a divergência da solução esperada instiga o aluno a revisar seu raciocínio, depurar seu plano ou aprofundar sua compreensão sobre a natureza das aproximações digitais versus a exatidão matemática.
- Retrospecto: O software facilita a generalização de soluções. Após resolver um problema, o aluno pode manipular a configuração para verificar se a solução encontrada é válida para diferentes casos, ou se existem outras soluções, promovendo uma reflexão mais profunda sobre o conceito matemático envolvido. Essa etapa se beneficia imensamente da capacidade do GeoGebra de permitir que o aluno revise a construção e entenda onde sua concepção inicial pode ter se desviado da exatidão matemática.

Essa perspectiva dialoga diretamente com discussões clássicas da Educação Matemática sobre cenários para investigação (SKOVSMOSE, 2000) e investigações matemáticas na sala de aula (Ponte et al., 1998). Em ambos os casos, defende-se que os estudantes sejam convidados a explorar situações abertas, formular questões, produzir e testar conjecturas, argumentar e comunicar resultados, em contraste com o mero cumprimento de listas de exercícios. Ao aproximar o ciclo da ABI e as etapas de resolução de problemas de Pólya desse referencial, este estudo procura posicionar as atividades com GeoGebra não apenas como “uso de tecnologia”, mas como parte de um movimento mais amplo de construção de ambientes investigativos em Geometria, coerentes com o que vem sendo produzido na área de Educação Matemática.

A mediação tecnológica do GeoGebra transforma a resolução de problemas de uma atividade que, por vezes, pode ser abstrata e frustrante, em uma experiência visualmente rica e interativa. Isso não só aprimora as habilidades matemáticas, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios reais de forma colaborativa e criativa, alinhando a prática pedagógica com as exigências da sociedade contemporânea. A presente dissertação, ao

propor o desenvolvimento de um produto educacional com foco na exploração de propriedades de polígonos por meio do GeoGebra em escolas públicas, busca preencher uma lacuna na literatura ao oferecer uma abordagem integrada e contextualizada que otimiza a aprendizagem em cenários com recursos desafiadores, consolidando uma contribuição prática e teórica para a educação matemática brasileira.

Em suma, as metodologias ativas, com destaque para a Aprendizagem Baseada na Investigação e a Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas, representam um pilar fundamental para uma educação matemática transformadora. Ao romper com o paradigma da "educação bancária", essas abordagens promovem o protagonismo do aluno, incentivando a curiosidade, a autonomia e o pensamento crítico. A sinergia entre essas metodologias e o uso estratégico das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, notadamente o GeoGebra, é crucial. Este software não atua apenas como um recurso, mas como um catalisador que potencializa a exploração, a visualização e a manipulação de conceitos matemáticos, tornando a aprendizagem mais engajadora e significativa. A transformação de desafios e "erros" computacionais em valiosas oportunidades de aprofundamento e reflexão sobre a própria natureza da Matemática e suas representações é um reflexo desse potencial.

A seguir, a Figura 15 ilustra, de forma integrada, como a Aprendizagem Baseada na Investigação (ABI), a Resolução de Problemas (ABRP), o uso do GeoGebra e o erro como etapa pedagógica se articulam no processo de transformação do ensino de Geometria.



Figura 15 - Infográfico representando a integração entre ABI, ABRP e GeoGebra.

A partir desse enquadramento, formulam-se algumas hipóteses pedagógicas que orientam o desenho do produto educacional apresentado no Capítulo 6. Supõe-se que a articulação entre ABI, ABRP e o uso do GeoGebra tende a favorecer: (i) a mobilização de diferentes registros de representação de polígonos e o trânsito entre o estático e o dinâmico; (ii) a formulação e a testagem de conjecturas pelos estudantes, com base em variações sistemáticas de figuras e medidas; (iii) a explicitação e discussão coletiva de argumentos, aproximando o trabalho em sala de aula de práticas próprias da atividade matemática; e (iv) a ressignificação do erro — inclusive de natureza computacional — como oportunidade de refinamento conceitual e não apenas como falha a ser evitada. Essas hipóteses pedagógicas não constituem hipóteses de pesquisa a serem testadas empiricamente; elas operam como horizonte de design e como lente para analisar, no Capítulo 6, o potencial formativo das tarefas propostas.

Assim, este capítulo oferece os fundamentos pedagógicos que orientam o desenho das atividades investigativas apresentadas no Capítulo 6. A articulação entre Aprendizagem Baseada na Investigação, Resolução de Problemas e uso do GeoGebra permite conceber tarefas voltadas à exploração de propriedades geométricas, à formulação de conjecturas, ao registro de observações e à argumentação matemática. Como não houve aplicação empírica

no escopo desta dissertação, tais possibilidades são compreendidas como desdobramentos pedagógicos esperados, a serem investigados em estudos futuros.

5. FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA PLANA

Este capítulo especializa o primeiro objetivo específico desta dissertação, ao sistematizar um núcleo de resultados de Geometria Plana euclidiana que dá suporte direto ao design do produto educacional proposto. Diferentemente do Capítulo 1, em que se discutiram aspectos históricos, epistemológicos e curriculares da Geometria e das Tecnologias Digitais, o foco aqui recai sobre o conteúdo matemático que se pretende mobilizar em sala de aula, em diálogo com as unidades temáticas e habilidades de Geometria da BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017). Nesse sentido, selecionam-se definições, propriedades e teoremas relativos, sobretudo, a triângulos e quadriláteros, organizados de modo a articular o rigor da tradição axiomático-dedutiva à elaboração de atividades investigativas com o GeoGebra, voltadas ao desenvolvimento do raciocínio geométrico, da argumentação e da autonomia intelectual dos estudantes.

5.1 Congruência de triângulos

Na Geometria escolar, a congruência de triângulos é um dos principais instrumentos para justificar propriedades de figuras planas a partir de poucos dados, em especial em problemas que envolvem igualdade de lados e ângulos. Nos Ensino Fundamental – Anos Finais, esse conteúdo dialoga diretamente com habilidades da BNCC como EF07MA21, que propõe o reconhecimento e a classificação de polígonos com base em suas propriedades, e EF07MA24, que envolve a construção de triângulos a partir de medidas dadas e a análise de condições de existência (BRASIL, 2017). No 8º ano, a congruência aparece ainda como ferramenta central na demonstração de propriedades de quadriláteros (EF08MA14), ao permitir decompor essas figuras em triângulos e justificar relações entre lados, ângulos e diagonais (BRASIL, 2017).

Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem o mesmo comprimento. De modo análogo, dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida. A partir dessas noções, dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dizem-se congruentes quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices tal que lados correspondentes tenham o mesmo comprimento e ângulos correspondentes tenham a mesma medida. Nessa situação,

escreve-se $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, indicando tanto a congruência quanto a correspondência entre vértices.

Essa definição garante que triângulos congruentes são, em essência, “a mesma figura” no plano, diferindo apenas por transformações isométricas (deslocamentos, rotações ou reflexões). Nas atividades com o GeoGebra, essa ideia aparece quando o estudante manipula um triângulo por meio de arrastes e observa que determinadas medidas se preservam, ainda que a imagem visual se altere, o que dialoga com exposições didáticas presentes em manuais escolares de geometria plana (DOLCE; POMPEO, 2013; COSTA et al., 2012).

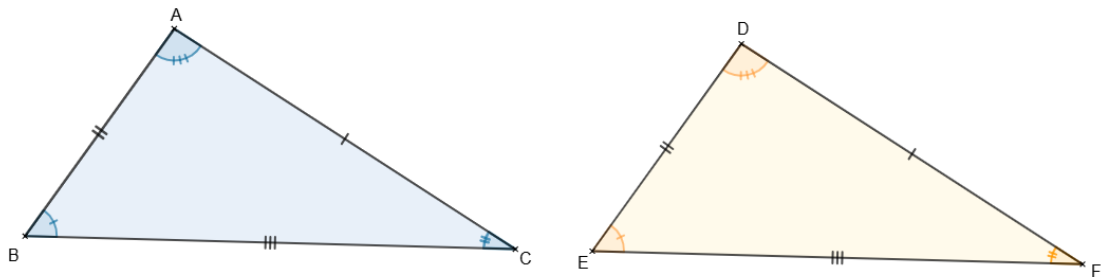


Figura 16 - Triângulos congruentes $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com indicação dos lados e ângulos correspondentes.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Em exposições clássicas de geometria, admite-se que a congruência de triângulos é garantida quando certas combinações de lados e ângulos coincidem, originando os chamados casos de congruência (ou critérios de congruência) de triângulos. Inspirando-se na tradição euclidiana (EUCLIDES, 2009) e em sua sistematização em textos contemporâneos de geometria plana (COSTA et al., 2012; DOLCE; POMPEO, 2013), adotam-se aqui, como referência principal, os seguintes casos:

- Lado-Ângulo-Lado (LAL): se dois lados e o ângulo compreendido entre eles em um triângulo são congruentes a dois lados e ao ângulo compreendido de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.
- Lado-Lado-Lado (LLL): se os três lados de um triângulo são congruentes aos três lados de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.
- Ângulo-Lado-Ângulo (ALA): se dois ângulos e o lado compreendido entre eles em um triângulo são congruentes a dois ângulos e ao lado compreendido de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Esses casos permitem reduzir a verificação de congruência a um número limitado de medidas, o que é particularmente útil tanto em demonstrações formais quanto em situações didáticas. Em manuais escolares, por exemplo, é comum propor problemas em que o aluno deve decidir se duas figuras representam ou não o “mesmo” triângulo, a partir de dados parciais (DOLCE; POMPEO, 2013).

No ambiente dinâmico do GeoGebra, pode-se solicitar aos estudantes que construam triângulos a partir de dados mínimos (como dois lados e o ângulo entre eles) e investiguem, por meio de arrastos, se diferentes construções levam ou não ao “mesmo” triângulo, consolidando intuitivamente a ideia de unicidade nos casos LAL, LLL e ALA. Tais tarefas assumem a forma de situações-problema: o estudante precisa planejar uma construção, testar possibilidades e justificar por que certas configurações são (ou não) possíveis, em linha com a concepção de resolução de problemas apresentada por Dante (2010).

Um caso particular de interesse é o dos triângulos isósceles. Um triângulo é chamado isósceles quando possui exatamente dois lados congruentes. Esses lados recebem o nome de laterais, ao passo que o terceiro lado é chamado de base. A congruência de lados e ângulos em triângulos isósceles leva a resultados clássicos, como:

- se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes;
- reciprocamente, se os ângulos da base de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.

Ambas as afirmações podem ser demonstradas comparando-se o triângulo consigo mesmo e aplicando um caso de congruência adequado (como LAL), a partir de uma correspondência conveniente entre vértices, procedimento descrito em textos para formação de professores (COSTA et al., 2012) e em manuais de geometria plana (DOLCE; POMPEO, 2013).

Esboço de demonstração (primeira afirmação). Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles, com $AB = AC$. Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$ e a correspondência entre vértices dada por $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Os lados correspondentes AB e AC , bem como o lado comum BC , são congruentes, e o ângulo compreendido em A é o mesmo nos dois triângulos. Assim, pelo caso LAL, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$ são congruentes. Da congruência, segue que $\angle B = \angle C$; isto é, em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes. A recíproca pode ser demonstrada de forma análoga, explorando novamente uma correspondência entre vértices e um caso adequado de congruência.

Mais do que reforçar técnicas formais de prova, esses resultados permitem interpretar, de modo dedutivo, configurações frequentemente observadas pelos estudantes nas construções com GeoGebra: triângulos “aparentemente diferentes” que preservam dois lados iguais e, portanto, mantêm fixos os ângulos da base quando o vértice oposto se desloca sobre uma reta ou circunferência.

Os conceitos e resultados apresentados nesta subseção fornecem o suporte teórico para justificar relações identificadas empiricamente nas tarefas do Capítulo 6, nas quais os estudantes exploram triângulos em um ambiente de geometria dinâmica. Ao enunciar e discutir formalmente os casos de congruência e as propriedades de triângulos isósceles, estabelece-se um elo entre a experimentação conduzida no software e o tratamento dedutivo próprio da Geometria Euclidiana, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, da argumentação e da validação de conjecturas em consonância com as diretrizes curriculares (BRASIL, 2017) e com a perspectiva de ensino por meio da resolução de problemas (DANTE, 2010).

Em síntese, a sistematização dos casos de congruência de triângulos (LLL, LAL, ALA) e de propriedades como a igualdade de ângulos na base de um triângulo isósceles fornece ao professor um conjunto de ferramentas para justificar, em linguagem matemática, observações feitas pelos estudantes em ambiente de Geometria Dinâmica. No módulo de triângulos apresentado no Capítulo 6, esses resultados aparecem como justificativa formal para conjecturas sobre conservação de forma ao arrastar vértices, sobre a relação entre medidas de lados e ângulos opostos e sobre a equivalência de figuras em contextos de malhas, mosaicos e pavimentações. Do ponto de vista curricular, esse bloco contribui para o desenvolvimento das habilidades EF07MA21 e EF07MA24, ao articular reconhecimento de propriedades, construção de triângulos e explicitação de condições de existência, e prepara o terreno para a demonstração de propriedades de quadriláteros via congruência, prevista em EF08MA14.

5.2 Desigualdades Geométricas

As desigualdades geométricas em triângulos – envolvendo ângulos externos, soma das medidas dos ângulos internos, relação entre lados e ângulos opostos e a desigualdade triangular – são fundamentais para compreender tanto a existência quanto o comportamento

de triângulos no plano. No 7º ano, a BNCC explicita, na habilidade EF07MA24, a necessidade de verificar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e de analisar condições de existência a partir de medidas de lados (BRASIL, 2017), o que inclui, de forma implícita, a desigualdade triangular e a relação entre lados e ângulos opostos o que, na prática da sala de aula, envolve trabalhar com a desigualdade triangular e com a relação entre lados e ângulos opostos em triângulos.

Nesta subseção, esses resultados são organizados de modo a fornecer o suporte teórico para o módulo de triângulos do Capítulo 6, em que os estudantes, ao manipular construções no GeoGebra, investigam a soma das medidas dos ângulos internos, exploram a impossibilidade de certos conjuntos de medidas formarem triângulos e relacionam ângulos agudos, retos e obtusos com comprimentos de lados. Assim, desigualdades geométricas deixam de ser apenas “fatos” e passam a servir como critérios para interpretar e validar conjecturas formuladas em tarefas investigativas.

5.2.1 Ângulo externo e soma dos ângulos internos

Considere um triângulo ABC . Os ângulos com vértices em A , B e C , determinados pelos lados do triângulo, são chamados ângulos internos. Prolongando-se um dos lados do triângulo por um de seus vértices (por exemplo, o lado \overline{BC} além de C), o ângulo formado por esse prolongamento e pelo outro lado que incide no mesmo vértice (no exemplo, o lado \overline{CA}) é denominado ângulo externo do triângulo nesse vértice.

Adota-se aqui a forma de enunciado usualmente empregada em textos de geometria plana voltados ao Ensino Médio:

Teorema do ângulo externo.

Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é maior do que a medida de cada um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração. Considere um triângulo $\triangle ABC$ e prolongue o lado \overline{BC} até um ponto D , formando o ângulo externo $\angle ACD$ no vértice C . Pela própria construção, temos que $\angle ACD$ é a soma de dois ângulos adjacentes, que podemos denotar por $\angle 1$ e $\angle 2$, ou seja, $m(\angle ACD) = m(\angle 1) + m(\angle 2)$.

Por outro lado, construa por C uma reta r paralela ao lado (AB). Como r é paralela a (AB) e a reta (AC) é transversal, os ângulos internos alternos $\angle A$ e $\angle 1$ são congruentes, de modo que $m(\angle 1) = m(\angle A)$. De forma análoga, como r é paralela a (AB) e a reta (BC) é transversal, os ângulos internos alternos $\angle B$ e $\angle 2$ são congruentes, de modo que $m(\angle 2) = m(\angle B)$.

Substituindo essas igualdades na expressão de $m(\angle ACD)$, obtemos

$$m(\angle ACD) = m(\angle 1) + m(\angle 2) = m(\angle A) + m(\angle B).$$

Assim, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes. Em particular, como $m(\angle A) > 0$ e $m(\angle B) > 0$, segue que $m(\angle ACD) > m(\angle A)$ e $m(\angle ACD) > m(\angle B)$. Logo, em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é maior do que a medida de cada um dos ângulos internos não adjacentes a ele. \square

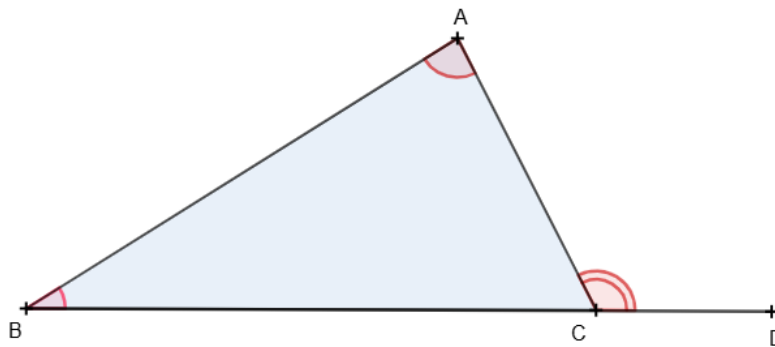


Figura 17 - Ângulo externo ($\angle ACD$) de um triângulo $\triangle ABC$ e seus ângulos internos não adjacentes.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Essa formulação, presente em obras didáticas de geometria elementar (DOLCE; POMPEO, 2013), pode ser demonstrada por meio de construções auxiliares e aplicação de casos de congruência de triângulos. A demonstração detalhada é apresentada na sequência, fundamentando-se na estrutura axiomática discutida em Euclides (2009) e em adaptações contemporâneas (COSTA et al., 2012).

A partir desse teorema, obtêm-se consequências importantes:

Proposição.

A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .

Demonstração. Considere um triângulo ABC e tome, sem perda de generalidade, os ângulos internos $\angle A$ e $\angle B$. Sejam $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ as medidas dos ângulos internos do triângulo, com $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Construa o ângulo externo em C , isto é, o ângulo cuja medida é suplementar à de $\angle C$. Denotando esse ângulo externo por $\angle C_{\text{ext}}$, temos $\angle C_{\text{ext}} = 180^\circ - \angle C$. Pelo teorema do ângulo externo, a medida de $\angle C_{\text{ext}}$ é maior do que a medida de cada um dos ângulos internos não adjacentes, isto é, $\angle C_{\text{ext}} > \angle A$ e $\angle C_{\text{ext}} > \angle B$. Por outro lado, como $\angle C_{\text{ext}} = \angle A + \angle B$ (ângulo externo igual à soma dos internos não adjacentes), temos

$$\angle A + \angle B = \angle C_{\text{ext}} < 180^\circ.$$

Portanto, a soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180° . \square

Como desdobramento, tem-se ainda:

Corolário 1.

Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um triângulo em que apenas um dos ângulos internos é agudo e os outros dois não são agudos (isto é, são retos ou obtusos). Se chamarmos esses dois ângulos de $\angle A$ e $\angle B$, então $\angle A \geq 90^\circ$ e $\angle B \geq 90^\circ$. Logo,

$$\angle A + \angle B \geq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

o que contradiz a proposição anterior, segundo a qual a soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180° . Assim, não é possível que um triângulo tenha dois ângulos não agudos. Consequentemente, em todo triângulo, pelo menos dois ângulos internos são agudos. \square

Corolário 2.

Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira reta r , então m e n não se interceptam.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que duas retas distintas m e n sejam ambas perpendiculares a uma reta r e que, ainda assim, se interceptem em um ponto P . Nesse caso, o ponto P pertence simultaneamente a m e a n . Como as duas retas são perpendiculares a r , os ângulos formados em P com r seriam todos retos, de medida 90° . Se m e n se interceptassem, teríamos, então, um triângulo com dois ângulos internos retos

(os ângulos em P formados com r), o que é impossível, pois isso implicaria que a soma de dois ângulos internos do triângulo fosse, no mínimo, 180° , contrariando o resultado anterior de que a soma de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180° . Logo, m e n não podem se interceptar. \square

Proposição.

Por um ponto fora de uma reta passa uma e somente uma reta perpendicular à reta dada.

Demonstração (existência). Seja m uma reta e A um ponto fora de m . Construa a circunferência de centro em A e raio suficientemente grande para interceptar a reta m em dois pontos distintos, que chamaremos de B e C . Seja M o ponto médio do segmento \overline{BC} . Construa, então, a reta r passando por A e M . Como M é o ponto médio de \overline{BC} e os pontos B e C pertencem à circunferência de centro A , os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} são congruentes. Como M é o ponto médio de \overline{BC} e os pontos B e C pertencem à circunferência de centro A , os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} são congruentes. Em Geometria Euclidiana, admite-se o resultado clássico de que, em uma circunferência, o segmento que une o centro ao ponto médio de uma corda é perpendicular a essa corda. Assim, a reta r , ao ligar o centro A ao ponto médio M da corda \overline{BC} , é perpendicular a \overline{BC} . Como \overline{BC} está contida em m , concluímos que r é perpendicular a m .

Unicidade. Suponha agora, por absurdo, que existam duas retas distintas r_1 e r_2 , ambas passando por A e ambas perpendiculares à mesma reta m . Se r_1 e r_2 fossem distintas, formariam um ângulo não nulo em A . Escolhendo um ponto P em m e traçando segmentos até as interseções com r_1 e r_2 , obteríamos um triângulo em que dois ângulos internos seriam retos (pelas perpendicularidades com m), o que é impossível pelos resultados anteriores sobre a soma de ângulos internos. Logo, não pode haver duas retas distintas passando por A e perpendiculares a m ; a perpendicular é única. \square

Esses resultados, cuja prova repousa em propriedades básicas de ângulos, na soma de ângulos em uma volta completa e no teorema do ângulo externo, são usados mais adiante para justificar propriedades de quadriláteros e garantir unicidade de determinadas construções geométricas (COSTA et al., 2012; DOLCE; POMPEO, 2013).

5.2.2 Relação entre lados e ângulos opostos

Um segundo grupo de desigualdades diz respeito à comparação entre comprimentos de lados e medidas de ângulos opostos. Intuitivamente, espera-se que “o maior lado esteja sempre diante do maior ângulo”, o que é formalizado nos resultados seguintes.

Teorema.

Em todo triângulo, o maior lado opõe-se ao maior ângulo, e o menor lado opõe-se ao menor ângulo.

Demonstração (esboço). Seja ABC um triângulo. Primeiro, suponha que dois lados não sejam congruentes, por exemplo $AB > AC$. Vamos mostrar que o ângulo oposto ao maior lado é maior, isto é, $\angle C > \angle B$. Sobre a semirreta com origem em A e passando por C , marque um ponto D tal que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. Assim, o triângulo ABD é isósceles e, portanto, os ângulos na base são congruentes: $\angle ABD \cong \angle BDA$. Usando o fato de que $\angle ACD$ é ângulo externo do triângulo ABD , obtemos, pelo teorema do ângulo externo, que $\angle ACD > \angle ABD$. Como $\angle C$ contém $\angle ACD$ e $\angle B$ contém $\angle ABD$, conclui-se que $\angle C > \angle B$, isto é, ao maior lado \overline{AB} se opõe o maior ângulo $\angle C$. Reciprocamente, suponha que dois ângulos não sejam congruentes, por exemplo $\angle C > \angle B$. Vamos mostrar que o lado oposto ao maior ângulo também é maior, isto é, $AB > AC$. Se fosse $AB \leq AC$, poderíamos considerar dois casos: $AB = AC$, o que tornaria o triângulo isósceles com $\angle C = \angle B$, contradizendo $\angle C > \angle B$; ou $AB < AC$, e pelo caso já demonstrado (maior lado \leftrightarrow maior ângulo) teríamos $\angle C < \angle B$, o que também é uma contradição. Logo, deve ocorrer $AB > AC$. De forma análoga, argumentando para os demais pares de lados e ângulos, obtém-se que, em qualquer triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo. \square

Em termos de notação, se a , b e c são, respectivamente, os comprimentos dos lados opostos aos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , então $a > b \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{B}$, $a > c \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{C}$, e analogamente para as demais comparações.

Do ponto de vista didático, esse teorema dá suporte à interpretação de várias situações exploradas em ambiente dinâmico: ao arrastar os vértices de um triângulo no

GeoGebra, o estudante percebe que, quando um lado passa a ser o maior, o ângulo oposto a ele também se torna o maior, o que favorece a formulação de conjecturas do tipo “lado maior \rightarrow ângulo maior”. A validação dessa regularidade, por meio de argumentação dedutiva, configura um exemplo de problema não rotineiro em que o aluno precisa articular observação, experimentação e prova (DANTE, 2010).

5.2.3 Desigualdade triangular

Por fim, a desigualdade triangular estabelece uma condição necessária, e bem conhecida, para que três segmentos possam formar um triângulo.

Teorema (Desigualdade triangular).

Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.

Demonstração: Dado um triângulo $\triangle ABC$. Vamos mostrar que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$.

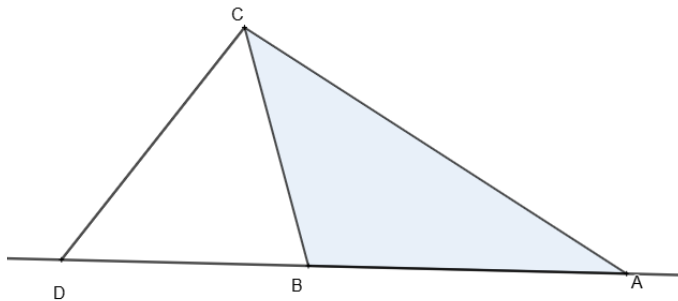


Figura 18 - Construção auxiliar para a desigualdade triangular em $\triangle ABC$.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Considere o ponto D na semirreta \overrightarrow{AB} tal que $\overline{BD} = \overline{BC}$. Portanto, o triângulo $\triangle BCD$ é isósceles de base \overline{CD} . Logo, $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$ (1).

Como $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$, então D, B e A são colineares e a semirreta \overrightarrow{CB} divide o ângulo \widehat{ACD} . Portanto $\widehat{ACD} > \widehat{BCD}$ (2).

De (1) e (2) temos que, no triângulo $\triangle ACD$, $\widehat{ACD} > \widehat{BCD}$. Mas pela proposição anterior temos que ao maior ângulo opõe-se o maior lado, ou seja, $\overline{AD} > \overline{AC}$. Mas $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}$ e, portanto, $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$.

Em termos geométricos, essa desigualdade expressa que, para “fechar” um triângulo, cada lado precisa ser menor que a soma dos outros dois; caso contrário, a construção não forma triângulo, mas um segmento “esticado”. Essa interpretação é coerente com o enunciado clássico da desigualdade triangular na Geometria Euclidiana, em que cada lado de um triângulo é estritamente menor do que a soma dos outros dois.

Em notação, se a , b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, então

$$a + b > c, a + c > b, b + c > a.$$

Na demonstração usual, considerada em textos de geometria elementar (DOLCE; POMPEO, 2013), parte-se de um triângulo dado e mostra-se explicitamente, caso a caso, que cada lado é menor que a soma dos outros dois, usando construções auxiliares e argumentos de comparação de segmentos. A desigualdade triangular também é frequentemente empregada no sentido inverso: dados três segmentos de comprimentos a , b e c , se alguma das desigualdades acima não for satisfeita, então não é possível construir um triângulo com esses comprimentos.

Esse tipo de raciocínio é amplamente explorado em livros didáticos e materiais de apoio no Ensino Fundamental e Médio, tanto em atividades com régua e compasso quanto em tarefas com geometria dinâmica (DOLCE; POMPEO, 2013; BRASIL, 2017). No contexto da BNCC, a habilidade EF07MA24 prevê explicitamente a construção de triângulos, o reconhecimento da condição de existência quanto à medida dos lados e a verificação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, o que inclui, na prática de sala de aula, o trabalho sistemático com a desigualdade triangular.

Nas tarefas propostas com o GeoGebra, a desigualdade triangular pode ser mobilizada quando os estudantes experimentam diferentes combinações de comprimentos para construir triângulos (por exemplo, fixando dois lados e variando o terceiro). Ao constatar, por tentativa e erro no software, que certos trios de segmentos “não fecham” a figura, os estudantes são levados a sistematizar as condições de existência de triângulos e a relacioná-las com o teorema. Tais atividades exemplificam a resolução de problemas como meio de aprendizagem, e não apenas como etapa final de aplicação de um conteúdo previamente exposto (DANTE, 2010).

Em síntese, as desigualdades geométricas sistematizadas nesta subseção não constituem apenas resultados abstratos da Geometria Euclidiana, mas um repertório conceitual que orienta a leitura crítica das configurações produzidas no GeoGebra e sustenta

a formulação e a testagem de conjecturas pelos estudantes. Ao reconhecerem, por exemplo, que o ângulo externo é sempre maior do que cada um dos internos não adjacentes, ou que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° , os alunos dispõem de critérios para validar ou refutar as regularidades que emergem nas atividades investigativas do Capítulo 6, aproximando-se do estilo de conjectura–teste–justificativa característico da investigação matemática e favorecendo o desenvolvimento das habilidades EF07MA21, EF07MA22 e EF07MA24 de forma articulada.

De forma geral, os teoremas sobre ângulo externo, soma das medidas dos ângulos internos, relação entre lados e ângulos opostos e desigualdade triangular estruturam um raciocínio que vai além do cálculo: permitem ao estudante decidir se um triângulo pode ser construído, prever o tipo de triângulo a partir de dados de lado ou de ângulo e explicar por que certos desenhos são ou não possíveis. No contexto das atividades do Capítulo 6, esses resultados sustentam tarefas em que os alunos, ao arrastar vértices de triângulos no GeoGebra, testam combinações de medidas, comparam esboços “impossíveis” com configurações realizáveis e justificam, em linguagem matemática, as restrições observadas. Do ponto de vista da BNCC, esse conjunto trabalha diretamente com EF07MA24 e, de maneira articulada, com EF07MA21, ao vincular propriedades de triângulos ao reconhecimento de polígonos e à análise crítica de representações geométricas.

5.3 O Axioma das Paralelas e propriedades de retas paralelas

O axioma das paralelas e as propriedades de retas paralelas cortadas por uma transversal ocupam lugar central na Geometria Plana, pois permitem controlar o comportamento de ângulos e distâncias em configurações amplamente utilizadas no estudo de polígonos. Na BNCC, esse conteúdo se relaciona, no 7º ano, à habilidade EF07MA22, que envolve o uso de instrumentos de desenho e de softwares para construir figuras, incluindo retas paralelas e perpendiculares, e, no 8º ano, à habilidade EF08MA14, que prevê o uso da congruência de triângulos para demonstrar propriedades de quadriláteros em situações que frequentemente recorrem a feixes de paralelas (BRASIL, 2017).

Nesta subseção, o axioma das paralelas é retomado em sua forma clássica, seguido da classificação dos ângulos determinados por uma transversal e de corolários que estabelecem relações entre soma de ângulos em triângulos e quadriláteros. Esses resultados fornecem a

base dedutiva tanto para o estudo da soma das medidas dos ângulos internos de polígonos quanto para a caracterização de quadriláteros notáveis, tópicos diretamente mobilizados nos módulos de triângulos e de quadriláteros do Capítulo 6 em tarefas com o GeoGebra.

O axioma das paralelas é um dos elementos estruturantes da Geometria Euclidiana. Na forma adotada aqui, ele afirma que, por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela a essa reta. A partir desse enunciado, derivam-se propriedades sobre ângulos formados por transversais e sobre a soma das medidas dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros, amplamente exploradas no estudo de polígonos.

5.3.1 Axioma das paralelas e unicidade

Adota-se o seguinte enunciado para o axioma das paralelas, em linha com exposições didáticas de geometria elementar:

Axioma 2 (Axioma das paralelas).

Por um ponto fora de uma reta m passa uma única reta paralela à reta m .

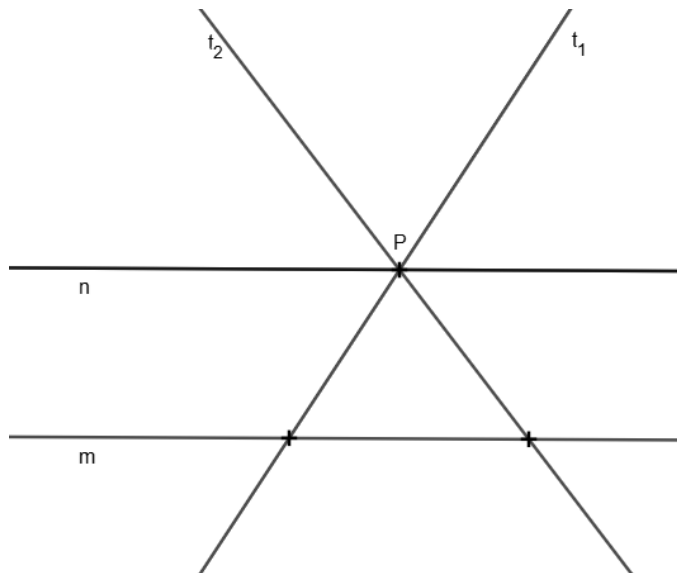


Figura 19 - Representação do axioma das paralelas, evidenciando a unicidade da reta paralela que passa por um ponto fora de uma dada reta.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

A existência de pelo menos uma paralela por um ponto dado fora da reta é garantida por construções clássicas com régua e compasso; o axioma enfatiza a unicidade dessa

paralela. Essa unicidade distingue a Geometria Euclidiana de outras geometrias não euclidianas, nas quais, por exemplo, podem passar infinitas paralelas por um mesmo ponto.

A partir do Axioma das Paralelas, obtêm-se propriedades importantes sobre feixes de retas paralelas, das quais destacamos as duas seguintes:

Proposição 5.3.1.

Se duas retas distintas n_1 e n_2 são paralelas a uma mesma reta m , então n_1 e n_2 são paralelas entre si.

Demonstração: Vamos supor que m seja paralela a n_1 e n_2 , $n_1 \neq n_2$ e que n_1 não seja paralela a n_2 .

Como n_1 e n_2 não são coincidentes e não são paralelas, então elas têm um ponto em comum P . Mas pelo ponto P estão passando duas retas n_1 e n_2 , que são distintas e paralelas a uma mesma reta m . O que contradiz o Axioma 2.



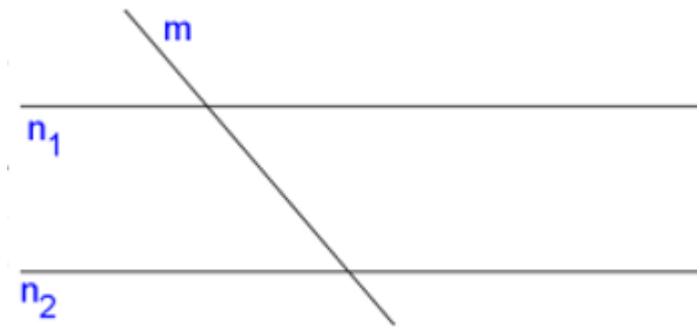
Proposição 5.3.2.

Se uma reta m corta uma de duas retas paralelas, n_1 e n_2 , então corta também a outra.

Demonstração:

Vamos supor que n_1 seja paralela a n_2 , m corta n_1 mas não corta n_2 .

Como m não corta n_2 então m e n_2 são paralelas. Assim, n_2 é paralela a m e a n_1 . Pela proposição anterior, temos que m e n_1 são paralelas, o que contradiz a hipótese. Logo, m também corta n_2 .



5.3.2 Ângulos determinados por uma transversal

Quando duas retas (paralelas ou não) são cortadas por uma transversal, formam-se oito ângulos, usualmente classificados em pares: correspondentes, alternos internos, alternos externos, colaterais internos e colaterais externos. Essa classificação é padrão em manuais de Ensino Fundamental e Médio, como Dolce e Pompeo (2013), e é retomada na BNCC quando se propõe, no 7º ano, o uso de instrumentos de desenho e de softwares para construir e analisar retas paralelas e perpendiculares (EF07MA22), e, no 8º ano, o estudo de quadriláteros com apoio em relações angulares e em congruência de triângulos (EF08MA14) (BRASIL, 2017).

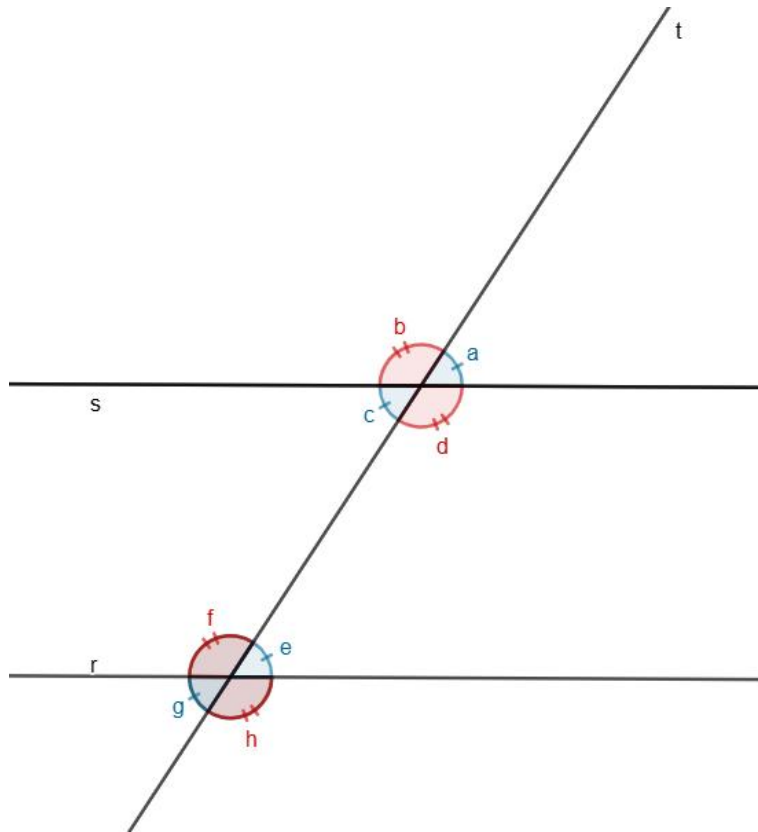


Figura 20 - Classificação e relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Nessa perspectiva, os pares de ângulos determinados por uma transversal são definidos e estudados de modo a explicitar que, no caso de retas paralelas, certos pares são congruentes (como os alternos internos e os correspondentes) e outros são suplementares (como os colaterais internos). Tais relações servirão de base, nas subseções seguintes, para justificar propriedades sobre a soma das medidas dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros e, mais adiante, para caracterizar quadriláteros notáveis no módulo de quadriláteros do Capítulo 6, articulando o estudo de paralelismo com o de polígonos em ambiente de Geometria Dinâmica.

5.3.3 Corolários sobre soma de ângulos

Com base no axioma das paralelas e nas propriedades dos ângulos determinados por uma transversal, destacam-se alguns corolários que serão usados na análise de triângulos e quadriláteros:

- a soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90° ;
- cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60° ;
- a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

Esses resultados aparecem de forma sistematizada em livros de geometria plana e de matemática elementar, como Costa et al. (2012) e Dolce e Pompeo (2013), e são consequências diretas do fato de que, na Geometria Euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° . Neste trabalho, funcionam como peças intermediárias: são retomados posteriormente na discussão sobre a soma das medidas dos ângulos internos de polígonos em geral e na caracterização de quadriláteros notáveis, especialmente no módulo de quadriláteros do Capítulo 6.

Do ponto de vista curricular, esses corolários dialogam diretamente com a habilidade EF07MA24 da BNCC, que prevê a verificação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e a análise de condições de existência a partir de medidas de lados, bem como com EF07MA21, ao apoiar o reconhecimento e a classificação de polígonos a partir de suas propriedades angulares (BRASIL, 2017).

Do ponto de vista didático, alimentam vários tipos de problemas: desde tarefas de cálculo de ângulos em figuras com retas paralelas até investigações em GeoGebra em que os alunos arrastam vértices de triângulos e quadriláteros e percebem que certas somas se mantêm invariantes, mesmo quando a figura é deformada. Nas atividades do Capítulo 6, por exemplo, essas invariâncias emergem quando os estudantes exploram triângulos e quadriláteros em ambiente de geometria dinâmica e, em seguida, são convidados a justificar, em linguagem matemática, por que as somas se preservam, aproximando-se do ciclo conjectura–teste–justificativa discutido por Dante (2010).

5.3.4 Distância entre paralelas

Um último resultado desta subseção formaliza a ideia intuitiva de que “retas paralelas nunca se aproximam nem se afastam”: se duas retas são paralelas, todos os pontos de uma delas estão à mesma distância da outra, e, reciprocamente, se todos os pontos de uma reta estão à mesma distância de outra, então essas retas são paralelas. Esse teorema, presente em exposições clássicas de geometria plana, é usualmente demonstrado com auxílio de triângulos congruentes e de perpendiculares comuns traçadas a partir de pontos de uma das retas até a outra. Em ambiente de Geometria Dinâmica, essa propriedade pode ser explorada ao se arrastar um ponto sobre uma reta e observar, por meio de medições no GeoGebra, que a distância a uma reta paralela permanece constante.

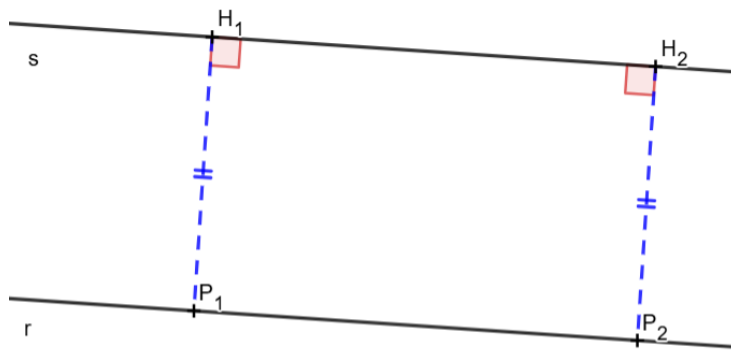


Figura 21 - Distância entre duas retas paralelas e equidistância de pontos.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Teorema 5.3.3 (Distância entre paralelas).

Se duas retas r e s são paralelas, então qualquer ponto de r está à mesma distância de s ; reciprocamente, se todos os pontos de uma reta r estão à mesma distância de uma reta s , então r e s são paralelas.

Neste trabalho, esse resultado é tomado como teorema clássico da Geometria Euclidiana, derivado do axioma das paralelas e de propriedades de triângulos, e é usado sobretudo para interpretar e justificar construções envolvendo perpendiculares e distâncias entre retas.

Do ponto de vista desta dissertação, essa propriedade contribui para:

- interpretar construções em que se usam perpendiculares e distâncias entre retas no GeoGebra;

- fundamentar atividades que envolvem faixas, ruas paralelas, grades ou pisos representados por retas equidistantes;
- articular conceitos de distância, perpendicularidade e paralelismo em problemas geométricos.

Em termos metodológicos, problemas desse tipo se alinham à perspectiva de Dante (2010): o estudante é colocado diante de situações em que precisa articular observação, uso de medições (ou de ferramentas do software) e argumentação para concluir sobre o paralelismo ou não de duas retas, configurando problemas não rotineiros em que a prova emerge da análise de invariâncias geométricas.

Em resumo, o axioma das paralelas e as propriedades dos ângulos determinados por uma transversal permitem que o professor conduza os estudantes de uma leitura essencialmente visual das figuras para a justificação formal de por que certos ângulos são congruentes e por que determinadas retas são ou não paralelas. Em ambiente de Geometria Dinâmica, isso se traduz em tarefas em que os alunos manipulam transversais sobre feixes de paralelas, verificam a preservação das medidas de ângulos correspondentes, alternos internos e colaterais internos e utilizam esses fatos para deduzir resultados como a soma das medidas dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros, bem como para caracterizar quadriláteros notáveis. Do ponto de vista curricular, esse bloco de resultados se articula diretamente com as habilidades EF07MA22 e EF08MA14 da BNCC, ao estimular que os estudantes usem instrumentos de desenho e softwares de geometria dinâmica para construir, analisar e demonstrar propriedades de triângulos e quadriláteros em situações de resolução de problemas (BRASIL, 2017).

5.4 Paralelogramo e resultados associados

Os paralelogramos constituem uma classe de quadriláteros que sintetiza várias ideias centrais da Geometria Plana: paralelismo, congruência de triângulos, simetrias e proporcionalidade. Na educação básica, o estudo de retângulos, losangos e quadrados, frequentemente introduzidos como casos particulares de paralelogramos, está associado à habilidade EF07MA21 (reconhecer e comparar polígonos e suas propriedades) e, de forma

mais sistemática, à EF08MA14, que prevê a demonstração de propriedades de quadriláteros utilizando congruência de triângulos e relações métricas (BRASIL, 2017).

Nesta subseção, organizam-se resultados sobre diagonais, paralelismo de lados opostos e relações em segmentos determinados por feixes de paralelas, culminando no Teorema de Tales como síntese da interação entre paralelogramos, triângulos e proporcionalidade. Esse núcleo teórico será mobilizado, no módulo de quadriláteros do Capítulo 6, para sustentar atividades em que retângulos, losangos e quadrados são construídos e manipulados no GeoGebra, permitindo aos estudantes observarem invariantes e formular conjecturas sobre propriedades de lados, ângulos e diagonais.

5.4.1 Definição e propriedades básicas

Adota-se a seguinte definição:

Definição.

Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

A partir dela, apresentam-se três propriedades fundamentais:

- lados e ângulos opostos são congruentes: em todo paralelogramo, os lados opostos têm o mesmo comprimento, e os ângulos opostos têm a mesma medida;
- as diagonais se interceptam no ponto médio: as diagonais de um paralelogramo cortam-se em um ponto que é o ponto médio de cada uma delas;
- caracterizações recíprocas:
 - se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo;
 - se dois lados opostos de um quadrilátero são, ao mesmo tempo, congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

As demonstrações dessas propriedades apoiam-se em:

- congruência de triângulos (especialmente o caso LAL);
- propriedades de retas paralelas cortadas por uma transversal (ângulos alternos internos, correspondentes etc.);
- fatos sobre soma de ângulos internos e externos.

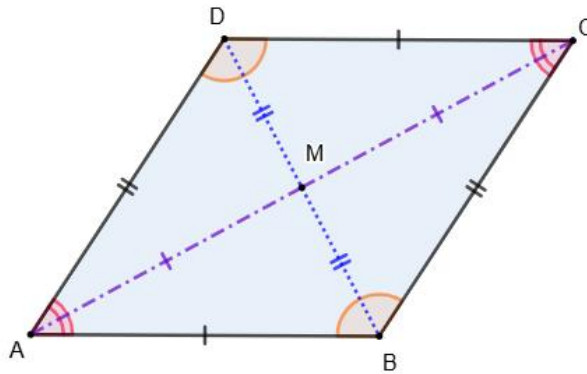


Figura 22 - Propriedades fundamentais de um paralelogramo, ilustrando lados, ângulos e diagonais.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

5.4.2 Segmento que liga pontos médios e feixes de paralelas

Na sequência, são considerados resultados que, embora enunciados para triângulos e feixes de retas, estão intimamente ligados ao estudo de paralelos e quadriláteros, constituindo ferramentas importantes para problemas geométricos:

Teorema do segmento que liga pontos médios:

No triângulo, o segmento que liga os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro lado e tem metade do seu comprimento;

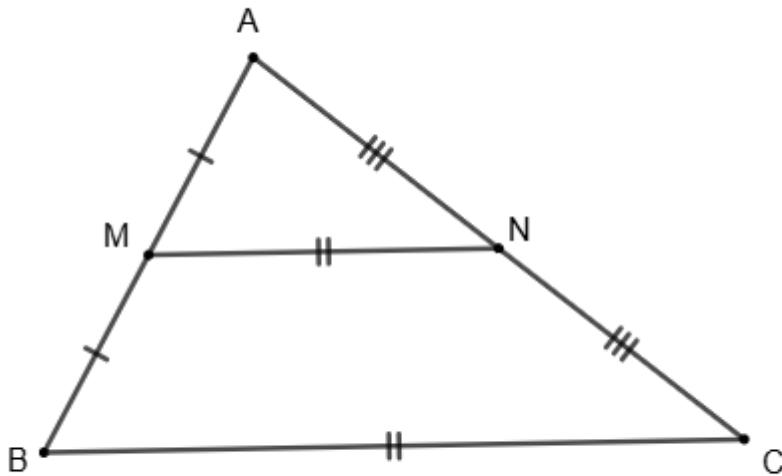


Figura 23 - Segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo ($\triangle ABC$), paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Proposição.

Se três retas paralelas cortam duas retas quaisquer, determinando segmentos AB , BC em uma e $A'B'$, $B'C'$ na outra, então $AB = BC$ implica $A'B' = B'C'$.

Corolário (versão generalizada).

Um feixe de k retas paralelas corta duas retas quaisquer em segmentos correspondentes proporcionais.

Esses resultados aparecem, em termos de proporcionalidade, em Dolce e Pompeo (2013) como preparação para o Teorema de Tales e para a teoria de semelhança de triângulos. Neste trabalho, esses resultados já estão demonstrados com base em congruência de triângulos e propriedades de retas paralelas, o que garante consistência com os axiomas e teoremas discutidos nas subseções anteriores.

Do ponto de vista didático, esses teoremas permitem propor problemas em que os estudantes:

- constroem triângulos e determinam pontos médios de lados, verificando no GeoGebra que o segmento que os liga é sempre paralelo ao terceiro lado e tem metade do seu comprimento;

- exploram feixes de paralelas cortando duas retas, observando que, ao deslocar a posição das retas, as razões entre segmentos correspondentes se mantêm constantes.

Essas tarefas se alinham ao que Dante (2010) descreve como resolução de problemas que exigem experimentação, formulação de conjecturas e argumentação, e não apenas aplicação imediata de fórmulas conhecidas.

5.4.3 Teorema de Tales como síntese

A partir das propriedades anteriormente estabelecidas, enuncia-se e demonstra-se o Teorema de Tales em sua forma clássica:

Teorema de Tales.

Um feixe de retas paralelas divide um feixe de retas concorrentes em segmentos proporcionais.

Esboço de demonstração. Considere duas retas concorrentes s e t que se intersectam em um ponto O , e três retas paralelas que cortam s nos pontos A, B, C e t nos pontos A', B', C' , nessa ordem. Queremos mostrar que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Suponha inicialmente que os segmentos sejam comensuráveis, isto é, que existam inteiros m e n tais que AB e BC possam ser decompostos em m e n subsegmentos congruentes. Marcando sobre se t múltiplos inteiros de um segmento unitário adequado, construímos uma malha de triângulos congruentes, em que cada paralela passa por vértices de triângulos congruentes. A contagem de quantos desses triângulos estão contidos em AB , BC , $A'B'$ e $B'C'$ mostra que as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{A'B'}{B'C'}$ são iguais.

No caso em que os segmentos não são comensuráveis, aproxima-se cada comprimento por segmentos comensuráveis, aplicando o argumento anterior e passando ao limite. Assim, obtém-se a igualdade das razões em toda generalidade. \square

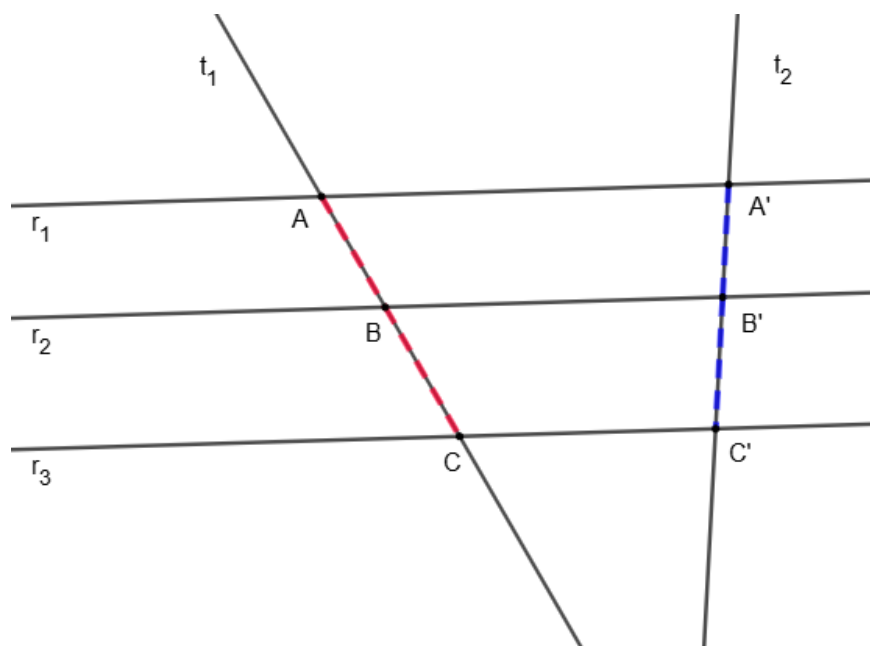


Figura 24 - Ilustração do Teorema de Tales, mostrando a proporcionalidade dos segmentos determinados por retas paralelas em duas transversais.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Na perspectiva curricular, o Teorema de Tales e os resultados associados aos paralelogramos constituem um núcleo central da Geometria nos Ensino Fundamental – Anos Finais, pois articulam paralelismo, proporcionalidade e semelhança em problemas que envolvem medidas de segmentos, escalas e interpretações gráficas. Em ambiente de sala de aula, isso se concretiza em situações em que os estudantes precisam compreender por que um feixe de retas paralelas determina segmentos proporcionais em duas transversais, explicar relações entre diagonais e lados de paralelogramos e utilizar essas ideias para resolver problemas contextualizados em malhas, plantas e representações de figuras planas. Em alinhamento com a BNCC, as propriedades dos paralelogramos e o Teorema de Tales dialogam diretamente com as habilidades EF07MA21 e EF08MA14, na medida em que permitem aos estudantes reconhecer, comparar e classificar quadriláteros com base em seus lados, ângulos, diagonais e simetrias e, em seguida, demonstrar formalmente essas propriedades por meio da decomposição em triângulos congruentes e de argumentos de proporcionalidade. Nas atividades propostas com GeoGebra no módulo de quadriláteros do Capítulo 6, esses resultados sustentam tarefas em que os alunos constroem paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados, exploram feixes de paralelas cortando retas concorrentes e analisam a invariância das razões entre segmentos correspondentes, desenvolvendo o raciocínio geométrico esperado nos Ensino Fundamental – Anos Finais.

5.5 Semelhança de triângulos

A noção de semelhança de triângulos amplia a ideia de congruência ao permitir comparar figuras que têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho, estabelecendo relações de proporcionalidade entre lados correspondentes e igualdade de ângulos. Na BNCC, esse tema aparece articulado ao estudo de proporcionalidade e escalas, e está ligado a habilidades como EF08MA14, que trata da demonstração de propriedades de quadriláteros, e a habilidades relativas ao uso de semelhança em problemas de ampliação, redução e interpretação de plantas, mapas e gráficos (BRASIL, 2017).

Nesta subseção, definem-se triângulos semelhantes, introduz-se a razão de semelhança e apresentam-se casos clássicos (AA, LAL, LLL), que reduzem a quantidade de informações necessárias para concluir a semelhança entre triângulos. Esses resultados são essenciais para o módulo de triângulos do Capítulo 6, em que estudantes trabalham com construções em GeoGebra que envolvem feixes de paralelas, ampliação e redução de figuras e interpretação de escalas, bem como para o módulo de quadriláteros, no qual semelhança aparece associada a retângulos, quadrados e trapézios isósceles.

5.5.1 Definição e razão de semelhança

Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ dizem-se semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices tal que:

- os ângulos correspondentes são congruentes;
- as razões entre os comprimentos dos lados correspondentes são constantes.

Nessa situação, escreve-se

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

e a constante

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

é denominada razão de semelhança (ou fator de escala). Esse tratamento é compatível com o que se encontra em exposições de geometria plana voltadas ao Ensino Médio (DOLCE; POMPEO, 2013; COSTA et al., 2012).

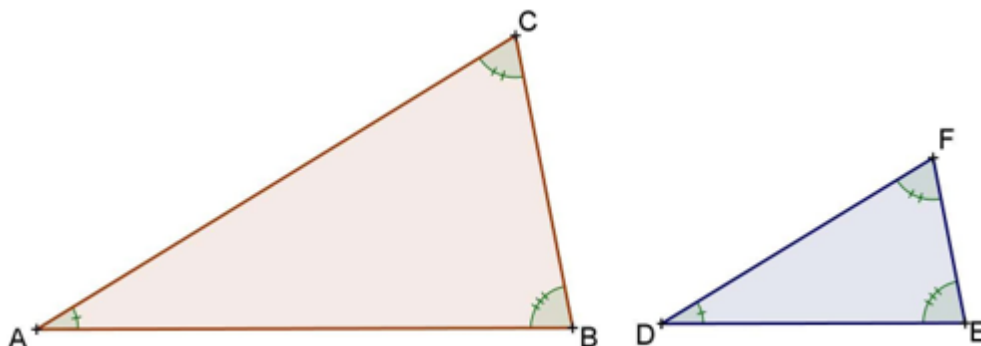


Figura 25 - Triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, ilustrando a preservação dos ângulos e a proporcionalidade dos lados correspondentes.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

No ambiente de geometria dinâmica, a razão de semelhança pode ser explorada pedindo-se aos estudantes que construam triângulos “ampliados” ou “reduzidos” a partir de um triângulo inicial, medindo os lados correspondentes e verificando que as razões se mantêm constantes mesmo quando a figura é deformada por arraste.

5.5.2 Casos de semelhança de triângulos

Assim como na congruência, não é necessário verificar todos os lados e ângulos para concluir que dois triângulos são semelhantes. Em livros de geometria voltados ao Ensino Fundamental e Médio, são apresentados casos de semelhança (ou critérios) que reduzem esse trabalho a um número menor de informações (DOLCE; POMPEO, 2013; UFPR, s.d.).

Os casos adotados nesta dissertação são:

- Ângulo–Ângulo (AA): se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.
- Lado–Ângulo–Lado (LAL): se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados de outro triângulo e o ângulo compreendido entre esses lados é congruente, então os triângulos são semelhantes.

- Lado–Lado–Lado (LLL): se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

As demonstrações dos casos de semelhança podem ser construídas a partir de aplicações do Teorema de Tales, do uso de triângulos auxiliares e de argumentos de congruência, em consonância com o tratamento clássico apresentado em Dolce e Pompeo (2013). Do ponto de vista curricular, esses critérios sustentam o trabalho com proporcionalidade, escalas e semelhança de figuras nos Ensino Fundamental – Anos Finais, em especial no 8º ano, e serão retomados nas atividades com GeoGebra do Capítulo 6, quando os estudantes investigam ampliação e redução de figuras, mapas e plantas em diferentes escalas

5.5.3 Aplicações e articulação com GeoGebra

A partir dos casos de semelhança, diversos resultados podem ser estabelecidos, tais como:

- relações métricas em triângulos que compartilham ângulos;
- comparação de áreas de figuras semelhantes;
- justificativa de propriedades que surgem em feixes de paralelas, quando triângulos formados são semelhantes.

No GeoGebra, essas ideias podem ser exploradas em atividades em que:

- os estudantes constroem triângulos com dois ângulos fixos e arrastam um vértice, observando que a forma do triângulo se preserva (caso AA);
- constroem triângulos a partir de lados proporcionais sobre retas concorrentes cortadas por paralelas (casos LAL e LLL);
- analisam situações de ampliação/redução de figuras e escalas, conectando triângulos semelhantes a mapas, plantas baixas e problemas do ENEM que envolvem semelhança (DOLCE; POMPEO, 2013; COSTA et al., 2012).

Sob a perspectiva metodológica, esses contextos configuram problemas não rotineiros: o aluno não se limita a aplicar uma fórmula conhecida, mas precisa identificar padrões de proporcionalidade, formular conjecturas sobre a semelhança entre triângulos e

justificá-las, em consonância com a compreensão de resolução de problemas como eixo da aprendizagem matemática discutida por Dante (2010).

Em síntese, os casos de semelhança AA, LAL e LLL permitem justificar, de forma sistemática, por que certas figuras desenhadas em escalas diferentes preservam sua forma, por que triângulos determinados por feixes de paralelas são semelhantes e como relações métricas decorrem dessa semelhança. Nas atividades com GeoGebra descritas no Capítulo 6, isso se concretiza em tarefas em que os estudantes constroem triângulos com ângulos fixos e arrastam vértices (caso AA) ou constroem triângulos a partir de lados proporcionais sobre retas concorrentes cortadas por paralelas (casos LAL e LLL), analisando situações de ampliação e redução ligadas a mapas, plantas baixas e problemas de escalas. Esses contextos favorecem o desenvolvimento de habilidades previstas na BNCC para o 8º ano, especialmente aquelas relacionadas à proporcionalidade, à interpretação de escalas e à demonstração de propriedades geométricas em figuras planas (BRASIL, 2017), reforçando o papel da semelhança como ponte entre álgebra e geometria.

5.6 Relações métricas em triângulos retângulos

As relações métricas em triângulos retângulos – incluindo o Teorema de Pitágoras, suas recíprocas e as relações envolvendo projeções dos catetos sobre a hipotenusa – ocupam lugar central na Geometria escolar e na resolução de problemas que envolvem medidas de comprimento, distância e altura. A partir da semelhança de triângulos, é possível deduzir fórmulas que conectam lados, alturas e projeções, preparando o terreno para aplicações em contextos como diagonais de retângulos, rampas, distâncias inacessíveis e representações no plano cartesiano. Na BNCC, essas ideias dialogam com EF07MA24, que envolve a análise de condições de existência de triângulos, e são retomadas explicitamente no 9º ano, na habilidade EF09MA13, que trata da demonstração e aplicação do Teorema de Pitágoras em situações de cálculo de medidas (BRASIL, 2017).

Embora as relações métricas não sejam exploradas de forma plena no produto educacional descrito no Capítulo 6, a sua sistematização aqui tem dois objetivos: (i) indicar possibilidades de ampliação futura do módulo de triângulos com tarefas investigativas envolvendo alturas e distâncias; e (ii) explicitar o encadeamento lógico que liga semelhança de triângulos, proporcionalidade e cálculo de medidas em triângulos retângulos.

5.6.1 Teorema de Pitágoras

O resultado mais conhecido é o Teorema de Pitágoras:

Teorema de Pitágoras.

Em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Demonstração (via semelhança de triângulos). Considere um triângulo retângulo ABC , com ângulo reto em C , hipotenusa \overline{AB} e catetos \overline{AC} e \overline{BC} . Trace a altura relativa à hipotenusa a partir de C , encontrando o ponto H em \overline{AB} . Assim, obtemos dois triângulos retângulos menores, ACH e BCH , ambos semelhantes ao triângulo original ABC . Da semelhança entre ABC e ACH , obtemos a proporção

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{AC},$$

o que implica $AC^2 = AB \cdot CH$. De modo análogo, da semelhança entre ABC e BCH resulta

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CH}{BC},$$

isto é, $BC^2 = AB \cdot HB$. Somando essas duas igualdades, temos

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot CH + AB \cdot HB = AB \cdot (CH + HB) = AB \cdot AB = AB^2.$$

Logo, no triângulo retângulo ABC , o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. \square

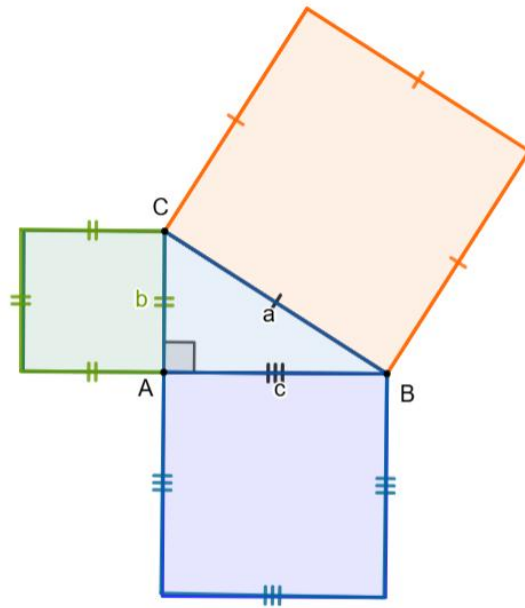


Figura 26 - Representação geométrica do Teorema de Pitágoras, mostrando a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Se a é a hipotenusa e b , c são os catetos, então

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Recíproca do Teorema de Pitágoras.

Se, em um triângulo, os comprimentos a , b , c dos lados satisfazem $c^2 = a^2 + b^2$, então o triângulo é retângulo, sendo c o lado oposto ao ângulo reto.

Essa recíproca é útil em problemas de classificação de triângulos a partir dos lados e em verificações de ortogonalidade em coordenadas cartesianas.

5.6.2 Projeções, altura e média geométrica

Considerando um triângulo retângulo, com hipotenusa c , catetos a e b , e altura h relativa à hipotenusa, que a divide em segmentos m e n , o texto sistematiza as seguintes relações métricas clássicas:

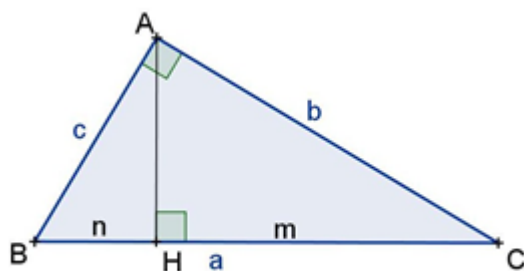


Figura 27 - Relações métricas em um triângulo retângulo, ilustrando a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

- $a^2 = c \cdot m$;
- $b^2 = c \cdot n$;
- $h^2 = m \cdot n$;
- $c \cdot h = a \cdot b$.

Essas identidades podem ser demonstradas por meio da semelhança entre os três triângulos retângulos que se formam (o triângulo original e os dois triângulos menores, determinados pela altura), procedimento padrão em exposições de geometria plana (COSTA et al., 2012; DOLCE; POMPEO, 2013).

Do ponto de vista conceitual, essas relações evidenciam a presença da média geométrica: por exemplo, a altura h é a média geométrica das projeções m e n , e cada cateto é média geométrica da hipotenusa com sua projeção. Esse tipo de interpretação, presente em manuais de geometria, enriquece a leitura dos resultados e permite conectar álgebra e geometria.

Nesta dissertação, privilegia-se uma abordagem baseada na semelhança de triângulos, destacando a coerência entre as relações métricas deduzidas e os casos de semelhança estudados na subseção anterior. Além do uso direto dessas relações para calcular medidas desconhecidas, considera-se também o emprego do Teorema de Pitágoras em sentido inverso, o que possibilita verificar se um triângulo é retângulo a partir das medidas de seus lados e, em particular, decidir sobre a existência de ângulos retos em determinadas configurações geométricas.

Assim, as relações métricas em triângulos retângulos, ao lado dos demais teoremas estudados neste capítulo, oferecem um panorama consistente para a análise de problemas de medida e para a transição entre representações geométricas e algébricas. Do ponto de vista curricular, esse conjunto de relações dialoga diretamente com as habilidades EF07MA24 e

EF09MA13 da BNCC, articulando visualização, experimentação com GeoGebra e argumentação e justificativa em um cenário de investigação matemática (BRASIL, 2017). Nas atividades do Capítulo 6, esse bloco pode ser mobilizado em futuras extensões do módulo de triângulos, em tarefas que envolvam cálculo de alturas, diagonais e distâncias inacessíveis por meio do Teorema de Pitágoras e de outras relações métricas em triângulos retângulos.

5.7 Lugares geométricos

Na Geometria Plana elementar, muitos conjuntos de pontos podem ser descritos por propriedades geométricas simples, como “pontos equidistantes de dois pontos dados” ou “pontos que mantêm distância fixa de um ponto”. Esses conjuntos são chamados de lugares geométricos e incluem, entre outros, mediatrizes, bissetrizes de ângulos e circunferências. Para os Ensino Fundamental – Anos Finais, a BNCC destaca a exploração de construções geométricas com instrumentos e softwares, como previsto em EF07MA22, que propõe construir circunferências, reconhecê-las como lugares geométricos e utilizá-las na resolução de problemas envolvendo objetos equidistantes, e, nos anos seguintes, o uso de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas (EF08MA15, EF08MA17) (BRASIL, 2017).

O conceito de lugar geométrico permite descrever conjuntos de pontos do plano que satisfazem uma mesma condição geométrica, como estar a igual distância de dois pontos ou de uma reta. Essa formalização, presente em documentos curriculares, materiais de formação docente e manuais de geometria elementar (COSTA et al., 2012; DOLCE; POMPEO, 2013), fornece uma linguagem precisa para tratar construções fundamentais na Educação Básica. Nesta subseção, apresentam-se exemplos básicos de lugares geométricos associados a triângulos (mediatrizes, bissetrizes) e à circunferência, com o objetivo de oferecer ao professor um repertório conceitual para interpretar construções dinâmicas em GeoGebra e propor problemas em que os estudantes descrevem, conjecturam e justificam conjuntos de pontos a partir de condições dadas.

5.7.1 Exemplos fundamentais

- Circunferência: conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância fixa r de um ponto fixo O (centro).

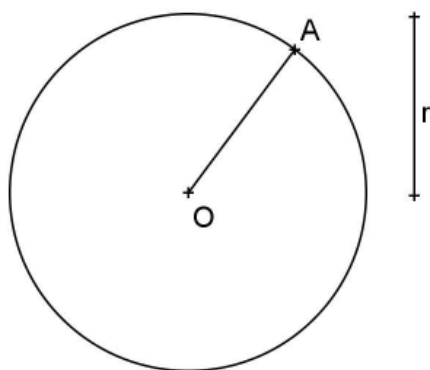


Figura 28 - A circunferência de centro O e raio r como lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto dado.

Fonte: Elaboração própria autora (2025).

- Mediatriz de um segmento: conjunto dos pontos do plano que são equidistantes das extremidades de um segmento dado.

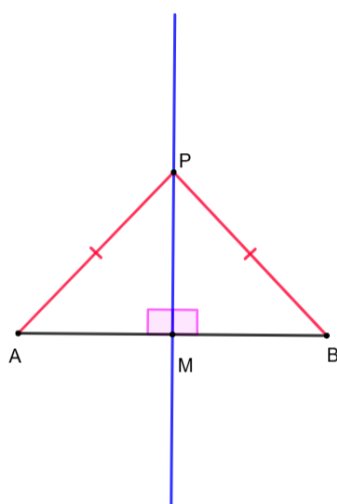


Figura 29 - A mediatriz de um segmento AB como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de suas extremidades.

Fonte: Elaboração própria autora (2025).

- Bissetriz de um ângulo: conjunto dos pontos do plano que são equidistantes dos lados de um ângulo.

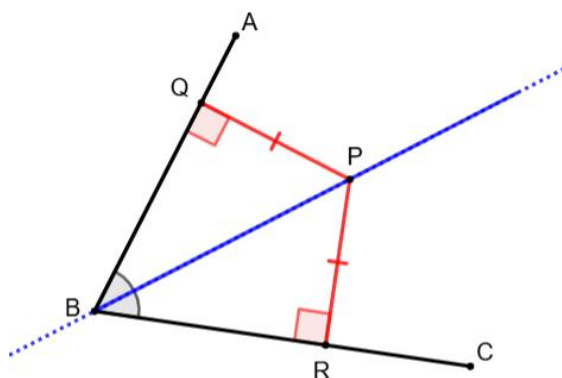


Figura 30 - A bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de seus lados.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

Cada um desses lugares geométricos é acompanhado de uma condição caracterizadora do tipo “se e somente se”, cuja demonstração se fundamenta em propriedades de triângulos isósceles, ângulos e perpendiculares, conforme se encontra em exposições de geometria plana para formação de professores (COSTA et al., 2012) e em manuais escolares (DOLCE; POMPEO, 2013).

Em síntese, o estudo de lugares geométricos oferece um vocabulário poderoso para descrever, em linguagem matemática, regiões e trajetórias que os estudantes frequentemente representam de forma intuitiva em desenhos e movimentações de pontos. Em ambiente de Geometria Dinâmica, isso se traduz em tarefas nas quais os alunos arrastam pontos sob certas restrições, registram as posições alcançadas e identificam, por exemplo, que o conjunto de pontos equidistantes de dois vértices forma uma mediatriz, ou que o conjunto de pontos equidistantes de um ponto fixo e de uma reta descreve uma parábola. Ainda que essas ideias apareçam apenas de maneira indireta nas atividades do Capítulo 6, elas ampliam o horizonte de uso do GeoGebra para além dos roteiros atuais, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades de construção, argumentação e generalização ligadas a EF07MA22 e a habilidades posteriores relacionadas à mediatriz e à bissetriz como lugares geométricos (EF08MA15, EF08MA17) e ao estudo de circunferência, simetria e transformações geométricas (BRASIL, 2017).

5.8 Quadriláteros notáveis

Quadriláteros como retângulos, losangos, quadrados e trapézios isósceles aparecem com frequência em contextos escolares e extraescolares: malhas quadriculadas, plantas arquitetônicas, pavimentações, estruturas metálicas, entre outros. Na BNCC, o estudo desses quadriláteros está diretamente relacionado à habilidade EF07MA21, que envolve reconhecer, nomear e comparar polígonos com base em seus lados, ângulos e simetrias, e à EF08MA14, que prevê demonstrar propriedades de quadriláteros a partir de triângulos congruentes e relações de paralelismo (BRASIL, 2017).

Os quadriláteros notáveis — em particular retângulos, losangos, quadrados e trapézios isósceles — são estudados, em textos de geometria plana para o Ensino Médio e em materiais de formação de professores, como refinamentos do paralelogramo e do trapézio, com destaque para propriedades de lados, ângulos e diagonais (COSTA et al., 2012; DOLCE; POMPEO, 2013). Nesta subseção, sistematizam-se essas propriedades, enfatizando a maneira como essas figuras podem ser decompostas em triângulos, associadas a paralelogramos e relacionadas a feixes de retas paralelas. Esse repertório será retomado no módulo de quadriláteros do Capítulo 6, no qual os estudantes constroem e manipulam essas figuras no GeoGebra para investigar invariantes e justificar propriedades observadas dinamicamente.

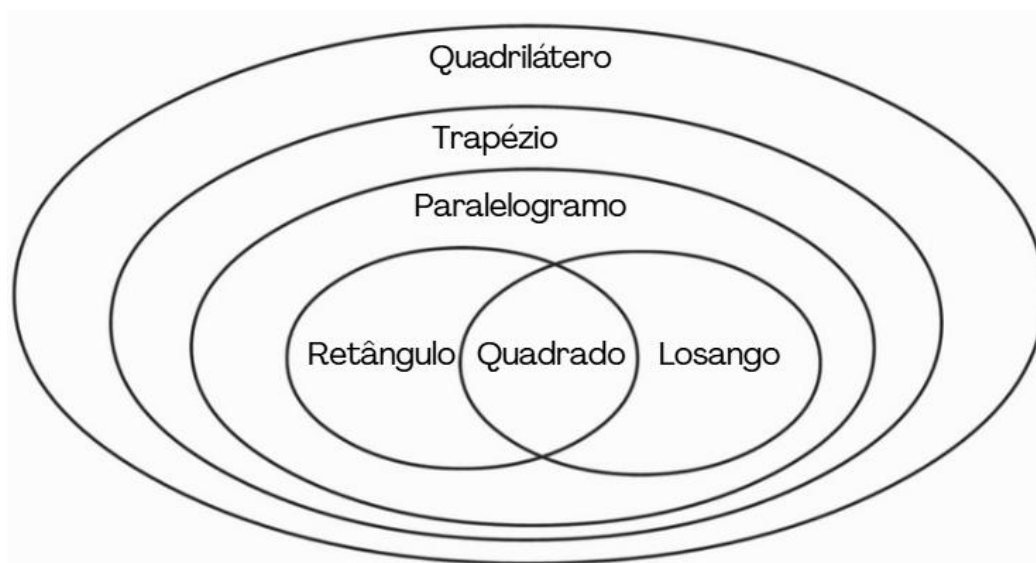


Figura 31 - Diagrama de Venn dos quadriláteros notáveis e suas relações de inclusão.

Fonte: Elaboração própria da autora (2025).

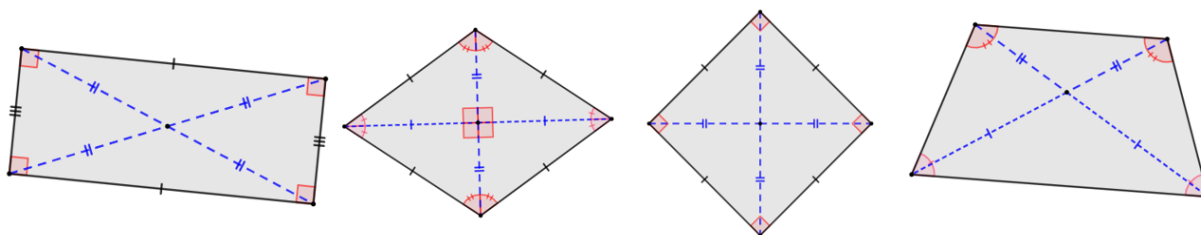


Figura 32 - Exemplos de quadriláteros notáveis: retângulo, losango, quadrado e trapézio isósceles, respectivamente.

Fonte: Elaboração própria autora (2025).

5.8.1 Retângulo

Adota-se a seguinte definição, em consonância com exposições clássicas de geometria plana:

Definição.

Um retângulo é um paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos.

A partir dessa definição e das propriedades gerais dos paralelogramos (subseção 5.4), obtêm-se resultados como:

- Lados opostos congruentes (herdado do paralelogramo);
- Diagonais congruentes: em todo retângulo, as diagonais têm o mesmo comprimento;
- Caracterização recíproca: um paralelogramo com diagonais congruentes é um retângulo.

As demonstrações, já presentes no texto, utilizam congruência de triângulos (casos LAL ou LLL) e propriedades de ângulos retos e de retas paralelas cortadas por transversal, em linha com o tratamento dado em Costa et al. (2012) e Dolce e Pompeo (2013).

Em ambientes de geometria dinâmica, como o GeoGebra, o retângulo é uma figura privilegiada para explorar:

- invariância de ângulos retos sob arraste de vértices com restrições;
- congruência de diagonais e comportamento de seus pontos médios.

Problemas podem ser propostos pedindo ao estudante que construa um paralelogramo, imponha a condição de ângulo reto e investigue quais propriedades novas

surgem (por exemplo, igualdade das diagonais), o que exemplifica o uso de problemas investigativos no sentido de Dante (2010).

5.8.2 Losango

O losango pode ser visto como um “paralelogramo equilateral”:

Definição.

Um losango é um paralelogramo que possui os quatro lados congruentes.

A partir das propriedades do paralelogramo e da congruência de triângulos, o texto apresenta resultados como:

- Diagonais perpendiculares: as diagonais de um losango são perpendiculares;
- Diagonais como bissetrizes: cada diagonal de um losango é bissetriz de dois ângulos opostos;
- Caracterização recíproca: um paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares é um losango.

Essas propriedades aparecem em manuais de geometria e em coleções de matemática elementar como caracterizações típicas do losango, muitas vezes usadas para resolver problemas envolvendo decomposição de áreas e construções com simetria (COSTA et al., 2012; DOLCE; POMPEO, 2013).

Em GeoGebra, pode-se propor atividades em que:

- os estudantes constroem um paralelogramo e, em seguida, impõem a condição de que todos os lados tenham o mesmo comprimento, observando a transformação em losango;
- exploram o comportamento das diagonais, verificando que são perpendiculares e bissetrizes de ângulos, antes de trabalhar com as demonstrações formais.

Tais tarefas permitem formular problemas do tipo “investigue o que acontece com as diagonais quando os quatro lados se tornam congruentes” e pedir aos alunos que conjecturem e justifiquem, reforçando a perspectiva de resolução de problemas e investigação (DANTE, 2010).

5.8.3 Quadrado

O quadrado combina as características de retângulo e losango:

Definição.

Um quadrado é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

Desse ponto de vista, o quadrado é simultaneamente:

- um retângulo com lados congruentes;
- um losango com ângulos retos.

Conseqüentemente, ele herda todas as propriedades de retângulos e losangos:

- lados opostos paralelos;
- diagonais congruentes, perpendiculares e bissetrizes de ângulos;
- diagonais que se encontram no ponto médio uma da outra.

Esse tipo de síntese é enfatizado em materiais de geometria, que frequentemente pedem ao estudante que demonstre que “todo quadrado é um retângulo e também um losango” e explore quais propriedades são compartilhadas (DOLCE; POMPEO, 2013; COSTA et al., 2012).

No GeoGebra, a construção de um quadrado a partir de um segmento inicial — usando rotações de 90° , perpendiculares e circunferências de raio fixo — permite interligar conceitos de lugar geométrico, isometrias e quadriláteros notáveis. A atividade pode ser formulada como problema: “construa um quadrilátero que seja ao mesmo tempo retângulo e losango; quais propriedades suas diagonais apresentam?”. Esse tipo de proposta favorece a articulação entre visualização, experimentação e prova, como sugerem Dante (2010) e Pólya (apud DANTE).

5.8.4 Trapézio e trapézio isósceles

O trapézio amplia a família de quadriláteros considerados, reduzindo a exigência de paralelismo:

Definição.

Um trapézio é um quadrilátero que possui exatamente um par de lados paralelos, chamados de bases. Os outros dois lados são denominados lados não paralelos ou laterais.

Entre os trapézios, destaca-se o trapézio isósceles:

Definição.

Um trapézio isósceles é um trapézio cujas laterais são congruentes.

Para essa classe, o texto sistematiza propriedades como:

- ângulos da base: em um trapézio isósceles, os ângulos da base maior são congruentes, e os ângulos da base menor também o são;
- diagonais congruentes: as diagonais de um trapézio isósceles têm o mesmo comprimento;
- caracterizações recíprocas: um trapézio com diagonais congruentes é isósceles.

Essas propriedades são discutidas em livros de geometria plana e de matemática elementar, muitas vezes em conexão com problemas envolvendo simetria axial, decomposição em triângulos isósceles e cálculo de áreas (COSTA et al., 2012; DOLCE; POMPEO, 2013).

Do ponto de vista curricular, o trapézio isósceles é um bom exemplo para trabalhar simetrias e transformações geométricas, tópicos explicitados na BNCC para o 7º ano por meio das habilidades EF07MA21 e EF07MA23, que envolvem simetrias, paralelismo e ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversal (BRASIL, 2017).

Em GeoGebra, é possível propor problemas em que os estudantes:

- constroem um trapézio isósceles com base em um eixo de simetria vertical;
- arrastam vértices mantendo a condição de isoscelia das laterais e observam como os ângulos da base e as diagonais se comportam;
- verificam que, ao romper a isoscelia, algumas propriedades deixam de ser verdade (por exemplo, a igualdade das diagonais).

Esses problemas exigem que o aluno reconheça e produza regularidades a partir da experimentação, antes de recorrer às demonstrações, o que é coerente com a abordagem de resolução de problemas e investigação discutida por Dante (2010).

5.8.5 Síntese e papel dos quadriláteros notáveis

A sistematização de propriedades de retângulos, losangos, quadrados e trapézios isósceles não deve ser compreendida apenas como um inventário de teoremas, mas como um repertório conceitual a ser mobilizado em problemas, investigações e modelagens geométricas. Em particular:

- retângulos e quadrados aparecem naturalmente em malhas quadradas, escalas gráficas, plantas arquitetônicas e representações do plano cartesiano;
- losangos são frequentes em pavimentações, mosaicos e padrões de simetria;
- trapézios isósceles surgem em contextos de cortes de figuras, telhados, estruturas metálicas e problemas envolvendo vistas frontais de objetos.

As atividades propostas no Capítulo 6 retomam esses quadriláteros em situações que exigem do estudante:

- identificar propriedades relevantes para resolver um problema;
- formular conjecturas, por exemplo, sobre o comportamento das diagonais ou de ângulos em figuras construídas dinamicamente;
- justificar soluções em linguagem matemática apropriada.

Desse modo, o estudo dos quadriláteros notáveis no Capítulo 5 fornece o suporte teórico necessário para as tarefas investigativas com GeoGebra, em consonância com a BNCC (BRASIL, 2017), com os textos de geometria plana de Costa et al. (2012) e Dolce e Pompeo (2013) e com a perspectiva de ensino por meio da resolução de problemas discutida por Dante (2010).

O bloco de resultados de Geometria Plana euclidiana reunido neste capítulo foi organizado de modo a evidenciar não apenas propriedades isoladas, mas as relações de dependência entre definições, proposições e teoremas, em consonância com a tradição axiomático-dedutiva inaugurada por Euclides (2009). Esse encadeamento estrutural torna mais visível para o professor como resultados sobre triângulos, paralelismo, semelhança, relações métricas e quadriláteros notáveis se apoiam mutuamente e podem ser retomados em diferentes momentos do Ensino Fundamental – Anos Finais.

Ao mesmo tempo, esse corpo teórico foi continuamente relacionado às unidades temáticas de Geometria da BNCC e às habilidades previstas para o 7º ao 9º ano, de forma a

constituir um repertório de referência para o planejamento docente em contextos de escola pública (BRASIL, 1998; BRASIL, 2017). Do ponto de vista metodológico, a seleção e a forma de apresentação dos resultados explicitam quais propriedades se pretende acionar ao desenhar as atividades investigativas com o GeoGebra descritas no Capítulo 6, cumprindo o primeiro objetivo específico da pesquisa e alinhando-se ao perfil de mestre em Matemática do PROFMAT, que articula aprofundamento conceitual e impacto na prática pedagógica (PROFMAT, 2020).

Em síntese, o conjunto de resultados reunidos neste capítulo cumpre uma função dupla no escopo da pesquisa. Por um lado, consolida o atendimento ao primeiro objetivo específico, ao oferecer um arcabouço conceitual de Geometria Plana alinhado às unidades temáticas e às habilidades da BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998; BRASIL, 2017). Por outro, fundamenta as escolhas de design do produto educacional descrito no Capítulo 6, ao explicitar quais propriedades, teoremas e relações métricas se pretende acionar nas atividades investigativas com o GeoGebra. Dessa forma, o Capítulo 5 não apenas organiza o conteúdo matemático de referência, como também explicita os critérios que orientam sua transposição didática para a realidade da escola pública, em consonância com o perfil de mestre em Matemática definido pelo PROFMAT, que articula aprofundamento teórico e impacto na prática pedagógica.

6. ATIVIDADES INVESTIGATIVAS DE GEOMETRIA PLANA COM GEOGEBRA – PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo é apresentado o produto educacional desta dissertação: uma sequência de atividades investigativas mediadas pelo software GeoGebra, concebida para o estudo de propriedades de triângulos e quadriláteros nos anos finais do Ensino Fundamental, em contexto de escola pública. Trata-se de um roteiro que materializa, em termos didáticos, o arcabouço teórico construído nos capítulos anteriores, articulando Geometria Plana, Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), Aprendizagem Baseada na Investigação (ABI) e Resolução de Problemas, em consonância com as orientações da BNCC para a unidade temática Geometria.

Do ponto de vista da pesquisa, este capítulo responde de forma direta, sobretudo, ao terceiro e ao quarto objetivos específicos enunciados na Introdução, ao: (i) propor e desenvolver roteiros de atividades investigativas com GeoGebra para o estudo de propriedades de polígonos por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental; e (ii) analisar e discutir desdobramentos pedagógicos esperados dessas atividades, à luz dos pressupostos teóricos estabelecidos. A descrição detalhada do módulo “A Missão: Desvendar o Segredo dos Triângulos” constitui, assim, a resposta concreta ao problema que orienta a dissertação, qual seja: como desenhar propostas de ensino de Geometria Plana que promovam raciocínio investigativo, em ambiente de Geometria Dinâmica, em uma escola pública?

Nesse sentido, as hipóteses pedagógicas discutidas no Capítulo 4 não se configuram como hipóteses de pesquisa a serem testadas por meio de coleta e análise de dados, mas como um horizonte de funcionamento desejado para o produto educacional. O Capítulo 6 operacionaliza esse horizonte ao explicitar o design das tarefas, as etapas de investigação propostas e os desdobramentos pedagógicos esperados, preservando a coerência com o caráter projetivo da dissertação e com as orientações do PROFMAT para o desenvolvimento articulado entre fundamentação teórica, recurso educacional e perspectivas de aplicação futura.

O foco da descrição que se segue recai, em primeiro lugar, sobre o módulo de atividades investigativas com triângulos, concebido para turmas de 7º ano, no qual se

explora, em ambiente dinâmico com GeoGebra, a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos e outros resultados fundamentais apresentados no Capítulo 5. Em continuidade a esse percurso, e de modo a dar concretude ao título desta dissertação – *Explorando propriedades de polígonos com GeoGebra* –, inclui-se também a descrição de um segundo módulo investigativo, voltado às noções iniciais de quadriláteros, pensado especialmente para o 8º ano e articulado a habilidades da BNCC como EF08MA14, que propõe a demonstração de propriedades de quadriláteros por meio da congruência de triângulos. Assim, triângulos e quadriláteros são trabalhados de forma integrada em cenários de investigação, evidenciando como resultados clássicos de Geometria Plana podem ser apropriados pelos estudantes por meio de experimentação, formulação de conjecturas e argumentação em ambiente de Geometria Dinâmica

6.1 Análise a priori das atividades investigativas

Como o produto educacional desenvolvido nesta dissertação não foi aplicado empiricamente no escopo desta pesquisa, opta-se por realizar uma análise a priori das atividades propostas. Essa análise não tem a finalidade de antecipar resultados de aprendizagem, mas de explicitar o potencial pedagógico das tarefas, os conceitos matemáticos mobilizados, os vínculos com a BNCC, os referenciais teóricos que sustentam o desenho didático e possíveis dificuldades dos estudantes.

Essa opção metodológica é coerente com o caráter projetivo da pesquisa e evita tratar como resultado aquilo que ainda não foi observado em sala de aula. Desse modo, em vez de afirmar que os estudantes desenvolverão determinadas aprendizagens, considera-se que as atividades foram concebidas para favorecer condições de exploração, registro, formulação de conjecturas, validação e argumentação matemática.

A análise a priori também permite explicitar o diálogo entre os capítulos anteriores e o produto educacional. O Capítulo 2 fundamenta o uso crítico das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no ensino de Matemática; o Capítulo 3 apresenta o GeoGebra como ambiente de Geometria Dinâmica; o Capítulo 4 sustenta a opção por metodologias investigativas e pela resolução de problemas; e o Capítulo 5 organiza os resultados matemáticos que serão mobilizados nas tarefas. Assim, o Capítulo 6 não se limita a

apresentar roteiros de uso do software, mas procura justificar pedagogicamente cada escolha feita no desenho das atividades.

Nessa perspectiva, as atividades propostas dialogam com Skovsmose (2000), ao buscar deslocar o trabalho em sala de aula do paradigma do exercício para cenários de investigação. Para o autor, os cenários para investigação convidam os estudantes a se envolverem em processos de exploração, reflexão e argumentação, superando a lógica de apenas reproduzir procedimentos previamente indicados.

Do mesmo modo, a proposta aproxima-se da perspectiva de Ponte et al. (1998), segundo a qual o trabalho investigativo em Matemática envolve a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho pelos estudantes e a síntese ou discussão final. Nesse processo, os estudantes são convidados a observar regularidades, levantar hipóteses, testar conjecturas, reformular ideias e justificar conclusões.

No contexto desta dissertação, o GeoGebra é compreendido como uma mediação para esse tipo de trabalho, e não como garantia automática de aprendizagem. Sua função é ampliar as possibilidades de visualização, manipulação e comparação de figuras geométricas, criando condições para que os estudantes explorem propriedades de polígonos de maneira dinâmica. Entretanto, a aprendizagem investigativa depende da intencionalidade da tarefa, da mediação docente e da exigência de registros e justificativas matemáticas.

Por essa razão, cada atividade será analisada a partir dos seguintes aspectos: conteúdo matemático mobilizado, habilidades da BNCC, papel do GeoGebra, relação com a investigação matemática, possíveis dificuldades dos estudantes, critérios de acompanhamento da aprendizagem e alternativas para contextos com limitações de acesso às tecnologias digitais.

Tabela 5 - Elementos considerados na análise a priori das atividades investigativas

Aspecto analisado	Finalidade da análise
Conteúdo matemático	Identificar os conceitos, propriedades e relações geométricas mobilizados na atividade.
Habilidades da BNCC	Explicitar o vínculo entre a atividade proposta e as aprendizagens previstas nos documentos curriculares.
Papel do GeoGebra	Analisar de que forma o software contribui para a visualização, manipulação e investigação das figuras.

Aspecto analisado	Finalidade da análise
Relação com Skovsmose	Verificar se a tarefa se aproxima de um cenário para investigação ou se permanece no paradigma do exercício.
Relação com Ponte et al.	Identificar a presença de etapas investigativas, como exploração, conjectura, teste, argumentação e síntese.
Possíveis dificuldades dos estudantes	Antecipar obstáculos conceituais, tecnológicos ou linguísticos que podem surgir durante a atividade.
Critérios de acompanhamento	Indicar aspectos que o professor pode observar durante a realização da tarefa.
Alternativas sem uso individual da tecnologia	Propor adaptações para contextos com poucos equipamentos, ausência de laboratório ou internet instável.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

A organização apresentada na Tabela 5 busca tornar explícita a articulação entre teoria, currículo, tecnologia e conteúdo matemático. Essa estrutura também permite que o produto educacional seja analisado não apenas como um conjunto de tarefas para uso do GeoGebra, mas como uma proposta didática fundamentada, capaz de orientar o professor na mediação de atividades investigativas em Geometria. Além disso, ao prever dificuldades e alternativas de aplicação, a análise a priori reconhece as condições concretas da escola pública e reforça que o caráter investigativo da aula depende menos da disponibilidade tecnológica em si e mais da qualidade das perguntas, dos registros e das discussões promovidas.

6.2 Atividade 1 – A missão: desvendar o segredo dos triângulos

6.2.1 Análise a priori da Atividade 1 – Soma dos ângulos internos de um triângulo

A primeira atividade investigativa tem como foco a exploração da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo por meio do GeoGebra. O objetivo central não é apresentar imediatamente aos estudantes a propriedade segundo a qual a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° , mas criar condições para que essa regularidade seja observada, testada, registrada e discutida a partir da manipulação dinâmica da figura.

Do ponto de vista matemático, a atividade mobiliza conceitos de triângulo, ângulo interno, medida angular, variação de forma e invariância geométrica. Ao mover os vértices do triângulo no GeoGebra, o estudante pode perceber que as medidas dos ângulos se alteram individualmente, mas sua soma permanece constante. Esse tipo de exploração permite articular observação empírica e sistematização matemática, favorecendo a passagem de uma constatação visual para uma conjectura que precisa ser verbalizada e justificada.

A proposta dialoga com a BNCC ao favorecer o desenvolvimento de habilidades relacionadas à construção, análise e verificação de propriedades de figuras geométricas, bem como ao uso de tecnologias digitais para investigar relações matemáticas. Além disso, aproxima-se da competência geral que prevê a compreensão e o uso crítico de tecnologias digitais em práticas escolares, não como simples recurso ilustrativo, mas como meio para produzir conhecimento, resolver problemas e exercer protagonismo.

Na perspectiva de Skovsmose (2000), a atividade busca deslocar o estudante do paradigma do exercício para um cenário de investigação. Em vez de apenas aplicar uma regra previamente apresentada, o aluno é convidado a explorar diferentes configurações, observar regularidades, levantar hipóteses e discutir suas conclusões. Esse deslocamento é importante porque modifica a posição do estudante diante da Matemática: ele deixa de ser apenas executor de procedimentos e passa a atuar como sujeito que investiga relações.

A atividade também se aproxima da perspectiva de Ponte et al. (1998), segundo a qual uma aula de investigação matemática envolve a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho pelos estudantes e a síntese coletiva. Nesse sentido, o roteiro

deve conduzir os alunos a três movimentos principais: primeiro, a exploração da figura; depois, o registro e a formulação de conjecturas; por fim, a discussão coletiva orientada pelo professor, na qual as observações feitas no GeoGebra são reorganizadas em linguagem matemática.

O papel do GeoGebra, nesse contexto, é favorecer a visualização dinâmica e a comparação entre diferentes triângulos. Entretanto, o software não substitui a argumentação matemática. A constatação de que a soma dos ângulos aparece como 180° em vários casos constitui uma evidência empírica, mas não uma demonstração formal. Por isso, a mediação docente é essencial para problematizar a diferença entre “ver no GeoGebra” e “justificar matematicamente”.

Algumas dificuldades podem ser previstas. Os estudantes podem acreditar que a propriedade vale apenas para o triângulo inicialmente construído; podem também registrar apenas os valores numéricos sem formular uma conclusão geral; ou ainda podem compreender a informação exibida pelo software como uma verdade pronta, sem necessidade de explicação. Essas dificuldades devem ser consideradas no planejamento da mediação, especialmente por meio de perguntas como: “Isso aconteceu só nesse triângulo ou em outros também?”, “O que mudou quando você moveu o vértice?”, “O que permaneceu igual?”, “Como você explicaria essa descoberta para outro colega?”.

A atividade pode ser acompanhada por meio de critérios formativos, observando se o estudante manipula a figura, registra diferentes exemplos, compara os resultados, formula uma conjectura e participa da discussão coletiva. Em contextos com limitação de acesso à tecnologia, a proposta pode ser adaptada com o uso do GeoGebra projetado pelo professor, com registros individuais em folha impressa, ou ainda com recorte dos ângulos de triângulos em papel, permitindo que os alunos reorganizem os ângulos sobre uma linha reta para aproximar visualmente a ideia de 180° .

Assim, a análise a priori indica que a Atividade 1 possui potencial para favorecer a construção investigativa da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Esse potencial, contudo, depende da articulação entre a tarefa, o uso orientado do GeoGebra, os registros dos estudantes e a mediação docente. Portanto, a atividade não deve ser compreendida como uma simples demonstração tecnológica, mas como uma situação didática voltada à exploração, conjectura e argumentação matemática.

6.2.2 Síntese da análise a priori da Atividade 1

A Tabela 6 apresenta uma síntese da análise a priori da Atividade 1, organizando os principais elementos considerados no desenho da proposta. Essa sistematização permite visualizar, de forma articulada, o conteúdo matemático mobilizado, o papel do GeoGebra, os referenciais teóricos adotados, as possíveis dificuldades dos estudantes e os critérios de acompanhamento da aprendizagem.

Tabela 6 - Síntese da análise a priori da Atividade 1

Aspecto	Análise
Conteúdo matemático	Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; variação das medidas angulares; invariância da soma.
Habilidades da BNCC	Exploração de propriedades de triângulos, análise de relações geométricas e uso de tecnologias digitais em Matemática.
Papel do GeoGebra	Permitir a manipulação dinâmica dos vértices e a observação da permanência da soma dos ângulos internos.
Relação com Skovsmose	A atividade busca constituir um cenário de investigação, pois convida o estudante a explorar, observar e levantar hipóteses, em vez de apenas aplicar uma regra.
Relação com Ponte et al.	A proposta envolve exploração inicial, formulação de conjecturas, testes em diferentes configurações e síntese coletiva.
Possíveis dificuldades	Confundir evidência visual com demonstração; registrar apenas valores numéricos; não generalizar a regularidade observada.
Critérios de acompanhamento	Observar se o estudante manipula a figura, registra dados, compara casos, formula conjectura e justifica sua conclusão.
Alternativas sem tecnologia individual	Uso do GeoGebra projetado pelo professor; registros impressos; construção de triângulos em papel; recorte e reorganização dos ângulos.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

6.2.3 Roteiro da Atividade 1 para o aluno: A missão – desvendar o segredo dos triângulos

Esta seção apresenta o roteiro da Atividade 1, destinado aos estudantes, cujo objetivo é conduzir uma investigação sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo por meio do GeoGebra. Diferentemente da análise a priori apresentada anteriormente, este roteiro assume linguagem didática, com orientações diretas aos alunos e intervenções previstas para o professor-mediador. A proposta organiza-se em etapas de exploração, registro, comparação, discussão e sistematização da propriedade investigada.

Roteiro da atividade para o estudante: A Missão: Desvendar o Segredo dos Triângulos

Papel do Professor/Mediador (Geral):

- Preparação: Certificar-se de que todos os alunos têm acesso ao GeoGebra (online) através do link <https://www.GeoGebra.org/m/ve3bvxwp> e que a projeção inicial (o link do GeoGebra com um triângulo ABC básico, ângulos internos α , β , γ e a soma desses ângulos já configurada e visível) está pronta para ser distribuída ou acessada. É importante ressaltar que, em contextos com recursos tecnológicos limitados, o professor pode adaptar o roteiro para uma abordagem "mão na massa" com papel, tesoura e transferidor, simulando a manipulação e a descoberta, embora perdendo a dinamicidade do software.
 - Abertura: Iniciar a aula criando um ambiente de curiosidade, instigando os alunos com a ideia de que há um "segredo" a ser desvendado.
 - Disponibilidade: Circular pela sala, observando o progresso dos alunos, oferecendo apoio técnico com o software e instigando com perguntas abertas.
1. Preparando o Terreno (aproximadamente 5 minutos):
- Será que existe um segredo escondido nos triângulos? Vamos descobrir!
 - Mova os pontos A, B e C do triângulo na tela. Observe atentamente o que acontece com os valores dos ângulos individuais (α , β e γ) enquanto você arrasta os vértices.

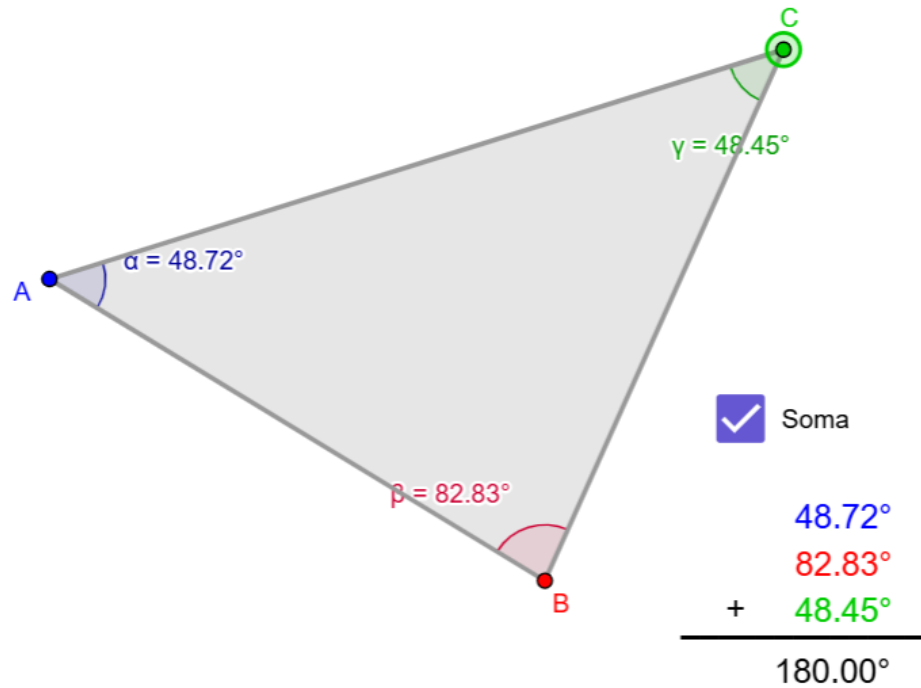


Figura 33 - Configuração inicial do triângulo ABC no GeoGebra para exploração dos ângulos.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

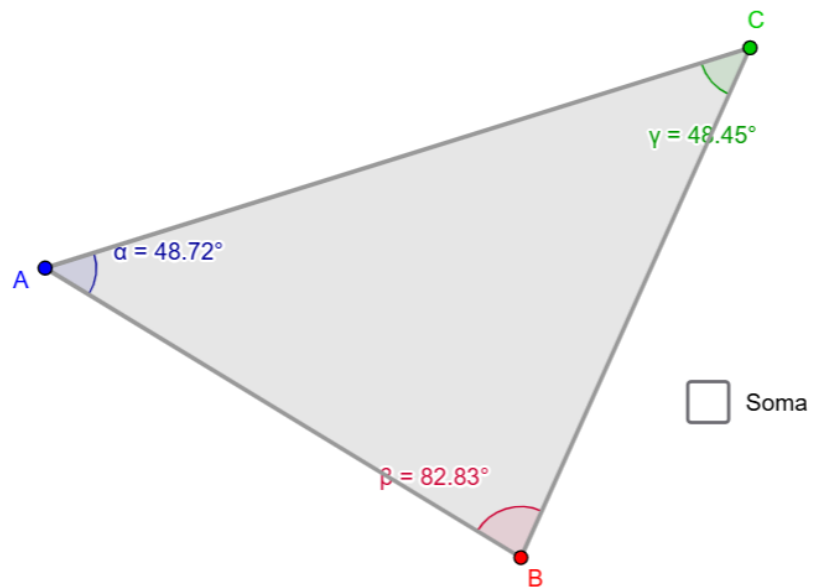


Figura 34 - Triângulo sendo manipulado, evidenciando a alteração dos valores dos ângulos individuais.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

- Anote em seu caderno: O que muda quando você arrasta os pontos? E o que, surpreendentemente, permanece igual?

Papel do Professor/Mediador (Etapa 1):

- Introdução e Orientação Inicial: Explicar brevemente o que são os pontos e como arrastá-los no GeoGebra. Assegurar que os alunos encontrem os ângulos (α , β , γ) na tela.
- Foco na Observação: Orientar os alunos a prestarem atenção tanto nas mudanças quanto nas permanências, estimulando a curiosidade.
- Perguntas Indutoras: "Os valores dos ângulos são fixos ou mudam?", "Vocês percebem algo que não muda, por mais que vocês mexam no triângulo?" (sem revelar a soma ainda).
- Registro: Incentivar o registro das observações no caderno, pois isso ajudará na etapa seguinte.

2. Decifrando os Códigos (aproximadamente 10 minutos):

Agora, vamos nos concentrar no "código" chamado "soma" que aparece na tela do GeoGebra. O que ele nos revela sobre os ângulos do triângulo?

Qual é o valor que o GeoGebra mostra para a "soma" dos ângulos α , β e γ neste momento? Anote aqui: _____ graus.

Mova os pontos A, B e C novamente, mudando bastante a forma do triângulo (deixe-o bem "esticado", "achatado", etc.). Observe o valor da "soma". Ele muda ou continua o mesmo? Anote sua observação.

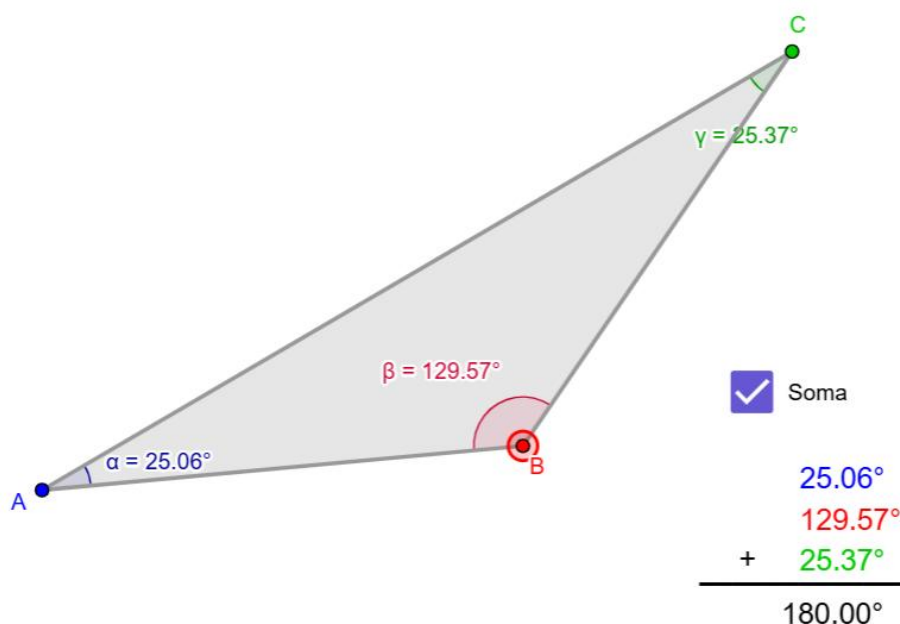


Figura 35 - Verificando a constância da soma dos ângulos internos após manipulação.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

Papel do Professor/Mediador (Etapa 2):

- Direcionamento da Atenção: Chamar a atenção para o texto "soma" que deve estar visível na tela do GeoGebra.
 - Estimular a Conjectura: Pedir que os alunos verbalizem o que perceberam sobre o valor da soma. "O que vocês notam de especial sobre esse número?", "Será que esse valor é o 'segredo' que buscamos?".
 - Incentivar a Experimentação: Reforçar a importância de arrastar os pontos amplamente, criando triângulos de diversas formas, para realmente testar a constância da soma.
 - Registro da Conjectura: Assegurar que os alunos anotem claramente suas observações sobre a constância da soma.
3. Testando as Teorias (aproximadamente 15 minutos):
- A sua observação inicial sobre a "soma" se manter constante é um indício importante! Mas será que ela vale para todos os tipos de triângulos? Vamos testar!
 - No GeoGebra, você pode criar diferentes tipos de triângulos arrastando os vértices A, B e C. Tente configurar triângulos que se assemelhem aos tipos abaixo e preencha a tabela de resultados com os valores que você observar.

- Triângulo Equilátero: Tente arrastar os pontos até que todos os três ângulos internos pareçam ter o mesmo valor (e, conseqüentemente, os lados também). Qual é o valor de cada ângulo? A "soma" continua a mesma?
- Triângulo Isósceles: Tente fazer um triângulo com dois lados iguais (e, portanto, dois ângulos iguais). O que você observa sobre os ângulos? A "soma" continua a mesma?
- Triângulo Escaleno: Tente fazer um triângulo com todos os lados diferentes (e, portanto, todos os ângulos diferentes). A "soma" continua a mesma?
- Triângulo Retângulo: Tente fazer um triângulo com um ângulo reto (exatamente 90 graus). Qual é a relação entre os outros dois ângulos que não são o de 90 graus? A "soma" continua a mesma?

Tabela de Resultados: (Preencha em seu caderno)

Tabela 7 - Registro das medidas dos ângulos internos em diferentes tipos de triângulos

Tipo de Triângulo	Ângulo α	Ângulo β	Ângulo γ	Soma
Equilátero				
Isósceles				
Escaleno				
Retângulo				

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

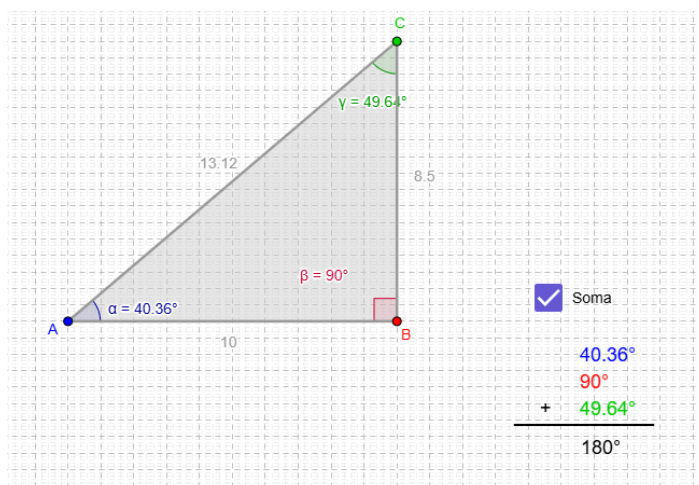


Figura 36 - Explorando um triângulo retângulo e confirmando a soma dos ângulos.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

Papel do Professor/Mediador (Etapa 3):

- **Desafio Guiado:** Explicar a tarefa de tentar construir os diferentes tipos de triângulos e preencher a tabela. Pode-se mostrar um exemplo de como "tentar" formar um triângulo equilátero, mas sem entregar a resposta.
- **Diferenciação:** Estar atento a alunos que possam ter dificuldade em formar tipos específicos de triângulos. Oferecer dicas sem dar a solução pronta: "Um triângulo isósceles tem dois lados iguais, o que isso significa para os ângulos?" ou "Pense nos ângulos de um quadrado para o triângulo retângulo".
- **Confirmação da Propriedade:** Reforçar a pergunta em cada tipo de triângulo: "A soma continua a mesma?", para que a generalização da propriedade se torne cada vez mais evidente para o aluno.
- **Observação de Relações:** Para o triângulo retângulo, instigar a relação entre os outros dois ângulos agudos (soma 90°).

4. Compartilhando o Segredo (aproximadamente 10 minutos):

A matemática é muito mais legal quando compartilhada!

Junte-se a um colega e comparem suas descobertas na tabela de resultados. Vocês chegaram às mesmas conclusões?

Conversem sobre como vocês usaram o GeoGebra e o que foi mais interessante na atividade.

Preparem-se para responder às seguintes perguntas para a turma:

- Qual é o grande segredo que vocês desvendaram sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo?
- Por que vocês acham que esse segredo funciona para todos os tipos de triângulo que vocês testaram?
- Como o GeoGebra foi uma ferramenta útil para ajudar vocês a descobrir esse segredo?

Papel do Professor/Mediador (Etapa 4 - Discussão e Consolidação):

- Organização da Discussão: Formar duplas ou pequenos grupos para a comparação inicial. Em seguida, abrir a discussão para toda a turma.
- Mediação da Discussão: Conduzir a conversa, garantindo que todos tenham a oportunidade de compartilhar suas descobertas.
- Perguntas Chave: Utilizar as perguntas do roteiro para guiar a discussão, garantindo que os alunos verbalizem o "segredo" (180°) e justifiquem sua universalidade.
- Formalização: A partir das conclusões dos alunos, formalizar a propriedade matemática: "A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180° ." Escrever isso no quadro.
- Reforço do GeoGebra: Concluir a discussão ressaltando o papel do GeoGebra como ferramenta de descoberta e não apenas de verificação.

Conclusão da Missão:

O segredo que desvendamos hoje é que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus! Parabéns, você explorou, testou e descobriu uma das propriedades mais fundamentais da Geometria Plana!

Para Pensar Mais:

- Você consegue imaginar outras formas de "provar" esse segredo sem usar o GeoGebra, talvez usando tesoura e papel, ou com um raciocínio lógico?
- O que mais você gostaria de explorar sobre triângulos ou outras formas geométricas usando o GeoGebra? Que perguntas você faria ao GeoGebra agora?

Papel do Professor/Mediador (Para Pensar Mais e Fechamento):

- Ampliação do Conhecimento: Apresentar a ideia de outras formas de "provar" a propriedade (demonstração com tesoura e papel, ou formalmente). Isso conecta a experimentação com a prova matemática.

- Estímulo à Continuidade: As perguntas finais servem para instigar a curiosidade e mostrar que a matemática é um campo vasto para a exploração contínua, abrindo portas para futuras aulas ou projetos.
- Reforço Positivo: Parabenizar a turma pelo trabalho investigativo e pelas descobertas.

6.2.4 Critérios de acompanhamento da Atividade 1

A realização da Atividade 1 pode ser acompanhada pelo professor a partir de critérios formativos, considerando não apenas a resposta final apresentada pelos estudantes, mas o percurso investigativo desenvolvido durante a exploração. Como a proposta não se limita à identificação do valor 180° , é importante observar se os estudantes manipulam a construção, registram diferentes casos, comparam resultados, formulam conjecturas e conseguem expressar, oralmente ou por escrito, a regularidade observada.

Tabela 8 - Critérios de acompanhamento da Atividade 1

Critério	Em desenvolvimento	Adequado	Avançado
Manipulação da figura	Move os elementos da construção sem objetivo claro ou apenas observa a figura pronta.	Manipula os vértices do triângulo e observa alterações nas medidas dos ângulos.	Manipula diferentes configurações de triângulos e compara intencionalmente os resultados obtidos.
Registro das observações	Registra poucos dados ou apenas copia valores exibidos pelo GeoGebra.	Registra diferentes exemplos de triângulos e suas respectivas somas angulares.	Organiza os registros de modo comparativo, identificando regularidades entre os exemplos.
Formulação de conjectura	Faz afirmações vagas, como “sempre dá igual”, sem explicitar a propriedade.	Formula uma conjectura coerente sobre a soma dos ângulos internos do	Formula a conjectura de modo generalizado, indicando que a propriedade vale para

Critério	Em desenvolvimento	Adequado	Avançado
		triângulo.	qualquer triângulo.
Justificativa matemática	Justifica apenas dizendo que “o GeoGebra mostrou”.	Usa os registros e as medidas observadas para explicar a regularidade.	Relaciona a observação dinâmica à propriedade geométrica, reconhecendo a necessidade de uma justificativa matemática.
Participação na discussão	Participa pouco ou apenas reproduz respostas de colegas.	Compartilha observações e conclusões com o grupo ou com a turma.	Questiona, compara respostas e contribui para a construção coletiva da síntese.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

6.2.5 Síntese analítica da Atividade 1

A Atividade 1 foi concebida para favorecer a passagem de uma observação visual para uma formulação matemática mais sistematizada. Ao manipular os vértices do triângulo no GeoGebra, o estudante tem a possibilidade de perceber que a forma da figura e as medidas individuais dos ângulos se modificam, enquanto a soma das medidas dos ângulos internos permanece constante.

Essa constatação, entretanto, não deve ser tratada como resultado automático da atividade. O fato de o software apresentar numericamente a soma igual a 180° em diferentes configurações constitui uma evidência empírica, mas não substitui a necessidade de discussão, registro e argumentação. Por isso, a mediação docente assume papel central na transformação da observação em conhecimento matemático.

Nesse sentido, a atividade se aproxima da perspectiva de Skovsmose (2000), pois busca criar um cenário em que os estudantes possam explorar e refletir, em vez de apenas

aplicar uma propriedade previamente enunciada. Também dialoga com Ponte et al. (1998), ao organizar a tarefa em torno de exploração, conjectura, teste e síntese coletiva.

Do ponto de vista curricular, a atividade contribui para o trabalho com propriedades de triângulos e para o desenvolvimento do raciocínio geométrico nos anos finais do Ensino Fundamental, articulando visualização, registro e argumentação. Em termos pedagógicos, sua principal contribuição está em mostrar que o GeoGebra pode ampliar o campo de experimentação dos estudantes, desde que o professor conduza perguntas que os levem a comparar casos, identificar invariantes e justificar suas conclusões.

Assim, a Atividade 1 não se configura como uma simples demonstração digital da soma dos ângulos internos de um triângulo, mas como uma proposta investigativa em que o estudante é convidado a observar, testar, registrar, conjecturar e discutir. Essa organização permite que o conceito geométrico seja construído de forma mais ativa e reflexiva, respeitando o caráter projetivo desta dissertação e evitando a antecipação de resultados que ainda dependerão de aplicação empírica futura.

6.3 Atividade 2 – Noções iniciais de quadriláteros com GeoGebra

6.3.1 Análise a priori da Atividade 2 – Noções iniciais de quadriláteros com GeoGebra

A segunda atividade investigativa tem como foco a exploração inicial de quadriláteros por meio do GeoGebra, dando continuidade ao trabalho desenvolvido na Atividade 1 com triângulos. O objetivo central não é apresentar aos estudantes uma classificação pronta de quadriláteros, mas criar condições para que observem, manipulem, comparem e registrem propriedades relacionadas a lados, ângulos, paralelismo e diagonais em diferentes figuras de quatro lados.

Do ponto de vista matemático, a atividade mobiliza conceitos fundamentais associados aos quadriláteros, tais como número de lados e vértices, medidas de ângulos internos, lados opostos, lados paralelos, diagonais e propriedades específicas de algumas classes de quadriláteros. Ao manipular os vértices das figuras no GeoGebra, os estudantes

podem observar que determinadas características se alteram, enquanto outras permanecem invariantes quando a construção foi realizada com restrições geométricas adequadas. Essa distinção entre aquilo que muda e aquilo que permanece é essencial para a compreensão das propriedades das figuras.

A proposta dialoga com a BNCC ao favorecer o reconhecimento, a nomeação e a comparação de polígonos, considerando lados, vértices, ângulos e propriedades geométricas. Também se articula às habilidades que envolvem o uso de tecnologias digitais e softwares de Geometria Dinâmica para construir, explorar e analisar figuras planas. Ao propor a investigação de quadriláteros em ambiente dinâmico, a atividade contribui para que os estudantes passem de uma identificação visual imediata das figuras para uma análise baseada em propriedades.

Na perspectiva de Skovsmose (2000), a atividade busca configurar um cenário para investigação, pois convida os estudantes a explorar diferentes possibilidades, levantar hipóteses, testar configurações e discutir regularidades. Em vez de apenas receberem definições prontas de quadrado, retângulo, losango, paralelogramo ou trapézio, os alunos são colocados diante de situações em que precisam observar o comportamento das figuras e justificar por que uma determinada classificação se mantém ou se modifica.

A atividade também se aproxima da perspectiva de Ponte et al. (1998), ao organizar a investigação matemática em torno da exploração inicial, da formulação de conjecturas, do teste de casos particulares e da discussão coletiva. Nesse sentido, o roteiro deve favorecer que os estudantes observem as figuras, registrem propriedades, comparem diferentes quadriláteros e avancem para uma síntese orientada pelo professor.

O papel do GeoGebra, nessa atividade, é favorecer a visualização dinâmica das propriedades dos quadriláteros. Ao permitir o arraste de vértices, a medição de lados e ângulos e a observação de paralelismo e diagonais, o software amplia as possibilidades de comparação entre diferentes figuras. Entretanto, assim como na Atividade 1, o uso do GeoGebra não substitui a argumentação matemática. A observação visual e numérica produz evidências, mas a compreensão geométrica depende da mediação docente, do registro das regularidades e da discussão sobre as propriedades que definem cada quadrilátero.

Algumas dificuldades podem ser previstas. Os estudantes podem classificar as figuras apenas pela aparência, sem considerar propriedades geométricas; podem confundir quadrado e losango, retângulo e paralelogramo, ou ainda acreditar que uma figura deixa de

pertencer a uma classe ao ser apresentada em posição não convencional. Também é possível que tenham dificuldade em compreender relações de inclusão entre classes de quadriláteros, como o fato de todo quadrado ser também retângulo e losango, dependendo das definições adotadas.

Essas dificuldades devem ser consideradas no planejamento da mediação docente. Perguntas como “O que essa figura mantém quando você move seus vértices?”, “Quais lados continuam paralelos?”, “As diagonais têm alguma propriedade?”, “Essa figura continua sendo a mesma se estiver inclinada?” e “Quais propriedades justificam essa classificação?” podem ajudar os estudantes a superar uma leitura apenas visual das figuras.

Em contextos com limitação de acesso à tecnologia, a atividade pode ser adaptada por meio da projeção do GeoGebra pelo professor, com participação coletiva da turma na escolha dos movimentos e na análise das propriedades observadas. Também é possível utilizar cartões com diferentes quadriláteros, malhas quadriculadas, régua, transferidor e registros impressos para preservar o caráter investigativo da proposta, ainda que sem a mesma dinamicidade proporcionada pelo software.

Assim, a análise a priori indica que a Atividade 2 possui potencial para favorecer a compreensão inicial dos quadriláteros a partir de suas propriedades, e não apenas de sua aparência. Esse potencial depende da articulação entre a manipulação dinâmica, o registro das observações, a comparação entre casos e a mediação docente voltada à construção de argumentos matemáticos. A atividade, portanto, amplia o percurso iniciado com os triângulos e contribui para a exploração investigativa de propriedades de polígonos no ambiente do GeoGebra.

6.3.2 Síntese da análise a priori da Atividade 2

A Tabela 9 apresenta uma síntese da análise a priori da Atividade 2, organizando os principais elementos considerados no desenho da proposta. Essa sistematização permite visualizar o conteúdo matemático mobilizado, o papel do GeoGebra, os referenciais teóricos

adotados, as possíveis dificuldades dos estudantes e os critérios de acompanhamento da aprendizagem.

Tabela 9 - Síntese da análise a priori da Atividade 2

Aspecto	Análise
Conteúdo matemático	Noções iniciais de quadriláteros; lados, vértices, ângulos, paralelismo, diagonais e propriedades de quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio.
Habilidades da BNCC	Reconhecimento, nomeação, comparação e análise de polígonos, com apoio de propriedades geométricas e uso de tecnologias digitais.
Papel do GeoGebra	Permitir a manipulação dinâmica dos quadriláteros, favorecendo a observação de propriedades que se mantêm ou se alteram durante o arraste.
Relação com Skovsmose	A atividade busca constituir um cenário de investigação, pois convida o estudante a explorar, comparar, levantar hipóteses e justificar classificações.
Relação com Ponte et al.	A proposta envolve exploração inicial, formulação de conjecturas, teste de diferentes configurações, registro das observações e síntese coletiva.
Possíveis dificuldades	Classificar figuras apenas pela aparência; não reconhecer figuras em posições não convencionais; confundir propriedades de diferentes quadriláteros; ter dificuldade com relações de inclusão entre classes.
Critérios de acompanhamento	Observar se o estudante manipula as figuras, registra propriedades, compara casos, identifica invariantes e justifica a classificação dos quadriláteros.
Alternativas sem tecnologia individual	Uso do GeoGebra projetado pelo professor; cartões com quadriláteros; malha quadriculada; régua e transferidor; registros impressos e discussão coletiva.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

6.3.3 Roteiro da Atividade 2 - Noções iniciais de quadriláteros com GeoGebra

Roteiro da atividade para o estudante: Noções Iniciais de Quadriláteros

- Papel do Professor/Mediador (Geral)
- Preparação:

Certificar-se de que todos os alunos têm acesso ao arquivo do GeoGebra da Atividade 2 – Noções Iniciais de Quadriláteros através do link, <https://www.GeoGebra.org/m/g4yruznk>. Verificar se os computadores/celulares estão funcionando e se os estudantes conseguem mover os pontos na tela. Retomar brevemente a investigação sobre a soma dos ângulos internos do triângulo, realizada na Atividade 1, pois esse resultado será utilizado mais adiante.
- Abertura:

Iniciar a aula perguntando aos alunos o que eles já sabem sobre quadriláteros: “Que figuras de quatro lados vocês conhecem?”, “Retângulo, quadrado, losango... são todos quadriláteros?”, “Será que existe algum ‘segredo’ escondido nos quadriláteros, como encontramos nos triângulos?”. O objetivo é despertar curiosidade e conectar com a experiência anterior.
- Organização:

Agrupar os alunos em duplas ou trios, para que possam discutir as observações, levantar conjecturas em conjunto e se ajudarem no uso do GeoGebra.
- Disponibilidade:

Circular pela sala, observando o progresso das duplas/trios, escutando as hipóteses dos estudantes, fazendo perguntas que os ajudem a ir além de descrições superficiais (“O que isso tem a ver com a definição de quadrilátero?”, “Isso acontece sempre ou só nesse caso?”), e ajudando com questões técnicas do software.
- Preparando o Terreno – Quando quatro pontos formam (ou não) um quadrilátero (aproximadamente 10 minutos)

Para o aluno (na folha/arquivo):

Nesta primeira parte da atividade, você verá quatro pontos móveis A, B, C e D no plano. Ao ligar esses pontos em certa ordem, o GeoGebra pode indicar se a figura formada é ou não um quadrilátero.

Sua missão: experimentar diferentes posições para esses quatro pontos e descobrir em que situações realmente se forma um quadrilátero.

1. Arraste os pontos A, B, C e D para diferentes posições na tela. Observe a figura que se forma ao ligá-los e veja se ela é reconhecida como um quadrilátero (figura de quatro lados).
2. Tente criar situações extremas:
 - três pontos quase na mesma linha;
 - dois pontos muito próximos;
 - pontos quase alinhados todos na mesma direção.
3. Em seu caderno, responda:
 - Dê dois exemplos de configurações em que não se forma um quadrilátero. Desenhe e explique por que você acha que não é quadrilátero.
 - O que parece ser necessário para que quatro pontos formem um quadrilátero? Tente escrever uma frase começando com: “Para quatro pontos formarem um quadrilátero, é preciso que...”

Papel do Professor/Mediador (Etapa 1):

- Verificar se os alunos realmente estão percebendo situações degeneradas (por exemplo, três pontos colineares) e não apenas arrastando pontos aleatoriamente.
- Pedir para algumas duplas mostrarem na tela exemplos de configurações que “falham” em ser quadrilátero, incentivando-os a explicar o porquê.
- Sistematizar, em linguagem acessível, as condições levantadas pela turma (como: “os segmentos precisam formar uma figura fechada de quatro lados”, “não pode ter três pontos na mesma linha”) e registrar no quadro uma primeira formulação coletiva.
- Explorando os Elementos do Quadrilátero

(aproximadamente 15 minutos)

Para o aluno:

Agora, vamos observar melhor como é um quadrilátero “por dentro”. Você verá um quadrilátero dinâmico na tela, com seus vértices identificados, e terá a opção de exibir medidas de ângulos e diagonais.

1. Com um quadrilátero qualquer na tela:
 - Conte quantos vértices ele possui e anote quais são (A, B, C, D).
 - Conte quantos lados ele tem e identifique-os (AB, BC, CD, DA).
 - Observe quantos ângulos internos aparecem e onde eles estão.

2. Ative a opção “Mostrar diagonais” no GeoGebra:
 - Quais segmentos aparecem como diagonais?
 - Quantas diagonais é possível traçar em um quadrilátero?
3. Em seu caderno, faça um desenho de um quadrilátero e:
 - destaque, com cores diferentes, os vértices, os lados, os ângulos internos e as diagonais;
 - escreva uma frase explicando, com suas palavras, o que é:
 - um vértice de um quadrilátero;
 - um lado de um quadrilátero;
 - um ângulo interno de um quadrilátero;
 - uma diagonal de um quadrilátero.

Papel do Professor/Mediador (Etapa 2):

- Garantir que os estudantes não confundam lados com diagonais.
- Pedir a algumas duplas que expliquem, com o quadrilátero projetado, o que entenderam por diagonal.
- A partir das definições dos alunos, construir, no quadro, definições mais precisas para vértice, lado, ângulo interno e diagonal, valorizando as contribuições da turma.
- Convexo ou Côncavo? Investigando a Forma dos Quadriláteros

(aproximadamente 15 minutos)

Para o aluno:

O GeoGebra agora vai te ajudar a explorar dois tipos de quadriláteros: convexos e côncavos. Observe a figura e use os recursos disponíveis (ângulos internos, retas que passam pelos lados, diagonais) para descobrir diferenças importantes entre esses dois tipos.

1. Ajuste a figura para obter um quadrilátero que pareça “normal”, sem “entradas” para dentro. Observe:
 - Como são as medidas dos ângulos internos? Todos parecem menores do que 180° ?
 - O que acontece se você traçar as diagonais? Elas ficam dentro da figura?
2. Agora, mova os vértices até obter um quadrilátero com um “bico” para dentro (um quadrilátero côncavo):
 - Há algum ângulo interno com medida maior que 180° ?
 - O que acontece com as diagonais? Alguma parte delas sai da região “interna” do quadrilátero?

3. Em seu caderno, responda:

- Como você descreveria, com suas palavras, um quadrilátero convexo?
- E um quadrilátero côncavo?
- Faça um desenho de cada tipo e identifique os ângulos que você considera mais importantes para essa diferença.

Papel do Professor/Mediador (Etapa 3):

- Incentivar comparações explícitas: “O que mudou da figura convexa para a côncava?”, “O que aconteceu com os ângulos?”, “E com as diagonais?”.
- Destacar que não é só uma diferença “visual”: ela envolve propriedades dos ângulos internos e das diagonais e a posição da figura em relação às retas dos lados.
- Negociar com a turma definições para quadrilátero convexo e côncavo, registrando no quadro algo como:

- quadrilátero convexo: todos os ângulos internos menores que 180° e diagonais inteiramente contidas na figura;
- quadrilátero côncavo: pelo menos um ângulo interno maior que 180° e alguma diagonal que sai da região interna.

- Descobrimos a Soma dos Ângulos Internos de um Quadrilátero
(aproximadamente 20 minutos)

Para o aluno:

Na Atividade 1, você descobriu que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° . Agora, vamos investigar qual é a soma dos ângulos internos de quadriláteros – tanto convexos quanto côncavos.

1. Observe, no GeoGebra, um quadrilátero qualquer com suas medidas de ângulos internos exibidas (por exemplo, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) e a soma $S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$.
 - Anote o valor de S em seu caderno.
2. Arraste os vértices do quadrilátero, mudando bastante a forma (mas mantendo-o como quadrilátero):
 - O valor de S muda ou permanece o mesmo?
 - Registre ao menos três configurações diferentes e os valores observados de S .
3. Provoque a figura até obter um quadrilátero côncavo e verifique novamente:
 - O valor de S continua o mesmo?
 - Isso muda sua conclusão?

4. Agora, ative no GeoGebra a opção que mostra uma diagonal do quadrilátero:
 - Em que figuras o quadrilátero fica dividido ao traçar essa diagonal?
 - Qual é a soma dos ângulos internos de cada triângulo, de acordo com a Atividade 1?
5. Use essas informações para responder:
 - Como você pode explicar, usando as ideias de triângulos e diagonais, por que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é sempre igual a 360° ?
 - Escreva sua explicação em um parágrafo, tentando convencer alguém que ainda tem dúvidas.

Papel do Professor/Mediador (Etapa 4):

- Retomar explicitamente o “segredo” dos triângulos (soma 180°) e perguntar aos alunos como ele pode ser usado para entender quadriláteros.
- Incentivar que diferentes grupos apresentem suas estratégias de explicação (alguns podem focar em “ $2 \times 180^\circ$ ”; outros, em decomposição em dois triângulos).
- Ajudar os estudantes a organizar a explicação em uma sequência lógica, por exemplo:
 1. “Um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos por uma diagonal.”
 2. “Cada triângulo tem soma dos ângulos internos igual a 180° .”
 3. “Somando as somas dos dois triângulos, obtemos 360° .”
- Registrar no quadro, de forma coletiva, a conclusão: “A soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é sempre 360° .”
- Fechamento da Atividade – O “segredo” dos quadriláteros

Para o aluno:

Ao final desta atividade, responda em seu caderno:

1. Em uma frase, escreva o “segredo” que você descobriu sobre a soma dos ângulos internos dos quadriláteros.
2. Explique com suas palavras:
 - qual a diferença entre quadriláteros convexos e côncavos;
 - como a diagonal ajuda a entender a soma dos ângulos internos.
3. Pense: o que essa atividade tem a ver com o que você já sabia sobre triângulos? O que você aprendeu de novo sobre polígonos em geral?

Papel do Professor/Mediador (Fechamento):

- Convidar alguns alunos a lerem suas frases sobre o “segredo” dos quadriláteros e suas explicações.

- Relacionar explicitamente os resultados dos dois módulos:
 - triângulos: soma dos ângulos internos = 180° ;
 - quadriláteros: soma dos ângulos internos = 360° , obtida como soma das somas de dois triângulos.
- Destacar que essas ideias podem ser posteriormente ampliadas para polígonos de mais lados, mantendo vivo o espírito investigativo e o uso do GeoGebra como ferramenta para explorar invariantes geométricos.

Embora tais resultados não tenham sido investigados empiricamente no âmbito desta dissertação, a estrutura da Atividade 2 foi pensada para criar um cenário favorável à emergência desses comportamentos, em consonância com o que a literatura aponta sobre as potencialidades de tarefas investigativas mediadas por tecnologias digitais no ensino de Geometria Plana.

6.3.4 Critérios de acompanhamento da Atividade 2

A realização da Atividade 2 pode ser acompanhada pelo professor a partir de critérios formativos, considerando o modo como os estudantes observam, manipulam, comparam e classificam diferentes quadriláteros. Como a proposta não se limita ao reconhecimento visual das figuras, é importante observar se os estudantes identificam propriedades geométricas, registram regularidades, comparam diferentes casos e justificam suas classificações com base em lados, ângulos, paralelismo e diagonais.

Tabela 10 - Critérios de acompanhamento da Atividade 2

Critério	Em desenvolvimento	Adequado	Avançado
Manipulação das figuras	Move os elementos da construção sem objetivo claro ou apenas observa as figuras prontas.	Manipula os vértices dos quadriláteros e observa alterações em lados, ângulos e diagonais.	Manipula diferentes configurações de quadriláteros, comparando intencionalmente o que muda e o que permanece.
Identificação	Reconhece as figuras	Identifica propriedades	Relaciona diferentes

Critério	Em desenvolvimento	Adequado	Avançado
de propriedades	principalmente pela aparência ou pela posição em que aparecem na tela.	básicas, como número de lados, ângulos, paralelismo e diagonais.	propriedades para justificar a classificação dos quadriláteros.
Comparação entre quadriláteros	Compara as figuras de forma superficial, destacando apenas diferenças visuais.	Compara quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios com base em algumas propriedades.	Estabelece relações entre classes de quadriláteros, percebendo semelhanças, diferenças e possíveis inclusões.
Formulação de conjecturas	Faz afirmações vagas, como “parece um quadrado” ou “ficou torto”, sem justificar geometricamente.	Formula conjecturas coerentes sobre propriedades que se mantêm durante a manipulação.	Formula conjecturas mais gerais, relacionando invariantes geométricos à definição das figuras.
Justificativa matemática	Justifica apenas pela aparência da figura ou pela posição apresentada na tela.	Usa medidas, paralelismo, ângulos ou diagonais para justificar a classificação.	Articula diferentes propriedades e reconhece que a posição da figura não altera sua classificação geométrica.
Registro das observações	Registra poucos dados ou apenas copia informações visíveis no GeoGebra.	Registra propriedades observadas e compara diferentes figuras com coerência.	Organiza os registros de forma comparativa, destacando regularidades e contraexemplos.
Participação na discussão	Participa pouco ou apenas acompanha as respostas dos colegas.	Compartilha observações e conclusões com o grupo ou com a turma.	Questiona, compara argumentos e contribui para a construção coletiva da síntese.

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

6.3.5 Síntese analítica da Atividade 2

A Atividade 2 foi concebida para favorecer a passagem de uma identificação visual dos quadriláteros para uma análise baseada em propriedades geométricas. Ao manipular figuras no GeoGebra, o estudante tem a possibilidade de observar que a aparência de um quadrilátero pode se modificar, mas determinadas propriedades podem permanecer, dependendo das condições de construção da figura.

Essa distinção é pedagogicamente importante, pois muitos estudantes classificam quadriláteros apenas pela forma aparente ou pela posição em que a figura é apresentada. Um quadrado inclinado, por exemplo, pode deixar de ser reconhecido como quadrado por alguns alunos, caso a análise esteja apoiada apenas em imagens prototípicas. Nesse sentido, a atividade busca deslocar o olhar do estudante da aparência imediata para a identificação de propriedades, como lados congruentes, ângulos retos, paralelismo entre lados opostos e comportamento das diagonais.

A observação dinâmica proporcionada pelo GeoGebra, entretanto, não deve ser tratada como garantia de compreensão matemática. O fato de o estudante mover vértices, medir lados ou observar diagonais não assegura, por si só, que ele compreenda as propriedades dos quadriláteros. Por isso, a mediação docente é essencial para transformar a manipulação em investigação, conduzindo os estudantes a registrar regularidades, comparar casos, levantar hipóteses e justificar classificações.

Nesse sentido, a atividade dialoga com Skovsmose (2000), ao propor um cenário de investigação no qual os estudantes são convidados a explorar possibilidades, discutir propriedades e produzir significados matemáticos, em vez de apenas memorizar definições de quadrado, retângulo, losango, paralelogramo ou trapézio. Também se aproxima de Ponte et al. (1998), ao organizar a tarefa em torno da exploração, da formulação de conjecturas, do teste de casos particulares e da síntese coletiva.

Do ponto de vista curricular, a atividade contribui para o reconhecimento, a nomeação e a comparação de polígonos, especialmente quadriláteros, a partir de suas propriedades. Além disso, permite articular o estudo de quadriláteros com resultados matemáticos discutidos no Capítulo 5, como paralelismo, congruência, ângulos internos, diagonais e propriedades de quadriláteros notáveis. Dessa forma, o roteiro amplia o percurso

iniciado na Atividade 1, deslocando a investigação dos triângulos para figuras de quatro lados.

Assim, a Atividade 2 não se configura como uma simples atividade de classificação de figuras, mas como uma proposta investigativa em que o estudante é convidado a observar, manipular, comparar, registrar, conjecturar e justificar. Essa organização permite que o estudo dos quadriláteros seja desenvolvido de forma mais ativa e reflexiva, respeitando o caráter projetivo desta dissertação e evitando a antecipação de resultados que dependerão de aplicação empírica futura.

6.4 Possibilidades de ampliação do produto educacional

Além das duas atividades desenvolvidas de forma detalhada neste capítulo, o produto educacional pode ser ampliado a partir de outras construções disponíveis no GeoGebra. Essas atividades complementares não são analisadas individualmente nesta dissertação, pois não constituem o foco central do presente estudo; entretanto, são apresentadas como possibilidades de desdobramento para professores que desejem elaborar novos roteiros investigativos, adaptados às necessidades de suas turmas.

A inclusão desses links tem como objetivo ampliar o alcance pedagógico do produto educacional, oferecendo ao professor um repertório inicial de explorações possíveis em Geometria Plana. Dessa forma, preserva-se a estrutura analítica adotada nas Atividades 1 e 2, ao mesmo tempo em que se reconhece que o GeoGebra permite a criação de múltiplos cenários de investigação envolvendo polígonos, ângulos, paralelismo, diagonais, simetrias e outras propriedades geométricas.

Tabela 11 - Possibilidades de ampliação do produto educacional com atividades no GeoGebra

Título da atividade	Conteúdo matemático mobilizado	Possibilidade de exploração investigativa	Link de acesso
Desvendando o Segredo dos Triângulos:	Triângulos; ângulos internos; soma das medidas	Investigar, por meio da manipulação dinâmica, a regularidade da soma das medidas	https://www.GeoGebra.org/m/ve3bvxwp

Título da atividade	Conteúdo matemático mobilizado	Possibilidade de exploração investigativa	Link de acesso
uma aventura com o GeoGebra	dos ângulos internos	dos ângulos internos de diferentes tipos de triângulos.	
Descobrimo como Formar uma Figura de Quatro Lados	Quadriláteros; lados; vértices; noções iniciais de figuras planas	Explorar a formação de figuras de quatro lados, observando características básicas dos quadriláteros e suas possíveis configurações.	https://www.GeoGebra.org/m/g4yr_uznk
Desvendando os Paralelogramos	Paralelogramos; lados opostos paralelos; ângulos; diagonais	Investigar propriedades dos paralelogramos, observando o comportamento dos lados opostos, dos ângulos e das diagonais durante a manipulação da figura.	https://www.GeoGebra.org/m/engs_fv6b
Desvendando os Retângulos	Retângulos; ângulos retos; lados opostos; diagonais	Explorar as propriedades dos retângulos, com atenção à manutenção dos ângulos retos e ao comportamento das diagonais.	https://www.GeoGebra.org/m/sex7_snq6
Desvendando os Losangos	Losangos; lados congruentes; diagonais; perpendicularidade	Investigar propriedades dos losangos, observando a congruência dos lados e as relações entre suas diagonais.	https://www.GeoGebra.org/m/dgbf_4qmn
Desvendando os Quadrados	Quadrados; lados congruentes; ângulos retos; diagonais; relações entre	Investigar as propriedades dos quadrados, observando a manutenção dos quatro lados congruentes, dos quatro ângulos retos e o comportamento das	https://www.GeoGebra.org/m/spph_heke

Título da atividade	Conteúdo matemático mobilizado	Possibilidade de exploração investigativa	Link de acesso
	retângulos e losangos	diagonais durante a manipulação da figura.	

Fonte: Elaboração da própria autora (2025).

Este capítulo apresentou o produto educacional desenvolvido nesta dissertação, organizado em torno de atividades investigativas de Geometria Plana com o uso do GeoGebra. As propostas foram estruturadas de modo a articular os fundamentos matemáticos discutidos no Capítulo 5, as possibilidades pedagógicas das TDIC e da Geometria Dinâmica, as orientações da BNCC e os referenciais teóricos da Educação Matemática mobilizados ao longo do trabalho.

As Atividades 1 e 2 funcionam como modelos de elaboração de roteiros investigativos, pois apresentam análise a priori, orientações didáticas, critérios de acompanhamento e síntese analítica. A primeira atividade concentra-se na soma das medidas dos ângulos internos de triângulos, enquanto a segunda amplia a discussão para as noções iniciais de quadriláteros. Em ambas, o GeoGebra é compreendido como mediação para a exploração matemática, e não como garantia automática de aprendizagem.

Desse modo, o produto educacional não se configura como uma sequência fechada, mas como uma proposta aberta à adaptação por outros professores, inclusive em contextos com diferentes condições de infraestrutura. Ao indicar também possibilidades de ampliação por meio de outros links no GeoGebra, o capítulo reforça que o caráter investigativo da aula depende da qualidade das perguntas, dos registros, das discussões e da mediação docente. Assim, o material busca contribuir para um ensino de Geometria mais investigativo, crítico e coerente com as condições reais da escola pública.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo geral conceber, fundamentar e analisar, em termos teórico-metodológicos, uma sequência de atividades investigativas com o GeoGebra para a exploração de propriedades de polígonos, com ênfase em triângulos e quadriláteros, voltada aos anos finais do Ensino Fundamental em contexto de escola pública. A pesquisa foi desenvolvida a partir de uma abordagem qualitativa, caracterizada como estudo de design pedagógico, sem aplicação empírica sistemática no escopo deste trabalho.

Ao longo do percurso, buscou-se articular quatro eixos principais: os fundamentos da Geometria Plana, as orientações curriculares presentes nos documentos oficiais, o uso crítico das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação e as contribuições das metodologias investigativas para o ensino de Matemática. Essa articulação permitiu compreender que o uso do GeoGebra não deve ser tomado como solução automática para os desafios da aprendizagem geométrica, mas como uma mediação possível, cuja potência depende da intencionalidade da tarefa, da mediação docente, dos registros dos estudantes e das discussões produzidas em sala de aula.

O primeiro objetivo específico, relativo à análise dos fundamentos da Geometria Plana e de sua presença nos documentos curriculares, foi contemplado especialmente nos Capítulos 1 e 5. Neles, foram discutidos aspectos históricos, epistemológicos e matemáticos da Geometria, com atenção aos conceitos e propriedades necessários à compreensão de triângulos, quadriláteros, paralelismo, congruência, semelhança e outros resultados associados ao estudo de polígonos. Esse percurso evidenciou que o ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental deve ir além do reconhecimento visual das figuras e da aplicação mecânica de fórmulas, favorecendo a construção de argumentos e a compreensão de propriedades.

O segundo objetivo específico, relacionado à discussão do papel das TDIC e da Geometria Dinâmica no ensino de Matemática, foi desenvolvido nos Capítulos 2 e 3. A análise realizada mostrou que as tecnologias digitais podem ampliar as possibilidades de visualização, manipulação e experimentação, especialmente em conteúdos geométricos. Entretanto, também foi necessário reconhecer seus limites, sobretudo em contextos de escola pública, nos quais o acesso a equipamentos, internet e formação docente específica nem sempre está garantido. Desse modo, a proposta assumiu uma posição crítica diante das

TDIC, compreendendo o GeoGebra como ferramenta de mediação pedagógica e não como garantia de aprendizagem.

O terceiro objetivo específico, referente à proposição de roteiros de atividades investigativas com o GeoGebra, foi materializado no Capítulo 6. Foram desenvolvidas duas atividades principais: a primeira voltada à investigação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e a segunda direcionada às noções iniciais de quadriláteros. As atividades foram organizadas com análise a priori, roteiro para o estudante, critérios de acompanhamento e síntese analítica, buscando explicitar tanto o potencial pedagógico das tarefas quanto as condições necessárias para sua mediação em sala de aula.

O quarto objetivo específico, voltado à análise e discussão dos desdobramentos pedagógicos esperados, foi contemplado por meio das análises a priori e das sínteses analíticas das atividades. Como não houve aplicação empírica, não se afirma que os estudantes efetivamente desenvolveram determinadas aprendizagens. Em vez disso, argumenta-se que as tarefas foram concebidas para criar condições favoráveis à exploração, à formulação de conjecturas, ao teste de hipóteses, ao registro de observações e à argumentação matemática. Essa escolha preserva a coerência metodológica da pesquisa e evita transformar possibilidades pedagógicas em resultados não verificados.

A principal contribuição desta dissertação está na elaboração de um produto educacional fundamentado, voltado ao ensino de propriedades de polígonos com apoio do GeoGebra. Ao propor atividades que articulam visualização dinâmica, investigação matemática e critérios de acompanhamento, o trabalho oferece ao professor da Educação Básica um caminho possível para abordar a Geometria de forma mais exploratória e reflexiva. Além disso, ao incluir possibilidades de ampliação do produto educacional por meio de outros links no GeoGebra, a proposta assume um caráter aberto, permitindo adaptações a diferentes turmas, séries e condições de infraestrutura.

Reconhece-se, contudo, como principal limitação desta pesquisa, a ausência de aplicação empírica das atividades em turmas reais. Por esse motivo, não foi possível analisar produções dos estudantes, interações em sala de aula, dificuldades efetivamente encontradas ou intervenções docentes realizadas durante a implementação. Essa limitação não invalida o produto desenvolvido, mas delimita seu alcance: trata-se de uma proposta fundamentada e analisada previamente, cuja eficácia pedagógica deverá ser investigada em estudos posteriores.

Como continuidade deste trabalho, sugere-se a realização de ciclos de pesquisa de design em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, com aplicação das atividades, coleta de registros dos estudantes, análise das interações em sala de aula e avaliação das mediações docentes. Estudos futuros também poderão investigar adaptações do produto para contextos com diferentes níveis de acesso tecnológico, comparando o uso individual do GeoGebra, o uso projetado pelo professor e estratégias híbridas com materiais impressos, régua, transferidor e discussão coletiva.

Conclui-se que o produto educacional desenvolvido nesta dissertação contribui para o ensino de Geometria ao propor uma forma de trabalho em que o GeoGebra é integrado a uma prática investigativa, crítica e mediada pelo professor. A exploração de triângulos e quadriláteros, nesse contexto, deixa de se limitar à apresentação de definições e propriedades prontas, passando a envolver observação, comparação, conjectura e argumentação. Assim, esta dissertação busca oferecer uma contribuição concreta para o ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, especialmente em escolas públicas, ao defender que o dinamismo da aula não está apenas na tecnologia utilizada, mas na qualidade das perguntas, dos registros e das discussões que ela torna possível.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. A gênese instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 1–22, 2013.

ALMEIDA, F. J. Educação e informática: os computadores na escola. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

ALMEIDA, M. E. B. Educação a distância na internet: abordagens e contribuições dos ambientes digitais de aprendizagem. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 29, n. 2, p. 327–340, 2003.

ALMOULOU, S. A. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência com professores. *Revista Brasileira de Educação*, n. 27, p. 130–147, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1413-24782004000300007>. Acesso em: 2 ago. 2024.

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Geometria dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: **WORKSHOP EM INFORMÁTICA NA ESCOLA**, 9., 2003, São Paulo. Anais [...]. São Paulo: USP, 2003. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/wie/article/download/786/772>. Acesso em: 21 nov. 2023.

BARBOSA, P. M. O estudo da geometria. *Revista Benjamin Constant*, Rio de Janeiro, n. 25, 2003. Disponível em: <https://revista.ibc.gov.br/index.php/BC/article/view/546/261>. Acesso em: 8 ago. 2023.

BONIZÁRIO, A. N. S. et al. O impacto das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na educação: uma análise sistemática. *Revista FT*, 2023. Disponível em: <https://revistافت.com.br/o-impacto-das-tecnologias-da-informacao-e-comunicacao-tic-na-educacao-uma-analise-sistemtica/>. Acesso em: 16 jun. 2024.

Vale a pena conferir no PDF da revista o volume/número exatos, se constarem.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

Confere no seu exemplar se há indicação de edição (muitas vezes aparece “2. ed., 2010” em reimpressões mais recentes).

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A history of mathematics*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 27 jul. 2024.

CARNEIRO, A. P.; FIGUEIREDO, I. S. S.; LADEIRA, T. A. A importância das tecnologias digitais na educação e seus desafios. *Revista Educação Pública*, v. 20, 2020. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/35/a-importancia-das-tecnologias-digitais-na-educacao-e-seus-desafios>. Acesso em: 16 jun. 2024.

COSTA, D. M. B. et al. Geometria plana e espacial. 3. ed. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Expressão Gráfica, 2012.

DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de matemática. 12. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar. 9: Geometria plana*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

EUCLIDES. *Os elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, H. An introduction to the history of mathematics. 3rd ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GENTIL, R. M.; FURLANETTO, E. C. Aprendizagem baseada em problemas: educação e saúde numa tessitura interdisciplinar. In: **CONGRESSO INTERNACIONAL GALEGO PORTUGUÊS DE PSICOPEDAGOGIA**, 10., 2009, Braga. Anais [...]. Braga: Universidade do Minho, 2009. Disponível em:

https://lagarto.ufs.br/uploads/content_attach/path/11326/abp_numa_tessitura_interdisciplinar_0.pdf. Acesso em: 21 nov. 2023.

GOUVÊA, S. F. Os caminhos do professor na era da tecnologia. *Revista de Educação e Informática*, n. 13, 1999. Citado por: OLIVEIRA, E. D. Tecnologia e educação. In: **ENCONTRO DE PESQUISADORES DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO: CURRÍCULO**, 11., 2013, São Paulo. Anais [...]. São Paulo: PUC-SP, 2013. Disponível em: https://www4.pucsp.br/webcurriculo/edicoes_anteriores/encontro-pesquisadores/2013/downloads/anais_encontro_2013/oral/elda_damasio_de_oliveira.pdf.

Acesso em: 16 jun. 2024.

JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. A constituição de ambientes colaborativos de aprendizagem em ações de formação continuada: abordagem experimental com GeoGebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 375–397, 2018.

KENSKI, V. M. Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação. 11. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

LIMA, M. F.; ARAÚJO, J. F. S. A utilização das tecnologias de informação e comunicação como recurso didático-pedagógico no processo de ensino e aprendizagem. *Revista Educação Pública*, Rio de Janeiro, v. 21, n. 23, 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/23/a-utilizacao-das-tecnologias-de-informacao-e-comunicacao-como-recurso-didatico-pedagogico-no-processo-de-ensino-aprendizagem>. Acesso em: 16 jun. 2024.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista – SBEM*, v. 3, n. 4, 1995.

MAIA, L. E. O.; GONDIM, R. S.; VASCONCELOS, F. H. L. Utilização do GeoGebra para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 10, n. 1, 2023. DOI: 10.23925/2358-4122.2023v10i60031. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/60031>. Acesso em: 21 nov. 2023.

MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. C. Aprendizagem baseada em problemas na formação de profissionais da saúde. Fortaleza: Hucitec, 2001.

MALTEMPI, M. V. Investigação matemática com software de geometria dinâmica. Saarbrücken: Novas Edições Acadêmicas, 2016.

MALTEMPI, M. V.; MENDES, R. O. Tecnologias digitais na sala de aula: por que não? In: **CONGRESSO INTERNACIONAL DAS TIC NA EDUCAÇÃO**, 4., 2016, Lisboa. *Atas [...]*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2016. p. 86–96. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/ticeduca-maltempi_mendes.pdf.

Acesso em: 16 jun. 2024.

MARIN, D.; ARAÚJO, L. G. Metodologia do ensino de matemática. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25239/1/Metodologia%20do%20Ensino%20de%20Matematica.pdf>. Acesso em: 13 out. 2023.

OLIVEIRA, C. R.; OLIVEIRA, G. S.; SANTOS, A. O. Metodologias ativas e o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. *Revista Valore*, v. 6, 2021. DOI: 10.22408/reva602021103640-54. Disponível em: <https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/1036/823>. Acesso em: 11 fev. 2024.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7–17, jan./dez. 1993. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822>. Acesso em: 2 ago. 2024.

PEDASTE, M. et al. Phases of inquiry-based learning: definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review*, v. 14, p. 47–61, 2015.

PÓLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, João Pedro da; OLIVEIRA, Hélia; BRUNHEIRA, Lina; VARANDAS, José Manuel; FERREIRA, Catarina. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** *Quadrante*, Lisboa, v. 7, n. 2, p. 41-70, 1998.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000.

SOUZA, A. L. B. S. Um estudo sobre as principais dificuldades do ensino de geometria no ambiente escolar da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Luiz Aprígio. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em

Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, Mamanguape, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/14388>. Acesso em: 2 dez. 2025.

VALENTE, J. A.; BARANAUSKA, M. C. C.; MARTINS, M. C. ABInv – Aprendizagem baseada na investigação: uma alternativa para o ensino de ciências. Campinas: NIED/Unicamp, 2014. Disponível em: <https://www.nied.unicamp.br/wp-content/uploads/other-files/livro-abinv.pdf>. Acesso em: 4 ago. 2023.