Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sobre Fatoração de Polinômios e Métodos Numéricos

Antonio Pedro Duarte Moreira

Juazeiro do Norte - CE

2024

Sobre Fatoração de Polinômios e Métodos Numéricos

Antonio Pedro Duarte Moreira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2024

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Moreira, Antonio Pedro Duarte

M838ss SOBRE FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS E MÉTODOS NUMÉRICOS / Antonio Pedro Duarte Moreira. JUAZEIRO DO NORTE - CE, 2024.

78p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira

1. Polinômios, 2.Raízes, 3.Cálculo Numérico, 4.Ensino; I.Título.

CDD: 510

Sobre Fatoração de Polinômios e Métodos Numéricos

Antonio Pedro Duarte Moreira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título mestre em matemática.

Aprovada em: 27/12/2024.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira (Orientador)

Universidade Regional do Cariri (URCA)

____

Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago

Universidade Federal do Pará (UFPA)

____

Prof. Ms Francisco Vlademir Dedes da Cruz Barros

SEDUC - CE

Dedico este trabalho a minha esposa por me apoiar e incentivar em todo o desenvolvimento.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me proporcionar tantas bençãos, e me permitir alcançar mais essa etapa acadêmica.

Agradeço imensamente ao professor orientador Doutor Jocel Faustino Norberto de Oliveira por toda a paciência e incentivo durante esse processo.

Agradeço ao professor Mestre Vladimir pela contribuição na construção desse trabalho.

Agradeço ao professor Doutor Amilcar Montalbán por aceitar o convite de participar da banca avaliadora desse trabalho.

Agradeço a minha esposa, Jaiane Maria, por ter me motivado a continuar mesmo em meio a tantas dificuldades.

Agradeço aos professores da Universidade Regional do Cariri (URCA) pelo bom trabalho desempenhado nas aulas e pelo compartilhamento do conhecimento de forma digna e honesta.

Agradeço ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela disseminação do curso, e aprimoramento da formação acadêmica dos professores de Matemática.

"Ouça conselhos e aceite instruções, e acabará sendo sábio. " (Provérbios 19:20)

Resumo

O estudo de polinômios começa desde o Ensino Fundamental II, com a ideia de ”letras” e ”números” na matemática, um conceito que inicialmente não faz sentido para o estudante, mas que com o passar do tempo e com o aprofundamento em seus estudos ele percebe que essa junção nos fornece uma ferramenta que pode ser utilizada para moldar fenômenos em diversas áreas, como na economia, engenharia, no cálculo de áreas e volumes, além de outras aplicações. Neste trabalho estudaremos sobre polinômios, tentando relacionar fatoração com cálculo aproximado de raízes por métodos numéricos. Para isso, falaremos um pouco sobre os conceitos algébricos como anel, corpo e afins. Exploraremos alguns métodos de fatoração e métodos de aproximação de raízes como o método de Newton e o método das secantes. Ainda, abordaremos o ensino de polinômios no ensino médio e como objetivo principal vamos sugerir uma unidade curricular eletiva sobre o ensino de polinômios.

Palavras-chave: Polinômios, Raízes, Cálculo Numérico, Ensino.

Abstract

The study of polynomials begins in Elementary School II, with the idea of “letters” and “numbers” in mathematics, a concept that initially makes no sense to the student, but with the passage of time and the deepening of their studies he realized that this discovery provides us with a tool that can be used to shape publications in various areas, such as economics, engineering, areas and volumes calculation, in addition to other applications. In this work we will study polynomials, trying to relate factorization with approximate calculation of roots using numerical methods. To do this, we will talk a little about algebraic concepts such as ring, field and related. We will explore some factorization methods and root approximation methods such as Newton’s method and the secant method. Still, we will talk about teaching of polynomials in high school and as the main objective we will teach a unit curricular elective on teaching polynomials.

Keywords: Polynomial, roots, Numerical Calculation, Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

..

1 Introdução

Os polinômios têm uma origem rica na história da matemática. O termo "polinômio"deriva do grego "poly"(muitos) e "nomos"(termos), referindo-se a expressões algébricas formadas por múltiplos termos. O estudo dos polinômios remonta aos matemáticos babilônios e egípcios, que usavam conceitos rudimentares de álgebra. Segundo Roque e Pitombeira (2020), "a matemática desta época é vista como essencialmente prática, marcada pelo uso de receitas e algoritmos de cálculo". A formalização dos polinômios, como os conhecemos, ocorreu durante o desenvolvimento da álgebra abstrata na Idade Média e na Renascença, com contribuições de matemáticos como René Descartes e Carl Friedrich Gauss.

Com o tempo, a aplicação dos polinômios evoluiu consideravelmente. Na ciência moderna, eles desempenham um papel essencial em disciplinas como programação de computadores e modelagem de fenômenos naturais. Por exemplo, em programação, polinômios são usados para criar algoritmos que simulam eventos climáticos, como a previsão de padrões meteorológicos e a análise de variáveis complexas. Modelos polinomiais ajudam a prever mudanças no clima, considerando variáveis inter-relacionadas, e são fundamentais para a pesquisa em ciências ambientais e engenharia. A capacidade dos polinômios de representar relações matemáticas complexas é crucial para avanços tecnológicos e científicos.

Diante disso, é crucial que o ensino de polinômios seja abordado com profundidade nas escolas. A compreensão desses conceitos é vital para formar alunos capacitados, alinhados às práticas educacionais de países desenvolvidos. Integrar o estudo dos polinômios na educação básica não só prepara os alunos para desafios acadêmicos e profissionais, mas também promove a formação de cidadãos críticos. As escolas devem adotar métodos e tecnologias que reflitam a importância dos polinômios e preparem os estudantes para contribuir significativamente em campos científicos e tecnológicos.

Esta dissertação explora o conceito e a aplicação dos polinômios de forma abrangente, começando com uma introdução aos números inteiros e noções básicas de álgebra. O estudo se aprofunda na definição e propriedades dos polinômios, abordando anéis de polinômios e técnicas de divisão. A análise inclui a fatoração dos polinômios, determinação das raízes reais e o Método de Briot-Ruffini, complementada por um esquema prático. A dissertação também examina métodos numéricos para localizar raízes, como o Método de Newton-Raphson e o Método das Secantes, com ênfase em interpretações geométricas, algoritmos e convergência. Por fim, conecta o estudo dos polinômios com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destacando a importância de integrar esses conceitos no currículo escolar.

Além disso, esta dissertação visa criar uma fonte de recurso para a elaboração de uma cadeira de eletiva matemática para o Ensino Médio, com um enfoque aprofundado no estudo dos polinômios. No Novo Ensino Médio, as disciplinas eletivas permitem aos estudantes escolher áreas de interesse específico, promovendo uma educação personalizada. A proposta é que essa cadeira seja destinada a turmas olímpicas ou a instituições com alta demanda por cursos em áreas exatas, como engenharia e programação. A inclusão de uma disciplina eletiva sobre polinômios permitirá um aprofundamento no tema, preparando melhor os alunos para desafios acadêmicos e profissionais futuros, alinhando-se às necessidades do mercado e tendências educacionais contemporâneas.

2 Preliminares

2.1 Números inteiros $\mathbb{Z}$

Os números inteiros surgiram quando os números naturais já não eram mais suficientes para satisfazer todas as necessidades. Os números negativos apareceram na China, mas os chineses não aceitavam a ideia de tê-los como solução de uma equação. Na Índia, os números negativos foram descobertos quando tentavam formular métodos para resolver equações do segundo grau.

Já no Século III, Diofanto de Alexandria manipulava facilmente os números negativos, porém alguns problemas como $4x + 20 = 4$ e $3x - 18 = 5x^2$ que têm como solução valores negativos eram classificados como números absurdos.

Os números inteiros são:

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Eles são representados pela letra $\mathbb{Z}$ que vem do alemão *Zahl* que significa *número*. Em conjunto podemos escrever assim

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

2.2 Noções básicas de álgebra

Seja P um conjunto não vazio munido de duas operações, as quais poderemos chamar de *soma* e *produto* e representadas por $+$ e $\cdot$, respectivamente.

Assim, a Soma em P:

$$+ : P \times P \to P$$
$$(a, b) \mapsto a + b$$

E o Produto em P:

$$+: P \times P \to P$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Um conjunto P, com no mínimo dois elementos, munido da *soma* e *produto* será representado por $(P,\ +,\ \cdot)$.

Definição 1 (Anel)**.** *Um* ***anel*** *é uma estrutura algébrica, indicada por $(P,\ +,\ \cdot)$, quando satisfaz as seguintes propriedades:*

S1. Associatividade da soma: $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\ a,\ b,\ c\ \in P$;

S2. Comutatividade da soma: $a\ +\ b\ =\ b\ +\ a,\ \forall\ a,\ b\ \in P$;

S3. Existência do elemento neutro em relação a soma: $a + 0_P\ =\ 0_P + a\ =\ a,\ \forall\ a,\ 0_P\ \in P$ e $0_P\ =\ 0$;

S4. Inverso aditivo: $a + (-a) = (-a) + a = 0,\ \forall\ a \in\ P$;

P1. Associatividade do produto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),\ \forall\ a,\ b,\ c\ \in P$;

P2. Comutatividade do produto: $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall\ a,\ b \in P$;

P3. Distributividade do produto em relação à soma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a,\ \forall\ a,\ b,\ c \in P$;

P4. Existência do elemento neutro em relação ao produto: $a \cdot 1_p = 1_p \cdot a = a,\ \forall\ a\ \in P$, e $1_p\ =\ 1$;

Observações:

a) Se P é um anel e $a \in P$ então $a \cdot 0 = 0$. De fato, pois $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0$, daí somando $-(a \cdot 0)$ em ambos os membros, chegamos $a \cdot 0 = 0$.

b) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$, de fato, pois, $(-a) \cdot b + a \cdot b = (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$, logo $(-a) \cdot b = -(ab)$

Definição 2 (Domínio de integridade)**.** *Um anel (P, +, ·) é chamado de* ***Domínio de Integridade****, se ele satisfaz a condição*

$$P5.\ Sejam\ a, b \in P,\ se\ a \neq 0\ e\ b \neq 0\ então\ a \cdot b \neq 0.$$

Definição 3 (Corpo)**.** *Um anel (K, +, ·) é chamado* ***Corpo*** *quando todo elemento de K, diferente de zero, possui um inverso em relação ao produto.*

$$\forall a \in K, a \neq 0, \exists b \in K, tal\ que\ a \cdot b = 1$$

Proposição 1. *Todo corpo é um domínio de integridade.*

Demonstração. Seja $a, b \in K$ tal que

$$ab = 0$$

Vamos mostrar que $a = 0$ ou $b = 0$. Vamos supor a contradição, isto é, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Como K é um corpo, a tem o inverso multiplicativo a^{-1}. Assim,

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$$

o que implica $b = 0$, uma contradição, pois $b \neq 0$

□

Exemplo 1. *O conjunto dos números inteiros, com as operações soma e produto, é um exemplo de anel,* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$*.*

Exemplo 2. *O anel* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *é domínio de integridade, pois cumpre a condição P5. Mas não é um corpo, pois se* $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$*, não existe* $b \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a \cdot b = 1$*.*

Exemplo 3. *O conjunto dos números racionais com a soma e produto,* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$*, é corpo.*

Exemplo 4. *Assim como o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos com a soma e produto,* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *são corpos.*

Proposição 2. *Todo domínio de integridade finito é um corpo.*

Demonstração. Seja $a \neq 0$. Vamos considerar o conjunto

$$\{a, a^2, a^3, ...\}$$

Assim, pelo domínio de integridade ser finito, existem $m, n \in \mathbb{N}$, com $m < n$ tal que $a^m = a^n$. Com isso,

$$0 = a^m - a^n = a^m(1 - a^{n-m}).$$

Como, $a^m \neq 0$, temos que

$$1 - a^{n-m} = 0.$$

Logo,

$$a \cdot a^{n-m-1} = 1,$$

ou seja, a^{n-m-1} é o inverso multiplicativo de a. $\square$

2.3 Polinômios

Há diversas situações nas quais os polinômios são aplicados, em áreas diferentes, como no cálculo de área e volume, na Economia, na Física e em outras áreas.

Observe as figuras abaixo:

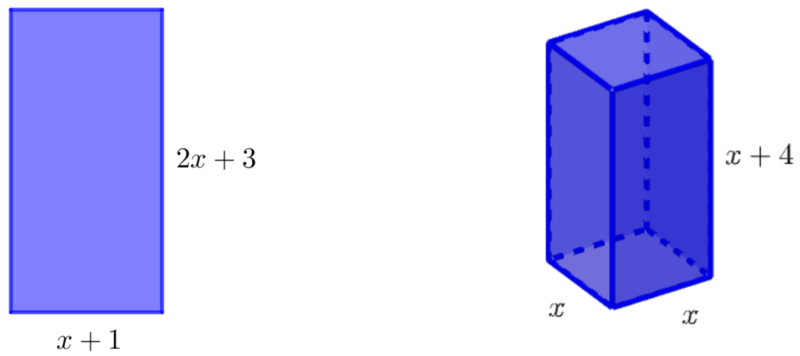


Figura 2.1: Retângulo e prisma quadrangular

Exemplo 5. *A figura à esquerda é um retângulo de dimensões* $x+1$ *e* $2x+3$ *e a figura à direita é um prisma de base quadrangular de dimensões* x *e* $x+4$*, quais expressões determinam o perímetro, as áreas e o volume dessas figuras?*

Temos que o perímetro do retângulo é dado por

$$2(x+1) + 2(2x+3) = 6x+8$$

A área do retângulo é dada por

$$(x+1)\cdot(2x+3) = 2x^2+5x+3$$

Para a área do prisma temos que calcular a área das bases e a área das faces laterais e somá-las

$$A_b = 2x^2,\ A_l = 4(x \cdot (x+4)) = 4x^2 + 16x,\ A_t = 6x^2 + 16x$$

E o volume do prisma é dado por

$$x \cdot x \cdot (x+4) = x^3 + 4x^2$$

Exemplo 6. *Na economia há funções que modelam o custo, o lucro e outras variáveis na produção de objetos em gerais, como automóveis, peças, bicicletas e afins. Como exemplo podemos tomar uma fábrica de motocicletas que utilizou a função* $L(x) = 0,4x^4 + 20x^2 + 1000$ *como indicadora do lucro, em real, na fabricação de* x *unidades por dia, para* $1 \leq x \leq 10$.

Todas as expressões mostradas acima são expressões polinomiais ou polinômios.

Definição 4 (Polinômio)**.** *Polinômio ou função polinomial na variável complexa* x *é toda expressão* $P \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *da forma* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, *para todo* $x \in \mathbb{C}$, *com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ *números complexos.*

Os números complexos a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_2, a_1, a_0 são chamados de *coeficientes* do polinômio $P(x)$. Os monômios $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$, $\ldots$, $a_2 x^2$, $a_1 x$, a_0 são os *termos* do polinômio, em que a_0 é o *termo independente*.

Exemplo 7. *O polinômio* $f(x) = \ldots,\ 0x^7 + 0x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 0x^3 + 7x^2 + x - 12$ *pode ser reescrito como* $f(x) = -2x^5 + 4x^4 - 0x^3 + 7x^2 + x - 12$, *ou ainda,* $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + 7x^2 + x - 12$, *onde termos com os coeficientes* $a_i = 0$ *não precisam ser escritos.*

Exemplo 8. *Os polinômios* $f(x) = -x^4 + 3x^3 - x + 2$, $g(x) = 3x^5 - 5x^3 - 12x^2 + 4x + 3$ *e* $h(x) = -8x^7 - 4x^3 + 2x$ *pertencem a* $\mathbb{Z}[x]$, *pois os coeficientes* $-12, -8, -5, -4, -1, 0, 2, 3$ *e* 4 *pertencem a* $\mathbb{Z}$.

Exemplo 9. *Os polinômios* $i(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{4}{5}$, $j(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 4x^2 - \frac{2}{5}x$ *pertencem a* $\mathbb{Q}[x]$, *pois os coeficientes* $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, 1$ *e* 4 *pertencem a* $\mathbb{Q}$.

Exemplo 10. *O polinômios* $k(x) = \sqrt{2}x^7 + \frac{2}{7}x^5 + x^4 + \frac{4}{5}x^3 + \pi$, $l(x) = -2x^6 + 3x^4 + \sqrt{5}x^3 + 4x^2 - \frac{1}{3}x$ *pertencem a* $\mathbb{R}[x]$, *pois os coeficientes* $-2, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{7}, \frac{4}{5}, 1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi$, *e* 4 *pertencem a* $\mathbb{R}$.

Quando temos $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = 0$ e $a_0 \neq 0$ dizemos que o polinômio é *constante*.

Exemplo 11. *Determine os valores dos coeficientes a, b e c para que o polinômio* $P(x) = ax^6 + (b-2i)x^5 + (c+5)x^3 - ((2b-4i)\cdot 2)x^2 + a$ *seja nulo. Temos que para o polinômio* $P(x)$ *ser nulo, precisa-se que todos os coeficientes sejam iguais a zero.*

- $a = 0$
- $(b-2i) = 0 \Rightarrow b = 2i$
- $(c+5) = 0 \Rightarrow c = -5$
- $((2b-4i)\cdot 2) = 0 \Rightarrow 4b - 8i = 0 \Rightarrow b = 2i$

Logo, quando $a = 0$, $b = 2i$, $c = -5$, $P(x)$ *será nulo.*

Temos ainda também a *igualdade de polinômios*, que dados dois polinômios, P e Q, na variável complexa x, são iguais quando os coeficientes de $P(x)$ e $Q(x)$ forem ordenadamente iguais.

$$P = Q \Leftrightarrow P(x) = Q(x),$$

para $\forall x \in \mathbb{C}$.

Teorema 1 (Polinômios idênticos)**.** *Dois polinômios P e Q são idênticos se , e somente se, os coeficientes de P e Q forem ordenadamente iguais. Seja,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

e

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

temos,

$$P = Q \Leftrightarrow a_i = b_i,\ \forall\ i \in \{0\,1\,2\,\cdots\,n\}$$

Demonstração. Temos que para todo $x \in \mathbb{C}$:

$$a_i = b_i \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x_i = 0 \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Leftrightarrow P(x) = Q(x)$$

$\square$

Valor numérico - raiz: Dado o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e o número complexo r chama-se valor numérico de P em r a imagem de r pela função P, isto é:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$$

Assim, tomando como exemplo $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 2$, temos:

- $P(2) = 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 48$
- $P(-3) = 5 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - (-3) + 2 = -112$
- $P(1+i) = 5 \cdot (1+i)^3 + 2 \cdot (1+i)^2 - (1+i) + 2 = -9 + 13i$

Um caso particular é quando um número complexo r é tal que $P(r) = 0$, dizemos que r é uma *raiz* ou um *zero* do polinômio P. Por exemplo, $r = -1$ é uma raiz real do polinômio $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 2$, pois:

- $P(-1) = 5 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 2 = 0$

Teorema 2 (Polinômio nulo)**.** *Um polinômio P é dito nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes forem nulos, isto é, seja $P(x) = a_n x^n + \cdots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, temos que*

$$P = 0 \Leftrightarrow a_n = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$$

Demonstração. $\square$

2.4 Anéis de Polinômios

Seja P um anel comutativo. O conjunto anel de polinômios sobre P na incógnita x é definido como:

$$P[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_i \in P, n \in \mathbb{N}\}$$

com as seguintes operações: sejam os polinômios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$$

definiremos:

i) Soma:

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0),$$

onde $a_i = 0$ para todo $i > n$ e $b_i = 0$ se $i > m$. isto é,

$$(P + Q)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$$

Definição 5 (Soma de polinômios)**.** *A soma define em A uma estrutura de grupo comutativo, valendo as seguintes propriedades:*

- *A1 - Associatividade da soma*
- *A2 - Comutatividade da soma*
- *A3 - Elemento neutro*

- *A4 - Inverso aditivo*

Demonstração. Sejam P, Q e R polinômios pertencentes a A.

A1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$.

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ e $R(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$,

$(P + (Q + R)(x)) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$ e $((P + Q) + R)(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i$, daí:

$$d_i = a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i = e_i, \forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}.$$

A2. $P + Q = Q + P$

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$,

$(P + Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $(Q + P)(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$, daí:

$$c_i = a_i + b_i = b_i + a_i = d_i, \forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}.$$

A3. Existe $E_0 \in A | P + E_0 = P, \forall P \in A$.

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $E_0(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i$, daí:

$$P + E_0 = P \Leftrightarrow a_i + e_i = a_i, \forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

então, $e_i = 0,\ \forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$, portanto E_0 precisa ser o polinômio nulo, sendo assim o elemento neutro para a adição.

A4. Para todo $P \in A, \exists\ P^{-1} | P + P^{-1} = E_0$.

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $P^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{-1} x^i$, daí:

$$P + P^{-1} = E_0 \Leftrightarrow a_i + a_i^{-1} = e_i = 0, \forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\},$$

então, $a_i^{-1} = -a_i, \forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$, logo:
$P^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i = -a_nx^n - \cdots - a_2x^2 - a_1x - a_0$, é o inverso aditivo de P.

$\square$

ii) Produto:

$$P(x) \cdot Q(x) = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdots + c_0,$$

onde

$$c_k = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1b_{k-1} + a_0b_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

para $k = 0, \ldots, m+n$.

Exemplo 12. *Podemos realizar a multiplicação de polinômios separando cada termo de um polinômio e multiplicando pelo outro polinômio. Tomemos os polinômios* $f(x) = 3x^3 - 1$ *e* $g(x) = x^2 - 2x + 1$. *Faremos,* $f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned} 3x^3 \cdot \overbrace{(x^2 - 2x + 1)}^{g(x)} = 3x^3 \cdot x^2 + 3x^3 \cdot (-2x) + 3x^3 \cdot 1 &= 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 \\ -1 \cdot \overbrace{(x^2 - 2x + 1)}^{g(x)} = -1 \cdot x^2 - 1 \cdot (-2x) - 1 \cdot 1 &= -x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Com isso, basta somar os resultados das duas linhas

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1.$$

Definição 6 (Produto de polinômios)**.** *O produto define em* A *uma estrutura de grupo comutativo, valendo as seguintes propriedades:*

- *A5 Associatividade do produto*

- *A6 Comutatividade do produto*

- *A7 Elemento neutro*

- *A8 Distributividade do produto em relação a soma.*

Demonstração. Sejam P, Q e R polinômios pertencentes a A.

A5 - Associatividade do produto.

$$(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$$

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ e $R(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$,

$((P \cdot Q) \cdot R)(x)) = ((a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot (b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0)) \cdot (c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0) =$

$((a_n b_n) x^{2n} + \cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x^1 + a_0 b_0) \cdot (c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0) =$

$((a_n b_n \cdot c_n) x^{3n} + \cdots + ((a_0 b_0) \cdot c_2 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) \cdot c_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) \cdot c_1) x^2 + ((a_1 b_0 + a_0 b_1) \cdot c_0 + a_0 b_0 \cdot c_1) x^1 + a_0 b_0 \cdot c_0) =$

$(a_n \cdot b_n c_n) x^{3n} + \cdots + (a_0 \cdot b_0 c_2 + a_0 \cdot b_2 c_0 + a_0 \cdot b_1 c_1 + a_1 \cdot b_1 c_0 + a_1 \cdot b_0 c_1 + a_2 \cdot b_0 c_0) x^2 + (a_0 \cdot b_0 c_1 + a_0 \cdot b_1 c_0 + a_1 b_0 c_0) x^1 + a_0 \cdot b_0 c_0 =$

$(a_n \cdot (b_n c_n)) x^{3n} + \cdots + (a_0 \cdot (b_0 c_2) + a_0 \cdot (b_2 c_0) + a_0 \cdot (b_1 c_1) + a_1 \cdot (b_1 c_0) + a_1 \cdot (b_0 c_1) + a_2 \cdot (b_0 c_0)) x^2 + (a_0 \cdot (b_0 c_1) + a_0 \cdot (b_1 c_0) + a_1 \cdot (b_0 c_0)) x^1 + a_0 \cdot (b_0 c_0) =$

$(a_n \cdot (b_n c_n)) x^{3n} + \cdots + (a_0 \cdot ((b_0 c_2) + (b_2 c_0) + (b_1 c_1)) + a_1 \cdot ((b_1 c_0) + (b_0 c_1)) + a_2 \cdot (b_0 c_0)) x^2 + (a_0 \cdot ((b_0 c_1) + (b_1 c_0)) + a_1 \cdot (b_0 c_0)) x^1 + a_0 \cdot (b_0 c_0) =$

$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot ((b_n c_n) x^{2n} + \cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x^1 + a_0 b_0) \cdot =$

$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot ((b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0) \cdot (c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0)) = (P \cdot (Q \cdot R)(x))$.

A6 - Comutatividade do Produto.

$$P \cdot Q = Q \cdot P$$

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, temos

$P(x) \cdot Q(x) =$

$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot (b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0) =$

$(a_n b_n) x^{2n} + \cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x^1 + a_0 b_0) =$

$(b_n a_n) x^{2n} + \cdots + (b_2 a_0 + b_1 a_1 + b_0 a_2) x^2 + (b_1 a_0 + b_0 a_1) x^1 + b_0 a_0) =$

$(b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0) \cdot (a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) =$

$Q(x) \cdot P(x)$

A7 - Elemento Neutro.

$$P \cdot E_0 = P$$

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e o polinômio $E_0(x)$ como sendo um polinômio constante com $a_0 = 1$, temos que, $E_0(x) = 0x^n + \cdots + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$, assim

$$P(x) \cdot E_0(x) =$$

$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot (0x^n + \cdots + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1) =$

$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot 1 = (a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) = P(x)$.

Logo, $E_0(x) = 0x^n + \cdots + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$ é o polinômio neutro da multiplicação.

A8 - Distributividade do produto em relação a soma.

$$P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$$

Tomando, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ e $R(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, temos que

$(P \cdot (Q + R)(x)) = (a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot ((b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0)) + (c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0)) =$

$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot ((b_n + c_n) x^n + \cdots + (b_2 + c_2) x^2 + (b_1 + c_1) x^1 + (b_0 + c_0)) =$

$(a_n \cdot (b_n + c_n) x^{2n} + \cdots + a_0 \cdot (b_2 + c_2) x^2 + a_0 \cdot (b_1 + c_1) x^1 + a_0 \cdot (b_0 + c_0)) =$

$a_n b_n x^{2n} + a_n c_n x^{2n} + \cdots + a_0 b_2 x^2 + a_0 c_2 x^2 + a_0 b_1 x^1 + a_0 c_1 x^1 + a_0 b_0 + a_0 c_0 =$

$a_n b_n x^{2n} + \cdots + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_1 x^1 + a_0 b_0 + a_n c_n x^{2n} + \cdots + a_0 c_2 x^2 + a_0 c_1 x^1 + a_0 c_0 =$

$a_n x^n (b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0) + \cdots + a_0 (b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0) + a_n x^n (c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0) + \cdots + a_0 (c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0) =$

$(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot (b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0) + (a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \cdot (c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0) = (P \cdot Q + P \cdot R)(x))$

$\square$

Dispositivos práticos

Os dispositivos apresentados abaixo são mostradas no livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 6, de (Iezzi 2013). Trataremos aqui da maneira mais didática possível, de forma que fique compreensível para alunos de nível médio.

Exemplo 13. *Dados os polinômios* $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + x$ *e* $g(x) = 2x^2 - x + 1$, *vamos obter o produto* $f(x) \cdot g(x)$ *em cada um dos dispositivos.*

Dispositivo 1. Disporemos os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ um abaixo do outro, espaçados e organizados. Faremos uma linha de separação entre os polinômios e o resultado das operações necessárias que serão feitas.

Com isso, multiplicaremos o primeiro termo de $g(x)$, que é $2x^2$, por $f(x)$ e escreveremos os resultados de maneira espaçada e organizada. Em seguida, multiplicaremos o segundo termo de $g(x)$, $-x$, por $f(x)$ e escreveremos os termos obtidos de acordo com o expoente da incógnita, $-3x^4$ sob $10x^4$ e assim por diante.

Após realizadas todas as multiplicações de cada termo de $g(x)$ por $f(x)$ e organizados os resultados, basta somá-los de acordo com o que aparece, termo abaixo de termo.

$$
\begin{array}{r|llllll}
f(x) \rightarrow & 3x^3 & +\ 5x^2 & +\ x & & & \\
g(x) \rightarrow & 2x^2 & -\ x & +\ 1 & & & \\
\hline
2x^2 \cdot f(x) \rightarrow & 6x^5 & +\ 10x^4 & +\ 2x^3 & & & \\
-x \cdot f(x) \rightarrow & & -3x^4 & -\ 5x^3 & -\ x^2 & & + \\
1 \cdot f(x) \rightarrow & & & +\ 3x^3 & +\ 5x^2 & +\ x & \\
\hline
f(x) \cdot g(x) \rightarrow & 6x^5 & +\ 7x^4 & +\ 0x^3 & +\ 4x^2 & +\ x &
\end{array}
$$

Logo,

$$f(x) \cdot g(x) = 6x^5 + 7x^4 + 4x^2 + x.$$

Dipositivo 2. Vamos dispor em uma tabela os coeficientes de $f(x)$ na primeira coluna e os de coeficientes de $g(x)$ na primeira linha. Faremos então a multiplicação de cada linha por cada coluna, obtendo assim os valores mostrados.

$f/\ g$	2	-1	1
3	6	-3	3
5	10	-5	5
1	2	-1	1
0	0	0	0

Em seguida, somaremos os valores obtidos, em diagonal, de baixo para cima, da esquerda para a direita, tal qual as cores nos orientam.

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 = 0 + 1 &= 1 \\ c_2 = 0 - 1 + 5 &= 4 \\ c_3 = 2 - 5 + 3 &= 0 \\ c_4 = 10 - 3 &= 7 \\ c_5 &= 6 \end{aligned}$$

Com isso, os c_i $\forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots, n\}$ obtidos são os coeficientes do polinômio gerados pelo produto $f(x) \cdot g(x)$.

Logo,

$$f(x) \cdot g(x) = 6x^5 + 7x^4 + 4x^2 + x.$$

Definição 7 (Grau)**.** *Seja $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ um polinômio não nulo. Chamamos de grau de P, e representamos por $gr(P)$ o número natural n tal que $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > n$.*

$$gr(P) = n \Leftrightarrow a_n \neq 0, a_i = 0, \forall i > n.$$

observação 1. *Em outras palavras, grau de um polinômio é o maior expoente da variável x dentre todos os termos não nulos. Mais ainda, se $P(x)$ é um polinômio constante e não nulo, seu grau é zero. O coeficiente dominante é aquele coeficiente do termo que determina o grau do polinômio.*

Teorema 3 (Grau da soma)**.** *Temos que se P, Q e $P+Q$ são polinômios não nulos, então o grau de $P+Q$ é menor ou igual ao maior dos números $gr(P)$ e $gr(Q)$.*

$$gr(P+Q) \leq max\ \{gr(p), gr(Q)\}$$

Demonstração. Sejam $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ e $gr(P) = n$ e $gr(Q) = m$ com $m \neq n$.

Vamos supor $n \geq m$, assim $n = max\{gr(P), gr(Q)\}$. Se $n > m \Rightarrow gr(P+Q) = n$. Se $n = m$, temos $c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall i > m$ e $c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo então:

$$gr(P+Q) \leq max\ \{gr(p), gr(Q)\}$$

□

Teorema 4 (Grau do produto)**.** *Sejam P e Q polinômios não nulos, então o grau de $P \cdot Q$ é igual a soma dos graus de P e Q.*

$$gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q)$$

Demonstração. Sejam $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ e $gr(P) = n$ e $gr(Q) = m$ e seja $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$ coeficiente de $(P \cdot Q)(x)$. Temos que $c_{n+m} = a_n \cdot b_m \neq 0$,

$c_k = 0, \ \forall k > n+m$, então

$$gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q)$$

$\square$

Exemplo 14. *O polinômio* $f(x) = \cdots + 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x - 2$ *é um polinômio constante e pode ser escrito como* $f(x) = -2$.

Apresentaremos também outra forma de escrever polinômio, que é por meio da notação de uplas ordenadas. Onde um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$$

pode ser representado da seguinte maneira

$$p = (\ldots, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0)$$

onde $a_i \neq 0$ para um número finito de índices, com a definição canônica de igualdade de uplas temos:

$$f(x) = \cdots + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + a_1 x + a_0 \Leftrightarrow f = (\ldots, 0, 0, 0, 0, a_1, a_0)$$

$$f(x) = \cdots + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Leftrightarrow f = (\ldots, 0, 0, 0, a_2, a_1, a_0)$$

$$f(x) = \cdots + 0x^5 + 0x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Leftrightarrow f = (\ldots, 0, 0, a_3, a_2, a_1, a_0)$$

$$f(x) = \cdots + 0x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Leftrightarrow f = (\ldots, 0, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$$

$$f(x) = \cdots + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Leftrightarrow f = (\ldots, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$$

$$f(x) = \cdots + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow f = (\ldots, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0), \text{ onde } a_i \in P.$$

Exemplo 15. *Os polinômios* $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + x^2 + 5x + 1$ *e* $g(x) = 7x^7 + 5x^5 - 3x^4 + 2x - 6$*, podem ser representados como* $f = (4, 0, -3, 1, 5, 1)$ *e* $g = (7, 0, 5, -3, 0, 0, 2, -6)$.

Agora, vamos aplicar a soma usando a notação de uplas.

Temos que,

$$f(x) + g(x) = f + g$$

Assim, escrevendo em uplas, de maneira a facilitar o entendimento vamos completar com 0 os coeficientes nulos, convenientes, para que todas as somas tenham pares.

$$f = (0,\ 0,\ 4,\ 0,\ -3,\ 1,\ 5,\ 1)$$

$$g = (7,\ 0,\ 5,\ -3,\ 0,\ 0,\ 2,\ -6)$$

Agora somando membro a membro

$$f + g = (0 + 7,\ 0 + 0,\ 4 + 5,\ 0 - 3,\ -3 + 0,\ 1 + 0,\ 5 + 2,\ 1 - 6)$$

$$f + g = (7,\ 0,\ 9,\ -3,\ -3,\ 1,\ 7,\ -5)$$

Logo, $f(x) + g(x) = f + g = 7x^7 + 9x^5 - 3x^4 - 3x^3 + x^2 + 7x - 5.$

Agora vamos tomar $f(x) = 2x^2 + x$ *e* $g(x) = 3x^3 + x^2 - 4$ *e fazer a multiplicação*

$$f(x) \cdot g(x) = f \cdot g$$

Para melhorar o entendimento tomaremos as posições de cada termo

$$f = (a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0)$$

$$g = (b_3,\ b_2,\ b_1,\ b_0)$$

Assim, utilizando a definição de Produto, multiplicaremos os coeficientes e somaremos os resultados dos produtos que tenham mesma soma dos índices. No caso, teremos que ter soma de índices igual a 6, resultando em $a_3 \cdot b_3$, *soma de índices igual a 5, resultando em* $a_3 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3$, *e assim por diante.*

$$f \cdot g = (0,\ 2,\ 1,\ 0) \cdot (3,\ 1,\ 0,\ -4) =$$

$$(0{\cdot}3,\ 0{\cdot}1{+}2{\cdot}3,\ 0{\cdot}0{+}2{\cdot}1{+}1{\cdot}3,\ 0{\cdot}(-4){+}2{\cdot}0{+}1{\cdot}1{+}0{\cdot}3,\ 2{\cdot}(-4){+}1{\cdot}0{+}0{\cdot}1,\ 1{\cdot}(-4),\ 0{\cdot}0) =$$

$$(0,\ 6,\ 5,\ 1,\ -8,\ -4,\ 0)$$

Logo $f(x) + g(x) = f \cdot g = 6x^5 + 5x^4 + x^3 - 8x^2 - 4x$.

2.5 Divisão de Polinômios

Definição 8 (Divisão de polinômios). *Dados os polinômios f e g com f sendo o dividendo e g o divisor, com $g \neq 0$, assim dividindo f por g obteremos outros dois polinômios, q sendo o quociente da divisão e r o resto da divisão, satisfazendo as seguintes condições:*

- $q \cdot g + r = f$;
- $gr(r) < gr(g)$, *(ou $r = 0$, caso em que a divisão é dita exata).*

3 Fatoração

De forma geral, um polinômio de grau n é escrito na forma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Desejamos determinar ξ tal que $p(\xi) = 0$. As raízes de $p(x)$ podem ser reais ou complexas. Mas, nem sempre a determinação dessas raízes é uma tarefa fácil. Se $n = 2$, sabemos da álgebra elementar como achar zeros de $p_2(x)$. Existem fórmulas fechadas, semelhantes à fórmula para polinômios de grau 2, mas bem mais complicadas, para zeros de polinômios de grau 3 e 4. Para $n \geq 5$, em geral, não existem formas explícitas para determinarmos as raízes dos polinômios em termos de seus coeficientes. Neste caso, utilizaremos métodos iterativos para encontrar zeros de polinômios.

Exemplo 16. *No polinômio,* $p(x) = 7x^3 + 2x^2 - x - 9$, *temos* $a_0 = -9, a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = 7$, *onde* $n = 3$ *é o grau do polinômio.*

Exemplo 17. *Dois polinômios* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são iguais se seus graus e coeficientes são iguais. Sejam os polinômios:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0$$

Com igualdade $p(x) = q(x), \forall x \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i = 0, \cdots, n$

Exemplo 18. *Seja* $p(x)$ *um polinômio de grau* $n \geq 1$. *Dizemos que* ξ *é uma raiz de multiplicidade* m *se:*

$p'(\xi) = p''(\xi) = \cdots = p^{(m-1)}(\xi) \neq 0$ *e* $p^{(m)}(\xi) = 0$, *onde* $p^{(m)}$ *é a m-ésima derivada de* $p(x)$, *no ponto* ξ.

Exemplo 19. *Considere o polinômio* $p(x) = x^3$. *Temos que* $\xi = 0$ *é uma raiz de* $p(x)$, *note que* $p'(0) = p''(0) = 0$ *e* $p'''(0) = 6 \neq 0$. *Neste caso, entendemos que* $\xi = 0$ *é uma raiz com multiplicidade* 3.

Teorema 5 (**Teorema Fundamental da Álgebra**). *A equação polinomial dada por* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, *com coeficientes reais ou complexos, possui pelo menos uma raiz, ou seja existe pelo menos uma raiz real ou complexa tal que* $p(x) = 0$

observação 2. *Seja* $p(x)$ *um polinômio de grau* $n \geq 1$. *A equação* $p(x) = 0$ *possui exatamente* n *raízes (reais + complexas + multiplicidade)*

observação 3. *Seja* $p(x)$ *um polinômio de grau* $n \geq 1$, *então para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existe um único polinômio* $q(x)$ *de grau* $(n-1)$ *tal que*

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha)$$

Onde $p(\alpha)$ *é o resto da divisão de* $p(x)$ *por* $(x - \alpha)$ *(Teorema do Resto).*

Exemplo 20. *A divisão do polinômio* $p(x) = 6x^2 - 4x + 2$ *pelo polinômio* $(x - 4)$ *resulta* $q(x) = 6x + 20$ *e o resto dessa divisão,* $p(4) = 82$.

3.1 Determinação das raízes reais

Para se obter raízes de equações polinomiais, pode-se aplicar qualquer um dos métodos numéricos estudados anteriormente, porém veremos aqui o método de Newton com o método de Briot-Ruffini, o qual avalia o polinômio e sua derivada num ponto x_i com um número mínimo de equações aritméticas.

3.2 Método de Briot-Ruffini

Dado um polinômio $p(x)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, existe um único polinômio $q(x)$ de grau $(n-1)$ tal que $p(x) = (x-\alpha)q(x) + p(\alpha)$. Vale notar, que $p(\alpha)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-\alpha)$.

O que o método de Briot-Ruffini nos diz é, como determinar os coeficientes de $q(x)$ e $p(\alpha)$ diretamente, como segue.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ q(x) &= b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_1 \\ p(\alpha) &= b_0 \quad \text{(resto da divisão)} \end{aligned}$$

temos:

$$\left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right] = (x-\alpha)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_1\right] =$$
$$b_n x^n + (b_{n-1} - \alpha b_n)x^{n-1} + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-2} + \cdots + (b_1 - \alpha b_2)x + (b_0 - \alpha b_1)$$

pela igualdade dos polinômios, temos que:

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - \alpha b_n \quad \Rightarrow \quad b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_n \\ &\vdots \\ a_1 &= b_1 - \alpha b_2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = a_1 + \alpha b_2 \\ a_0 &= b_0 - \alpha b_1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = a_0 + \alpha b_1 \end{aligned}$$

Note que, dessa forma, $p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0$ pode ser calculado com n operações de adições e n operações de multiplicação.

3.3 Esquema prático de Briot-Ruffini

Podemos obter facilmente os coeficientes de $q(x)$ e o resto da divisão de $p(\alpha)$ conforme esquema prático que segue

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline \alpha & a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 = p(\alpha) \end{array}$$

Exemplo 21. *Seja $p(x) = 6x^3 + x - 1$ calcule $p(3)$ e encontre $g(x)$.*

Temos,

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 = 6 \\ b_2 &= a_2 + \alpha b_3 = 0 + 3(6) = 18 \\ b_1 &= a_1 + \alpha b_2 = 1 + 3(18) = 55 \\ b_0 &= a_0 + \alpha b_1 = -1 + 3(55) = 164 = p(3) \end{aligned}$$

e ao mesmo tempo temos $g(x) = 6x^2 + 18x + 55$, de tal forma que vale

$$p(x) = (x-3)(6x^2 + 18x + 55) + p(3)$$

Que está de acordo com o esquema prático de Briot-Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 6 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 3 & 6 & 18 & 55 & 164 = p(3) \end{array}$$

4 Um pouco de Cálculo Numérico

4.1 Localização de Raízes

Algumas vezes nos deparamos com polinômios que a primeira vista não surge ideia de como serão as suas raízes, a localização dessas raízes, se serão raízes positivas ou negativas. Pré-requisitos esses que nos pouparia tempo e raciocínio no trabalho em uma decomposição de polinômios e afins. Dito isto, veremos alguns resultados que nos auxiliam na investigação da localização de raízes de uma equação polinomial.

Primeiramente utilizaremos a *Regra de Sinal de Descartes* para determinarmos o número de zeros reais positivos de um polinômio com coeficientes reais. Vamos tomar como exemplo o polinômio

$$P(x) = x^4 + x^3 - 22x^2 - 2x + 40$$

que aparentemente não temos como saber nada sobre suas raízes. Percebemos que alguns termos tem sinais diferente dos outros, como x^4, x^3, 40 tem sinal positivo $(+)$ e os termos $22x^2$ e $2x$ tem sinal negativo $(-)$.

O que vai importar é a mudança de sinais diferentes de um termo para o outro, que ocorre do termo $+x^3$ para $-22x^2$ e do termo $-2x$ para $+40$. No caso, temos duas mudanças de sinais, que vamos chamar de *variações (v)*.

A *Regra de Sinal de Descartes* diz que o número de raízes reais positivas (z) é menor ou igual ao número de variações de sinais (v), e além disso, a diferença entre o número de variações e a quantidade de raízes positivas é um inteiro par, não negativo, $(v - z) \in 2\mathbb{Z}_+$.

Assim, retomando ao exemplo, temos que o número de variações $v = 2$, daí

$$\Rightarrow v = 2 \Rightarrow r : \begin{cases} v - z = 0, \quad z = 2 \quad \text{ou} \\ \\ v - z = 2, \quad z = 0 \end{cases}$$

Portanto, concluímos que o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 - 22x^2 - 2x + 40$ tem duas ou nenhuma raíz real positiva.

Nem sempre é simples obtermos a forma fatorando de um polinômio, mas vamos expor a forma fatorada do polinômio $P(x)$ para visualizarmos de maneira mais fácil a utilidade da *regra de Descartes*.

$$P(x) = (x^2 - 2)(x - 4)(x + 5)$$

que têm como raízes -5, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ e 4, onde $\sqrt{2}$, 4 são as duas raízes reais positivas. Graficamente, podemos ver como se comporta o polinômio $P(x)$

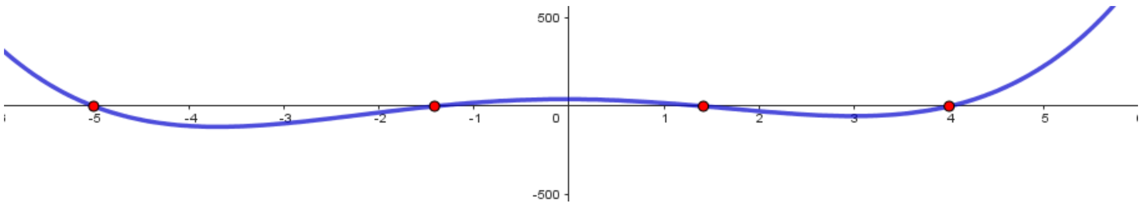


Figura 4.1: $P(x) = x^4 + x^3 - 22x^2 - 2x + 40$

Teorema 6. *(A Regra de Sinal Descartes) Seja* $P(x) = a_n x^{b_n} + \cdots + a_1 x^{b_1} + a_0 x^{b_0}$ *um polinômio com coeficientes,* a_i*, reais diferentes de zero, onde os* b_i *são inteiros que satisfazem* $b_n > \cdots > b_2 > b_1 > b_0 \geq 0$*. Então o número de zeros reais positivos de* $P(x)$ *é tanto igual ao número de variações de sinais da sequência dos coeficientes* $a_n, \cdots, a_2, a_1, a_0$ *ou menor que isso. Além disso, a diferença entre o número de variações de sinais e a quantidade de raízes positivas é um número inteiro par.*

Demonstração. Sem perda de generalidade assumiremos que $b_0 = 0$ e vamos usar indução sobre n.

- Para $n = 1$

  Visualize que o polinômio se reduz para $P(x) = a_1x + a_0$ e temos os seguintes casos:

- $a_1 \cdot a_0 > 0$, quando não há variação de sinais, pois para o produto ser maior que zero tem-se que $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$ ou $a_1 < 0$ e $a_0 < 0$. E, $a_1x + a_0 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{a_0}{a_1}$, raiz negativa, assim como $-a_1x - a_0 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{a_0}{a_1}$, raiz também negativa. Como não houve mudança de sinais, nem raízes positivas, logo, $v = 0$ e $z = 0$, e o resultado é válido, $v \geq z$.

- $a_1 \cdot a_0 < 0$, quando há variação de sinais, pois para o produto ser menor que zero tem-se que $a_1 > 0$ e $a_0 < 0$ ou $a_1 < 0$ e $a_0 > 0$. E, $a_1x - a_0 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a_0}{a_1}$, raiz positiva, assim como $-a_1x + a_0 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a_0}{a_1}$, raiz também positiva. Houve mudança de sinais, e uma raiz positiva, logo, $v = 1$ e $z = 1$, e o resultado é válido, $v \geq z$.

- Vamos supor que o resultado vale para $n-1$, assim $v \geq z$, e mais v e z ou ambos são pares ou ambos são ímpares.

- Agora vamos verificar se o resultado vale para n, isto é, mostrar que v e z tem a mesma paridade.

  Vamos seperar em dois casos

$\square$

Lema 1. *Seja $P(x) = a_nx^{b_n} + \cdots + a_1x^{b_1} + a_0x^{b_0}$ um polinômio como no teorema acima. Se $a_0 \cdot a_n > 0$ então z é par, se $a_0 \cdot a_n < 0$ então z é ímpar.*

Exemplo 22. *1)* $p_5(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

Os sinais dos coeficientes alternam da seguinte forma (Do grau maior para o menor)

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad +$$

há mudança de sinal do primeiro para o segundo e do terceiro para o quarto.

$$\Rightarrow v = 2 \Rightarrow p : \begin{cases} v - p = 0, \quad p = 2 \quad \text{ou} \\ \\ v - p = 2, \quad p = 0 \end{cases}$$

2) $p_5(x) = 4x^5 - x^3 + 4x^2 - x - 1$ os sinais dos coeficientes alternam da seguinte forma (Do grau maior para o menor)

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad -$$

então temos: do primeiro sinal para o segunda há uma mudança de $+$ para $-$, do segundo sinal para o terceiro há outra mudança, e do terceiro para quarto muda novamente. Do quarto para quinto não há mudança de sinal. Dessa forma temos 3 variações no sinal, isto é $v = 3$.

Para determinar as raízes reais negativas, neg, tomamos $p_n(-x)$ e usamos a regra para raízes positivos, isto é, basta calcular o número de variações de sinis do polinômio $p_n(-x)$.

Exemplo 23. *Dada a equação polinomial* $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$*, aplicando o teorema da regra de Descartes, temos:*

A troca de sinais nos coeficientes de $p(x)$ *é* $v = 1$*. Como* $(v - p)$ *é inteiro par, temos:*

$v = 1 \Rightarrow p = 1$, então o polinômio deve possuir uma raiz real positiva.

Teorema 7. *Dado o polinômio $p_n(x)$ de grau n, se o desenvolvermos por Taylor em torno do ponto $x = \alpha$, temos*

$$p_n(x) = p_n(\alpha) + p_n'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{p_n''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Se fizermos $x - \alpha = y$, ao acharmos o número de raízes reais de $p_n(y) = 0$ que são maiores que zero, estaremos encontrando o número de raízes de $p_n(x) = 0$ que são maiores que α.

Podemos usar este resultado juntamente com a regra de sinal de Descartes para analisar as raízes de um determinado polinômio.

Teorema 8. *(Teorema de Sturm) Dado o polinômio $p(x)$ e um número real α, seja $v(\alpha)$ o número de variações de sinal na sequência $g_0(\alpha), g_1(\alpha), \cdots, g_n(\alpha)$, ignorando-se os zeros, em que $g_0(x) = p(x), g_1(x) = p'(x)$ e que para $k \geq 2$, $g_k(x)$ é o resto da divisão de $g_{k-2}(x)$ por $g_{k-1}(x)$, com sinal trocado. Se os números α e β não são raízes do polinômio $p(x)$, então o número de raízes distintas de $p(x) = 0$ no ntervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é exatamente $v(\alpha) - v(\beta)$.*

Dado o polinômio $p_n(x)$ e um número α, vamos vamos definir $\tilde{v}(\alpha)$ como sendo o número de variações de sinal em $\{g_i(\alpha)\}$ onde construímos asequência $g_0(\alpha), g_1(\alpha), \cdots, g_n(\alpha)$, ignorando os zeros, assim

$$\begin{cases} g_0(x) = p_n(x) \\ g_1(x) = p_n'(x) \end{cases}$$

e, para $k \geq 2, g_k(x)$ é o resto da divisão de g_{k-2} por g_{k-1}, com sinal trocado.

Exemplo 24. $p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$$\begin{cases} g_0(x) = p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) = p_3'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

vamos determinar $g_2(x)$ *utilizando o método da chave, temos:*

$$\begin{array}{c|c} x^3 + x^2 - x + 1 & 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2x}{3} + 1 & \dfrac{x}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2x}{3} + 1 & 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline -\dfrac{8x}{9} + \dfrac{10}{9} & \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9} \end{array}$$

Com isso, $g_2(x) = \dfrac{8x}{9} - \dfrac{10}{9}$.

Agora vamos determinar $g_3(x)$

$$\begin{array}{c|c} 3x^2 + 2x - 1 & \dfrac{8x}{9} - \dfrac{10}{9} \\ \hline \dfrac{23x}{4} - 1 & \dfrac{27x}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{23x}{4} - 1 & \dfrac{8x}{9} - \dfrac{10}{9} \\ \hline \dfrac{99}{16} & \dfrac{27x}{8} + \dfrac{207}{32} \end{array}$$

Logo, $g_3(x) = -\dfrac{99}{16}$.

Assim, se $\alpha = 2$, por exemplo, temos:

$$\begin{cases} g_0(2) = 11 > 0 \\ g_1(2) = 15 > 0 \end{cases}$$

para $g_2(x)$ e $g_3(x)$ aplicados em $\alpha = 2$, temos:

$$\begin{cases} g_2(2) = \frac{2}{3} > 0 \\ g_3(2) = -\frac{99}{16} < 0 \end{cases}$$

Há aqui 01 variação, logo

$$v(\alpha) = v(2) = 1$$

Exemplo 25. *Dado o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, e usando o teorema de Sturm, temos:*

$$\begin{aligned} g_0(x) &= p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ g_1(x) &= p'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \\ g_2(x) &= \frac{14}{9}x + \frac{16}{9} \\ g_3(x) &= \frac{81}{49} \end{aligned}$$

Assim, para $\alpha = 0$ *e* $\beta = -1.5$*, temos:*

$$\begin{aligned}
g_0(0) &= -2, \quad e \quad g_0(-1.5) = 0.625 \\
g_1(0) &= -1, \quad e \quad g_1(-1.5) = 0.25 \\
g_2(0) &= \frac{16}{9}, \quad e \quad g_2(-1.5) = -0.556 \\
g_3(0) &= \frac{81}{49}, \quad e \quad g_3(-1.5) = \frac{81}{49}
\end{aligned}$$

Sendo $v(0) = 1$ *e* $v(-1.5) = 2$*, temos que* $v(-1.5) - v(0) = 1$*, portanto, existe uma raiz no intervalo* $(-1.5, 0)$.

4.2 Métodos numéricos para determinar raízes de polinômios

4.2.1 Método de Newton-Raphson

O método das **aproximações sucessivas** consiste em transformarmos a equação dada na forma equivalente

$$x = \varphi(x)$$

onde φ é uma função de uma variável a qual denominamos função de iteração. Do método das aproximações sucessivas, sabemos que, se $|\varphi'(x)| < 1$, para x nas vizinhanças da raiz, e escolhendo-se x_0 uma "boa"aproximação inicial, a sequência gerada pelo processo iterativo

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \cdots$$

é convergente para a raiz ξ.

O Método de Newton consiste em determinar uma função $\varphi(x)$ tal que

$$|\varphi'(\xi)| = 0$$

Neste caso, para x numa vizinhança de ξ, temos $\varphi'(x) \equiv 0$ e, portanto, $|\varphi'(x)| < 1$ e a convergência é garantida.

Considere uma função $\vartheta(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua e tal que $\vartheta(\bar{x}) \neq 0$ para todo x. Multiplicando $\vartheta(x)$ na equação $f(x) = 0$ e somando x em ambos os lados, temos a forma equivalente

$$x + \vartheta(x)f(x) = x$$

de modo que uma função de iteração pode ser tomada como

$$\varphi(x) = x + \vartheta(x)f(x)$$

ou seja, $x = \varphi(x)$ é equivalente a $f(x) = 0$

Procuramos agora uma função $\vartheta(x)$ tal que:

$$\varphi'(\xi) = 1 + \vartheta'(\xi)f(\xi) + f'(\xi)\vartheta(\xi) = 0$$

Como $f(\xi) = 0$ e, supondo $f'(\xi) \neq 0$, temos que:

$$\vartheta(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)} \tag{1}$$

Assim, uma escolha para $\vartheta(x)$ é tomada por $\vartheta(\xi) = \frac{-1}{f'(x)}$ e, portanto, de

$$\varphi(x) = x + \vartheta(x)f(x)$$

temos

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Daí, o processo iterativo é dado por

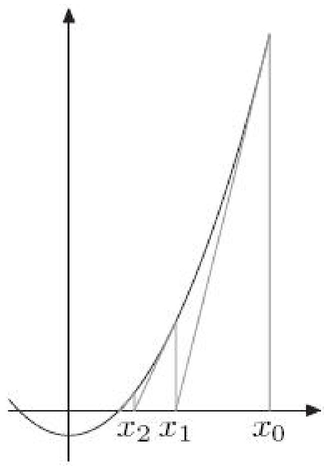
$$\varphi(x_i) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Dessa forma o método de Newton consiste em tomarmos

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2}$$

4.2.2 Interpretação geométrica do método de Newton

Consideremos o problema de calcular a raiz de uma função f conforme a figura



Queremos calcular x_1 em função de x_0, sabendo que x_1 será um ponto no eixo das abcissas interceptado pela reta tangente à curva, originada por x_0.

A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem inclinação $m = f'(x_0)$ e é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sabendo que essa reta passa por $(x_1, 0)$, temos que

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

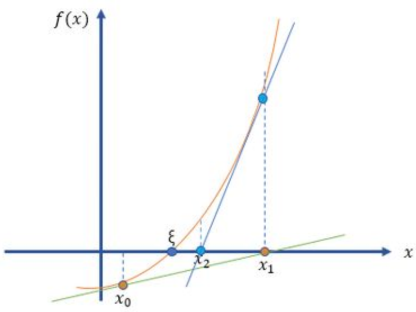
Portanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De modo geral, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Analisando o seguinte gráfico, em relação ao ângulo formado pela reta tangente em seus pontos



Definindo como α o ângulo formado com o eixo das abcissas através da reta tangente à função $f(x)$ no ponto x_i, temos

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})}$$

ou seja

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Assim, temos

$$\varphi(x_i) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ou

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

O método de Newton também é conhecido como Método das tangentes

Exemplo 26. *Considere* $f(x) = x^2 + x - 6$*,* $\xi_2 = 2$ *e* $x_0 = 1.5$*. Aqui, temos*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$$

E assim

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.5 \\ x_1 &= \varphi(x_0) = 2.0625 \\ x_2 &= \varphi(x_1) = 2.00076 \\ x_3 &= \varphi(x_2) = 2.00000 \end{aligned}$$

Trabalhando com 5 casas decimais de aproximação, temos $\xi = x_3 = 2.00000$. Esse exemplo, feito como o método do ponto fixo anteriormente, obtivemos $x_5 = 2.00048$ com cinco casas decimais.

4.2.3 Convergência do Método de Newton

Teorema 9. *Sejam $f(x), f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$ e $f'(\xi) \neq 0$. Então, existe um intervalo $J \subset I$, contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in J$, a sequência x_k gerada pela fórmula $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ convergirá para a raiz.*

Demonstração. O método de Newton é um Método de ponto fixo com função de iteração $\varphi(x)$, que é dada por $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Assim, para provar a convergência do método, basta verificar que, sob as hipóteses acima, as mesmas hipóteses no método do ponto fixo são satisfeitas para $\varphi(x)$. Isto é, precisamos provar que existe um intervalo $J \subset I$ centrado em ξ, tal que:

i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em J;

ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \quad \forall x \in J$.

Temos que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{e} \qquad \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Por hipótese, $f'(\xi) \neq 0$ e, como $f'(x)$ é contínua em I, é possível obter $I_1 \subset I$ tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I_1$. Daí, no intervalo $I_1 \subset I$, tem-se que $f(x), f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas e $f'(x) \neq 0$. Portanto, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I_1.

Seja agora, $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Como $\varphi'(x)$ é contínua em I_1 e $\varphi'(\xi) = 0$, é possível escolher $I_2 \subset I_1$ tal que $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$ e, ainda mais, tomamos de tal forma que I_2 tenha o centro em ξ.

Conseguimos obter um intervalo $I_2 \subset I$, centrado em ξ, tal que $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ sejam contínuas em I_2 e $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I_2$, Daí $J = I_2$.

Portanto, se $x_0 \in J$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo dado por $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ converge para raiz ξ. $\square$

observação 4. *Em geral, o método de Newton converge desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo"da raiz ξ.*

Exemplo 27. *Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$ que possui três zeros: $\xi_1 \in I_1 = (-4, -3)$, $\xi_2 \in I_2 = (0, 1)$ e $\xi_3 \in I_3 = (2, 3)$ e seja $x_0 = 1.5$. A sequência gerada pelo método é:*

Iteração	**x**	**f(x)**
1	-1.6666667	$0.1337037\text{x}10^2$
2	18.3888889	$0.6055725\text{x}10^4$
3	12.3660104	$0.1782694\text{x}10^4$
4	8.4023067	$0.051205716\text{x}10^2$
5	5.83533816	$0.1491821\text{x}10^4$
6	4.23387355	$0.4079022\text{x}10^4$
7	3.32291096	0.9784511x10
8	2.91733893	0.1573032x10
9	2.82219167	$0.7837065\text{x}10^{-1}$
10	2.81692988	$0.2342695\text{x}10^{-3}$

Analisando a tabela acima, observamos que inicialmente parece haver uma divergência da região onde estão as raízes, mas, a partir do x_7 os valores aproximam-se cada vez mais de ξ_3. A causa da divergência inicial é que x_0 está próximo de $\sqrt{3}$ que é um zero de $f'(x)$ e esta aproximação inicial gera $x_1 = -1.66667 = -\sqrt{3}$ que é o outro zero de $f'(x)$ pois

$$f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

O Algoritmo

Considere a equação $f(x) = 0$. Suponha que vale as hipóteses do teorema de convergência. Temos os seguintes passos:

1) Dados iniciais:

a) x_0; aproximação inicial;

b) ξ_1 e ξ_2; precisões

2) Se $|f(x_0)| < \xi_i$, tome $\xi = \bar{x} = x_0$. Fim.

3) $k = 1$

4) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$;

5) Se $|f(x_1)| < \xi_1$ ou se $|x_1 - x_0| < \xi_2$, faça $\xi = \bar{x} = x_1$. Fim.

6) $x_0 = x_1$;

7) $k = k + 1$, volte ao passo 4.

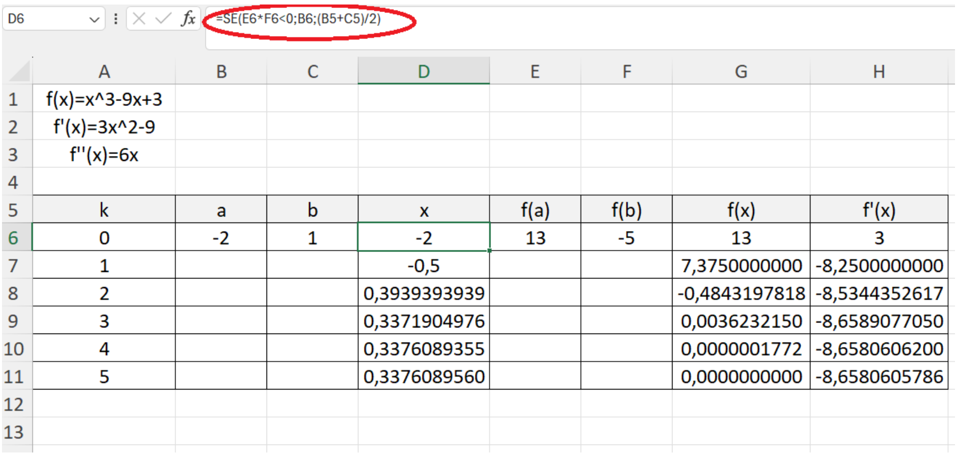
Exemplo 28. $f(x) = x^3 - 9x + 3$; *e* $x_0 = 0.5$; $\xi = 1 \times 10^{-4}$; *e* $\xi \in (0, 1)$

Os resultados obtidos ao aplicar o método de Newton são:

Iteração	**x**	**f(x)**
0	0.5	-0.1375x10
1	0.33333333	0.3703703x10^{-1}
2	0.337606838	0.1834054x10^{-4}

dessa forma $\xi = \bar{x} = 0.337606838$ e $f(\xi) = 1.8 \times 10^{-5}$

Podemos fazer o algoritmo no Excel facilmente, como ilustrado na figura a seguir



D6 =SE(E6*F6<0;B6;(B5+C5)/2)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	f(x)=x^3-9x+3							
2	f'(x)=3x^2-9							
3	f''(x)=6x							
4								
5	k	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	f'(x)
6	0	-2	1	-2	13	-5	13	3
7	1			-0,5			7,3750000000	-8,2500000000
8	2			0,3939393939			-0,4843197818	-8,5344352617
9	3			0,3371904976			0,0036232150	-8,6589077050
10	4			0,3376089355			0,0000001772	-8,6580606200
11	5			0,3376089560			0,0000000000	-8,6580605786
12								
13								

Note que definimos na tabela o intervalo de a até b, e aplicamos o teorema do valor intermediário analisando o produto $f(a)f(b) < 0$, no Excel, usanos a função "SE", onde descrevemos

$$=\text{SE(E6*F6}<\text{0;B6;(B5+C5)/2)}$$

Daí, seguindo o algoritmo descrito acima, podemos fazer toda a etapa do processo de uma só vez.

4.2.4 O Método das Secantes

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$ e calcular seu valor numérico em cada iteração.

Uma alternativa para isso é substituir a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças.

$$f'(x_k) \equiv \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações para a raiz. Temos então a função de iteração

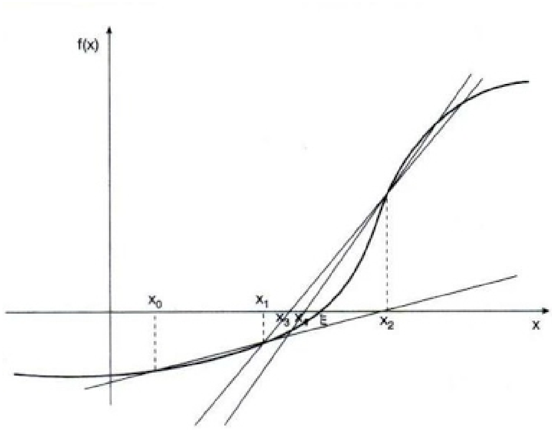
$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

ou ainda,

$$\varphi(x_k) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

4.2.5 Interpretação geométrica do método das secantes

Partindo das aproximações x_{k-1} e x_k, o ponto x_{k+1} é obtido como sendo a abcissa do ponto de interseção do eixo Ox e da reta tangente que passa por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$, conforme podemos ilustrar na figura abaixo:



Designando por α o ângulo entre o eixo da abcissa e a reta secante, temos

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

o que nos dá

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad \text{(Método das secantes)}$$

Confira com o gráfico acima!

O Algoritmo Dada a equação $f(x) = 0$, seguimos os passos:

1) Seja $f(x)$ contínua e $\epsilon > 0$ uma tolerância fixa.

2) Escolha x_0 e x_1, duas aproximações iniciais; E ϵ_1 e ϵ_2 precisões:

3) Se $|f(x_0)| < \epsilon_1$, faça $\xi = \bar{x} = x_0$, FIM.

4) Se $|f(x_1)| < \epsilon_1$ ou se $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$, faça $\xi = \bar{x} = x_1$, FIM.

5) $k = 1$

6) $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1 - x_0)$

7) Se $|f(x_2)| < \epsilon_1$ ou se $|x_2 - x_1| < \epsilon_2$, faça $\xi = x_2$, FIM.

8) $x_0 = x_1$ e $x_1 = x_2$

9) Tome $k = k + 1$, e volte ao passo 6.

Exemplo 29. $f(x) = x^3 - 9x + 3$, $x_0 = 0, x_1 = 1$, *e* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$

Usando o método das secantes, obtemos

Daí, $\xi = \bar{x} = 0.337634621$ e $f(\xi) = -2.2 \times 10^{-4}$.

observação 5. *O método da secante é uma aproximação para o método de Newton.*

Iteração	x	f(x)
1	0.375	-0.322265625
2	0.331941545	0.0491011376
3	0.337634621	-0.2222052×10^{-3}

observação 6. *O método pode divergir se* $f(x_k) \simeq f(x_{k-1})$.

observação 7. *A ordem de convergência do método da secante não é quadrática como a do método de Newton, mas também não é linear.*

5 O Ensino de Polinômios no Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que tem o caráter normatizador do conjunto das aprendizagens essenciais que todo aluno deve desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. De maneira que seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento sejam garantidos, assim como diz o Plano Nacional de Educação (PNE).

As unidades curriculares eletivas do ensino médio, comumente conhecidas como eletivas, fazem parte dos itinerários formativos, que compõem o currículo, aplicados nas escolas de tempo integral no estado do Ceará, as EEMTI. Além das eletivas, os itinerários formativos contam ainda com Formação para a Cidadania, Núcleo de Trabalho, Pesquisa e Práticas Sociais - NTPPS, Língua Estrangeira, Estudo Orientado, Aprofundamento em Língua Portuguesa, Aprofundamento em Matemática, Cultura Digital, Projeto Integrador e o Clube Estudantil. Para as turmas do terceiro ano, algumas dessas disciplinas deixam de fazer parte do currículo para dar lugar à formação para o ENEM, como Linguagens, Ciências Humanas, Ciências da Natureza e Matemática.

O foco no ensino de Matemática para o ENEM, muitas vezes, deixa de lado temas importantes da Matemática que, por vezes, são importantes em graduações nas áreas exatas e/ou tecnológicas. É nesse sentido que este trabalho tenta resgatar conceitos importantes em relação ao ensino de polinômios, fazendo uma conexão com seu uso em cálculo numérico, visando dar mais usabilidade para o conteúdo em situações aplicáveis.

5.1 Uma Abordagem para o Ensino Básico

Uma desvantagem do uso do método de Newton para encontrarmos zeros de polinômios é a necessidade de se usar a derivada, conceito que não é ensinado no ensino básico. Desse modo, qualquer método que fuja da aplicação de derivada e utilize apenas conceitos mais geométricos se torna mais interessante para o estudante. Nesse sentido, um método bastante interessante é o método de **Müller**, que é similar ao método da secante, enquanto o método da secante utiliza uma reta que liga dois pontos na curva para aproximar a raiz, o método de Müller utiliza uma parábola que liga três pontos na curva para determinar uma aproximação.

No ensino básico, a introdução a métodos para encontrar zeros de polinômios pode ser desafiadora, especialmente quando se considera a necessidade de conceitos mais avançados, como derivadas, que não são abordados até o ensino médio. O método de Newton, por exemplo, embora poderoso, requer o cálculo da derivada, o que pode ser uma barreira para alunos que ainda não aprenderam esse conceito.

Diante dessa limitação, métodos que não envolvem derivadas e que se baseiam em conceitos mais intuitivos e geométricos são mais apropriados para o ensino básico. Uma alternativa interessante é o **Método de Müller**, que pode ser mais acessível para estudantes.

O Método de Müller é uma extensão do método da secante e oferece uma abordagem geométrica para a aproximação das raízes de polinômios. Em vez de usar uma reta que conecta dois pontos na curva, como faz o método da secante, o Método de Müller utiliza uma **parábola** que passa por três pontos na curva do polinômio. Isso permite uma aproximação mais precisa da raiz ao ajustar a parábola para que ela se adeque melhor à forma da função em questão.

O método de Muller começa considerando um polinômio quadrático da seguinte forma

$$p(x) = a(x - a_2)^2 + b(x - a_2) + c \tag{3}$$

e consiste em deduzir os coeficientes da parábola que passa por três pontos. Esses coeficientes podem ser substituídos na fórmula quadrática para obter o ponto onde a parábola intercepta o eixo x, ou seja, a estimativa da raiz. É uma generalização do método secante, onde, em vez de uma linha secante usando dois pontos, obtemos um "ajuste parabólico"para três pontos, e isso consiste na única diferença. Queremos que essa parábola intercepte os três pontos $(a_0, f(a_0)), (a_1, f(a_1))$ e $(a_2, f(a_2))$, os coeficientes da equação (3) podem ser avaliados substituindo cada um dos três pontos

$$p(a_0) = a(a_0 - a_2)^2 + b(a_0 - a_2) + c$$

$$p(a_1) = a(a_1 - a_2)^2 + b(a_1 - a_2) + c$$

$$p(a_2) = a(a_2 - a_2)^2 + b(a_2 - a_2) + c$$

da última equação, obtemos $p(a_2) = c$, daí

$$\begin{aligned} p(a_0) - p(a_2) &= a(a_0 - a_2)^2 + b(a_0 - a_2) \\ p(a_1) - p(a_2) &= a(a_1 - a_2)^2 + b(a_1 - a_2) \end{aligned} \tag{4}$$

Com as substituições $t_0 = a_1 - a_0$ e $t_1 = a_2 - a_1$, e também

$$\delta_0 = \frac{p(a_1) - p(a_0)}{a_1 - a_0} \quad \text{e} \quad \delta_1 = \frac{p(a_2) - p(a_1)}{a_2 - a_1}$$

substituindo agora nas equações (4), obtemos

$$(t_0 + t_1)b - (t_0 + t_1)^2 a = t_0\delta_0 + t_1\delta_1 \tag{5}$$

e por consequência

$$t_1 b + t_1^2 a = t_1\delta_1 \tag{6}$$

que pode ser resolvida para a e b e assim

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{t_1 + t_0}$$

$$b = at_1 + \delta_1 \quad \text{e} \quad c = p(a_2)$$

Para determinar as raízes, substituímos em (3) para encontrarmos

$$x' - x'' = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{7}$$

Observamos que a substituição em (3) pode ocorrer erros de arredondamento, e daí muitas vezes é preferível usar a forma padrão.

O método consiste em um processo iterativo onde a iteração x_{i+1} é calculada como uma função das três últimas aproximações:

$$x_{i+1} = \varphi(x_1, x_{i-1}, x_{i-2})$$

onde definimos x_{i+1} como a raiz mais próxima de x_i do polinômio quadrático $p(x)$ que interpola os pontos $(x_i, y_i), (x_{i-1}, y_{i-1})$ e (x_{i-2}, y_{i-2}).

Exemplo 30. *Usaremos o método de Muller com* $x_0 = 4,5$, $x_1 = 5,5$ *e* $x_2 = 5,0$ *para determinar uma raiz de*

$$f(x) = x^3 - 13x - 12$$

Primeiramente, note que as raízes de $f(x)$ *são* -3, -1 *e* 4. *Aplicando* f *nos valores* x_0, x_1, x_2

$$f(4,5) = 20,625 \quad f(5,5) = 80,875 \quad f(5) = 48$$

e usando esses valores, obtemos $t_0 = 5,5 - 4,5 = 1$, $t_1 = 5,0 - 5,5 = -0,5$ *e também*

$$\delta_0 = \frac{80,875 - 20,625}{5,5 - 4,5} = 62,25 \;\; e \;\; \delta_1 = \frac{48 - 80,875}{5,0 - 5,55} = 69,75$$

e assim

$$a = \frac{69,75 - 62,25}{-0,5 + 1} = 15 \quad b = 15(-0,5) + 69,75 = 62,25 \quad c = 48$$

e daí a raiz quadrada do discriminante pode ser calculada

$$\sqrt{(62,25)^2 - 4(15)48} = 31,54461$$

Como $|62,25 + 31,54461| > |62,25 - 31,54461|$, usamos o sinal positivo no denominador da equação (7), e assim uma nova raiz pode ser determinada da seguinte forma

$$x_3 = 5 + \frac{-2(48)}{62,25 + 31,54461} = 3.976487$$

e estimando o erro, temos

$$\varepsilon = \left| \frac{-1.023513}{3.976487} \right| 100\% = 25,74\%$$

Como o erro foi muito grande, faz-se necessário novas estimativas, x_0 é trocado por x_1, x_1 é trocado por x_2 e x_2 é trocado por x_3. Assim uma nova iteração deve ser feita com $x_0 = 5,5$, $X_1 = 5$ e $x_2 = 3.976487$. Analisando os resultados em uma tabela, vemos que o método converge rapidamente em x_4

Comparação com o Método da Secante

- Método da Secante: Utiliza uma linha reta que conecta dois pontos da função. A

i	x_r	$\varepsilon(\%)$
0	5	
1	3,976487	25,74
2	4,00105	0,6139
3	4	0,0262
4	4	0,0000119

Tabela 5.1: Iterações no Método de Muller

inclinação dessa reta fornece uma aproximação da derivada e ajuda a encontrar a raiz.

- Método de Müller: Usa uma parábola ajustada para passar por três pontos da função. A interseção da parábola com o eixo x fornece uma estimativa da raiz, e a abordagem parabólica geralmente resulta em uma aproximação mais precisa do que a reta usada no método da secante.

Vantagens do Método de Müller

- Precisão: A utilização da parábola para aproximar a raiz permite uma melhor adaptação à curva da função, o que pode levar a uma estimativa mais precisa da raiz.
- Independência de Derivadas: Não requer o cálculo de derivadas, tornando-o acessível a alunos que ainda não aprenderam cálculo diferencial.

Portanto, o Método de Müller representa uma alternativa pedagógica eficaz para o ensino básico, ao fornecer uma abordagem geométrica e intuitiva para encontrar as raízes de polinômios sem a necessidade de conceitos avançados como derivadas.

6 O Ensino de Polinômios e a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio é um documento que orienta e padroniza o currículo das escolas brasileiras, garantindo que todos os alunos tenham acesso a uma formação básica comum. A BNCC estabelece as habilidades e competências que devem ser desenvolvidas ao longo da educação básica, abrangendo diferentes áreas do conhecimento, incluindo a Matemática.

6.1 O que é a BNCC

A BNCC é uma diretriz nacional que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica, da Educação Infantil ao Ensino Médio. Seu objetivo é assegurar uma formação equitativa e de qualidade para todos os estudantes, promovendo uma educação que contemple tanto conhecimentos acadêmicos quanto habilidades para a vida.

6.2 O Ensino de Polinômios no Ensino Fundamental e Médio

O estudo de polinômios é fundamental tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, pois fornece uma base para a compreensão de conceitos mais avançados em Matemática. A BNCC especifica habilidades relacionadas ao estudo de polinômios, que são introduzidas gradualmente ao longo dos anos escolares.

No Ensino Fundamental, o foco está em polinômios de grau 1 e 2, principalmente no contexto de equações lineares e quadráticas. A BNCC exige que os alunos sejam capazes de: - Resolver equações do primeiro grau:

$$ax + b = 0$$

- Resolver equações do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Exemplos: - Para uma equação do primeiro grau, como $3x - 7 = 0$, os alunos devem encontrar a solução $x = \frac{7}{3}$. - Para uma equação do segundo grau, como $x^2 - 5x + 6 = 0$, os alunos devem encontrar as soluções $x = 2$ e $x = 3$ por fatoração.

No Ensino Médio, o estudo é expandido para polinômios de grau n, com foco em: - Fatoração de polinômios: Identificação e fatoração de polinômios em fatores lineares e quadráticos. - Análise de raízes e coeficientes: Uso de técnicas algébricas para encontrar e analisar as raízes de polinômios de grau maior.

Exemplo: Para um polinômio de grau 3, como $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, os alunos devem ser capazes de fatorá-lo em $(x-2)(x+1)(x-6)$, encontrando as raízes $x = 2$, $x = -1$, e $x = 6$.

6.3 Habilidades sobre Polinômios na BNCC

A BNCC especifica diversas habilidades relacionadas a polinômios que devem ser desenvolvidas no Ensino Médio. Algumas das principais habilidades incluem:

- Compreensão e manipulação de polinômios: Capacidade de identificar o grau de um polinômio, realizar operações algébricas, e fatorar polinômios. - Análise de raízes e comportamento de funções polinomiais: Uso do teorema de Gauss e outras técnicas para determinar a natureza das raízes e o comportamento gráfico dos polinômios. - Resolução de problemas e modelagem: Aplicação de polinômios para modelar e resolver problemas práticos e matemáticos, incluindo otimização e modelagem de fenômenos reais.

6.4 Proposta de Eletiva

O Ensino Médio oferece diversas eletivas que podem complementar o estudo de polinômios. Muitas dessas disciplinas já abordam tópicos relacionados a equações polinomiais, tanto de grau 1 e 2, quanto de graus superiores. As eletivas típicas incluem:

- Matemática Avançada: Exploração de conceitos avançados de álgebra e polinômios. - Matemática Aplicada: Aplicações práticas de polinômios em diferentes contextos, como modelagem matemática e estatística. - Preparação para Vestibulares: Foco em problemas de polinômios que são comuns em exames de admissão.

Proposta de Eletiva "Polinômios e Suas Aplicações"

Esta eletiva seria focada no estudo aprofundado de polinômios, incluindo:

- Teoria Avançada de Polinômios: Análise detalhada das propriedades dos polinômios, como raízes múltiplas e polinômios irredutíveis. - Aplicações Reais: Uso de polinômios para resolver problemas reais em áreas como engenharia, economia e ciências. - Projeto de Modelagem: Desenvolvimento de projetos que utilizam polinômios para modelar e resolver problemas complexos.

A proposta visa ampliar o conhecimento dos alunos sobre polinômios e suas aplicações práticas, preparando-os para desafios acadêmicos e profissionais futuros.

- **Matemática Avançada**: Explora conceitos avançados de álgebra, incluindo polinômios de grau superior, operações com polinômios e teoremas importantes, como o Teorema Fundamental da Álgebra.

- **Matemática Aplicada**: Examina as aplicações práticas de polinômios em diversos contextos, como modelagem matemática, estatística e problemas de otimização. Os alunos aprendem a usar polinômios para modelar fenômenos reais e resolver problemas complexos.

- **Preparação para Vestibulares**: Foca na resolução de problemas típicos de polinômios encontrados em exames de admissão. Inclui a prática de exercícios e questões de provas anteriores, além de estratégias para resolver problemas de forma eficiente.

6.4.1 Conteúdo Programático (15 Semanas)

- **Semana 1-2: Introdução aos Polinômios**
  - Definição e propriedades dos polinômios.
  - Operações básicas com polinômios: adição, subtração, multiplicação e divisão.
  - Exemplo: Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, calcular $P(2)$ e $P(-1)$.
- **Semana 3-4: Teoria Avançada de Polinômios**
  - Análise das raízes de polinômios: raízes múltiplas, polinômios irredutíveis.
  - Teorema Fundamental da Álgebra e suas implicações.
  - Exemplo: Encontrar as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ usando a fatoração.
- **Semana 5-7: Aplicações Reais de Polinômios**
  - Modelagem de fenômenos reais com polinômios.
  - Aplicações em engenharia, economia e ciências.
  - Exemplo: Modelar a trajetória de um projétil usando um polinômio quadrático.

- **Semana 8-10: Métodos Iterativos e Planilhas de Excel**
  - Introdução aos métodos iterativos para encontrar raízes de polinômios.
  - Uso de planilhas de Excel para implementar e visualizar métodos como o método de Newton e o método de Müller.
  - Exemplo: Utilizar o método de Newton para encontrar uma raiz do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ em uma planilha do Excel.
- **Semana 11-13: Projeto de Modelagem**
  - Desenvolvimento de um projeto que utilize polinômios para modelar e resolver um problema complexo.
  - Apresentação dos projetos e discussão dos resultados.
  - Exemplo: Criar um modelo polinomial para prever a demanda de um produto com base em dados históricos de vendas.
- **Semana 14-15: Revisão e Avaliação**
  - Revisão dos principais conceitos abordados durante o semestre.
  - Avaliação dos projetos e do conhecimento adquirido.
  - Exemplo: Resolver um problema complexo de polinômios e discutir diferentes abordagens e soluções.

6.4.2 Sugestão de Roteiro de aula

- **Semana 5-7: Aplicações Reais de Polinômios**

Tema: Aplicações Reais de Polinômios.

Objetivo: Associar polinômios com a modelagem de fenômenos reais.

Duração: 6 aulas. **Turma:** 3ª série do ensino médio.

Material: Quadro, pincel, apagador, notebook e projetor.

Metodologia: A aula pode ser iniciada com indagações sobre se já associaram algum fenômeno real com polinômios, se alguma equação polinomial poderia descrever um evento, uma ação, até mesmo como modelo de previsão do que poderia ocorrer observando fatores antecedentes.

A primeira situação sugerida é muito simples e serve para estimular o pensamento dos alunos. Suponha que pela manhã Joãozinho saia para comprar pão na padaria do Zeca, onde lá o quilograma do pão francês está custando R$ 22,54, e ele compra 500 gramas desse pão. Peça para os alunos construírem uma tabela com duas grandezas, peso e valor total a ser pago.

Peso (kg)	Valor a ser pago (R$)
0,5	11,27
1,0	22,54
1,5	33,81
2,0	45,08
$\vdots$	$\vdots$
n	$P(n) = 22,54 \cdot n$

Tabela 6.1: Situação 1

Com isso, é para eles perceberem uma grandeza em função da outra e conseguirem esboçar o polinômio de grau 1, $P(n) = 22,54 \cdot n$ que modele essa situação. Em seguida, esbocem a reta determinada por esse polinômio no GeoGebra, e destaquem os pontos em evidência na tabela.

Na segunda situação teremos dois problemas retirados do livro *Matemática : ciência e aplicações: ensino médio do Gelson Iezzi et. all.*

Problema 1.

Estima-se que, para um exportador, o valor v(x), em milhares de reais, do quilo-

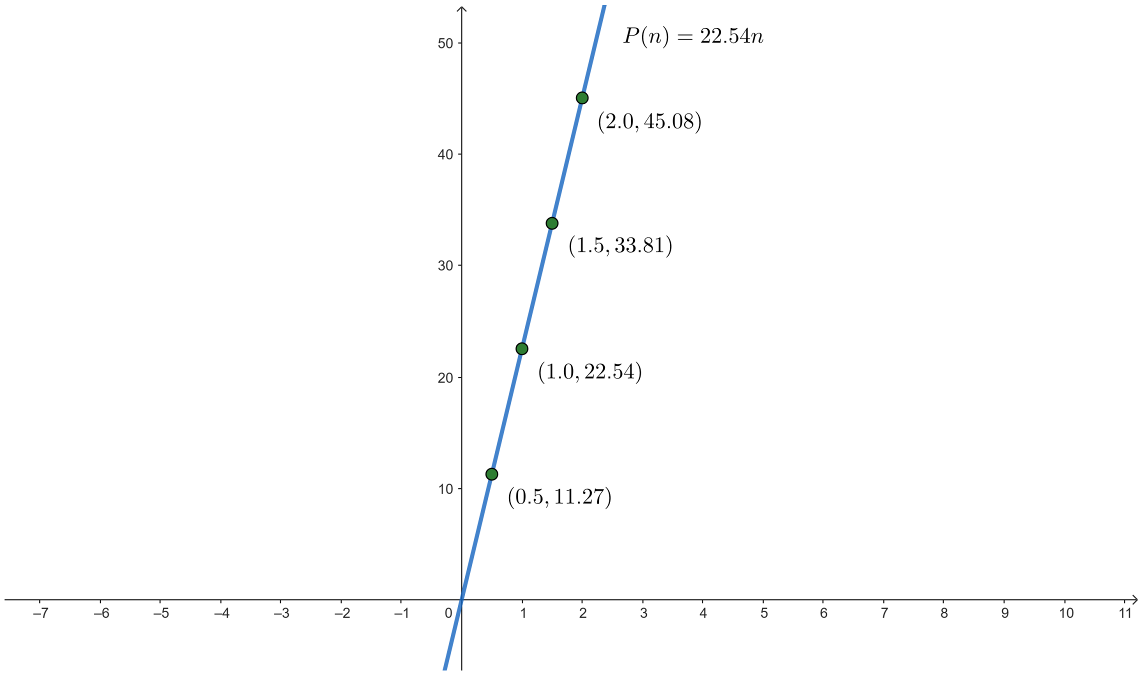


Figura 6.1: Polinômio de grau 1, $P(n) = 22,54n$

grama de certo minério seja dado pela lei: $v(x) = 0,6x^2 - 2,4x + 6$, sendo x o número de anos contados a partir de 2010 ($x = 0$), com $0 \leq x \leq 10$.

a) Entre que anos o valor do quilograma desse produto diminuiu?

Solução: Nessa situação o aluno tem que perceber que se trata de um polinômio de grau 2 e o coeficiente $a_2 = 0,6$, indicando que a abertura da parábola é para cima, logo ele tem um ponto mínimo, e para encontrar o intervalo de decrescimento basta calcular o x do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-2,4)}{2 \cdot 0,6}$$

$$x_v = 2$$

Logo, o valor do quilograma diminuiu do ano de 2010 para 2011 e de 2011 para 2012.

b) Qual é o valor mínimo atingido pelo quilograma do produto?

Solução: Para determinar o valor mínimo atingido pode-se calcular $v(2)$, assim

$$v(2) = 0,6 \cdot 2^2 - 2,4 \cdot 2 + 6$$

$$v(2) = 2,4 - 4,4 + 6$$

$$v(2) = 3,6$$

Portanto, o menor valor atingido do quilograma do minério foi de R$ 3.600,00.

c) Em que ano o preço do quilograma do produto será máximo? Qual será esse valor?

Solução: Por se tratar de um polinômio de grau 2, admite-se que o aluno entenda do gráfico, e como o intervalo da situação está definido de $0 \leq x \leq 10$, e o vértice está nele, logo basta o aluno obter $v(0)$ e $v(10)$, extremos do intervalo, e comparar qual maior e qual o menor valor.

$$v(0) = 0,6 \cdot 0^2 - 2,4 \cdot 0 + 6 = 6,$$

$$v(10) = 0,6 \cdot 10^2 - 2,4 \cdot 10 + 6 = 42$$

Como, $v(0) = 6 < v(10) = 42$, logo o aluno deve perceber que no ano de 2020 foi obtido o preço máximo do produto, sendo esse de R$ 42.000,00. Sugere-se o esboço do gráfico no GeoGebra.

Problema 2.

Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas

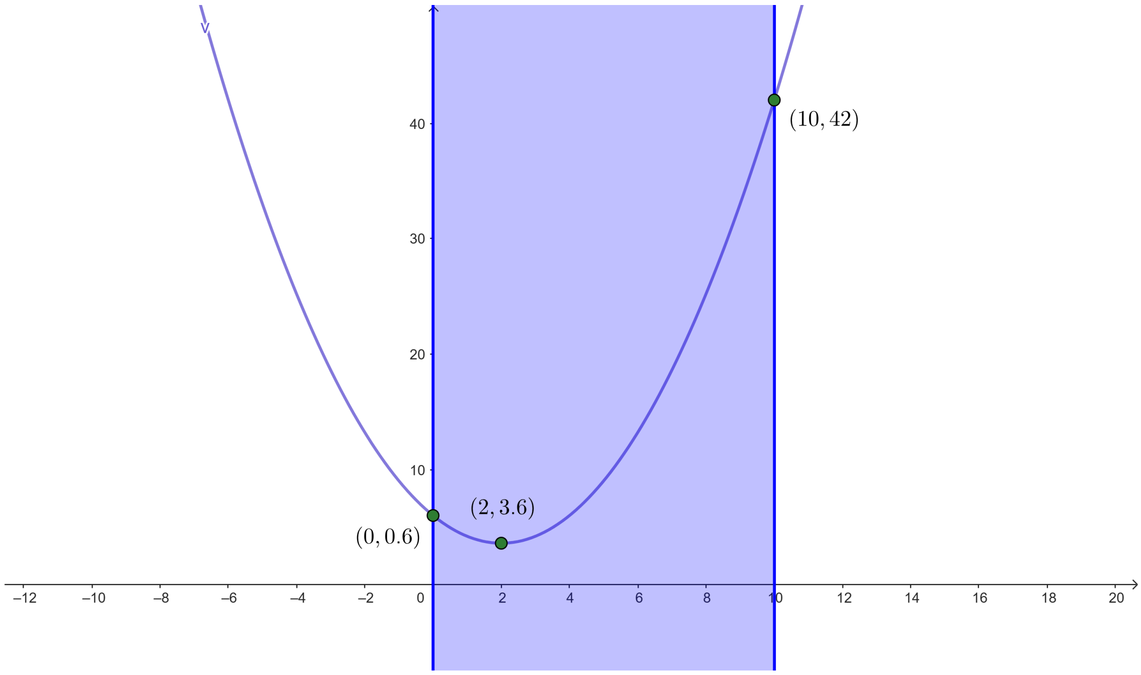


Figura 6.2: Polinômio de grau 2 $v(x) = 0,6x^2 - 2,4x + 6$

A e B da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes. Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta A cresceu linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; e a altura da planta B pode ser modelada pela função dada por $y(x) = \dfrac{20x - x^2}{6}$, em que y(x) é a altura medida em centímetros e x o tempo medido em dias.

a) Determine o polinômio que representa a altura (y) da planta A em função de x (número de dias)?

Solução: Por se tratar de um crescimento linear o polinômio em questão pode ser determinado por $y(x) = 2,5x$, onde x é o número de dias.

b) Determine o dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

Solução: Para isso, o aluno deve igualar os dois polinômios que determinam as alturas da planta A e da planta B, e determinar as raízes,

$$\frac{20x - x^2}{6} = 2,5x$$

$$-x^2 + 20x - 15x = 0$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

Assim, elas terão a mesma altura em $x = 0$ dias que representa o dia de nascimento ou $x = 5$ dias. A altura das plantas será $y(x) = 2,5 \cdot 5 = 12,5$, 12,5 cm.

Com o esboço do gráfico o aluno deve perceber que a planta B cresce mais rápido do que a planta até o quinto dia, mesma altura, a partir daí a planta A supera em crescimento.

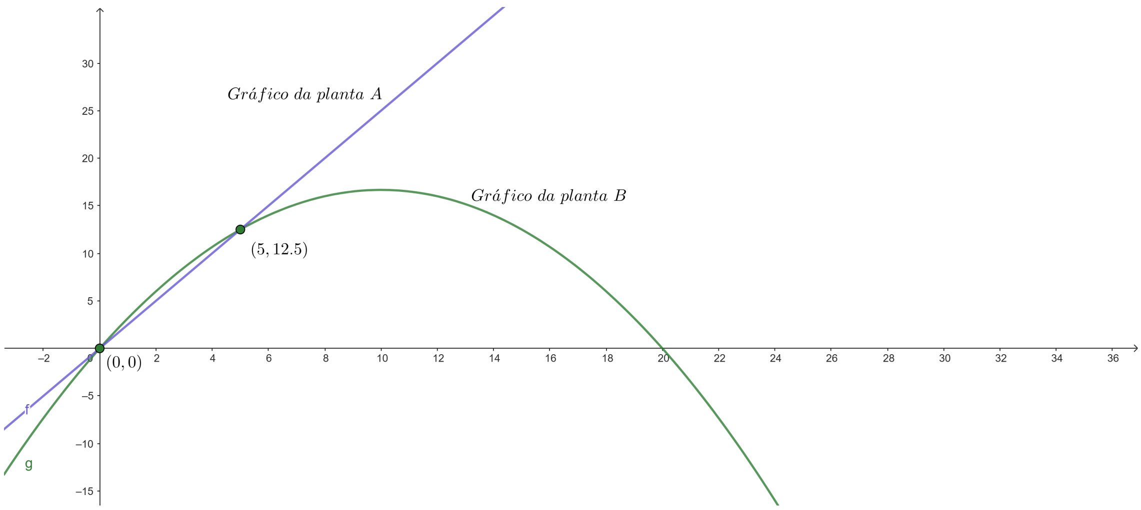


Figura 6.3: Crescimento das plantas A e B

Avaliação: A avaliação sugerida será formativa, pois se daria em todo o decorrer da aula, visto que o processo de aprendizagem requer uma construção de aprendizagens, desde o aluno dominar a noção de polinômio, valor, raiz, operações básicas,indo até a construção de gráficos no GeoGebra.

6.4.3 Exemplo e Solução: Método de Newton em Excel

Vamos usar o método de Newton para encontrar uma raiz do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. O método de Newton é dado por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

Passos:

1. Crie uma planilha no Excel: - Coloque o valor inicial x_0 em uma célula. - Calcule $P(x)$ e $P'(x)$ em células separadas usando fórmulas do Excel. - Calcule o próximo valor x_{n+1} usando a fórmula do método de Newton.

2. Configuração: - A1: Valor inicial x_0 - B1: Fórmula para $P(x) = A1^3 - 2 * A1^2 - 5 * A1 + 6$ - C1: Fórmula para $P'(x) = 3 * A1^2 - 4 * A1 - 5$ - D1: Fórmula para $x_{n+1} = A1 - (B1/C1)$

3. Iteração: - Copie as fórmulas para novas linhas para realizar várias iterações até que a diferença entre x_n e x_{n+1} seja suficientemente pequena.

Resultado:

Após algumas iterações, a planilha mostrará uma aproximação da raiz do polinômio. Isso ilustra a aplicação prática do método de Newton e a capacidade do Excel para resolver problemas matemáticos complexos.

Esta abordagem prática e interativa prepara os alunos para aplicar o conhecimento teórico de polinômios em situações reais, aumentando sua compreensão e habilidades na matemática.

7 Conclusão

A exploração dos polinômios revelou a profundidade e a relevância desses conceitos matemáticos, demonstrando como eles são essenciais para a resolução de problemas e a modelagem em diversas áreas. O entendimento das propriedades dos polinômios, como suas raízes e suas aplicações, é fundamental para o desenvolvimento de habilidades analíticas e a aplicação prática em contextos reais.

A integração desses conceitos no currículo do Ensino Médio é crucial para preparar os alunos para desafios acadêmicos futuros. A estrutura oferecida pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a proposta de eletivas especializadas proporcionam uma base sólida e avançada para o estudo dos polinômios, equilibrando teoria e prática e utilizando ferramentas modernas para facilitar o aprendizado.

Métodos alternativos de ensino, que não dependem de conceitos avançados como a derivada, podem oferecer aos alunos uma compreensão mais intuitiva e acessível. Essas abordagens inovadoras, juntamente com o desenvolvimento de novas propostas curriculares e o uso de ferramentas didáticas, têm o potencial de enriquecer a educação matemática e equipar os alunos com habilidades valiosas para o futuro.

Referências

[1] **Arenales, Selma. Darezzo, Arthur.** Cálculo numérico: uma aprendizagem com apoio de software, São Paulo: Thomson, 2008.

[2] **Hefez, Abramo**. Elementos da Aritmética, Rio de Janeiro: SBM , Rio de Janeiro 2011.

[3] **Hefez, Abramo. Villela, Maria Lúcia Torres.** Polinômios e Equações Algébricas. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p. 96-132. (Coleção PROFMAT).

[4] **Manfield, Daniel F. Wilderger, N. J.** . Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry: Elsevier Inc , número 44, p. 395-419, August, Sydney, 2017.

[5] **Neto, Antônio C. M.** Tópicos de Matemática Elementar, Vol 6, polinômios. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

[6] **Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo.** Álgebra III: números complexos, polinômios,equações algébricas. São Paulo: Editora Moderna, 1977

[7] **OBMEP**. Banco de Questões. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm> Acesso em: 20 de Mar 2020.

[8] **Oliveira, Everton M. de.** Fatoração de Polinômios. Dissertação de mestrado profissional (PROFMAT) da universidade federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2015.