Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

As Contribuições do Método Kumon para o Ensino das Equações do 2º grau no Último Ciclo do Ensino Fundamental

Olívia Pita Tavares

Uberaba - Minas Gerais

Maio de 2024

As Contribuições do Método Kumon para o Ensino das Equações do 2^{o} grau no Último Ciclo do Ensino Fundamental

Olívia Pita Tavares

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabio Antonio Araujo de Campos

Uberaba - Minas Gerais
Maio 2024

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Tavares, Olívia Pita
T231c As Contribuições do Método Kumon para o Ensino das Equações do 2º grau no Último Ciclo do Ensino Fundamental / Olívia Pita Tavares. -- 2024.
79 p. : il., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2024
Orientador: Prof. Dr. Fabio Antonio Araújo de Campos

1. Equações qüadráticas. 2. Dificuldade da aprendizagem. 3. Método de estudo. 4. Material didático. I. Campos, Fabio Antonio Araújo de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 512:005.59 (076)

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

OLÍVIA PITA TAVARES

AS CONTRIBUIÇÕES DO MÉTODO KUMON PARA O ENSINO DAS EQUAÇÕES DO 2° GRAU NO ÚLTIMO CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 24 de maio de 2024

Banca Examinadora:

Dr. Fabio Antonio Araujo de Campos – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Heron Martins Félix
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Ma. Amanda Oliveira Dias Batista
SESI/Uberaba

Documento assinado eletronicamente por **FABIO ANTONIO ARAUJO DE CAMPOS**,

Professor do Magistério Superior, em 16/07/2024, às 15:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 165, de 16 de junho de 2023.

Documento assinado eletronicamente por **Amanda Oliveira Dias Batista**, **Usuário Externo**, em 16/07/2024, às 15:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 165, de 16 de junho de 2023.

Documento assinado eletronicamente por **HERON MARTINS FELIX**, **Professor do Magistério Superior**, em 16/07/2024, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 165, de 16 de junho de 2023.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1253115** e o código CRC **C9DA950E**.

"Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas.Só se vê bem com o coração, o essencial é invisível aos olhos."

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que contribuíram para a realização desta pesquisa e para a conclusão desta jornada acadêmica. Este trabalho não teria sido possível sem o apoio incondicional da minha família, que sempre esteve ao meu lado com amor e compreensão.

Aos meus filhos, cuja paciência e encorajamento foram uma fonte constante de motivação, dedico este trabalho. Suas risadas, abraços e alegria tornaram cada desafio mais fácil de superar.

Ao meu marido, agradeço por ser meu companheiro de vida e por estar sempre presente, oferecendo apoio emocional e incentivo nos momentos mais desafiadores. Sua compreensão e amor foram fundamentais para a conclusão desta jornada.

Aos meus amigos, que compartilharam risos, conselhos e momentos de descontração ao longo do caminho, agradeço por tornarem essa experiência mais rica e significativa. Em especial Melina Cais Jejcic De Oliveira Consoni Florenzano, que nunca mediu esforços para me auxiliar.

Expresso minha gratidão a Deus, cuja graça e orientação foram a luz que iluminou meu caminho, proporcionando força nos momentos difíceis e inspiração nos momentos de dúvida.

Ao meu estimado orientador, Fábio Antônio Araújo de Campos , agradeço pela orientação sábia, apoio incansável e pela dedicação em guiar-me neste estudo. Sua experiência e insights foram cruciais para o desenvolvimento desta pesquisa, e sou imensamente grata pela oportunidade de aprender com sua sabedoria.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para esta jornada, o meu sincero agradecimento. Este trabalho é o resultado de um esforço coletivo, e estou profundamente grata por cada pessoa que fez parte dessa trajetória.

Que este trabalho possa contribuir, de alguma forma, para o avanço do conhecimento na área e inspirar futuras pesquisas.

‘ “Aonde fica a saída?”
Perguntou Alice ao gato que ria.
“Depende”, respondeu o gato.
“De quê?”, replicou Alice;
“Depende de para onde você quer ir...” ’
Alice no país das maravilhas - Lewis Carroll

Resumo

Este trabalho tem por objetivo verificar se as dificuldades apresentadas pelos alunos do último ciclo do Ensino Fundamental em aprender equações quadráticas, são trabalhadas pelo Método Kumon em seu material didático de forma satisfatória, uma vez que seu o material didático é autoinstrutivo. A metodologia adotada foi a de revisão bibliográfica, que foi feita mediante a busca eletronica de artigos, teses e dissertações, nas bases de dados do Google Acadêmico e da Scielo. A partir do estabelecimento de relação entre os tópicos apresentados, foram evidenciadas as dificuldades dos alunos e possíveis soluções de ensino e aprendizagem inspirados pelo Método Kumon, a qual requerem uma abordagem de ensino que não seja excessivamente focada na fórmula resolvente, mas que trabalhe de forma um pouco mais igualitária outros métodos como a fatoração, método de "completar quadrados"e a relação entre a soma e produto de raízes com os coeficientes da equação quadrática.
Palavras-chave: Equação quadrática, Dificuldade de aprendizagem, Método Kumon, Material didático.

Abstract

On the present work aims to verify whether the difficulties presented by students in the last cycle of Elementary School in learning quadratic equations are addressed by the Kumon Method in their teaching material in a satisfactory way, since the teaching material is self-instructive. The methodology adopted was bibliographic review, which was carried out through an electronic search for articles, theses and dissertations, in the Google Scholar and Scielo databases. By establishing a relationship between the topics presented, students' difficulties and possible teaching and learning solutions inspired by the Kumon Method were highlighted, which requires a teaching approach that is not excessively focused on the resolving formula, but that works in a other methods such as factorization, the "completing squares"method and the relationship between the sum and product of roots with the coefficients of the quadratic equation are a little more egalitarian.
Keywords: Quadratic equation, Learning difficulties, Kumon Method, Teaching material.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem da Álgebra, ainda enfrentam diversas dificuldades, apesar de terem um papel muito importante na formação dos alunos. Quando falamos dos alunos que estão terminando o último ciclo do Ensino Fundamental, as equações de segundo grau surgem como um desafio. Ela leva o aluno a ter contato com uma linguagem abstrata que é muito útil na resolução de vários problemas em diversas ciências; entretanto essa mesma linguagem causa muitas dificuldades aos alunos, dificuldades estas que muitas vezes não deixam o aluno perceber a sua utilidade.

Nos trabalhos de (Vaiyavutjamai 2004), (Vaiyavutjamai et al. 2005) e (Lima e Tall 2006) entre outros, levantou-se algumas dificuldades apresentadas pelos alunos quando tentaram resolver equações do 2º grau:

1. Os alunos têm dificuldade em saber quantas soluções uma equação quadrática possui e qual o papel que as soluções desempenham em relação à equação;

2. Apesar de resolverem equações quadráticas corretamente, alguns alunos não sabem como verificar se suas soluções para a equação estão corretas;

3. Muitos alunos, talvez a maioria, não perceberam que se uma variável x aparece duas vezes em uma equação, por exemplo $x^2 - 8x + 15 = 0$ ou $(x-3)(x-5) = 0$, então a variável tem o mesmo valor nos diferentes "lugares" da equação;

4. Os alunos têm dificuldades em resolver equações através de fatoração;

5. Os alunos têm dificuldades em usar a fórmula resolvente, por deficiências em pré-requisitos como multiplicação, potenciação e radiciação;

Em contrapartida, surge o interesse dos pais em métodos de ensino que façam seus filhos terem melhor desempenho com a Matemática, incluindo a resolução de equações.

Um dos métodos de ensino com o objetivo de melhorar o desempenho escolar é o Método Kumon. Neste trabalho estudaremos as dificuldades do ensino e aprendizagem de equações de segundo grau, à luz das soluções de ensino propostas pelo Método Kumon.

O Método Kumon surgiu no Japão no ano de 1954, pela necessidade de um pai, o professor Toru Kumon, ensinar seu filho Takeshi, que estava apresentando dificuldades em Matemática. Como o professor Toru trabalhava o dia inteiro, quando chegava em casa, seu filho já dormindo. Então desenvolveu um material de estudo focado em resolução de exercícios, em que seu filho pudesse progredir sem a presença do pai, ou seja, o material precisava ser autoinstrutivo. Como Takeshi começou a ter bom desempenho escolar, outros pais sentiram interesse na metodologia e o Método Kumon foi criado.

No Método Kumon podemos perceber alguns traços do ensino tradicional, por ter muitas repetições de exercícios visando ativar a memorização. Porém, o material foi desenvolvido para que cada aluno evolua gradativamente no seu ritmo, atendendo à necessidade da cada aluno e fazendo com que o ensino seja personalizado. Dessa forma, a repetição deixa de ser um problema e passa a ser um aliado, pois como cada aluno trabalha com exercícios que estão no seu nível de aprendizado, o aluno sente uma elevação da autoestima quando consegue resolver os exercícios propostos, progredindo para o próximo estágio apenas quando o atual não lhe oferece mais nenhum desafio ou dificuldade.

Motivação para o estudo

As equações são fundamentais na resolução de problemas que envolvem números, sendo utilizadas direta ou indiretamente para solucionar uma ampla variedade de questões matemáticas. Pode-se dizer que tal importância se deve ao fato de que a ciência, em sua busca por estabelecer relações precisas entre fatos, conceitos e ideias, constantemente descobre associações entre estes, utilizando assim as equações como linguagem para expressar estas relações.

No entanto, o ensino de matemática é considerado por muitos algo desafiador, haja vista o baixo rendimento que alunos do Ensino Fundamental e Médio têm apresentado nas avaliações recorrentes realizadas pelo Ministério da Educação (MEC). Nesse sentido, ao pesquisar sobre o estudo da Álgebra, é muito importante refletir sobre o papel real do ensino das equações e como esse processo vem auxiliando os alunos na construção de conhecimentos sobre matemática.

Tanto no desenvolvimento tecnológico quanto na formação de indivíduos capazes de tomar decisões em suas vidas pessoais e profissionais, a matemática segue tendo um papel de destaque. Como já disse Piaget (Ferreiro e Teberosky 1999), "um sujeito ativo é alguém que compara, exclui, ordena, categoriza, reformula, comprova, formula hipóteses, reorganiza, entre outros aspectos, em ação interiorizada (pensamento) ou em ação efetiva (segundo seu nível de desenvolvimento)".

A partir dessa contextualização, o Método Kumon, vem sendo utilizado para discussões sobre maneiras de aprimorar conhecimentos, sobretudo na matemática, uma vez que o programa foca, essencialmente, no autodidatismo dos alunos de forma individual e customizada, ou seja, é um tipo de estudo em que os alunos estudam sozinhos, identificando e corrigindo seus próprios erros. Uma dúvida que surge é: se os alunos do Método Kumon teriam as mesmas dificuldades dos alunos estudados em nossa revisão bibliográfica, ou seja, qual seria o desempenho desses alunos se fossem expostos aos mesmos exercícios dos estudos citados nesta revisão.

Metodologia

Para a condução dessa pesquisa, utilizou-se a metodologia de revisão bibliográfica. "A pesquisa bibliográfica é aquela que realiza a partir de um registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses e etc", ver (Severino 2017). A revisão bibliográfica foi realizada através de buscas de livros, artigos, teses e dissertações, nas bases de dados Scielo e Google Acadêmico. A pesquisa foi refinada, considerando as palavras-chaves: Dificuldades de aprendizagem, Equações de 2º grau, método Kumon e autodidatismo, para aprofundamento da pesquisa e elaboração de categorias de análise, para se ter uma ideia de como as práticas educacionais do Método Kumon podem contribuir para amenizar as dificuldades dos alunos em trabalhar com equações do 2º grau.

Estrutura do Trabalho

No Capítulo 1 fará uma breve apresentação histórica sobre o desenvolvimento da relação entre as equações quadráticas e os povos antigos, até os primeiros indícios de uma fórmula resolvente ("fórmula de Bhaskara"). Depois são analisados vários artigos sobre as dificuladades de aprendizagem dos alunos em equações quadráticas, compondo assim nosso referencial teórico.

No Capítulo 2 apresentamos a história do surgimento do Método Kumon e os principais pilares de ensino, e como cada característica do método tenta contribuir para o aumento do desempenho dos alunos no estudo da Matemática.

No Capítulo 3, percorremos os estágios que o Método Kumon utiliza para fundamentar seu ensino de equações quadráticas. A forma escolhida para possibilitar que o leitor tenha uma boa visão sobre como o método trabalha estes temas, foi fazer uma análise do material didático do Kumon, pois dessa forma o leitor pode avaliar a sequência de assuntos abordados, bem como se esta sequência de assuntos é suficiente para o entendimento do conteúdo. E com base nos pilares de ensino do Método Kumon, uma boa análise sobre o método passa necessariamente pelo escrutínio de seu material didático pois, como o material busca ser autoinstrutivo, com os orientadores fazendo intervenções pontuais quando os alunos não conseguem entender o que está sendo apresentado no material, fazendo uma análise do mesmo, podemos ter uma boa ideia de como o Método Kumon trabalha os tópicos que ele julga pertinentes ao estudo das equações quadráticas.

Em seguida é feito um paralelo entre as dificuldades listadas nos trabalhos citados no Capítulo 1 e os tópicos de ensino do Método Kumon apresentados no material didático. Nesta parte tentamos dar fundamentos para responder a pergunta:

> o Método Kumon trabalha bem com as pricipais dificuldades apresentadas pelos alunos ao lidarem com equações quadráticas?

Em considerações finais foram apresentados os resultados da pesquisa, além de propostas para estudos futuros.

1 Ensino e aprendizagem de equações quadráticas

As equações algébricas são de imensa importância no ensino da matemática. Por este motivo, o presente capítulo faz um breve histórico sobre as origens dos estudos sobre equações quadráticas e, depois, uma revisão sobre alguns estudos das dificuldades apresentadas pelos alunos na tentativa de resolver equações de 2º grau.

1.1 Um breve comentário sobre aprendizagem da Matemática no Brasil

A Matemática é uma ciência da natureza e tem papel essencial para a compreensão de fenômenos e efeitos do universo, e do processo de construção do conhecimento. O entendimento de modelos matemáticos cria euforia para aquele que ensina e expectativa para aquele que aprende (Pontes 2019). Os professores ao ensinarem Matemática aos seus alunos, ensinam não somente conteúdos puros, mas também valores, concepções e crenças sobre a Matemática (Brandt et al. 2016).

Segundo (Silva 2004) a Matemática que é utilizada na sala de aula não foi inventada do dia para a noite: ela é produto de um processo histórico que, como bem sabemos, levou muitos séculos para sistematizá-la e transformá-la em fórmulas, algoritmos, gráficos, tabelas, modelos, que são utilizados no dia-a-dia das escolas pela maioria dos professores, como se fossem produtos prontos e acabados, desassociados de um processo social. Existem poucas reflexões da forma como ela é ensinada, de como foi construída pelo homem ao longo dos séculos e impulsionada pela sociedade para suprir as necessidades do próprio homem. Muitas vezes, faz-se uso de todas as ferramentas matemáticas sem contestar seu processo de criação, sem que se demonstre a lógica dessas construções. O conhecimento desse processo histórico e conseqüentemente das razões que levaram o homem a formalização da Matemática, talvez seja a chave para redefinir o papel da escola na operacionalização dos conceitos matemáticos.

Em (Reis e Nehring 2017), os autores afirmam que as propostas educacionais no

Brasil estão efetivamente ultrapassadas e não conseguem atrair nenhum interesse do aluno pelos conteúdos propostos, devido a não haver nenhuma relação com atividades que correspondam às necessidades destes. As dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos são extremamente visíveis no desempenho escolar dos alunos envolvidos. Nem sempre alterar o contexto das resoluções de problemas durante a aula seja a solução ideal, pois muitas vezes, a falta de interpretação é um argumento presente para justificar as dificuldades do aluno.

A Matemática representa papel importante no desenvolvimento cultural da criança e na sua inserção no sistema de referências do grupo ao qual pertence. Mas, a forma como, na maioria das vezes, vem sendo ensinada nas escolas, em geral, por meio de treinos artificiais e mecânicos, vem provocando grandes danos em relação ao seu aprendizado. Essa abordagem superficial, mecânica e sistêmica, sinaliza muitas vezes, de que o objetivo do professor ao ensinar Matemática é apenas o de passar os conteúdos, acreditando que, com esses conteúdos, os alunos sejam capazes de compreender a linguagem matemática e como resultado, desenvolver o raciocínio lógico, tornando-se aptos a argumentar, analisar, sintetizar e generalizar (Silva 2004).

Não é novidade as muitas dificuldades encontradas pelos alunos na disciplina e a forma fracassada com que, muitas vezes, a matemática tem sido ensinada ao longo dos anos. Inúmeros professores já apontaram dados que comprovam que o ensino da Matemática tem a fama de ser malsucedido para o corpo discente (Costa et al. 2020).

Não é de hoje que ensinar Matemática é desafiador, inúmeros fatores contribuem para que a prática se torne menos eficaz. Falta de tempo para efetuar um trabalho eficiente, pré-conceito de que matemática é difícil, má remuneração e formação de professores, uso da metodologia tradicional de ensino, superlotação nas salas de aula, falta de contextualização, dificuldades no uso da linguagem matemática e falta de interesse e motivação dos alunos para aprender (Costa et al. 2020).

Segundo (Vale 2013), é um desafio para professor mostrar que matemática não é somente um mundo de fórmulas prontas, já que muitos alunos têm aversão à disciplina e a trata como algo que não se aplica a sua realidade, dessa forma, é necessário que o professor conheça muito bem o que está ensinando para tentar motivar esse aluno. Por isso o docente deve ser conhecedor da história desse conteúdo, das aplicações desses conteúdos e das diversas maneiras de se resolver problemas desse conteúdo, e ainda, enfatizar a necessidade deste conteúdo para assuntos futuros, uma vez que a matemática é uma ciência interligada com as demais disciplinas, fazendo parte do universo educacional como uma das principais ferramentas.

Para (Masola e Allevato 2019) em Matemática, é possível observar com regularidade que os alunos utilizam, muitas vezes de maneira inconsciente, processos que são pouco eficazes. Ou então, quando dominam uma determinada técnica, tendem a utilizá-la sem restrições, tendo dificuldade de considerar outras possibilidades e, na falha em escolher uma melhor estratégia, acometem os resultados em implicações danosas.

Em (Loureiro 2014) evidencia-se que a falta de base dos alunos no Ensino Fundamental e a necessidade de decorar fórmulas e regras são dificultadores para o aprendizado da Matemática. Existe a necessidade de o professor mudar as estratégias de ensino, bem como lançar mão da utilização de outros recursos e/ou de exploração de situações da vida cotidiana. A autora discute sobre a necessidade de rever o ensino e aprendizagem da Matemática desde o Ensino Fundamental para garantir mais eficiência no decorrer da vida do aluno. Embora transformações importantes no ensino têm acontecido e muitas escolas, hoje em dia, estão adotando métodos construtivistas, o ensino da matemática ainda é pautado, principalmente, pelo método tradicionalista (ela é transmitida como se fosse uma ciência que trouxesse todas as coisas prontas, como se fosse um conhecimento pronto e acabado) e essas mudanças não foram suficientes para suprir as dificuldades enfrentadas pelos estudantes dessa disciplina (Coutinho et al. 2019).

É inegável a importância da Matemática e a contextualização sociocultural da qual essa disciplina faz parte. Para crianças e adultos tudo que está atrelado à Matemática é relevante e tem dado origem às várias representações positivas. O que tem sido visto como representações negativas ainda verificadas acerca da Matemática, com certeza não estão relacionadas à falta de importância, contextualização ou valorização, mas sim à maneira de como essa disciplina é ensinada. Dessa forma, o caminho de ensino e aprendizagem da Matemática, e a carência por mudanças precisas para que possa de fato existir uma aprendizagem eficaz, faz necessária a busca por recursos e métodos mais modernos para que os alunos reconheçam ainda mais importância das concepções e aplicabilidade da matemática no cotidiano (Costa et al. 2020).

1.1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs

Os Parâmetros Currículares Nacionais (PCNs) são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com a finalidade de orientar os educadores a respeito dos elementos considerados relevantes para cada um dos componentes currículares da Educação básica (Brasil 1998).

Os parâmetros afirmam que a Matemética deve desempenhar, de forma equlibrada e inseparável, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas e situações da vida cotidiana (Brasil 1998).

Com relação aos conteúdos matemáticos, os PCNs indicam alguns dos assuntos que o currículo para o Ensino Fundamental deveriam comtemplar: o estudo dos números e operações, que estão associados aos campos da Aritmética e da Álgebra, o estudo do espaço e das formas e o estudo das grandezas e medidas, que possibilita inúmeras interligações entre campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria (Brasil 1998).

Existe uma concordância para que haja o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar empenhado em atividades que relacionam as diferentes concepções da Álgebra. Ver a Figura 1.1.

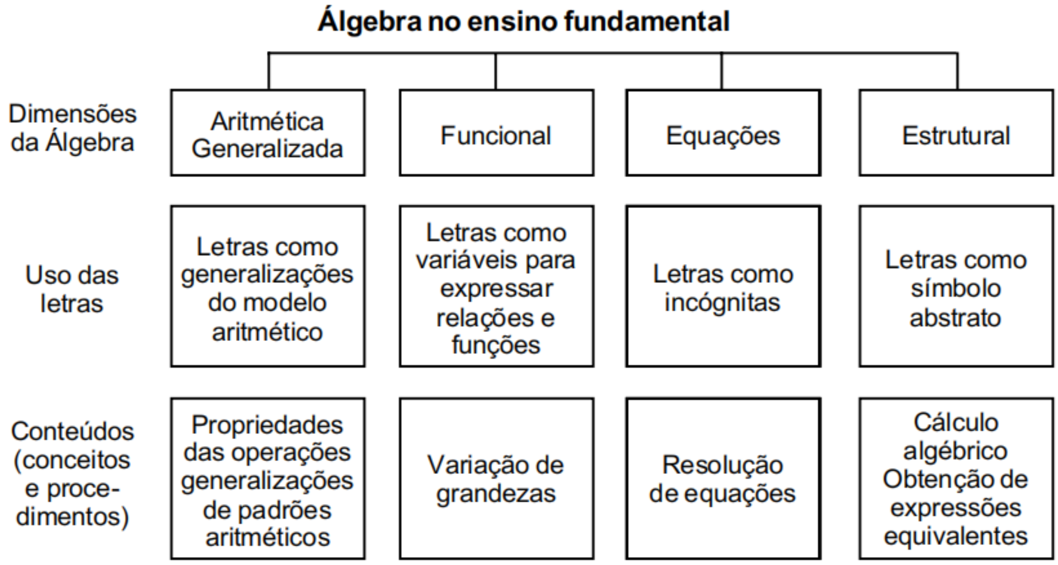


Figura 1.1: Diferentes interpretações da Álgebra escolar.

E estas diferentes concepções na aprendizagem do conteúdo matemático devem estar "ancorada em contextos sociais que mostrem claramente as relações existentes entre conhecimento matemático e trabalho", estimulando o carácter especulativo do intelecto humano, promovendo interesse e motivação dos alunos (Brasil 1998). Estes objetivos são vistos na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Objetivos propostos no ensino da Álgebra

Objetivos do 4º Ciclo
Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações e sistemas;
Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Fonte:(Brasil 1998)

Os PCNs ficaram vigentes como diretrizes educacionais até a formulação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que tem origem na Lei n.13.005 de 25 de junho de 2014, porém ainda servem como diretrizes a serem buscadas no ensino da Matemática.

1.1.2 Base Nacional Comum Curricular - BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é um documento de carácter normativo que define um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (Brasil 2017).

O documento afirma que a Matemática do Ensino Fundamental tem por objetivo o compromisso com o letramento matemático, definido como "as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matemáticamente" (Brasil 2017). E que uma das formas de se trabalhar essas habilidades é a resolução de problemas.

Dentro deste contexto, o estudo da Àlgebra tem por objetivo desenvolver o pensamento algébrico e suas habilidades fundamentais: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em resumo, deve-se enfatizar o desenvolvimento da linguagem algébrica, o estabelecimento de generalizações, análise de interdependências entre grandezas distintas e a resolução de problemas com equações e inequações (Brasil 2017).

O BNCC sugere que alguns aspectos da Álgebra sejam trabalhadas desde os anos inicias do Ensino Fundamental e sejam reforçadas a partir do sexto ano com as propriedades da igualdade e partição. No sétimo ano se expanda, e o uso de letras em expressões algébricas compreenda a ideia de variável (Brasil 2017). Já no oitavo ano os alunos devem trabalhar entre outras coisas, com equações de 1º grau e retas no plano, sistemas de equações lineares e equações de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ (Brasil 2017). E no nono ano do Ensino fundamental, entre outros assuntos, os alunos devem trabalhar com expressões algébricas, passando por fatoração e produtos notáveis, resolução de equações polinomiais de 2º grau por meio de fatoração.

Em suma, a BNCC visa superar a fragmentação disciplinar do conhecimento, estimulando sua aplicação na vida real, atribuindo sentido ao que se aprende, bem como o protagonismo dos estudantes em suas aprendizagens (Brasil 2017).

1.2 Equações de segundo grau: uma reflexão acerca da dificuldade no ensino e aprendizagem

O ensino e aprendizagem de equações de 2º grau é um assunto de grande importância quando se trata da educação de matemática. De acordo com (Nabais 2010), o aproveitamento desse tema garante aos alunos uma nova oportunidade de se aprender álgebra, uma vez que requer do aluno conhecimento mais aprofundado quando comparado às equações lineares. Além disso, possibilita que o aluno explore múltiplas situações e estabeleça conexões por meio da possibilidade de usar métodos geométricos e algébricos ao mesmo tempo, tais equações são importantes por representarem situações reais, como a trajetória de um objeto arremessado, a forma de uma parábola, entre outros exemplos.

Dada contextualização, é correto afirmar que o conceito matemático de equações quadráticas é um dos tópicos importantes em álgebra e tem profundo processo de desenvolvimento. É também um componente inseparável da história da matemática e do currículo escolar (Güner e Uygun 2016).

Uma equação do segundo grau é definida como sendo uma equação com uma incógnita, representada por x, que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$. Essas equações recebem esse nome, uma vez que o termo de maior grau é elevado ao expoente 2 (Moraes 2021). Ao longo da história várias civilizações tentaram resolver essas equações. Os gregos realizavam demonstrações por meio de construções geométricas, os babilônios apresentavam soluções algébricas, os árabes apresentaram a equação do 2º grau e sua resolução ampliando horizontes entre o método geométrico e algébrico (Vale 2013).

É necessário ressaltar que a incógnita denominada por x é apenas uma forma comum de apresentá-la. Evidencia-se a importância de reforçar aos alunos que não devem ficar acostumados ao uso de uma única letra na representação das variáveis. Alguns métodos são corretamente utilizados para a resolução das equações do segundo grau, entre eles: complementação de quadrados, soma e produto, fatoração do trinômio quadrado perfeito e pela fórmula geral de resolução, a qual é dada o destaque principal (Moraes 2021).

No caso das equações de segundo grau, a fórmula mais usada para resolver as equações de segundo grau no Brasil, é comumente conhecida como “fórmula de Bháskara”, em homenagem ao matemático indiano Bháskara Acharya. Vale ressaltar que, mesmo sabendo que essa não é a denominação correta, a “fórmula de Bháskara” é nomenclatura de amplo conhecimento e culturalmente aceita no Brasil (Moraes 2021).

Segundo (Vale 2013) o hábito de dar o nome de Bhaskara para essa fórmula resolutiva da equação do segundo grau é uma característica somente do ensino brasileiro e que se estabeleceu por volta da década de sessenta. Na literatura internacional não se encontra o nome de Bhaskara para essa fórmula, porque não é adequado, já que problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos atrás, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos, o que se tinha era uma receita escrita em prosa, sem uso de símbolos que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.

Geralmente os estudantes começam a estudar equações do 2º grau no 9º ano do ensino fundamental, e é nesse momento que os alunos demonstram os conhecimentos e familiaridades adquiridas nas equações do 1º grau e outros conhecimentos anteriores para a resolução das equações do 2º grau. É a partir deste e outros momentos que o professor pode continuar desenvolver o conhecimento algébrico, através de raciocínio lógico e situações problemas e observar as dificuldades dos alunos.

De acordo com (Antunes 2013) o estudo das equações do 2º grau representa, para os alunos, um novo momento de aprendizagem algébrica, porque remete-os para um nível de abstração superior ao exigido na resolução de equações lineares, e por sua vez, contribui para o desenvolvimento do conceito de variável e noção de equilíbrio presente no sinal de "=" ; possibilita o estabelecimento de conexões com os diversos temas; permite a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica; proporciona o recurso a diferentes formas de representação (algébricos e/ou geométricos); e constitui uma ferramenta fundamental na resolução de problemas.

Segundo (Vale 2013) uma das maneiras de facilitar o ensino-aprendizagem de qualquer conteúdo em matemática é utilizando situações problemas e expondo a importância desse conteúdo em várias áreas do conhecimento. É claro que quando o professor se propõe a trabalhar com qualquer que seja o método de resolução para equação do 2º grau, é necessário verificar os conhecimentos prévios do aluno e se ele já tem fundamentos para assimilação do conteúdo em foco. (Moraes 2021) afirma que no processo de ensino e aprendizagem, muitos assuntos são mais assimilados, quando anteriormente é aprendido um assunto que o antecede ou que lhe dará noções e possibilidades para o novo assunto ou conteúdo abordado. Desta forma, a falta da aprendizagem das equações do 2º grau para muitos alunos, decorre, por vezes, de não entenderem desde o princípio as noções algébricas, ocasionando uma grande dificuldade em assimilar e compreender.

Todos os métodos de resolução das equações de segundo grau e suas demonstrações tiveram a sua importância ao longo da história da matemática seja ele algébrico, gráfico, cartesiano ou geométrico e atualmente não é interessante ficar resumido apenas a um método de resolução. É importante que o ensino seja feito de várias maneiras, pois todos os métodos conseguem resolver o mesmo problema mostrando sua aplicabilidade, assim diversifica os ângulos de visão do aluno e ampliam a assimilação do assunto (Vale 2013).

1.3 Um histórico sobre o tratamento das equações de 2º grau

Muitos matemáticos importantes através das várias civilizações ao longo da história estudaram formas de resolver equações de 2º grau e demosntraram a validade de suas resoluções por meio de argumentos geométricos, aritméticos e algébricos que pudessem ser reduzidos a uma equação de 2º grau.

Evidências históricas, com problemas envolvendo tais equações, são encontradas em antigos registros deixados pelas civilizações Babilônicas, Egipcias, Gregas, Indianas e Árabes ao longo da história.

Na Mesopotâmia a civilização Babilônica se desenvolveu entre 6000 a.C. e 330 a.C., e costumava resgistrar sua escrita em placas de barro e possuia um sistema de numeração de base 60 (Peñuela 2006). Umas das virtudes dos escribas babilônicos estava na forma em que resolviam equações do 2º grau, (Radford e Guérette 2000) acrescenta, a existência de algum método em que os cálculos eram baseados, os quais estão na origem da atual fórmula resolvente e destaca a destreza deste povo na combinação de métodos e de representações numéricas e geométricas, para resolver equações quadráticas. O autor também exemplifica a forma concisa em que os escribas enunciavam os problemas, como por exemplo, quando se pretendia encontrar o comprimento do lado de um quadrado, sabendo que a soma de sua área com a medida do lado é igual a 3/4.

"A área e o lado do quadrado eu acumulei: 3/4"

O problema citado acima aparece na placa BM 13901 que contém uma série de problemas diversificados do 2º grau. (Estrada et al. 2000) menciona que problemas como $x^2 + x = c$ eram resolvidos por procedimentos muito próximos do método de completar quadrados, que se encontra em vários manuais escolares adotados em nosso pais para a resolução de equações de segundo grau. Posteriormente estas soluções eram comprovadas por argumentação geométrica chamada Naive Geometry, ou ainda, Geometria do corta e cola (Radford e Guérette 2000).

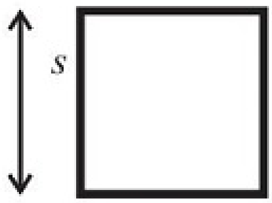


Figura 1.2: Quadrado de lado s.

Figura 1.3: Lado de comprimento s do quadrado.

Segundo (Radford e Guérette 2000), no problema anterior, o escriba pensa em um quadrado, Figura 1.2, contudo o lado não é visto simplesmente como lado, Figura 1.3, mas como um lado que fornece uma projeção canônica, que forma, junto com a lateral, um retângulo, Figura 1.4. Neste caso o lado s possui a mesma unidade metrológica da área do retângulo.

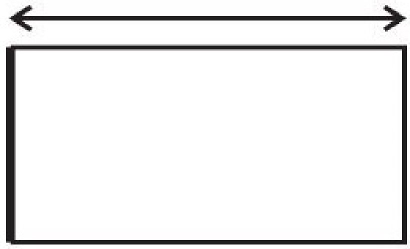


Figura 1.4: Lado com projeção canônica, resultando em retângulo de área s.

Voltando ao problema, a área total do quadrado de lado s junto com sua projeção canônica é 3/4, Figura 1.5.

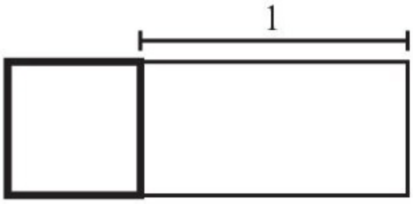


Figura 1.5: Retângulo formado por quadrado e projeção canônica do lado s.

No próximo passo o escriba corta a largura 1 da projeção canônica, Figura 1.5, em duas partes e transfere o lado direito para inferior do quadrado original, Figura 1.6.

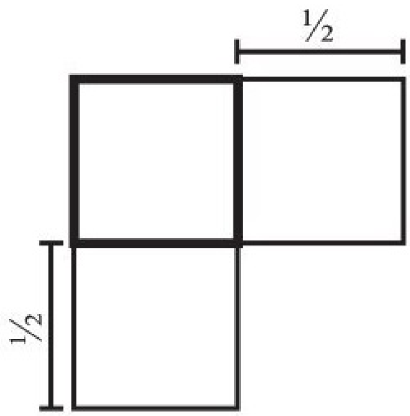


Figura 1.6: Retângulo formado por quadrado e projeção canônica do lado s.

Agora o escriba completa o quadrado maior adicionando um pequeno quadrado de lado 1/2, Figura 1.7.

A área total da Figura 1.7, é igual a 3/4 (área da Figura 1.5), somado com 1/4 (área do quadrado de lado 1/2, adicionado na Figura 1.7). Então a área da Figura 1.7 é 1. Logo o quadrado maior tem lado 1. Substraindo 1/2 do lado do quadrado da Figura 1.7, tem que $s = 1/2$, o lado do quadrado inicial.

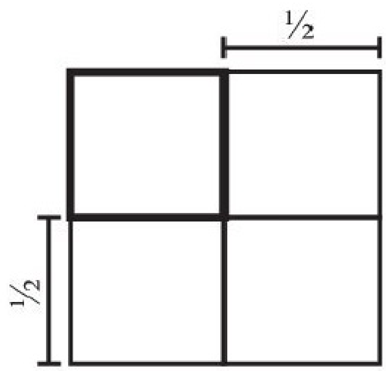


Figura 1.7: Quadrado de lado $s + \frac{1}{2}$.

Os Egípcios se desenvolveram nas margens do rio Nilo entre 3200 a.C. e 30 a.C. e grande parte seus conhecimentos matemáticos foram registrados em papiros. Esses conhecimentos matemáticos tratavam da vida prática, relacionados com a atividade agrícola e econômica da região (Estrada et al. 2000). Segundo (Andrade 2000), um dos problemas que os egípcios resolviam eram sistemas de duas equações e duas incógnitas, onde uma era quadrática e a outra linear, como por exemplo: "Divide 100 em dois quadrados, tal que o lado de um é 3/4 do lado do outro".

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

Para resolver problemas deste tipo os egípcios em alguns casos utilizavam *o método da falsa posição*, que consiste em atribuir valores às variáveis, não necessessariamente verdadeiros e depois fazer as correções necessárias ao longo do processo de resolução (Radford e Guérette 2000). Utilizando a segunda equação podemos supor que:

$$x = 3, \quad y = 4,$$

então, considerando a primeira equação

$$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow 4(x^2 + y^2) = 4 \times 25,$$

ou seja

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 100.$$

Logo as soluções para o sistema são $x = 2 \times 3$ e $y = 2 \times 4$, ou seja, $x = 6$ e $y = 8$.

A civilização Grega se desenvolveu por volta de 1500 a.C.. No esforço de entender a vida de uma forma racional, muitas ideias matemáticas foram desenvolvidas (Struik 1989). A necessidade dos Gregos de realizar demonstrações de seus resultados matemáticos, contribuiu para o desenvolvimento matemático desta cultura. Tal como os Babilônicos, os Gregos utilizavam construções geométricas para estudar determinadas equações, porém Diofanto introduziu na escrita, alguns sinais e abreviaturas, surgindo desta forma a Álgebra sincopada, transição da Álgebra retórica para a Álgebra simbólica. Pitágoras e seus discípulos resolveram geometricamente equações do tipo $x^2 = a.b$, $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$ e $x^2 + b = ax$ (Refatti e Bisognin 2005).

Tem-se registro da civilização Chinesa desde o século XVI a.C., porém por volta do século III a.C. temos registros da adoção de um sistema de numeração posicional decimal, com recursos simbólicos e a utilização do ábaco, onde se podia representar números positivos e negativos (Peñuela 2006). Em geral, para resolver equações quadráticas, utilizavam o método da falsa posição e aplicavam processos algébricos e geométricos semelhantes aos Babilônicos.

Os primeiros registros matemáticos da civilização Hindu são em livros escritos em verso por volta de 600 a.C., que tratam de conhecimentos teóricos necessários para a construção de templos. As contribuições Hidus para a solução de equações quadráticas se dão por nomes como Aryabhata, Brahmagupta e Bhaskara II.

Brahmagupta e Bhaskara II estão relacionados com à fórmula resolvente atual. Uma das formas que Bhaskara II utilizava para resolver questões do tipo $ax^2 + bx = c$, era multiplicar ambos os lados da equação por a (Pitombeira 2004):

$$(ax)^2 + (ab)x = ac$$

Depois "completar quadrado"

$$(ax)^2 + (ab)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Então,

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \frac{b^2}{4} \text{ e portanto, } ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}.$$

Segundo o mesmo autor, a primeira descrição da regra geral para determinar as raízes da equação de 2º grau foi encontrada num trabalho de Sridhara(850 - 950 d.C.), e que já havia uma noção que número de raízes de uma equação de 2º grau podem ser 0, 1 ou 2.

O império Árabe teve seu início com a origem do Islamismo no século VII, porém foi no século VIII que o interesse pelas ciências floresceu. Com a criação de grandes bibliotecas e a tradução para o árabe de grandes obras de pensadores da antiguidade (Andrade 2000). Ao mesmo tempo, foram traduzidas para o árabe algumas tabela hindus, introduzindo assim a simbologia dos números que usamos atualmente, como os algarismos de 0 a 9.

O progresso matemático árabe teve como protagonistas nomes como Al Khwarizmi, Abu Kamil, Al Khayyam e Al Qalasadi, onde o primeiro é considerado o "pai da Álgebra". Al Khwarizmi escreveu o primeiro tratado de Álgebra, *Tratado Conciso sobre o Cálculo por al-jabr e al-muqabala*, por volta do ano 825 d.C. O termo *al-jabr*, que originou a palavra "Álgebra", significa "restauração", que pode ser interpretado como a adição do mesmo número em ambos os lados da equação. Al-muqabala significa "comparação" e traduz a simplificação de uma equação por redução de termos semelhantes. Utilizando estes métodos, Al-Khwarizmi reduzia qualquer equação quadrática a sua forma canônica, porém a forma que os métodos eram aplicados não era aleatória, pois as etapas de solução não poderiam conduzir a uma expressão igual a zero, a qual não possuía nenhum significado (Andrade 2000). Depois de resolver os problemas de uma forma algébrica, Al-Khwarizmi apresentava demonstrações geométricas, demonstrando influências gregas e babilônicas.

Na Europa no século XII surgiu na itália alguns pensadores como Leonardo de Pisa(1175-1250) que introduziram na Europa procedimentos aritméticos e algébricos utilizados pelos árabes, que podem ser encontrados em sua obra Liber Abaci(1202). Ele introduziu a utilização do número zero como raíz de equações e a resolução de equações lineares e quadráticas (Refatti e Bisognin 2005). Posteriormente no século XVI, François Viéte(1540-1603), impulsionou a álgebra simbólica, foi ele que deu à equação quadrática a expressão que conhecemos hoje em sua forma canônica, $ax^2+bx+c = 0$ (Refatti e Bisognin 2005), descrevendo o seguinte método:

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tomamos $x = u + v$. Assim,

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0 \quad \text{isto é,} \quad a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0.$$

Considerando a equação na variável v, tem-se:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0. \tag{1.1}$$

Determine um valor de u, para que este anule o coeficiente da variável v, ou seja

$$u = -\frac{b}{2a}. \tag{1.2}$$

Substituindo em (1.1), tem-se

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0.$$

Resolvendo a equação acima para v^2, temos

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

onde se $b^2 - 4ac \geq 0$, então

$$v = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como $x = u + v$ e por (1.2), tem-se

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(adaptado de (Refatti e Bisognin 2005))

1.4 Dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem de equações do 2º grau.

Compreender as dificuldades dos alunos ao resolver equações do 2º grau, permite que os educadores desenvolvam estratégias de ensino e aprendizagem mais eficientes e abordagens pedagógicas que abordem os pontos problemáticos de forma mais eficaz.

Diferentes alunos têm estilos de aprendizado e níveis de habilidade variados. Ao estudar as dificuldades que eles enfrentam, os educadores podem adotar abordagens inclusivas que atendam a uma ampla gama de estudantes.

O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Entretanto, a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país (Brasil 1998).

Uma parte dos estudos acerca das dificuldades dos alunos do final do Ensino fundamental e início do Ensino Médio, parte dos estudos de (Vaiyavutjamai 2004). Este estudo foi sobre o ensino e aprendizagem de equações quadráticas com 231 alunos em seis turmas do 9º ano em escolas secundária na Tailândia. As análises de desempenho escritas e dados de entrevistas revelaram que, apesar de terem participado de 11 aulas sobre equações do 2º grau, quase nenhum aluno havia ido além de uma compreensão instrumental (aprender as regras sem saber a razão) da matemática associada às equações de segundo grau. As principais dificuldades apontadas pelo estudo foram:

1. Depois das aulas de equações do 2º grau, muitos alunos não perceberam que equações quadráticas geralmente tinham duas soluções.

2. Alguns alunos que resolveram equações quadráticas corretamente não sabiam como verificar se suas soluções para a equação estavam corretas.

3. Muitos alunos, talvez a maioria deles, não perceberam que se uma variável x aparece duas vezes em uma equação, por exemplo, $x^2 - 8x + 15 = 0$, ou $(x-3)(x-5) = 0$, então a variável tem o mesmo valor nos diferentes "lugares" da equação.

4. Ao tentar resolver $(x-3)(x-5) = 0$, alguns estudantes tailandeses "expandiram"os dois parênteses para obter $x^2 - 8x + 15 = 0$, refatoraram e em seguida, igualaram cada fator a zero.

(Adaptado de (Vaiyavutjamai et al. 2005))

No trabalho (Lima 2004), foram estudados um grupo de alunos de 15 a 16 anos de idade, de duas escolas da Grande São Paulo. Foram coletados dados de três classes compostas por 32 alunos da primeira série do Ensino Médio; 26 alunos da segunda série do Ensino Médio, ambas as turmas de uma mesma escola da Grande São Paulo e 19 alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de São Paulo. Foi utilizado um questionário que pedia, em duas questões, a solução de equações quadráticas nos números reais:

$$t^2 - 2t = 0 \quad \text{e} \quad (y-3)(y-2) = 0.$$

Os autores esperavam que os alunos usassem a propriedade do anulamento do produto para resolver ambas as equações, porém 19 alunos dos 77 mencionaram a fórmula resolvente para resolver a equação $t^2 - 2t = 0$ e 55 dos 77 alunos multiplicaram os parênteses para resolver a equação $(y-3)(y-2) = 0$. E destes 55 alunos, apenas 14 usaram a fórmula e 9 foram bem-sucedidos.

Quando os autores analisaram a solução dos alunos que utilizaram a fórmula resolvente, perceberam que os alunos estavam procurando justificativa para o segundo membro da equação ser igual a zero ao invés de buscar valores para as incógnitas. O que exemplifica esta observação é o fato de 13 alunos explicaram que $t^2 - 2t$ é igual a zero porque t^2 é o mesmo que $t \cdot t$, logo podendo ser interpretado como $2t$ e, portanto, $2t - 2t = 0$.

Em outro estudo, (Lima e Tall 2006) analisaram as respostas do questionário aplicado no estudo anterior, buscando as interpretações que os alunos fizeram dos conceitos de equação e de solução de uma equação e como suas experiências algébricas e aritméticas afetaram sua compreensão. As questões do questionário eram:

1. O que é uma equação?

2. Para que serve uma equação?

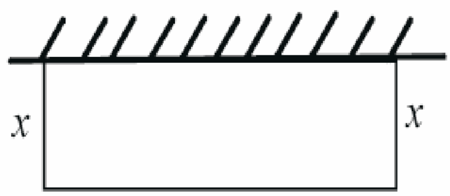
3. Dê um exemplo de uma equação.

4. O que a solução de uma equação significa?

5. Resolva a equação $t^2 - 2t = 0$ para os números reais, e explique os passos para sua solução?

6. Resolva a equação $(y-3)(y-2) = 0$ para os números reais, e explique os passos para sua solução.

7. Ulisses gosta de plantar flores. No seu quintal existe uma área disponível, próximo ao muro, então ele deseja construir um canteiro retangular e para cercá-lo, pretende utilizar 40 m de cerca que possui. Ele ainda não decidiu o tamanho dele, então fez o seguinte desenho:



Quais são as medidas laterais do canteiro para obter uma área de 200 m^2?

8. Para resolver a equação $(x-3)(x-2) = 0$ nos números reais, John respondeu em uma linha:"$x = 3$ ou $x = 2$". É a resposta correta? Analise e comente.

(Adaptado de (Lima e Tall 2006))

As questões 5 e 6 que correspondiam a resolução de equações quadráticas suscitou no primeiro autor a necessidade de analisar uma gama mais ampla de problemas. No que se refere às equações quadráticas, foram acrescentadas:

$$m^2 = 9, \quad 3l^2 - l = 0, \quad a^2 - 2a - 3 = 0 \text{ e } r^2 - r = 0$$

A equação $m^2 = 9$ foi vista pelos alunos como um problema para encontrar raíz quadrada de um número, ou seja, encontravam $m = 3$. As outras equações foram abordadas testando valores numéricos na equação ou usando a fórmula de Bhaskara. Em nenhuma das equações os alunos usaram a propriedade do anulamento do produto, ou seja, se o produto de dois fatores é zero, então um deles de ser igual a zero.

Em outro estudo, (Vaiyavutjamai e Clements 2006) estudaram 231 alunos em seis turmas da 9ª série em duas escolas secundária públicas da Tailândia, onde foram aplicadas 18 questões sobre equações quadráticas antes e depois de 11 aulas com "abordagens tradicionais de ensino"sobre equações quadráticas. Além disso, foram realizadas 36 entrevistas com 18 alunos selecionados, cada aluno foi entrevistado duas vezes, para avaliar a compreensão dos conceitos associados às equações quadráticas e o impacto das "abordagens tradicionais"para esta compreensão. Muitas das dificuldades encontradas pelos alunos já foram mencionadas acima.

Posteriormente (Lima e Tall 2010) realizam um novo estudo sobre a mesma base de dados dos estudos de 2006 do primeiro autor, onde relaciona a resolução de equações quadráticas com um estudo sobre o desenvolvimento de métodos processuais(ou instrumentais) de resolução de equações lineares (Lima e Tall 2008). Nos três estudos os professores já haviam introduzido a utilização de três métodos:

1. Fatorar a expressão em dois fatores lineares e usar a lei do anulamento do produto para concluir que um dos fatores deve ser zero.

2. Completar quadrado para a equação quadrática.

3. Manipular a equação para escrevê-la na forma $ax^2 + bx + c = 0$ e utilizar a fórmula resolvente.

Apesar dos professores terem coberto os três tópicos, eles passaram rapidamente para o uso da fórmula resolvente, acreditando que isso seria mais eficaz no apredizado para resolver qualquer equação quadrática. Porém o estudo revelou que os alunos continuaram usando mudanças de simbolos procedimentais, revelando falta de desenvoltura na manipulação simbólica e fraca compreensão dos princípios de equivalência em uma equação, revelados pelo uso de regras como "muda de lado, muda de sinal"; "muda de lado e coloca em baixo", ou ainda "potência 2 passa para o outro lado como raiz quadrada". Embora os professores construíssem sua abordagem inicial em "fazer a mesma coisa para ambos os lados", os alunos lembravam não dos princípios gerais, mas dos atos específicos que realizavam ao resolver as equações. Em alguns casos esses procedimentos podem conduzir a respostas corretas, mas em outros, tais estratégias revelam-se frágeis se não estiverem relacionadas com um significado conceitual. Na tentativa de usar tais procedimentos, alguns alunos cometeram erros ao tentar resolver $2x = 4$:

$$x = 4 - 2, \qquad x = \frac{4}{-2}, \qquad x = \frac{2}{4}.$$

Com relação a equação $m^2 = 9$, estas estratégias de solução procedimentais podem causar os seguintes erros:

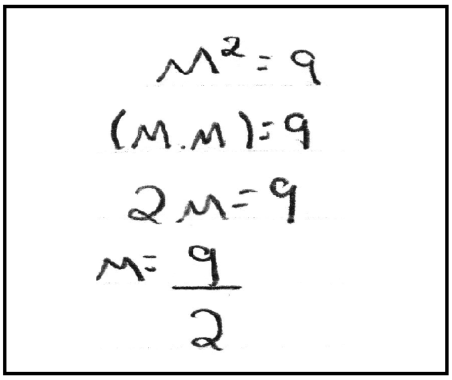


Figura 1.8: m^2 tornando-se $2m$.

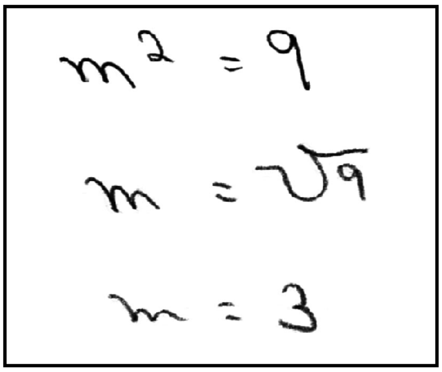


Figura 1.9: "Passando o expoente para o outro lado como raiz quadrada".

Na entrevista, um desses alunos explicou: "a potência dois passa para o outro lado como raiz quadrada". Nessa explicação, o aluno deixa claro que há um movimento do expoente e uma transformação na potência para uma raiz quadrada. Nenhum dos alunos selecionados para a entrevista mencionou a possibilidade de uma raiz negativa.

Outro ponto que mostrou, foi que os alunos consideram a fórmula resolvente, uma forma vantajosa de resolver equações do segundo grau. Na oitava pergunta do questionário, o "Problema de John", trinta alunos dos 77(39%) afirmam que a solução estava correta. Três(4%) mencionaram a fórmula de Bhaskara dizendo coisas como, "Ele deve ter usado a fórmula quadrática em sua mente". Onze dos alunos (14%), declararam que "John não resolveu o problema", essencialmente "porque não usou a fórmula". Quatro alunos (5%), usaram a fórmula para resolver a equação e compararam o resultado com a solução de John. Um deles usou a fórmula incorretamente e obteve valores diferentes de Jonh, insistindo que John estava errado, Figura 1.11.

Outras estratégias usadas pelos alunos, relacionaram a solução de equações quadráticas com suas experiencias sobre equações lineares, Figura 1.4.

No trabalho de (Didiş et al. 2011), foi aplicado um questionário a 113 alunos em quatro turmas do 10º ano de uma escola secundária em Antalya, Turquia. As perguntas foram selecionadas para medir o objetivo do estudo de determinar como os alunos "determinam as raízes e o conjunto de soluções de equações quadráticas em uma variável. O estudo foi realizado levando em conta a categorização de Skemp(1976) da compreensão da matemática como instrumental (processual) ou relacional (conceitual), ou seja, ele descreveu a compreensão instrumental como "regras sem razão" e a compreensão relacional como "saber o que fazer e por quê". Utilizando a linguagem de Skemp, pode-se dizer que realizar instrumentalmente a resolução de equações de segundo grau aplicando fórmulas e técnicas, apesar de muitas vezes resultar em respostas corretas, esses atos se tornam desprovidos de compreensão relacional.

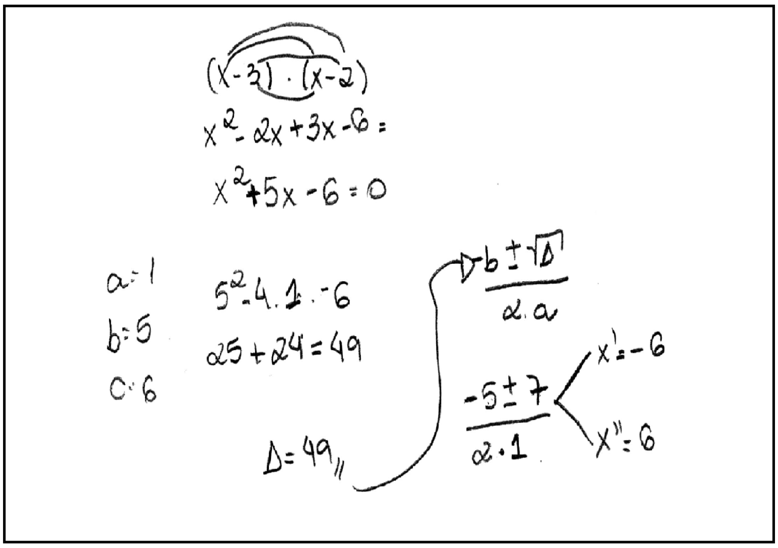


Figura 1.10: Um estudante que utilizou a fórmula quadrática para o "Problema de John"..

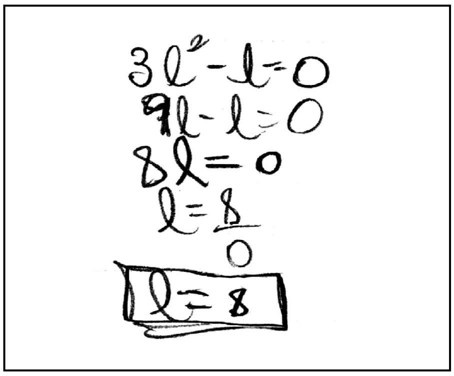


Figura 1.11: Multiplicando o coeficiente pela potência.

Primeiramente foi solicitado aos alunos que encontrassem as raízes de uma equação quadrática em sua forma padrão ($ax^2+bx+c=0$), onde quase todos os alunos resolveram corretamente esta equação por fatoração. Nas questões seguintes, equações quadráticas foram dadas em diferentes estruturas (por exemplo, $ax^2-bx=0$). Nesses tipos de questões, apenas 64% dos alunos resolveram a equação $ax^2-bx=0$ corretamente e 36% erraram. Exemplificamos dois tipos de erros mais comuns.

Encontre o conjunto solução da equação $x^2 - 2x = 0$.

$x^2 = 2x$

$x \cdot \cancel{x} = 2 \cdot \cancel{x}$

$\underline{x = 2}$ $\quad G = \{2\}$

Figura 1.12: Um exemplo do primeiro tipo de erro dos alunos.

Encontre o conjunto solução da equação $x^2 - 2x = 0$.

$x^2 - 2x = 0$

$\begin{matrix} x & -2 \\ x & +1 \end{matrix}$

$(x-2) \cdot (x+1) = 0$ $\quad G_V = \{+1, -2\}$

Figura 1.13: Um exemplo do segundo tipo de erro dos alunos.

Encontre o conjunto solução da equação $x^2 - x = 12$.

$x \cdot (x-1) = 12$

$4 \cdot (4-1) = 12$ $\quad \underline{x = 4}$

$4 \cdot 3 = 12$

Figura 1.14: Um exemplo do primeiro tipo de erro dos alunos.

Na Figura 1.14, os alunos não perceberam que a forma padrão havia sido levemente alterada, com o termo constante aparecendo do lado direito da equação. Neste caso, 12% dos alunos erraram o conjunto solução.

Em resumo, os autores chegaram a conclusão que a fatoração de equações quadráticas é um desafio para os alunos, principalmente quando os alunos experimentam uma estrutura diferente daquela que estão acostumados. E embora os alunos conhecessem algumas regras relacionadas com a resolução de equações quadráticas, eles aplicam as regras sem pensar porquê fazem isso, ou se estavam matemáticamente corretos.

Outro trabalho feito por (Makonye e Nhlanhla 2014), estudou os erros de 22 alunos do 11º ano de uma escola secundária em East Rand, na província de Gauteng, África do Sul ao tentarem resolver equações quadráticas por meio de fatoração. Foram aplicadas quatro equações quadráticas:

Problema de nível 1: $(x-5)(x-2) = 0$ e $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Problema de nível 2: $x^2 + 2x - 3 = 12$.

Problema de nível 3: $x(x+1) = 6$.

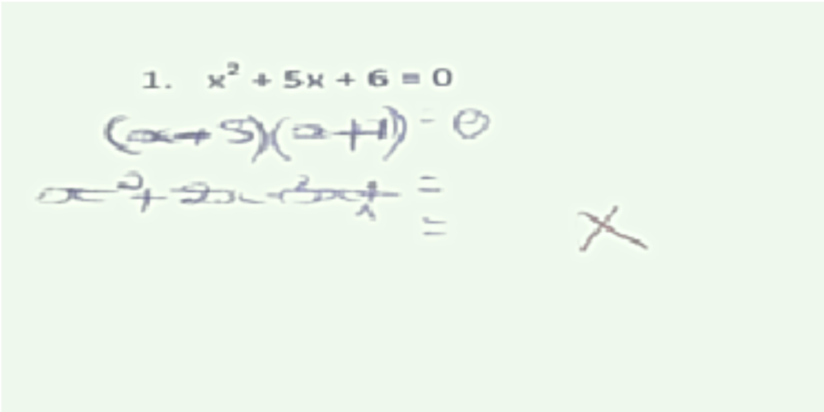


Figura 1.15: Aluno tentando utilizar soma e produto.

Na Firgura 1.15, o aluno tentou utilizar "soma e produto"na fatoração, ou seja, em uma fatoração do tipo $(x - m)(x - n)$, quando somamos ou subtraímos m e n, obtemos o coeficiente do termo linear da equação quadrática na sua forma $x^2 + bx + c = 0$, e quando multiplicamos $m \cdot n$ obtemos o termo constante da equação quadrática, porém o aluno na Figura 1.15 confundiu os termos, pois ele fez a soma $5 + 1 = 6$ para encontrar o termo constante e fez o produto $5 \cdot 1 = 5$ para encontrar o termo linear.

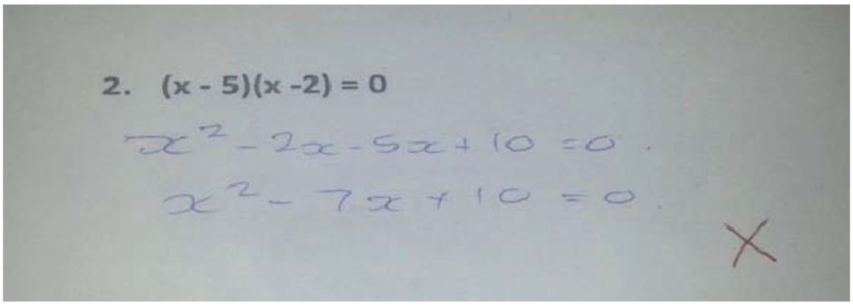


Figura 1.16: Aluno fazendo o produto dos fatores lineares.

Na Figura 1.16, não percebendo que a equação já estava fatorada, o aluno multiplicou os parênteses corretamente, porém não era necessário pois bastava usar a propriedade do anulamento do produto. Os autores salientam que os alunos tomam caminhos de resolução das equações quadráticas, sem entender o que está sendo solicitado e se o caminho tomado renderá uma resposta correta.

O aluno na Figura 1.17 distribuiu a incógnita x apenas no primeiro termo do parênteses. Ele "passou"o número 6 para o lado esquerdo "trocando o sinal", porém quando realizou o cálculo, $1 - 6$, ele obteve -7.

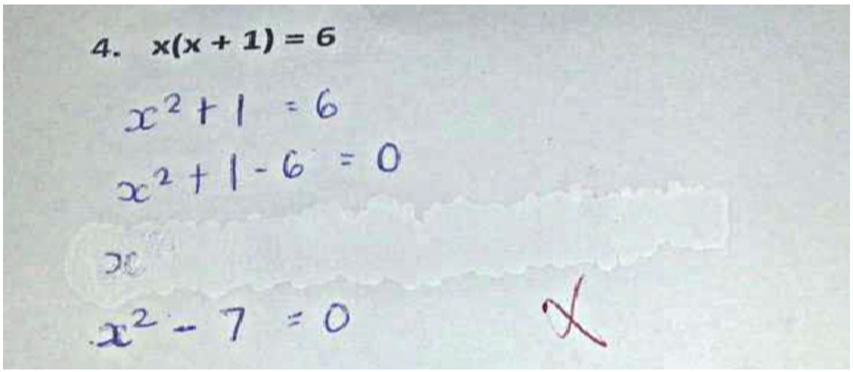


Figura 1.17: Erro na propriedade distributiva.

Em resumo, os estudantes apresentaram dificuldades com a fatoração. Os autores mencionam que uma das razões para os erros é que os alunos usaram esquemas inadequados para mediar suas soluções, além de sempre tentarem voltar a forma canônica das equações quadráticas, sem entender o que cada problema realmente exige.

Em 2017 foi realizado um estudo (Brito et al. 2019), baseado em uma pesquisa quantitativa com 100 estudantes do 1º ano do Ensino Médio, em uma escola da cidade de Barbacena, Belém do Pará. Foram aplicadas seis questões de múltiplas escolha para a coleta de dados.

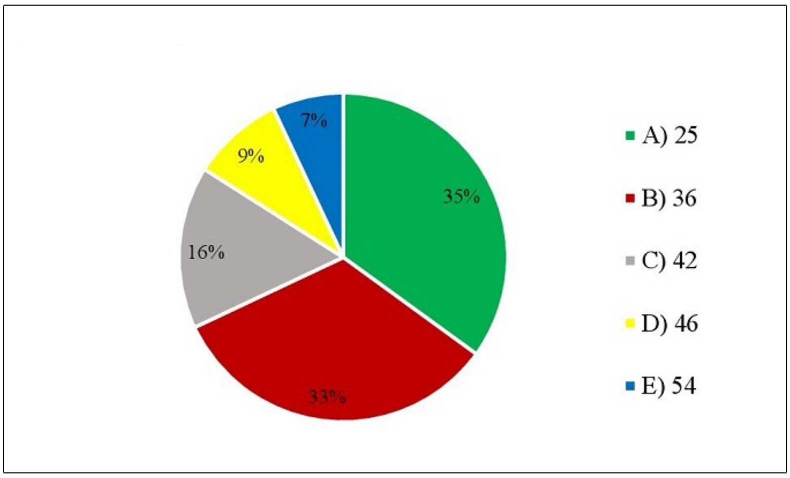


Figura 1.18: Discriminante da equação $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Em uma das questões perguntou-se ao estudante qual era o discriminante (Δ) da equação $x^2 - 8x + 7 = 0$. Os resultados vemos na Figura 1.18.

O gráfico de setores nos diz que 33% dos estudantes acertaram o valor do discriminante da equação quadrática $x^2 - 8 + 7 = 0$, que corresponde a $\Delta = 36$, porém 67% erraram o cálculo que envolve potenciação, multiplicação e subtração.

Além de pedir o discriminante da equação $x^2 - 8x + 7 = 0$, também foi solicitado que os alunos encontrassem o conjunto solução da equação.

Na Figura 1.19, vemos que 43% encontraram corretamente o conjunto solução

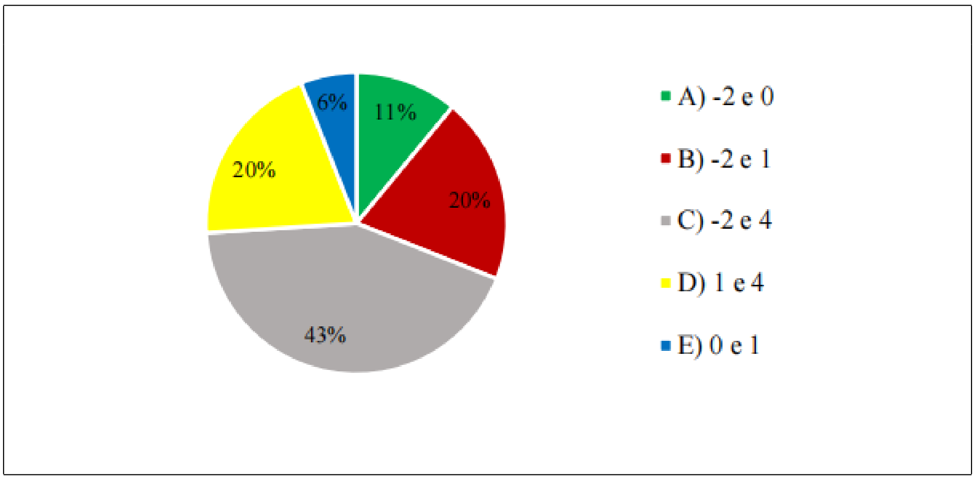


Figura 1.19: Conjunto solução da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$.

$x = 4$ ou $x = -2$, porém 57% erraram o processo do cálculo das duas raízes. Como a porcentagem dos alunos que encontraram a solução (43%) é maior que a porcentagem dos alunos que encontraram o discriminante correto (33%), então umas das hipóteses é que alguns alunos acertaram o conjunto solução por tentativa e erro, substituindo as alternativas diretamente na equação quadrática.

Também foi solicitado a solução do problema, "Dados dois números, sabe-se que a diferença entre eles é 24. Adicionando-se a sua soma o quociente da divisão do maior pelo menor, o resultado é 51. Quais são os possíveis valores para o menor desses dois números?". Na Figura 1.20, vemos que 23% acertaram a solução do problema proposto marcando $x = 12$ ou $x = 1$, porém 67% marcaram outras opções.

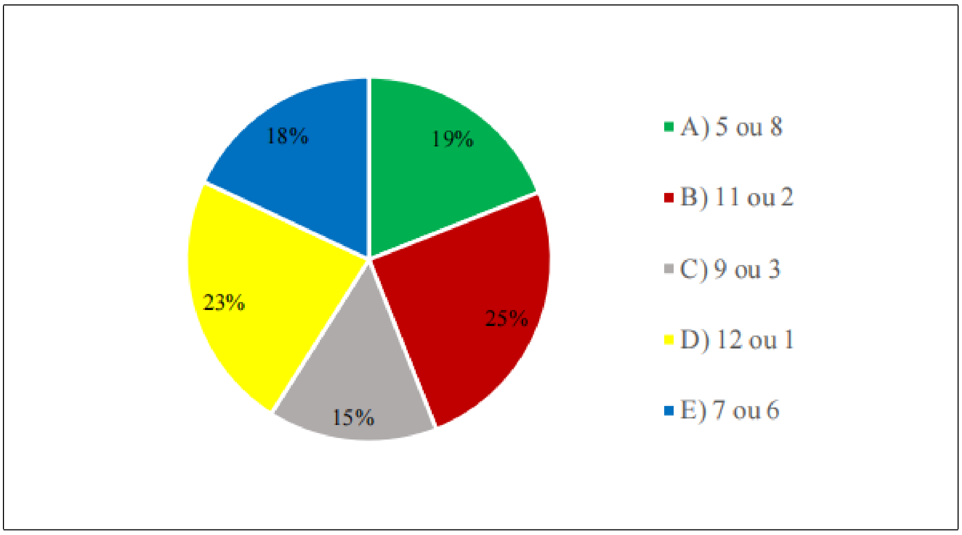


Figura 1.20: Solução para o problema proposto.

Em suma, os autores (Brito et al. 2019) concluíram que os alunos têm dificuldades em interpretar problemas algébricos, mas também aqueles que são apresentados em formato de textos e que são modelados por $ax^2 + bx + c = 0$. Além disso, os estudantes têm dificuldades em resolver equação quadrática pela fórmula geral.

O fato de muitos alunos terem aversão à matemática como um todo, e tratá-la como algo que não se aplica à sua realidade deve ser encarado pelo professor como desafiador e esse deve mostrar que matemática não é somente um mundo de fórmulas prontas, ou seja o professor precisa assumir na sua prática pedagógica o método da resolução de problemas como parte integrante de sua metodologia de ensino como forma de tornar a Matemática mais agradável e mais compreensível pelos alunos, e é por esta razão, que se faz necessário o professor conhecer muito bem o que está ensinando, para tentar motivar seus alunos (Vale 2013).

No caso específico das equações de segundo grau, como qualquer outro objeto de conhecimento, podem e devem ser trabalhadas de maneira contextualizadas, tudo para que o ensino aprendizagem ocorra de forma satisfatória e com a obtenção de resultados positivos (Moura 2020). Demasiados momentos as equações se contornam em procedimentos sistematizados e pré-determinados, com métodos e fórmulas já estabelecidas que se prende somente em achar as respostas dos problemas matemático, sem manifestar a verdadeira natureza e finalidade de calcular determinadas equações e o que realmente trará de benéfico aos alunos (Coelho 2023).

É evidente que quando o professor se propõe a trabalhar os métodos de resolução para equação de segundo grau é necessário verificar os conhecimentos prévios do aluno e se ele já tem fundamentos para assimilação do conteúdo em foco (Vale 2013).

Com base nisso, a ausência de aprendizado com relação as equações de segundo grau pelos alunos, provém do não entendimento desde os primórdios dos rudimentos algébricos, ocasionando amplas dificuldade em processar e se ater a tais conhecimentos (Coelho 2023).

Uma das maneiras de facilitar o ensino-aprendizagem de qualquer conteúdo em matemática é utilizando situações problemas e expondo a importância desse conteúdo em diversas áreas do conhecimento.

2 Método Kumon

Este capítulo aborda a metodologia de ensino do Método Kumon, em especial, os aspectos relacionados ao ensino de Matemática. Além de relatar um breve histórico de sua criação, também explora os pilares em que o Método Kumon está estruturado.

2.1 Histórico do método Kumon: uma breve contextualização

Toru Kumon nasceu em 1914 na província de Kochi, no Japão, e se formou na Universidade Imperial de Osaka, onde estudou matemática. Durante a Segunda Guerra Mundial, Toru Kumon atuou como professor na Marinha japonesa, posteriormente lecionou em várias escolas de ensino médio em Osaka. Foi então no ano de 1954, que o Método Kumon começou a ser desenvolvido, motivado a partir das dificuldades apresentadas pelo seu filho mais velho, Takeshi Kumon, em matemática (Kumon 1997).

> "Meu filho, apesar de não ter saúde frágil, precisava de certos cuidados. Por isso, minha esposa tinha como princípio não permitir que ele estudasse após o jantar. Mas eu, como pessoa que acabava voltando sempre tarde para casa. Nesse horário, logicamente, não me era permitido ensinar meu filho. A solução foi preparar exercícios, a mão, no dia anterior, para que minha esposa os entregasse ao meu filho depois. Como não poderia ficar ao seu lado, ensinando-o, tive que montar os exercícios de modo que ele pudesse resolvê-los sozinho. Toda noite, após verificar os exercícios que havia deixado para meu filho fazer, preparava os do dia seguinte. Nos exercícios em que ele cometia erros, fazia anotações quando necessário e fazia ele próprio corrigi-los."

(Kumon 1997)

Depois de analisar os livros de estudos utilizados na formação em matemática de Takeshi, Toru identificou que não havia uma organização sistemática dos estudos e que estes não eram interessantes o suficiente, então Toru decide criar exercícios autoinstrutivos diários, para que seu filho pudesse aprender de acordo com o seu ritmo e posteriormente, estudar conteúdos avançados em relação à sua série escolar. Esta proposta de ensino baseada em treinamentos diários para o domínio da matemática, acaba se tornando um dos pilares do Método Kumon (Kumon 1997).

Ao notar o progresso de Takeshi (que na sexta série do ensino fundamental já era capaz de resolver problemas de cálculo diferencial e integral, assuntos normalmente estudados apenas no ensino médio), outros pais também se interessaram pelo Método Kumon. No ano de 1956, a primeira unidade do Kumon foi aberta em Osaka, Japão, e dois anos depois, era criado o Kumon Instituto de Educação, que se tornou o modelo para todas as unidades do Kumon abertas pelo mundo ao longo das décadas (Kumon 1997).

O ano de 1974 foi um marco para expansão do Kumon pelo mundo, tendo assim a primeira unidade do Kumon no exterior, em Nova York, Estados Unidos. Três anos depois, foi inaugurada a primeira franquia na América do Sul, sediada no município de Londrina, no estado do Paraná (Kumon 2023).

Em depoimento produzido pela série: "Kumon 40 anos", Suzana Kabe (primeira orientadora do Kumon no Brasil) conta que havia um pastor da Igreja Batista de Londrina que conhecia o pastor Toru Kumon no Japão. Foi assim que nasceu a ideia da primeira unidade brasileira, na cidade de Londrina. Outro importante ponto levantado no depoimento de Kabe é sobre a visão que Toru tinha sobre o Brasil: "O País recebeu de braços abertos os imigrantes japoneses, com muito carinho. Por isso, quero trazer o método Kumon para o Brasil, para que as crianças brasileiras se desenvolvam e cooperem para o futuro do Brasil". A partir disso, há 46 anos a rede Kumon veio e continua vindo a se desenvolver em todos os estados brasileiros, bem como em países da América do Sul: Peru, Uruguai, Chile, Colômbia, Bolívia, Argentina e Uruguai (Kumon 2023).

2.2 Parâmetros de ensino do método Kumon

A metodologia Kumon se baseia no princípio de incentivar nas crianças a autonomia nos estudos, procurando fortalecer o aprendizado de cada um, de maneira individual por meio de um processo planejado. Assim, o objetivo principal é que o aluno consiga enfrentar sozinho a conquista pelo conhecimento, estimulando a capacidade do educando em aprender e, sobretudo, se sentir seguro aos desafios inseridos no processo de aprendizagem, tanto para vida pessoal quanto para vida acadêmica (Kumon 1997).

O modelo de ensino desenvolvido pelo professor Toru é dado por meio de materiais contendo exercícios de resolução individual, sem ajuda de uma outra pessoa. A aplicação desse material respeita o ritmo de aprendizagem de cada indivíduo, promovendo ajuda gradual e sequencial para permitir o progresso individual.

Quando Toru começou a formular o Método Kumon, ele perseguiu algumas metas norteadoras:

1. Limitar o tempo de estudo diário do meu filho em 30 minutos;
2. Fazer com que meu filho conseguisse resolver questões dadas em vestibulares, ao invés de objetivar somente a melhora do desempenho no 1º grau;
3. Fazer chegar, o mais cedo possível, à resolução de equações (Kumon 1997).

Basicamente, o método é composto por 7 pilares principais, ver Tabela 2.1, sendo o "estudo individualizado"e o "autodidatismo"as peças chave para construção dos demais.

Tabela 2.1: Pilares estruturais da metodologia Kumon

Estudo Individualizado	Cada aluno estuda no ponto mais adequado à sua capacidade, podendo avançar além dos conteúdos de seu ano escolar, não se prendendo à idade ou ano escolar que está inserido
Autodidatismo	Desenvolver a capacidade de aprender por si mesmo. O aluno estuda lendo, pensando, resolvendo o material com as próprias habilidades
Material didático	Estruturado com a finalidade de que o aluno inicie em conteúdos fáceis e o grau de dificuldade avance de modo suave, estimulando a resolver questões, refletindo e pensando, usando como base seu próprio conhecimento
Orientadores	Responsáveis por observarem a habilidade acadêmica, personalidade e sentimento de cada aluno para oferecer o estudo mais adequado (customizado) a cada um
Gosto pela aprendizagem	Promover o entusiasmo entre os alunos para que estes experimentem o sentimento de realização, querendo aprender cada vez mais
Passo à frente	Estimula o aluno desenvolver habilidades que amplie a capacidade para estudos futuros
Além dos estudos	Desenvolver as habilidades em nível máximo com intuito de formar pessoas capazes de enfrentar desafios, tomar decisões e contribuírem para sociedade

Fonte: adaptado do site oficial do Kumon (Kumon 2023)

O método Kumon foi desenvolvido com a intenção de preparar o aluno para enfrentar o mundo competitivo dos vestibulares e concursos dos dias atuais, pois eles exigem, além de muito conhecimento, estratégias para resolverem certos tipos de exercícios com rapidez e precisão, algo que o Kumon trabalha corriqueiramente. O método busca ainda ensinar ao aluno técnicas importantes para a resolução de problemas, podendo com isso, levá-lo a desenvolver melhor o pensamento matemático, pois, o método não se limita apenas a exercícios rotineiros e desinteressantes com algoritmos, mas sim buscar entender e compreender o que se estuda.

Um dos fatores do método é o fato dele ser bastante centrado na disciplina do aluno, a qual é muito semelhante à existente no Japão. A disciplina busca aumentar a concentração, o interesse, a fixação de conteúdo, a autonomia e a melhoria nas interpretações, melhorando com isso a absorção do aprendizado. Ou seja, o fato dele criar uma rotina de estudos para seus alunos, desenvolvendo neles o compromisso com a sua aprendizagem, faz com que assim, eles adquiram hábitos de estudo constantes (Miranda 2020).

O principal objetivo da metodologia Kumon é formar alunos autodidatas, capazes de estudar por si mesmos, resolver sozinhos os problemas e corrigir os próprios erros. O autodidatismo é obtido pelo aluno ao desenvolver o material didático, que inclui exemplos e exercícios-guia quando novos conceitos são introduzidos para que ele possa aprender observando tais exemplos, sem a necessidade de ser "ensinado". Desse modo, o aluno pode desenvolver a capacidade de fazer uma série de associações mentais e levantar hipóteses, confirmar suas suposições e chegar às próprias (Kumon 1997).

Os resultados da edição do Pisa – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – conforme (Lorenzoni 2023), disponível no Portal do MEC, apontaram o sistema de ensino da Finlândia como uma referência mundial em educação. O método utilizado naquele país é fundamentado e centralizado nos alunos e as aulas e projetos são adaptados de acordo com os interesses, habilidades e dificuldades de cada um, de maneira individualizada. O professor estimula o aluno a planejar seus estudos, a pesquisar e a ter autonomia na construção de sua formação. Este sistema de ensino é muito similar ao aplicado pelo Método Kumon, uma proposta de educação centrada no aluno, cujo principal objetivo, de acordo com as informações disponíveis no Portal do Kumon Instituto de Educação, é incentivar o aluno a ter autonomia nos estudos, buscando desenvolver suas habilidades ao máximo limite, por meio de um processo de aprendizagem planejado e individualizado, no qual o aluno se torna confiante, se sente capaz de enfrentar desafios e, por iniciativa própria, busca alcançar seus objetivos e sonhos (Teodózio et al. 2021).

Uma grande característica do Método Kumon está no fato de não haver um professor ensinando o aluno a resolver o material proposto. Ele é estruturado de forma a fazer que o aluno solucione os exercícios sozinho. De acordo com (Holanda 2017), o Método Kumon propõe que não se pode prender o estudante aos limites impostos pela seriação escolar. Ao contrário, deve-se permitir que o aluno mais capaz ultrapasse o nível de seu ano escolar e aquele com mais dificuldade trabalhe em níveis abaixo até alcançar os conhecimentos do ano escolar em que se encontra. A ideia é que, independentemente da idade ou série escolar em que se encontra, o aluno inicie seus estudos a partir de um ponto que ele domine (tenha conhecimentos prévios), resolvendo questões simples para, aos poucos, passar a ter contato com questões mais complexas, sempre adequadas à sua capacidade. Desta forma ele terá sempre condições de alcançar a nota 100 (nota máxima).

O objetivo é desenvolver no aluno a autoconfiança e o interesse em estudar e aprender por si mesmo, até que consiga chegar ao seu desempenho máximo. Assim, em cada estudo realizado, ele poderá sentir a satisfação de dizer para si mesmo: "Eu consegui!". Experimentando a alegria de aprender e de expandir, cada vez mais a sua própria capacidade (Teodózio et al. 2021).

Quando se discute a autoinstrução, o autodidatismo, muitas pessoas acham que os alunos do método Kumon não vão ter nenhum apoio, ou alguém que possa lhe dar um suporte. Como uma criança pode estudar sozinha, sem o apoio de um professor?

Orientar, auxiliar e incentivar é o papel do orientador no método Kumon. Este profissional se dedica a promover o crescimento de seus alunos individualmente. Inicialmente, o orientador observa a personalidade e o conhecimento acadêmico do aluno. Depois este traça uma programação de estudos, partindo dos conhecimentos prévios do estudante até um ponto de referencial (ponto ideal), que possa contemplar as necessidades do aluno naquele momento. O orientador deve sempre elogiar e incentivar o aluno para que este desenvolva o autodidatismo. Em caso de dúvida, quando um aluno não consegue resolver uma questão, ele recorre ao orientador que não dá a resposta imediatamente. Primeiro ele identifica até que ponto o aluno tem conhecimento a respeito do conteúdo, depois ele deve dar dicas objetivas ao aluno. Em alguns casos, o orientador mostra um exemplo ou até mesmo outras atividades anteriormente resolvidas pelo aluno. Além disso, os orientadores do Kumon jamais comparam um aluno com outro. Eles acreditam que cada aluno só deve ser comparado a si mesmo, desde o momento que iniciou seus estudos até o momento atual, tendo como referencial onde se deseja chegar.

Segundo (Wilkins e Araújo 2009) os motivos pelos quais os pais/estudantes efetivam a matrícula no Kumon, restringem-se a: superar dificuldades em matemática na escola; manter boas notas na escola; melhorar a atenção e concentração nas atividades escolares; iniciar o conhecimento dos números; obter bons resultados nos vestibulares e/ou adquirir boa posição no mercado de trabalho.

2.2.1 Estudo Individualizado e Autodidatismo

Dentro das características que compõe o ensino proposto pelo Kumon, o estudo individualizado gera algumas discussões entre os profissionais de educação. Vale lembrar que o modelo predominante de ensino nas escolas brasileiras é centralizado na aprendizagem direcionada para um grupo diversificado de alunos.

Tabela 2.2: Principais características do método Kumon

Características	**Objetivos**
Ponto de partida – Começando os estudos no Kumon de um ponto familiar	Autoestima, Concentração e Autoconfiança
Estudo diário – A prática traz a perfeição	Disciplina, Organização e Capacidade de execução de tarefas
Tempo para resolução – Estudo concentrado	Concentração, Responsabilidade
Revisão	Tranquilidade, Segurança, Garantia de assimilação
Autocorreção	Aprender com os próprios erros
Estudo com metas	Disciplina e Organização
Avanço além da série escolar	Independência e Segurança
Avaliação diária - feedback	Autoavaliação
Autodidatismo	Iniciativa

Fonte: Adaptado de (Kumon 1997)

Ao ser indagado o motivo de que alunos do Kumon conseguem dominar o método com tranquilidade quando comparado às pesquisas que apontam alto nível de dificuldade dos alunos de 1º grau em aprender matemática (cerca de 70%), Toru Kumon garante: "na sala de aula tradicional, o mesmo programa é dado a todos os alunos uma vez que a diferenciação é dada pela série escolar e não pela aptidão de cada criança. Desse modo, as diferenças individuais são deixadas de lado, não respeitando a limitação de cada aluno bem como não aprimorando a habilidade de cada um"(Kumon 1997). Essas atitudes no ensino tendem a causar desconfortos desnecessários e impedem a construção consistente do conhecimento, uma vez que não é possível construir boas paredes em uma estrutura comprometida, ou ainda, colocar um telhado sobre paredes que estão prestes a desabar. Porém muitas vezes é isso que acontece com o ensino e aprendizagem dos alunos, as vezes tentamos ensinar subtração de números naturais sem que o aluno tenha compreendido a ordenação e soma dos números naturais, muitas vezes tentamos ensinar equações sem que o aluno tenha aprendido de forma consistente a trabalhar com frações, tudo em nome do ensino de um mesmo conteúdo a um grupo muito diversificado de alunos (Kumon 1997).

Outro benefício da educação individualizada é que os alunos podem aprender no seu próprio ritmo. Isso permite que eles avancem mais rapidamente em áreas em que têm habilidades fortes e dediquem mais tempo e atenção às áreas em que precisam melhorar. Permitindo ao professor atender às necessidades individuais de cada aluno, adaptando o conteúdo, a abordagem e as estratégias de ensino para atender às necessidades específicas de cada aluno. Isso pode ajudar a maximizar o potencial de cada aluno e garantir que eles sejam desafiados e motivados em seu aprendizado. Quando os alunos são capazes de aprender no seu próprio ritmo e receber atenção individualizada, eles tendem a se engajar mais no processo de aprendizado. Isso pode levar a uma maior motivação, interesse e satisfação com o aprendizado.

Outro fator a considerar é que em um ambiente de aprendizado em grupo, os alunos podem sentir pressão para acompanhar o ritmo dos demais alunos, o que pode ser desmotivador e causar ansiedade. Na educação individualizada, essa pressão é reduzida, permitindo que os alunos se concentrem em seu próprio progresso.

De acordo com (Vilarinho 1980), no método de ensino individualizado a importância recai na necessidade de atender às diferenças de cada aluno, tais como ritmo de trabalho, interesses, necessidades e habilidades, trazendo em evidência o estudo e a pesquisa, e minimizando o contato entre os mesmos. Tal premissa faz lembrar o que já foi trazido por Toru Kumon, ou seja, que o fato de que as crianças nascem com um potencial ilimitado, cada uma pode se destacar e desenvolver sua capacidade através do estudo no ponto ideal, conforme a capacidade intelectual e de estudo do aluno naquele momento.

Fazendo referência ao exposto acima, (Lorenzoni 2023) trouxe uma reflexão sobre a metodologia de ensino de forma individualizada e, segundo o autor, essa forma de ensinar, a partir de adaptações direcionadas mediante as dificuldades, habilidades e interesses de cada aluno é a mesma do sistema de ensino adotado na Finlândia, referência mundial em educação. Nesse contexto, em (Teodózio et al. 2021), os autores lembram que tal abordagem é semelhante aos princípios que motivaram a criação do Kumon e seguem adotados até hoje, desde sua origem em 1954.

Outra grande característica do Método Kumon é desenvolver no aluno o autodidatismo, incentivando-o a abandonar a postura passiva e aumentando seu protagonismo na construção do seu conhecimento.

> “O objetivo final do Método Kumon de educação é a independência da criança. Independência significa ter a habilidade de pensar por si e resolver por suas próprias forças os problemas que podem surgir.” (Kumon 1997).

Na era da informação, um caminho para os estudantes continuarem o desenvolvimento é a auto-instrução. É importante que a pessoa se torne responsável pelo seu próprio aprendizado.

A Lei de diretrizes e Bases da educação, como também os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil 1998), sugerem que os alunos sejam estimulados a ter compromisso e responsabilidade com a contrução de seu conhecimento, assim como utilizarem diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos. Esta construção do conhecimento envolve, ”saber o que quer saber, como fazer para buscar informações, como desenvolver um dado conhecimento, como manter postura crítica, comparando diferentes visões e reservando para si o direito a conclusão”.

Os estudantes, no Método Kumon, devem adquirir o hábito de prestar bastante atenção aos exemplos mostrados no início de cada assunto novo, para terem autonomia na resolução de problemas. Se o aluno não entende o exercício, o orientador pergunta até que ponto ele entendeu, e o aluno acompanhando seu próprio raciocínio costuma facilmente encontrar o caminho certo (Kumon 1997).

Estudando sozinho o aluno vivencia uma experiência muito importante no seu desenvolvimento. Estas experiências vêm do fato que depois de superadas as dificuldades estruturais em seu conhecimento, são colocadas dificuldades um pouco acima da capacidade do estudante, exigindo dele algum esforço, porém nada que o aluno não possa conseguir. Com esse processo o estudante pode chegar a estudar conteúdos muito acima do que vêem na escola, sem que isso signifique sacrifício. O orientador ajuda a suavizar grandes dificuldades, até que o estudante consiga progredir com suas próprias capacidades.

Logo, o autodidatismo pode ajudar o aluno a desenvolver uma mentalidade de aprendizado ao longo da vida. Em vez de ver a educação como algo que acaba quando você sai da escola ou universidade, você pode continuar a aprender e se desenvolver ao longo da vida, abrindo portas para novas oportunidades e experiências (Kumon 1997).

2.2.2 Frequência de estudos e material didático

O aluno do Kumon frequenta a unidade duas vezes por semana, a flexibilidade de horários é uma característica e um atrativo de um ensino individualizado do método. O tempo de estudo é variável, dependendo da complexidade do assunto em questão. Durante os demais dias da semana recomenda-se um tempo diário de estudo, em casa, de trinta minutos, como a proposta do método é manter um estudo diário, acredita-se que se isso for feito, tende a facilitar o hábito de estudo, que pode se consolidar pelo prazer das conquistas diárias (Braz 2018).

Nesse método, o autodidatismo não é apenas incentivado pelo orientador, mas também é facilitado pelo próprio material didático. Este material é elaborado visando atingir os objetivos de cada conteúdo, de forma gradativa, conforme a evolução de cada aluno. Partindo de atividades mais fáceis, como a contagem e o reconhecimento dos números, até conteúdos mais difíceis como as operações matemáticas. O material didático não é o mesmo desde a fundação do método. Nem poderia ser. Ele é reformulado constantemente, quando necessário, para que seja cada vez mais eficaz para a autoinstrução dos alunos.

O material do Kumon é elaborado de maneira linear e assim, começa pelas questões básicas para chegar às mais complexas. Os orientadores por sua vez, procuram despertar e estimular o interesse e a força de vontade do aluno. Durante a realização dos exercícios, o orientador observa atentamente a rapidez e a exatidão com que o aluno resolve os exercícios. O método Kumon oferece estudo individualizado porque os pontos críticos, nos quais a criança encontra maiores obstáculos e o período em que o aluno perde o ritmo dos estudos, variam de estudante para estudante (Braz 2018).

No Método Kumon o material didático evolui em pequenos degraus e inclui exemplos e exercícios-guia quando novos conceitos são introduzidos, para que os alunos possam aprender observando tais exemplos e, desse modo, consigam solucionar sozinhos os exercícios e avançar dos conteúdos do Ensino Fundamental, até os conteúdos do Ensino Médio (Kumon 1997). Ou seja, o material didático utilizado pelo método é baseado em exercícios progressivos e repetitivos, que visam aprimorar a capacidade dos alunos de resolver problemas com rapidez e precisão.

Os alunos são avaliados no início do programa para determinar o seu nível de habilidade e, a partir daí, são orientados a realizar exercícios de acordo com a sua capacidade. Esse sistema permite que os alunos avancem no seu próprio ritmo, sem a pressão de competir com outros estudantes.

O conteúdo do material do método Kumon é dividido em 21 estágios. Cada estágio apresentando um conjunto de exercícios que vai aumentando gradualmente em dificuldade. O material é então dividido em estágios nomeados por letras do alfabeto que vão do 6A ao O. O primeiro estágio, o 6A contém ilustrações, que servem para familiarizar a criança com a noção de quantidade. O estágio 5A continua centrado na sequência numérica, apresentada na forma de ilustrações de quantidades de bolinhas. O estágio 4A, introduz exercícios destinados a ajudar a criança com tarefas que exigem a utilização do lápis. No 3A o aluno inicia a contagem e a escrever a sequência numérica de 1 a 100. Nos estágios estágio 3A e 2A o aluno trabalhará adições, utilizando o cálculo metal. No estágio A o aluno somará números de dois algarismos e será introduzida a subtração.

No estágio B, aparecerão as contas de adição e subtração, armadas de até três algarismos. A criança aprende primeiramente no estágio C, a tabuada, depois fará a multiplicação e a divisão de números de um algarismo por um algarismo. O estágio D traz exercícios de multiplicação de números de dois algarismos e divisão com divisores de dois ou mais algarismos, também aparece a transformação de fração imprópria em fração mista e vice-versa, e em seguida é dada a simplificação. No estágio E, o aluno aprende as quatro operações com frações, escrevendo todas as passagens intermediárias para demonstrar como chegou à resposta (Kumon 1997).

O conteúdo dos estágios G, H e I, referem-se aos da segunda fase do Ensino Fundamental. O estágio G traz numerosos exercícios de operações com números positivos e negativos e expressões algébricas. O estágio H contém equações, sistemas de equações lineares, problemas de equações lineares e operações com monômios, polinômios e fatorações. No estágio I os assuntos enfocados em raiz quadrada, equação quadrática e função quadrática. No J o aluno estudará fatoração, equações e funções. O aluno do estágio K, deve desenhar gráficos de vários tipos de funções e estudar as equações e inequações. O estágio L apresenta a meta do método Kumon aos alunos do ensino médio, e está voltado para o estudo de funções logarítmicas, valores máximo e mínimos e inetgrais definidas e indefinidas. O estágio M é dedicado ao estudo mais profundo das funções trigonométricas e aos elementos da geometria, como reta, círculos e cônicas. O conteúdo do estágio N, desenvolve a perícia do aluno em progressões, indução, sequências infinitas, séries infinitas,diferenciação e diferenciação de funçoes trigonométicas. O último estágio do Método Kumon, o estágio O, o aluno aprende aplicações diversas cálculo diferencial, integrais indefinidas, integração por substituição e por partes, integração por quadratura e provas de desigualdade, área, volume e equações diferenciais (Kumon 1997).

Sendo assim, como o material é preparado de forma sequencial e prepara o aluno para compreender individualmente as atividades seguintes, torna o estudo prazeroso já que dificilmente o aluno encontrará algo que não consiga resolver. Acerca disso o próprio criador do método aponta que “tem comprovado, continuamente, que a criança gosta de estudar – desde que lhe sejam dados assuntos adequados à sua capacidade. Ela passa a detestar os estudos quando é obrigada a enfrentar conteúdos acima de sua capacidade” (Kumon 1997).

Ainda complementa que “Para alcançar qualquer objetivo, é preciso esforço contínuo e avançar passo a passo, sem interrupções. Especialmente no caso da Matemática, é necessário acumular gradativamente os conhecimentos básicos para conseguir dominá-la” (Kumon 1997).

Dessa forma, acredita-se que com um material adequado, é possível de certa forma desenvolver um maior interesse por parte dos alunos no que diz respeito a aprender matemática, trazendo-os a se sentirem convidados a aprender por interesse próprio, ou seja, aprender pelo prazer de aprender (Miranda 2020).

O material didático do Método Kumon, de acordo com (Jesus 2008), tem uma sequência de assuntos que propicia ao aluno o desenvolvimento da capacidade de estudo. Ao resolver e fazer as revisões necessárias dos exercícios, o aluno pode desenvolver a capacidade de fazer uma série de associações mentais e levantar hipóteses, confirmar suas suposições e chegar às próprias conclusões. Tais conclusões dificilmente serão esquecidas, pois não foram informações recebidas e memorizadas, mas geradas pelo próprio aluno. Baseado nesta ideia, o material é estruturado de modo a fazer com que os alunos trabalhem mais os conteúdos que correspondem à base do conhecimento do assunto, criando, assim, condições para um estudo com autonomia dos conteúdos mais avançados.

Os exercícios do material do Método Kumon são estruturados e organizados, com uma explicação de cada conceito a ser ensinado. Os exercícios são repetitivos, mas a complexidade dos problemas aumenta gradualmente, permitindo que os alunos desenvolvam suas habilidades de forma progressiva. Além disso, os exercícios são projetados para que os alunos possam identificar seus próprios erros e corrigí-los, o que incentiva a autonomia e o autodidatismo.

Para (Holanda 2017), ações de repetição garantem uma ferramenta poderosa especialmente no tocante a resolução de problemas e exercícios diversos uma vez que, conforme o aluno se sente capaz de resolver os exercícios propostos, tem sua autoestima elevada e então, passa a encarar o processo de aprendizagem como algo prazeroso e alcançável.

Quando questionada sobre gostar ou não de matemática, uma aluna de 13 anos de idade e cursando o 8º ano, faz a comparação sobre aprender multiplicação na escola versus no Kumon: "(...) Quando entrei no Kumon no 6º ano, não sabia multiplicar e achava que multiplicação era sinônimo de soma. Aprendi a multiplicação no Kumon, fazendo várias repetições, estudando a tabuada e chamadas orais" (Pereira e Gusmão 2017).

O pai do método explica em "O segredo do método Kumon", que disciplina e a continuidade aos estudos, são características indispensáveis ao sucesso, já que a eficácia dos estudos está atrelada ao trabalho contínuo. Por esta razão, o objetivo crucial da repetição quando se trata de um ensino individualizado, é consolidar o conteúdo aprendido e aprimorar as habilidades de estudo do aluno, são os objetivos da revisão frequente. É nesse sentido que o autor esclarece questionamentos tais como: "quando, onde e por que a repetição pode ser considerada como ferramenta pujante de aprendizado da matemática?" (KUMON, 199, p.20).

O aluno deve repetir exercícios quando, além de cometer muitos erros, seu tempo de resolução for longo demais. Deve repetir porque a repetição permite-lhe fixar os conhecimentos adquiridos e avançar facilmente a níveis mais complexos da matéria. E repetir onde, geralmente, encontrou maiores dificuldades.

Portanto, a prática da repetição, é uma estratégia pedagógica que visa a preparação do aluno para as etapas seguintes do estudo da matemática, respeitando as necessidades individuais de cada um (Kumon 1997). É importante ressaltar nesse contexto, que o papel e atuação do orientador pedagógico é fundamental nesse processo de aprendizagem, sobretudo na determinação do conteúdo a ser repetido, haja vista o grau de dificuldade bem como o nível de assimilação do conteúdo por cada aluno.

Acredita-se que o maior diferencial trazido pelo método Kumon é o domínio total do conteúdo básico por parte dos alunos, pois, entende-se que progredir em matemática é semelhante a subir em uma escada, onde para que se possa chegar ao próximo degrau é necessário que se tenha todos os degraus anteriores sólidos para, assim, apoiar-se com firmeza e seguir para o próximo degrau com segurança (Miranda 2020).

2.2.3 Orientadores

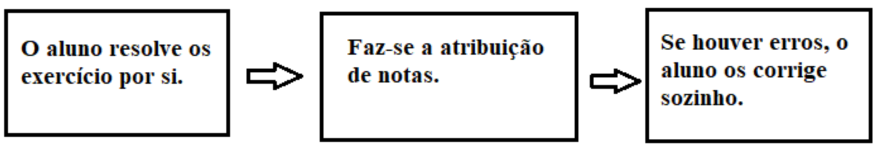
O orientador tem um papel importante no Método Kumon, ele deve fazer o aluno estudar o material didático com seu próprio esforço, pois apesar do material buscar ser autoinstrutivo, se o orientador ensinar muito, não será possível desenvolver no aluno a habilidade do autodidatismo (Kumon 2022a).

Se um aluno inicia o estudo de uma novo assunto, em vez de explicar o conteúdo para o aluno desde o início, primeiro o orientador deve deixar com que o aluno tente resolver os exercícios sozinho. Caso o aluno não compreenda o processo de estudo, o orientador dá breves explicações observando se ele conseguirá responder sozinho.

Quando o aluno comete erros na tentativa de resolução de exercícios, ele é orientado a rever o que fez e descobrir por conta própria onde cometeu erros e corrigí-los. O aluno deve rever com máxima atenção as passagens intermediárias, para que com o tempo, esta atitude resulte na habilidade de observar atentamente os exemplos e de escrever as passagens intermediárias adequadas (Kumon 2022a). Pois o Método Kumon acredita que se realmente o objetivo é o desenvolvimento do aluno, então ele deve pensar por si mesmo.

Entretanto, se apesar do material autoinstrutivo o aluno se sentir inseguro sobre a sua resposta do exercício proposto, então uma das alternativas do orientador é apresentar o gabarito da questão para que o aluno pense bem o motivo da questão ter sido resolvida assim. Depois, sem o gabarito, o aluno deve fazer uma nova tentativa de resolução. O Método Kumon acredita que este procedimento é uma maneira de aumentar a habilidade da autoinstrução daquele aluno.

Uma outra intervenção dos orientadores, é a atribuição de notas à resolução dos exercícios feitos pelos alunos. O material do Kumon foi elaborado com a seguinte premissa:



Como no Método Kumon o aluno corrige os próprios erros, será mais fácil se os exercícios estiverem frescos na memória. Logo o orientador deve atribuir notas no material resolvido o mais rápido possível e devolvê-lo ao aluno.

> “Na unidade de Matemática do Kumon, os alunos geralmente fazem cerca de quatro folhas por dia. Ao terminar uma folha, o aluno a entrega ao orientador

> e, como regra geral, faz-se prontamente a atribuição de notas em cada folha. Se há erros, o aluno os corrige por si imediatamente e os entrega para verificação várias vezes até que todos estejam corretos. Quando simplesmente é ensinado sobre o conteúdo, mesmo que nesse momento o aluno tenha a impressão de que entendeu, ao tentar resolver de fato o exercício, muitas vezes não consegue. Resolver os exercícios por si e saber imediatamente se as respostas estão corretas ou não, promove uma maior eficácia nos estudos.”

(Kumon 2022a)

2.2.4 O avanço além da série escolar

O Método Kumon acredita que o conteúdo da matemática deve ser antecipado em relação à escola tradicional, pois as crianças e adolescentes como um todo têm um potencial inesgotável. Pautado nessa linha de raciocínio, o Método oferece orientação diferenciada de acordo com a capacidade individual de cada aluno, ou seja, com a aptidão específica de cada um, conforme a capacidade e individualidade do aluno, não se prendendo à idade ou série escolar (Kumon 1997).

O Método Kumon enxerga que toda criança tem um ritmo próprio, entendendo que umas são mais rápidas e outras nem tanto. Quando esse ritmo é respeitado, a criança pode se desenvolver bastante e muitas vezes para além da série escolar que ela se encontra (Moura 2020). Ao chegar a uma unidade, o aluno é submetido a um Teste Diagnóstico elaborado pelo Kumon para avaliar qual será o seu ponto de partida, o qual oscila de acordo com a idade e os conhecimentos já adquiridos. O aluno realiza o teste correspondente a uma série anterior à sua, se estiver no primeiro semestre, e se estiver no segundo semestre, deve fazer o teste equivalente à sua série atual (Coutinho et al. 2019).

Os alunos estudam o conteúdo equivalente a um ano escolar em apenas oito meses, por isso eles podem alcançar, passo a passo, a sua série atual e até ultrapassá-la, mesmo que tenham começado por conteúdos equivalentes a algumas séries abaixo da sua (Kumon 1997). Dessa forma, o aluno passa a estudar no ponto mais adequado à sua capacidade, ou seja, começa estudando de um ponto de partida fácil, a partir de conteúdos que domina e conhece, isto lhe permite sentir o prazer de aprender e a ter autoconfiança, podendo avançar além dos conteúdos que está aprendendo na escola tradicional (Jesus 2008).

No estudo individualizado cada aluno tem um programa desenvolvido de acordo com sua capacidade atual, com seu ritmo de aprendizagem e com metas a serem atingidas. Esse programa independe da idade e da série escolar do aluno (Braz 2018). O Método Kumom de ensino e aprendizagem da matemática acredita ser injusto limitar uma criança dotada de grande capacidade de aprendizado ao ritmo de estudo dos demais alunos, apenas por uma questão de idade. Além de injusto significa ignorar sua individualidade. O mesmo se pode dizer do caso que se obrigue a criança que tem mais dificuldade de aprendizado, a ter que acompanhar a turma da escola por ser a séria escolar que ela se encontra. Pensando nisto, o método Kumon oferece condições para formar alunos autodidatas, desenvolvendo lhes potencial e habilidades para resolver conteúdos matemáticos de acordo com o momento de cada um, o que possibilita, de certa forma, atingir nível superior à série escolar do educando (Coutinho et al. 2019).

O sistema de estudo individualizado é adequado para todas as idades, já que ele busca desenvolver a capacidade do aluno para além daquilo que ele acredita ser capaz, facilitando que ele se desenvolva por si só, e a partir disto, começa ver assuntos para além do ano letivo que ele se encontra. Por exemplo, tem aluno que passa a ver assunto de até 5 anos à frente da própria séria escolar. O que explica esse avanço é um conjunto de ações como disciplina, a constância de fazer a tarefa todos os dias, o estudo diário de 30 a 40 minutos, a aprendizagem pelos exemplos/exercícios e a busca pelas informações usando o próprio material. Tudo isto traz um aperfeiçoamento no aprendizado do aluno muito evidente e animador (Holanda 2017).

Levando em consideração os pilares estruturais do método Kumon apresentados, os quais englobam o estudo individualizado, o autodidatismo, o material didático, os orientadores, o gosto pela aprendizagem, o passo à frente e o estudo para além da série escolar, podemos entender que este método é um método prático e eficaz, exigindo apenas lápis e papel para adquirir uma sólida capacidade de aprendizagem, que possibilita o desenvolvimento dos estudantes de maneira gradual e notória.

3 Ensino e Aprendizagem de equações quadráticas pelo Método Kumon

Como abordado anteriormente, o conteúdo do material do método Kumon é dividido em 21 estágios, cada estágio apresentando um conjunto de exercícios que aumenta gradualmente em dificuldade. Os estágios são nomeados por letras do alfabeto que vão do 6A ao O.

Os conceitos de equações de 2º grau são introduzidos de forma progressiva e linear, e se encontram entre os estágios H e I. Os estágios H-I estão ligados à matemática do final do Ensino fundamental e o início do Ensino Médio (Kumon 2022b).

O objetivo do Programa de Matemática do Kumon é permitir que os alunos estudem matemática do Ensino Médio com tranquilidade. Para atingir esse objetivo, é essencial melhorar tanto as "habilidades acadêmicas (temas de estudo)" quanto as "habilidades de entendimento" e as "habilidades de verificação" (Kumon 2022b).

A maioria dos temas de estudo na matemática do Ensino Médio exigem processos mais longos e complexos para chegar à solução. Portanto a habilidade para entender os exemplos, "habilidade de entendimento", tornam-se mais importantes na matemática do Ensino Médio em comparação aos estágios anteriores. O Método Kumon acha importante orientar os alunos com o objetivo de melhorar gradualmente suas "habilidades de entendimento", fazendo-os refletir, a partir dos exemplos por conta própria (Kumon 2022b).

Outra habilidade importante no Ensino Médio devido à necessidade de calcular com precisão é a verificação, pois dessa forma eles são capazes de verificar se suas respostas estão corretas ou não por si mesmos.

3.1 Estágios para o estudo de Equações Quadráticas

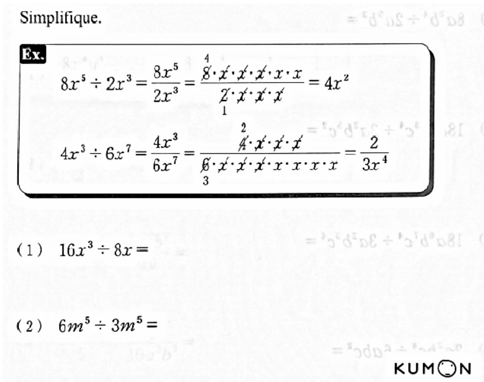
Apesar de ser muito importante o aluno ter uma base sólida em equações de 1º grau, que são trabalhadas em estágios anteriores, pode-se dizer que o trabalho para construir uma manipulação e entendimentos sólidos sobre equações quadráticas, passam pelos seguintes tópicos dentro do Kumon:

1. Operação com Monômios e Polinômios.
2. Multiplicação de Polinômios.
3. Produtos Notáveis.
4. Fatoração.
5. Raízes quadradas.
6. Equações Quadráticas.

(Kumon 2022b)

3.1.1 Operação com Monômios e Polinômios

Nesta etapa o Método Kumon busca que o aluno tenha familiaridade com a simplificação de expressões algébricas, através da simplificação e operações com alguns monômios.



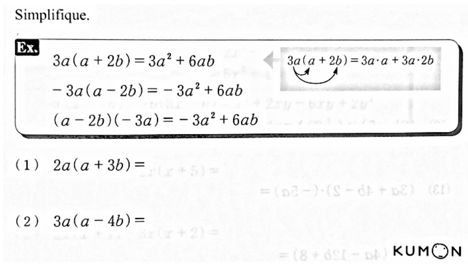


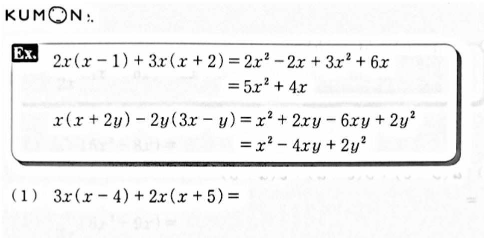
Figura 3.1: Simplificação de quocientes de monômios.

Figura 3.2: Distributiva de monômios.

Através da utilização da propriedade distributiva e da simplificação das expressões algébricas, o Método Kumon busca que o aluno tenha facilidade em manipular estas expressões.

3.1.2 Multiplicação de Polinômios

De forma progressiva o Método Kumon começa a trabalhar com a multiplicação de polinômios com a intenção de melhorar a manipulação das expressões e também para o estudante começar a entender, por exemplo, que a multiplicação de dois polinômios lineares, resulta em um polinômio quadrático. Desta forma o aluno pode perceber que em muitos casos, polinômios quadráticos são fatoráveis em um produto de polinômios lineares.



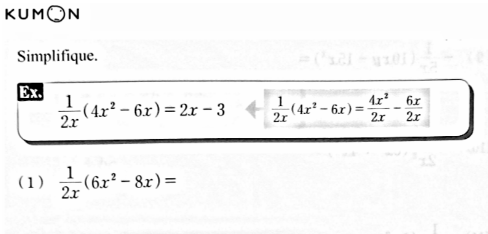
KUMON

Ex. $2x(x-1)+3x(x+2)=2x^2-2x+3x^2+6x$
$=5x^2+4x$

$x(x+2y)-2y(3x-y)=x^2+2xy-6xy+2y^2$
$=x^2-4xy+2y^2$

(1) $3x(x-4)+2x(x+5)=$

Figura 3.3: Simplificação de polinômios.



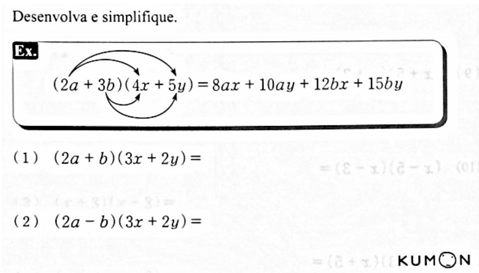
KUMON

Simplifique.

Ex. $\frac{1}{2x}(4x^2-6x)=2x-3 \leftarrow \frac{1}{2x}(4x^2-6x)=\frac{4x^2}{2x}-\frac{6x}{2x}$

(1) $\frac{1}{2x}(6x^2-8x)=$

Figura 3.4: Simplificação de expressões algébricas.



Desenvolva e simplifique.

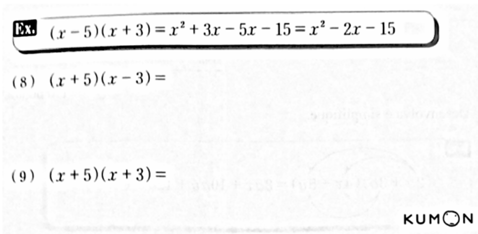
Ex. $(2a+3b)(4x+5y)=8ax+10ay+12bx+15by$

(1) $(2a+b)(3x+2y)=$

(2) $(2a-b)(3x+2y)=$

KUMON

Figura 3.5: Multiplicação de polinômios.



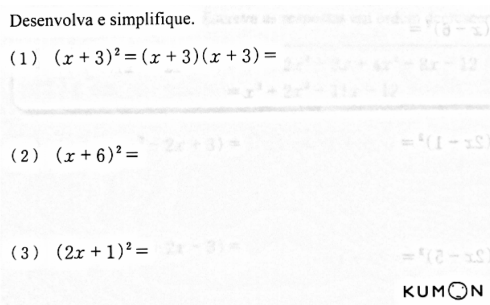
Ex. $(x-5)(x+3)=x^2+3x-5x-15=x^2-2x-15$

(8) $(x+5)(x-3)=$

(9) $(x+5)(x+3)=$

KUMON

Figura 3.6: Multiplicação de polinômios.



Desenvolva e simplifique.

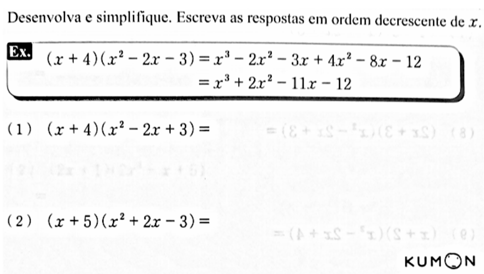
(1) $(x+3)^2=(x+3)(x+3)=$

(2) $(x+6)^2=$

(3) $(2x+1)^2=$

KUMON

Figura 3.7: Multiplicação de polinômios.



Desenvolva e simplifique. Escreva as respostas em ordem decrescente de x.

Ex. $(x+4)(x^2-2x-3)=x^3-2x^2-3x+4x^2-8x-12$
$=x^3+2x^2-11x-12$

(1) $(x+4)(x^2-2x+3)=$

(2) $(x+5)(x^2+2x-3)=$

KUMON

Figura 3.8: Multiplicação de polinômios.

3.1.3 Produtos notáveis

Em seguida o Método Kumon trabalha com Produtos Notáveis, pois permitem a simplificação de expressões algébricas mais complexas. Ao reconhecer esses padrões, você pode reduzir uma expressão a uma forma mais simples e mais fácil de trabalhar.

No início deste assunto o Método Kumon introduz o desenvolvimento de expressões como $(a+b)^2$ e algumas variações desta expressão quando o primeiro ou o segundo termo da soma possui um sinal de "menos".

Além da simplificação de expressões algébricas, a introdução de produtos notáveis tenta fazer o aluno se familiarizar com o produto de fatores lineares resultando em fatores quadráticos, isto tem o objetivo de tornar a fatoração de polinômios mais natural futuramente.

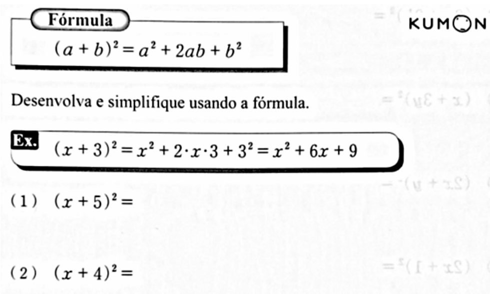


Figura 3.9: Produtos notáveis.

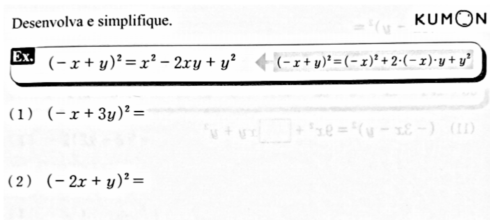


Figura 3.10: Produtos notáveis.

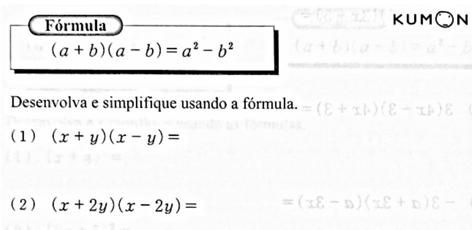


Figura 3.11: Produtos notáveis.

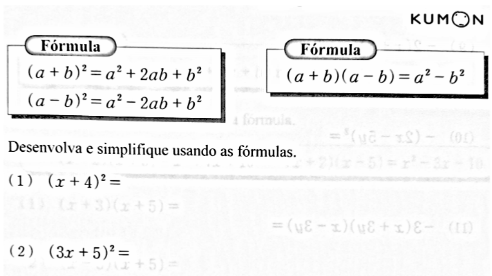
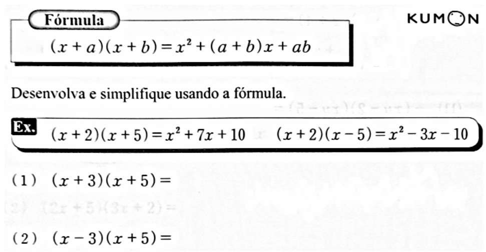


Figura 3.12: Produtos notáveis.

Nas Figuras 3.13 e 3.14, o Método Kumon utiliza produtos notáveis para introduzir e tornar natural soma e produto de raízes para solução de equações quadrática de forma que o aluno consiga identificar uma forma de resolver alguns tipo de equações quadráticas.



KUMON

Fórmula

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

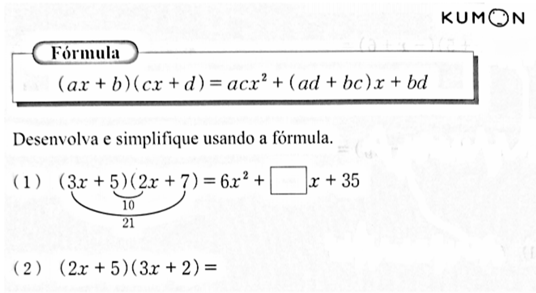
Desenvolva e simplifique usando a fórmula.

Ex. $(x+2)(x+5)=x^2+7x+10$ $(x+2)(x-5)=x^2-3x-10$

(1) $(x+3)(x+5)=$

(2) $(x-3)(x+5)=$

Figura 3.13: Produtos notáveis.



KUMON

Fórmula

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

Desenvolva e simplifique usando a fórmula.

(1) $(3x+5)(2x+7)=6x^2+\boxed{}x+35$

10

21

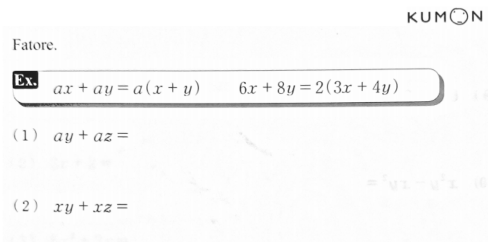
(2) $(2x+5)(3x+2)=$

Figura 3.14: Produtos notáveis.

3.1.4 Fatoração

Para o Método Kumon a fatoração de polinômios é uma técnica fundamental na álgebra e tem uma grande importância na resolução de equações polinomiais, pois ela permite simplificar equações polinomiais complexas. Ao decompor o polinômio em fatores, você pode trabalhar com expressões mais simples e identificar padrões nos polinômios, tornando mais fácil visualizar e compreender a estrutura da equação. Isso pode levar a soluções mais rápidas e eficientes na busca de identificar as raízes ou zeros da equação polinomial.

Nas Figuras 3.15 e 3.16, o Kumon introduz a fatoração de polinômios com o simples procedimento de "colocar em evidência"alguns termos da expressão.



KUMON

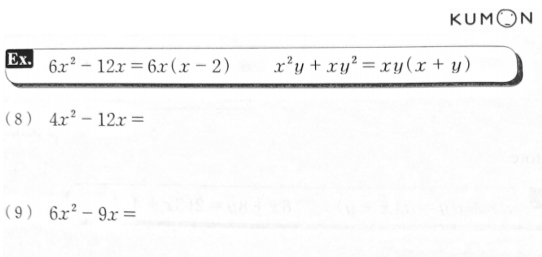
Fatore.

Ex. $ax+ay=a(x+y)$ $6x+8y=2(3x+4y)$

(1) $ay+az=$

(2) $xy+xz=$

Figura 3.15: Fatoração de polinômios.



KUMON

Ex. $6x^2-12x=6x(x-2)$ $x^2y+xy^2=xy(x+y)$

(8) $4x^2-12x=$

(9) $6x^2-9x=$

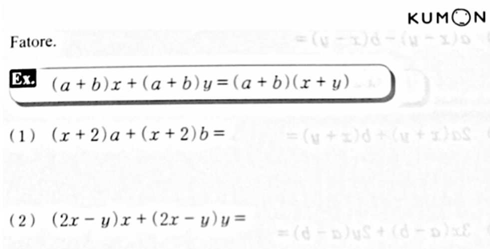
Figura 3.16: Fatoração de polinômios.

Muitas vezes os alunos na tentativa de encontrar um monômio para colocar em evidência na expressão, não percebe que em alguns casos podemos colocar somas de termos em evidência, vemos isso nas Figuras 3.17 e 3.18.

E nas Figuras 3.19 e 3.20, o método tenta auxiliar os alunos na identtificação de quadrados perfeitos.

Ele também trabalha com a diferença de quadrados, para que o estudante consiga identificar e fatorar o polinômio de forma rápida, quando essas situações aparecerem.

Na Figura 3.23, o Método Kumon faz a primeira associação clara de uma equação de segundo grau e sua fatoração, além de sugerir o método da soma e do produto para a identificação das raízes.


KUMON

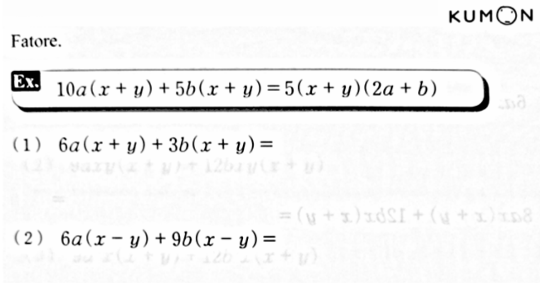
Fatore.

Ex. $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$

(1) $(x+2)a+(x+2)b=$

(2) $(2x-y)x+(2x-y)y=$

Figura 3.17: Fatoração de polinômios.


KUMON

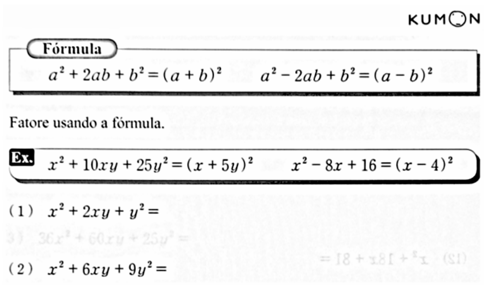
Fatore.

Ex. $10a(x+y)+5b(x+y)=5(x+y)(2a+b)$

(1) $6a(x+y)+3b(x+y)=$

(2) $6a(x-y)+9b(x-y)=$

Figura 3.18: Fatoração de polinômios.


KUMON

Fórmula

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

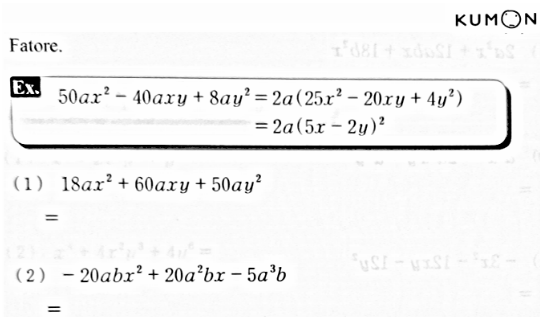
Fatore usando a fórmula.

Ex. $x^2+10xy+25y^2=(x+5y)^2 \qquad x^2-8x+16=(x-4)^2$

(1) $x^2+2xy+y^2=$

(2) $x^2+6xy+9y^2=$

Figura 3.19: Fatoração de polinômios.


KUMON

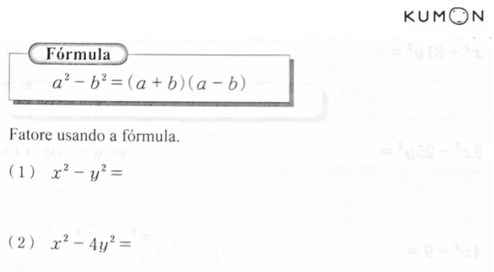
Fatore.

Ex. $50ax^2-40axy+8ay^2=2a(25x^2-20xy+4y^2)$
$=2a(5x-2y)^2$

(1) $18ax^2+60axy+50ay^2$
$=$

(2) $-20abx^2+20a^2bx-5a^3b$
$=$

Figura 3.20: Fatoração de polinômios.


KUMON

Fórmula

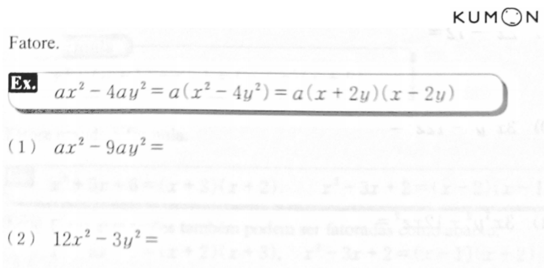
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Fatore usando a fórmula.

(1) $x^2-y^2=$

(2) $x^2-4y^2=$

Figura 3.21: Fatoração de polinômios.


KUMON

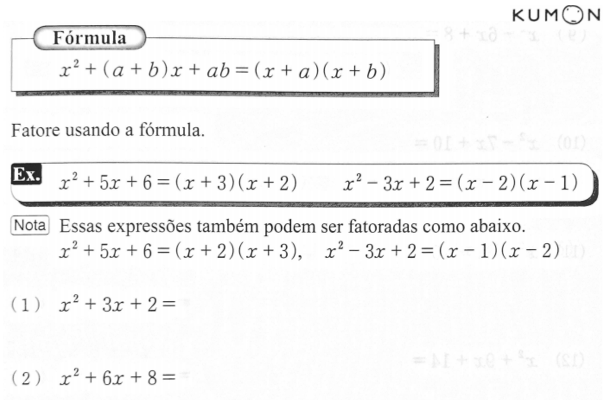
Fatore.

Ex. $ax^2-4ay^2=a(x^2-4y^2)=a(x+2y)(x-2y)$

(1) $ax^2-9ay^2=$

(2) $12x^2-3y^2=$

Figura 3.22: Fatoração de polinômios.


KUMON

Fórmula

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

Fatore usando a fórmula.

Ex. $x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$ $\quad x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

Nota Essas expressões também podem ser fatoradas como abaixo.
$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, $\quad x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

(1) $x^2 + 3x + 2 =$

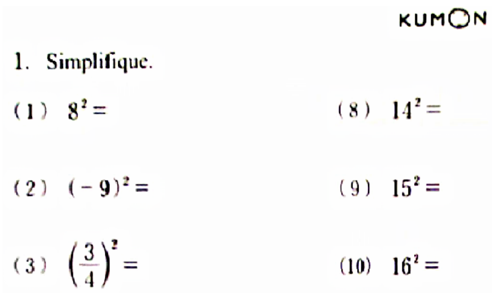
(2) $x^2 + 6x + 8 =$

Figura 3.23: Fatoração de polinômios.

3.1.5 Raízes Quadradas

Na sequência, o Método Kumon trabalha com as raízes quadradas, pois é um passo importante para evitar erros na tentativa de resolver equações quadráticas. A necessidade surge em diversas situações, como por exemplo, quando o aluno tenta resolver a equação do tipo $x^2 = 9$, ou ainda, quando tenta calcular $\sqrt{\Delta}$, na fórmula resolvente.

Nas Figuras 3.24 e 3.25, o método tenta familiarizar o aluno com o quadrado de alguns números, para que o processo de extração de raiz seja mais natural e depois ele trabalha com exercícios que associam um quadrado, como potência de um número positivo e um negativo.


KUMON

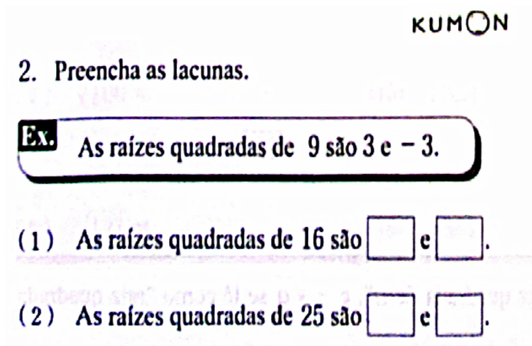
1. Simplifique.

(1) $8^2 =$ (8) $14^2 =$

(2) $(-9)^2 =$ (9) $15^2 =$

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$ (10) $16^2 =$

Figura 3.24: Raiz Quadrada.


KUMON

2. Preencha as lacunas.

Ex. **As raízes quadradas de 9 são 3 e − 3.**

(1) As raízes quadradas de 16 são ☐ e ☐.

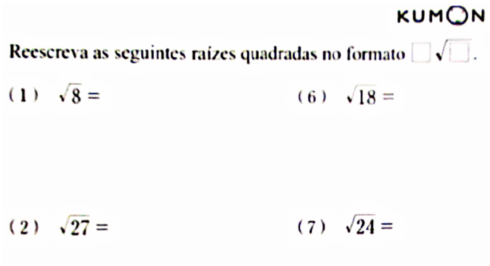
(2) As raízes quadradas de 25 são ☐ e ☐.

Figura 3.25: Raiz Quadrada.

Já nas Figuras 3.26 e 3.27, o Método Kumon, trabalha com a simplificação de raízes, introduzindo a propriedade $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

E nas Figuras 3.28 e 3.29, o método trabalha com racionalização e simplificações de expressões que envolvem raízes.

Toda essa atenção com raízes quadradas é para tentar minimizar o número de erros dos alunos em cálculos posteriores, inclusive a solução de equações quadráticas.

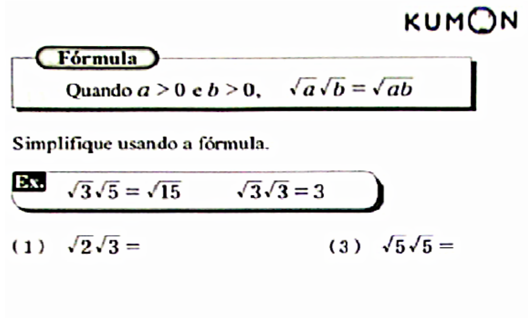

KUMON

Reescreva as seguintes raízes quadradas no formato $\square\sqrt{\square}$.

(1) $\sqrt{8} =$ (6) $\sqrt{18} =$

(2) $\sqrt{27} =$ (7) $\sqrt{24} =$

Figura 3.26: Raiz Quadrada.


KUMON

Fórmula

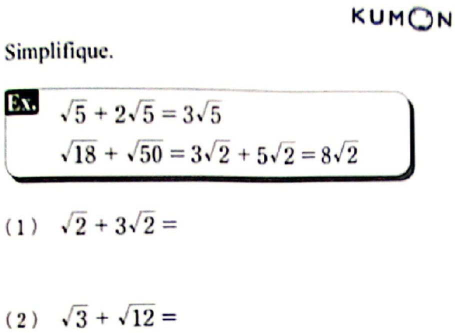
Quando $a > 0$ e $b > 0$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Simplifique usando a fórmula.

Ex. $\sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15}$ $\sqrt{3}\sqrt{3} = 3$

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3} =$ (3) $\sqrt{5}\sqrt{5} =$

Figura 3.27: Raiz Quadrada.


KUMON

Simplifique.

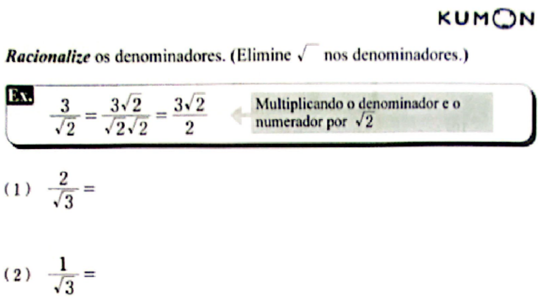
Ex. $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

(1) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$

(2) $\sqrt{3} + \sqrt{12} =$

Figura 3.28: Raiz Quadrada.


KUMON

Racionalize os denominadores. (Elimine $\sqrt{\ }$ nos denominadores.)

Ex. $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ Multiplicando o denominador e o numerador por $\sqrt{2}$

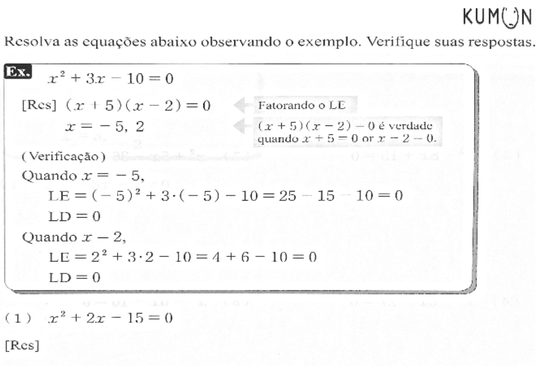
(1) $\frac{2}{\sqrt{3}} =$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}} =$

Figura 3.29: Raiz Quadrada.

3.1.6 Equações Quadráticas

Na sequência, o Método Kumon começa a trabalhar com a resolução de equações quadráticas. As Figuras 3.30 e 3.31, mostram que o método procura usar as ferramentas trabalhadas anteriormente tais como a fatoração, ou seja, no início do estudo de resolução de equações quadráticas o Kumon através de seus exemplos autoinstrutivos sugere ao aluno que um caminho que pode ser traçado na busca de soluções é fatorando a expressão quadrática e obtendo as raízes através da propriedade do anulamento do produto.


KUMON

Resolva as equações abaixo observando o exemplo. Verifique suas respostas.

Ex. $x^2 + 3x - 10 = 0$

[Res] $(x+5)(x-2) = 0$ Fatorando o LE

$x = -5,\ 2$ $(x+5)(x-2) = 0$ é verdade quando $x+5=0$ or $x-2=0$.

(Verificação)

Quando $x = -5$,

LE $= (-5)^2 + 3\cdot(-5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$

LD $= 0$

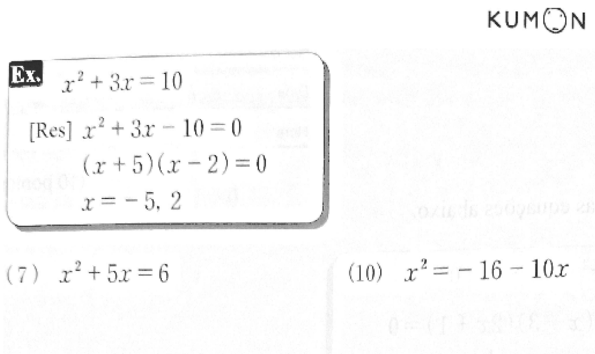
Quando $x = 2$,

LE $= 2^2 + 3\cdot 2 - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$

LD $= 0$

(1) $x^2 + 2x - 15 = 0$

[Res]


KUMON

Ex. $x^2 + 3x = 10$

[Res] $x^2 + 3x - 10 = 0$

$(x+5)(x-2) = 0$

$x = -5,\ 2$

(7) $x^2 + 5x = 6$ (10) $x^2 = -16 - 10x$

Figura 3.30: Equações Quadráticas.

Figura 3.31: Equações Quadráticas.

As equações quadráticas podem aparecer das mais variadas formas e o método Kumon, por filosofia, tenta não só levar o estudante à solução, mas levá-lo à solução pelo caminho mais curto. Na Figura 3.32, o aluno é convidado a identificar um quadrado perfeito e depois resolver a equação, já na Figura 3.33, o método estimula o aluno a usar a fatoração mesmo em equações quadráticas incompletas.

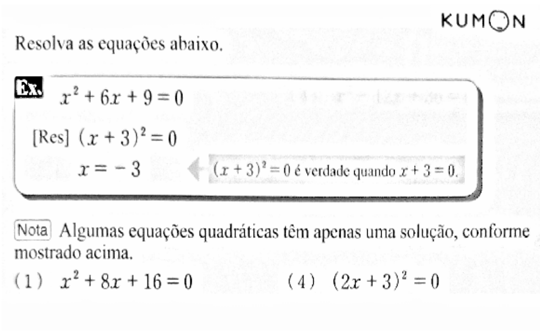


Figura 3.32: Equações Quadráticas.

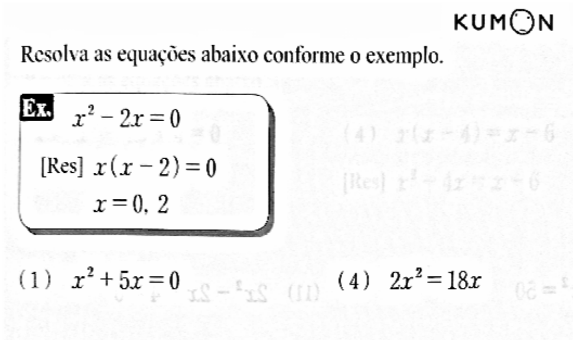


Figura 3.33: Equações Quadráticas.

Nas Figuras 3.34 e 3.35, vê-se a importância do trabalho com raízes quadradas, pois muitos alunos quando se deparam com a equação $x^2 = 9$, tende a dar como resposta $x = 3$, não percebendo que $x = -3$ também satisfaz a equação.

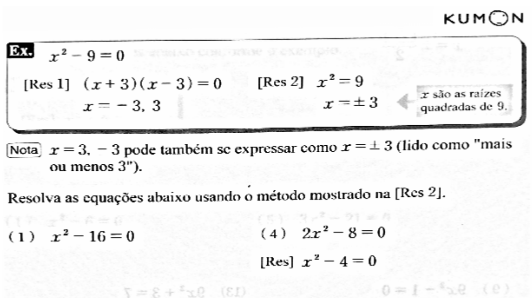


Figura 3.34: Equações Quadráticas.

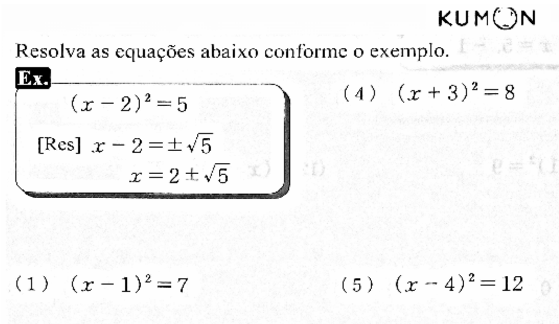
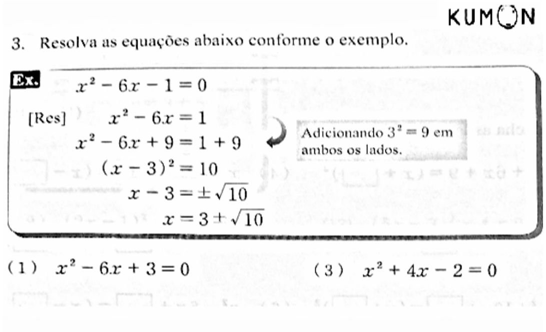


Figura 3.35: Equações Quadráticas.

Uma das técnicas importantes quando o assunto é resolver equações quadráticas é a técnica de "completar quadrados", na antiguidade ela já era usada para resolver equações quadráticas e serve para demonstrar a fórmula resolvente. Nas Figuras 3.36 e 3.37, o Método Kumon exemplifica a utilização do método de "completar quadrados" como mais uma ferramenta para resolução de equações quadráticas.

Depois de trabalhar várias formas de resolver equações quadráticas, o Método Kumon apresenta a fórmula resolvente como mais uma ferramenta para resolver equações quadráticas.

Importante notar que na Figura 3.40, o Método Kumon pede que o aluno resolva as equações quadráticas tanto usando fatoração, como também usando a fórmula resolvente. E na Figura 3.41, ele sugere a utilização da fórmula resolvente quando a fatoração não é possível.



KUMON

3. Resolva as equações abaixo conforme o exemplo.

Ex. $x^2 - 6x - 1 = 0$

[Res] $x^2 - 6x = 1$

$x^2 - 6x + 9 = 1 + 9$ Adicionando $3^2 = 9$ em ambos os lados.

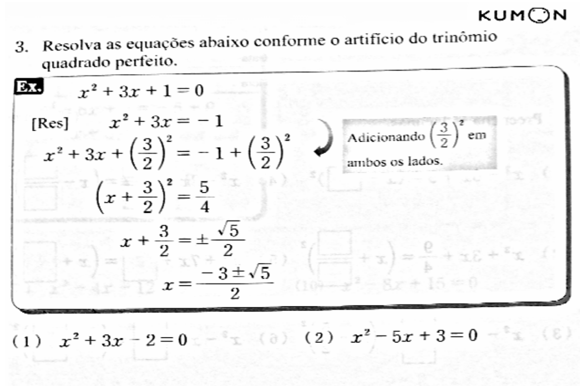
$(x-3)^2 = 10$

$x - 3 = \pm\sqrt{10}$

$x = 3 \pm \sqrt{10}$

(1) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (3) $x^2 + 4x - 2 = 0$

Figura 3.36: Equações Quadráticas.



KUMON

3. Resolva as equações abaixo conforme o artifício do trinômio quadrado perfeito.

Ex. $x^2 + 3x + 1 = 0$

[Res] $x^2 + 3x = -1$

$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ Adicionando $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ em ambos os lados.

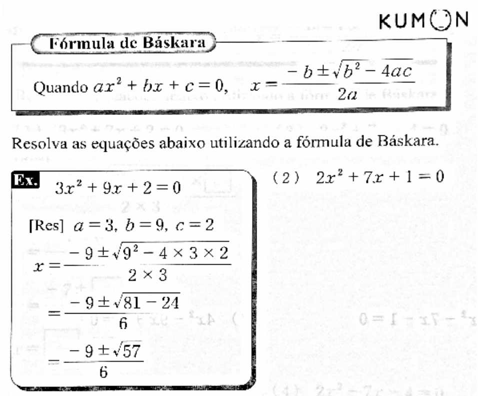
$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(1) $x^2 + 3x - 2 = 0$ (2) $x^2 - 5x + 3 = 0$

Figura 3.37: Equações Quadráticas.



KUMON

Fórmula de Báskara

Quando $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Resolva as equações abaixo utilizando a fórmula de Báskara.

Ex. $3x^2 + 9x + 2 = 0$

[Res] $a = 3,\ b = 9,\ c = 2$

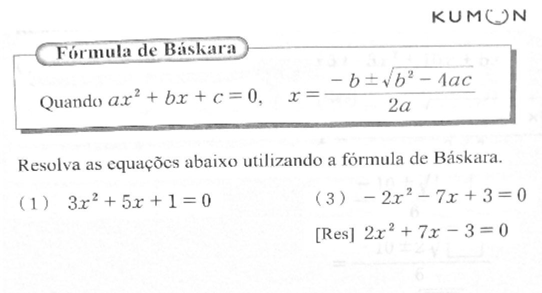
$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$

$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6}$

$= \frac{-9 \pm \sqrt{57}}{6}$

(2) $2x^2 + 7x + 1 = 0$

Figura 3.38: Equações Quadráticas.



KUMON

Fórmula de Báskara

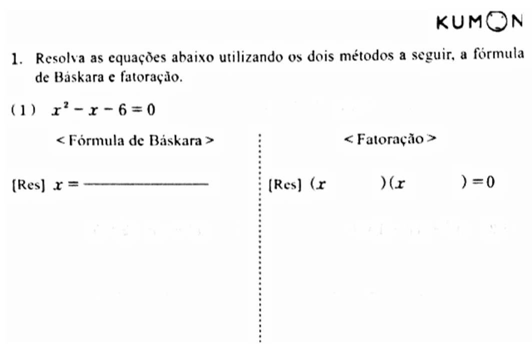
Quando $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Resolva as equações abaixo utilizando a fórmula de Báskara.

(1) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ (3) $-2x^2 - 7x + 3 = 0$

[Res] $2x^2 + 7x - 3 = 0$

Figura 3.39: Equações Quadráticas.



KUMON

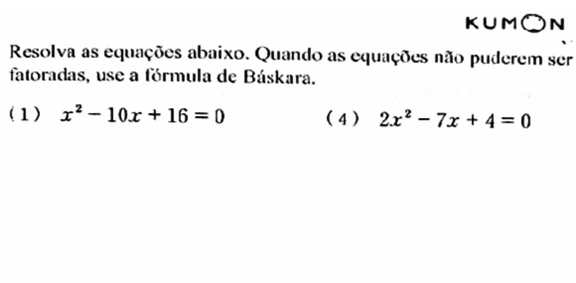
1. Resolva as equações abaixo utilizando os dois métodos a seguir, a fórmula de Báskara e fatoração.

(1) $x^2 - x - 6 = 0$

< Fórmula de Báskara > | < Fatoração >

[Res] $x =$ ―――― | [Res] $(x \quad\ )(x \quad\ ) = 0$

Figura 3.40: Equações Quadráticas.



KUMON

Resolva as equações abaixo. Quando as equações não puderem ser fatoradas, use a fórmula de Báskara.

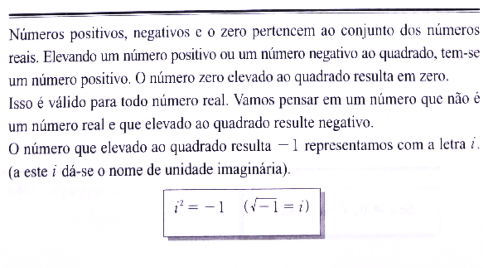
(1) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (4) $2x^2 - 7x + 4 = 0$

Figura 3.41: Equações Quadráticas.

No Capítulo 1, foram listadas algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos em trabalhar com equações quadráticas, muitas das dificuldades oriundas dos professores darem ênfase exagerada na fórmula resolvente (Lima e Tall 2006). Segundo a descrição dada até aqui, pode-se observar que o Método Kumon não deu foco excessivo na fórmula resolvente e sim, buscou apresentar várias formas de chegar à solução. Os alunos, dependendo de como a equação se apresenta, podem utilizar a fatoração e achar a solução utilizando a propriedade do anulamento do produto, ou ainda pela simples extração das raízes quadradas de um número, ou ainda reconhecendo uma quadrado perfeito na expressão quadrática e chegando que a equação possui uma única raiz.

Todas essas técnicas trabalhadas com os alunos lhes dão um arcabouço de ferramentas importantes, que posteriormente permitirá que estes estudantes não fiquem dependentes exclusivamente da fórmula resolvente.

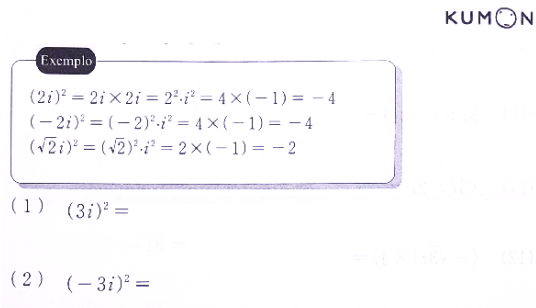
E antes de apresentar a fórmula resolvente, o método trabalha a técnica de completar quadrados, técnica útil quando se trabalha com expressões quadráticas e também para estudos mais avançados dentro da matemática.



Números positivos, negativos e o zero pertencem ao conjunto dos números reais. Elevando um número positivo ou um número negativo ao quadrado, tem-se um número positivo. O número zero elevado ao quadrado resulta em zero.
Isso é válido para todo número real. Vamos pensar em um número que não é um número real e que elevado ao quadrado resulte negativo.
O número que elevado ao quadrado resulta -1 representamos com a letra i.
(a este i dá-se o nome de unidade imaginária).

$i^2 = -1 \quad (\sqrt{-1} = i)$

Figura 3.42: Números complexos.



KUMON

Exemplo

$(2i)^2 = 2i \times 2i = 2^2 \cdot i^2 = 4 \times (-1) = -4$
$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \times (-1) = -4$
$(\sqrt{2}i)^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot i^2 = 2 \times (-1) = -2$

(1) $(3i)^2 =$

(2) $(-3i)^2 =$

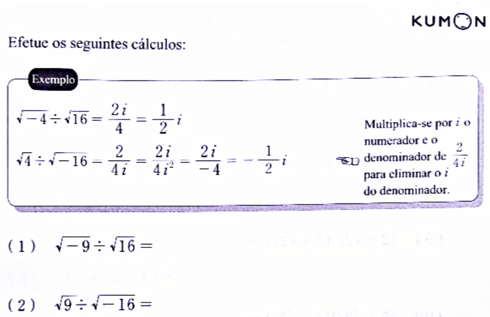
Figura 3.43: Números complexos.

Uma observação, é que o método Kumon até agora não trabalhou com equações quadráticas que não possuem solução real, ou seja, o método não trabalhou com $\Delta < 0$. No estágio J, o método Kumon volta a trabalhar com equações quadráticas e começa a introduzir a ideia que existem números que não são reais e define o número imaginário $i = \sqrt{-1}$.

Depois o Kumon trabalha operações com números complexos, como soma, multiplicação e divisão. Isso para que o estudante tenhar certa familiaridade em trabalhar com raízes complexas de equações quadráticas.

Vê-se na Figura 3.47, que o método começa a trabalhar com equações quadráticas com raízes não reais.

Do que foi exposto pelo material autoinstrutivo do Método Kumon, observa-se que não há intenção de ensinar aos alunos que equações quadráticas podem não ter soluções (soluções reais), mas fazer o aluno assimilar a ideia que equações quadráticas sempre


KUMON

Efetue os seguintes cálculos:

Exemplo

$\sqrt{-4} \div \sqrt{16} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$

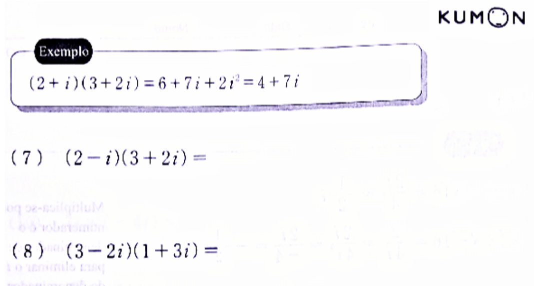
$\sqrt{4} \div \sqrt{-16} = \frac{2}{4i} = \frac{2i}{4i^2} = \frac{2i}{-4} = -\frac{1}{2}i$

Multiplica-se por i o numerador e o denominador de $\frac{2}{4i}$ para eliminar o i do denominador.

(1) $\sqrt{-9} \div \sqrt{16} =$

(2) $\sqrt{9} \div \sqrt{-16} =$

Figura 3.44: Números complexos.


KUMON

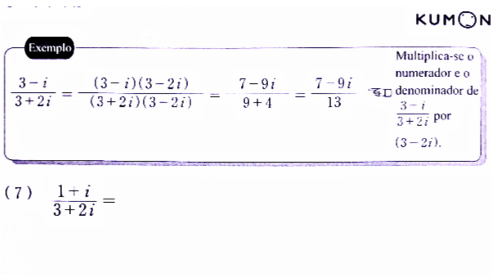
Exemplo

$(2+i)(3+2i) = 6+7i+2i^2 = 4+7i$

(7) $(2-i)(3+2i) =$

(8) $(3-2i)(1+3i) =$

Figura 3.45: Números complexos.


KUMON

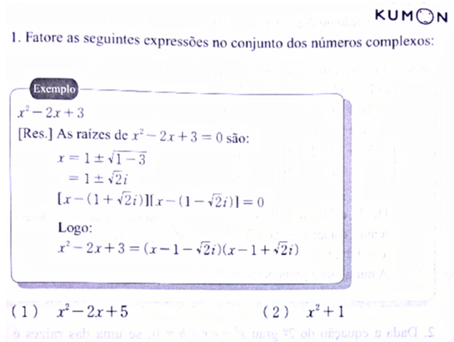
Exemplo

$\frac{3-i}{3+2i} = \frac{(3-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{7-9i}{9+4} = \frac{7-9i}{13}$

Multiplica-se o numerador e o denominador de $\frac{3-i}{3+2i}$ por $(3-2i)$.

(7) $\frac{1+i}{3+2i} =$

Figura 3.46: Números complexos.


KUMON

1. Fatore as seguintes expressões no conjunto dos números complexos:

Exemplo

x^2-2x+3

[Res.] As raízes de $x^2-2x+3=0$ são:

$x = 1 \pm \sqrt{1-3}$

$= 1 \pm \sqrt{2}i$

$[x-(1+\sqrt{2}i)][x-(1-\sqrt{2}i)] = 0$

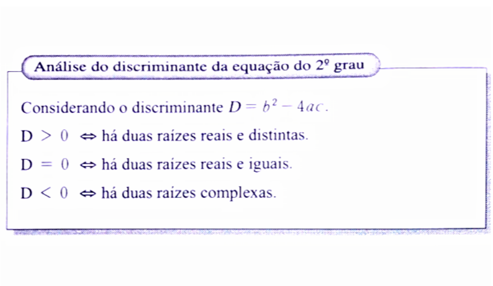
Logo:

$x^2-2x+3 = (x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

(1) x^2-2x+5 (2) x^2+1

Figura 3.47: Números complexos.

possuem soluções, mesmo que possam ser ambas reais ou ambas complexas.


Análise do discriminante da equação do 2º grau

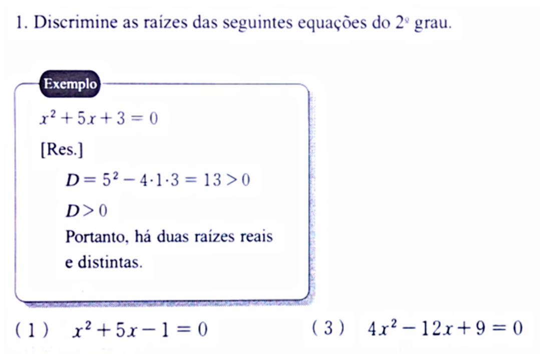
Considerando o discriminante $D = b^2 - 4ac$.

D > 0 ⇔ há duas raízes reais e distintas.

D = 0 ⇔ há duas raízes reais e iguais.

D < 0 ⇔ há duas raízes complexas.

Figura 3.48: Discriminante.


1. Discrimine as raízes das seguintes equações do 2º grau.

Exemplo

$x^2+5x+3=0$

[Res.]

$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$

$D > 0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

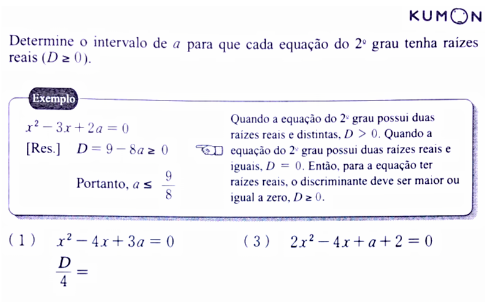
(1) $x^2+5x-1=0$ (3) $4x^2-12x+9=0$

Figura 3.49: Discriminante.

Depois o método Kumon introduz o conceito de discriminate e o associa aos tipos de raízes que uma equação quadrática pode ter.

Observando as Figuras 3.52 e 3.53, vê-se que a ideia da soma e produto das raízes possuem relação com os coeficientes da equação quadrática.

As relações entre as raízes e os coeficientes da equação quadrática fica bem evidente quando os alunos conseguem encontrar a equação quadrática a partir de suas raízes, ver Figuras 3.54 e 3.55.


KUMON

Determine o intervalo de a para que cada equação do 2º grau tenha raízes reais ($D \geq 0$).

Exemplo

$x^2-3x+2a=0$

[Res.] $D=9-8a \geq 0$

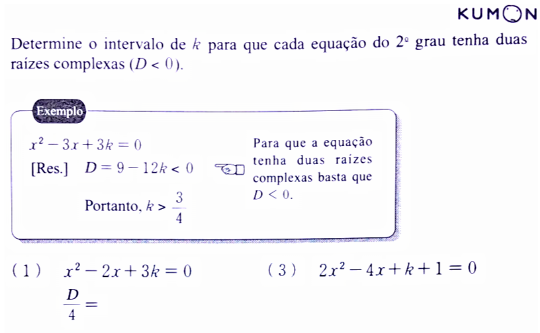
Portanto, $a \leq \frac{9}{8}$

Quando a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas, $D>0$. Quando a equação do 2º grau possui duas raízes reais e iguais, $D=0$. Então, para a equação ter raízes reais, o discriminante deve ser maior ou igual a zero, $D \geq 0$.

(1) $x^2-4x+3a=0$ (3) $2x^2-4x+a+2=0$

$\frac{D}{4}=$

Figura 3.50: Discriminante.


KUMON

Determine o intervalo de k para que cada equação do 2º grau tenha duas raízes complexas ($D<0$).

Exemplo

$x^2-3x+3k=0$

[Res.] $D=9-12k<0$

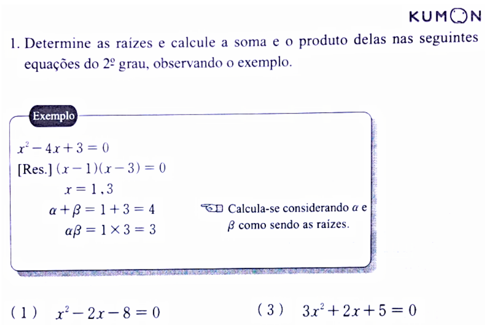
Portanto, $k>\frac{3}{4}$

Para que a equação tenha duas raízes complexas basta que $D<0$.

(1) $x^2-2x+3k=0$ (3) $2x^2-4x+k+1=0$

$\frac{D}{4}=$

Figura 3.51: Discriminante.


KUMON

1. Determine as raízes e calcule a soma e o produto delas nas seguintes equações do 2º grau, observando o exemplo.

Exemplo

$x^2-4x+3=0$

[Res.] $(x-1)(x-3)=0$

$x=1,3$

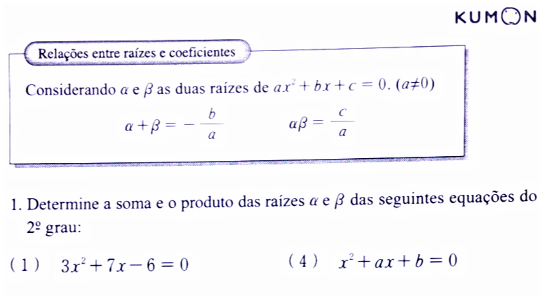
$\alpha+\beta=1+3=4$

$\alpha\beta=1\times 3=3$

Calcula-se considerando α e β como sendo as raízes.

(1) $x^2-2x-8=0$ (3) $3x^2+2x+5=0$

Figura 3.52: Soma e produto de raízes.


KUMON

Relações entre raízes e coeficientes

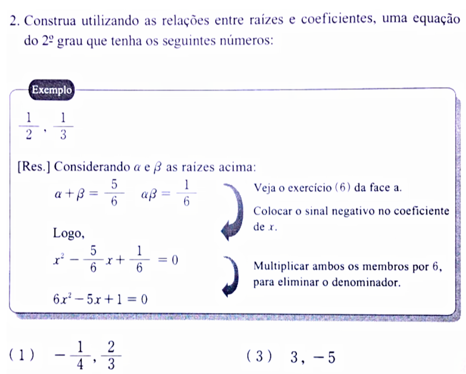
Considerando α e β as duas raízes de $ax^2+bx+c=0$. ($a \neq 0$)

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

1. Determine a soma e o produto das raízes α e β das seguintes equações do 2º grau:

(1) $3x^2+7x-6=0$ (4) $x^2+ax+b=0$

Figura 3.53: Soma e produto de raízes.


2. Construa utilizando as relações entre raízes e coeficientes, uma equação do 2º grau que tenha os seguintes números:

Exemplo

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

[Res.] Considerando α e β as raízes acima:

$\alpha+\beta=\frac{5}{6}$ $\alpha\beta=\frac{1}{6}$

Veja o exercício (6) da face a.

Colocar o sinal negativo no coeficiente de x.

Logo,

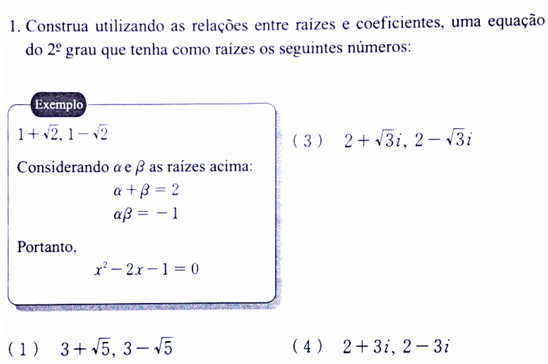
$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$

Multiplicar ambos os membros por 6, para eliminar o denominador.

$6x^2-5x+1=0$

(1) $-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ (3) $3, -5$

Figura 3.54: Soma e produto de raízes.


1. Construa utilizando as relações entre raízes e coeficientes, uma equação do 2º grau que tenha como raízes os seguintes números:

Exemplo

$1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$

Considerando α e β as raízes acima:

$\alpha+\beta=2$

$\alpha\beta=-1$

Portanto,

$x^2-2x-1=0$

(3) $2+\sqrt{3}i, 2-\sqrt{3}i$

(1) $3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}$ (4) $2+3i, 2-3i$

Figura 3.55: Soma e produto de raízes..

3.2 Método Kumon e as dificuldades dos alunos em equações quadráticas

No Capítulo 1, foi feita uma revisão na literatura sobre as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos em resolver equações quadráticas. Por exemplo, no estudo (Vaiyavutjamai 2004), são listadas uma série de dificuldades, como:

> "Depois das aulas de equações de 2º grau, muitos alunos não perceberam que equações quadráticas geralmente tinham duas soluções".

Segundo a sequência programática do Método Kumon, ele tenta trabalhar esta dificuldade dando ênfase ao estudo de resolução de equações quadráticas via fatoração e aplicação do anulamento do produto, como nas Figuras 3.30 e 3.31. E também com o estudo do discriminante nas Figuras 3.48 a 3.51, pois dessa forma o método acredita que o aluno terá uma boa compreensão sobre o número de raízes que uma equação quadrática pode ter, ou seja, ela sempre terá duas soluções, podendo ser distinta, idêntica ou complexa.

Quando o Método Kumon trabalha com o caminho contrário, fornecendo duas raízes e solicitando para o estudante encontrar a equação quadrática associada, isto é feito para que se estabeleça na cabeça do aluno uma espécie de "bijeção", contribuindo para o entendimento de que equações quadráticas possuem duas raízes, ver Figuras 3.54 e 3.55.

> "Alguns alunos que resolveram equações quadráticas corretamente, não sabiam verificar se suas soluções para a equação estavam corretas"(Vaiyavutjamai 2004).

O Método Kumon trabalha com a verificação de soluções, que podemos ver na Figura 3.30. Além de resolver a equação quadrática por fatoração, o Método convida o estudante a verificar se $x = -5$ é solução para a equação $x^2 + 3x - 10 = 0$, fazendo a análise do lado esquerdo da equação e comparando com o lado direito da equação.

> "Ao tentar resolver $(x-3)(x-5) = 0$, alguns estudantes Tailandeses 'expandiram' os dois parênteses para obter $x^2 - 8x + 15 = 0$, refatorando, em em seguida, igualaram cada fator a zero"(Vaiyavutjamai 2004).

Na mesma Figura 3.30, vê-se que o Método Kumon salienta que:

$$(x+5)(x-2) = 0 \text{ é verdade quando } (x+5) = 0 \quad \text{ou} \quad (x-2) = 0. \tag{3.1}$$

Ou seja, podemos encontrar a solução aplicando a propriedade do anulamento do produto nos fatores lineares da fatoração.

Apesar dos alunos estarem vendo estes tópicos através do Método Kumon, o que garante que os alunos estão aprendendo este conteúdo?

O Método Kumon é baseado na resolução de "bloquinhos" de papel com muitos exercícios de cada estágio do aprendizado e o estudante só pode prosseguir ao próximo estágio se consegue resolver todos os exercícios do bloco atual e em um tempo satisfatório (Kumon 1997). A cada tentativa de resolução em que o aluno não obtém êxito, depois da correção do tutor/orientador, ele é convidado a refazer todo o bloco corrigindo os exercícios incorretos. A exigência do aluno resolver os exercícios em um tempo satisfatório pré-estabelecido, tem o objetivo de garantir que além da resolução correta, ele ainda resolva com desenvoltura satisfatória. Além de posteriores revisões para fixação do conteúdo.

No estudo (Lima e Tall 2006), os autores relatam problemas na resolução das seguintes equações:

$$m^2 = 9, \;\; 3l^2 - l = 0, \;\; a^2 - 2a - 3 = 0 \;\text{ e }\; r^2 - r = 0$$

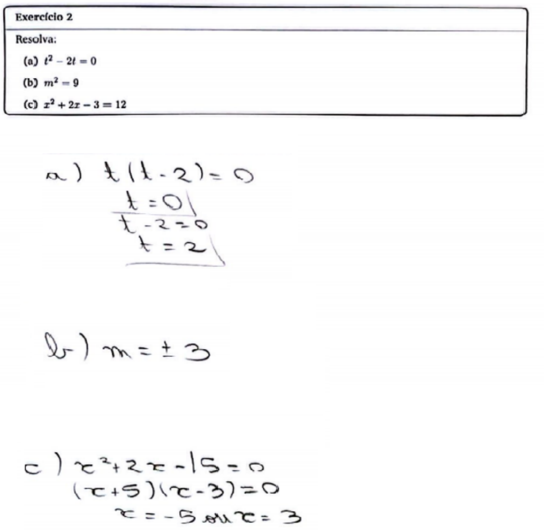
Observando as Figuras 3.30 a 3.36, vê-se que estes tipos de equações são trabalhadas em grande quantidade, além do estudo de raízes quadradas exemplificadas nas Figuras 3.24 a 3.29.

Problemas como os do artigo (Lima e Tall 2010), exemplificados nas Figuras 1.4 e 1.11, são trabalhadas pelo Método Kumon com vários exercícios envolvendo monômios e polinômios, ver Figuras 3.1 a 3.8, que têm o papel de reforçar os conceitos de multiplicação e potência, que já foram trabalhados em estágios anteriores. Tudo para evitar que os alunos cometam os erros procedimentais citados nas Figuras 1.4 e 1.11.

Em colaboração com a unidade do Kumon de Ituverava, São Paulo, Brasil, exemplificamos alguns exercícios resolvidos pelos alunos, relacionados com algumas dificuldades citadas na literatura.

Note que em (Lima e Tall 2010), com relação ao "Problema de John" o Método Kumon aplica muitos exercícios com vários tipos de fatoração de polinômios quadráticos, como os ilustrados nas Figuras 3.15 a 3.23. E pode-se observar que na Figura 3.30, além da fatoração o Método ilustra a propriedade do anulamento do produto, para resolver equações a partir da fatoração. O "problema de John" também foi aplicado a alguns alunos do Kumon de Ituverava.

Com relação aos trabalhos (Didiş et al. 2011) e (Makonye e Nhlanhla 2014), uma das principais dificuldades apresentadas pelos alunos foi a fatoração de equações quadráticas, principalmente quando elas não aparecem em sua forma padrão. Como a dificuldade em fatorar é um problema recorrente dos alunos, o Método Kumon trabalha bastante com fatoração, para resolução de equações quadráticas.



Exercício 2

Resolva:

(a) $t^2 - 2t = 0$

(b) $m^2 = 9$

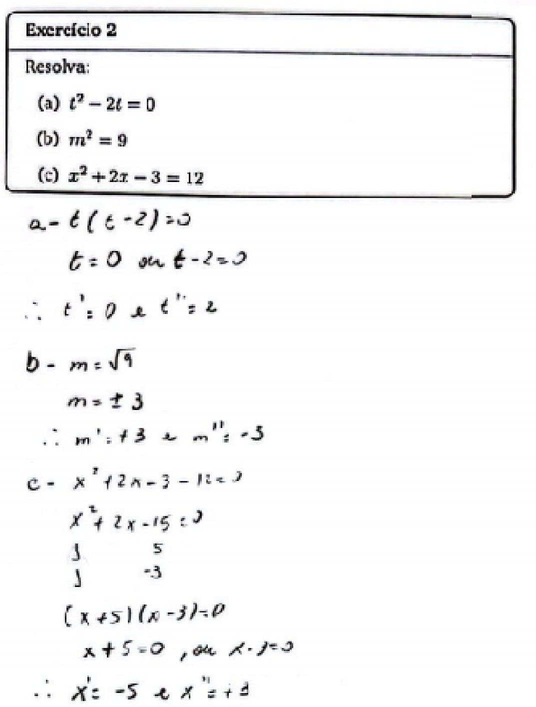
(c) $x^2 + 2x - 3 = 12$

a) $t(t-2)=0$
$t=0$
$t-2=0$
$t=2$

b) $m=\pm 3$

c) $x^2+2x-15=0$
$(x+5)(x-3)=0$
$x=-5$ ou $x=3$

Figura 3.56: Aluno A.



Exercício 2

Resolva:

(a) $t^2 - 2t = 0$

(b) $m^2 = 9$

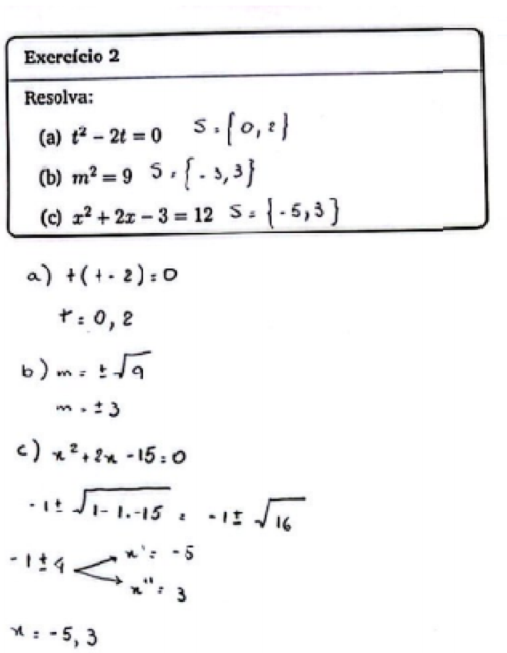
(c) $x^2 + 2x - 3 = 12$

a- $t(t-2)=0$
$t=0$ ou $t-2=0$
$\therefore t'=0$ e $t''=2$

b- $m=\sqrt{9}$
$m=\pm 3$
$\therefore m'=+3$ e $m''=-3$

c- $x^2+2x-3-12=0$
$x^2+2x-15=0$
$(x+5)(x-3)=0$
$x+5=0$, ou $x-3=0$
$\therefore x'=-5$ e $x''=+3$

Figura 3.57: Aluno B.



Exercício 2

Resolva:

(a) $t^2 - 2t = 0$ $S=\{0,2\}$

(b) $m^2 = 9$ $S=\{-3,3\}$

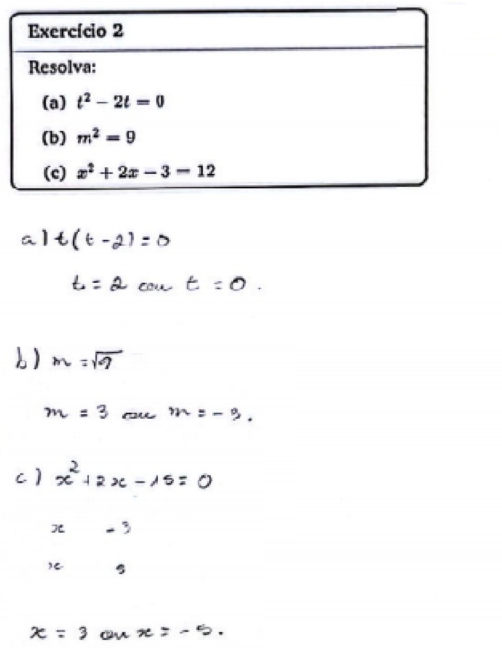
(c) $x^2 + 2x - 3 = 12$ $S=\{-5,3\}$

a) $t(t-2)=0$
$t=0,2$

b) $m=\pm\sqrt{9}$
$m=\pm 3$

c) $x^2+2x-15=0$
$-1\pm\sqrt{1-1\cdot -15} = -1\pm\sqrt{16}$
-1 ± 4 $x'=-5$ $x''=3$
$x=-5,3$

Figura 3.58: Aluno C.



Exercício 2

Resolva:

(a) $t^2 - 2t = 0$

(b) $m^2 = 9$

(c) $x^2 + 2x - 3 = 12$

a) $t(t-2)=0$
$t=2$ ou $t=0$.

b) $m=\sqrt{9}$
$m=3$ ou $m=-3$.

c) $x^2+2x-15=0$
x -3
x 5
$x=3$ ou $x=-5$.

Figura 3.59: Aluno D.

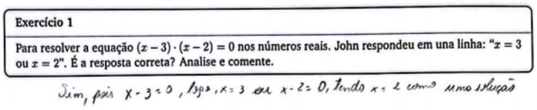


Figura 3.60: Aluno A.

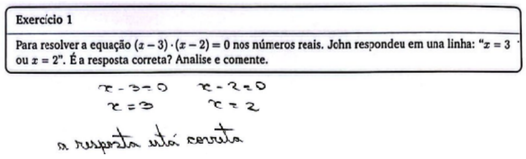


Figura 3.61: Aluno B.

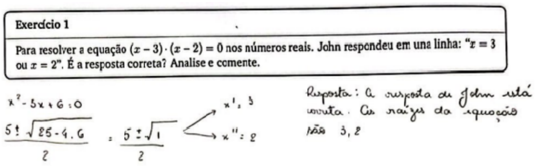


Figura 3.62: Aluno C.

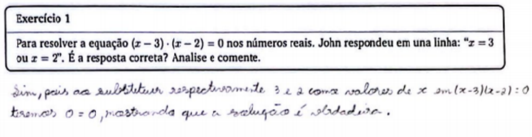


Figura 3.63: Aluno D.

No trabalho (Makonye e Nhlanhla 2014), um aluno tenta resolver a equação $x^2+5x+6=0$, através de "soma e produto", porém ele acaba se confundindo com a utilização do método, ver Figura 1.15.

No Kumon, "soma e produto"é trabalhado de forma detalhada, nas Figuras 3.52 a 3.55 os alunos trabalham encontrando as raízes a partir dos coeficientes da equação e também, encontrando a equação a partir de raízes dadas.

Em (Brito et al. 2019), os alunos apresentam dificuldades em calcular o discriminante de uma equação quadrática por deficiências em multiplicação, potenciação e subtração. O Método Kumon trabalha de forma exaustiva essas operações em estágios anteriores, além de estudar de forma detalhada o discriminate, ver Figuras 3.50 a 3.53.

O trabalho também menciona o desempenho dos alunos na interpretação e solução de problemas propostos, onde 67% erraram a solução do problema.

A resolução de problemas envolvendo equações quadráticas é uma deficiência dos alunos em geral e também do Método Kumon, pois não apresenta muitos exercícios nesta área. Foi aplicado um problema a alguns alunos do Kumon Ituverava e seguem as respostas:

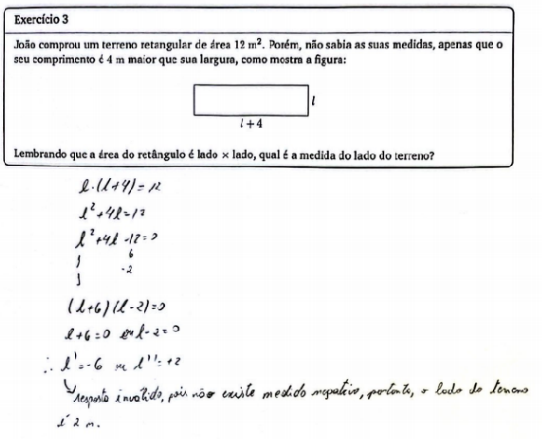


Figura 3.64: Aluno A.

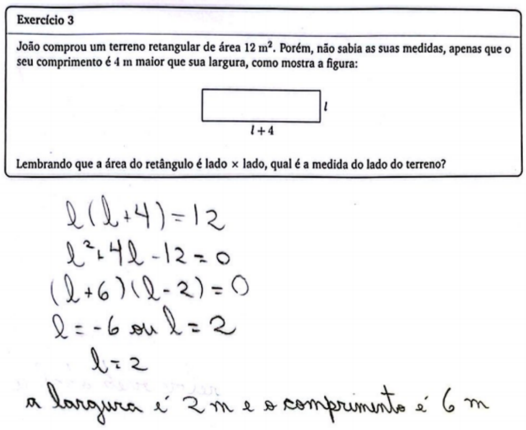


Figura 3.65: Aluno B.

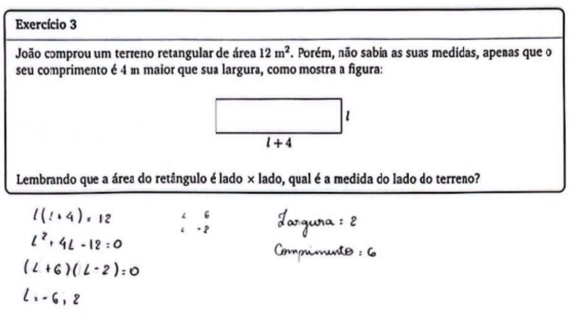


Figura 3.66: Aluno C.

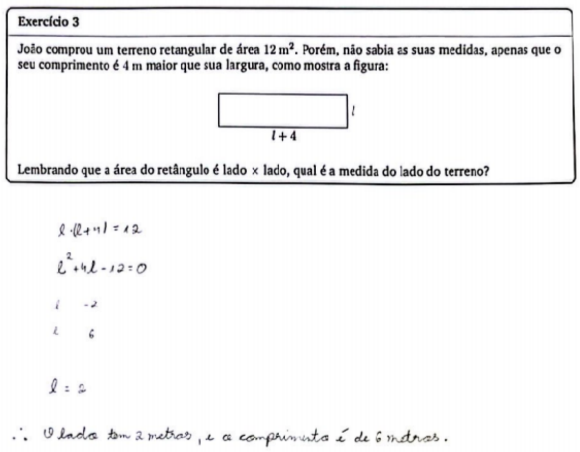


Figura 3.67: Aluno D.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O motivo de estudar as dificuldades enfrentadas pelos alunos em trabalhar com equação do segundo grau, se deve à experiência em lecionar este tema em escolas particulares do Brasil e verificar que os alunos do último ciclo do Ensino Fundamental tinham muita dificuldade com o assunto. Por outro lado, por também ser orientadora do Método Kumon na unidade de Ituverava, percebia que os alunos do Kumon que tinham a mesma faixa etária dos alunos do colégio não apresentavam as mesmas dificuldades.

A intenção do trabalho baseou-se em apontar as dificuldades enfrentadas pelos alunos do último ciclo do ensino fundamental na temática equação do segundo grau e, além disso, verificar se o Método Kumon (que é um método conhecido por trabalhar no ensino da matemática) consegue ser eficaz em diminuir as dificuldades dos estudantes, quando se trata de equações do segundo grau.

No estudo foi feito um breve histórico do desenvolvimento das equações de segundo grau e os métodos para resolvê-lo e, em seguida, por meio de artigos que vão de 2004 a 2019, levantou-se as primeiras dificuldades no estudo de equação do segundo grau.

Na sequência, foi feito um estudo do Método Kumon, percorrendo desde a história do surgimento da metodologia, além da motivação pelos seus principais pilares no ensino e aprendizagem e por fim, pelas suas principais características. Em seguida, foi feito um estudo do material didático do Método Kumon referente aos tópicos preparatórios para o estudo de equações do segundo grau. Ou seja, uma análise sobre a efetividade do material do Método Kumon em tratar as principais dificuldades dos alunos ao terem contato com as equações do segundo grau.

Com base nas dificuldades listadas do capítulo 1, observou-se que as primeiras dificuldades apresentadas pelos alunos são:

1. os alunos têm dificuldade com operações matemáticas como multiplicação, potenciação e radiciação;

2. eles não entendem o papel que as soluções desempenham em uma equação do segundo grau;

3. os alunos têm dificuldade em fatoração de equações quadráticas;

4. os alunos têm dificuldade em interpretar e resolver problemas que envolvam equações do segundo grau.

Com base no estudo realizado no material didático do Kumon referente ao ensino de equações do segundo grau, verificou-se que o Método Kumon através do treino intenso com operações matemáticas e revisões periódicas dessas operações efetivamente diminui os erros operacionais e procedimentais dos alunos.

Em relação ao papel que as soluções desempenham na equação do segundo grau, o material didático nos mostra que o Kumon além de trabalhar com várias formas de resolução, também trabalha com a verificação da solução, ou seja, além de encontrar os números fornecidos pela resolução o aluno precisa substituir cada número separadamente na incógnita da equação e verificar se o lado direito da equação é igual a seu lado esquerdo, o que equivale a verificar a igualdade na equação para cada um dos números encontrados na resolução.

Com relação às dificuldades em fatoração, o Método Kumon trabalha com vários tipos de fatoração, sendo a fatoração de equações quadráticas um dos pontos fortes da metodologia Kumon, além de também explorar as soluções através do método "completar quadrados" e a utilização da fórmula resolvente.

As dificuldades envolvendo interpretação e resolução de problemas com base no material didático não são bem trabalhadas no Método Kumon, uma vez que não há exemplos de tais problemas no material embora nos exemplos feitos pelos alunos da unidade do Kumon de Ituverava eles conseguiram resolver o problema proposto sem grandes dificuldades. No entanto, para ter uma ideia mais precisa do desempenho dos alunos na resolução de problemas envolvendo equação do segundo grau seria necessária uma pesquisa mais ampla.

Com base no que foi estudado neste trabalho recomenda-se que, no ensino do estudo de equações do segundo grau, pelos professores, não seja apenas baseado na aplicação da fórmula resolvente, mas que ao invés disso, eles trabalhem a resolução de equações do segundo grau através da fatoração e utilização da propriedade do anulamento do produto, do método de "completar quadrados", pela fórmula resolvente, pelo método de soma e produto das raízes, ou seja, sem dar tratamento privilegiado a um método em detrimento dos outros. Além da necessidade de aplicar um grande número de exercícios em sala de aula, para aumentar o aprendizado dos alunos.

E, por fim, baseado nos exemplos resolvidos pelos alunos do Kumon de Ituverava, onde eles apresentaram bom desempenho nos exercícios propostos, o trabalho sugere que seria importante uma pesquisa qualitativa e quantitativa com várias unidades do Kumon espalhadas pelo Brasil, para verificar se o desempenho dos alunos são tão satisfatórios quanto os exemplos sugerem.

Referências Bibliográficas

ANDRADE, B. C. d. A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau. Universidade do Porto. Reitoria, 2000.

ANTUNES, A. C. M. *A resolução de tarefas envolvendo equações do 2. º grau: um estudo no 8. º ano.* Tese (Doutorado), 2013.

BRANDT, C. F. et al. *Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações.* Paraná: Editora UEPG, 2016.

BRASIL, M. da E. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* 1998. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf⟩, acesso em: 28 de janeiro de 2024.

BRASIL, M. da E. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* 2017. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192⟩, acesso em: 28 de janeiro de 2024.

BRAZ, L. Z. H. Que entendimentos sobre frações e seus significados alunos, de diferentes idades e níveis de escolarização, desenvolvem de forma autônoma a partir do método kumon. 2018.

BREDA, A. et al. Political, technical and pedagogical effects of the covid-19 pandemic in mathematics education: an overview of brazil, chile and spain. *Intermaths*, v. 1, n. 1, p. 3–19, 2020.

BRITO, R. G. S. de et al. Dificuldade de estudante em resolver equação quadrática no ensino médio: uma pesquisa quantitativa. *Science and Knowledge in Focus*, v. 2, n. 1, p. 05–17, 2019.

COELHO, A. R. A importância do processo metodológico e lúdico no ensino/aprendizagem das equações de segundo grau. Universidade do Estado do Amazonas, 2023.

COSTA, R. P. d. et al. O ensino de matemática na base nacional comum curricular nos anos finais do ensino fundamental. *Ensino em Re-Vista*, Universidade Federal de Uberlândia, v. 27, n. 2, p. 572–594, 2020.

COUTINHO, F. S. G. et al. Ensino individualizado da matemática: estudo comparativo dos recursos método kumon e khan academy. Universidade Federal de Minas Gerais, 2019.

DIDIŞ, M. et al. Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. In: *The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)*. Poland: [s.n.], 2011. p. 479–489.

ESTRADA, M. F. et al. *História da matemática*. Portugal: Universidade Aberta, 2000.

FERREIRO, E.; TEBEROSKY, A. *Psicogênese da língua escrita. reimp.* Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

GÜNER, P.; UYGUN, T. Developmental process of quadratic equations from past to present and reflections on teaching-learning. *HAYEF Journal of Education*, İstanbul University-Cerrahpasa, v. 13, n. 3, p. 149–163, 2016.

HOLANDA, W. M. N. d. Metodologia de ensino aplicada à matemática: discutindo o método kumon no brasil. Universidade Federal da Paraíba, 2017.

JESUS, M. A. S. *Um Estudo Exploratório Sobre a Metodologia de Ensino Kumon.* 2008. Disponível em: ⟨https://vdocuments.mx/um-estudo-exploratorio-sobre-a-metodologia-kumon.html⟩, acesso em: 24 de janeiro de 2023.

KUMON, T. *Estudo gostoso de matemática: o segredo do método Kumon.* Brasil: Ediouro, 1997.

KUMON, T. *Compreender os princípios de orientação do Método Kumon de Matemática.* Brasil: Kumon América do Sul Instituto de Educação, 2022a.

KUMON, T. *Guia de Implementação. Matemática H-I.* Brasil: Kumon América do Sul Instituto de Educação, 2022b.

KUMON, T. *História do Método Kumon.* 2023. Disponível em: ⟨https://www.kumon.com.br/sobre-nos/historia-do-kumon/⟩, acesso em: 21 de janeiro de 2023.

LIMA, F. d. S. et al. Equações do segundo grau: as dificuldades no ensino e aprendizagem e as metodologias mais utilizadas pelos professores. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2022.

LIMA, R. N. Uso flexivel de símbolos: o caso das equações quadráticas. 2004.

LIMA, R. N.; TALL, D. The concept of equations: What have students met before? *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Citeseer, v. 4, p. 233, 2006.

LIMA, R. N.; TALL, D. *An example of the fragility of a procedural approach to solving equations.* England: Citeseer, 2010.

LIMA, R. Nogueira de; TALL, D. Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, v. 67, n. 1, p. 3–18, 2008.

LORENZONI, I. *Brasil troca experiências com a Finlândia em educação básica.* 2023. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/17273-brasil-troca-experiencias-com-a-finlandia-em-educacao-basic=a⟩, acesso em: 22 de janeiro de 2023.

LOUREIRO, V. Dificuldades na aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do ensino médio. 2014.

MAKONYE, J.; NHLANHLA, S. Exploring 'non-science'grade 11 learners' errors in solving quadratic equations. *Mediterranean journal of social sciences*, v. 5, n. 27 P2, p. 634, 2014.

MASOLA, W.; ALLEVATO, N. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. *Educação Matemática Debate*, v. 3, n. 7, p. 52–67, 2019.

MIRANDA, H. O ensino de matemática por meio do método kumon. Universidade Federal do Tocantins, 2020.

MORAES, F. F. d. Equações do segundo grau: uma abordagem investigativa. Universidade Federal do Pampa, 2021.

MOURA, J. T. L. A importância do ensino das equações do 2 grau nas turmas de ensino fundamental. 2020.

NABAIS, M. M. S. *Equações do 2. º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9. º ano.* Tese (Doutorado), 2010.

PEÑUELA, L. A. B. Estudio de la ecuación cuadrática en libros de texto de matematicas publicados en españa durante el siglo xviii. Universidad de Granada, 2006.

PEREIRA, N. G.; GUSMÃO, T. C. R. S. Números decimais no método kumon: Aprendizagem de alunos sob o olhar dos critérios de idoneidade didática, do enfoque ontosemiótico da cognição e instrução matemática (eos). *Seminário Nacional e Seminário Internacional Políticas Públicas, Gestão e Práxis Educacional*, v. 6, n. 6, 2017.

PITOMBEIRA, J. B. Revisitando uma velha conhecida. *Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. 2004, Salvador.*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

PONTE, J. P. da et al. Álgebra no ensino básico. *Portugal: Ministério da Educação-BGIdc*, p. 92–115, 2009.

PONTES, E. A. S. Os quatro pilares educacionais no processo de ensino e aprendizagem de matemática. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, SciELO Argentina, n. 24, p. 15–22, 2019.

RADFORD, L.; GUÉRETTE, G. Second degree equations in the classroom: A babylonian approach. *Paleontological Society Papers*, Citeseer, v. 6, p. 69–76, 2000.

REFATTI, L. R.; BISOGNIN, E. Aspectos históricos e geométricos da equação quadrática. *Disciplinarum Scientia— Naturais e Tecnológicas*, v. 6, n. 1, p. 79–95, 2005.

REIS, A. Q.; NEHRING, C. M. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas contextualizationin the teaching of mathematics: conceptions and practices. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 19, n. 2, 2017.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do trabalho científico.* São Paulo: Cortez editora, 2017.

SILVA, A. C. d. Ensino e a aprendizagem de matemática. Universidade Federal do Tocantins, 2023.

SILVA, V. d. A contextualização e a valorização da matemática: representações sociais de alunos do ensino médio. *Anais do VIII ENEM-Comunicação Científica*, 2004.

STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

TEODÓZIO, J. M. et al. As estratégias metacognitivas e o método kumon de aprendizagem: possibilidades de incorporação na educação profissional e tecnológica. *Brazilian Journal of Development*, v. 7, n. 3, p. 28534–28555, 2021.

VAIYAVUTJAMAI, P. Influences on student learning of teaching methods used by secondary mathematics teachers. *Journal of Applied Research in Education*, v. 8, p. 37–52, 2004.

VAIYAVUTJAMAI, P.; CLEMENTS, M. Effects of classroom instruction on student performance on, and understanding of, linear equations and linear inequalities. *Mathematical thinking and learning*, Taylor & Francis, v. 8, n. 2, p. 113–147, 2006.

VAIYAVUTJAMAI, P. et al. *Students' attempts to solve two elementary quadratic equations: A study in three nations*. Sydney, 2005.

VALE, A. F. A. As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau. 2013.

VILARINHO, L. R. G. Didática. *Temas Selecionados. Rio de Janeiro/São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora*, p. 17, 1980.

WILKINS, S. L.; ARAÚJO, E. S. Uma análise crítica do método kumon à luz da perspectiva histórico–cultural. *Textos Completos dos Trabalhos Apresentados*, 2009.