Universidade Federal do Rio de Janeiro
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Márcio Marques da Rocha

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU COM AUXÍLIO DOS MODELOS DE BARRAS DE SINGAPURA

Rio de Janeiro
2024

Página da ficha catalográfica

MÁRCIO MARQUES DA ROCHA

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU COM AUXÍLIO DOS MODELOS DE BARRAS DE SINGAPURA

Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado a Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito final para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro

2024

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU COM AUXÍLIO DOS MODELOS DE BARRAS DE SINGAPURA

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
Instituto de Matemática - UFRJ
(Orientador/Presidente da Banca Examinadora)

Profª. Drª. Walcy Santos
Instituto de Matemática - UFRJ

Profª. Drª. Márcia Cristina Pereira Spíndola
CMRJ

Dedico este trabalho a Alessandra, minha amada esposa. Mulher forte, sábia e paciente, e a meu filho Gabriel, meu exemplo de sensatez.

AGRADECIMENTOS

Àquele que me criou, redimiu e me sustenta.

Aos meus pais, que nunca deixaram de fazer tudo o que estivesse a seu alcance para que seus filhos tivessem a melhor educação.

Ao meu irmão, futuro Doutor Marcelo, orientador informal deste trabalho. Deus te abençoe!

Ao meu orientador, professor Nei. Sereno, paciente e que sempre esteve à disposição para auxiliar com toda boa vontade.

À professora Márcia Spindola, do CMRJ, que tanto contribuiu para minha formação profissional.

Ao meu colega de profissão, amigo e grande incentivador, Cesar Felipe.

Aos antigos professores Nélson Braga (Aritmética), Jorge Temístocles (Álgebra) e Orozimbo (Geometria), do Curso Tamandaré/85, que foram os primeiros e me mostrar uma matemática que eu não conhecia.

Ao professor Vicente, da Escola Preparatória de Cadetes do Ar, que me mostrou a primeira questão olímpica de matemática.

Aos “monstros” Vítor, Benjamim e Lincoln, do Curso Martins.

A todos os meus colegas de PROFMAT/UFRJ.

Ao meu colega de escola desde a infância, professor da Faculdade de Direito de Ribeirão Preto/USP, Dr. Guilherme Adolfo dos Santos Mendes, que, sem o saber, sempre me impulsionou para que eu estudasse mais. Valeu, “lhama”!

À toda a Turma Epcar86 – AFA89. “Esquadrão da união, força, garra e vibração...Rompe espaço, Brasil!!”

Aos professores do PROFMAT/UFRJ, que com muita humildade e sabedoria me transmitiram seus notáveis e valorosos conhecimentos.

Finalmente, considerando que somos todos elos de uma gigantesca corrente, muitos nomes foram omitidos, seja por falta de espaço ou de memória, mas fica um agradecimento a todos que contribuíram de forma direta e indireta para minha formação, seja intelectual, seja de caráter.

Resumo

Esta dissertação investiga a aplicação dos Modelos de Barras de Singapura (MBS) na resolução de problemas matemáticos de primeiro grau em escolas brasileiras. Adotando uma metodologia qualitativa e uma revisão bibliográfica, o trabalho foca na transição da aritmética para a álgebra, destacando a importância de um ensino de matemática equilibrado que integre conceituação, manipulação e aplicações. Discute-se a eficácia dos MBS em facilitar a compreensão dos alunos e a tradução de enunciados da linguagem corrente para a linguagem matemática. A pesquisa propõe uma nova abordagem pedagógica para o ensino de matemática no Brasil, visando melhorar a competência e o interesse dos alunos pela matéria.

Palavras-chave: Modelos de Barras de Singapura, Resolução de Problemas, Ensino de Matemática, Transição da Aritmética para a Álgebra, Educação Brasileira.

Abstract

This master's thesis delves into the utilization of Singapore Bar Models (SBM) for solving first-degree mathematical problems within the Brazilian educational context. Employing a qualitative methodology alongside a comprehensive literature review, the study concentrates on the pivotal transition from arithmetic to algebra, underlining the necessity for a harmonious mathematical education that melds conceptual understanding, skillful manipulation, and practical application. The thesis examines the effectiveness of SBM in enhancing student comprehension and their ability to transform common language statements into mathematical expressions. It proposes an innovative pedagogical approach for mathematics instruction in Brazil, aimed at elevating student proficiency and fostering a deeper engagement with the subject.

Keywords: Singapore Bar Models, Problem Solving, Mathematics Education, Transition from Arithmetic to Algebra, Brazilian Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

Sumário

1. Introdução

Como professor de Matemática com mais de 25 anos de experiência em sala de aula, minha jornada com essa disciplina não pode ser descrita por uma função contínua e, muito menos, crescente. Desde os primeiros anos do ensino básico, onde as notas altas mascaravam a falta de uma compreensão real, até às dificuldades enfrentadas com conceitos como números negativos e equações, minha trajetória acadêmica foi pontuada por desafios significativos. Essas experiências iniciais, especialmente durante a transição para a 5ª série (atual 6º ano), onde enfrentei dificuldades com equações simples, marcaram o início de uma série de obstáculos educacionais que quase culminaram em reprovação.

Essa dificuldade inicial, somada à minha luta com Desenho Geométrico, catalisou uma transformação na minha abordagem ao aprendizado. A quase reprovação serviu como um despertar, levando-me a revisitar minhas bases e adotar uma postura mais ativa em meus estudos. No ano seguinte, embora tenha enfrentado novos desafios com problemas do primeiro grau, comecei a perceber a importância de entender os procedimentos matemáticos e sua aplicação prática.

A verdadeira virada ocorreu em 1985, durante um curso pré-militar, sob a tutela do professor Jorge Temístocles. Suas aulas de Álgebra não apenas exigiram raciocínio lógico, mas também me ensinaram a pensar de forma crítica e organizada. Os testes semanais, que ele aplicava como uma forma de avaliação contínua, foram fundamentais nesse processo. Foi durante esse período que comecei a desenvolver a habilidade de fornecer soluções detalhadas e bem-organizadas, uma habilidade que tento incutir nos meus alunos até hoje.

No entanto, a transferência dessa abordagem para os alunos tem sido desafiadora. Enfrento regularmente a falta de interesse, a desorganização e, principalmente, uma desconexão entre o que os alunos estão fazendo e o raciocínio por trás disso. Essa desconexão entre a prática e a compreensão é o cerne da minha preocupação pedagógica e o foco principal da minha dissertação. Ao explorar este tema, busco não apenas entender melhor os desafios enfrentados pelos alunos na aprendizagem da Matemática, mas também desenvolver estratégias que possam facilitar uma compreensão mais profunda e engajada da matéria, inspirada nas minhas próprias experiências de aprendizado.

1.1 Justificativa

A resolução de problemas matemáticos é uma habilidade fundamental no currículo educacional, desempenhando um papel crucial no desenvolvimento cognitivo dos estudantes. No entanto, o ensino de Matemática, especialmente no que diz respeito à resolução de problemas, frequentemente apresenta barreiras tanto para educadores quanto para alunos. Diante desse desafio, esta dissertação propõe um método para o ensino de resolução de problemas do primeiro grau, inspirado nos reconhecidos Modelos de Barras de Singapura (MBS).

Desde os tempos de aluno, sempre tive interesse pelas obras russas de matemática, que conheci por meio dos concursos militares. Esses materiais eram basicamente livros de problemas, com quase nenhuma exposição teórica. Depois de me tornar professor, meu interesse passou a ser compreender como a matemática era ensinada aos alunos. Passei, então, a buscar livros desse tipo. Não queria apenas resolver os problemas, mas descobrir como ajudar os alunos a desenvolverem habilidades de resolução de problemas no nível mostrado nos livros russos.

Em um dos cursos do PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio), comentou-se sobre a qualidade didática dos livros alemães e japoneses. Foi quando encontrei um projeto de obras traduzidas pela *American Mathematical Society* e adquiri o livro "*Mathematics 1: Japanese Grade 10*". Esse foi o primeiro livro didático estrangeiro que li, e fiquei impressionado com a simplicidade e objetividade didáticas, bem como com o rigor adequado e o alto nível dos exercícios apresentados.

Ainda nessa busca, encontrei referências ao professor russo Andre Toom, que lecionava na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Lendo um de seus artigos, publicado na II Bienal da SBM (TOOM, 2004), vi seus elogios aos livros didáticos de Singapura, comparando-os aos livros didáticos russos.

Singapura é conhecida por seu alto desempenho em Matemática no cenário internacional, conforme demonstrado pelos resultados do TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*). O país desenvolveu uma metodologia única que utiliza modelos de barras para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos complexos. Este trabalho visa adaptar e integrar essa abordagem no contexto educacional brasileiro, com o objetivo de melhorar a compreensão dos alunos em relação à resolução de problemas do primeiro grau.

O foco desta pesquisa recai sobre a implementação desta metodologia em um ambiente de sala de aula. A pesquisa busca investigar como os MBS podem ser utilizados para aprimorar as habilidades de resolução de problemas dos alunos, especialmente naqueles problemas cuja resolução necessita de uma representação na forma de equações.

A metodologia de pesquisa foi adaptada devido a restrições práticas, que limitaram a realização de observações detalhadas em sala de aula, entrevistas com professores e análises de desempenho dos alunos. Em vez disso, o estudo concentrou-se na análise teórica e na revisão bibliográfica sobre os MBS e seu uso na resolução de problemas do primeiro grau. Esta abordagem incluiu a revisão de literatura existente sobre práticas pedagógicas Matemáticas eficazes e estudos anteriores sobre a aplicação dos MBS. Além disso, a dissertação explora as possíveis implicações da integração desta metodologia no sistema educacional brasileiro, com base em evidências teóricas e comparações com práticas pedagógicas reconhecidas internacionalmente. Embora a pesquisa de campo direta não tenha sido possível, este estudo proporciona uma análise aprofundada e fundamentada teoricamente, oferecendo insights valiosos para futuras pesquisas e práticas educacionais.

1.2 Objetivo geral

O objetivo geral desta dissertação é desenvolver e avaliar uma proposta metodológica inovadora para o ensino de resolução de problemas matemáticos de primeiro grau, utilizando os MBS. Esta abordagem visa proporcionar aos alunos, principalmente na transição da Aritmética para a Álgebra, uma ferramenta eficaz e intuitiva para entender e resolver problemas matemáticos, melhorando assim a sua competência e confiança em matemática. Através deste estudo, busca-se explorar como a integração desta metodologia específica pode enriquecer o processo de aprendizagem matemática no contexto educacional brasileiro, contribuindo para o aprimoramento das estratégias de ensino de Matemática nas escolas. Além disso, a pesquisa tem o intuito de investigar os potenciais impactos desta abordagem no engajamento e no interesse dos estudantes pela Matemática, visando à promoção de uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

1.3 Objetivos específicos

- Fazer uma revisão bibliográfica sobre as pesquisas desenvolvidas e que tratam do ensino de resolução de problemas;
- discorrer sobre a metodologia de resolução de problemas, apontando as suas principais nuances;
- elaborar uma proposta de ensino de resolução de problemas do primeiro grau que utilize os MBS como auxílio.

1.4 Metodologia

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa para explorar a aplicação dos MBS na resolução de problemas matemáticos do primeiro grau. Dada a natureza subjetiva e exploratória do objeto de estudo, que envolve a teoria e a metodologia dos MBS, a pesquisa segue uma linha investigativa interpretativa. O foco está em compreender como essa abordagem específica pode ser integrada e adaptada ao ensino de Matemática no contexto educacional brasileiro, enfatizando a interpretação e a aplicação prática desses modelos em problemas de primeiro grau.

Segundo GIL (2017), pesquisas exploratórias visam aumentar a familiaridade com o problema, a fim de torná-lo mais claro ou para a formulação de hipóteses. Portanto, como uma pesquisa exploratória, o estudo busca oferecer novas perspectivas sobre o uso dos MBS, analisando-os de forma comparativa e complementar em relação aos métodos tradicionais de ensino. Uma vantagem desta abordagem é a capacidade de avaliar a pertinência e a contribuição potencial da metodologia proposta antes de sua implementação prática.

Quanto aos procedimentos técnicos, a pesquisa é classificada como bibliográfica, baseando-se na coleta de dados através de um levantamento bibliográfico. Esse levantamento inclui livros e artigos científicos, com o objetivo de reunir informações e dados relevantes sobre metodologia de resolução de problemas. Além disso, foram selecionados problemas matemáticos de diferentes níveis de dificuldade e interpretação para ilustrar como a metodologia de Singapura pode ser aplicada em diversos contextos de resolução de problemas do primeiro grau.

1.5 Divisão do trabalho

O trabalho é constituído de três capítulos: este primeiro capítulo, intitulado "Introdução ao tema de pesquisa" traz a apresentação de uma proposta metodológica para o ensino de resolução de problemas de primeiro grau utilizando-se da metodologia dos MBS, e é composto por cinco seções: Justificativa, Objetivo geral, Objetivos específicos, Metodologia e Divisão do trabalho. O segundo capítulo, "Fundamentação Teórica", tem as seguintes seções: "O ensino de Matemática e os documentos oficiais", enfatizando a álgebra e o raciocínio algébrico, "A importância da transição entre a pré-álgebra e a álgebra", mostrando a necessidade de métodos pedagógicos eficazes para facilitar a compreensão dos conceitos algébricos e enfatizando a importância de estratégias visuais e concretas na transição da aritmética para a álgebra. A terceira seção, "O elo perdido entre pré-álgebra e álgebra", destaca a metodologia de Singapura como uma ponte entre ambos. O terceiro capítulo trata do equacionamento e resolução de problemas", e tem três seções. A primeira apresenta "A regra da falsa posição", uma antiga técnica de resolução de problemas, a segunda é "Resolução de problemas como ensinada em dois livros russos" e mostra orientações dadas aos alunos quanto a esse aspecto. A terceira seção apresenta "Aspectos teóricos do MBS". No quarto capítulo o MBS é esmiuçado e praticado com alguns exemplos; e, finalmente, a metodologia proposta de interligação entre o MBS e a álgebra é apresentada, sendo resolvidos problemas de livros didáticos brasileiros. Isso será feito em dois momentos. Primeiro com problemas de aritmética de uma obra que era indicada para alunos que se preparavam para o antigo "Exame de Admissão". Depois, serão resolvidos problemas de Álgebra usando equações; porém, o equacionamento será feito com o auxílio dos MBS.

2. Fundamentação teórica

2.1 O ensino de Matemática e os documentos oficiais

A Álgebra, um pilar fundamental da educação Matemática, é amplamente reconhecida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e na Base Nacional Comum Curricular do Brasil (BNCC). Esses documentos regulatórios, que servem como diretrizes para o currículo educacional brasileiro, destacam a Álgebra não apenas como um componente crucial para a aprendizagem Matemática, mas também como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento cognitivo e a formação integral dos estudantes.

Nos PCNs, a Álgebra era parte do bloco números e operações. As representações algébricas serviam para "expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em sequências numéricas a compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas e a construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples" (NOVA ESCOLA, 2024). Contudo, isso aparecia a partir do 7º ano, sem qualquer preparo; ou seja, faltava a um elemento de transição.

Por sua vez, a BNCC (Brasil, 2018) não foca nas operações algébricas. Tanto é verdade que ela deve ser apresentada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (NOVA ESCOLA, 2024). De fato, "é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais" (Brasil, 2018 - p.270). Desse modo, a Álgebra integra-se como uma competência central no currículo matemático. A BNCC promove a Álgebra como uma ferramenta que "tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – o pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas" (BRASIL, 2018, p.270). A BNCC também destaca a importância de conectar a Álgebra a outras áreas da Matemática, como a Aritmética e a Geometria, visando a uma compreensão mais holística e aplicada da disciplina. Além disso, enfatiza a necessidade de metodologias de ensino que facilitam o entendimento abstrato e lógico inerente à Álgebra. Isso inclui o uso de recursos didáticos inovadores e estratégias pedagógicas que promovam uma aprendizagem significativa e engajada.

2.2 A importância da transição entre a pré-álgebra e a álgebra

A Álgebra possui uma complexidade que lhe é inerente, e para superá-la é essencial que esta seja abordada de formas que facilitem a compreensão de seus conceitos, particularmente durante a transição da aritmética para a álgebra (BALDIN, 2018).

Apesar das recomendações da BNCC (Brasil, 2018), o ensino da Álgebra frequentemente se concentra em métodos procedimentais (BALDIN, 2018). Especificamente em relação à Álgebra, ela é frequentemente ensinada como um conjunto de fórmulas e expressões simbólicas, cujos significados mudam dependendo do contexto - seja matemático puro ou na resolução de problemas. Contudo, esses significados variáveis raramente são explorados ou conectados de maneira efetiva no processo de ensino.

O desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do ensino fundamental é um aspecto crucial da Educação Matemática, e um dos meios de superar a complexidade da linguagem algébrica é pela utilização de estratégias pedagógicas que utilizam a visualização dos conceitos matemáticos (BALDIN, 2018). E como nos mostra QUEIROZ (2014)

> A metodologia do Modelo de Barras é muito importante e útil para os alunos na resolução de problemas que envolvem comparações, parte-todo, razões e proporções fazendo com que os alunos possam aprimorar seus conhecimentos anteriores da aritmética, e adquirirem novos olhares para a abstração da álgebra que virá nos anos seguintes.

A modelagem pictórica, como praticada na Matemática de Singapura, é destacada como uma ferramenta eficaz para o ensino e aprendizagem de conceitos algébricos. Esta abordagem visual é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, permitindo que os alunos internalizem os conceitos de forma mais significativa.

BALDIN (2018) nos mostra que um aspecto fundamental é a necessidade de estabelecer conexões claras entre a Aritmética e a Álgebra. A utilização de materiais concretos e representações visuais ajuda os alunos a “enxergarem” e compreender a transição entre esses dois domínios matemáticos, facilitando a superação da complexidade característica da linguagem algébrica.

A fase intermediária da pré-álgebra é identificada como um momento crítico no desenvolvimento do pensamento algébrico (BALDIN, 2018). É nesta fase que os alunos começam a trabalhar com conceitos mais abstratos e desenvolvem habilidades de generalização e formalização. Conceitos como variáveis, expressões algébricas, equações e sistemas de equações são introduzidos, marcando a transição da aritmética para a álgebra.

Esta fase também é vital para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico e de resolução de problemas. Os alunos são desafiados a pensar de forma mais abstrata e a aplicar conceitos matemáticos em situações-problema complexas, preparando-os para o sucesso em Matemática e outras áreas do conhecimento.

2.3 O *elo perdido* entre pré-álgebra e álgebra

Um dos muitos obstáculos encontrados pelas crianças ao usar a álgebra simbólica é entender o significado das letras (NG e LEE, 2009). Essa dificuldade leva a questionar se não há alguma outra forma de representação. Segundo NG e LEE (2009), “muitos estudos têm mostrado que o uso de representações visuais e concretas melhora a performance na resolução de problemas verbais” – tradução minha). LEWIS (1989, *apud* NG e LEE, 2009) conduziu uma pesquisa com 96 estudantes universitários americanos, apresentando-lhes um método com o uso de diagramas para solucionar problemas verbais que envolvem a noção de comparação. O método consistia em os alunos posicionarem um valor numérico conhecido em uma reta numérica. Depois, deviam posicionar um valor desconhecido associado ao valor anterior. Os resultados do estudo mostraram que as capacidades dos estudantes em representar problemas melhoraram significativamente após essa intervenção educacional.

Pesquisas sobre o currículo elementar russo, desenvolvidas por DAVYDOV (1962; DAVYDOV & STEFFE, 1991; FREUDENTHAL, 1974, *apud* NG e LEE, 2009), fornecem evidências adicionais. Em NG e LEE (2009), lemos

> In this curriculum, children learn to use lines to model part-whole relationships between quantities in their 1st year of primary schooling. They also use letters to express relationships between quantities and solve for missing wholes and parts using addition and subtraction. Children then learn to use equations to represent and solve two-step word problems. By the 3rd year of primary school, they are able to represent and solve word problems requiring proportional reasoning. [1]

O método educacional desenvolvido por Davydov foca em aprimorar a competência dos alunos para resolver problemas verbais complexos. Isso é alcançado ao encorajar os estudantes a aplicar modelos visuais no processo de entendimento e representação das relações entre diferentes quantidades. Além disso, o currículo incentiva os alunos a transformar essas relações quantitativas em expressões simbólicas, fortalecendo assim sua habilidade de abstração e manipulação simbólica em contextos matemáticos.

Como mostrado por NG e LEE (2009), o aspecto central da resolução de problemas é a representação, e é aí que o método de Singapura enfoca. Além disso, o método conduz os alunos a utilizarem três formas de representação. São elas: a textual, a pictórica e a simbólica. Como veremos na seção 3.3 deste trabalho, o método de Singapura tem sua base no entendimento dos alunos sobre a relação parte-todo dos números. Uma ferramenta básica usada antes da apresentação dos modelos de barras são as "famílias de somas e diferenças" e as "famílias de produtos e quocientes". Nos primeiros anos escolares, são empregados objetos, desenhos e símbolos para ilustrar diferentes combinações numéricas. Depois os alunos são estimulados a representar as informações de problemas verbais utilizando retângulos de tamanhos proporcionais. Em problemas de palavra que envolvem aritmética, estes retângulos simbolizam números específicos. Modificando a função dos retângulos para

[1] Neste currículo, as crianças aprendem a usar linhas para modelar relações de parte-todo entre quantidades já no primeiro ano do ensino fundamental. Elas também utilizam letras para expressar relações entre quantidades e resolvem partes e totais faltantes utilizando adição e subtração. Posteriormente, as crianças aprendem a usar equações para representar e resolver problemas de duas etapas expressos em palavras. Até o terceiro ano do ensino fundamental, elas já são capazes de representar e resolver problemas de palavras que requerem raciocínio proporcional. (Tradução minha.)

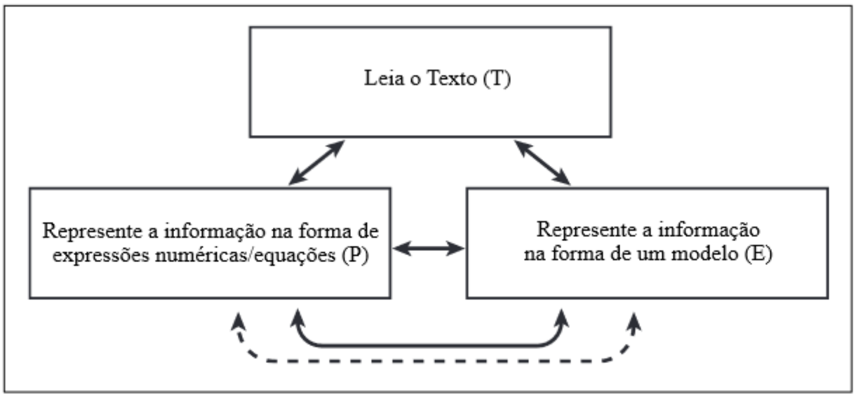
representar quantidades desconhecidas, o método de modelagem se torna eficaz também na representação de problemas de palavra algébricos.

O estudo conclui que o método de modelagem pode ser uma ferramenta eficaz para ensinar habilidades de resolução de problemas em Matemática, especialmente para crianças com habilidades médias.

A estrutura teórica do método

A hipótese de NG e LEE (2009) é de que “crianças que utilizam o método de modelagem para resolver problemas verbais são guiadas através de três fases de solução do problema”, apresentadas esquematicamente na Figura 1.

Figura 1 - Possíveis fases da solução de um problema



Possíveis fases da solução de um problema por crianças que utilizam o modelo.

Na rota TE, as crianças representam as informações contidas no texto na estrutura de um modelo. Na rota SP (a linha contínua), para resolver o problema, as crianças representam as relações embutidas no modelo em uma série de equações aritméticas. Na rota TP, algumas crianças contornam a rota TSP, movendo-se diretamente de T para P. Na rota TPS, as crianças representam as informações textuais em um conjunto de expressões ou equações aritméticas, que em seguida usam para desenhar o modelo. Essa rota alternativa é representada pelo caminho em linhas pontilhadas. Setas de duas pontas são usadas para significar que as crianças podem alternar entre representações para verificar a precisão das representações. (p. 290 – tradução minha)

Fonte: NG e LEE (2009)

1. Fase Textual: Nesta fase, as informações do problema são extraídas e organizadas em uma estrutura macro que destaca conceitos pertinentes e relações entre conjuntos de informações.

2. Fase Estrutural: Nesta fase, as informações extraídas na fase textual são representadas visualmente por meio de um desenho ou modelo, que captura as entradas, as relações entre as entradas e a saída do problema.

3. Fase Procedimental-Simbólica: Nesta fase, as informações representadas visualmente na fase estrutural são traduzidas em uma série de expressões aritméticas que podem ser resolvidas para encontrar a solução do problema.

Segundo NG e LEE (2009), todos os livros didáticos usados nas escolas de Singapura apresentam o método de modelagem como uma estratégia de resolução de problemas, e os professores são treinados para ensinar o método em sala de aula.

Os professores de Matemática em Singapura são incentivados a ensinar o método para crianças do ensino fundamental. O método é ensinado em conjunto com outras estratégias de resolução de problemas, como a estratégia de "adivinhar e verificar" e a estratégia de "trabalhar para de trás para frente".

Os professores também são incentivados a fornecer *feedback* aos alunos sobre o uso do método de modelagem, ajudando-os a identificar erros e aprimorar suas habilidades de resolução de problemas. Além disso, os professores são encorajados a adaptar o método de modelagem para atender às necessidades individuais dos alunos.

Quanto à eficácia e utilidade, os professores em Singapura percebem o método de modelagem como uma ferramenta eficaz para ensinar habilidades de resolução de problemas em Matemática. Em um estudo realizado com 14 professores de Matemática do ensino fundamental, todos relataram que ensinavam o método de modelagem em suas salas de aula.

Os professores relataram que o método de modelagem é particularmente útil para ajudar os alunos a visualizar e compreender as informações do problema, bem como para ajudá-los a identificar as relações entre as informações do problema. Além disso, os professores relataram que o método de modelagem é uma ferramenta útil para ajudar especialmente aqueles que têm dificuldade em entender a linguagem matemática. O estudo descobriu que o método de modelagem pode ser uma ferramenta útil para crianças que não têm acesso à álgebra simbólica, permitindo que elas resolvam problemas verbais sem precisar usar incógnitas e símbolos matemáticos.

No entanto, os professores também relataram que o método de modelagem pode ser desafiador para alguns alunos, especialmente aqueles que têm dificuldade em visualizar as informações do problema ou que têm dificuldade em traduzir as informações visuais em expressões aritméticas ou equações.

Minhas observações pessoais em sala de aula sugerem que há problemas sérios na matemática ensinada nos anos iniciais. Uma colega, que leciona para turmas dos anos iniciais, relatou-me que "os professores dos anos iniciais", em sua grande parte, "não gostam de Matemática". Na verdade, segundo ela, a maioria tem dificuldades com a disciplina. Essa dificuldade pode transmitir aos alunos, inconscientemente, uma aversão à Matemática. Essa aversão se reflete na relação que muitos têm com a Matemática a partir do 6º ano e se intensifica no 7º, quando passam a ter contato com a Álgebra. É aquilo que o professor Toom chama de "Efeito Dominó" (TOOM, 2001).

Um exemplo simples daquilo que costumamos chamar nas salas de professores de "falta de base" é o seguinte. Pergunte a um aluno qual operação deve ser feita para descobrir o número que multiplicado por 8 dá 48. A maioria dirá "multiplicação". Poucos (quase nenhum) responde que deve ser feita uma divisão. Isso é uma indicação de que as relações entre os números não estão claras. Ou seja, o pensamento algébrico preconizado pela BNCC não está sendo desenvolvido nos alunos.

3. Métodos de resolução de problemas

Este capítulo dedica-se a explorar diversos métodos de resolução de problemas matemáticos, uma habilidade essencial no ensino e aprendizado da Matemática. Ao longo da história, diferentes estratégias foram desenvolvidas para abordar desafios matemáticos, refletindo a evolução do pensamento humano na área. A capacidade de resolver problemas é central para a compreensão da Matemática e serve como uma ponte entre o teórico e o prático, permitindo aos alunos aplicarem conceitos em situações do mundo real.

Inicialmente, examinaremos abordagens históricas, como a "regra da falsa posição", uma técnica antiga encontrada no *Papiro de Ahmes*, que demonstra a engenhosidade dos matemáticos egípcios. Essa metodologia, embora distante das modernas práticas algébricas, ilustra a evolução do pensamento matemático e sua aplicação prática em problemas cotidianos.[2]

Avançando no tempo, chegamos às abordagens pedagógicas contemporâneas, particularmente as enfatizadas nos currículos de matemática russos. Estes métodos, exemplificados pelos trabalhos de Vygodsky e Litvinenko & Mordkovich, destacam a importância de equacionar problemas e de desenvolver um raciocínio algébrico, marcando uma transição significativa da aritmética para a álgebra.

Finalmente, esta jornada nos leva à inovadora metodologia dos MBS, que será o foco principal deste capítulo. Veremos como os MBS representam uma abordagem visual e intuitiva para a resolução de problemas, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e promovendo um raciocínio matemático mais profundo. Através da análise detalhada e de exemplos práticos, exploraremos como os MBS podem ser aplicados em uma variedade de contextos matemáticos, desde as operações fundamentais até conceitos mais complexos de frações, razões e porcentagens.

Este capítulo, portanto, não apenas apresenta um panorama histórico e teórico dos métodos de resolução de problemas, mas também prepara o terreno para uma

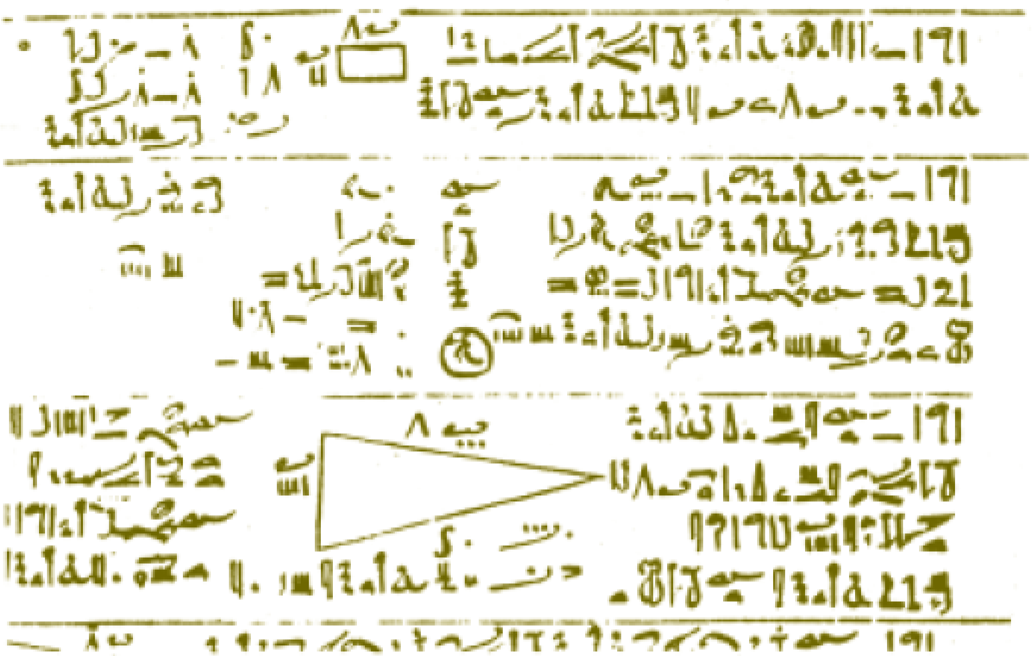
[2] Hoje em dia, reconhecemos a regra da dupla falsa posição como um processo de aproximação, em que o arco de uma curva é substituído por um segmento de reta secante e exige, no caso não linear, cuidados especiais para que a solução obtida seja realmente uma "solução aproximada". É o que chamamos de processo da interpolação. (GUELLI, 2004, p.213)

análise aprofundada dos MBS, demonstrando sua relevância e eficácia no ensino de Matemática.

3.1 A regra da falsa posição

O professor Oscar Guelli apresenta em GUELLI (2004) “regra da falsa posição”. Essa antiquíssima maneira de resolver problemas é encontrada no *Papiro de Ahmes*, também conhecido como *Papiro de Rhind*.

Figura 2 - Página do Papiro de Rhind



Fonte: GUELLI (2004)

No *Papiro de Ahmes* estão oitenta problemas de álgebra, cada um deles com sua solução. GUELLI (2004), resolve o seguinte problema:

"*Um montão, seus dois terços, sua metade, todos ao juntar-se fazem treze. Qual é a quantidade?*"

Como citado no artigo, obviamente os matemáticos egípcios não resolviam o problema acima usando equações, pois a linguagem algébrica só surgiria milênios mais tarde. Como então esse problema era resolvido? Através do processo chamado *regra da falsa posição*.

A ideia era a seguinte. Primeiro atribuía-se um valor ao *montão*. No nosso caso, um bom valor deveria ser divisível por três e por dois. O valor escolhido foi doze.

Assim temos:

$$12 + \frac{2}{3} \times 12 + \frac{1}{2} \times 12 = 26$$

Se o valor encontrado correspondesse ao resultado correto, o problema estaria resolvido. Caso contrário, como aconteceu conosco, devemos fazer um ajuste no valor inicial. Isso será possível comparando o resultado encontrado (26) com o resultado esperado (13). Como 26 é o dobro de 13, devemos tomar como valor do *montão* a metade do valor "chutado". Ou seja, o *montão* vale 6.

Não nos ateremos explicando por que a regra da falsa posição funciona, e nem quando ela não vai funcionar. O fato é que, para problemas de primeiro grau, essa é uma estratégia que poderia ser mostrada aos alunos por curiosidade histórica e para fins didáticos.

Por exemplo, suponhamos que o valor falso inicial tenha sido 16. Esse valor conduziria a uma dificuldade, que seria o fato de ele não ter terços inteiros. Permitindo que os alunos façam algumas tentativas, é possível que após um tempo eles percebam que o valor falso escolhido deve ser múltiplo de 3 e de 2. Isso já é um ganho considerável.

Depois, ao observar os resultados produzidos pelas tentativas com números que satisfaçam a essa condição, isso deverá levá-los a perceber algo curioso. Vejamos:

Tabela 1: Usando a regra da falsa posição

Valor "chutado" do montão	Valor da expressão
30	65
24	52
18	39

Os alunos podem perceber que a cada redução de 6 unidades no valor falso, o valor da expressão cai 13 unidades. Partindo, então, de um valor falso 30 (que produz 65 como resultado da expressão), quanto devemos escolher para o valor falso de modo que o valor da expressão seja 13?

Como de 65 para 13 temos uma redução de 52 e a redução é de 13 em 13, o valor da expressão deve sofrer 4 reduções (por 52 dividido por 13 é 4). O valor falso também deve sofrer 4 reduções, só que como a redução é de seis em seis, deve reduzir 24 unidades (4 x 6). Reduzindo 24 unidades de 30, temos 6, que é o valor correto do montão.

Caso os alunos já tenham o conceito de proporcionalidade, uma regra de três simples conduzirá ao resultado buscado.

3.2 Resolução de problemas como ensinada em dois livros russos

Em VYGODSKY (1979, p.149), a seção 79 tem o título "Por que precisamos de equações?".

A seção começa tratando dois tipos de problemas: os *diretos* e os *indiretos*. Um exemplo de problema direto é:

Qual é o peso de um pedaço de liga que contém 0,6 dm³ de cobre (peso específico: 8,9 kg/dm³) e 0,4 dm³ de zinco (peso específico: 7,0 kg/dm³)?

O problema é resolvido por uma sequência de operações implícita no próprio enunciado.

$$8{,}9 \times 0{,}6 + 7{,}0 \times 0{,}4$$

Um problema indireto baseado no problema direto é:

O peso de um pedaço de liga de 1 dm³ é 8,14 kg. Calcule os volumes de cobre (peso específico: 8,9 kg/dm³) e de zinco (peso específico: 7,0 kg/dm³)

VYGODSKY (1979) diz que no problema indireto as operações que conduzirão à solução não estão claramente indicadas. Ele diz que esse tipo de problema tem uma solução aritmética, mas que essa solução exige uma dose considerável de criatividade para encontrar o caminho que conduzirá a ela. Ele continua dizendo que foi para racionalizar o processo de cálculos que o método das equações, que é o assunto básico de estudo em Álgebra, foi criado.

A essência do método algébrico é a seguinte:

1. Atribua símbolos aos valores desconhecidos. Normalmente os símbolos são letras.
2. Usando esses símbolos e os sinais das operações (+, -, etc) traduza as condições do problema em linguagem Matemática. Ou seja, expresse as relações entre as quantidades dadas e as quantidades desconhecidas usando símbolos no lugar de palavras. Cada afirmação é uma equação.
3. O próximo passo é resolver a(s) equação(ões) e verificar a coerência das respostas de acordo com o contexto do problema.

Portanto, de acordo com VYGODSKY (1979), se chegarmos a ter as equações do problema, o restante é um trabalho quase mecânico. “A dificuldade de resolver um problema reside no seu equacionamento” (VYGODSKY, 1979, p.159 – tradução minha). E como se equaciona um problema? O equacionamento de um problema é uma tradução, palavra por palavra, da linguagem corrente para o simbolismo matemático.

VYGODSKY (1979, p.150) nos diz, a respeito do equacionamento de problemas, que frequentemente acontece de a relação entre as quantidades conhecidas e desconhecidas não ser explicita. Ao contrário, precisa ser deduzida a partir do enunciado do problema. Isso torna impossível dar orientações exaustivas sobre como equacionar um problema. Entretanto, são dados os conselhos a seguir.

Para o valor da incógnita, tome aleatoriamente algum(uns) número(s) e faça uma checagem, verificando se o valor atribuído é o correto. Se for, caso encerrado; se não for, pelo menos teremos “recebido de presente” a equação que resolve o problema. VYGODSKY (1979) resolve o problema abaixo como modelo.

O peso de um pedaço de liga de 1 dm³ é 8,14 kg. Calcule os volumes de cobre (peso específico: 8,9 kg/dm³) e de zinco (peso específico: 7,0 kg/dm³)

Suponhamos que o volume do cobre seja 0,5 dm³. Assim temos:

Peso do cobre: $0{,}5 \times 8{,}9$

Peso do zinco: $(1 - 0{,}5) \times 7$

Peso da liga: $0{,}5 \times 8{,}9 + (1 - 0{,}5) \times 7 = 7{,}95$

Como o valor é diferente de 8,14, o valor "chutado" está errado, mas "ganhamos" a equação que resolve o problema. Basta reescrevemos a expressão do peso da liga trocando 0,5 pela incógnita (x, por exemplo), e igualando a 8,14 obtendo:

$$8{,}9x + 7(1 - x) = 8{,}14$$

Resolvendo a equação temos $x = 0{,}6$. Portanto há 0,6 dm³ de cobre e 0,4 dm³ de zinco na liga.

Em LITVINENKO; MORDKOVICH (1987, p.81,82), lemos que "a solução de problemas verbais é normalmente realizada em quatro passos subsequentes", que são os seguintes:

(1) representar a quantidade desconhecida por uma letra (x, y, z, ...);
(2) equacionar o problema com uma equação ou um sistema de equações;
(3) resolver a equação (ou o sistema)
(4) escolha as soluções que sejam compatíveis com o problema.

Sendo um livro de problemas, LITVINENKO; MORDKOVICH (1987) foca na abordagem dos métodos de solução de alguns tipos específicos de problemas. Esses tipos de problemas, bem como algumas orientações específicas para resolvê-los, são dadas a seguir (LITVINENKO; MORKKOVICH, 1897, p.82-95):

1. Problemas sobre relações numéricas

Ao resolver tais problemas, usam-se os seguintes fatos:

- Se adicionarmos à direita de um número natural x um número y de n dígitos, então obtemos o número $10^n x + y$.
- Se a e b são números naturais, onde $a > b$ e a não é múltiplo de b, então existe apenas um par de números naturais q e r tal que $a = bq + r$, onde $r < b$ (a dividendo, b divisor, q quociente, r resto)

2. Problemas sobre progressões (aritmética e geométrica)

Esses tipos de problema são resolvidos usando as propriedades e características das progressões.

3. Problemas sobre movimento

Ao resolver tais problemas, devemos partir dos seguintes pressupostos:

- O movimento é uniforme, a menos que seja indicado de outra forma.
- A velocidade é uma quantidade positiva.
- As mudanças de direção dos corpos em movimento e as mudanças nas condições de movimento ocorrem instantaneamente.
- Se um corpo com velocidade própria x se move ao longo de um rio cuja correnteza tem velocidade y, então a velocidade do corpo com a correnteza é igual a $(x + y)$, e contra a correnteza é $(x - y)$.

4. Problemas sobre operação conjunta

O conteúdo de problemas desse tipo geralmente se resume ao seguinte. Algum trabalho cuja quantidade não é indicada e não é procurada (por exemplo, digitar um manuscrito, cavar um buraco, encher um reservatório etc.) é feito por várias pessoas ou mecanismos operando uniformemente (ou seja, com uma produção constante para cada um deles). Nesses problemas, a quantidade total de trabalho a ser feito é considerada como 1 (como uma unidade de medida).

5. Problemas sobre Ligas e Misturas.

Problemas deste tipo estão relacionados com a composição de misturas, ligas, soluções etc. A solução desses problemas está conectada com noções como concentração, porcentagem, amostragem, umidade, e assim por diante, e é baseada nas seguintes suposições:

- Todas as misturas (ligas, soluções) obtidas são homogêneas.
- Não se faz distinção entre um litro como unidade de capacidade e um litro como unidade de massa.

3.3 A metodologia dos MBS na prática

Veremos nessa seção como aplicar os MBS se aplica na prática. Veremos também que existem algumas estratégias na aplicação dos MBS dependendo do tipo de problema que se quer resolver. Não significa, contudo, que existem “vários métodos”, mas que o princípio básico pode ser implementado de diferentes modos dependendo do tipo de problema que se pretende resolver.

O modelo de barras é utilizado na resolução dos seguintes tipos de problemas:

- Problemas sobre as quatro operações.
- Problemas envolvendo frações.
- Problemas envolvendo porcentagens.
- Problemas envolvendo razões.

Nas duas seções seguintes veremos as estratégias na resolução de cada um desses tipos de problemas. A referência principal são os vídeos do canal *Merlion Maths.*

3.3.1 Os MBS nos problemas envolvendo as quatro operações

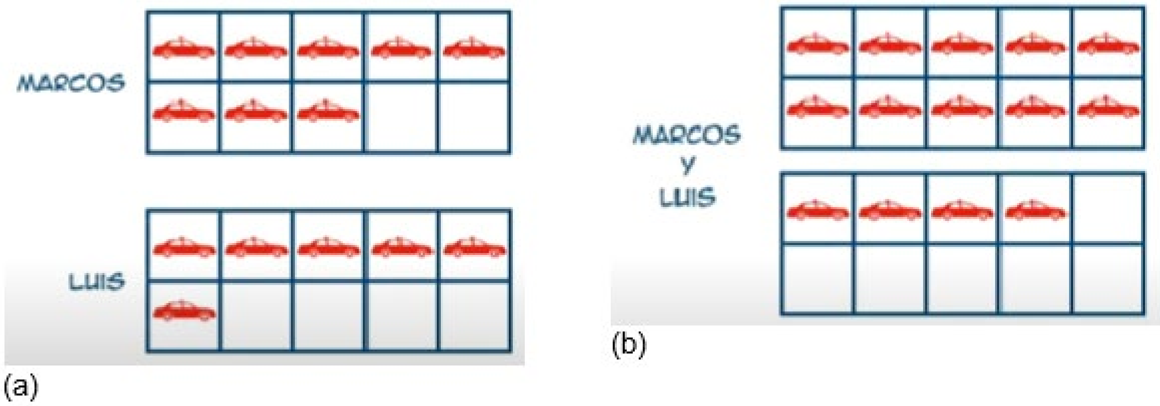
Tomemos um exemplo de MATHS (2020, Parte 1).

Marcos tem 8 carros de brinquedo. Luís tem 6 carros de brinquedo. Quantos carros de brinquedo têm juntos? (tradução minha)

Conforme o vemos na Figura 3, no primeiro ano primário tudo é mostrado de modo concreto. Podem ser usados carros de brinquedo realmente ou cartões com carros desenhados. Depois, os carros são juntados e contados. Os alunos somaram as quantidades de Marcos e Luís. É interessante perceber que a adição é feita de modo a completar uma dezena. Ou seja:

$$8 + 6 = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14$$

Figura 3 - Adição (representação concreta)

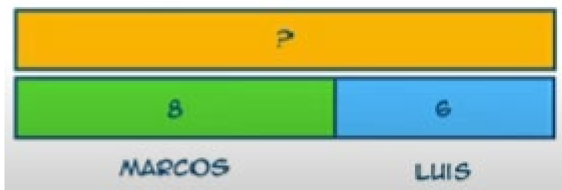


Legenda: (a) Marcos tem 8 carros e Luís, 6 carros (3 min 50 s).; (b) Marcos e Luís têm, juntos, 14 carros (3 min 57 s)

Fonte: MATHS (2020, Parte 1)

A partir do 2º ano primário os alunos passam a representar o problema usando um modelo (MATHS, 2020, Parte 1). O modelo mostra as duas partes e o todo.

Figura 4 - Representação parte-todo



Legenda: Representação da adição com o modelo de barras (4 min 18 s)

Fonte: MATHS (2020, Parte 1)

Agora os alunos têm condição de usar a operação de adição com seus símbolos:

$$8 + 6 = 14$$

O problema só se considera resolvido quando o aluno é capaz de responder à pergunta. Esse, aliás, é um hábito saudável a ser desenvolvido desde tenra idade.

Como vemos no vídeo, o modelo parte-todo apresenta uma relação quantitativa entre três números: duas partes e um total. Para calcular o total, os alunos devem somar os valores das duas partes. Representando o total por T e as partes por P_1 e P_2, temos a igualdade:

$$T = P_1 + P_2$$

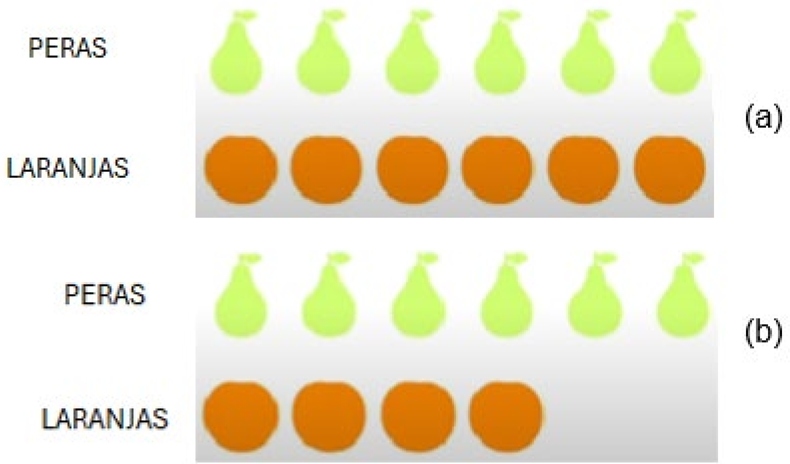
MATHS (2020, Parte 1) mostra, a seguir, um exemplo usando o modelo de comparação.

Em uma caixa há peras e laranjas. Sabe-se que há duas peras mais que laranjas. Se há seis peras na caixa, quantas laranjas há? (tradução minha)

No 1º ano primário, o objetivo é que os alunos entendam bem o conceito de comparação. Para isso, pede-se que eles estabeleçam uma correspondência biunívoca entre peras e laranjas.

As crianças começam desenhando seis peras e seis laranjas. Porém, como sabemos que há duas peras mais que laranjas, as laranjas em excesso devem ser retiradas. Para calcular o número de laranjas, portanto, deve-se efetuar $6 - 2 = 4$.

Figura 5 - Correspondência um a um para comparação



Legenda: (a) As crianças estabelecem a correspondência a partir do número de peras (5 min 12 s); (b) As crianças corrigem a quantidade de laranjas sabendo que há duas peras mais que laranjas (5 min 20 s).

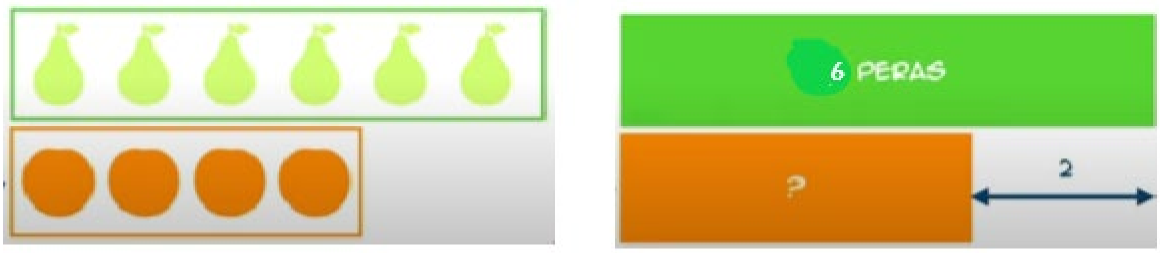
Fonte: MATHS (2020, Parte 1)

No segundo ano, os alunos passam a representar a situação utilizando retângulos de diferentes tamanhos conforme os valores a que se refiram, conforme indicado na Fig. 6.

Usando os MBS para comparar quantidades, fica claro qual a maior, qual a menor e quanto maior ou menor.

Outra observação importante em MATHS (2020, Parte 1) é que a representação usando os MBS evita um vício comum dos alunos, que é a busca por palavras que transmitam a ideia de qual operação utilizar. No caso acima, os alunos que tentassem resolver o problema buscando essas palavras acabariam errando por não saberem o que estão fazendo. No problema, como é dito que há 2 peras mais que laranjas, muitos alunos seriam induzidos ao erro somando 6 com 2.

Figura 6 - Passagem do concreto para o pictórico



(a) (b)

Legenda: (a) A representação é concreta, mas começa a ser introduzida a representação das quantidades por meio de retângulos de modo que os tamanhos dos retângulos guardem alguma correspondência com as quantidades que representam (5 min 30 s); (b) Abandona-se a representação concreta (5 min 32 s).

Fonte: MATHS (2020, Parte 1)

Fica um aviso aos professores: se queremos que nossos alunos resolvam problemas sabendo explicar o procedimento adotado, não devemos tentar ensinar as operações usando palavras-chave.

Aqui também temos uma relação entre três quantidades: a quantidade maior (Q), a menor (q) e a diferença (d) entre elas. Essa relação pode ser escrita de três maneiras diferentes (mas equivalentes):

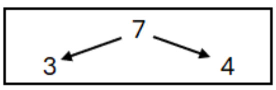
$$Q - q = d$$

$$Q - d = q$$

$$q + d = Q$$

MATHS (2020, Parte 1) destaca que na Matemática de Singapura isso é conhecido como *famílias de somas e diferenças*. Neste trabalho não falaremos sobre isso, mas basicamente consiste em escrever números como somas, por exemplo:

Figura 7 - Família de somas



Fonte: O autor

Temos as seguintes equivalências:

$$7 = 3 + 4$$

$$3 = 7 - 4$$

$$4 = 7 - 3$$

MATHS (2020, Parte 1) mostra que o modelo parte-todo também pode ser usado em problemas de multiplicação (embora a terminologia mais correta fosse fator-produto). Nesse caso, temos um total que se divide em partes iguais. Por exemplo, no modelo abaixo temos uma quantidade dividida em 4 partes iguais.

<table>
<tr><td colspan="4">P</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr>
</table>

Aqui também temos uma relação entre três quantidades: o total (P), quanto vale cada parte (F) e o número de partes (f) As relações equivalentes entre esses valores podem ser representadas de três maneiras:

$$P = F \times f$$

$$F = P \div f$$

$$f = P \div F$$

Nesses problemas, tendo os fatores, o “total” é encontrado multiplicando-os. Tendo o total e um dos fatores, o outro fator pode ser encontrado dividindo o “total” pelo fator conhecido.

As relações entre multiplicação e divisão também podem ser estabelecidas com o modelo de comparação. Nesse caso, temos uma parte maior que é múltipla da parte menor. No exemplo acima, podemos dizer que a parte maior é quatro vezes maior que a parte menor, ou que a parte menor é a quarta parte da maior.

As três quantidades envolvidas nesse caso são a quantidade maior (Q) a quantidade menor (q) e o fator de multiplicidade (f) que indica quantas vezes Q é maior que q, ou seja, podemos escrever:

$$Q = q \times f \qquad q = Q \div f \qquad f = Q \div q$$

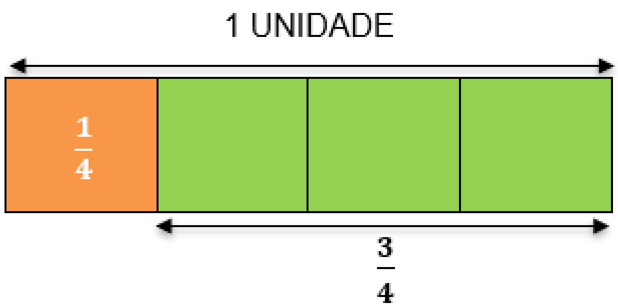
Aqui também temos as chamadas famílias de multiplicações e divisões, similares às famílias de somas e diferenças.

Observação: O uso dos MBS para ensinar as quatro operações faz com que o aluno compreenda o sentido da operação que está sendo realizada ao resolver um problema. Infelizmente, muitos professores dos anos iniciais tentam “adestrar” seus alunos ao invés de fazer com que eles internalizem o significado das operações. Isso acaba criando neles um hábito de, ao resolver um problema, tomarem os dados numéricos e com ele realizarem as operações a esmo.

3.3.2 Os MBS nos problemas de frações, razões e porcentagem

Como mostrado em MATHS (2020, Parte 2) o modelo parte-todo é indicado para ilustrar o conceito de fração, pois uma fração indica uma parte de um total. Se uma unidade é dividida em quatro partes iguais e tomamos uma delas, a situação é representada como abaixo. O número 1/4 representa uma de quatro partes iguais e o número 3/4 representa três de quatro partes iguais (Figura 8).

Figura 8 - Os MBS e as frações



Fonte: Autor. Adaptada de MATHS (2020, Parte 2, 1 min 22 s)

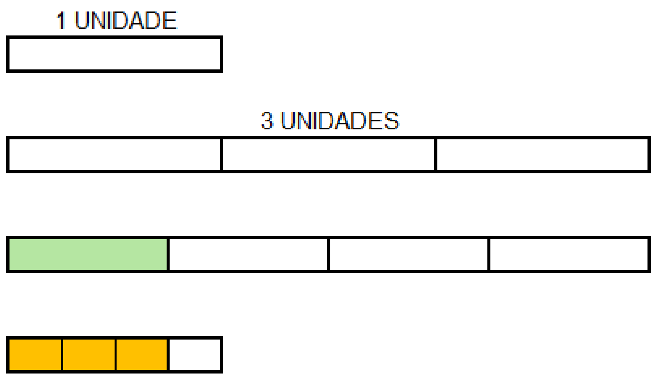
MATHS (2020, Parte 2) destaca que as frações 1/4 e 3/4 estão se referindo à mesma unidade. Esse detalhe por vezes passa despercebido dos alunos e mesmo de alguns professores. Por isso, não são poucos que afirmariam, sem titubear, que

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$$

Porém, a afirmação acima só é verdadeira se ambas as frações se referirem à mesma unidade. Esse conceito de unidade será muito importante na resolução dos problemas, como veremos no próximo capítulo.

As frações também estão relacionadas com a operação de divisão. Desse modo, se tomamos três unidades e as dividimos em quatro partes iguais, cada uma dessas quatro partes corresponderão a 3/4 da unidade. Vejamos a seguir (Figura 9).

Figura 9 - Frações não equivalentes com valores iguais



Fonte: Autor. Adaptada de MATHS (2020, Parte 2, 1 min 58 s)

Na Figura 9, sendo a unidade inicial *u* e a nova unidade *u'* de modo que

$$u' = 3u$$

a parte verde é 1/4 de *u'* enquanto a parte laranja corresponde a 3/4 de *u*. Como $u' = 3u$

$$\frac{1}{4}u' = \frac{1}{4} \times 3u = \frac{3}{4}u$$

o que comprova a igualdade.

Isso mostra que 1/4 pode ser igual a 3/4 desde que as unidades não sejam iguais.

MATHS (2020, Parte 2) vai mostrar a eficácia do modelo de comparação nos problemas com frações. Vejamos o exemplo a seguir.

Figura 10 - Modelo de comparação nas frações

Fonte: MATHS (2020, Parte 2, 3 min 30 s)

Podemos comparar A e B de duas formas:

1. Usando B como unidade

   Nesse caso, dizemos que A é o quíntuplo de B, ou seja,

$$A = 5B$$

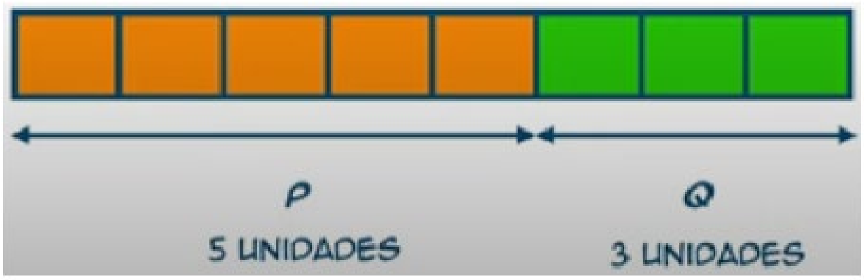
2. Usando A como unidade

   Nesse caso, dizemos que B é a quinta parte de A, ou seja,

$$B = \frac{1}{5} \times A$$

MATHS (2020, Parte 2) mostra uma outra situação de comparação (Figura 12).

Figura 11 - Expressando uma quantidade em relação à outra



Fonte: MATHS (2020, Parte 2, 4 min 5 s)

Nesse caso temos:

- Tomando P como unidade, podemos dizer que Q é $\frac{3}{5}$ de P. Ou seja,

$$Q = \frac{3}{5} \times P$$

- Tomando Q como unidade, podemos dizer que P é $\frac{5}{3}$ de Q. Ou seja,

$$P = \frac{5}{3} \times Q$$

- Se tomarmos a barra maior como unidade, podemos dizer que $P = \frac{5}{8}$ da barra maior e $Q = \frac{3}{8}$ barra maior.

Veremos a seguir como MATHS (2020, Parte 2) apresenta o conceito de razão e proporção usando os MBS.

Quando comparamos duas quantidades, essa comparação pode ser estabelecida por meio de uma subtração entre seus valores (uma é um tanto mais que outra) ou por meio de uma divisão (uma é tantas vezes a outra). Quando usamos a divisão para fazer a comparação estamos lidando com o conceito de razão.[3]

Em DANTE (2018, p.207), temos a seguinte

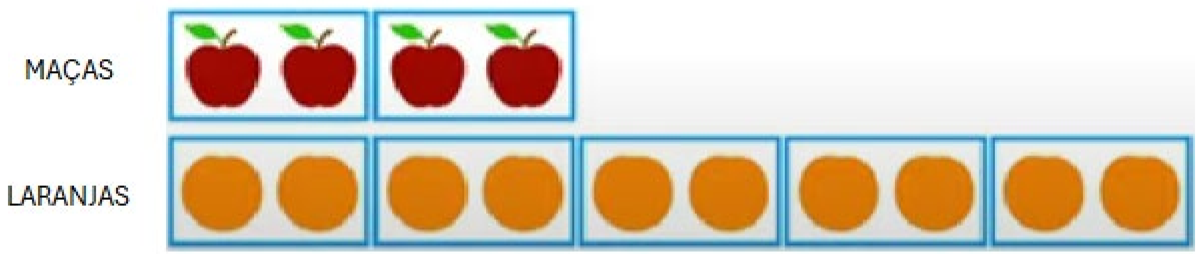
Definição

A razão entre dois números racionais a e b com $b \neq 0$ é o quociente de a por b expresso por $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ (lemos: *a* está para *b*), ou qualquer outra maneira equivalente.

Para comparar quantidades usando uma razão, elas precisam estar na mesma unidade.

Observando o esquema abaixo, temos quatro maçás e dez laranjas. Entretanto, como as duas quantidades podem ser agrupadas de duas em duas, estabelecendo 2 como unidade, podemos dizer que o número de maçãs é duas unidades e o número de laranjas é cinco.

Figura 12 - Ilustrando a razão entre quantidades



Fonte: MATHS (2020, Parte 2, 6 min 17 s)

Assim, a razão entre o número de maçãs e em relação ao de laranjas é 2:5 de modo que “a cada duas unidades de maçãs há cinco unidades de laranjas” MATHS (2020, Parte 2).

MATHS (2020, Parte 2) destaca que a unidade utilizada podia ter sido cada as quantidades individuais de frutas. Desse modo, a razão entre o número de maçãs e o número de laranjas seria $4 : 10$, que é equivalente a $2 : 5$.

---

[3] Como observou o professor Cesar Felipe, no estudo das progressões o nome “razão” é utilizado tanto para uma diferença (no caso da PA) quanto para um quociente (no caso da PG). É interessante que em ANTONOV, VYGODSKY, *et al*., (1982), aquilo que chamamos “razão da progressão aritmética” é apresentado como *common diference of arithmetic progression*, e a nossa “razão da progressão geométrica” é *common ratio of geometric progression* (p.32).

Será que seria útil, para evitar confusão, adotarmos o termo “diferença comum” ou “diferença constante” quando lidamos com as progressões aritméticas?

MATHS (2020, Parte 2) aponta que a razão entre duas quantidades A e B não é a mesma que a razão entre B e A. De fato, na razão entre A e B, usamos B como unidade, de modo que A é expresso em função de B. No outro caso, A é usado como unidade e B é expresso em termos de A.

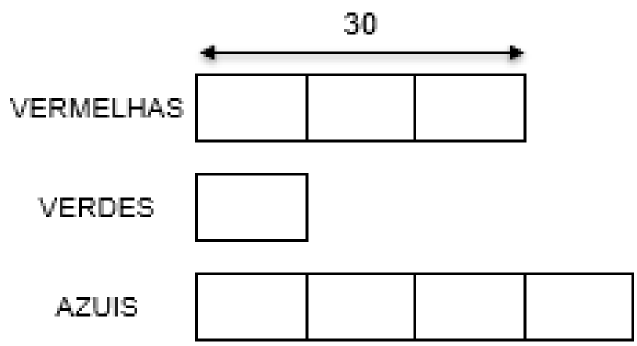
Passa-se a resolver o seguinte exemplo:

A razão entre o número de bolas vermelhas, verdes e azuis é $3:1:4$. Se há 30 bolas vermelhas, quantas são as bolas azuis? (tradução minha)

O exemplo é resolvido estabelecendo primeiro quem será a unidade. A escolha recai sobre a quantidade menor de bolas, que é encontrada analisando as razões. Como para cada 3 bolas vermelhas há 1 bola verde e 4 azuis, a quantidade menor é de bolas verdes.

Essa quantidade será representada por um retângulo, e assim, o número de bolas azuis será representada por 4 retângulos e o de bolas vermelhas, por 3 retângulos. E como temos 30 bolas vermelhas, o problema está modelado.

Figura 13 - Modelo de divisão proporcional



Agora podemos garantir que um retângulo vale $30 \div 3 = 10$. O número de bolas azuis corresponde a quatro retângulos. Logo, há $4 \times 10 = 40$ bolas azuis.

A seguir, MATHS (2020, Parte 2) mostra um problema de razão usando o modelo parte-todo.

Se temos uma barra dividida em 7 unidades, essa barra é formada por outras duas: uma com 4 unidades e outra com 3 unidades. Para representar o tamanho de uma parte em relação à outra, podemos usar o conceito de razão. Podemos dizer que a barra maior está dividida pelas duas menores na razão $4:3$.

Figura 14 - Modelo de barras na divisão proporcional

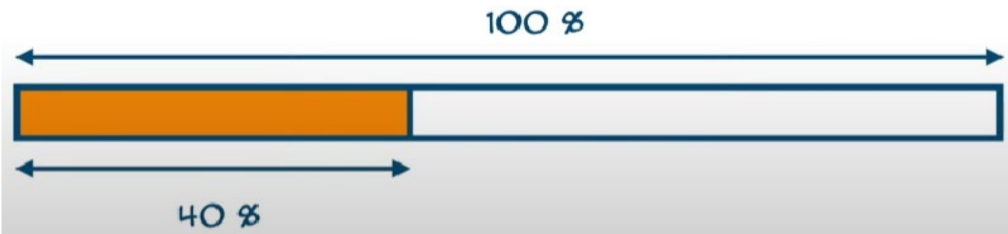
Fonte: MATHS (2020, Parte 2, 8 min 37 s)

Essa maneira de visualizar o conceito de razão é muito útil ao resolver problemas de divisão proporcional, que podem aparecer em Aritmética ou em Geometria, já que vários resultados geométricos são apresentados usando a linguagem de razões. Por exemplo, quando o baricentro divide cada mediana na razão $2:1$ (a partir de cada vértice do triângulo).

Vejamos agora como os MBS são usados nos problemas de porcentagem em MATHS (2020, Parte 2).

Sabemos que uma parte de um todo pode ser representada como uma fração e, portanto, também como uma porcentagem. Quando um inteiro é segmentado em 100 pedaços iguais, cada pedaço representa um centésimo do conjunto, equivalente a 1% do valor total. Esse conceito pode ser ilustrado através do método de representação parte-todo.

Figura 15 - Representando porcentagem no modelo de barras



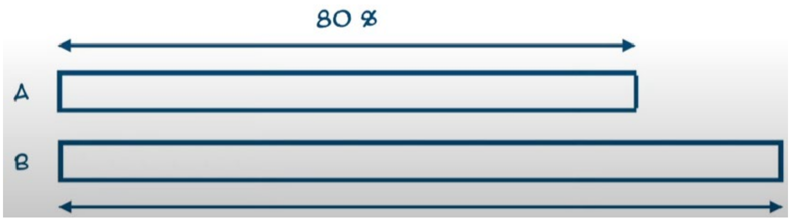
Fonte: MATHS (2020, Parte 2, 11 min 58 s).

No desenho acima, o modelo mostra que a parte laranja é 40% do todo. O todo, a barra maior, é usado como base de comparação, constituindo-se, portanto, em 100%. Podemos dizer que o todo corresponde a 100 unidades e a parte laranja, de 40 unidades. Ou seja,

$$\frac{40}{100} = 40\%$$

MATHS (2020, Parte 2) passa a mostrar que o modelo de comparação pode ser usado em situações que envolvem a porcentagem. No modelo abaixo temos duas quantidades A e B, de forma que A é 80% de B.

Figura 16 – Porcentagem baseada no valor maior



Fonte: MATHS (2020, Parte 2, 14 min 23 s).

Assim, tomamos B como base de comparação, ou seja, B corresponde a 100%. Quando A é comparado a B, dizemos que A corresponde a 80% de B. Isso significa que A vale 80 unidades das 100 unidades em que B foi dividido.

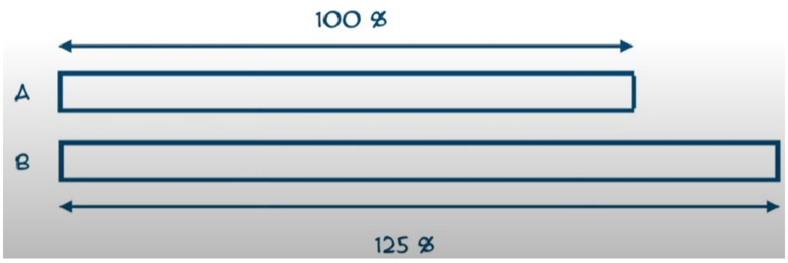
Desse modo:

$$A = 80\% \text{ de } B$$

e podemos dizer, também, que A é 20% menor que B.

MATHS (2020, Parte 2) mostra agora o mesmo modelo, mas com uma alteração na base de comparação. Nesse novo caso, A é tomado como base, 100% e B é "medido" em relação a A.

Figura 17 – Porcentagem baseada no valor menor



Fonte: MATHS (2020, Parte 2, 14 min 58 s)

Neste caso, B é 125% de A. Significa que A foi dividido em 100 partes iguais e 125 dessas partes correspondem a B. Então podemos dizer:

$$\text{B} = 125\% \text{ de A}$$

ou, equivalentemente, que A é 25% menos que B.

A relação acima pode ser mostrada, como sugere MATHS (2020, Parte 2) a partir de uma equivalência entre frações, decimais e porcentagens.

$$80\% = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

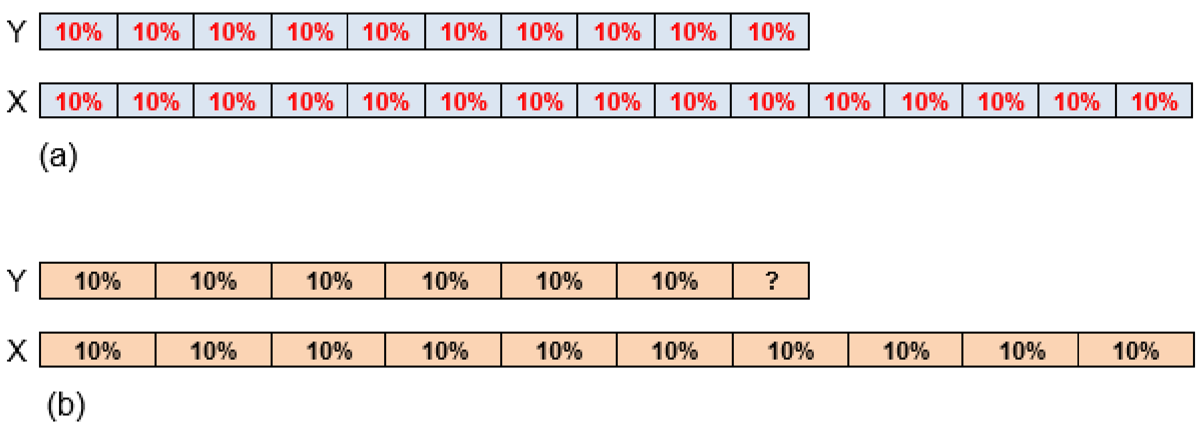
$$125\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

MATHS (2020, Parte 2) chama a atenção para um fato muito importante e que causa confusão em pessoas com pouca educação Matemática.

Muitos diriam que se A é 20% menos do que B então B é 20% mais que A. Mas esse equívoco fica comprovado nas igualdades acima.

Os MBS também podem ser usados para mostrar isso. Por questão de comodidade, vamos mostrar visualmente que se X é 50% mais que Y isso não significa que Y é 50% menos que X.

Figura 18 - Usando os MBS para comparar porcentagens



Fonte: O autor

Vemos na Figura 18a que X tem 50% mais que Y, sendo Y a base de comparação (100%). Cada 10% significam 10% de Y. Por outro lado, na Figura 18b, a mesma quantidade Y corresponde a algo entre 60 e 70% de X (que foi tomado agora como 100%).

Isso pode ser confirmado considerando que se X $= 150\% = \frac{150}{100}$ de Y, ou seja

$$X = \frac{3}{2} Y$$

então

$$Y = \frac{2}{3}X$$

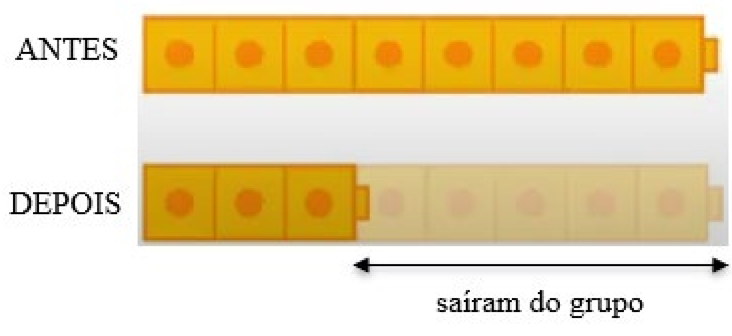
Portanto, sendo $\frac{2}{3} \cong 66{,}7\%$, tem-se Y = 66,7% X.

Fica bem visível no modelo que cada 10% na Figura 18a é menor que cada 10% na Figura 18b. A razão para isso é o fato de, em cada caso, estarmos nos referindo a uma base de cálculo diferente.

Aos 52 segundos de MATHS (2020, Parte 3), vemos como os MBS podem ser usados para resolver problemas que apresentam situações em que ocorre uma mudança. “Nesses problemas, podemos desenhar um modelo que representa a situação ‘antes’ e um modelo que representa a situação ‘depois’ para nos ajudar a visualizar a relação entre as duas situações” MATHS (2020, Parte 3, tradução minha). Como mostrado no vídeo, a mudança mais básica que aparece nos problemas leva em conta três elementos:

1) O valor inicial de uma quantidade.
2) A mudança, que pode ser um aumento ou uma diminuição.
3) O valor final da quantidade.

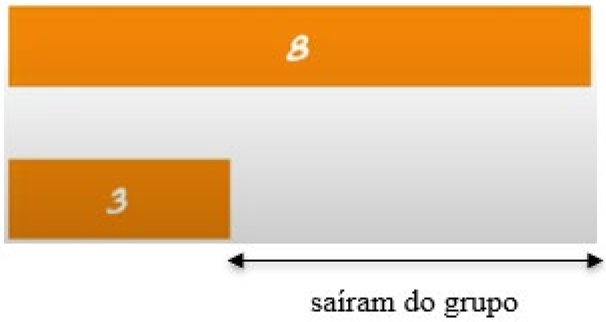
No exemplo mostrado em MATHS (2020, Parte 3, 1m 26 s), temos uma situação em que há oito pessoas em um grupo e cinco delas saem do grupo. No primeiro ano primário, os alunos podem representar essa situação usando blocos encaixáveis. Depois, os blocos são substituídos por retângulos para fazer o modelo de barra como mostrado a seguir.



Fonte: MATHS (2020, Parte 3, 1 min 56 s)

A diferença entre as quantidades antes e depois representa a mudança.

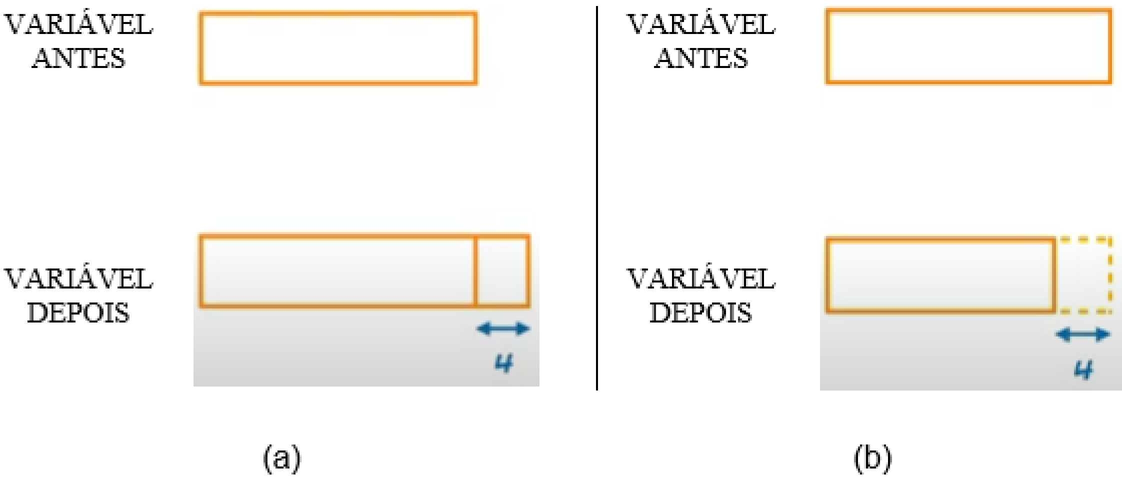
Mais à frente os blocos são substituídos por retângulos, como se mostra abaixo, caracterizando os MBS.



Fonte: Adaptada de MATHS (2020, Parte 3, 2 min)

MATHS (2020, Parte 3) vai mostrar como o modelo antes-depois pode ser usado na resolução de problemas com frações. Ao resolver esses problemas, devemos observar que se uma quantidade aumenta ou diminui, esse aumento ou redução deve ser representado por um aumento ou redução no comprimento da barra que representa essa quantidade. Por exemplo, a Figura 19a está representado um aumento de 4 unidades no valor da variável, e a Figura 19b, uma redução de 4 unidades.

Figura 19 - Modelo antes-depois nas frações



Fonte: MATHS (2020, Parte 3, 6 min 53 s)

A mudança também pode ocorrer em relação à quantidade inicial, como quando uma quantidade é reduzida pela metade. Isso é representado como se mostra a seguir.

Fonte: MATHS (2020, Parte 3, 7 min 4 s)

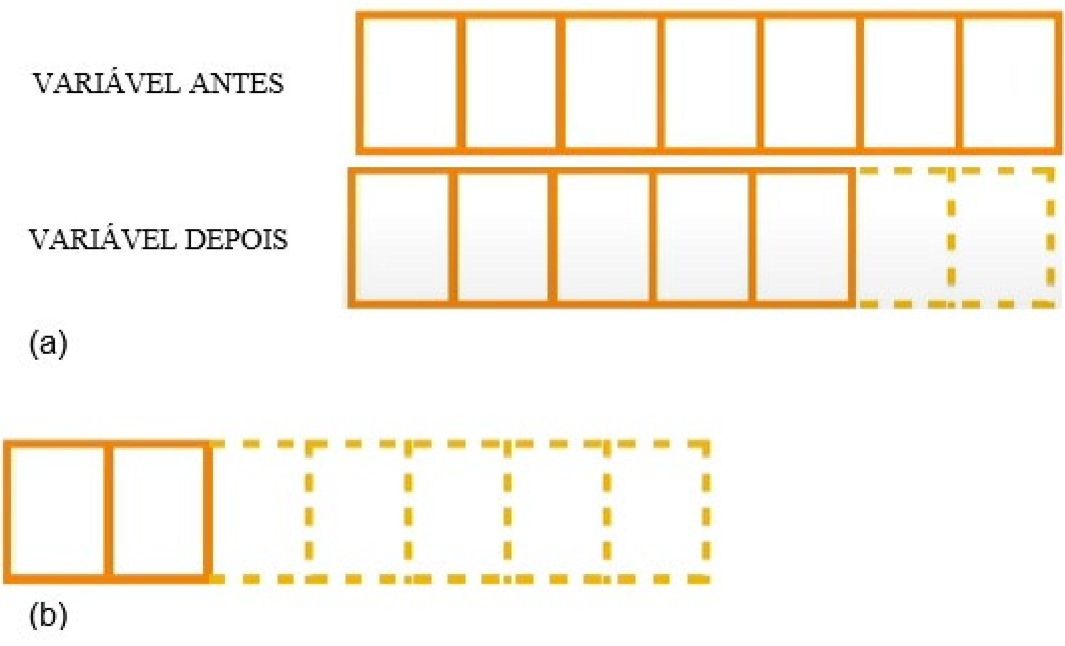
Às vezes, acontece mais de uma mudança. MATHS (2020, Parte 3) apresenta o seguinte exemplo:

Suponha que temos uma quantidade inicial. Primeiro removemos 2/7. Do que resta, removemos 3/5. Quanto resta no final?

Como vemos na Figura 20a, a variável é representada por uma barra, e como a primeira mudança consiste em remover 2/7, dividimos a barra inicial em sete partes iguais e removemos duas. Restam 5 partes iguais. A segunda mudança, mostrada pela Figura 20b, envolve remover 3/5, ou seja, das 5 partes iguais vamos remover 3. Por coincidência, já temos 5 partes iguais. Então, podemos remover 3 sem maiores problemas, restando apenas 2 partes iguais.

Essas 2 partes iguais representam 2/7 da barra inicial. Essa é a resposta do problema.

Figura 20 - Modelos mostrando duas mudanças seguidas



Legenda: (a) Variável antes e depois de ter sido reduzida em 2/7 (7 min 50 s); (b) Variável já reduzida sofrendo uma nova redução de 3/5 (8 min)

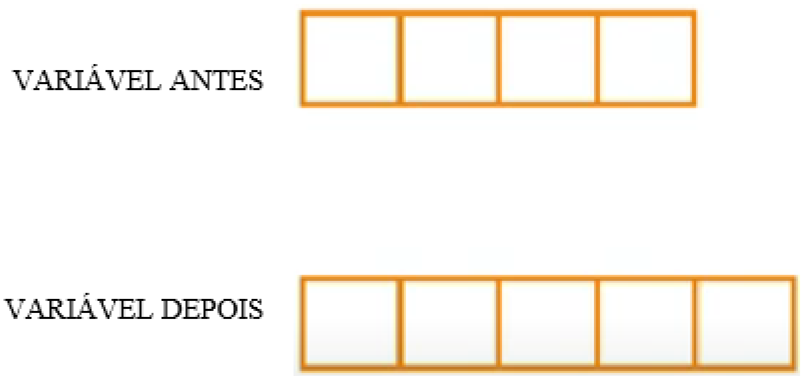
Fonte: (a) MATHS (2020, Parte 3)

MATHS (2020, Parte 3) passa a mostrar o modelo antes-depois em problemas de porcentagem.

Costumamos usar uma porcentagem para descrever uma mudança. Podemos dizer que uma quantidade aumentou em 25%, como mostra o modelo abaixo.

Fonte: MATHS (2020, Parte 3, 11 min 55 s)

A mesma situação poderia ter sido representada como mostrado abaixo. Neste caso, como sabemos que 4 vezes 25 é 100, então a barra que representa 100% pode ser dividida em quatro partes iguais que representam 25% cada. Então, se houve um aumento de 25%, isso significa que a situação depois da alteração é composta por cinco partes de valor 25%.



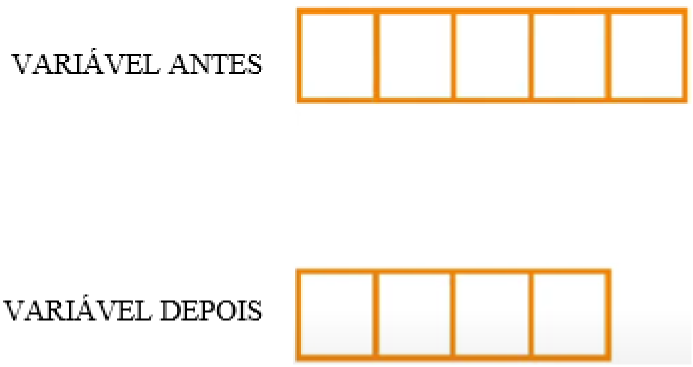
Fonte: MATHS (2020, Parte 3, 12 min 5 s)

Pensando em uma redução de 20%, a representação é mostrada na figura a seguir.

Fonte: MATHS (2020, Parte 3, 12 min 25 s)

Ou, considerando que 5 vezes 20 é 100, a barra que representa 100% pode ser dividida em 5 partes iguais que representam 20% cada. Já que houve uma diminuição de 20%, isso significa que a situação posterior é composta por quatro partes de valor 20%, como mostra a Figura 21.

Figura 21 - Porcentagem no modelo antes-depois



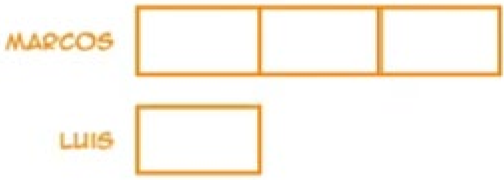
Fonte: MATHS (2020, Parte 3, 12 min 35 s)

OBSERVAÇÃO: Alguns alunos podem abordar esses problemas de antes-depois usando modelos parte-todo ou o modelo de comparação. Não importa. O importante é que o aluno seja capaz de atuar frente ao problema sendo capaz de compreender a estratégia que preferiu usar.

Em MATHS (2020, Parte 4) são tratados problemas mais complexos. Nestes casos veremos situações em que há uma mudança em mais de uma quantidade. Duas estratégias serão usadas: mover partes e cortar partes. Um exemplo de aplicação é o seguinte:

Marcos tem três vezes os quadrinhos que Luís tem. Depois que Marcos dá 14 quadrinhos para Luís, ambos ficam com a mesma quantidade de quadrinhos. Quantos quadrinhos Luís tinha antes e depois?

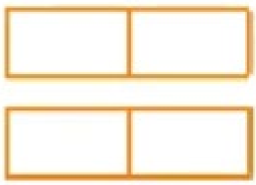
Marcos tem 3 vezes os quadrinhos de Luís. Essa situação pode ser representada com o modelo abaixo.



Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 2 min 3 s)

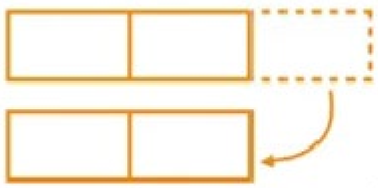
Essa é a situação antes. Porém, depois que Marcos dá 14 quadrinhos a Luís, ambos ficam com quantidades iguais (Figura 22).

Figura 22 – Estratégia “movendo a barra”



Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 2 min 11 s)

Repare que para que a condição mostrada acima se cumpra, devemos passar uma parte de Marcos a Luís, como mostra a figura abaixo.



Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 2 min 24 s)

De acordo com o enunciado, uma parte representa 14 quadrinhos. Assim, o problema já está modelado e uma parte vale 14.

Antes de receber algo de Marcos, Luís tinha 1 parte. Então ele tinha 14 quadrinhos. Depois que Marcos deu os quadrinhos, Luís tem 2 partes, ou seja, 2×14

= 28 quadrinhos. Portanto, antes, Luis tinha 14 quadrinhos e depois tem 28 quadrinhos.

MATHS (2020, Parte 4) passará a discorrer sobre a segunda estratégia: cortar partes. É apresentado o seguinte problema:

> Santiago gasta 1/3 do seu dinheiro em adesivos e 3/4 do que sobrou em material escolar. Um total de € 70 foi gasto em adesivos e material escolar. Quanto dinheiro ele tinha no início?

Um possível modelo é o seguinte.

Santiago tinha uma quantia desconhecida. Representemos essa quantia por uma barra.

Figura 23 - Estratégia "cortar partes"

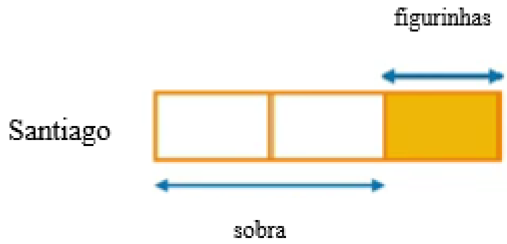
Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 3 min 44 s)

É dito que 1/3 do seu dinheiro é gasto em figurinhas. Então dividimos a barra em 3 partes iguais e uma delas representa o que foi gasto.

Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 3 min 46 s)

Como representar o que foi gasto em material escolar?

Vemos que temos 2 partes restantes das 3 em que dividimos a barra.



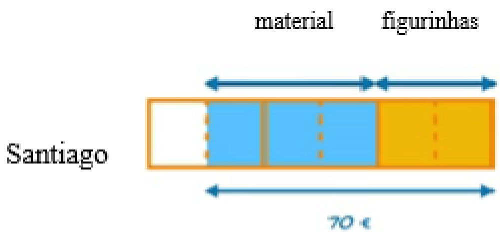
Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 4 min 8 s)

Como 3/4 do que sobrou foi gasto, temos que dividir a sobra em quatro partes. Para isso, podemos dividir cada uma das partes em duas e assim teremos 4 partes. Essa é a ideia de cortar a barra. (Figura 24)

Figura 24 – Estratégia “cortar a barra”

Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 4 min 29 s)

Sabemos que três dessas partes representam o que foi gasto em material escolar (figura abaixo).



Fonte: MATHS (2020 - Parte 4, 4 min 44 s)

Como o gasto total foi de 70 euros, vemos que isso representa 5 partes.

5 partes correspondem a 70 euros
1 parte corresponde a $70 \div 5 = 14$ euros

A quantia de Santiago corresponde a 6 partes. Portanto, Santiago tinha $6 \times 14 = 84$ euros.

MATHS (2020, Parte 4) observa:

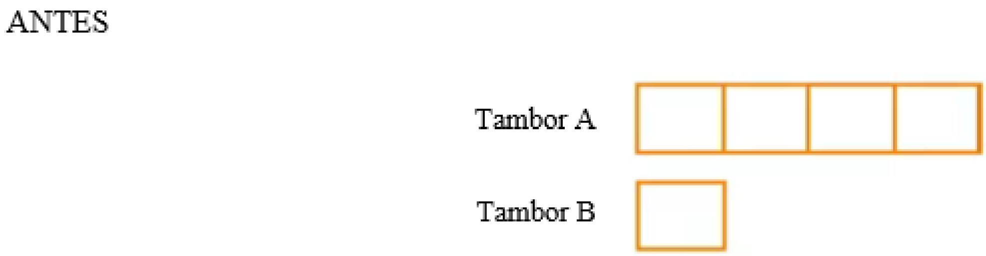
> Normalmente, os alunos tentam aplicar o que acabaram de estudar ao problema que precisam resolver. Ou seja, se estão estudando divisão, tentarão aplicar a divisão ao problema, mesmo que o problema não precise disso. Mas os problemas desempenham um papel importante em ajudar os alunos a consolidar habilidades básicas. Por exemplo, neste caso, eles estão gerando frações equivalentes quando estão cortando a barra. MATHS (2020, Parte 4, 5 min 11 s - tradução minha)

Por vezes, como indicado em MATHS (2020, Parte 4), será necessária uma combinação de estratégias. Ele dá o seguinte exemplo:

Temos dois recipientes de água A e B. No recipiente A há 4 vezes a quantidade de água que está no recipiente B. Após despejar 18 litros do recipiente A para B, os dois recipientes contêm a mesma quantidade de água. Qual era o volume de água no tambor A no início?

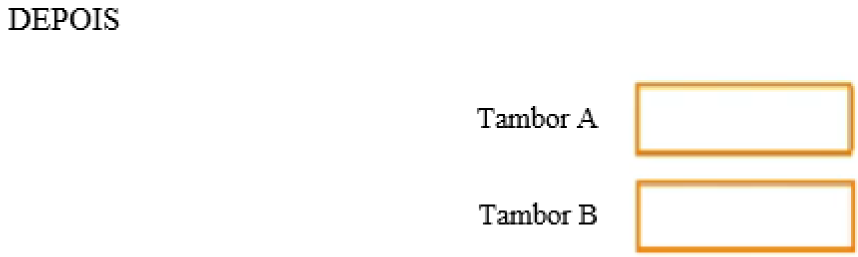
Temos dois recipientes, A e B. Não sabemos a quantidade de água de qualquer deles, mas com certeza B tem menos, pois a quantidade de água em A é 4 vezes a quantidade em B (Figura 25)

Figura 25



Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 6 min 31 s)

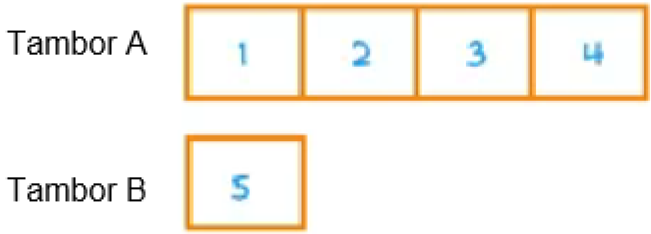
Após despejar 18 litros do tambor A para o B, ambos ficam com a mesma quantidade de água. Podemos representar a situação com o modelo abaixo.



Fonte: MATHS (2020 - Parte 4, 6 min 34 s)

A chave para resolver o problema é encontrar uma relação entre as duas situações, conforme mostra MATHS (2020, Parte 4), e essa relação é que ao todo, antes, temos 5 retângulos, como mostra a figura abaixo.

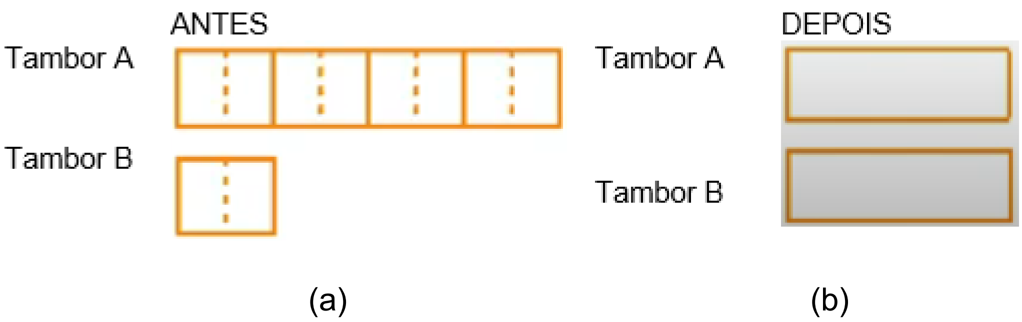
Figura 26



Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 6 min 52 s)

Como a água foi transferida de um tambor para outro, após a transferência a quantidade total de água será a mesma. Portanto, depois ainda teremos 5 retângulos. Como as quantidades nos dois tambores ficam iguais, a quantidade de água em cada tambor equivale a 2 retângulos e meio. MATHS (2020, Parte 4) destaca que a expressão “e meio” é a pista para resolver o problema.

Figura 27



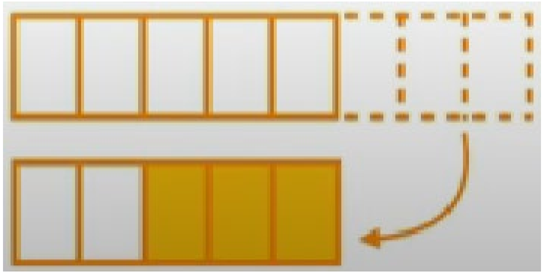
Legenda: (a) Cada um dos cinco retângulos é cortado ao meio (7 min 6 s); (b) Situação em que as quantidades são iguais (7 min 6 s)

Fonte: MATHS (2020, Parte 4)

Se dividirmos cada retângulo na Figura 26 ao meio, teremos a situação como a mostrada na Figura 27a. Essa é a estratégia de “cortar a barra”.

Para chegar à situação atingida na Figura 27b, devemos mover três partes de A para B. Eis a estratégia de mover partes!

Figura 28 - Combinando as estratégias "cortar" e "mover" barras



Fonte: MATHS (2020, Parte 4, 7 min 14 s)

Sabemos que transferimos 18 litros do tambor A no B. Portanto, as três movidas partes representam 18 litros.

Então:

3 partes correspondem a	18 litros
1 parte corresponde a	$18 \div 3 = 6$ litros

Como o tambor A é formado por 8 dessas partes, isso corresponde a $8 \times 6 = 48$ litros. Portanto, no tambor A havia inicialmente 48 litros.

Os exemplos anteriores servirão como base para os exercícios que serão resolvidos no próximo capítulo.

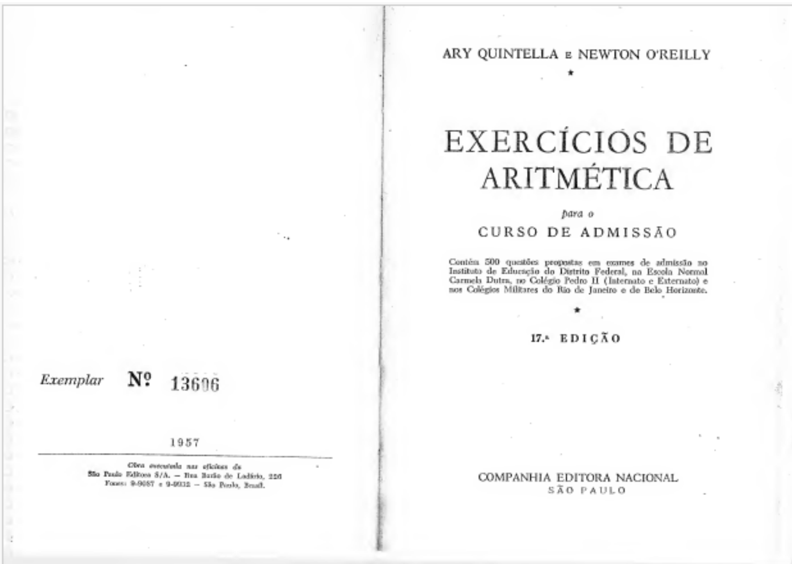
4. Resolvendo problemas do primeiro grau com auxílio do método de barras

No capítulo anterior, vimos como os MBS podem ser utilizados para resolver alguns tipos de problemas. Aqui vamos exemplificar o método resolvendo alguns problemas selecionados de livros brasileiros. Vamos resolver problemas aritméticos (sem recurso de equações) e algébricos, mas sempre apoiados no método das barras. Os problemas aritméticos foram selecionados de um livro voltado para preparar alunos para o antigo “exame de admissão”. Já os problemas “algébricos” foram escolhidos de livros atuais. As referências bibliográficas serão dadas no texto.

4.1 Problemas clássicos de aritmética

Os problemas resolvidos a seguir foram retirados de Quintella; O’Reilly (1957)

Figura 29 - Capa de "Exercícios de Aritmética"



Exemplar Nº 13606

1957

ARY QUINTELLA E NEWTON O'REILLY

EXERCÍCIOS DE ARITMÉTICA

para o

CURSO DE ADMISSÃO

Contém 500 questões propostas em exames de admissão no Instituto de Educação do Distrito Federal, na Escola Normal Carmela Dutra, no Colégio Pedro II (Internato e Externato) e nos Colégios Militares do Rio de Janeiro e de Belo Horizonte.

17.ª EDIÇÃO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Fonte: Arquivo pessoal do autor

Problema 1: Sendo 867 a soma de dois números e 253 a diferença, quais são eles? (Problema 1, página 29)

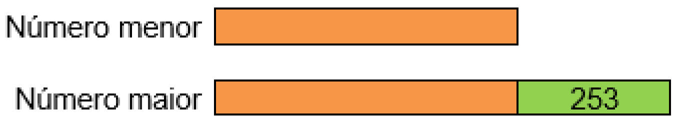
Resolução:

Esse tipo de problema era resolvido “de memória”: o número maior é dado pela semissoma dos valores dados no problema e o menor é dado pela semidiferença dos valores. Assim,

Número maior $=867+2532=11602=560$

Número menor $=867\text{-}2532=6142=307$

Um aluno que tenha um mínimo domínio da álgebra não terá dificuldades em formar um sistema de equações. No entanto, usando os MBS, esse clássico problema pode ser resolvido sem recursos mais “avançados” e de modo que a solução faça sentido para os alunos. Vejamos:



O número menor será a unidade. Como a soma corresponde a duas unidades e mais 253, retirando 253 da soma teremos duas partes. Logo, 2 partes equivalem a 867 – 253 = 614.

2 partes equivalem a 614

1 parte equivale a $614\div2=307$

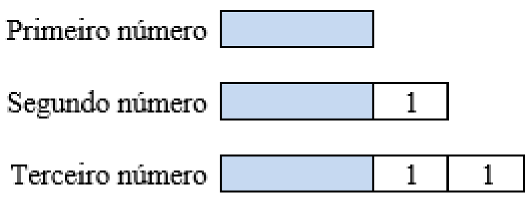
Resposta: O número menor vale 307 e o maior vale 560.

O problema a seguir envolve a noção de números consecutivos.

Problema 2: A soma de três números inteiros e consecutivos é 1353. Calcular esses números. (Problema 4, p.29)

Resolução:

Como os números são consecutivos, a diferença entre ele é de uma unidade. Vamos usar a representação de barras.



Tomando o primeiro número como unidade, a soma corresponde a 3 unidades e mais 3. Sendo a soma 1353, removendo 3 de 1353, sobram três partes iguais, correspondentes ao primeiro número. Portanto:

Primeiro número = (1353 – 3) ÷ 3 = 450

Segundo número = 450 + 1 = 451

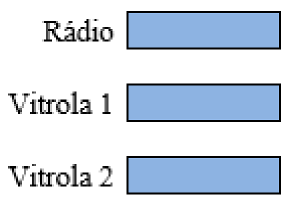
Terceiro número = 450 + 2 = 452

Resposta: Os números são 450, 451 e 452.

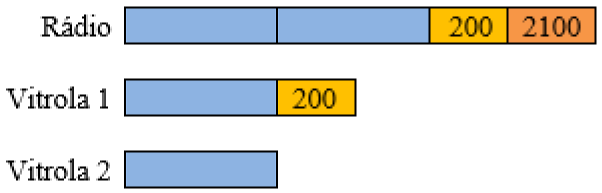
Problema 3: Um rádio e duas vitrolas custam Cr$ 6.900,00. Aquele custou Cr$ 2.000,00 mais que as vitrolas e uma destas vale Cr$ 200,00 mais que a outra. Calcular o preço de cada um. (Problema 11, p.30)

Resolução:

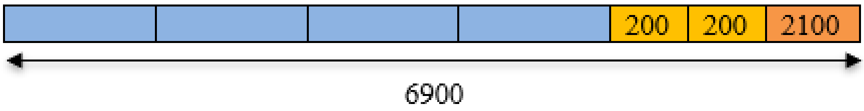
Vamos começar representando os valores dos "personagens" do problema usando barras do mesmo tamanho e vamos ajustando.



De acordo com o enunciado, o rádio custou 2100 mais que as vitrolas e uma delas vale 200 mais que a outra. Na escolha da unidade, podemos observar as relações entre os valores. Tomemos uma das vitrolas (Vitrola 2) como unidade. Então temos:



O preço da Vitrola 2 é a unidade. Como o total gasto foi de 6900, então temos podemos escrever:



O preço da vitrola 2 pode ser encontrado subtraindo de 6900 a soma 200 com 200 e 2100, dividindo-se, depois, o resultado por 4. Ou seja:

Vitrola 2 $=$ (6900 – 2100 – 2 $\times$ 200) ÷ 4 = 4400 ÷ 4 = 1100

A partir daí é imediato encontrar os outros valores:

Vitrola 1 $=$ 1100 + 200 = 1300

Rádio $=$ 2 $\times$ 1100 + 200 + 2100 = 4500

Resposta: Uma das vitrolas custou 1100, a outra custou 1300 e o rádio custou 4500.

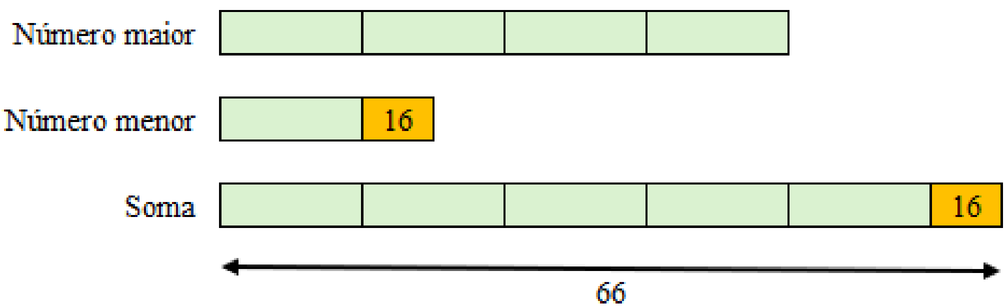
Vejamos mais dois problemas da mesma página.

Problema 4: É igual a 66 a soma de dois números. O menor é igual à quarta parte do maior, mais 16. Quais são os números? (Problema 17, p.30)

Resolução:

Vamos usar o modelo de comparação.

Representando o número menor por uma barra, o número maior será representado por 4 barras e mais 16.



A soma é equivalente a cinco barras e mais 16. Portanto:

Número menor = (66 – 16) ÷ 5 = 10

Número maior = 4 × 10 + 16 = 56

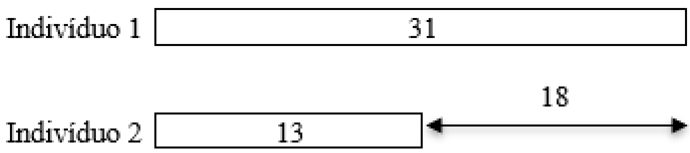
Resposta: O número menor é 10 e o maior é 56.

Problema 5: Um indivíduo tem 31 anos e outro, 13. Há quantos anos a idade do primeiro foi o quádruplo da do segundo? (Problema 16, p.30)

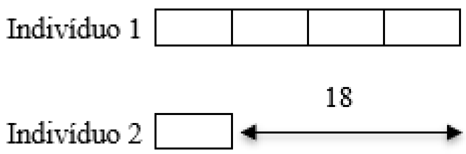
Resolução:

Aqui temos momentos diferentes: agora e antes.

AGORA



ANTES



A diferença entre as idades permanece a mesma. No caso “antes”, essa diferença equivale a três vezes a idade do indivíduo 2. Ou seja:

Idade do indivíduo 2 (antes) = 18 ÷ 3 = 6 anos.

Idade do indivíduo 1 (antes) = 4 × 6 = 24 anos.

O tempo passado até a época “agora” foi de $31-24$, ou seja, 7 anos.

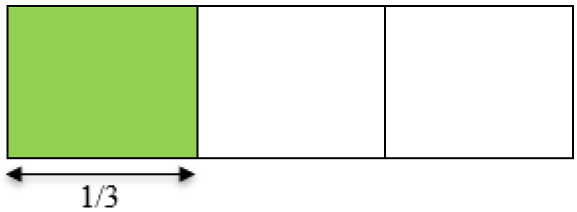
Resposta: A idade do primeiro foi o quádruplo da idade do segundo há sete anos.

Veremos agora alguns problemas envolvendo frações.

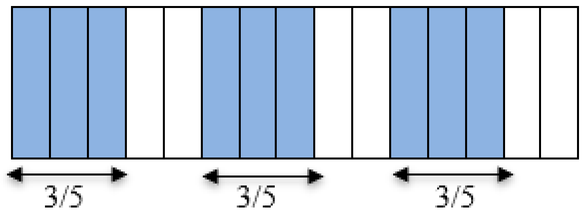
Problema 6: O terço de um número adicionado aos seus 3/5 é igual a 28. Calcule o número. (Problema 15, p.74)

Resolução:

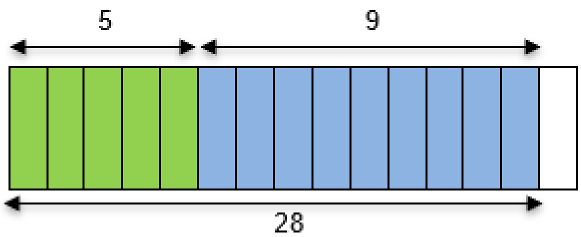
Representamos o número e sua terça parte.



Para representar 1/5 do número, vamos dividir cada terça parte em cinco partes iguais. Assim, o número fica dividido em 15 partes iguais. Para encontrar 3/5 do número devemos tomar três das cinco partes em que foi dividido cada terço. Ao todo são nove partes das quinze.



Ou seja, foram tomadas quatorze partes iguais.



Logo,

14 unidades correspondem a 28

1 unidade corresponde a $28 \div 14 = 2$

15 unidades correspondem a $15 \times 2 = 30$

O número é formado por 15 unidades. Logo, ele é 30. Este valor também poderia ter sido encontrado somando 28 com a parte restante, que vale 2.

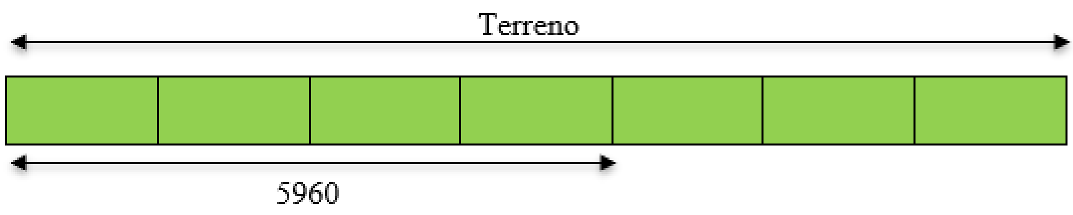
Não vamos nos preocupar com a verificação.

Resposta: O número é 30.

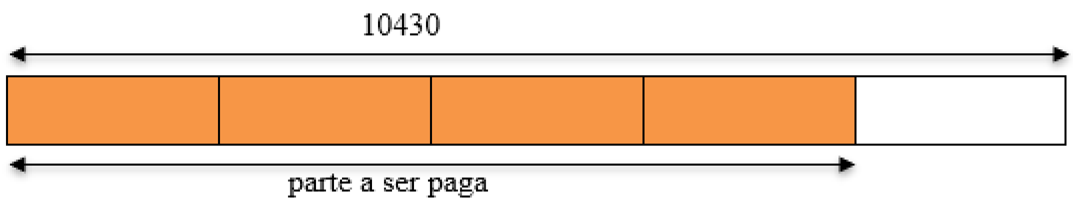
Problema 7: Rosali adquiriu 4/7 de um terreno por Cr$ 5.960,00. Quanto pagaria se adquirisse 4/5? (Problema 10, p.74)

Resolução:

Considerando a primeira frase no enunciado do problema, podemos escrever:



Cada uma das sete partes em que o preço do terreno foi dividido vale $5960 \div 4 = 1490$. Então, o preço do terreno é $7 \times 1490 = 10430$.



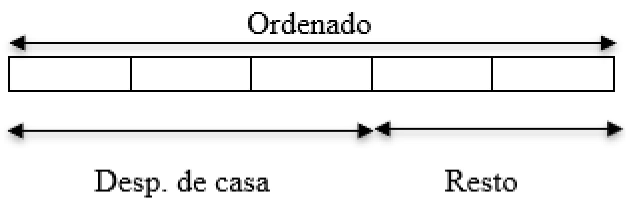
A parte que seria paga é dada por $10430 \div 5 \times 4 = 8344$

Resposta: Pagaria 8344 cruzeiros.

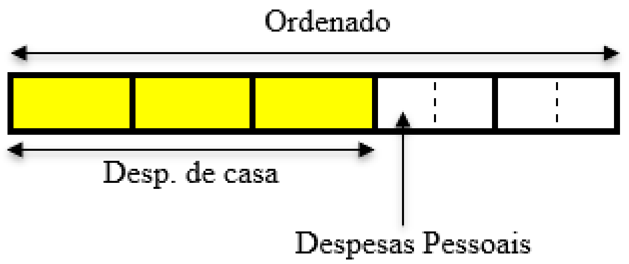
Problema 8: Uma pessoa gasta 3/5 de seu ordenado com despesas de casa e 1/4 do resto com despesas pessoas. Economiza Cr$ 300,00. Qual o ordenado? (Problema 56, p.78)

Resolução:

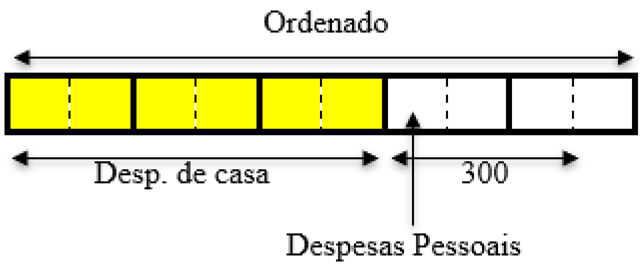
O problema pode ser representado como mostra o esquema abaixo.



Como o gasto com despesas pessoais foi de 1/4 do resto, devemos dividir a parte restante em quatro partes iguais.



Fica claro que o gasto com despesas pessoais se torna a unidade conveniente. Para isso, vamos dividir cada quinta parte do ordenado em duas partes iguais.



Então:

3 unidades correspondem a 300 cruzeiros

1 unidade corresponde a $300 \div 3 = 100$ cruzeiros

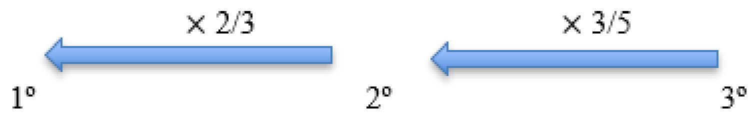
10 unidades correspondem a $100 \times 10 = 1000$ cruzeiros

Resposta: O ordenado é de 1000 cruzeiros.

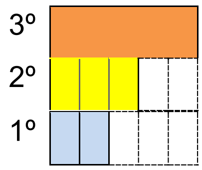
Problema 9: A soma de três números é 30. O primeiro corresponde aos 2/3 do segundo e este, aos 3/5 do terceiro. Calcular o produto destes três números. (Problema 27, p.75)

Resolução:

As relações entre os três números são mostradas abaixo.



A representação mais conveniente é começar com o terceiro número e, a partir dele, representar o segundo. Assim, o segundo número é representado dividindo o terceiro em cinco partes e tomando duas delas. Já o primeiro é representado dividindo o segundo em três partes (coincidentemente já temos isso) e tomando duas delas.



Assim, a unidade natural é a quinta parte do 3º número (o retângulo azul). Então podemos escrever que o terceiro número equivale a 5 unidades, o segundo equivale a 3 unidades e o primeiro, a duas.

Logo,

10 unidades correspondem a 30

1 unidade corresponde a $30 \div 3 = 10$

Portanto, os números valem 6, 9 e 15, e seu produto vale 810.

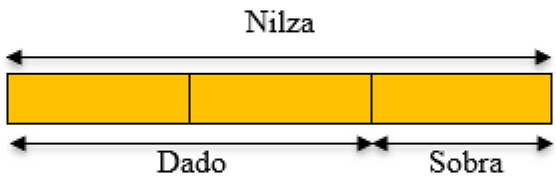
Resposta: O produto dos números vale 810.

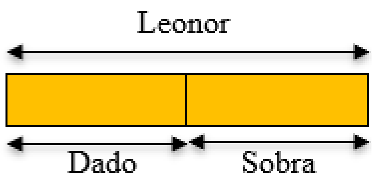
Para encerrar essa coletânea não exaustiva de situações problema, temos o seguinte desafio aos alunos.

Problema 10: Nilza e Leonor receberam 35 kg de castanhas do Pará. A primeira deu 2/3 de sua parte aos irmãos e a segunda, 1/2 aos pais, ficando, assim, ambas com quantidades iguais. Quantos quilogramas haviam sido entregues a cada uma? (Problema 84, p.81)

Resolução:

Vamos resolver começando com o fato de que após as doações, ambas ficam com quantidades iguais. Não vamos nos preocupar com quem tinha mais.





Nilza tinha três unidades e Leonor, duas. Ao todo, tinham cinco. Logo:

5 unidades correspondem a 35 kg

1 unidade corresponde a $35 \div 5 = 7$ kg

Portanto, Nilza tinha 3 unidades (21 kg) e Leonor tinha 2 unidades (14 kg).

Resposta: 21 kg e 14 kg, respectivamente.

Observação: Como os problemas anteriores podem ser resolvidos por alunos do 5º ano, é fundamental enfatizar no processo de resolução as expressões numéricas que conduzem à resposta. A importância dessa prática é que ajudará a construir o pensamento algébrico dos alunos ao mostrar as relações que existem entre os valores dados no enunciado.

4.2 Problemas de livros atuais

Passaremos agora a resolver problemas de livros atuais voltados para o 7º ano e que tratam, principalmente, de frações, proporcionalidade e porcentagem.

Os modelos de barras serão usados como apoio ao equacionamento dos problemas e veremos que com o uso desse recurso, a escolha das incógnitas será facilitada, e as equações dos problemas se tornarão mais simples.

As obras escolhidas foram:

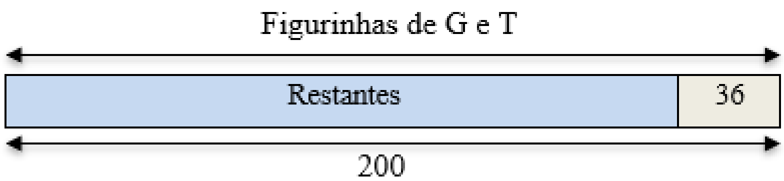
- GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática: 7o ano – Editora FTD – 2018
- MODERNA, Editora (Org.). Araribá mais: matemática: manual do professor. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2018.
- DANTE, Luiz Roberto. Teláris matemática, 7º ano: ensino fundamental, anos finais. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2018.

4.2.1 Problemas selecionados de JÚNIOR e CASTRUCCI (2018)

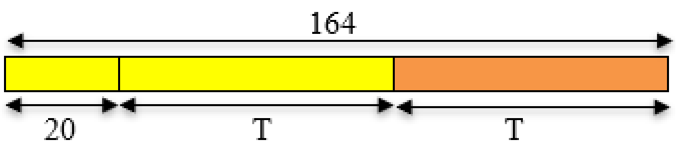
Problema 11: Guilherme e Tiago compraram 200 figurinhas. Dessas, 36 foram rasgadas e não puderam ser aproveitadas. Das figurinhas restantes, Guilherme ficou com 20 a mais que Tiago. Com quantas figurinhas cada um ficou? (Problema 2, p. 159)

Resolução:

A situação inicial pode ser representada da seguinte forma:



As não rasgadas são 200 – 36 = 164. Dentre essas, Guilherme ficou com 20 a mais que Tiago.



Do esquema acima temos, a parte amarela corresponde ao que coube a Guilherme e a parte laranja é o que coube a Tiago. Repare que a parte amarela pode ser dividida em dois pedaços: um do mesmo tamanho do pedaço de Tiago e o restante correspondendo a 20.

A incógnita natural da equação representada acima é T. Portanto

$$2T + 20 = 164 \Leftrightarrow 2T = 144 \Leftrightarrow T = 72$$

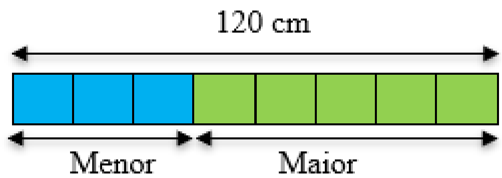
Como $G = T + 20$, então $G = 92$

Resposta: Guilherme ficou com 92 e Tiago com 72 figurinhas.

Problema 12: Uma tábua tem 120 cm de comprimento e deve ser dividida em duas partes, de tal forma que o comprimento da menor seja igual a 3/5 do comprimento da menor. Qual será, em metros o comprimento da menor parte? (Problema 4, p. 159)

Resolução:

Modelando o problema:



Tomando como incógnita x cada um dos retângulos, podemos escrever:

$$8x = 120$$

$$x = 15$$

A menor parte tem comprimento equivalente a $3x$. Logo, mede 45 centímetros ou 0,45 m.

Resposta: A menor parte mede 0,45 m.

OBSERVAÇÃO: Repare que a modelagem do problema com o recurso das barras simplificou a equação. Se o problema fosse resolvido usando como incógnita o comprimento da maior, isso conduziria à equação

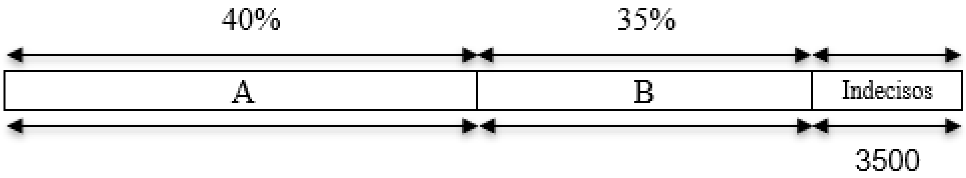
$$x + \frac{3}{5}x = 120$$

que apresentaria uma dificuldade a alunos não familiarizados com cálculos com frações.

Problema 13: Em uma eleição com dois candidatos, A e B, uma pesquisa mostra que 40% dos eleitores votarão no candidato A e 35% no candidato B. Se entre os pesquisados ainda há 3500 indecisos, quantos eleitores participaram dessa pesquisa? (Problema 6, p.159)

Resolução:

Um modelo natural do problema é o seguinte.



Pelo diagrama, o percentual de indecisos é $(100 - 40 - 35)\% = 25\%$. Portanto, sendo E o total de eleitores, temos:

$$\frac{25}{100}E = 3500$$

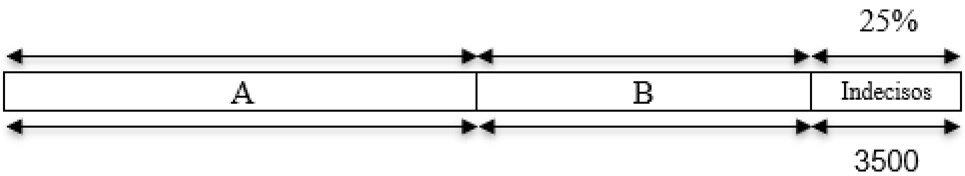
$$25E = 350000$$

$$E = \frac{350000}{25}$$

$$E = 14000$$

Resposta: Participaram da pesquisa 14 mil eleitores.

Observação: Usando os MBS, a solução fica mais imediata. Vejamos.



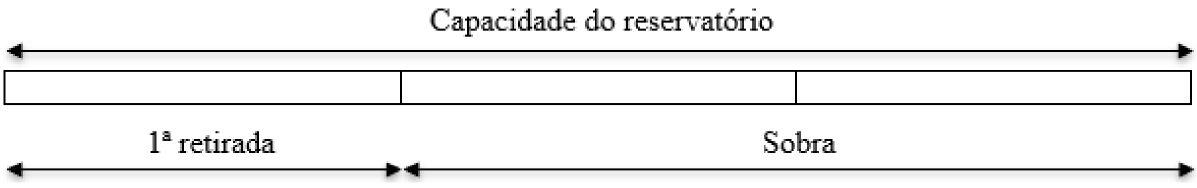
Para calcular o total de eleitores basta multiplicar 3500 por 4, obtendo 140 mil.

Problema 14: Um reservatório estava totalmente cheio de água inicialmente, esvaziou se 1/3 da capacidade desse reservatório e depois foram retirados 400 litros de água. O volume de água que restou no reservatório corresponde a 3/5 da capacidade do reservatório. Quantos litros de água cabem esse reservatório? (Problema 2, p. 159)

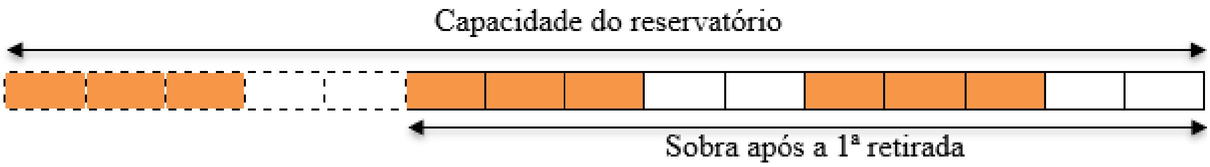
Resolução:

Vamos modelar o problema.

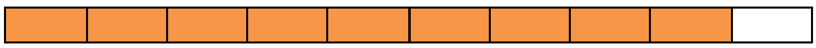
Inicialmente é retirado 1/3 da capacidade do reservatório. Representando a capacidade por uma barra, dividimo-la em três partes iguais.



Feito isso, sabemos são retirados 400 litros e sobram 3/5 do reservatório. É possível representar o que restou após a retirando de 400 litros dividindo em 5 partes iguais os dois terços restantes tomando 3 partes de cada divisão. Assim, a barra que representa a capacidade do reservatório ficou dividida em 15 partes iguais.



Podemos reorganizar o modelo da seguinte forma.



Tomando como incógnita cada uma das partes menores, temos a equação

$$x = 400$$

Como a capacidade do reservatório corresponde a $15x$, temos nossa resposta.

Resposta: Cabem 6000 litros no reservatório.

Observação: Em todos os problemas em que as equações envolveriam frações, os MBS ajudou a escolher a unidade (a incógnita) de modo a evitar isso. Volto a afirmar que, para alunos que apresentam uma dificuldade na manipulação de frações em equações, isso pode ser um bom recurso. É claro que a representação dos modelos exige uma certa engenhosidade, mas o equacionamento do problema também. A diferença é que o modelo envolve algo mais visual, e é esse apelo visual que torna essa ferramenta tão útil.

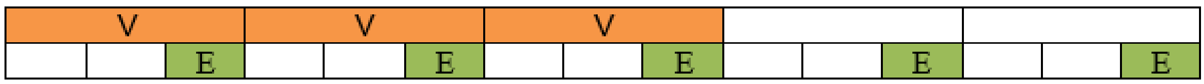
Problema 15: Em um torneio de futebol, uma equipe venceu 3/5 dos jogos que disputou, empatou 1/3 dos jogos e perdeu apenas 2. Essas informações nos mostram que a equipe venceu: (Problema 8, p.162)

a) 30 jogos. b) 24 jogos. c) 20 jogos. d) 18 jogos. e) 10 jogos.

Resolução:

Um modelo do problema pode ser.

Para representar os empates, vamos dividir cada quinto em três partes.



Desse modo, o total de jogos disputado fica representado por uma barra dividida igualmente em 15 barras menores. Redesenhando o modelo, temos:

Representando cada uma dessas partes menores pela incógnita x, cada vitória corresponde a $3x$. Portanto, temos a seguinte equação:

$$15x = 5x + 9x + 2$$

$$x = 2$$

O número de vitórias foi $9 \times 2 = 18$.

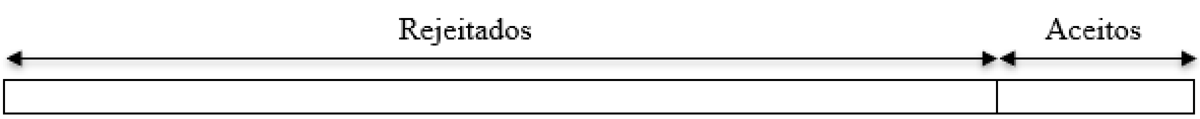
Resposta: Alternativa D

Problema 16: Os gerentes de uma empresa entrevistaram 420 candidatos a determinado emprego e rejeitaram um número de candidatos igual a 5 vezes o número de candidatos aceitos. Então, o número de candidatos aceitos foi:(Problema 12, p.163)

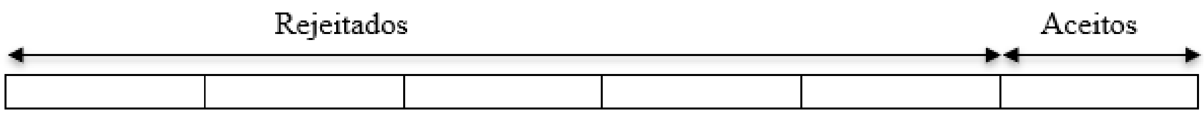
a) 84 b) 75 c) 70 d) 65 e) 60

Resolução:

Podemos iniciar modelando o problema da seguinte forma:



Sabendo que o número de rejeitados corresponde a 5 vezes o de aceitos, nosso modelo agora fica assim:



Representando os aceitos por x, temos:

$$6x = 420$$

$$x = 70$$

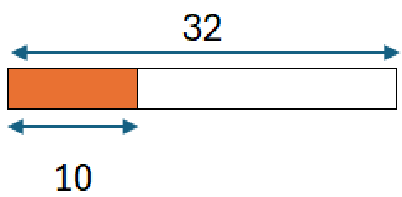
Resposta: Alternativa C.

4.2.2 Problemas selecionados de EDITORA MODERNA (2018)

Problema 17: De 32 crianças que foram acampar, 10 são meninas. Qual é a porcentagem de meninas em relação ao número total de crianças? (Problema 5, p. 264)

Resolução:

Modelo:



Tomemos 32 como 100%. Então $\frac{x}{100}$ de 32 vale 10. Portanto,

$$\frac{x}{100} \cdot 32 = 10$$

Daí, $32x = 1000$ e $x = 31{,}25$

Resposta: 31,25%.

Problema 18: A quantia de R$ 288,00 será repartida entre três crianças em partes diretamente proporcionais à idade delas. Quantos reais receberá a criança de 8 anos? E a de 10 anos? E a de 12 anos? (Problema 10, p. 288)

Resolução:

Modelo:

Considerando cada ano como uma unidade, 288 correspondem a $8 + 10 + 12 = 30$ unidades. Então a equação fica:

$$30x = 288$$

$$x = \frac{288}{30}$$

$$x = 9{,}6$$

Portanto:

Ao filho de 8 anos caberão $8 \times 9{,}6 = 76{,}80$

Ao filho de 10 anos caberão $10 \times 9{,}6 = 96{,}00$

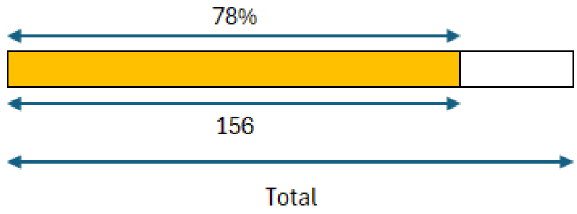
Ao filho de 12 anos caberão $12 \times 9{,}6 = 115{,}20$

Resposta: O filho de 8 anos receberá R$ 76,80, o de 10 anos receberá R$ 96,00 e o de 12, R$ 115,20.

Problema 19: Os 78% do total de figurinhas de Mariana correspondem a 156 figurinhas. Qual é a quantidade total de figurinhas que Mariana tem? (Problema 3, p.281)

Resolução:

Modelo:



Representando o total pela incógnita x, podemos escrever:

$$\frac{78}{100} \cdot x = 156$$

$$78x = 15600$$

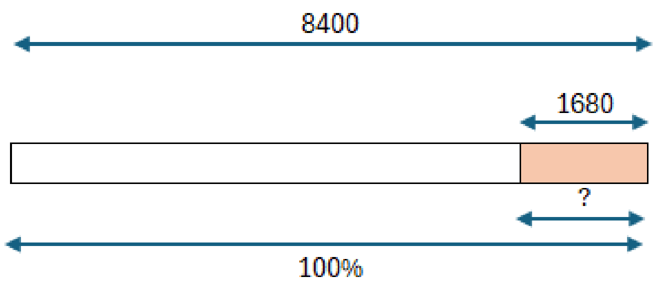
$$x = 200$$

Resposta: Mariana tem 200 figurinhas.

Problema 20: Um empresário investiu R$ 8.400,00 em um projeto. Depois de um ano, seu lucro foi de R$ 1.680,00. Qual foi a porcentagem do lucro em relação ao investimento? (Problema 10, p.288)

Resolução:

Modelo:



Representando pela incógnita x a porcentagem buscada, de acordo com o modelo podemos escrever:

$$\frac{x}{100} \cdot 8400 = 1680$$

Daí,

$$x = \frac{1680}{84} = 20$$

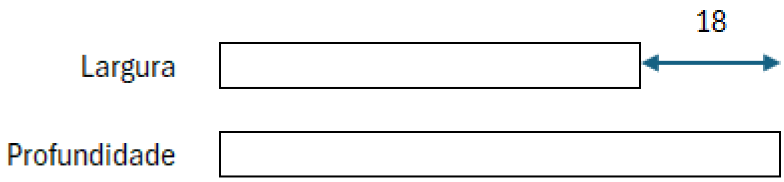
Resposta: 20%.

4.2.3 Problemas selecionados de DANTE (2018)

Problema 21: O terreno de Rosa é retangular e a largura tem medida de comprimento de 18 m a menos do que a profundidade. O perímetro do terreno mede 84 m. Qual é a medida de comprimento da profundidade do terreno? E qual é a medida de comprimento da largura? (Problema 72, p.122)

Resolução:

Modelo:



Vamos chamar a largura de x. Assim, a profundidade será representada por $x + 18$. Como o perímetro mede 84 m, a soma Largura + Profundidade é 42 m. Portanto, a equação é

$$x + x + 18 = 42$$

$$2x = 42 - 18$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

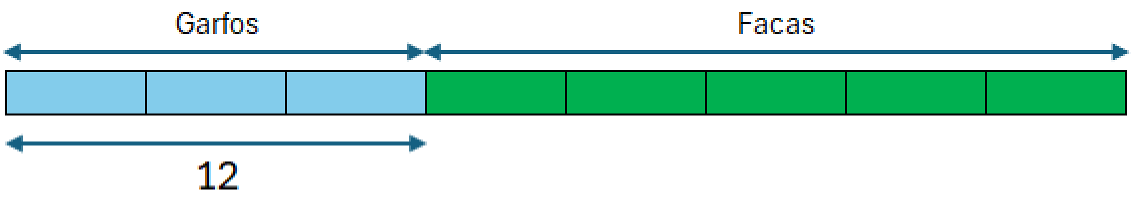
Resposta: A profundidade tem 30 m e a largura tem 12 m.

Problema 22: Em uma gaveta há garfos e facas na razão de 3 para 5. Sabendo que são 12 garfos, quantas facas há na gaveta? (Problema 26, p.211)

Resolução:

Modelo:

A cada 3 garfos há 5 facas.



Considerando cada unidade como x, temos:

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

O número de facas corresponde a $5x$. Logo, há $5 \times 4 = 20$ facas.

Resposta: Há 20 facas.

Problema 23: A professora Júlia reservou 10 folhas de papel crepom para cada aluno do 7º ano. Como naquele dia faltaram 5 alunos, foi possível dar 12 folhas para cada aluno que compareceu. Qual foi o número de folhas de papel crepom distribuídas pela professora Júlia? (Problema 78, p.122)

Resolução:

Para modelar o problema vamos representar o número de folhas por uma barra. Não sabemos em quantas partes vamos dividi-la pois não sabemos quantos são os alunos, mas sabemos que em cada parte podemos escrever o número 10, correspondendo ao número de folhas que cada aluno receberia. Estamos em um problema no estilo “antes-depois”.

ANTES (com todos os alunos presentes)

10	10	10	10	10	...	10	10	10	10

Sabemos que, no dia da divisão, 5 alunos faltaram, fazendo com que cada aluno pudesse receber 12 folhas. Como o número de folhas ainda é o mesmo, vamos fazer uma barra do mesmo tamanho que antes, mas com 5 retângulos a menos, o que causará um aumento no tamanho de cada retângulo.

DEPOIS (com 5 alunos a menos)

12	12	12	12	...	12	12	12

Dizendo que, depois, temos x alunos, podemos dizer que o número de folhas é $12x$.

No caso “antes”, o número de alunos é 5 unidades maior. Portanto, o número de folhas é dado por $10(x+5)$. Portanto, podemos escrever:

$$12x = 10(x+5)$$

$$12x - 10x = 50$$

$$x = 25$$

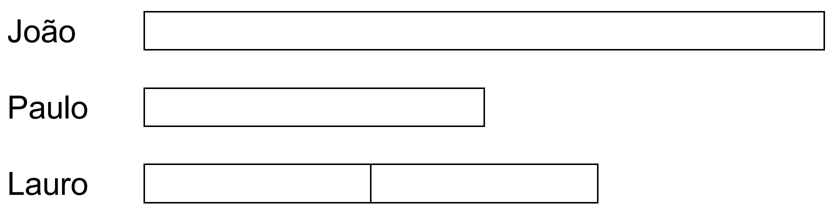
O número de folhas é $12 \times 25 = 300$.

Resposta: Foram distribuídas 300 folhas de papel crepom.

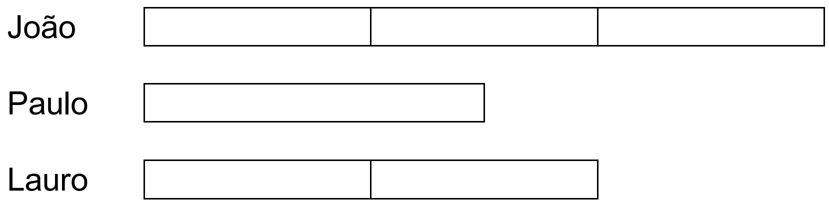
Problema 24: Joaquim repartiu R$ 65,00 entre os 3 filhos, Paulo, João e Lauro, de modo que Paulo ficou com a metade da quantia de João e Lauro ficou com 2/3 da quantia de João. Quanto cada um recebeu? (Página 128, p.1)

Resolução:

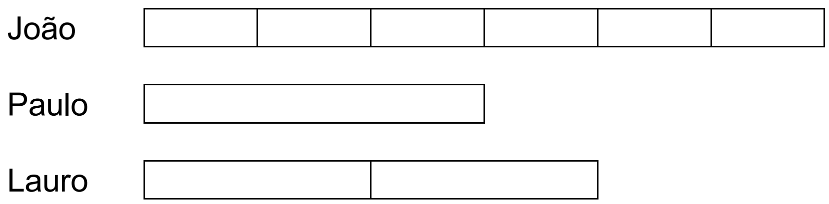
Para modelar o problema tomaremos a quantia recebida por João como unidade, já que as outras duas quantias estão referidas e ela.



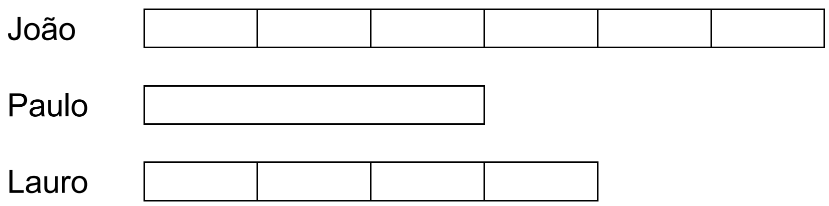
Como Lauro recebeu 2/3 da quantia de João, a barra que representa a quantia de João foi dividida em 3 partes iguais. Assim, cada uma das três partes que representam a quantia de João é igual a cada uma das duas partes que representa a quantia de Lauro.



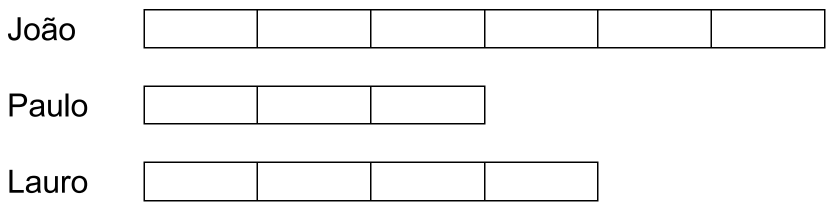
A barra que representa a quantia de Paulo é metade da de João. Então vamos dividir ao meio cada uma das três barras que representam a quantia de João.



Fazemos o mesmo com cada uma das duas barras que representam a quantia de Lauro.



Ainda não temos uma unidade. Porém, como Paulo tem metade da quantia de João (representada agora por 6 retângulos menores), a quantidade de Paulo pode ser representada por 3 retângulos menores.



Representando cada uma das partes por x, teremos:

$$13x = 65$$

$$x = 5$$

Portanto, João recebeu $6x$, ou seja, 30 reais, Paulo recebeu $3x$, ou seja, 15 reais e Lauro recebeu $4x$, que corresponde a 20 reais.

Resposta: João recebeu R$ 30,00, Paulo recebeu R$ 15,00 e Lauro recebeu R$ 20,00.

Caracterização das faixas etárias e séries

Na tabela abaixo, caracterizamos as séries escolares e as faixas etárias para as quais os problemas selecionados são indicados.

Tabela 2: Caracterização dos problemas

Problema	Fonte / Obra didática	Série	Faixa etária típica
1	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
2	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
3	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
4	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
5	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
6	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
7	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
8	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
9	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
10	Quintella; O'Reilly (1957)	5º ano	10 – 11 anos
11	JÚNIOR e CASTRUCCI (2018)	6º ano	11 – 12 anos
12	JÚNIOR e CASTRUCCI (2018)	6º ano	11 – 12 anos
13	JÚNIOR e CASTRUCCI (2018)	6º ano	11 – 12 anos
14	JÚNIOR e CASTRUCCI (2018)	6º ano	11 – 12 anos
15	JÚNIOR e CASTRUCCI (2018)	6º ano	11 – 12 anos
16	JÚNIOR e CASTRUCCI (2018)	6º ano	11 – 12 anos
17	EDITORA MODERNA (2018)	7º ano	12 – 13 anos
18	EDITORA MODERNA (2018)	7º ano	12 – 13 anos
19	EDITORA MODERNA (2018)	7º ano	12 – 13 anos
20	EDITORA MODERNA (2018)	7º ano	12 – 13 anos
21	DANTE (2018)	7º ano	12 – 13 anos
22	DANTE (2018)	7º ano	12 – 13 anos
23	DANTE (2018)	7º ano	12 – 13 anos
24	DANTE (2018)	7º ano	12 – 13 anos

CONCLUSÃO

Para a maioria das pessoas, a simples menção da palavra “problema” provoca dor de cabeça. Dificilmente alguém vê um problema como oportunidade de diversão, um desafio ou como uma possibilidade de aprender algo novo. Isso é verdade, de modo geral, quando temos que encarar os problemas da vida diária, mas essa é a postura psicológica que devemos buscar: que nossos alunos sejam capazes de ver os problemas de matemática com uma atitude positiva. De fato, como dito em LUCENA (2020), a solução de problemas no contexto do ensino de Matemática não só permite que os alunos pratiquem os conhecimentos e algoritmos já adquiridos, mas também fomenta o desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, estimula a reflexão e a capacidade de elaborar estratégias criativas.

Em FAYOL, TOOM, *et al*. (2010), o professor russo André Toom diz que é uma experiência inestimável na vida de um aluno quando este consegue discernir, em um enunciado, o que deve ser levado em conta na resolução de um problema. Portanto, privar os meninos e as meninas da experiência de resolver problemas é retirar uma parte importantíssima da sua formação, pois ao resolver problemas verbais, alunos de todas as idades desenvolvem a capacidade de traduzir para a matemática uma “variedade de verbos, advérbios e palavras sintéticas que indicam ações e relações entre objetos, tais como por, dar, tomar, trazer, encher, escoar, mover, encontrar, ultrapassar, mais, menos, mais tarde, mais cedo, antes, depois, a partir de, para, entre, de encontro, afastar de etc” (FAYOL, TOOM, *et al*., 2010)

Em várias culturas, o ensino de Matemática se desenvolveu (e ainda se desenvolve) por meio de problemas. Egito antigo, Babilônia e China são alguns exemplos nos quais problemas matemáticos aparecem em documentos históricos, seja em papiros ou em tabletes de argila. Em AVERBACH e CHEIN (2000) lemos:

> O interesse pela matemática recreativa remonta a muitos séculos. Por exemplo, o Problema 3.2 abaixo é retirado da Antologia Grega, uma coleção de problemas numéricos em forma epigramática, que foi montada por Metrodorus por volta do ano 500. Segundo Eves [14], há razões para acreditar que muitos desses problemas são ainda mais antigos em origem. Na época em que foram originalmente propostos, a maioria desses problemas era resolvida por tentativa e erro" (AVERBACH; CHEIN, 2000, p. 170-171, tradução minha).

A antiga União Soviética é conhecida por seus livros de matemática recheados de problemas. Clássicos são os livros de Yakov Perelman. Em seu prefácio, Martin Gardner descreve (KORDEMSKY, 1992) como “o melhor e mais popular livro de quebra-cabeças matemáticos já publicado na União Soviética”.

Os problemas verbais nos livros didáticos russos apresentam um crescimento regular em sua dificuldade ao longo das séries escolares (TOOM, 2004). Muitos destes problemas serviram como inspiração na infância de matemáticos e cientistas. Em FAYOL, TOOM, *et al*. (2010), cita-se uma entrevista de Vladimir Arnold[4], na qual ele lembra do seguinte problema: Duas mulheres idosas começam a caminhar ao nascer do Sol e cada qual caminhou a uma velocidade constante. Uma foi de A para B e a outra foi de B para A. encontraram-se ao meio-dia e, continuando a andar sem parar, chegaram a B às 16 h e a A às 21 h, respectivamente. A que horas foi o nascer do Sol naquele dia?

Arnold resolveu esse problema de forma autônoma aos 12 anos, e disse que essa foi sua primeira verdadeira experiência matemática e conclui dizendo que esse tipo de experiência não é incomum na Rússia, como confirma (TOOM, 2004).

No artigo mencionado, o professor Toom destaca os livros didáticos de Singapura, dizendo que são “escritos segundo parâmetros claros lógicos, tal que repetições inúteis são excluídas; alunos avançam todo o tempo” (p.15). Nesse aspecto são comparados por ele aos livros didáticos russos, embora tenha algumas diferenças em termos de grau de dificuldade.

O professor Elon Lima escreveu:

> A fim de familiarizar gradativamente os alunos com o método matemático, dotá-los de habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos de cálculo e dar-lhes condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real, o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais, que chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicações. (LIMA, 2003)

O processo de aprendizagem só ocorrerá de maneira equilibrada se houver uma dosagem adequada de cada uma dessas três componentes. O exagero de alguma

[4] Vladimir Arnold (12 de junho de 1937 - 3 de junho de 2010), foi um matemático soviético e russo.

dessas componentes é o que faz surgir modismos pedagógicos e é responsável por uma visão equivocada da própria matemática.

Por exemplo, como a componente mais difundida é, sem dúvida, a manipulação, a maioria das pessoas (inclusive muitos professores e alunos) pensam que matemática se resume a ela. Por outro lado, a predominância na conceituação foi responsável, nas décadas de 60 e 70, pelo período da chamada Matemática Moderna, quando não havia quase lugar para as manipulações e menos ainda para as aplicações (LIMA, 2003). Contudo, também é possível exagerar nas aplicações. Esse exagero pode ser visto na “febre” da contextualização. A apresentação da matemática em sala por meio da resolução de problemas deveria estar apoiada pelas outras duas componentes.

Quando se trata de ensinar a resolver problemas, também não se pode perder de vista o que disse o matemático húngaro George Polya:

> A resolução de problemas é uma habilidade prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 1995)

O comentário acima indica que há uma “técnica” na resolução de problemas, sejam eles de que natureza forem. Mas quando se fala de problemas de Matemática na escola, essa técnica ou “metodologia” deve ser apresentada de forma clara. Mesmo que de forma sutil no começo, aos poucos vai ficando claro para os alunos que existe um caminho, e isso vai ajudando a formar hábitos de raciocínio que serão úteis para além da vida escolar.

Considerando tudo o que foi dito, uma das maiores dificuldades na resolução de problemas está em se traduzir o enunciado da linguagem corrente para a linguagem matemática. Na minha experiência, isso se deve por dois motivos: (1) a pouca capacidade de interpretar textos e (2) a dificuldade de traduzir as relações matemáticas que existem entre os dados e a incógnita do problema. A segunda dificuldade tem sua raiz no pensamento algébrico pouco desenvolvido. Na verdade, como vimos, ocorre um salto entre a matemática ensinada nos anos iniciais (que se concentra na parte operacional) e o ensino de álgebra, e se for possível construir uma “ponte” entre essas duas etapas do ensino, penso que a nossa tarefa de professores seja facilitada e o aprendizado dos alunos se dará de forma mais significativa e menos traumática.

Então existe uma “técnica infalível” para resolver problemas? Certamente, não. Porém, como pretendi mostrar com o trabalho, existe uma metodologia bastante eficaz e a intenção foi apresentar essa metodologia e mostrar alguns exemplos de como aplicá-la.

Referências

ANTONOV, N; VYGODSKY; *et al*. *Problems in Elementary Mathematics for Home Study.* Translated from the Russian by Leonid Levant. Moscow: Mir Publishers, 1982.

AVERBACH, Bonnie; CHEIN, Orin. *Problem Solving Through Recreational Mathematics*. Versão Kindle, 2000. Disponível em: https://www.amazon.com.br/gp/product/B008TVLMF4/ref=ppx_yo_dt_b_d_asin_image_351_o02?ie=UTF8&psc=1. Acesso em: 16 de Janeiro de 2024.

BALDIN, Yurico Yamamoto. Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Costa Rica, Ano 13, Número 17, pp. 31-44, 2018. Baseado na conferência paralela apresentada no II CEMACYC, Cali, Colômbia, 29 de outubro a 1 de novembro de 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2018.

DANTE, Luiz Roberto. *Teláris matemática, 7º ano*: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

EVES, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, 3rd ed., Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1969.

FAYOL, Michel; TOOM, Andrei; *et al*. *Fazer contas ajuda a pensar?* Prefácio de Nuno Crato. 1. ed. Lisboa: Fundação Francisco Manuel dos Santos; Porto: Porto Editora, 2010. (Questões-Chave de Educação).

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2017. ISBN 978-85-97-01292-7.

GUELLI, Oscar. A regra da falsa posição. In: *Explorando o Ensino de Matemática***:** volume 1. BRASÍLIA: Ministério da Educação do Brasil, v. 1, 2004. Cap. 4.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A conquista da matemática: 7o ano*: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

KORDEMSKY, Boris A. *The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations*. Edited and with an introduction by Martin Gardner. Translated by Albert Parry. New York: Dover Publications, 1992.

LIDSKY, V. B.; OVSIANIKOV, L. V.; TULAIKOV, A. N.; SHABUNIN, M. I. Problemas de matematicas elementales: Álgebra, Geometria, Trigonometria. Moscou: Editorial Mir, 1972.

LIMA, Elon Lages. Matemática e Ensino. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

LITVINENKO, V.; MORDKOVICH, A. *Solving Problems in Algebra and Trigonometry*. Moscow: Mir Publishers, 1987.

LUCENA, Alana V. Uma proposta metodológica para o ensino de equação de primeiro grau por meio da resolução de problemas de idade, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/21443>. Acesso em: 6 Janeiro 2024.

MATHS, Merlion. **Cingapura Math. Bar Modelo Método**, 2020 - Parte 1. Disponível em: <https://youtu.be/RdEgTaQdoEM?si=qtFei7D6RQimPay4>. Acesso em: 1 Dezembro de 2023.

MATHS, Merlion. **Cingapura Math. Bar Modelo Método**, 2020 - Parte 2. Disponível em: <https://youtu.be/42yBC38Mg0I?si=OZOEYSZ4Xtf9vmmE>. Acesso em: 1 Dezembro de 2023.

MATHS, Merlion. **Cingapura Math. Bar Modelo Método**, 2020 - Parte 3. Disponível em: <https://youtu.be/isWfCa0ejqA?si=hIM0uwJ6Y-mIwKvk>. Acesso em: 1 Dezembro 2023.MATHS, Merlion. Método de Singapura. O modelo de barra, 2020 - Parte 4. Disponível em: <https://youtu.be/PKDOxcHoR8c?si=zqJnjeLD52z-EYB2>. Acesso em: 1 Dezembro de 2023.

MATHS, Merlion. **Método de Singapura. O modelo de barra**, 2020 - Parte 4. Disponível em: <https://youtu.be/PKDOxcHoR8c?si=nVLTvTy1lcCk5Hfy>. Acesso em: 1 Dezembro de 2023.

MODERNA, Editora (Org.). *Araribá mais: matemática*: manual do professor. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

NG, Swee F.; LEE, Kerry. The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, 40, n. 3, Maio 2009. 282-313.

NOVA ESCOLA. BNCC de Matemática: cálculos com contexto e reflexão. Disponível em: <https://box.novaescola.org.br/etapa/4/bncc-na-pratica/caixa/66/bncc-de-matematica-calculos-com-contexto-e-reflexao/conteudo/12093>. Acesso em: 04 de jan. de 2024.

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

QUEIROZ, Jonas M. D. S. Resolução de problemas de pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com auxílio do modelo de barras, São Carlos, 2014.

QUINTELLA, Ary; O'REILLY, Newton. *Exercícios de Aritmética para o Concurso de Admissão*. 17ª. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1957.

TOOM, André. O efeito dominó. Matemática Universitária, n. 30, p. 5-14, jun. 2001.

TOOM, André. Comparação de ensino matemática no Brasil, Rússia e outros países. **II Bienal da SBM**, 2004.

VYGODSKY, M. *Mathematical Handbook Elementary Mathematics* (Справочник по элементарной математике). Moscow: Mir Publishers; original publisher "Наука", 1979.