Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

LEANDRO DA SILVA MATTOS

ARITMÉTICA DA SOMA DOS DÍGITOS E UMA PROPOSTA PARA ENSINO USANDO PADRÕES

SALVADOR
2024

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

LEANDRO DA SILVA MATTOS

ARITMÉTICA DA SOMA DOS DÍGITOS E UMA PROPOSTA PARA ENSINO USANDO PADRÕES

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey

SALVADOR
2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

M444 Mattos, Leandro da Silva de

Aritmética da soma dos dígitos e uma proposta para ensino usando padrões. / Leandro da Silva de Mattos. – Salvador, 2024.

58 f.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2024.

1. Matemática. 2. Aritmética. 3. GeoGebra. I. Yartey, Joseph Nee Anyah. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 51

"ARITMÉTICA DA SOMA DOS DÍGITOS E UMA PROPOSTA PARA ENSINO USANDO PADRÕES"

LEANDRO DA SILVA DE MATTOS

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em 11/06/2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Vinícius Moreira Mello

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Cláudia Ribeiro Santana

Profª. Dra. Cláudia Ribeiro Santana
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

Digitalizado com CamScanner

À minha família

Agradecimentos

Agradecer é, antes de tudo, um gesto de reconhecimento e gratidão, pois não conquistamos nada sozinho.

Gostaria inicialmente de agradecer a Deus todo poderoso, Que tornou tudo possível, por prover saúde em minha vida, além de perseverança e lucidez para continuar no caminho correto, mesmo quando os obstáculos apareceram.

Quero fazer um agradecimento especial a minha mãe, Ana Angélica da Silva de Mattos, que parou de estudar no 8º do ensino fundamental, mas é o meu maior exemplo de vida. Infelizmente ela não se faz mais presente nesse mundo e não posso compartilhar essa alegria com ela, mas com certeza ela é a maior incentivadora do meu sucesso em qualquer ramo da vida e certamente estaria hoje cm uma felicidade incomparável.

O agradecimento agora é para minha família, em especial a meu pai, Valter Raimundo Ferreira de Mattos, o homem que me ensinou o alfabeto e a ler as entrelinhas da vida. E a minha irmão Laisa da Silva de Mattos, uma pessoa que sempre me incentivou a estudar mais e mais.

Um agradecimento muito importante a Augusto Lobo de Mattos, a maior alegria de minha vida, meu filho de um ano e cinco meses, o seu nascimento me fez amadurecer dez anos e me incentiva a ser melhor profissionalmente, academicamente e como pessoa para ser mais que um educador e sim um exemplo para que ele seja uma pessoa de caráter e com todas as oportunidades de ser feliz.

Falando em felicidade o agradecimento agora é para Natália Lobo Soares, minha namorada, que em breve deve incorporar o sobrenome Mattos ao seu nome, uma grande incentivadora para a conclusão dessa dissertação, uma Conquistense de fibra que em vários momentos se sacrificou cuidando do nosso filho para que eu pudesse me concentrar nos meus estudos para a conclusão desse trabalho.

Meu ultimo agradecimento é para meu orientador, Joseph Nee Anyah Yartey, que me incentivou e me cobrou muito para o término desse TCC, além de ter me ajudado muito tanto com o látex como com o Geogebra.

"Mudaste o meu pranto em dança, a minha veste de lamento em veste de alegria, para que o meu coração cante louvores a ti e não se cale. Senhor, meu Deus, eu te darei graças para sempre.

(Bíblia Sagrada, Salmos 30:11-12)

Resumo

Este trabalho examina a aritmética das somas de dígitos no processo de ensino e aprendizagem no ensino fundamental e médio. A aritmética das somas dos dígitos equivale ao módulo aritmético 9, sendo a diferença o número 9 com resto 0. Criamos padrões (figuras geométricas) com as somas dos dígitos, com a ajuda do GeoGebra. Mostramos também que algumas figuras podem ser feitas em papéis quadriculados. Embora o ensino dos padrões o seja um desafio para os professores, este trabalho tem como objetivo compartilhar a metodologia adotada a fim de contribuir com a experiência prática no ensino de álgebra em sala de aula.

Palavras-chave: Soma dos dígitos, Padrões, GeoGebra.

Abstract

This work examines the arithmetic of digit sums in the process of teaching and learning in middle and high schoool. The arithmetic of digit sums is equivalent to arithmetic module 9, the difference being the number 9 with remainder 0. We create patterns (geometric figures) with the digit sums, with the help of GeoGebra. We also showed that some of the figures can made using square papers. Although teaching the o patterns is a challenge for teachers, this work aims to share the methodology adopted in order to contribute to practical experience in the teaching of algebra in classroom.

Keywords: Digit Sums, Patterns, GeoGebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Neste capítulo de introdução, eu vou falar um pouco da minha trajetória como professor da educação básica e das inquietações vividas por mim e provavelmente por muitos outros professores de matemática desse mesmo nível de ensino. Neste capítulo também será explicitado os objetivos e justificativas para a escolha dessa tema.

Esta dissertação visa desenvolver um produto educacional que atende os objetivos de um mestrado profissional para profissionais da educação básica. E tal produto pode ser utilizado como uma alternativa para material didático ou um material de apoio para os discentes que estudam a soma dos dígitos de um número inteiro, divisibilidade e a importância dos restos de uma divisão.

Eu estou na docência da educação básica desde 2003, tanto na rede particular quanto na rede pública, e tenho atuado na efetiva regência todos esses anos letivos, principalmente com alunos do ensino fundamental 2, e como a soma dos dígitos de um número natural já faz parte da divisibilidade por três e por nove, muitos alunos já têm o costume de fazer essa soma na trajetória deles como alunos. A introdução de congruência módulo 9 já é uma excelente associação do que no passado ele aprendeu como "tirar a prova dos nove" (noves fora). E os restos da divisão de modo geral me chamou muito a atenção, pois recentemente foi incorporado aos assuntos dados para os discentes do 7^o ano. Isso ocorreu devido a nova Base Nacional Curricular Comum – BNCC, pois a mesma propõe um ensino espiralado, ou seja, que em cada ano o aluno veja o mesmo assunto, mas de forma mais aprofundada. Percebi também que os livros didáticos ainda estão apresentando poucas explicações sobre esse assunto, mas tem uma boa gama de exercícios que exigem tal habilidade para a resolução.

Em vista do que foi dito, os alunos também tinham grande dificuldade na resolução dessas questões, por isso eu comecei a mudar minha metodologia no ensino de divisibilidade do 7° ano para inserir a soma dos dígitos de um número inteiro e um pouco de congruência em decorrência disso, os discentes conseguiram resolver as questões do livro didático com mais facilidade e outras questões de outras fontes.

Aritmética da soma dos dígitos é bastante lúdico para crianças entre 12 a 14 anos, além de ser algo que já foi visto por ele na "prova dos noves" no fundamental 1. E associar com o resto da divisão fica algo bem interessante pois os estudantes nesse nível de ensino estão muito mais acostumados a olhar para o quociente da divisão e a partir dessa introdução começaram a perceber a importância do resto e também a analisar que isso já era feito na prova dos noves que eles já faziam para tirar a prova de várias operações.

A utilização de atividades que necessitam de teoria dos restos vem sendo introduzidas em alguns livros didáticos do 7^o ano, O que deixa um gancho bem interessante para ser ensinado congruência de outros números que não seja o nove e para a resolução de inúmeras questões que necessitam desse conceito.

O objetivo deste material é ser um apoio para que os professores possam utilizar para minimizar as dificuldades dos discentes na resolução de várias questões de soma dos dígitos, divisibilidade e congruência. Acredito que a inserção de soma dos dígitos para divisibilidade e o estudo dos restos facilite bastante o entendimento dos educandos, mesmo que seja apenas uma parte introdutória desses conteúdos.

No primeiro capítulo falaremos sobre a soma dos dígitos e a congruência módulo 9, com isso iremos definir uma função para associar a soma dos dígitos de números inteiros aos restos da divisão por 9, que é um pouco dos "noves fora" visto na prova dos noves. No capítulo dois iremos mostrar o comportamento das operações adição, subtração e multiplicação do uso da função definida no capítulo anterior e com isso iremos mostrar também a praticidade de usar a prova dos noves para saber se sua operação está ou não correta.

Os capítulos 3 e 4 são propostas de ensino para alunos do fundamental dois, o terceiro capítulo é voltado mas para a parte geométrica e mostrar ciclos que ocorrem com os restos, já o quarto e último capítulo é para mostrar algumas atividade de alunos do sétimo ano na utilização de prova dos noves com o uso de congruência módulo 9 e soma dos dígitos dos números inteiros.

1 Congruências

Ao fundamentarmos a aritmética das somas dos dígitos, faz-se interessante apresentar os principais resultados referentes à congruência módulo m, ou "a aritmética dos restos de uma divisão por $n \in \mathbb{Z}$.

Para isso,utilizaremos como base a bibliografia [2]. Como bibliografia complementar utilizamos [3].

Definição 1.1. Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Dizemos que a é congruente b módulo n e escrevemos

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{ou} \quad a \equiv_n b$$

se, e somente se, $a - b$ é um múltiplo de n, isto é, se, e somente se $a - b = kn$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Observação 1. *Como $(a - b) = kn \iff (a - b) = (-k)(-n)$ nos restringiremos ao caso $n > 0$. O caso $n = 1$ é trivial pois qualquer 2 inteiros são congruentes módulo 1. Geralmente, os casos interessantes são $n > 1$.*

Exemplo 1.2.

1. $13 \equiv 18 \pmod{5}$ pois $(13 - 18) = 5 = 5 \cdot 1$
2. $152 \equiv_7 5$ pois $(152 - 5) = 147 = 7 \cdot 21$.
3. $7 \equiv_8 15$ pois $(7 - 15) = -8 = 8 \cdot (-1)$.
4. $-101 \equiv_3 1$ pois $(-101 - 1) = -102 = 3 \cdot (-34)$.
5. $16 \equiv -1 \pmod{17}$ pois $(16 - (-1)) = 17 = 17 \cdot 1$.

Proposição 1.3. *Considere $a, b \in \mathbb{Z}$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) $a \equiv b \pmod{n}$;

(b) $n \big| (a - b)$;

(c) a e b dão o mesmo resto, na divisão por n.

Demonstração.

$(a) \Rightarrow (b)$: Suponha que $a \equiv b \pmod{n}$. Então

$$a - b = nk, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n \big| (a - b).$$

$(b) \Rightarrow (c):$ Suponha que $n \Big| (a-b)$

Fazendo as divisões de a e b por n, temos

$$\begin{array}{lll} (1) & a = q_1 n + r_1, & q_1, r_1 \in \mathbb{Z}, \text{ com } 0 \leq r_1 < n \\ (2) & b = q_2 n + r_2, & q_2, r_2 \in \mathbb{Z}, \text{ com } 0 \leq r_2 < n \end{array}$$

Suponha que $r_2 \leq r_1$. Portanto $0 \leq r_1 - r_2 \leq r_1 < n$.

Subtraindo (2) de (1) temos,

$$a - b = (q_1 - q_2)n + (r_1 - r_2) \tag{$*$}$$

Desse modo, $0 \leq r_1 - r_2 < n$ é o resto da divisão de $(a-b)$ por n.

Portanto $(r_1 - r_2) = 0 \Rightarrow r_1 - r_2$ pois $(a-b)$ é múltiplo de n.

$(c) \Rightarrow (a):$ Suponha que a e b deixam o mesmo resto na divisão por n, então

$$\begin{array}{lll} (1) & a = q_1 n + r, & q_1, r \in \mathbb{Z}, \text{ com } 0 \leq r < n \\ (2) & b = q_2 n + r, & q_2 \in \mathbb{Z}, \end{array}$$

Subtraindo (2) de (1) temos,

$$a - b = (q_1 - q_2)n$$

Portanto, a diferença $(a-b)$ é um múltiplo de n

$$\Rightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

□

A congruência módulo n é uma relação de equivalência. Isto é

Proposição 1.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se:*

(a) $a \equiv a \ (mod\ n)$ (reflexiva)

(b) Se $a \equiv b \ (mod\ n)$ então $b \equiv a \ (mod\ n)$ (simétrica)

(c) Se $a \equiv b \ (mod\ n)$ e $b \equiv c \ (mod\ n)$ então $a \equiv c \ (mod\ n)$ (transitiva)

Portanto $\equiv_n$ é um relação de equivalência.

Demonstração.

(a) $a \equiv a \pmod{n}$.

De fato, $(a - a) = 0 = 0 \cdot n$.

(b) Suponha que $a \equiv b \pmod{n}$. Então $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} a - b &= kn \\ \Rightarrow b - a &= (-k)n \end{aligned}$$

Como $(-k) \in \mathbb{Z}$, temos que $b \equiv a \pmod{n}$.

(c) Suponha que $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$.Então

$$\begin{aligned} a - b &= k_1 n, \qquad k_1 \in \mathbb{Z} \\ b - c &= k_2 n, \qquad k_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Somando, temos que

$$\begin{aligned} (a-b) + (b-c) &= k_1 n + k_2 n \\ \Rightarrow (a - c) &= (k_1 + k_2)n \\ \Rightarrow a &\equiv c \pmod{n} \end{aligned}$$

Como $\equiv_n$ é reflexiva, simétrica e transitiva, logo temos que é uma relação de equivalência. □

1.1 Propriedades básicas de congruências

Teorema 1.5.

(a) Se $a \equiv b$ (mod n) e $c \equiv d$ (mod n) então $a + c \equiv b + d$ (mod n)

(b) Se $a \equiv b$ (mod n) e $c \equiv d$ (mod n) então $a - c \equiv b - d$ (mod n)

(c) Se $a \equiv b$ (mod n) e c é inteiro não negativo, então $ac \equiv bc$ (mod n)

(d) Se $a \equiv b$ (mod n) e $c \equiv d$ (mod n) então $ac \equiv bd$ (mod n)

(e) Se $a \equiv b$ (mod n) e k é um inteiro positivo, então $a^k \equiv b^k$ (mod n)

(f) Se $a + c \equiv b + c$ (mod n) então $a \equiv b$ (mod n)

(g) Se $da \equiv db$ (mod dn) então $a \equiv b$ (mod n).

Demonstração.

(a) Suponha que $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$. Então

$$\begin{aligned} a - b &= k_1 n, \qquad k_1 \in \mathbb{Z} \\ c - d &= k_2 n, \qquad k_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Somando, temos que

$$\begin{aligned} (a-b)+(c-d) &= k_1n+k_2n \\ \Rightarrow (a+c)-(b+d) &= (k_1+k_2)n \\ \Rightarrow (a+c)-(b+d) &= k_3n, \quad \text{onde } k_3=(k_1+k_2)\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow (a+c) &\equiv (b+d) \pmod{n} \end{aligned}$$

(b) Suponha que $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$. Então

$$\begin{aligned} a-b &= k_1n, \qquad k_1\in\mathbb{Z} \\ c-d &= k_2n, \qquad k_2\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Subtraindo, temos que

$$\begin{aligned} (a-b)-(c-d) &= k_1n-k_2n \\ \Rightarrow (a-c)-(b-d) &= (k_1-k_2)n \\ \Rightarrow (a-c)-(b-d) &= k_3n, \quad \text{onde } k_3=(k_1-k_2)\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow (a-c) &\equiv (b-d) \pmod{n} \end{aligned}$$

(c) Suponha que $a \equiv b \pmod{n}$. Então $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a-b=kn$$

Multiplicando por c temos

$$\begin{aligned} ac-bc &= (kc)n \\ \Rightarrow ac-bc &= k_1n \end{aligned}$$

Como $k_1=(kc)\in\mathbb{Z}$, temos que $ac \equiv bc \pmod{n}$.

(d) Suponha que $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$. Então

$$\begin{aligned} a-b &= k_1n, \qquad k_1\in\mathbb{Z} \\ c-d &= k_2n, \qquad k_2\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Queremos provar que $ac-bd=k_3n, \quad$ sendo $\ k_3\in\mathbb{Z}$. Observe que

$$\begin{aligned} ac-bd &= ac\underbrace{-bc+bc}_{=0}-bd \\ &= (a-b)c+(c-d)b \\ &= k_1cn+k_2bn \\ &= (k_1c+bk_2)n \\ \Rightarrow ac-bd &= k_3n \quad \text{sendo} \quad k_3=(k_1c+k_2b)\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow ac &\equiv bd \pmod{n} \end{aligned}$$

(e) Vamos provar usando (d)

$$k \text{ vezes} \begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ a \equiv b \pmod{n} \\ \qquad \vdots \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \overset{\text{pela }(d)}{\Longrightarrow} a^k \equiv b^k \pmod{n}.$$

Podemos provar(h) também por indução. Faça como exercício.

(f) Suponha que $a + c \equiv b + c \pmod{n}$. Então $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} (a+c) - (b+c) &= kn \\ \Rightarrow a - b &= kn \\ \Rightarrow a &\equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

(g) Suponha que $da \equiv db \pmod{dn}$. Então $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} da - db &= kdn \\ \Rightarrow a - b &= kn \\ \Rightarrow a &\equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

$\square$

2 Aritmética das somas dos dígitos

Seja N um inteiro positivo com n dígitos, isto é

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 \quad \text{em que } \ 0 \leq a_i \leq 9, \text{ e } a_n \neq 0.$$

Se somamos o dígitos de N, $\ a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$ obtemos um inteiro positivo N_1, com K dígitos, sendo que K menor do que n isto é,

$$N_1 = b_k b_{k-1} \cdots b_1, \quad \text{sendo } \ 1 \leq k < n.$$

Se $k = 1$, isto é N_1 possui um único dígito, terminamos o processo. Caso contrário, somamos os dígitos de N_1, obtemos um inteiro positivo N_2 com dígitos menor do que k. Após,um número finito de iterações deste procedimento termina em um único dígito diferente de zero d.

Apresentamos a seguinte terminologia para ajudar a formalizar esses conceitos baseada no artigo [6].

Definição 2.1. *Seja N um inteiro positivo, e seja N_1 o único inteiro positivo obtido somando os dígitos de N. Diremos que a* ***soma dos dígitos*** *de N é N_1 e escrevemos $S(N) = N_1$.*

Observe que S é um função de $S : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$. Chamamos S a função da soma dos dígitos.

Definição 2.2. *A* ***representação digital*** *de um número inteiro positivo N, denotado por $dr(N)$, é o único dígito diferente de zero d que resulta após um número finito de iterações da função da soma dos dígitos S.*
Expressamos isso simbolicamente por $dr(N) = d$.

Como dr é uma função $dr : \mathbb{Z}^+ \to D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ chamamos dr a função da representação digital.

Definição 2.3. *Sejam N um inteiro positivo e k o menor inteiro não negativo tal que $S^k(N) = dr(N)$ (sendo $S^0(N) = N$). Então dizemos que N tem representação digital de ordem k.*

Exemplo 2.1.

(a) $S(518) = 5 + 1 + 8 = 14$; $\ S^2(518) = S(14) = 1 + 4 = 5$, *logo* $dr(518) = 5$.
Portanto 518 tem representação digital de ordem 2.

(b) $S(42946913168939229637832998 4) = 4+2+9+4+6+9+1+3+1+6+8+9+3+9+2+2+9+6+3+7+8+3+2+9+9+8+4 = 117;$
$S^2(4294691316893922963783299 84984) = S(146) = 1+4+6 = 11,$
$S^3(429469131689392296378329984) = S(11) = 1+1 = 2,$
logo $dr(429469131689392296378329984) = 2.$
Portanto 429469131689392296378329984 *tem representação digital de ordem 3.*

(c) $dr(7) = 7$, *logo 7 tem representação digital de ordem 0.*

2.1 Equivalência entre aritmética das somas dos dígitos e congruência modulo 9

Teorema 2.1. *Se N é um inteiro positivo, então $N \equiv S(N) \pmod 9$.*

Demonstração. Seja $N = a_r a_{r-1} \cdots a_i \cdots a_1 a_0$ um numero inteiro positivo escrito na base decimal onde $a_0, a_1, \cdots, a_r$ são os algarismos que compõe o número $(0 \leq a_i \leq 9,\ i = 0, 1, \cdots, r)$. Então

$$N = a_r 10^r + a_{r-1}10^{r-1} + \cdots + 10^i a_i + \cdots + 10a_1 + a_0.$$

Como $10^r \equiv 1 \pmod 9$ para qualquer inteiro positivo k, temos que

$$\begin{aligned} N &= 10^r a_r + 10^{r-1} a_{r-1} + \cdots + 10^i a_i + \cdots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 \\ &\equiv a_r + a_{r-1} + \cdots + a_i + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 9 \\ &= S(N) \pmod 9 \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1. *Se N é um inteiro positivo, então $N \equiv dr(N) \pmod 9$.*

Demonstração. Seja N com representação digital de ordem k, isto é $S^k(N) = \mathrm{dr}(N)$.

- Se $k = 0$, então $S^0(N) = N$. Neste caso $S(N) = \mathrm{dr}(N)$. Logo pelo Teorema 2.1, temos que $N \equiv S(N) \pmod 9$. Mas como $S(N) = \mathrm{dr}(N)$, concluímos que

$$N \equiv \mathrm{dr}(N) \pmod 9.$$

- Se $k \geq 1$, então pelo Teorema 2.1

$$\begin{aligned} N &\equiv S(N) \pmod 9 \\ S(N) &\equiv S(S(N)) = S^2(N) \pmod 9 \\ S^2(N) &\equiv S(S^2(N)) = S^3(N) \pmod 9 \\ &\vdots \\ S^{k-1}(N) &\equiv S(S^{k-1}(N)) = S^k(N) = \mathrm{dr}(N) \pmod 9 \end{aligned}$$

Portanto pela transitividade da relação de congruência modulo 9, temos que $N \equiv \mathrm{dr}(N) \pmod 9$.

$\square$

Corolário 2.2. *Sejam N e d inteiros positivos, com $1 \leq d < 9$. Então*

(a) $N \equiv d \pmod 9$ se, e somente se, $dr(N) = d$.

(b) N é um múltiplo de 9, se, e somente se, $dr(N) = 9$.

Demonstração.

(a) $N \equiv \mathrm{dr}(N) \pmod 9$ pelo Corolário 2.1. Como $1 \leq \mathrm{dr}(N) \leq 9$ e N é côngruo a exatamente um único elemento do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ segue que

$$N \equiv d \;(\bmod 9) \;\text{ se, e somente se, }\; \mathrm{dr}(N) = d.$$

(b) Se $N \equiv 0 \pmod 9$ então $\mathrm{dr}(N) \equiv 0 \pmod 9$ pela transitividade de côngruo modulo 9 e pelo Corolário 2.1. Mas como $1 \leq \mathrm{dr}(N) \leq 9$, temos que $\mathrm{dr}(N) = 9$.

$\square$

Exemplo 2.2.

(a) Como $152 \equiv 8 \pmod 9$, temos que $dr(152) = 8$.

(b) $dr(9) = 9,\; dr(18) = 9,\; dr(27) = 9,\; dr(36) = 9,$ assim por diante.

Observação 2. *O Corolário 2.2 nos diz que a Função da Representação digital dr é simplesmente **o resto da divisão módulo 9**, isto é,*

$$dr(N) = (N \mod 9).$$

Deve-se notar que no cálculo da dr, um valor de 9 é dado como 9, enquanto na aritmética do módulo 9, um valor de 9 é dado como 0, isto é $9 \equiv 0(\bmod 9)$.
Na tabela abaixo, mostramos a relação de $dr(N)$ e $(N \bmod 9)$ para $1 \leq N \leq 18$.

N	$dr(N)$	$(N \bmod 9)$
1	*1*	*1*
2	*2*	*2*
3	*3*	*3*
4	*4*	*4*
5	*5*	*5*
6	*6*	*6*
7	*7*	*7*
8	*8*	*8*
9	*9*	*0*
10	*1*	*1*
11	*2*	*2*
12	*3*	*3*
13	*4*	*4*
14	*5*	*5*
15	*6*	*6*
16	*7*	*7*
17	*8*	*8*
18	*9*	*0*

Podemos expressar a relação entre $dr(N)$ *e* $(N \bmod 9)$ *por*

$$dr(N) = \Big((N-1) \mod 9\Big) + 1$$

ou

$$(N \mod 9) = dr(N+1) - 1.$$

Por exemplo, sabemos que $dr(512) = 8$, *que podemos calcular usando a fórmula*

$$\begin{aligned} dr(512) &= \Big((512-1) \mod 9\Big) + 1 \\ &= \Big((511) \mod 9\Big) + 1 \\ &= 7 + 1 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Este relação entre $dr(N)$ *é* $(N \bmod 9)$, *nos permite estender a definição da função da representação digital para todos os inteiros* $\mathbb{Z}$.

Definição 2.4. *A função da representação digital então pode ser definida como*

$$dr : \mathbb{Z} \to D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

sendo

$$dr(N) = d \Longleftrightarrow d \text{ é o resto da divisão de } N \text{ módulo } 9.$$

Pode então estender a Definição 2.3 no seguinte sentido:

Definição 2.5. *Sejam N um inteiro positivo e k o menor inteiro não negativo tal que $S^k(N) = dr(N)$. Então*

$$dr(-N) = \Big(- S^k(N) \mod 9 \Big)$$

Exemplo 2.3.

(a) $dr(-2) = 7$ *pois* $-2 = -1 \cdot 9 + 7$

(b) $dr(-25) = 2$ *pois* $-25 = -3 \cdot 9 + 2$

(c) Seja $N = 123978$. *Então* $S(N) = 1{+}2{+}3{+}9{+}7{+}8 = 30$, $S^2(N) = S(N) = 3{+}0 = 3$. *Logo* $dr(-123978) = \Big(- 3 \mod 9 \Big) = 6$.

3 Propriedades da Função Soma dos dígitos

Vamos usar a equivalência entre a função soma dos dígitos e congruências módulo 9 para analisar algumas propriedades da função soma dos dígitos. As propriedades da soma dos dígitos é baseada no artigo [4].

3.1 Adição

Lema 3.1. *Sejam N_1 e N_2 dois inteiros. Então*

$$dr(N_1 + N_2) = dr\Big(dr(N_1) + N_2\Big) = dr\Big(N_1 + dr(N_2)\Big) = dr\Big(dr(N_1) + dr(N_2)\Big).$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.1, temos

$$N_1 = \mathrm{dr}(N_1) + 9j, \quad \text{para algum inteiro } j, \quad \text{e} \quad N_2 = \mathrm{dr}(N_2) + 9k, \quad \text{para algum inteiro } k.$$

Então

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= \Big(\mathrm{dr}(N_1) + 9j\Big) + N_2 = N_1 + \Big(\mathrm{dr}(N_2) + 9k\Big) \\ &= \Big(\mathrm{dr}(N_1) + 9j\Big) + \Big(\mathrm{dr}(N_2) + 9k\Big) \\ &= \Big(\mathrm{dr}(N_1) + \mathrm{dr}(N_2)\Big) + 9(j + k). \end{aligned}$$

E segue então que

$$N_1 + N_2 \equiv \mathrm{dr}(N_1) + N_2 \equiv N_1 + \mathrm{dr}(N_2) \equiv \mathrm{dr}(N_1) + \mathrm{dr}(N_2) \pmod 9.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{dr}(N_1 + N_2) &\equiv \mathrm{dr}\Big(\mathrm{dr}(N_1) + N_2\Big) \equiv \mathrm{dr}\Big(N_1 + \mathrm{dr}(N_2)\Big) \\ &\equiv \mathrm{dr}\Big(\mathrm{dr}(N_1) + \mathrm{dr}(N_2)\Big) \pmod 9 \end{aligned}$$

Logo pelo Corolário 2.2, temos o resultado. □

Exemplo 3.1.

$$dr(786) = 3$$
$$dr(152) = 8$$
$$dr(786 + 152) = dr(938) = 2$$
$$dr\Big(dr(786) + 152\Big) = dr(3 + 152) = dr(155) = 2$$
$$dr\Big(786 + dr(152)\Big) = dr(786 + 8) = dr(794) = 2$$
$$dr\Big(dr(786) + dr(152)\Big) = dr(3 + 8) = dr(11) = 2.$$

Portanto

$$dr(786 + 152) = dr\Big(dr(786) + 152\Big) = dr\Big(786 + dr(152)\Big) = dr\Big(dr(786) + dr(152)\Big).$$

Lema 3.2. *Sejam N_1 e N_2 dois inteiros. Então*

$$dr(N_1 - N_2) = dr\Big(dr(N_1) - dr(N_2)\Big).$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.1, temos

$$N_1 = \mathrm{dr}(N_1) + 9j, \quad \text{para algum inteiro } j, \quad \text{e} \quad N_2 = \mathrm{dr}(N_2) + 9k, \quad \text{para algum inteiro } k.$$

Então

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= \Big(\mathrm{dr}(N_1) + 9j\Big) - \Big(\mathrm{dr}(N_2) + 9k\Big) \\ &= \Big(\mathrm{dr}(N_1) - \mathrm{dr}(N_2)\Big) + 9(j - k). \end{aligned}$$

E segue então que

$$N_1 - N_2 \equiv \mathrm{dr}(N_1) - \mathrm{dr}(N_2) \pmod 9.$$

Portanto,

$$\mathrm{dr}(N_1 - N_2) = \mathrm{dr}\Big(\mathrm{dr}(N_1) - \mathrm{dr}(N_2)\Big).$$

□

Exemplo 3.2.

$$dr(962) = 8.$$
$$dr(151) = 7.$$
$$dr(962 - 151) = dr(811) = 1.$$
$$dr\Big(dr(962) - dr(151)\Big) = dr(8 - 7) = 1$$

Portanto,

$$dr(962 - 151) = dr\Big(dr(962) - dr(151)\Big).$$

Observação 3. *A propriedade de Lema 3.2 deve ser interpretada corretamente quando a diferença das somas dos dígitos for negativa ou zero no sentido de Definição 2.4.*

Exemplo 3.3.

$$\begin{aligned}
dr(152) &= 8.\\
dr(786) &= 3.\\
dr(152-786) &= dr(-634) = 5 \quad pois \quad -634 = -71\cdot 9 + 5.\\
dr(786-152) &= dr(634) = 4.\\
dr\Big(dR(786) - dr(152)\Big) &= dr(3-8) = dr(-5) = 4 \quad pois \quad -5 = -1\cdot 9 + 4.\\
dr\Big(dr(152) - dr(786)\Big) &= dr(8-3) = dr(5) = 5.
\end{aligned}$$

Portanto

$$dr(152-786) = dr\Big(dr(152) - dr(786)\Big)$$

e

$$dr(786-152) = dr\Big(dr(786) - dr(152)\Big).$$

3.2 Multiplicação

Lema 3.3. *Sejam N_1 e N_2 dois inteiros. Então*

$$dr(N_1\cdot N_2) = dr\Big(dr(N_1)\cdot N_2\Big) = dr\Big(N_1\cdot dr(N_2)\Big) = dr\Big(dr(N_1)\cdot dr(N_2)\Big).$$

Em geral,

$$dr(N_1\cdot N_2\cdot N_3\cdots N_k) = dr\Big(dr(N_1)\cdot dr(N_2)\cdot dr(N_3)\cdots dr(N_k)\Big).$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.1, temos

$$N_1 = \mathrm{dr}(N_1) + 9j, \quad \text{para algum inteiro } j, \quad \text{e} \quad N_2 = \mathrm{dr}(N_2) + 9k, \quad \text{para algum inteiro } k.$$

Então

$$\begin{aligned}
N_1\cdot N_2 &= \Big(\mathrm{dr}(N_1) + 9j\Big)\cdot N_2 = N_1\cdot\Big(\mathrm{dr}(N_2) + 9k\Big)\\
&= \Big(\mathrm{dr}(N_1) + 9j\Big)\cdot\Big(\mathrm{dr}(N_2) + 9k\Big)\\
&= \Big(\mathrm{dr}(N_1)\cdot\mathrm{dr}(N_2)\Big) + 9\Big(\mathrm{dr}(N_1)\cdot k + \mathrm{dr}(N_2)\cdot j + j\cdot k\Big).
\end{aligned}$$

E segue então que

$$N_1\cdot N_2 \equiv \mathrm{dr}(N_1)\cdot N_2 \equiv N_1\cdot\mathrm{dr}(N_2) \equiv \mathrm{dr}(N_1)\cdot\mathrm{dr}(N_2) \pmod 9.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{dr}(N_1 \cdot N_2) &\equiv \mathrm{dr}\Big(\mathrm{dr}(N_1) \cdot N_2\Big) \equiv \mathrm{dr}\Big(N_1 \cdot \mathrm{dr}(N_2)\Big)\\ &\equiv \mathrm{dr}\Big(\mathrm{dr}(N_1) \cdot \mathrm{dr}(N_2)\Big) \pmod 9\end{aligned}$$

Logo pelo Corolário 2.2, temos o resultado. □

Corolário 3.1. *Seja N um inteiro e k um inteiro positivo então*

$$dr(N^k) = dr\left(\Big(dr(N)\Big)^k\right).$$

Demonstração. Segue da Lema 3.3. □

Exemplo 3.4.

$$\begin{aligned} dr(786) &= 3\\ dr(152) &= 8\\ dr(786 \cdot 152) &= dr(119472) = 6\\ dr\Big(dr(786) \cdot 152\Big) &= dr(3 \cdot 152) = dr(456) = 6\\ dr\Big(786 \cdot dr(152)\Big) &= dr(786 \cdot 8) = dr(6288) = 6\\ dr\Big(dr(786) \cdot dr(152)\Big) &= dr(3 \cdot 8) = dr(24) = 6. \end{aligned}$$

Portanto

$$dr(786 \cdot 152) = dr\Big(dr(786) \cdot 152\Big) = dr\Big(786 \cdot dr(152)\Big) = dr\Big(dr(786) \cdot dr(152)\Big).$$

Exemplo 3.5. *Determine a soma dos dígitos de* 4^{30}.

***R**esolução:* $\mathrm{dr}(4^3) = \mathrm{dr}(64) = 1$. Portanto

$$\mathrm{dr}(4^{30}) = \Big(\mathrm{dr}(4^3)\Big)^{10} = 1^{10} = 1.$$

Logo a soma dos dígitos de 4^{30} é igual a 1.

Lema 3.4. *Sejam $P(x) = x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1$ um polinômio e N um inteiro. Então*

$$dr(P(N)) = dr\Big(P(dr(N)\Big)$$

Demonstração. Segue das Lemas 3.1 e 3.3. □

Exemplo 3.6. *Seja $P(x) = x^2 + x$. Então*
$P(11) = 11^2 + 11 = 121 + 11 = 132$ *e portanto*

$$dr(P(11)) = dr(132) = 6.$$

$$dr\left(P(dr(11)\right) = dr\left(P(2)\right) = dr(2^2 + 2) = dr(6) = 6.$$

4 Produto Educacional

Aqui são propostas atividades a serem desenvolvidas do ensino e aprendizagem da soma dos dígitos/módulo 9, com os alunos em sala de aula com a ajuda do Software GeoGebra.

4.1 Produto Educacional - 1 - Observando padrões das Soma dos dígitos de Múltiplos de Números

A Atividade 1 tem caráter introdutório e visa oportunizar aos estudantes uma análise os padrões que podem observar nas somas dos dígitos em múltiplos de números.

A fundamentação teórica desta atividade é o seguinte proposição:

Proposição 4.1.

(a) Se MDC$(9,N)=9$ então dr$(N)=9$. Portanto dr de múltiplos de N é sempre 9. Isto é dr$(kN)\in\{9\}, k=1,2,\cdots$. Logo dizemos que dr$(kN)$ é uma sequência repetida de comprimento 1.

(b) Se MDC$(9,N)=1$ então dr$(N)\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Portanto dr de múltiplos de N é um valor do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Isto é dr$(kN)\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, k=1,2,\cdots$. Logo dizemos que dr$(kN)$ é uma sequência repetida de comprimento 9.

(c) Se MDC$(9,N)=3$ e N não é múltiplo de 9 então dr$(N)\in\{3,6\}$. Portanto dr de múltiplos de N é um valor do conjunto $\{3,6,9\}$. Isto é dr$(kN)\in\{3,6,9\}, k=1,2,\cdots$. Logo dizemos que dr$(kN)$ é uma sequência repetida de comprimento 3.

Demonstração.

(a) Como $N=9q+\mathrm{dr}(N)$ para algum inteiro q, temos que se $\mathrm{MDC}(9,N)=9$ então 9 divide $\mathrm{dr}(N)$. Portanto $\mathrm{dr}(N)=9$. Logo $\mathrm{dr}(kN)=9$ para $k=1,2,3,\cdots$.

(b) Como $N=9q+\mathrm{dr}(N)$ para algum inteiro q, temos que se $\mathrm{MDC}(9,N)=1$ então 9 não divide $\mathrm{dr}(N)$. Portanto $\mathrm{dr}(N)\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Logo $\mathrm{dr}(kN)\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para $k=1,2,3,\cdots$.

(c) Como $N=9q+\mathrm{dr}(N)$ para algum inteiro q, temos que se $\mathrm{MDC}(9,N)=3$ e N não é múltiplo de 9 então N só pode ser $9q+3$ ou $9q+6$. Portanto $\mathrm{dr}(N)\in\{3,6\}$. Logo $\mathrm{dr}(kN)\in\{3,6,9\}$ para $k=1,2,3,\cdots$.

□

Atividade 1: Construir uma tabela (18 por 18) dos múltiplos dos números $1, 2, 3, \cdots, 18$.

Resposta:

N	N	2N	3N	4N	5N	6N	7N	8N	9N	10N	11N	12N	13N	14N	15N	16N	17N	18N
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	140
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	180	190
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324

Tabela 1 – Múltiplos de N

Atividade 2: Construir uma tabela (18 por 18) das somas dos dígitos da Atividade 1.

Resposta

N	N	2N	3N	4N	5N	6N	7N	8N	9N	10N	11N	12N	13N	14N	15N	16N	17N	18N
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	5	1	6	2	7	3	8	4	9	5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	6	3	9	6	3	9	6	3	9	6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	7	5	3	1	8	6	4	2	9	7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	8	7	6	5	4	3	2	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	2	4	6	8	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	9
12	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9
13	4	8	3	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7	2	6	1	5	9
14	5	1	6	2	7	3	8	4	9	5	1	6	2	7	3	8	4	9
15	6	3	9	6	3	9	6	3	9	6	3	9	6	3	9	6	3	9
16	7	5	3	1	8	6	4	2	9	7	5	3	1	8	6	4	2	9
17	8	7	6	5	4	3	2	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	9
18	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Tabela 2 – dr de múltiplos de N

Atividade 3: Com base na Tabela 2, construir uma tabela indicando o ciclo repetitivo dos números e seus comprimentos.

Resposta

N	Ciclo repetitivo de dr de múltiplos de N	Comprimento do ciclo
1	$\{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9\}$	9
2	$\{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9\}$	9
3	{3, 6, 9}	3
4	{4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9}	9
5	{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9}	9
6	{6, 3, 9}	3
7	{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2, 9}	9
8	{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9}	9
9	{9}	1
10	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	9
11	{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9}	9
12	{3, 6, 9}	3
13	$\{4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9, 4\}$	9
14	{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9}	9
15	{6, 3, 9}	3
16	{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2, 9}	9
17	{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9}	9
18	{9}	1

Tabela 3 – Sequência cíclica de *dr* de múltiplos de N

Agora considere a tabela (9 por 9), isto é

N	N	2N	3N	4N	5N	6N	7N	8N	9N
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Tabela 4 – dr de múltiplos de N

Atividade 4: Com base na Tabela 4, quais padrões você pode observar nas Linhas 1 a 9?

Resposta:

Linha	Padrão observado
1	Todos os nove dígitos, aumentando consecutivamente.
2	Todos os nove dígitos, agrupados por pares e depois por ímpares.
3	Somente 3 , 6 e 9 são presentes
4	Todos os nove dígitos, organizados em ordem alternada (podem ser chamados de "contagem de saltos").
5	Todos os nove dígitos, inverso da linha 4.
6	Somente 6 , 3 e 9 são presentes.
7	Todos os nove dígitos, agrupados por impares e depois por pares.
8	Todos os nove dígitos, diminuindo consecutivamente.
9	Somente 9 é presente.

Tabela 5 – Descrição das padrões da linhas.

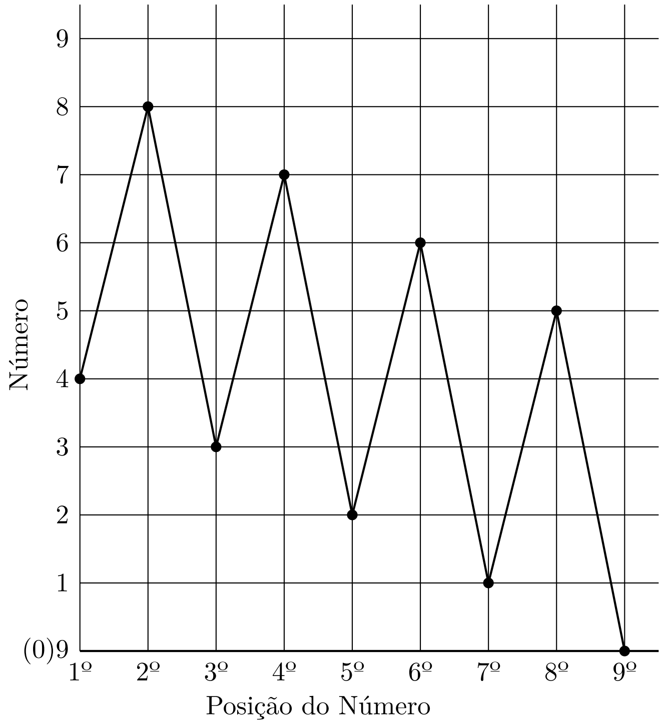
Atividade 5: Observando a descrições das linhas 1 e 8, das linhas 2 e 7, das linhas 3 e 6 e das linhas 4 e 5, quais semelhanças existem? Qual é a soma dos números desses pares de linhas?

Resposta: As sequencias desses pares de linhas se inverte. Alem disso a soma dos números desses pares de linhas são iguais.

Atividade 6: Muitas vezes, um padrão numérico pode se tornar mais significativo se for possível "seu gráfico". Isto equivale apenas a desenhar um gráfico linear para representar a tendência geral dos números.
Faça os gráficos para as linhas 4 e 5, e observar as tendencias em Atividade 4.

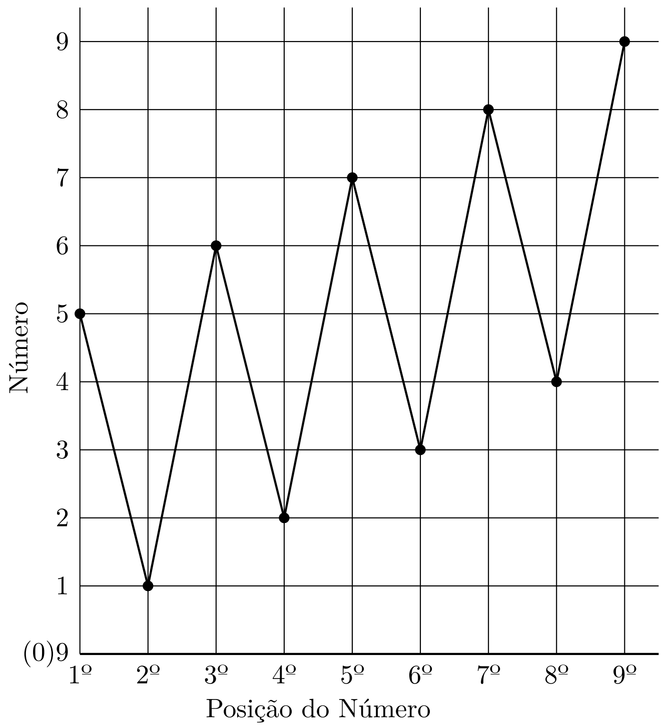
Resposta: As figuras são apresentados nas Figuras 1 e 2.

Figura 1 – Gráfico da Linha 4



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2 – Gráfico da Linha 5



Fonte: Produzido pelo autor

Atividade 7: Trabalhar com matrizes.

A Tabela 4, permite localizar "padrões entre os padrões". Para ilustrar isso, adotamos a seguinte notação. Observe que a Tabela 4 está dividida em nove seções principais, cada uma contendo nove dígitos. Cada uma das nove seções pode ser nomeada com uma matriz 3×3, usando as letras maiúsculas $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, conforme mostrado na Tabela 6.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Tabela 6 – Representação matricial da Tabela 4

Sendo por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ e assim para as outras matrizes B, C, D, E, F, G, I.
Vamos podemos construir dependendo que cada professor vários padrões de matrizes a partir das matrizes $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. Alguns do exemplos são a seguir:

(a) Construir a matriz com os elementos $a_{12}, b_{12}, c_{12}, d_{12}, e_{12}, f_{12}, g_{12}, h_{12}, i_{22}$. Isto daria

$$\begin{bmatrix} a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ d_{12} & e_{12} & f_{12} \\ g_{12} & h_{12} & i_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Construir a matriz com os elementos $A_{22}, B_{22}, C_{22}, D_{22}, E_{22}, F_{22}, G_{22}, H_{22}, I_{22}$. Isto daria

$$\begin{bmatrix} a_{22} & b_{22} & c_{22} \\ d_{22} & e_{22} & f_{22} \\ g_{22} & h_{22} & i_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Produto Educacional 2 - Observando Padrões Espirais das Soma dos dígitos

Como vimos na Seção 4.1, a função soma dos dígitos dr de múltiplos de N é uma sequência repetida de comprimento de 9 ou 3. Podemos construir padrões (figuras geométricas) com a função soma dos dígitos. Nesta Atividade 2, vamos construir alguns destes padrões, manualmente e também usando GeoGebra.

4.2.1 Construção dos Padrões Usando GeoGebra

Atividade 8: Construir padrões (figuras geométricas) com ângulos entre 0 e 360º, usando GeoGebra para a soma dos dígitos de 2. Isto é $(2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 2, \cdots)$.

Resposta

- **Passo 1: Marcação do Ponto Início**
  Inicialmente deve-se colocar o primeiro ponto no GeoGebra que pode ser escolhido em qualquer local. Nessa demonstração será escolhido o ponto $(0, 0)$.
  Para isso basta clicar no botão que tem a letra "A" e um ponto (segundo botão da esquerda para a direita) e depois clica na opção ponto, depois clica-se no centro dos eixos coordenados.

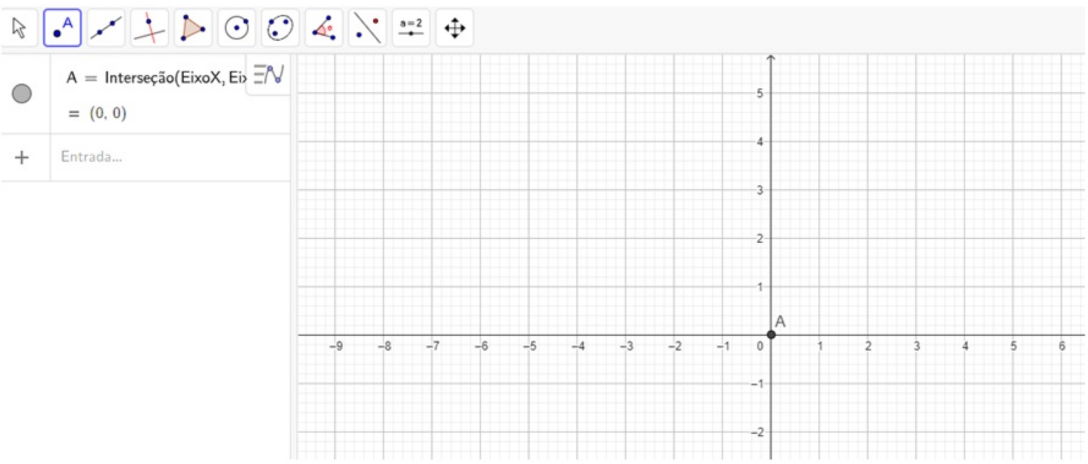


Figura 3 – **Marcando o ponto início**

- **Passo 2: Criação dos Controles Deslizantes para os ângulos**
  Do lado esquerdo agora, onde tem escrito entrada, digita-se controle deslizante, logo depois escolhe a opção Ângulo e faz uma variação de zero a 360 graus e escolhe uma

letra para esse ângulo. Isso dará uma escolha para o ângulo do primeiro segmento em relação ao eixo "x".

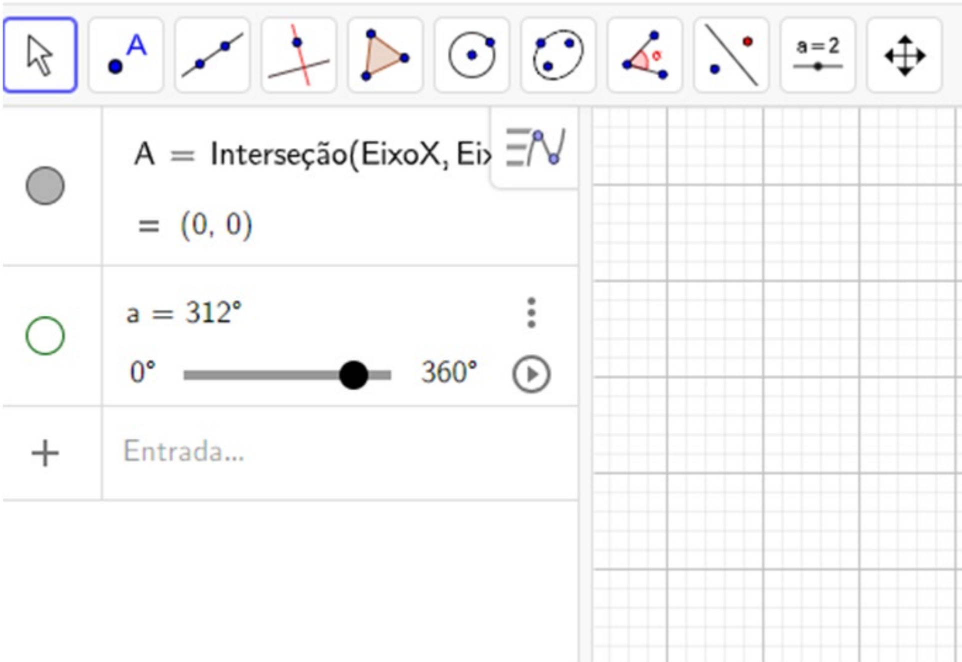


Figura 4 – **Criação do controles deslizantes do ângulo**

- **Passo 3: Criação das direções (vetores unitários)**
  Agora deve-se construir um vetor "u" unitário, em coordenadas polares, em que o ângulo seja aquele criado anteriormente com o controle deslizante, isso dará o direcionamento do primeiro segmento. Para isso usa o comando "$u =$ vetor$((1; a))$", sendo que "a", foi a letra escolhida para o ângulo do controle deslizante que foi criado em Passo 2.

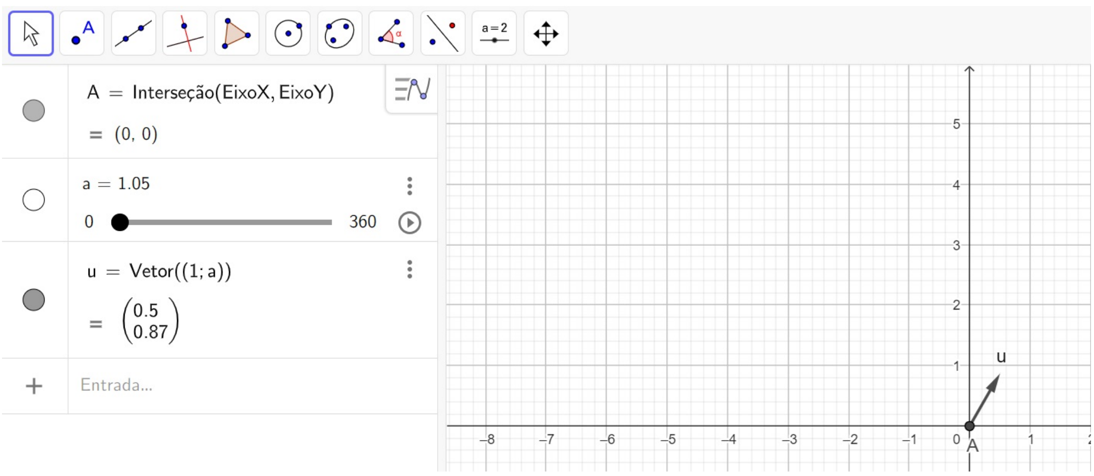


Figura 5 – **Criação dos vetores direções**

- **Passo 4: Criação dos ângulos internos**
  Agora será criado outro controle deslizante de ângulo de maneira análoga a Passo 2, mas com a escolha de outra letra, esse ângulo será o ângulo interno que será utilizado na rotação de cada segmento.

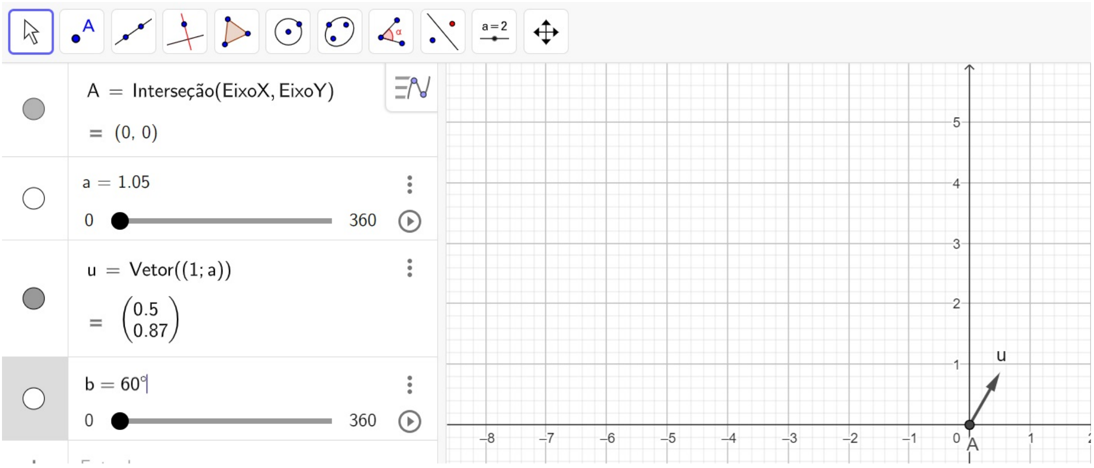


Figura 6 – **Criação dos ângulos internos**

- **Passo 5: Planilha para exibir as contas**
  Agora clica no canto superior direito onde tem três traços horizontais, depois clica em exibir e por final em planilha. Onde aparecerá uma planilha à direita onde será utilizadas 3 colunas para utilizarmos as fórmulas para gerar os pontos.

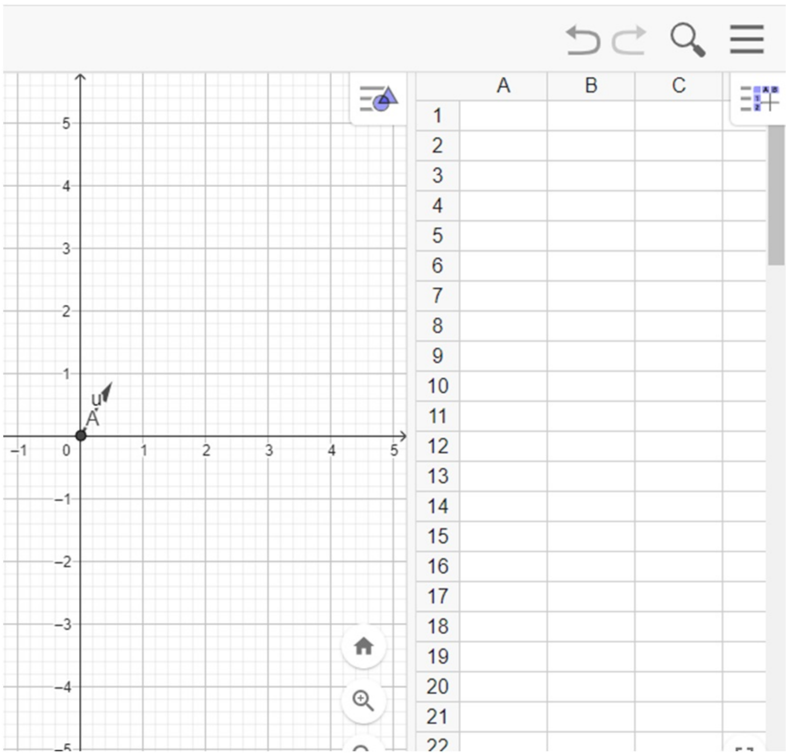


Figura 7 – **Planilha para exibir as contas**

- **Passo 6: Preenchimento da coluna A da Planilha**
  Na coluna A a partir da segunda linha deve-se escrever as somas dos dígitos que estamos fazendo na sequencia, sem importar se o comprimento do ciclo é 3 ou 9. No exemplo feito aqui será utilizado um ciclo de comprimento 9, isto é estamos fazendo a soma dos dígitos de 2, $(2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 2, \cdots)$.

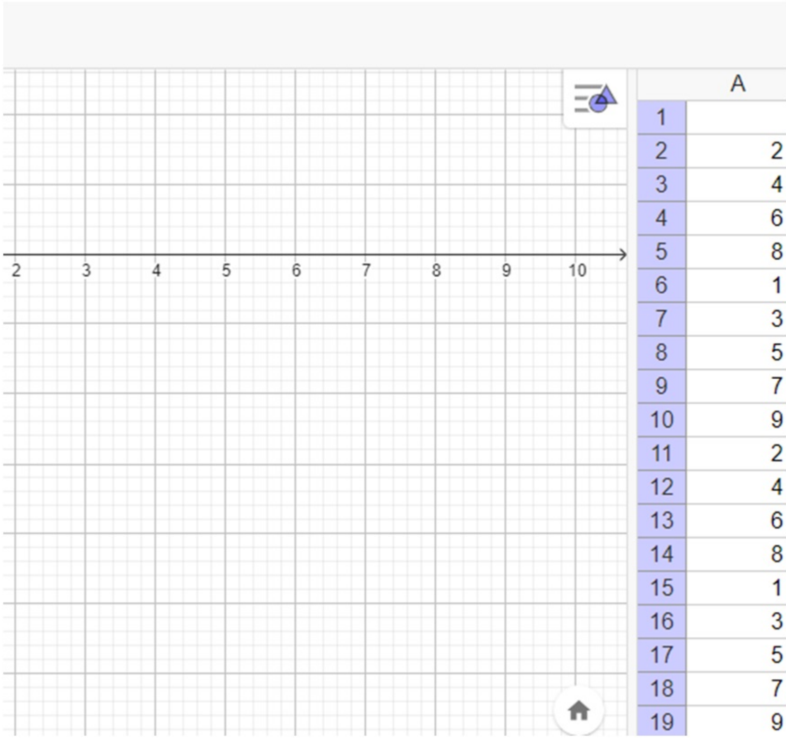


Figura 8 – **Planilha para exibir as contas**

- **Passo 7: Preenchimento das colunas B e C da Planilha**
  As colunas B e C devem ser feitas em conjunto. Na célula $C2$ coloca-se o ponto $(0, 0)$ e na célula $B3$ coloque o vetor "u". Na célula $B4$ use a fórmula $= Girar(B3, -b)$, lembrando que "b" é o ângulo do segundo controle deslizante. Agora selecione a célula $B4$ e arraste para baixo, logo depois clique com o botão direito, propriedades e depois desmarque a opção "exibir objeto", para que os pontos da coluna B não apareçam no gráfico.
  Na célula $C3$ use a fórmula: $= C2 + A3 * B3$. A partir daí selecione a célula $C3$ e arraste para baixo, para que todas as células da coluna C estejam com os pontos do polígono a ser formado. Logo depois clique com o botão direito, propriedades e depois desmarque a opção "exibir objeto", para que os pontos da coluna C não apareçam no gráfico

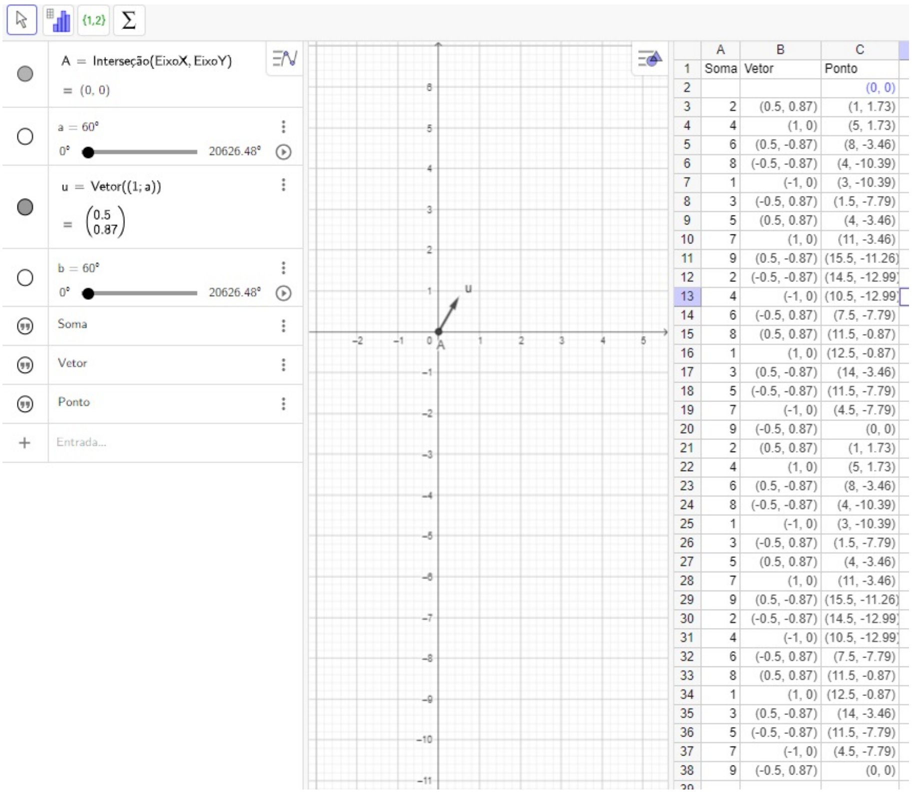


Figura 9 – **Planilha para exibir as contas**

- **Passo 8: Construção da Figura**
  Aproveitando que a coluna C está toda selecionada, clique com o botão direito e depois clique na opção criar lista de pontos.
  Agora do lado esquerdo escreve caminho poligonal e entre parentese coloca o nome da lista de pontos que foi criada anteriormente.

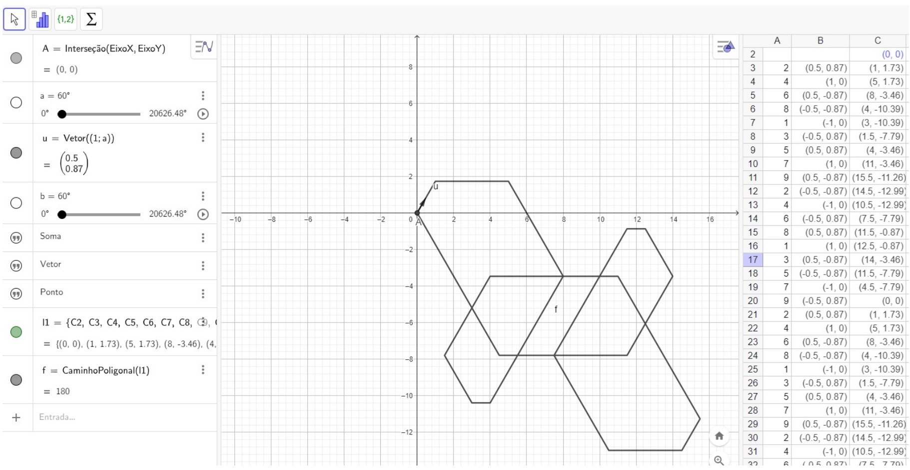


Figura 10 – **A Figura Montada com ângulo interno 120º**

- **Passo 9: Construção de outros polígonos**
  A figura montada tem um ângulo interno de 120º para a soma de dígitos de 2 .

Para mudar o ângulo interno e fazer um novo polígono, basta mudar o valor de b no controle deslizante e colocar o ângulo suplementar ao ângulo interno que se deseja colocar.

Atividade 9: Seguindo a Atividade 8, construir padrões (figuras geométricas) com ângulos entre 0 e 360º, usando GeoGebra para a soma dos dígitos de $3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

Resposta: Seguir os passos da Atividade 8.

4.2.2 Analises dos Padrões criados

Neste subseção, propomos varias atividades em relação aos padrões criados na subseção 4.2.1.

Atividade 9: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 9 (isto é, as somas dos dígitos de 2, 4, 5, 7,8) e ângulo de 90º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 90º.

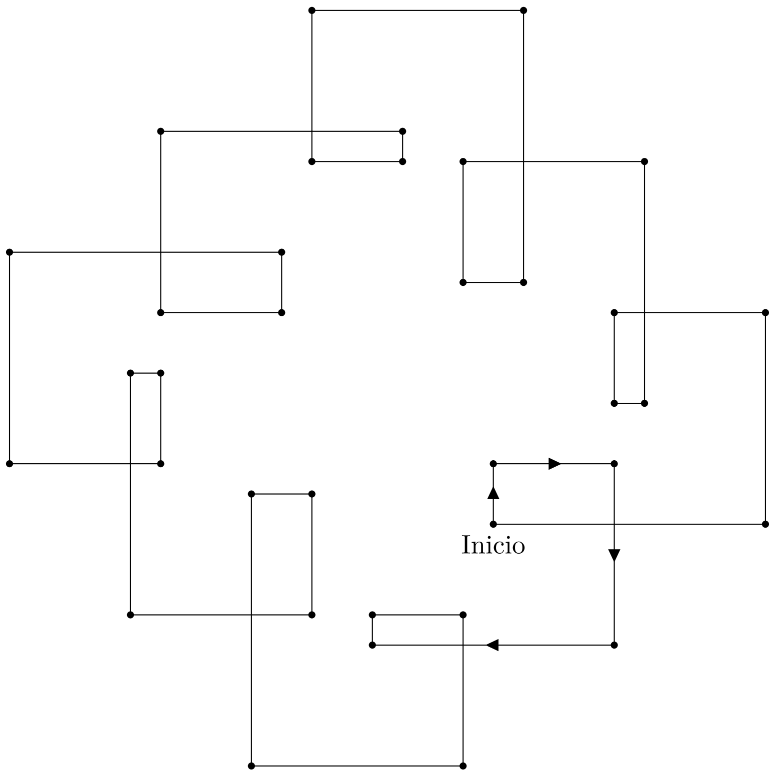
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 9 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 90º.

Resposta: Vamos mostrar as figuras do comprimento 9 e ângulo 90º.

1. **Ângulo 90º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 2**

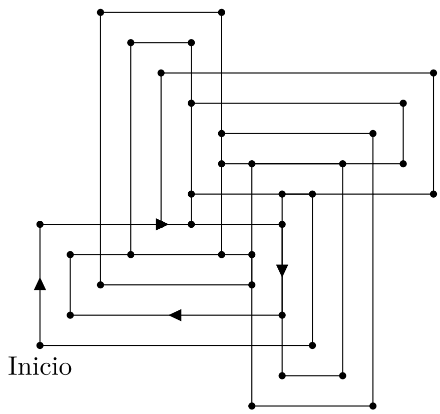
Figura 11 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 2 com rotação de 90º.



Fonte: Produzido pelo autor

2. **Ângulo 90º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 4**

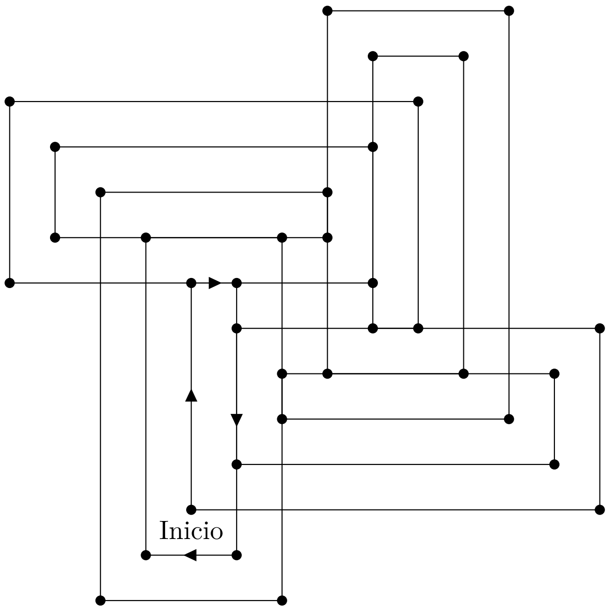
Figura 12 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 4 com rotação de 90º.



Fonte: Produzido pelo autor

3. **Ângulo 90º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 5**

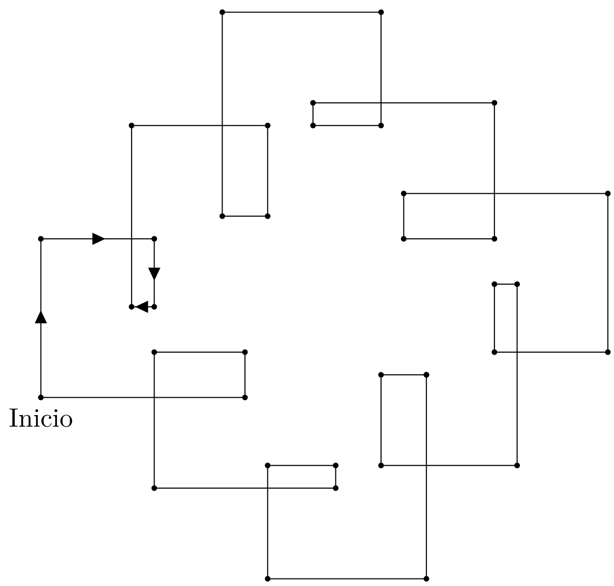
Figura 13 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 5.



Fonte: Produzido pelo autor

4. **Ângulo 90º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 7**

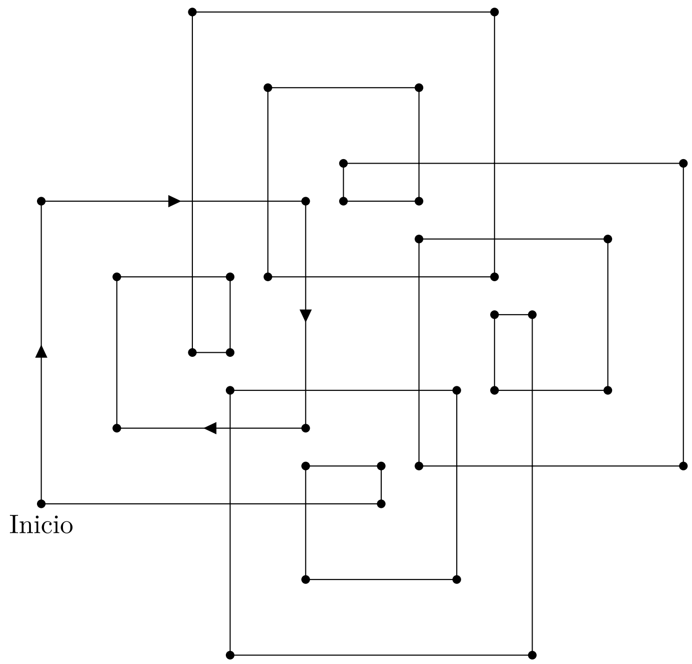
Figura 14 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 7.



Fonte: Produzido pelo autor

5. **Ângulo 90º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 8**

Figura 15 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 8.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 9 e ângulo 90º são formadas por vários "quadriláteros", pois o polígono regular que tem ângulo de 90º graus tem 4 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 36 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 9 e os 4 lados do quadrilátero é igual 36, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(9, 4)=36.

Atividade 10: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 9 (isto é, as somas dos dígitos de 2, 4, 5, 7,8) e ângulo de 120º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 120º.

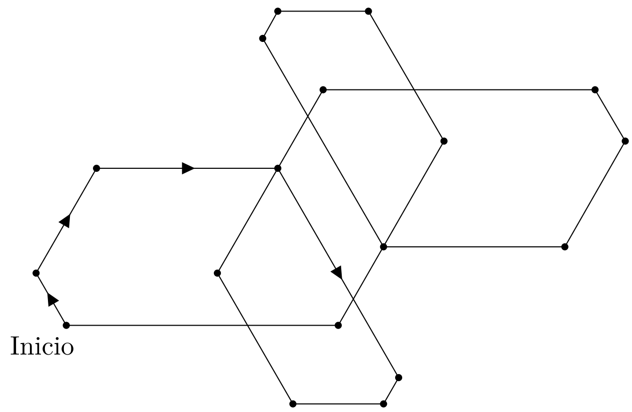
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 9 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 120º.

Resposta: Vamos mostrar somente duas figuras do comprimento 9 (de múltiplos e 2 e 4) e ângulo 120º. Os alunos podem construir os restantes e fazer os analises.

1. **Ângulo 120º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 2**

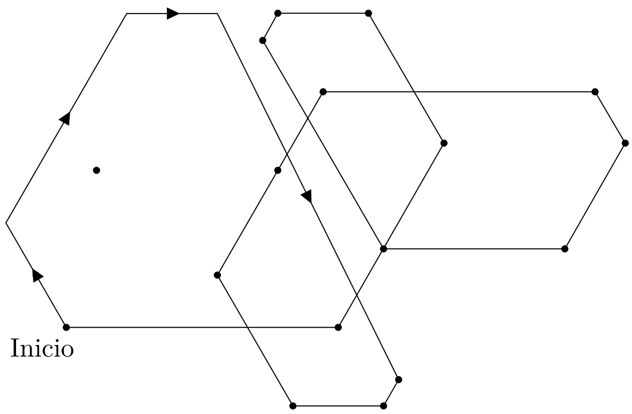
Figura 16 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 2 com rotação de 120º.



Fonte: Produzido pelo autor

2. **Ângulo 120º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 4**

Figura 17 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 4 com rotação de 120º.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 9 e ângulo 120º são formadas por vários "hexágonos", pois o polígono regular que tem ângulo de 120 graus tem 6 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 18 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 9 e os 6 lados do quadrilátero é igual 18, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(9, 6)=18.

Atividade 11: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 3 (isto é, as somas dos dígitos de 3 e 6) e ângulo de 90º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 90º.

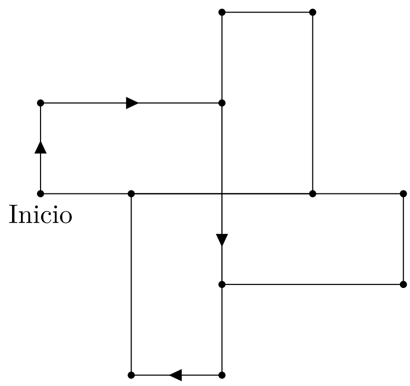
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 3 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 90º.

Resposta: Vamos mostrar as figuras do comprimento 3 (de múltiplos e 3 e 6) e ângulo 90º.

1. **Ângulo 90º com ciclo de comprimento 3 - múltiplos de 3**

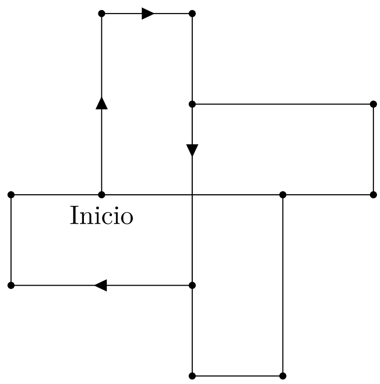
Figura 18 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 3 de rotação 90º.



Fonte: Produzido pelo autor

2. **Ângulo 90º com ciclo de comprimento 3 - múltiplos de 6**

Figura 19 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 6.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 3 e ângulo 90º são formadas por vários quadriláteros, pois o polígono regular que tem ângulo de 90 graus tem 4 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 12 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 3 e os 4 lados do quadrilátero é igual 12, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(3, 4)=12.

Atividade 12: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 3 (isto é, as somas dos dígitos de 3 e 6) e ângulo de 120º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 120º.

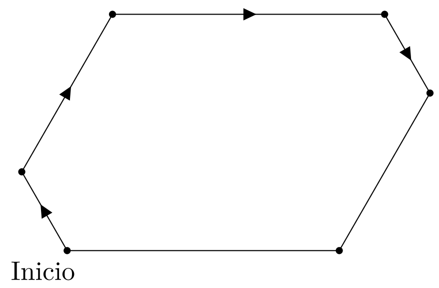
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 3 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 120º.

Resposta: Vamos mostrar somente a figura do comprimento 3 (de múltiplos de 3) e ângulo 120º. Os alunos podem fazer de múltiplos de 6.

1. **Ângulo 120º com ciclo de comprimento 3 - múltiplos de 3**

Figura 20 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 3 com rotação de 120º.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 3 e ângulo 120º são formadas por vários hexágonos, pois o polígono regular que tem ângulo de 120 graus tem 6 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 6 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 3 e os 6 lados do quadrilátero é igual 6, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(3, 6)=6.

Atividade 13: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 9 (isto é, as somas dos dígitos de 2, 4, 5, 7 e 8) e ângulo de 108º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 108º.

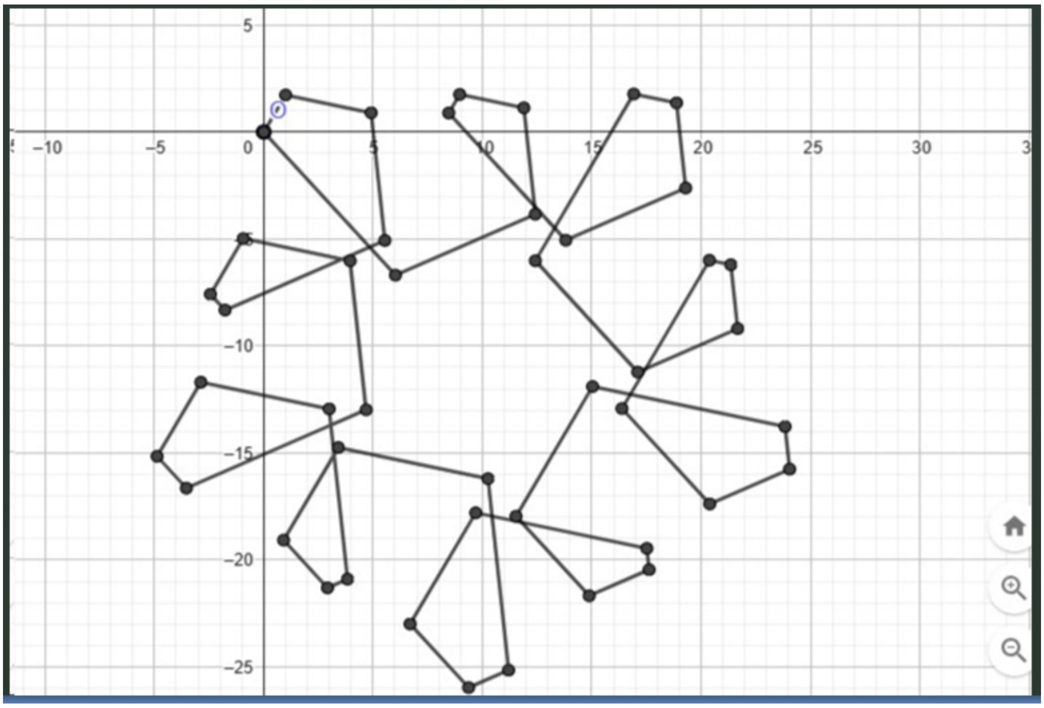
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 9 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 108º.

Resposta: Vamos mostrar somente a figura do comprimento 9 (de múltiplos de 2) e ângulo 108º. Os alunos podem fazer para os múltiplos de 4, 5, 7 e 8.

1. **Ângulo 108º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 2**

Figura 21 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 2 com rotação de 108º.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 9 e ângulo 108º são formadas por vários pentágonos, pois o polígono regular que tem ângulo de 108 graus tem 5 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 45 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 9 e os 5 lados do quadrilátero é igual 45, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(9, 5)=45.

Atividade 14: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 3 (isto é, as somas dos dígitos de 3 e 6) e ângulo de 108º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 108º.

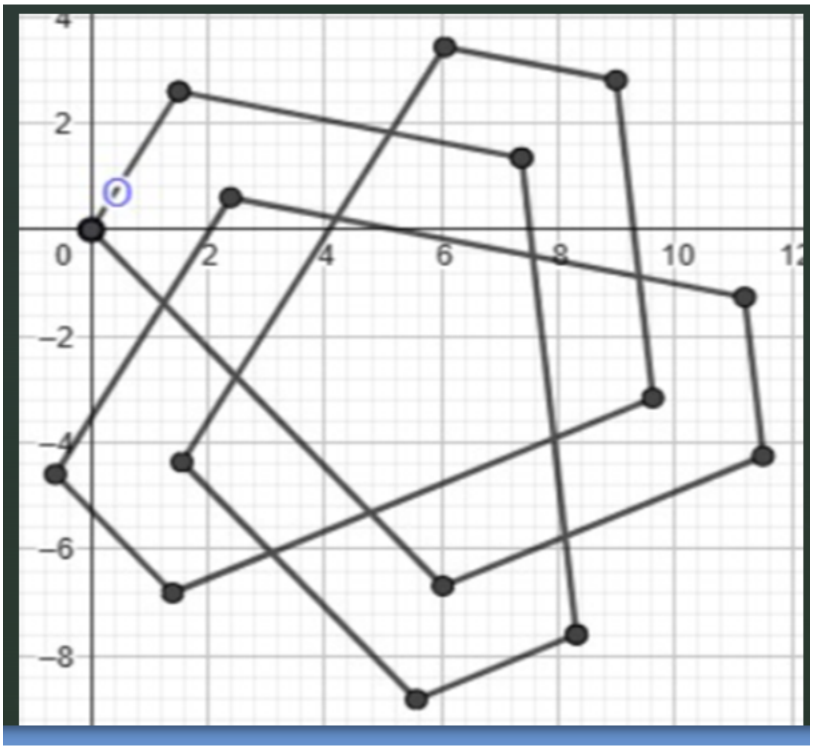
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 3 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 108º.

Resposta: Vamos mostrar somente a figura do comprimento 3 (de múltiplos de 3) e ângulo 108º. Os alunos podem fazer para os múltiplos de 6.

1. **Ângulo 108º com ciclo de comprimento 3 - múltiplos de 3**

Figura 22 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 3 com rotação de 108º.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 3 e ângulo 108º são formadas por vários pentágonos, pois o polígono regular que tem ângulo de 108 graus tem 5 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 15 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 3 e os 5 lados do quadrilátero é igual 15, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(3, 5)=15.

Atividade 15: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 9 (isto é, as somas dos dígitos de 2, 4, 5, 7 e 8) e ângulo de 135º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 135º.

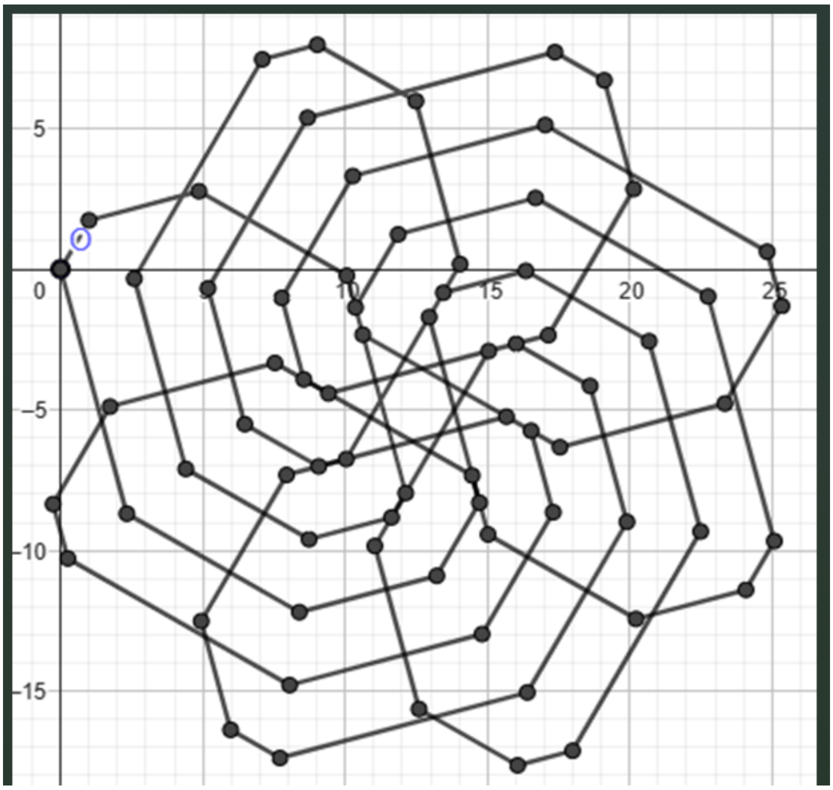
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 9 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 135º.

Resposta: Vamos mostrar somente a figura do comprimento 9 (de múltiplos de 2) e ângulo 135º. Os alunos podem fazer para os múltiplos de 4, 5, 7 e 8.

1. **Ângulo 135º com ciclo de comprimento 9 - múltiplos de 2**

Figura 23 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 2 com rotação de 135º.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 9 e ângulo 135º são formadas por vários octógonos (difícil de perceber), pois o polígono regular que tem ângulo de 135 graus tem 8 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 72 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 9 e os 8 lados do quadrilátero é igual 72, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(9, 8)=72.

Atividade 16: Analisando os padrões dos ciclos de comprimento 3 (isto é, as somas dos dígitos de 3 e 6) e ângulo de 135º:

(a) Qual é o "polígono regular " que compõe a figura? Observe sua resposta com o polígono regular de ângulo interno 135º.

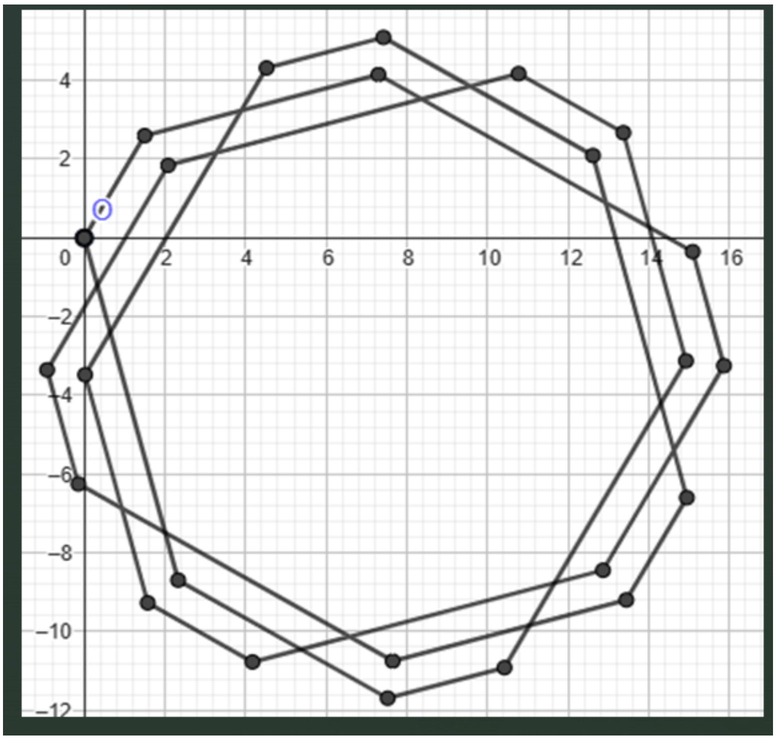
(b) Após quantos traços a figura fecha?

(c) Qual é a relação entre a quantidade de traços para a figura fechar e o comprimento 3 do ciclo e os lados do polígono regular de ângulo interno 135º.

Resposta: Vamos mostrar somente a figura do comprimento 3 (de múltiplos de 3) e ângulo 135º. Os alunos podem fazer para os múltiplos de 6.

1. **Ângulo 135º com ciclo de comprimento 3 - múltiplos de 3**

Figura 24 – Espiral da Soma digito de múltiplos de 3 com rotação de 108º.



Fonte: Produzido pelo autor

Agora vamos responder as questões:

(a) Todas as figuras de comprimento 3 e ângulo 135º são formadas por vários octógono, pois o polígono regular que tem ângulo de 135 graus tem 8 lados.

(b) Todas as figuras fecham um ciclo com exatamente 24 traços.

(c) Observamos que o Minimo Múltiplo Comum entre o comprimento 3 e os 8 lados do quadrilátero é igual 24, quantidade de traços para a figura fechar, isto é MMC(3, 8)=24.

.

Conclusão

Notamos que a função $\mathrm{dr}(N)$ é essencialmente a mesma coisa que N módulo 9, no entanto, descobrimos que os alunos são mais rápidos em entender a adição de dígitos repetidamente do que encontrar restos após divisão longa.

É bom lembrar que as pesquisas recentes demonstram que há um abandono no ensino de geometria em nosso país e o uso de uma ferramenta como o GeoGebra incentiva discentes e docentes para o manuseio com esse importante eixo temático da matemática do ensino básico. Além disso provoca os alunos a perceberem padrões geométricos através de sequencias numéricas simples. Desse modo o tema desse trabalho também ajuda no engajamento de alunos e professores para que se trabalhe mais ainda com o GeoGebra, para que em um futuro não tão distante as pesquisas sobre o abandono da geometria não seja mais um problema da educação básica.

Sugere-se então que esse material seja uma alternativa didática para ser utilizada na introdução de alguns assuntos do ensino fundamental 2 de matemática como divisibilidade e teoria dos restos e principalmente para a construção de polígonos, não esquecendo da provocação de verificar padrões que já deve ser inserida nas séries finais do ensino fundamental.

Nossa expectativa com o produto educacional, lançando mão da construção de padrões, é propor uma atividade diferente das usuais, optamos por um viés criativo, colaborativo, participativo, tecnológico e aberto à criticidade. Esperamos promover discussões e levar nossos estudantes a olharem a Matemática de um jeito diferente, como uma ciência mais humana, dinâmica e presente em nossas vida.

Referências

1 Daniel's Blog, **Digit Sum Patterns and Modular Arithmetic** Disponível em https://danilafe.com/blog/modulo_patterns/. Acesso em 25/12/2021.

2 José Plinio de Oliveira Santos, **Introdução à Teoria dos Números** Coleção Matemática Universitária, 1998.

3 César Polcino Milies & Sônia Pitta Coelho, **Números - Uma Introdução à Matemática** EDUSP, 2001.

4 Thayer Watkins, Silicon Valley, Tornado Alley & BB Island; **Digit Sums Arithmetic.** Disponível em http://applet-magic.com/DigitSum.htm. Acesso em: 25/12/2021.

5 Terrel Trotter Jr. & Irene Klaver LAVER **Number patterns from digit sums**. JSTOR - The Arithmetic Teacher Vol. 18, No. 2 (FEBRUARY 1971), pp. 100-103. Disponível em https://www.jstor.org/stable/41187621. Acesso em 25/12/2021.

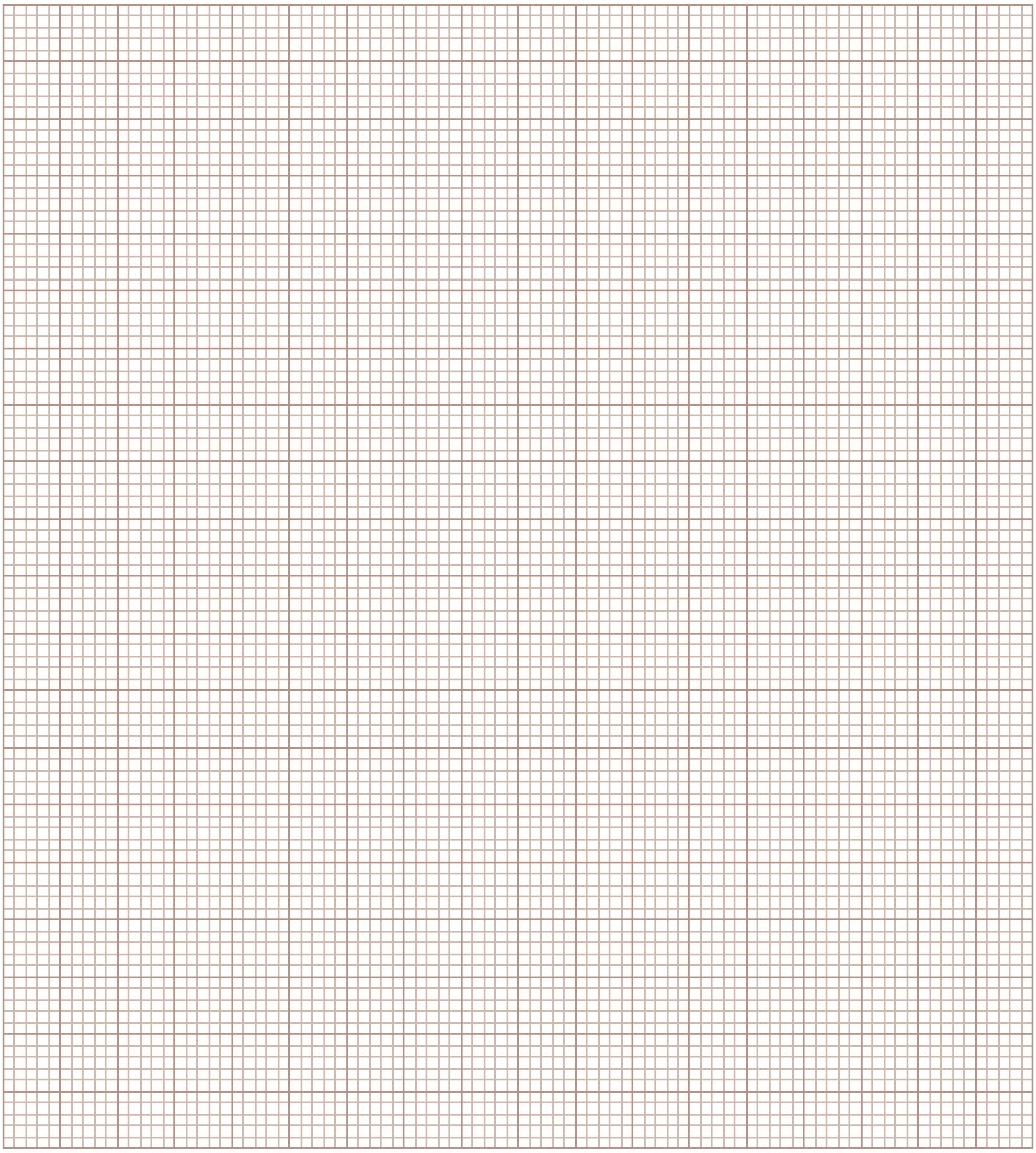
6 Skurnick, R. **The digital representation ring** The Mathematical Gazette,Vol. 87, No.510 (Nov.2003), pp. 505-510. Disponível em https://www.jstor.org/stable/3621291. Acesso em 25/12/2021.

7 Sudhir Goel & Shaun V. Ault, **Introducing Abstract Mathematics through Digit Sums and Cyclic Patterns**, Georgia Journal of Science, Volume 74 No. 2 Scholarly Contributions from the Membership and Others, Article 20 , 2016.

Apêndices

APÊNDICE A – Papel quadrado de 2mm

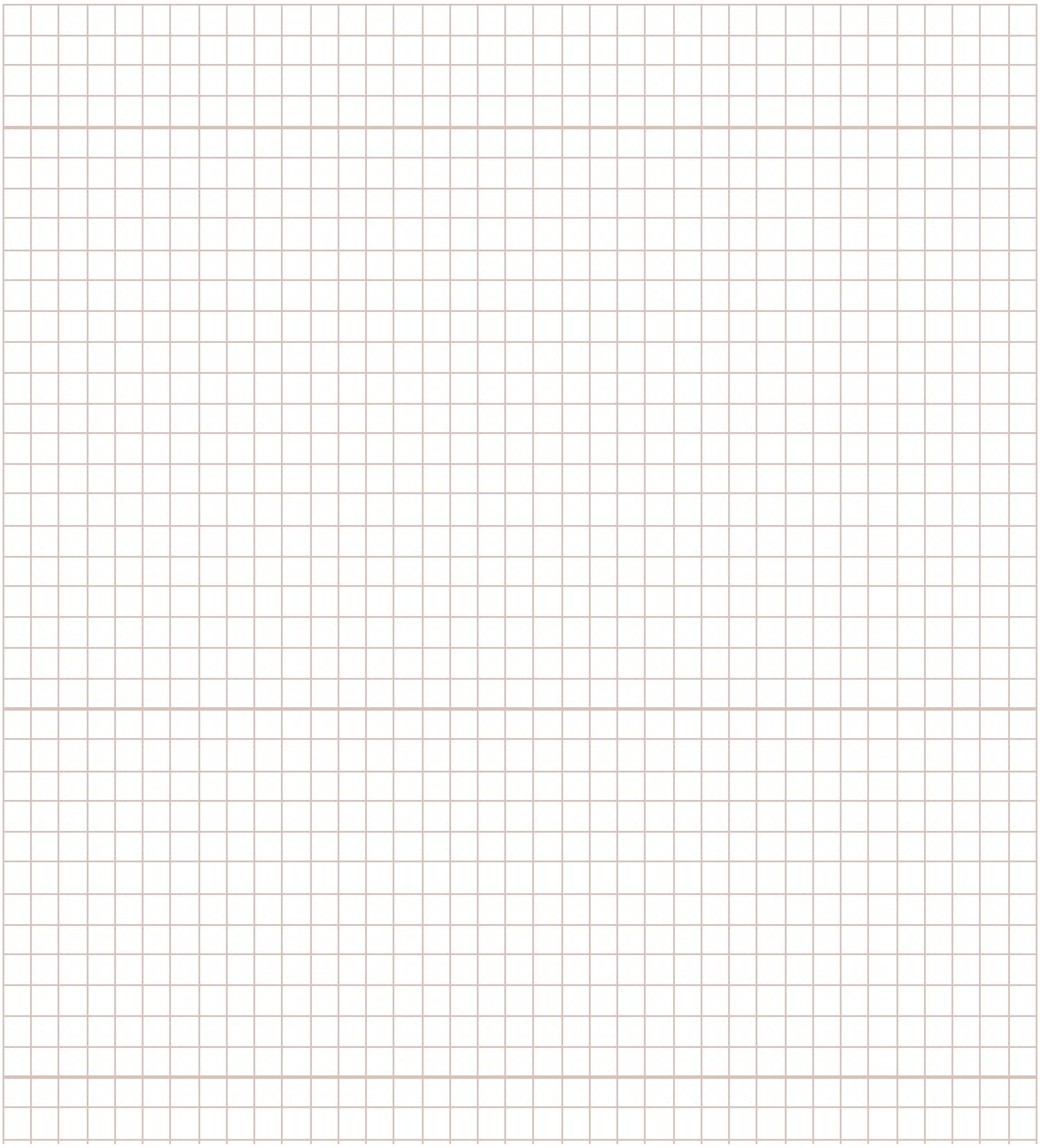
Figura 25 – Papel quadrado de 2mm.



Fonte: http://www.nelsonnet.com.au

APÊNDICE B – Papel quadrado de 5mm

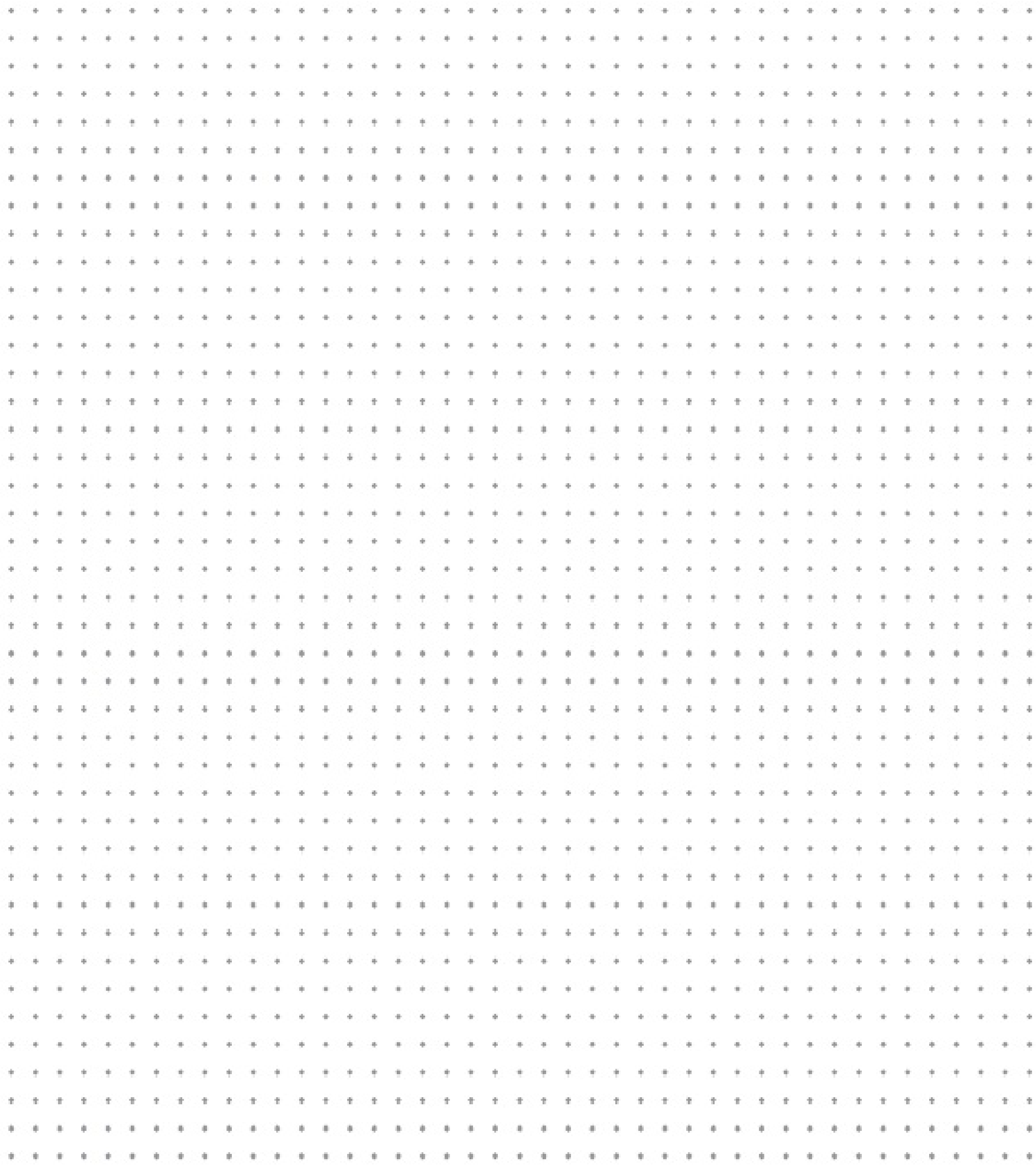
Figura 26 – Papel quadrado de 5mm.



Fonte: http://www.nelsonnet.com.au

APÊNDICE C – Papel quadrado pontilhado

Figura 27 – Papel quadrado pontilhado.



Fonte: http://www.nelsonnet.com.au