Produto Educacional

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VANESSA KLEIN SZABUNIA

EXPLORANDO A ÁLGEBRA

JOINVILLE - SC
2023

Explorando a Álgebra

Conexões e Tecnologia no Ensino de Matemática

Vanessa Klein Szabunia

SUMÁRIO

1 Introdução

A busca por abordagens inovadoras que tornem o processo de aprendizagem mais atrativo e significativo muitas vezes se torna um desafio ao professor. Assim, o caderno pedagógico destinado aos professores do ensino básico, pode ser usado como uma ferramenta acessível para enriquecer suas aulas no ensino do conteúdo algébrico.

A proposta central deste guia é utilizar os conhecimentos aritméticos prévios dos alunos como ponto de partida para introduzir e explorar os conceitos da Álgebra, estabelecendo conexões que facilitem o processo de aprendizagem. Ao abordar a Álgebra como uma extensão natural dos conceitos matemáticos já vistos na Aritmética, busca-se tornar esse campo de estudo mais próximo e familiar aos estudantes, proporcionando-lhes uma compreensão mais sólida e significativa do conteúdo.

Para atingir esse objetivo, o caderno pedagógico será estruturado em duas perspectivas: uma visão inicial do professor e uma visão complementar voltada para o aluno. A partir dessa abordagem, serão fornecidas orientações claras aos professores sobre como introduzir os conceitos de forma envolvente, aproveitando as conexões com a Aritmética.

Na perspectiva do aluno, serão apresentadas as atividades sem os comentários voltados aos professores. Essa abordagem interativa tem como objetivo estimular o raciocínio lógico-matemático dos estudantes, tornando o aprendizado da álgebra envolvente e prazeroso. Além disso, serão explorados recursos tecnológicos acessíveis, evidenciando como a utilização de calculadoras e a realização de aulas diferenciadas no laboratório de informática podem enriquecer a experiência de aprendizagem.

Dessa forma, pretende-se desenvolver nos estudantes habilidades essenciais, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a aplicação do conhecimento matemático em situações reais.

Neste sentido, espera-se que esta obra possa contribuir para a construção de uma educação matemática mais significativa e prazerosa, trazendo benefícios tanto para os educadores quanto para os estudantes.

2 Visão professor

Neste capítulo serão apresentadas as atividades para os professores, sendo fornecidas orientações aos professores sobre os conceitos matemáticos e as conexões entre a Aritmética e a Álgebra.

Proposta 01: Conexões Aritméticas e Algébricas: Descobrindo paralelos matemáticos

Enfatizar a consistência das propriedades entre a Aritmética e a Álgebra permite que os alunos apliquem as regras já aprendidas, o que contribuirá para a construção de uma base sólida para a compreensão dos conceitos algébricos. Essa abordagem facilita a transição entre esses dois domínios matemáticos.

Objetivos a serem alcançados:

- Reconhecer semelhanças e conexões entre conceitos e propriedades numéricas e algébricas.
- Observar que muitas das regras e propriedades da Aritmética se aplicam à Álgebra.
- Usar suas habilidades Aritméticas existentes para resolver problemas e simplificar expressões algébricas.
- Perceber que os conceitos matemáticos podem ser generalizados para além de situações específicas, permitindo-lhes resolver problemas mais complexos e abstratos.
- Compreender que a Álgebra é uma extensão natural dos conceitos aritméticos.
- Dominar as propriedades a fim de desenvolver habilidades fundamentais de manipulação de expressões matemáticas

Sugestão ao professor: Compreender que através do anel de integridade as propriedades básicas definidas na adição e a multiplicação possuem conexões e consistência na Aritmética e na Álgebra. Os alunos podem usar as regras que já conhecem para simplificar expressões algébricas, resolver equações e realizar operações polinomiais. O professor pode se transformar em um personagem nas explicações do seu conteúdo, utilizar a tecnologia para prender positivamente a atenção do aluno despertando seu interesse. Para essa atividade foi utilizado um aplicativo gratuito chamado: *Toon Face*.

Como utilizar esse aplicativo:

1. Baixe e instale o aplicativo Toon Face em seu dispositivo móvel. O link para fazer a instalação na Play Store é o seguinte: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.darkgalaxy.client.app_toonface&hl=en_US

2. Abra o aplicativo e permita o acesso à câmera. Ou selecione uma imagem da galeria do seu dispositivo.

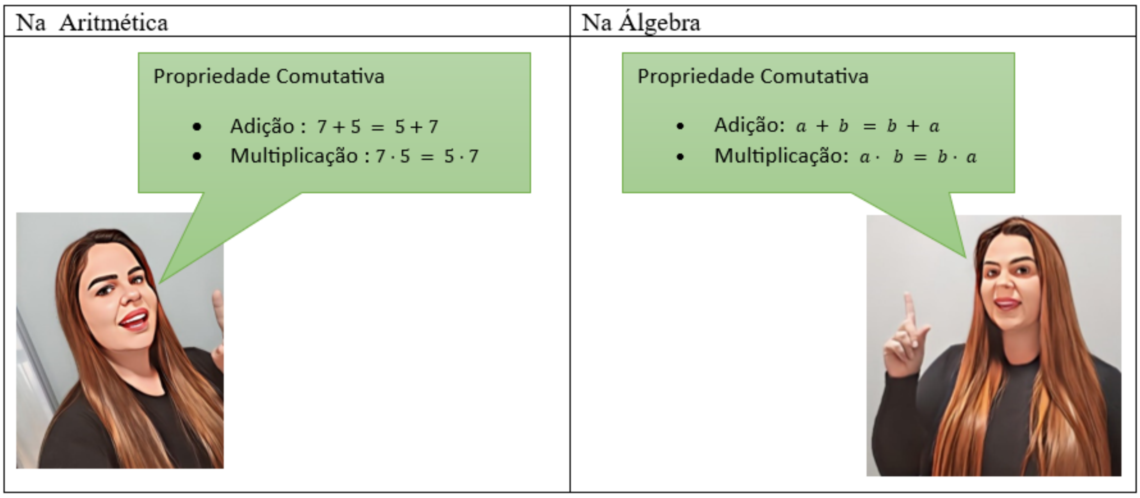
3. Escolha uma opção para criar um avatar animado.

4. Faça as alterações que desejar em seu avatar e personalize os detalhes ao seu gosto.

Início da aula: Para começar a aula, é recomendado retomar a introdução e os objetivos que foram enfatizados no início da atividade. Utilize o quadro disponível abaixo como uma ferramenta para comparar as propriedades Aritméticas e Algébricas. (Seria interessante se o professor criasse seu próprio avatar como parte da interação).

Mostre que as propriedades Aritméticas dos inteiros, que os alunos já conhecem, podem ser aplicadas e generalizadas para o contexto algébrico. Nesse estágio inicial, é recomendado utilizar exemplos simples para facilitar a compreensão das conexões entre as propriedades Aritméticas e como essas conexões se traduzem em expressões algébricas.

Figura 2.1 – Propriedade Comutativa



Questão 1: Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa.

(a) As ações de calçar as meias e calçar os sapatos são comutativas. Não

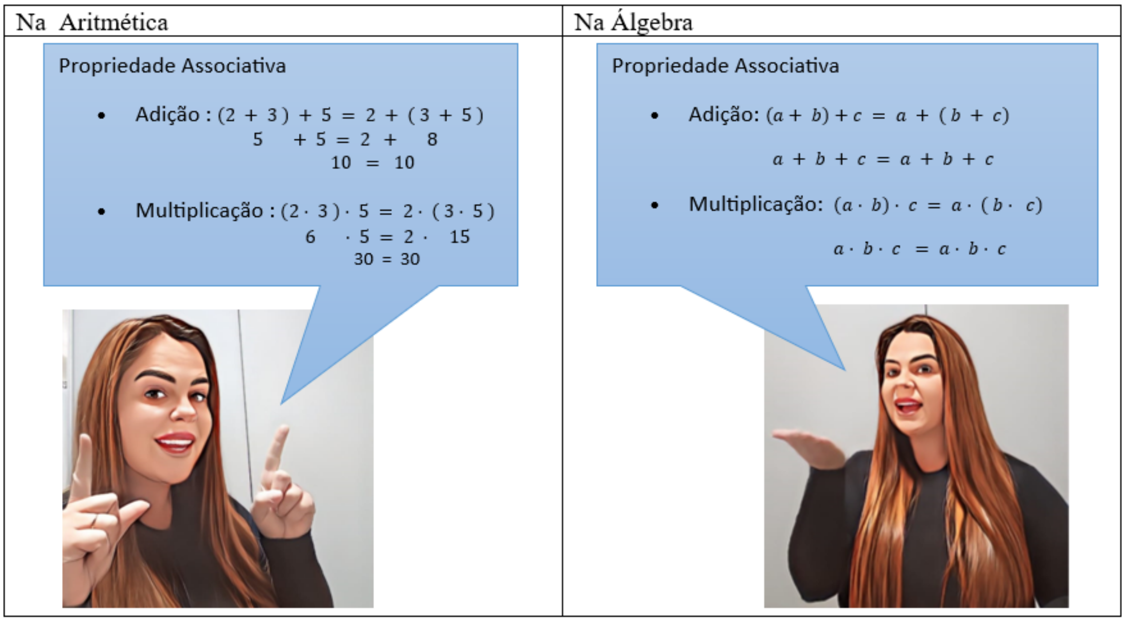
(b) As ações de colocar o chapéu e o casaco são comutativas. Sim

(c) As ações de lavar roupa e secar são comutativas. Não

Questão 2: Reflita se a subtração nos número inteiros é comutativa.

A subtração não é comutativa, pois $3 - 1 = 2$ e $1 - 3 = -2$. Portanto, $3 - 1 \neq 1 - 3$.

Figura 2.2 – Propriedade Associativa



Questão 2: Use as propriedades dos números inteiros para escrever as expressões algébricas sem parênteses:

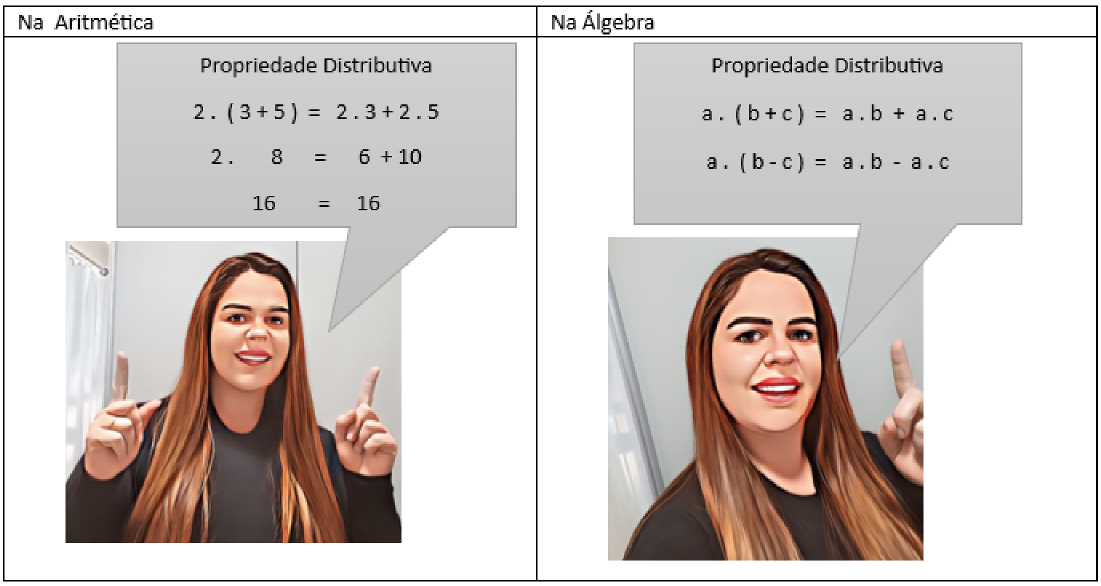
(a) $(x - 1) + 4 = x + 3$ (propriedade associativa)

(b) $3 \cdot (5 \cdot x) = 15x$ (propriedade associativa)

(c) $(2 + y) + 5 = y + 7$ (propriedade comutativa + propriedade associativa)

(d) $3 \cdot (x \cdot 6) = 3x + 3y$ (propriedades comutativa e associativa)

Figura 2.3 – Propriedade Distributiva



Questão 3: Use as propriedades dos números inteiros para escrever as expressões algébricas sem parênteses:

(a) $4(x-1) = 4x - 4$ (propriedade associativa)

(b) $5(2a+1) = 10a + 5$ (propriedades distributiva e associativa)

(c) $4(2+b) + 5 = 13 + b$ (propriedades distributiva, comutativa e associativa)

(d) $3(x+2)+2(2y-1) = 3x+4y+4$ (propriedades distributiva, comutativa e associativa)

Questão 4: Use as propriedades dos números inteiros para simplificar as expressões algébricas:

(a) $2x + 4x = 6x$ (propriedade distributiva)

(b) $-y + 1 + 3y = 1 + 2y$ (propriedades comutativa e distributiva)

(c) $3a - 6a - a = -4a$ (propriedade distributiva e associativa)

(d) $4z + 5 + 2 + 2z = 6z + 7$ (propriedades associativa, comutativa e distributiva)

Figura 2.4 – Elemento neutro

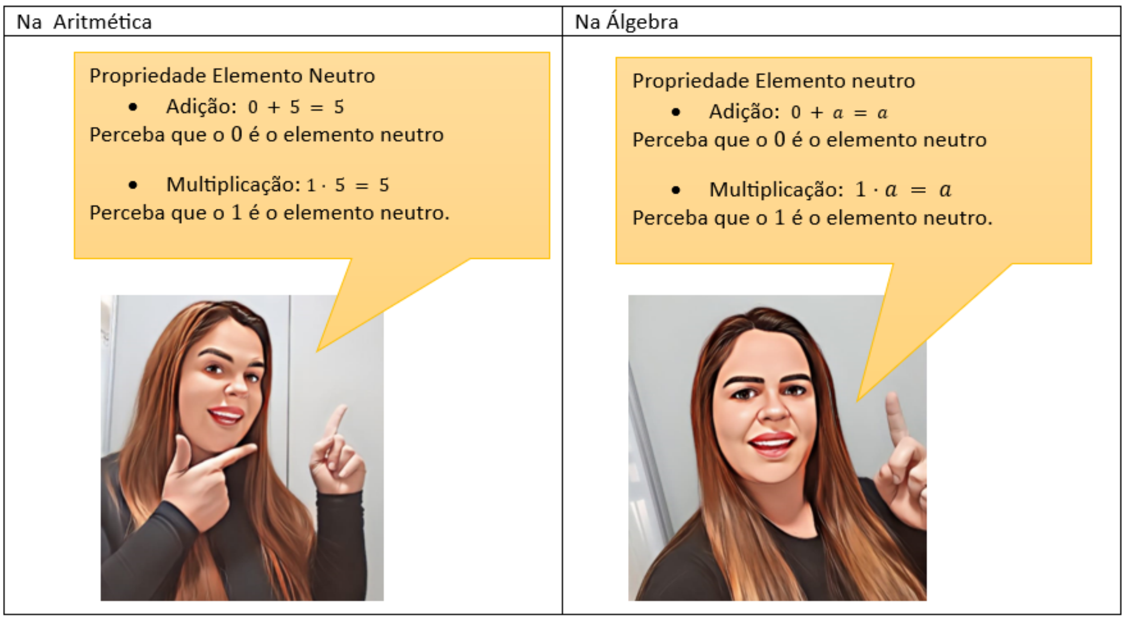
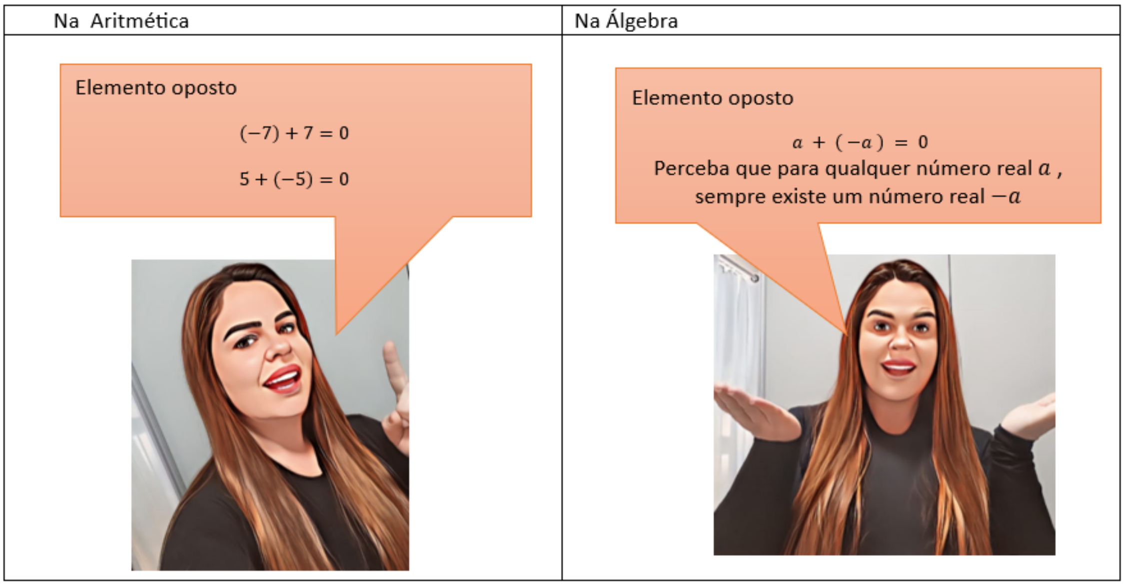


Figura 2.5 – Elemento oposto



Questão 5: Use as propriedades dos números inteiros para simplificar as expressões algébricas:

(a) $a^2 - a(a + b) = -ab$ (propriedade distributiva + elemento oposto)

(b) $-xy + x(1 + y) = x$ (propriedade distributiva + elemento oposto)

(c) $1(a+b)-1(a+b) = 0$ (propriedade distributiva + associativa+comutativa+elemento oposto+elemento neutro)

(d) $-2a + 4 + 1(2a - 3) = 1$ (propriedade distributiva + associativa + comutativa + elemento oposto + elemento neutro)

Observação: Nas questões acima, apresentamos as propriedades utilizadas para a compreensão do professor. Entretanto, não é necessário que o aluno identifique os nomes das propriedades. O foco não está na memorização dos nomes das propriedades, mas sim em desenvolver a habilidade de trabalhar com letras (variáveis), da mesma forma que ele já fazia com números.

Proposta 02: Estudo das operações com polinômios

A adição e a subtração de polinômios exigem a combinação adequada de termos semelhantes, enquanto a multiplicação envolve a distribuição de cada termo de um polinômio sobre todos os termos do outro polinômio.

Já vimos que monômios de uma variável, na variável x, são expressões algébricas como

$$\boxed{5 \qquad 2x \qquad -6x^2 \qquad 31x^3 \qquad -12x^6 \qquad -x^{11}}$$

Ou seja, um monômio pode ser um número ou uma expressão algébrica que represente apenas multiplicações de números e potências naturais x.

Além disso, vimos que polinômios na variável x são expressões algébricas como

$$\boxed{5 \qquad -4x \qquad 2x-1 \qquad 3x^2-4x+1 \qquad -5x^4+10x \qquad -3x^5-6x^3-2x^2+1}$$

Ou seja, polinômios são somas finitas de monômios (*poli*=*vários*).

Observação: Para o Ensino Médio é importante adicionar a seguinte definição:

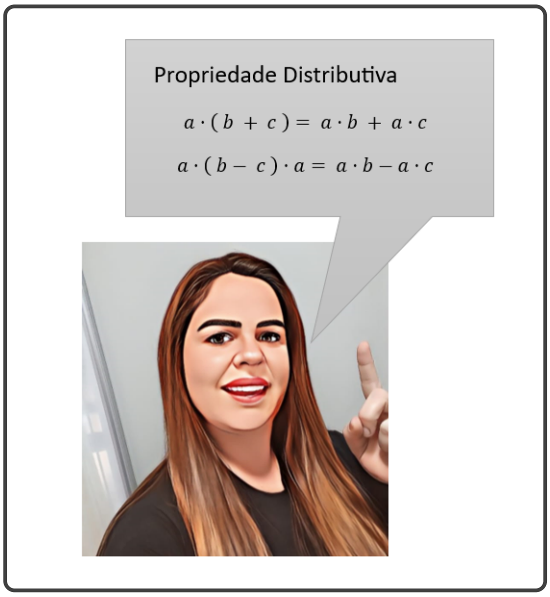
De modo geral, um polinômio na variável x é uma expressão da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ e a_0 são números reais ou complexos denominados coeficientes.

Adição e Subtração de monômios

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, podemos adicionar e subtrair monômios semelhantes.



Observe os exemplos:

- $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$
- $12x^2 - 3x^2 = (12 - 3)x^2 = 9x^2$
- $-x^5 - 7x^5 = (-1 - 7)x^5 = -8x^5$

Adição e Subtração de polinômios

Denominamos soma de dois ou mais polinômios ao polinômio que se obtém adicionando todos os termos semelhantes dos polinômios dados. Observe os exemplos:

- Se $p(x) = 3x + 12x^2$ e $q(x) = 5x - 3x^2$, então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x + 12x^2) + (5x - 3x^2) \\ &= 3x + 5x + 12x^2 - 3x^2 \\ &= (3 + 5)x + (12 - 3)x^2 \\ &= 8x + 9x^2. \end{aligned}$$

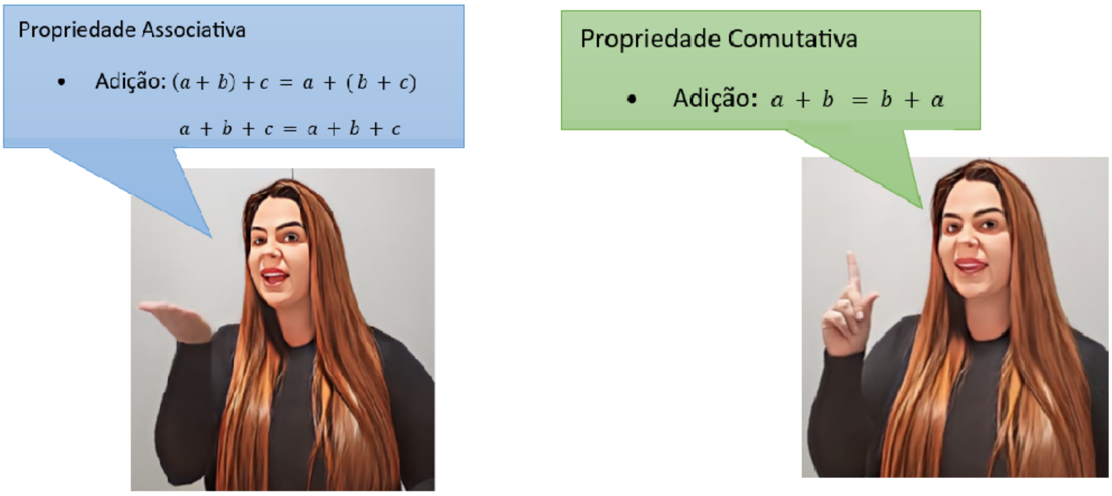
- Se $p(x) = 3x^2 - 5x + 8$ e $q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 9$, então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x^2 - 5x + 8) + (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) \\ &= (0x^3 + 3x^2 - 5x + 8) + (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) \\ &= 0x^3 + 2x^3 + 3x^2 + 5x^2 - 5x - 2x + 8 - 9 \\ &= (0 + 2)x^3 + (3 + 5)x^2 + (-5 - 2)x + (8 - 9) \\ &= 2x^3 + 8x^2 - 7x - 1 \end{aligned}$$

- Se $p(x) = -x^5 + 2x - 1$ e $q(x) = -7x^5 + 4x^3 + 2$, então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (-x^5 + 2x - 1) + (-7x^5 + 4x^3 + 2) \\ &= (-x^5 + 0x^3 + 2x - 1) + (-7x^5 + 4x^3 + 0x + 2) \\ &= -x^5 + (-7x^5) + 4x^3 + 0x^3 + 2x + 0x + (-1) + 2 \\ &= (-1 - 7)x^5 + (4 + 0)x^3 + (2 + 0)x + (-1 + 2) \\ &= -8x^5 + 4x^3 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Percebam que para efetuar a adição de polinômios usamos as propriedades associativa e comutativa da adição, além da distributiva para adicionar os termos semelhantes.



Observação: Para os alunos do Ensino Médio deve-se adicionar a seguinte definição:

Considere dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, sendo eles na forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

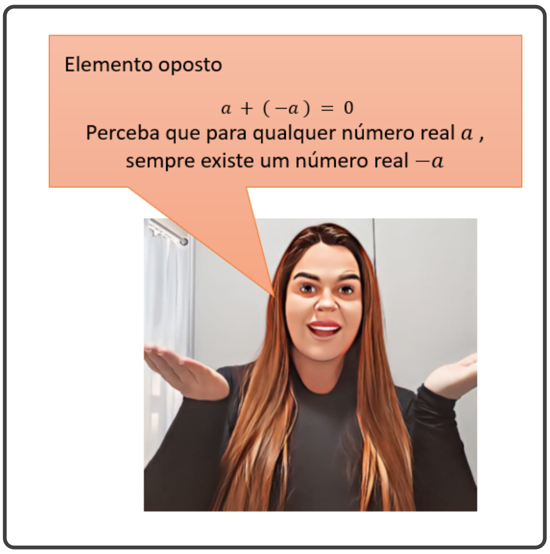
Define-se a adição $p(x) + q(x)$ como

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Pode-se também definir a subtração entre dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ por

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x)),$$

em que $-q(x)$ é o polinômio oposto de $q(x)$.



Observe os seguintes exemplos: Se $p(x) = 3x^2 - 5x + 8$ e $a(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 9$, então:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (3x^2 - 5x + 8) - (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) \\ &= -2x^3 + (3 - 5)x^2 + (-5 - (-2))x + (8 - (-9)) \\ &= -2x^3 - 2x^2 - 3x + 17 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q(x) - p(x) &= (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) - (3x^2 - 5x + 8) \\ &= 2x^3 + (5 - 3)x^2 + (-2 - (-5))x + (-9 - 8) \\ &= 2x^3 + 2x^2 + 3x - 17 \end{aligned}$$

Observe que, assim como nos inteiros, a subtração de polinômios não é comutativa, pois no exemplo acima temos que $p(x) - q(x) \neq q(x) - p(x)$.

Observação: Para os alunos do Ensino Médio pode-se adicionar a seguinte definição:

Considere dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, sendo eles na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e

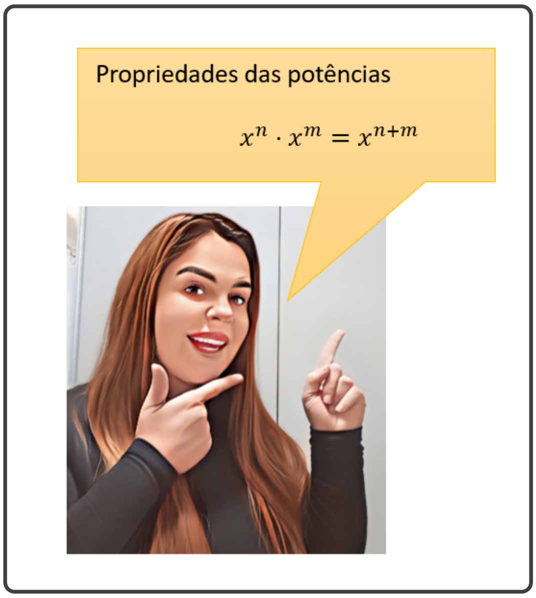
$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Temos que a diferença (subtração) $p(x) - q(x)$ é dada por

$$p(x) - q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Multiplicação de monômios

Aplicando a propriedade da potenciação da figura abaixo podemos multiplicar monômios.



Observe os seguintes exemplos:

- $x^7 \cdot (3x^7) = 3x^{7+7} = 3x^{14}$
- $(3x^3)\cdot(5x^2) = 3\cdot 5\cdot x^3\cdot x^2 = 15\cdot x^{3+2} = 15x^5$
- $(12x) \cdot (-3x^5) = 12 \cdot (-3) \cdot x^1 \cdot x^5 = -36x^{1+5} = -36x^6$

Multiplicação de polinômios

Para efetuar a multiplicação de dois ou mais polinômios, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Devemos multiplicar dois a dois todos os termos do primeiro polinômio com todos os termos do segundo. Veja exemplos:

- Se $p(x) = 3x + 5$ e $q(x) = x^3 + 2x - 3$, então

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (3x+5)\cdot(x^3+2x-3) \\ &= 3x\cdot x^3 + 3x\cdot 2x + 3x\cdot(-3) + 5\cdot x^3 + 5\cdot 2x + 5\cdot(-3) \\ &= 3x^4 + 6x^2 - 9x + 5x^3 + 10x - 15 \\ &= 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 + (-9+10)x - 15 \\ &= 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 15 \end{aligned}$$

- Se $p(x) = 2x^2 + 3x + 1$ e $q(x) = 4x^4 - x^2$, então

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (2x^2+3x+1)\cdot(4x^4-x^2) \\ &= 2x^2\cdot 4x^4 + 2x^2\cdot(-x^2) + 3x\cdot 4x^4 + 3x\cdot(-x^2) + 1\cdot 4x^4 + 1\cdot(-x^2) \\ &= 8x^6 - 2x^4 + 12x^5 - 3x^3 + 4x^4 - x^2 \\ &= 8x^6 + 12x^5 + (-2+4)x^4 - 3x^3 - x^2 \\ &= 8x^6 + 12x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Observação: Note que se $\text{gr}(p)$ é grau de $p(x)$ e $\text{gr}(q)$ é grau de $q(x)$, então $\text{gr}(p \cdot q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)(p)$.

Atividade de Fixação

Questão 1: Considere os polinômios $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7$ e $q(x) = x^2 + 5x + 3$.

(a) Determine $p(x) + q(x)$, apresente a resposta em sua forma simplificada.

Resolução:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 7) + (x^2 + 5x + 3) \\ &= 2x^3 + 3x^2 + x^2 + 5x - 7 + 3 \\ &= 2x^3 + (3 + 1)x^2 + 5x + (-7 + 3) \\ &= 2x^3 + 4x^2 + 5x - 4. \end{aligned}$$

(b) Determine $p(x) - q(x)$, apresente a resposta em sua forma simplificada.

Resolução:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 7) - (x^2 + 5x + 3) \\ &= 2x^3 + 3x^2 - 7 - x^2 - 5x - 3 \\ &= 2x^3 + (3 - 1)x^2 - 5x + (-7 - 3) \\ &= 2x^3 + 2x^2 - 5x - 10. \end{aligned}$$

Questão 2: Calcule o produto dos polinômios $p(x) = 3x^2 + 1$ e $q(x) = x^3 - 3x$, em seguida, apresente a resposta em sua forma simplificada.

Resolução:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (3x^2 + 1) \cdot (x^3 - 3x) \\ &= 3x^2 \cdot x^3 + 3x^2 \cdot (-3x) + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot (-3x) \\ &= 3x^5 - 9x^3 + x^3 - 3x \\ &= 3x^5 + (-9 + 1)x^3 - 3x \\ &= 3x^5 - 8x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Proposta 03: Fatoração de polinômios

Por meio desta atividade, pretendemos resgatar os conhecimentos já adquiridos em anos anteriores, especificamente em relação à fatoração de números naturais, e relacioná-los à fatoração de expressões algébricas. Visto que fatorar uma expressão algébrica significa transformá-la em um produto de fatores, ampliaremos os estudos sobre operações com polinômios. Estudaremos alguns casos de fatoração de expressões algébricas, tais como: fator comum em evidência, agrupamento, diferença de dois quadrados e trinômio quadrado perfeito.

Fatoração de números naturais: Os números primos, ao mesmo tempo tão simples e essenciais, possuem a capacidade de gerar todos os números naturais maiores que 1.

Vocês já aprenderam que fatorar um número natural ou inteiro consiste em escrevê-lo como um produto de dois ou mais fatores primos. Vamos relembrar esse conceito, fatorando o número 60.

$$60 \div 2 = 30$$
$$30 \div 2 = 15$$
$$15 \div 3 = 5$$
$$5 \div 5 = 1.$$

Assim,

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Observação: Professor, lembre que de acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética temos o seguinte resultado:

> Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem de fatores) como um produto de fatores primos,
>
> $$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n},$$
>
> em que p_i são números primos e α_i são números naturais.

Vocês já perceberam que a fatoração pode ser utilizada para simplificar uma divisão? Veja o exemplo a seguir:

$$\frac{60}{15} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5} = 2^2 = 4.$$

Fatoração algébrica para auxiliar a simplificação de expressões racionais

É possível realizar a fatoração de uma expressão racional, como vemos na quociente entre dois monômios:

$$\frac{60x^2y^3}{15xy^2} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{3 \cdot x \cdot y \cdot y} = 2^2 \cdot x \cdot y = 4xy.$$

Observe que utilizamos a fatoração para efetuar a divisão entre monômios.

Apresentaremos a seguir as regras que podemos utilizar para realizar esse cálculo de maneira simplificada.

Na divisão de monômios, realizamos a divisão dos coeficientes do numerador pelo coeficiente do denominador. Ao lidarmos com a parte algébrica, utilizamos a regra da potenciação quando as bases são iguais. Dessa forma, ao dividirmos x^2 por x, mantemos a letra x como base e subtraímos os expoentes. Da mesma forma, ao dividirmos y^3 por y^2, conservamos a letra e subtraímos os expoentes.

Fatoração de Polinômios

De acordo com o dicionário, encontramos o significado da palavra "fatorar".

- ✓ Na Aritmética: decompor (um número) em seus fatores primos.
- ✓ Na Álgebra: decompor (um polinômio) em um produto de fatores irredutíveis.

Com base nessas informações, vamos adquirir conhecimento sobre alguns tipos distintos de fatoração de polinômios.

Fator Comum em evidência

Quando uma expressão algébrica apresenta um fator comum em todos os seus termos, é possível colocá-lo em evidência, obtendo uma forma fatorada do polinômio.

Há duas dicas importantes a serem consideradas:

- ✓ Para encontrar o fator comum entre os coeficientes, é recomendado calcular o máximo divisor comum (mdc) entre eles. Dessa forma, é possível identificar o maior divisor comum que divide todos os coeficientes.
- ✓ No caso do fator comum na parte literal, quando as letras são iguais, devemos selecionar aquela com o menor expoente para evidenciá-la.

Veja o exemplo a seguir: Dada a expressão

$$18x^5 - 24x^3 + 12x^2 - 6x^6$$

temos que o mdc dos coeficientes é

$$\mathrm{mdc}(18, 24, 12, 6) = 6.$$

Ao identificarmos as letras comuns, devemos selecionar aquela que possui o expoente menor, neste caso é x^2.

Dessa forma, o fator a ser evidenciado é determinado por $6x^2$.

O fator comum deve ser escrito fora dos parênteses. Em seguida, é necessário dividir cada termo do polinômio pelo fator comum. O resultado dessa divisão deve ser colocado dentro dos parênteses.

$$18x^5 - 24x^3 + 12x^2 - 6x^6 = 6x^2(3x^3 - 4x + 2 - x^4).$$

Podemos empregar a propriedade distributiva na resposta final como um meio concreto para verificar a correção do resultado.

Agrupamento

Conforme o próprio termo "agrupamento" sugere, essa técnica é utilizada quando a expressão algébrica apresenta grupos de termos que podem ser combinados devido a fatores em comum. Além disso, ao fatorar cada grupo, esses grupos revelam um novo fator comum, que pode ser identificado, finalizando assim o processo de fatoração.

Como exemplo, vamos fatorar a expressão a seguir:

$$ab + 3b - 7a - 21.$$

Observem que $ab + 3b = b(a + 3)$ e $-7a - 21 = -7(a + 3)$, sendo assim,

$$ab + 3b - 7a - 21 = b(a + 3) - 7(a + 3).$$

Dessa forma, constatamos a presença de um novo fator comum: $a + 3$. Ao evidenciá-lo, obtemos:

$$ab + 3b - 7a - 21 = b(a + 3) - 7(a + 3) = (a + 3) \cdot (b - 7).$$

Novamente, podemos empregar a propriedade distributiva na resposta final como um meio concreto para verificar a correção do resultado.

Diferença entre Quadrados

A forma fatorada da diferença de dois quadrados segue a regra do produto da soma pela diferença das bases, na ordem dada. Aqui está um exemplo:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

É importante notar que essa fatoração é aplicada nas seguintes condições:

- A expressão é um binômio;
- Há um sinal de "subtração" entre os termos.
- Para resolver, é necessário extrair a raiz quadrada dos termos e, em seguida, seguir a regra como apresentada no exemplo.

Vamos fatorar a expressão a seguir:

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4).$$

Empregamos a propriedade distributiva na resposta final como um meio concreto para verificar a correção do resultado.

Trinômio Quadrado Perfeito

Esse procedimento é aplicado para fatorar ou decompor expressões algébricas que são trinômios quadrados perfeitos.

Um trinômio é chamado de trinômio quadrado perfeito, pois é igual ao quadrado de um binômio. Em outras palavras, é um trinômio que pode ser escrito na forma $(a+b)^2$ ou na forma $(a-b)^2$, em que a e b são termos ou coeficientes.

Analisem os exemplos a seguir:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Identificamos um trinômio quadrado perfeito e obtemos a sua forma fatorada ao observarmos os seguintes aspectos:

✓ O trinômio é composto por três termos.

✓ Dois dos termos são quadrados perfeitos (a^2 e b^2)

✓ O terceiro termo é equivalente a "mais" ou "menos" duas vezes o produto das bases desses quadrados.

Vamos analisar mais um exemplo e responder algumas perguntas.

$$x^2 - 16x + 64.$$

1. Possui três termos?
   Resposta: Sim.

2. Quais desses termos são quadrados perfeitos?
   Resposta: Sim, x^2 e 64.

3. Quais são as bases desses quadrados perfeitos?
   Resposta: x e 8.

4. Se multiplicarmos por dois os resultados dos termos anteriores, obtemos o resultado do termo que não é um quadrado perfeito?
   Resposta: Sim, pois $2 \cdot x \cdot 8 = 16x$, o termo que não teve a raiz extraída.

Se todas as respostas forem "Sim", significa que é um trinômio quadrado perfeito. Vamos para a solução.

1. Abra parênteses e escreva a base de um dos quadrados perfeitos.

2. Utilize o sinal do termo que não é um quadrado perfeito.

3. Escreva a base do outro quadrado perfeito e feche os parênteses.

4. Eleve tudo ao quadrado.

Sendo assim:

$$x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2.$$

Simplificação de Frações Algébricas

As simplificações algébricas podem desempenhar um papel relevante na divisão de polinômios.

Embora a simplificação algébrica não seja diretamente uma forma de dividir polinômios, ela tem o potencial de simplificar as expressões utilizadas na divisão e tornar o processo mais acessível.

Observem os exemplos de simplificação de algumas expressões:

- $\dfrac{35}{7a - 7x} = \dfrac{7 \cdot 5}{7(a - x)} = \dfrac{5}{(a - x)}$;
- $\dfrac{15a + 5b}{3a + b} = \dfrac{5(3a + b)}{3a + b} = 5$;
- $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)(x - 3)} = \dfrac{(x + 3)}{(x - 3)}$;
- $\dfrac{a^2 + 8a}{ab + 8b + a + 8} = \dfrac{a(a + 8)}{b(a + 8) + 1(a + 8)} = \dfrac{a(a + 8)}{(a + 8)(b + 1)} = \dfrac{a}{b + 1}$.

Proposta 04: Desafio de Fatoração em um Jogo de Perguntas e Respostas

Essa atividade adota uma abordagem investigativa com o objetivo de avaliar o nível de compreensão dos estudantes em relação ao conteúdo relacionado à fatoração algébrica. A meta é fornecer ao professor a oportunidade de avaliar o aprendizado dos alunos em relação à fatoração de expressões algébricas.

Para esta atividade, empregaremos a plataforma Kahoot!. Trata-se de um ambiente educacional fundamentado em jogos, consistindo em questionários de múltipla escolha que possibilitam a criação por parte dos usuários. Estes questionários podem ser acessados via navegador web ou pela aplicação Kahoot. A plataforma pode ser utilizada como ferramenta didática nas escolas, seja para a revisão do conhecimento dos estudantes, para avaliação formativa ou como uma pausa nas atividades tradicionais da sala de aula. Portanto, esta atividade deverá ser realizada num laboratório de informática.

Professor, você deverá acessar o seguinte link da atividade: `https://create.kahoot.it/share/fatoracao-e-divisao-algebrica/dda2e8b1-f64b-4be5-a225-9d3eecbeecff`

A visão que o professor terá ao acessar o link acima, é representado pela Figura 2.6.

Figura 2.6 – Visão do professor ao acessar o site Kahoot

Após clicar no botão iniciar surgirá na tela uma imagem como ilustrada pela Figura 2.7.

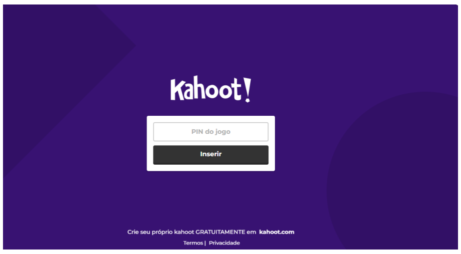
Figura 2.7 – Visão do professor ao iniciar o jogo

O professor pode escolher entre o modo clássico, no qual os alunos jogam individualmente, ou o modo em equipe, onde os alunos jogam em grupos. Após a escolha, uma nova tela será exibida com o código PIN do jogo, que os alunos deverão digitar em seus computadores, como mostrado na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Número PIN do jogo.

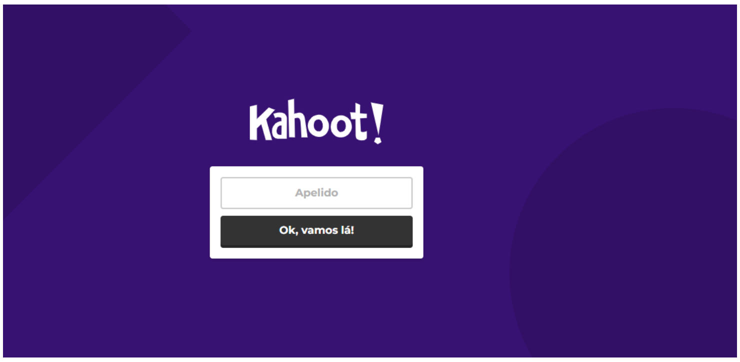
Os alunos deverão acessar link: `https://kahoot.it/`. Uma vez que os estudantes acessem o link, uma imagem será exibida em suas telas, como ilustrado na Figura 2.9. Nessa tela, os alunos devem inserir o número PIN do jogo.

Figura 2.9 – PIN



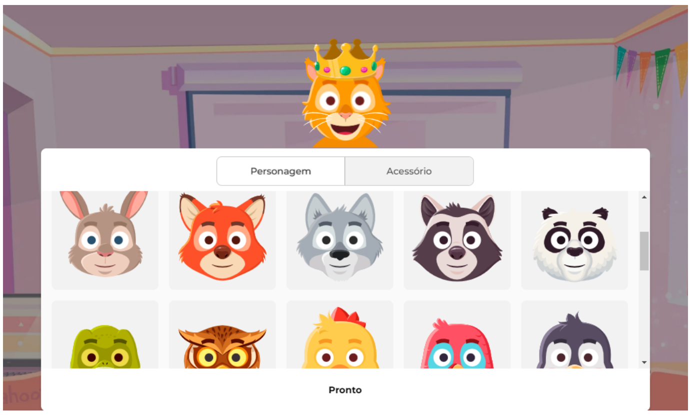
Posteriormente, os alunos serão solicitados a criar um nome ou apelido para participar do jogo. Para isso, eles verão a Figura 2.10 em suas telas.

Figura 2.10 – Aluno insere nome ou apelido



Logo depois, os alunos têm a opção de personalizar seu avatar no jogo. Para fazer isso, basta clicar no ícone de lápis e escolher o avatar desejado, conforme ilustrado na Figura 2.11.

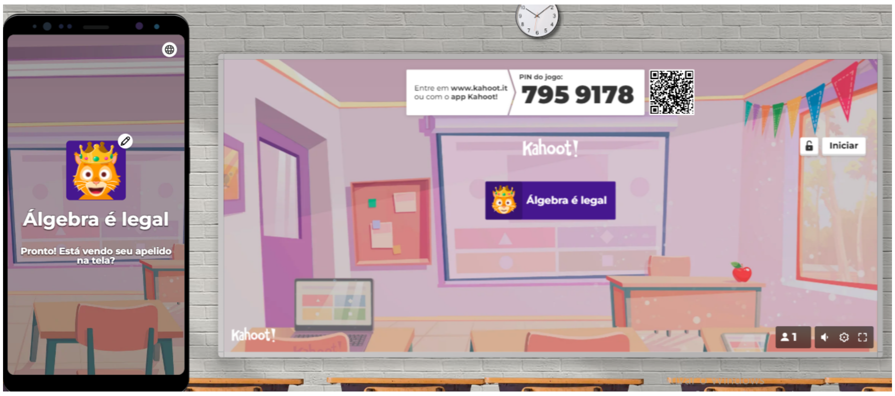
Figura 2.11 – Escolha do Avatar



O Jogo

Quando todos os alunos estiverem na seção, o professor deve clicar no botão "Iniciar", conforme demonstrado na Figura 2.12.

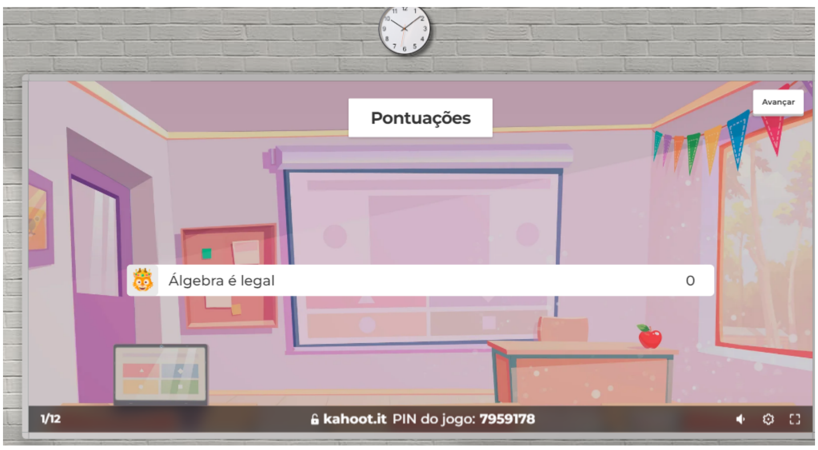
Figura 2.12 – Iniciaando o jogo.



Fonte: Acervo da Autora

A cada questão, a pontuação dos jogadores com a melhor classificação é exibida, como ilustrado na Figura. 2.13. Durante o jogo, os alunos acumulam pontos ao fornecerem respostas corretas e rápidas. Aqueles que respondem de forma precisa e ágil obtêm mais pontos. No entanto, cometer erros ou não responder dentro do prazo estabelecido não resulta em pontuação. Nesse contexto, é relevante destacar a importância tanto da precisão quanto da agilidade na conquista de pontos.

Figura 2.13 – Classificação por pontuação



Fonte: Acervo da Autora

Questões do jogo

Questão 01: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$a^2 - 16.$$

Aternativas:

( ) $(a+4)(a-4)$ (resposta correta)

( ) $a^2 - 8a + 4$

( ) $(a+8)(a-8)$

( ) $a^2 - 4a + 16$

Os alunos terão o tempo de 60 segundos para resolver e a valor da pontuação será Padrão.

Questão 02: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$x^2 + 10x + 25.$$

Alternativas:

( ) $(x+5)(x-5)$

( ) $(x+25)^2$

( ) $5(2x+5)$

( ) $(x+5)^2$ (resposta correta)

Os alunos terão o tempo de 90 segundos para resolver a questão. O valor da pontuação é Padrão.

Questão 03: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$64x^2 - 8x.$$

Alternativas:

( ) $8x(8x-0)$

( ) $(8x+1)(8x-1)$

( ) $8x(8x-1)$ (resposta correta)

( ) $4(16x+2)$

Os alunos terão o tempo de resolução de 90 segundos. A pontuação é Padrão.

Questão 04: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$12x^2y^3 + 6x^4y^2 + 18xy^4.$$

Alternativas:

( ) $12x^2y^3(2 + x^2y + 3y)$

( ) $18xy(xy^2 + x^3y + y^3)$

( ) $6xy^2(2xy + x^3 + 3y^2)$ (resposta correta)

( ) $2xy(6xy^2 + 3x^2y + 9xy^3)$

Os alunos terão o tempo de 90 segundos para resolver a questão e a sua pontuação será Padrão.

Questão 05: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$a^2 - b^2.$$

Alternativas:

( ) $(a + b)^2$

( ) $(a - b)^2$

( ) $ab(a - b)$

( ) $(a + b)(a - b)$ (resposta correta)

Os alunos terão o tempo para resolver é de 60 segundos e a sua pontuação é Padrão.

Questão 06: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$a^2 - 2ab + b^2.$$

Alternativas:

( ) $(a + b)(a - b)$

( ) $ab(a - b)$

( ) $(a - b)^2$ (resposta correta)

( ) $(a + b)^2$

Os alunos terão o tempo de 90 segundos para responder a questão e a pontuação é Padrão.

Questão 07: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$4x^2 - 1.$$

Alternativas:

( ) $(2x-1)^2$

( ) $(2x+1)^2$

( ) $2x(2x-1)$

( ) $(2x-1)(2x+1)$ (resposta correta)

Os alunos terão o tempo de resolução de 90 segundos e a pontuação é Padrão.

Questão 08: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$4x^2 + 4x + 1.$$

Alternativas:

( ) $(2x-1)(2x-1)$

( ) $2x(2x+1)$

( ) $(2x+1)(2x+1)$ (resposta correta)

( ) $(2x-1)^2$

Os alunos terão o tempo de 90 segundos para resolver e a pontuação é Padrão.

Questão 09: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 4x + 1}.$$

Alternativas:

( ) $\frac{2x+1}{x}$

( ) $\frac{2x+1}{2x-1}$

( ) $\frac{2x-1}{2x+1}$ (resposta correta)

( ) $\frac{1}{2x+1}$

Os alunos terão o tempo de 120 segundos para resolver e a sua pontuação é Padrão.

Questão 10: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}.$$

Alternativas:

( ) $\dfrac{a+b}{a}$

( ) $\dfrac{1}{a+b}$

( ) $\dfrac{a-b}{a+b}$

( ) $\dfrac{a+b}{a-b}$ (resposta correta)

Os alunos terão o tempo de 120 segundos para resolução e a pontuação é Padrão.

Questão 11: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$\frac{(a+b)^2 - 4ab}{a^2 - b^2}.$$

Alternativas:

( ) $\dfrac{a+b}{a}$

( ) $\dfrac{a+b}{a-b}$

( ) $\dfrac{a-b}{a+b}$ (resposta correta)

( ) $\dfrac{1}{a+b}$

Os alunos terão o tempo de 180 segundos para solucionar e a pontuação é Dupla.

Questão 12: Assinale a alternativa que representa a fatoração correta da seguinte expressão algébrica

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}.$$

Alternativas:

( ) $\dfrac{x-5}{x+5}$

( ) $\dfrac{x(x-5)}{x+5}$

( ) $\dfrac{x}{x+5}$ (resposta correta)

( ) $\dfrac{x}{x-5}$

Os alunos terão o tempo de 120 segundos para resolver e a pontuação é padrão.

Ao término do jogo, teremos um pódio que exibirá a colocação dos três destaques da partida, como ilustrado na Figura. 2.14.

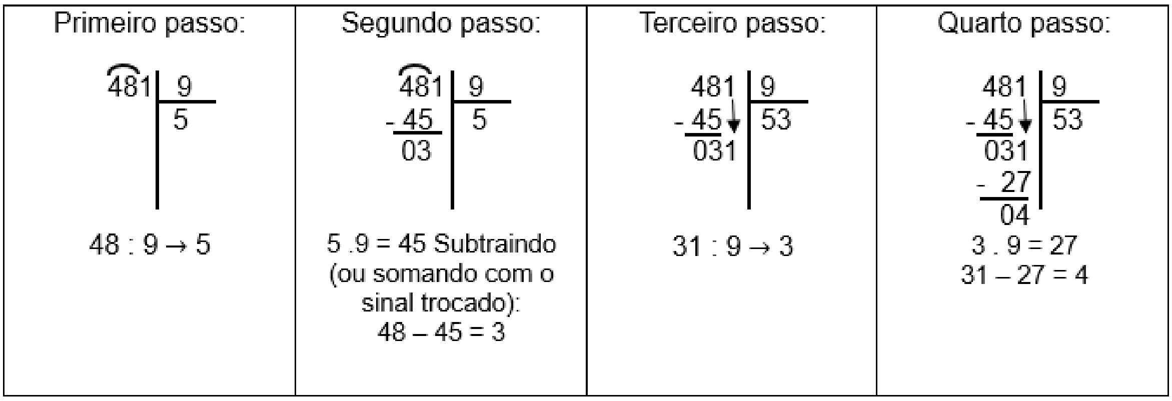
Figura 2.14 – Pódio

Fonte: Acervo da Autora

Proposta 05: Divisão de polinômios pelo método da chave, aplicação na terceira série do Ensino Médio

Antes de iniciarmos a divisão entre polinômios vamos lembrar como resolvemos a divisão empregando nos números inteiros. Consideremos a seguinte divisão de números inteiros:

Figura 2.15 – Método da chave



Fonte: Acervo da Autora

Pela divisão acima, temos que

$$481 = 9 \cdot 53 + 4,$$

em que 481 é o dividendo, 9 é o divisor, 53 é o quociente e 4 é o resto.

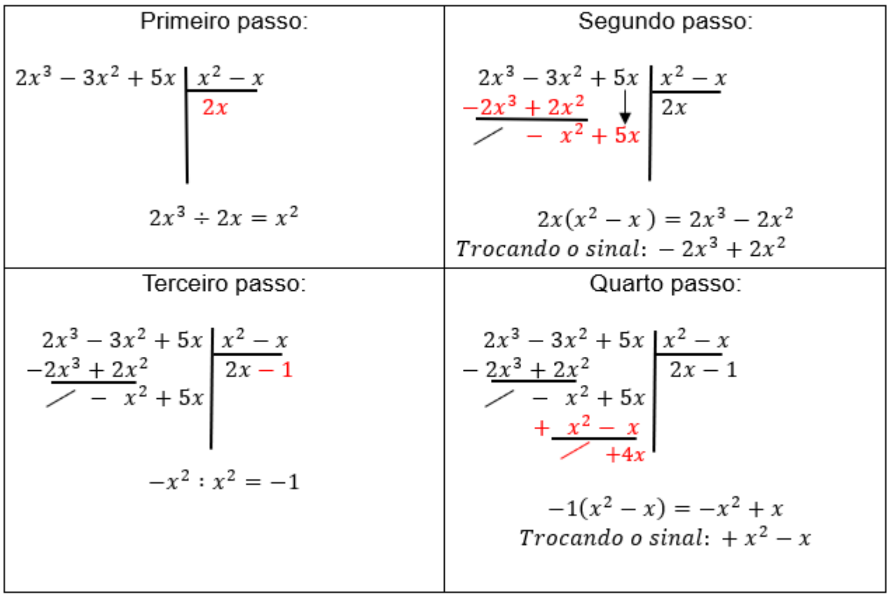
Vamos utilizar a mesma regra prática na divisão de polinômios.

Sejam $p(x)$ e $d(x)$ dois polinômios, com $d(x)$ não nulo, e gr(p) o grau de $p(x)$ e d(d) o grau de $d(x)$. Ao dividir $p(x)$ por $q(x)$, encontramos dois polinômios, $q(x)$, denominado quociente, e $r(x)$, denominado o resto. Esses dois polinômios devem satisfazer as seguintes condições:

- $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
- $r(x)$ é o polinômio nulo ou o grau de $r(x)$ deve satisfazer $0 \leq gr(r) \leq gr(d)$.

Aplicaremos o método da chave na divisão de $2x^3 - 3x^2 + 5x$ por $x^2 - x$. Veja a Figura 2.16.

Figura 2.16 – Método da chave para os polinômios

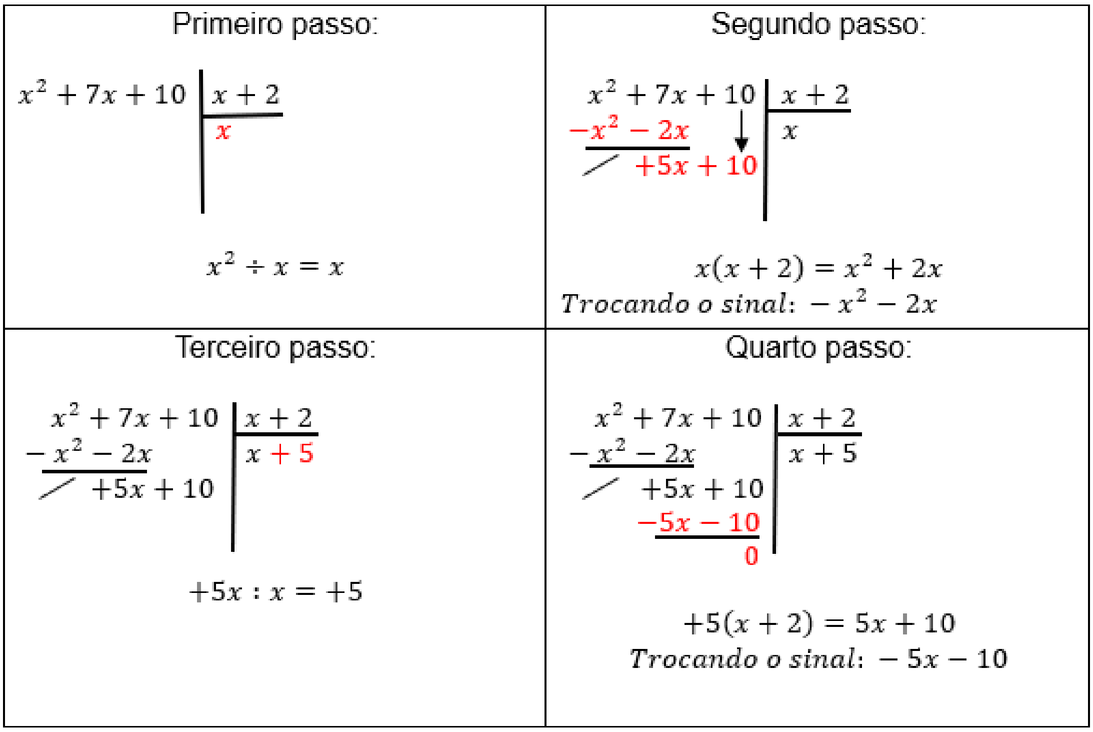


Lembre-se que $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. Assim,

$$2x^3 - 3x^2 + 5x = (x^2 - x) \cdot (2x - 1) + 4x.$$

Novamente, aplicaremos o método da chave na divisão de $x^2 + 7x + 10$ por $x + 2$. Veja a Figura 2.17.

Figura 2.17 – Método da chave para os polinômios



Lembre-se que $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. Assim,

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2) \cdot (x + 5) + 0.$$

Nesse caso, temos que $x^2 + 7x + 10$ é o dividendo, $x + 2$ é o divisor, $x + 5$ é o quociente e o polinômio nulo, 0, é o resto.

Observações:

- Quando o resto é nulo, $r(x) = 0$, dizemos que o polinômio $p(x)$ é divisível por $q(x)$, ou seja, a divisão é exata.
- O grau do quociente $q(x)$ sempre será a diferença entre os graus do dividendo $p(x)$ e do divisor $d(x)$ quando $\text{gr}(p) \geq \text{gr}(q)$.

Atividade de Fixação

Questão 1: Divida o polinômio $p(x) = 4x^2 + 6x - 12$ pelo polinômio $q(x) = 2x - 1$ utilizando o método da chave, em seguida, determine o quociente e o resto da divisão.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 + 6x - 12 & 2x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{4x^2 + 2x} & 2x + 4 \\ +8x - 12 & \\ \underline{-8x + 4} & \\ -8 & \end{array}$$

Resposta: Quociente: $2x + 4$ e Resto: -8.

Questão 2: Divida o polinômio $p(x) = 3x^2 + 10x - 8$ pelo polinômio $q(x) = x + 4$ utilizando o método da chave, em seguida, determine o quociente e o resto da divisão.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 10x - 8 & x + 4 \\ \cline{2-2} -\underline{3x^2 - 12x} & 3x - 2 \\ -2x - 8 & \\ \underline{+2x + 8} & \\ 0 & \end{array}$$

Resposta: Quociente: $3x - 2$ e Resto: 0.

Proposta 06: Expressões algébricas e divisão

Com o objetivo de despertar o interesse dos alunos no que diz respeito ao conteúdo de expressões algébricas vamos propor uma atividade referente à criptografia RSA, com o intuito de estabelecer a importância da fatoração na segurança da informação.

Início da aula: Começar a aula realizando uma pergunta que seja provocativa "Você já se perguntou como é possível manter mensagens privadas em um mundo digital repleto de ameaças?".

Próxima etapa: Sugestão de texto e imagem para explicar de forma breve o que é criptografia RSA.[1]

Figura 2.18 – Criptografia

Fonte: Pixabay[1]

A Criptografia RSA é responsável pela segurança do sistema RSA, e é um algoritmo de criptografia assimétrica que permite a segurança e a confidencialidade das informações disponibilizadas pela internet e outras comunicações.

Os responsáveis pelo desenvolvimento foram Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, em 1977, e tal algoritmo vem sendo aceito em sistemas criptográficos. Assim, percebemos como a matemática, especialmente na Álgebra, garante a segurança das comunicações digitais, um tópico relevante no contexto atual de tecnologia e informação.

[1] Disponível em: <https://pixabay.com/illustrations/cyber-attack-encryption-smartphone-4444448/>. Acesso em: 16 jun. 2023

Em resumo, chamamos essa criptografia de assimétrica pois existe um par de chaves diferentes em que uma delas tem a função de criptografar, enquanto a outra tem a função de descriptografar as informações. Tais chaves são conhecidas como chave pública e chave privada.

A chave pública pode ser compartilhada com qualquer pessoa, ela é usada para criptografar dados antes de enviar, já a chave privada é secreta, sendo utilizada para descriptografar os dados recebidos.

O algoritmo está conectado à dificuldade de fatorar grandes números, ou seja, a segurança RSA consiste no fato de que a fatoração de grandes números primos é, computacionalmente ou não, um processo extremamente complicado e demorado.

A fatoração de números é a chave para quebrar a criptografia RSA, pois ele permitiria identificar os fatores primos essenciais para descobrir a chave privada e descriptografar uma mensagem.

E vocês? Estão prontos para decodificar a seguinte mensagem?

[**25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13**]

Objetivos a serem alcançados:

- Introduzir a linguagem simbólica através do uso de símbolos e letras para representar quantidades desconhecidas;
- Resolver situações-problema que envolvam o cálculo do valor numérico de expressões algébricas;
- Compreender a relação entre a divisão aritmética e expressões algébricas através da criptografia;
- Explorar o processo de descriptografia usando equações;
- Usar a calculadora científica para calcular potências e divisão com resto;
- Interpretar os resultados na calculadora como letras do texto original;
- Analisar a relação entre os números criptografados, e as chaves pública e privada.

Sugestão ao professor: Perceba que o objetivo desta introdução é despertar o interesse dos alunos, através da criptografia, o cálculo de expressões algébricas e divisão. O texto base foi escolhido para chamar a atenção dos alunos quanto a tecnologia, desta forma, sugiro a aplicação da atividade no laboratório de informática com o uso da calculadora científica, visto que utilizar ferramentas ligadas a tecnologia pode tornar a aula mais produtiva e prazerosa.

Abordaremos a ideia de divisão de números inteiros com resto. Além disso, proporcionaremos a oportunidade de utilizar calculadoras científicas, o que tornará essa experiência mais agradável aos alunos. Afinal, no oitavo ano, muitos alunos nunca tiveram acesso a uma calculadora desse tipo. A orientação é levar os alunos até o laboratório de informática para acessar a calculadora científica dos computadores.

Para mostrar a importância da fatoração na criptografia sugiro ao professor realizar a decodificação da primeira letra utilizando congruência, além de apresentar um conteúdo novo o professor pode apresentar a importância da fatoração.

Para o desenvolvimento da atividade:

- Lápis, borracha e caderno de matemática;
- Tabela com as letras do alfabeto e suas respectivas posições;
- Calculadora.
- Realizar a atividade num laboratório de informática.

Atividade proposta no início do conteúdo é decodificar a palavra

PARABENS.

Para isso, o professor primeiro precisará codificar a palavra seguindo as Etapas 01 e 02.

Observação ao professor: Para realizar a criptografia e a descriptografia, utilizamos o conteúdo de congruência. Para os leitores interessados, recomendamos consultar o Capítulo 9 do livro-texto da disciplina MA14 - Aritmética do PROFMAT.

Etapa 01: Gerando a chave: Para gerar a chave, siga os seguintes passos:

1. Escolha dois números primos p e q. Sugestão: $p = 3$ e $q = 11$
2. Determine o número $n = p \cdot q$. Neste caso, $n = 3 \cdot 11 = 33$
3. Determine o número $m = (p-1)(q-1)$. Utilizando $p = 3$ e $q = 11$, temos $m = (3-1)(11-1) = 20$.
4. Escolha um número inteiro e que satisfaça as seguintes condições:
   - $1 \leq e < m$;
   - $\text{mdc}(e, m) = 1$. Com $p = 3$ e $q = 11$, podemos tomar $e = 7$, pois $1 \leq 7 < 20$ e $mdc(7, 20) = 1$.

5. Agora encontre o número d tal que
   - $1 \leq d \leq m$;
   - $d \cdot e \equiv 1 \mod m$, isto é, $m \mid (d \cdot e - 1)$. Utilizando os valores acima, temos $d = 3$.

Professores, percebam que:

- n é um número composto pela multiplicação de dois primos grandes. O número n é utilizado tanto na codificação como na decodificação.
- e é um número inteiro escolhido como o expoente de criptografia público.

Dessa forma, a **chave pública** é representada pelo par $(n, e) = (33, 7)$, enquanto a **chave privada** corresponde ao valor $d = 3$.

Etapa 02: Codificação. Nesta etapa será realizado o processo para decodificar a mensagem.

Tabela 1 – Letras do alfabeto e suas respectivas posições

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Fonte: Acervo da Autora

A mensagem escolhida é a palavra "PARABENS". Utilizando a seguinte Tabela 1, convertemos essa palavra em números, obtendo:

[**16, 1, 18, 1, 2, 5,14, 19**].

Para cada número x encontrado no primeiro passo será gerado um novo número, através da seguinte relação:

$$c \equiv x^e \mod n.$$

Dessa forma, obtemos a palavra codificada. Vamos iniciar criptografando cada um dos números, para esse procedimento será utilizado o conteúdo de congruência.

- O primeiro número é 16. Assim,

$$c \equiv 16^7 \mod 33.$$

Observamos que $c \equiv 16^7 \mod 33 \equiv 16^3 \cdot 16^4 \mod 33$ e realizando os cálculos para potências menores, temos

$$\begin{aligned}
&16^1 \bmod 33 \equiv 16 \bmod 33\\
&16^2 \bmod 33 \equiv 256 \bmod 33 \equiv 25 \bmod 33\\
&16^3 \bmod 33 \equiv (16^2 \cdot 16) \bmod 33 \equiv 25 \cdot 16 \bmod 33 \equiv 400 \bmod 33 \equiv 4 \bmod 33\\
&16^4 \bmod 33 \equiv 25^2 \bmod 33 \equiv 625 \bmod 33 \equiv 31 \bmod 33.
\end{aligned}$$

Assim,

$$c \equiv 16^7 \bmod 33 \equiv 16^4 \cdot 16^3 \bmod 33 \equiv 31 \cdot 4 \bmod 33 \equiv 124 \bmod 33 \equiv 25 \bmod 33.$$

Logo, o número 16 foi codificado para o número 25.

- O segundo número é 1. Como

$$c \equiv 1^7 \bmod 33 \equiv 1 \bmod 33,$$

segue que 1 é a própria codificação do número 1.

- O terceiro número é 18. Logo,

$$c \equiv 18^7 \bmod 33.$$

Temos que $c \equiv 18^7 \bmod 33 \equiv 18^3 \cdot 18^4 \bmod 33$. Utilizando os cálculos de potências menores temos,

$$\begin{aligned}
&18^1 \bmod 33 \equiv 18 \bmod 33\\
&18^2 \bmod 33 \equiv 324 \bmod 33 \equiv 27 \bmod 33\\
&18^3 \bmod 33 \equiv 18^2 \cdot 18 \bmod 33 \equiv 27 \cdot 18 \bmod 33 \equiv 486 \bmod 33 \equiv 24 \bmod 33\\
&18^4 \bmod 33 \equiv 27^2 \bmod 33 \equiv 729 \bmod 33 \equiv 3 \bmod 33.
\end{aligned}$$

Então,

$$c \equiv 18^7 \bmod 33 \equiv 18^4 \cdot 18^3 \bmod 33 \equiv 3 \cdot 24 \bmod 33 \equiv 72 \bmod 33 \equiv 6 \bmod 33,$$

e a codificação do número 18 é 6.

- Temos que o quarto número é 1. Já criptografamos esse número e vimos que é 1.

- O quinto número é 2. Assim,

$$c \equiv 2^7 \bmod 33 \equiv 128 \bmod 33 \equiv 29 \bmod 33.$$

Portanto, 29 é a codificação do número 2.

- Sexto numero é 5. Desta forma,

$$c \equiv 5^7 \bmod 33.$$

Vendo que $c \equiv 5^7 \bmod 33 \equiv 5^3 \cdot 5^4 \bmod 33$ e, utilizando os cálculos de potências menores, temos:

$$\begin{aligned}
5^1 \bmod 33 &\equiv 5 \bmod 33\\
5^2 \bmod 33 &\equiv 25 \bmod 33\\
5^3 \bmod 33 &\equiv (5^2 \cdot 5) \bmod 33 \equiv 25 \cdot 5 \bmod 33 \equiv 125 \bmod 33 \equiv 26 \bmod 33\\
5^4 \bmod 33 &\equiv 25^2 \bmod 33 \equiv 625 \bmod 33 \equiv 31 \bmod 33.
\end{aligned}$$

Logo,

$$c \equiv 5^7 \bmod 33 \equiv 5^4 \cdot 5^3 \bmod 33 \equiv 31 \cdot 6 \bmod 33 \equiv 806 \bmod 33 \equiv 14 \bmod 33.$$

Concluímos que o número 5 é codificado para o números 14.

- O sétimo número é 14. Logo,

$$c \equiv 14^7 \bmod 33.$$

Sabemos que $c \equiv 14^7 \bmod 33 \equiv 14^3 \cdot 14^4 \bmod 33$. Fazendo o uso dos cálculos de menores, obtemos

$$\begin{aligned}
14^1 \bmod 33 &\equiv 14 \bmod 33\\
14^2 \bmod 33 &\equiv 196 \bmod 33 \equiv 31 \bmod 33\\
14^3 \bmod 33 &\equiv 14^2 \cdot 14 \bmod 33 \equiv 31 \cdot 14 \bmod 33 \equiv 434 \bmod 33 \equiv 5 \bmod 33\\
14^4 \bmod 33 &\equiv 31^2 \bmod 33 \equiv 961 \bmod 33 \equiv 4 \bmod 33.
\end{aligned}$$

Então,

$$c \equiv 14^7 \bmod 33 \equiv 14^4 \cdot 14^3 \bmod 33 \equiv 4 \cdot 5 \bmod 33 \equiv 20 \bmod 33.$$

O número 14 foi codificado para o número 20.

- Oitavo número é 19. Logo,

$$c \equiv 19^7 \bmod 33.$$

Temos $c \equiv 19^7 \bmod 33 \equiv 19^3 \cdot 19^4 \bmod 33$. Novamente, utilizando os cálculos de potências menores, obtemos

$$\begin{aligned}
19^1 \bmod 33 &\equiv 19 \bmod 33\\
19^2 \bmod 33 &\equiv 361 \bmod 33 \equiv 31 \bmod 33\\
19^3 \bmod 33 &\equiv (19^2 \cdot 19) \bmod 33 \equiv 31 \cdot 19 \bmod 33 \equiv 589 \bmod 33 \equiv 28 \bmod 33\\
5^4 \bmod 33 &\equiv 31^2 \bmod 33 \equiv 961 \bmod 33 \equiv 4 \bmod 33.
\end{aligned}$$

Assim,

$$c \equiv 19^7 \bmod 33 \equiv 19^4 \cdot 19^3 \bmod 33 \equiv 4 \cdot 28 \bmod 33 \equiv 112 \bmod 33 \equiv 13 \bmod 33,$$

e a codificação do número 19 é 13.

Portanto, a palavra "PARABENS" foi codificada para

[25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13].

Etapa 03: Decodificação. Os alunos recebem uma mensagem codificada. No nosso exemplo, os alunos recebem a seguinte mensagem

$$[25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13].$$

Para facilitar a decodificação os alunos podem receber a Tabela 1.

Neste momento, é necessário adaptar a atividade de decodificação para alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, pois no processo de decodificação é utilizado congruência módulo n:

$$x \equiv c^d \bmod n.$$

Iniciamos mostrando o significado de cada letra da equação.

$$x \equiv c^d \bmod n.$$

Na qual:

- x: é o resultado da operação de descriptografia. Representa a mensagem original que queremos obter.
- c: é o texto criptografado, ou seja, a mensagem que foi previamente criptografada usando a chave pública do destinatário.
- d: é a chave privada de descriptografia, essa chave é mantida em segredo pelo destinatário e é usada para descriptografar o texto criptografado c.
- n: é a chave pública e o módulo utilizado na operação de criptografia. É um número composto pela multiplicação de dois primos grandes, geralmente denominados p e q. O valor de n é utilizado tanto na criptografia quanto na descriptografia.

Para a decodificação desta mensagem é necessário disponibilizar dos valores que foram desenvolvidos na Etapa 01, sendo assim: $c \in \{25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13\}$, $d = 3$ e $n = 33$.

Para determinar a primeira letra, temos os seguintes valores: $c = 25$, $d = 3$ e $n = 33$. Sendo assim:

$$x \equiv c^d \bmod n.$$

Portanto:

$$x \equiv 25^3 \bmod 33.$$

Sabemos que

$$x \equiv 25^3 \bmod 33 \equiv 25 \cdot 25^2 \bmod 33$$

Utilizando cálculos de valores menores, temos:

$$25^1 \equiv 25 \bmod 33$$

$$25^2 \equiv 625 \bmod 33 \equiv 31 \bmod 33$$

$$25^3 \equiv 25 \cdot 25^2 \bmod 33 \equiv 25 \cdot 31 \bmod 33 \equiv 775 \bmod 33 \equiv 16 \bmod 33.$$

Agora o professor pode desenvolver o processo através da divisão. Como primeiro passo resolva c^d. O resultado deverá ser dividido por 33, e o resto da divisão será o código referente a primeira letra. Temos

$$25^3 = 15625$$

Agora, efetuando a divisão por 33 obtemos:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 15625 & 33 \\ \cline{3-3}
- & 132 & 473 \\ \cline{2-2}
 & 242 & \\
- & 231 & \\ \cline{2-2}
 & 115 & \\
- & 99 & \\ \cline{2-2}
 & 16 &
\end{array}$$

Temos que o resto é 16. Logo, a letra desejada é a que está na posição 16 da Tabela 1. Assim, a primeira letra da palavra é **P**.

A partir desse momento o desafio é com os alunos, eles devem chegar nos demais valores.

- Segundo número a ser decodificado é $c = 1$.
  Temos os seguintes números: $c = 1$, $d = 3$ e $n = 33$. Assim, $1^3 = 1$. Na divisão de 1 por 33, temos que 0 é o quociente e o resto é 1. Como o resto é 1, a letra desejada é a que está na primeira posição da Tabela 1. Assim, a segunda letra da palavra é **A**.

- Terceiro número a ser decodificado é $c = 6$.
  Temos os seguintes números: $c = 6$, $d = 3$ e $n = 33$. Logo, $6^3 = 216$. Dividindo 216 por 33, chegamos no quociente 6 e o resto 18. Como o resto é 18, a letra desejada é a que está na posição 18 da Tabela 1. Assim, a terceira letra da palavra é **R**.

- Quarto número a ser decodificado $c = 1$.
  Já vimos que $c = 1$ corresponde a letra **A**.

- Quinto número a ser codificado: $c = 29$
  Temos os seguintes valores: $c = 29$, $d = 3$ e $n = 33$. Notamos que $29^3 = 24389$ e 2 é o resto na divisão 24389 por 33. Sendo 2 o resto, a letra desejada é a que está na posição 2 da Tabela 1. Assim, a quinta letra da palavra é **B**.

- Sexto valor a ser codificado: $c = 14$.
  Temos os seguintes valores: $c = 14$, $d = 3$ e $n = 3$. Realizando as contas, obtemos $14^3 = 2744$ e, na divisão de 2744 por 33 o resto é 5. Portanto, a letra desejada é a que está na posição 5 da Tabela 1. Assim, a sexta letra da palavra é **E**.

- Sétimo Valor a ser codificado: $c = 20$.
  Temos os seguintes valores: $c = 20$, $d = 3$ e $n = 33$. Seguindo o processo, obtemos $20^3 = 8000$ e o resto na divisão de 8000 por 33 o quociente é 242 e resto é 14. Desse modo, a letra desejada é a que está na posição 14 da Tabela 1. Assim, a sétima letra da palavra é **N**.

- Oitavo Valor a ser codificado: c = 13
  Temos os seguintes valores: $c = 13$, $d = 3$ e $n = 33$. Como $13^3 = 2197$, então ao dividir esse valor por 33 chegamos no quociente 66 e no resto 19. Segue que a letra desejada é a que está na posição 19 da Tabela 1. Assim, a oitava letra da palavra é **S**.

Essa atividade pode se transformar em um projeto para a feira do conhecimento ou até mesmo ser apresentada em uma feira de matemática, caso haja alunos interessados no tema. Como requer algum tempo de preparação adicional para outras codificações, seria algo a ser desenvolvido no contraturno..

3 Ao estudante

Neste capítulo serão apresentadas as propostas de atividades com aplicação para estudantes do Ensino Básico.

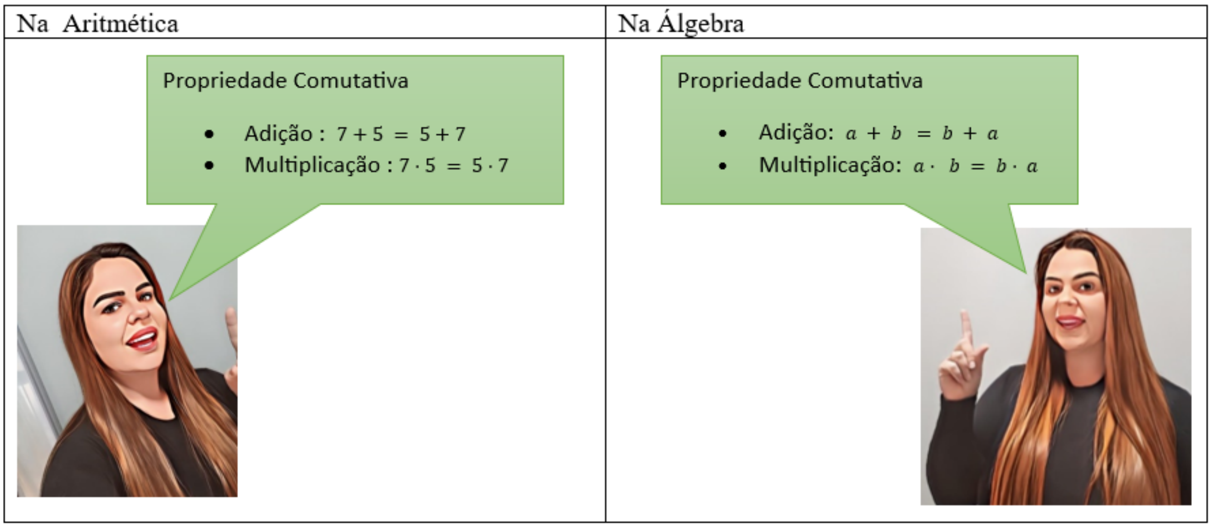
Proposta 01: Conexões Aritméticas e Algébricas: Descobrindo paralelos matemáticos

Objetivos a serem alcançados:

- Reconhecer semelhanças e conexões entre conceitos e propriedades numéricas e algébricas.
- Observar que muitas das regras e propriedades da Aritmética se aplicam à Álgebra.
- Usar suas habilidades aritméticas existentes para resolver problemas e simplificar expressões algébricas.
- Perceber que os conceitos matemáticos podem ser generalizados para além de situações específicas, permitindo-lhes resolver problemas mais complexos e abstratos.
- Compreender que a Álgebra é uma extensão natural dos conceitos aritméticos.
- Dominar as propriedades a fim de desenvolver habilidades fundamentais de manipulação de expressões algébricas.

Vamos analisar as propriedades que vocês já aprenderam na Aritmética em anos anteriores e compará-las com as propriedades utilizadas no ensino de polinômios. Nesta atividade, iremos explorar as semelhanças e diferenças entre esses dois campos da matemática, buscando ampliar nosso entendimento e estabelecer conexões entre os conceitos estudados. Para isso observe e analise as figuras a seguir.

Figura 3.1 – Propriedade Comutativa



Questão 1: Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa.

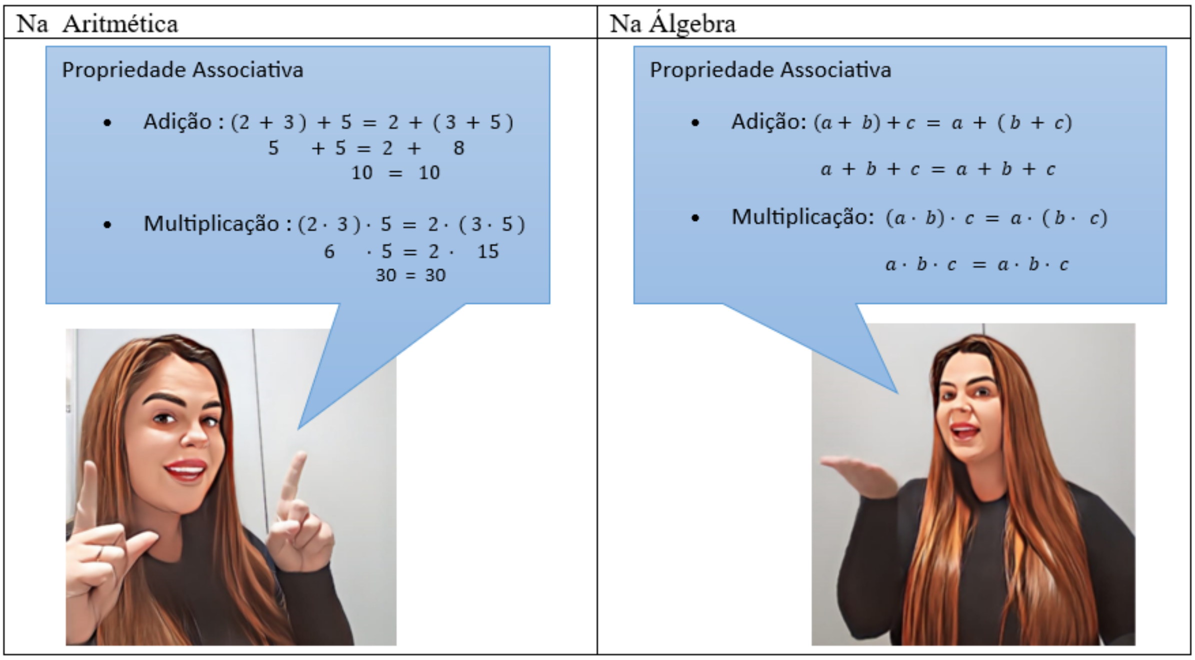
(a) As ações de calçar as meias e calçar os sapatos são comutativas.

(b) As ações de colocar o chapéu e o casaco são comutativas.

(c) As ações de lavar roupa e secar são comutativas.

Questão 2: Reflita se a subtração nos número inteiros é comutativa.

Figura 3.2 – Propriedade Associativa



Questão 3: Use as propriedades dos números inteiros para escrever as expressões algébricas sem parênteses:

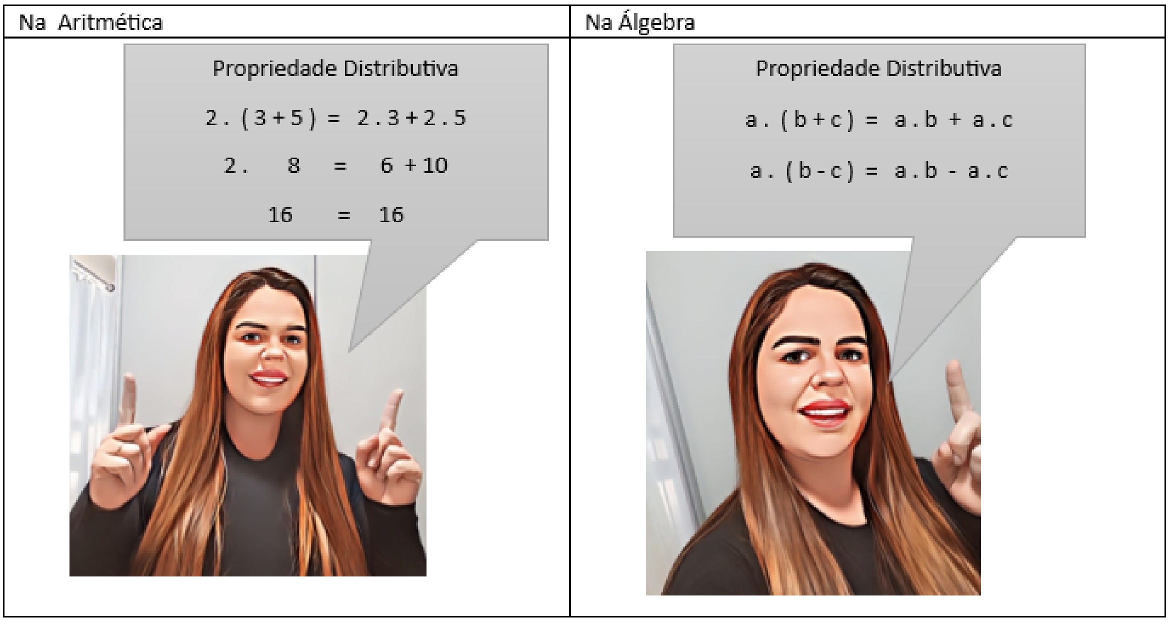
(a) $(x-1)+4$

(b) $3 \cdot (5 \cdot x)$

(c) $(2+y)+5$

(d) $3 \cdot (x \cdot 6)$

Figura 3.3 – Propriedade Distributiva



Questão 4: Use as propriedades dos números inteiros para escrever as expressões algébricas sem parênteses:

(a) $4(x-1)$

(b) $5(2a+1)$

(c) $4(2+b)+5$

(d) $3(x+2)+2(2y-1)$

Questão 5: Use as propriedades dos números inteiros para simplificar as expressões algébricas:

(a) $2x+4x$

(b) $-y + 1 + 3y$

(c) $3a - 6a - a$

(d) $4z + 5 + 2 + 2z$

Figura 3.4 – Elemento Neutro

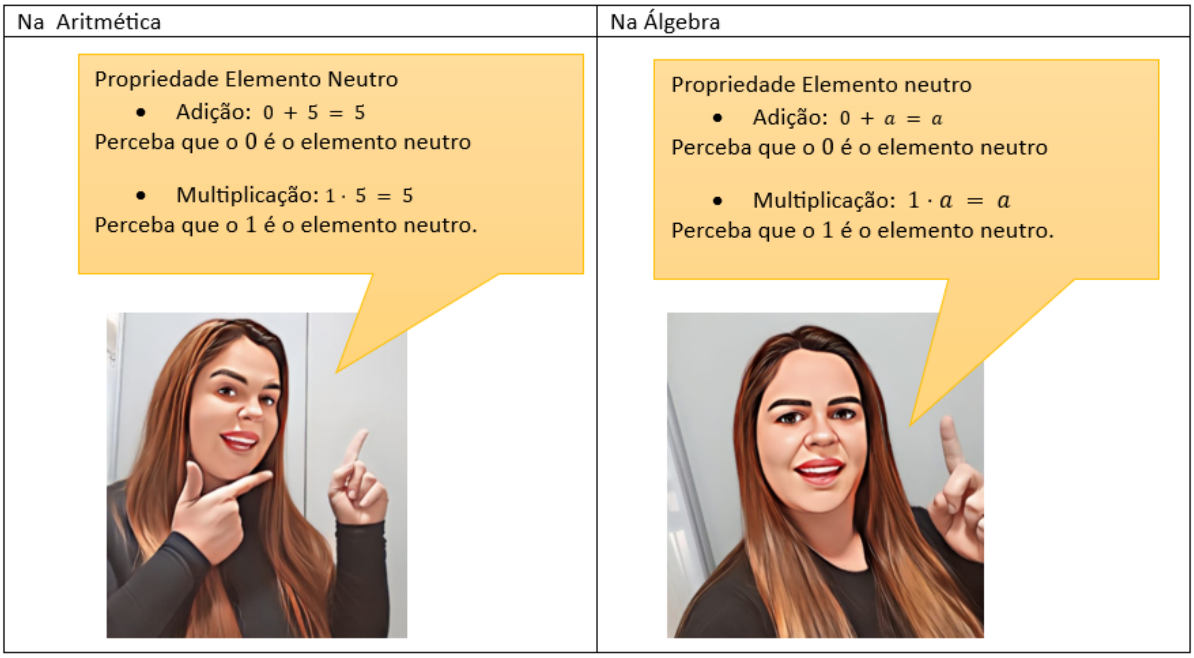
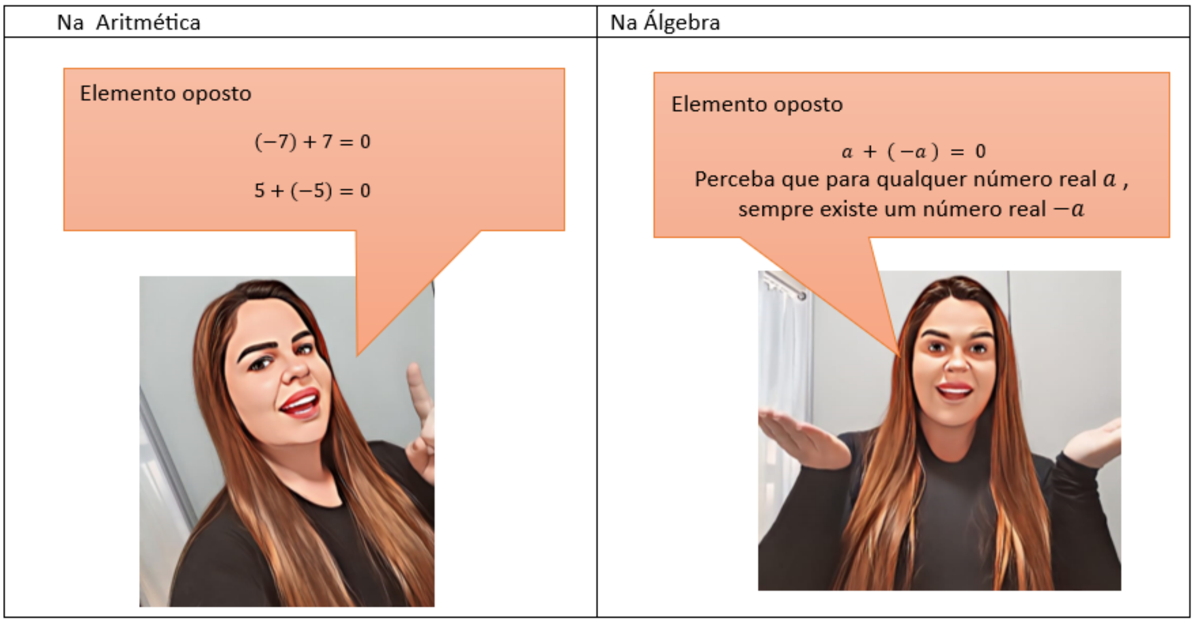


Figura 3.5 – Elemento Oposto



Questão 6: Use as propriedades dos números inteiros para simplificar as expressões algébricas:

(a) $a^2 - a(a + b)$

(b) $-xy + x(1 + y)$

(c) $1(a + b) - 1(a + b)$

(d) $-2a + 4 + 1(2a - 3)$

Com esta atividade, eu aprendi a:

- ☐ Reconhecer semelhanças e conexões entre conceitos e propriedades numéricas e algébricas.
- ☐ Observar que muitas das regras e propriedades da aritmética se aplicam à Álgebra.
- ☐ Dominar as propriedades a fim de desenvolver habilidades fundamentais de manipulação de expressões algébricas.

Proposta 02: Estudo das operações com polinômios

Introdução: A adição e a subtração de polinômios exigem a combinação adequada de termos semelhantes, enquanto a multiplicação envolve a distribuição de cada termo de um polinômio sobre todos os termos do outro polinômio.

Já vimos que monômios de uma variável, na variável x, são expressões algébricas como

$$5 \qquad 2x \qquad -6x^2 \qquad 31x^3 \qquad -12x^6 \qquad -x^{11}$$

Ou seja, um monômio pode ser um número ou uma expressão algébrica que represente apenas multiplicações de números e potências naturais de x.

Além disso, vimos que polinômios na variável x são expressões algébricas como

$$5 \qquad -4x \qquad 2x-1 \qquad 3x^2-4x+1 \qquad -5x^4+10x \qquad -3x^5-6x^3-2x^2+1$$

Ou seja, polinômios são somas finitas de monômios (*poli=vários*).

Observação: Para o Ensino Médio é importante adicionar a seguinte definição:

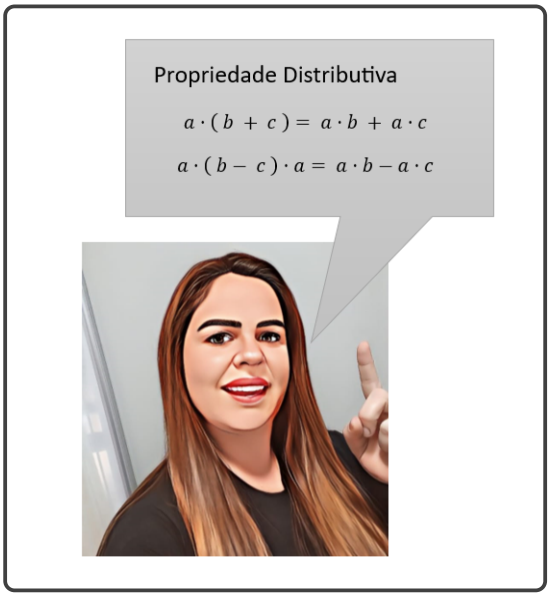
De modo geral, um polinômio na variável x é uma expressão da forma

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0,$$

em que $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ e a_0 são números reais ou complexos denominados coeficientes.

Adição e Subtração de monômios

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, podemos adicionar e subtrair monômios semelhantes.



Observe os exemplos:

- $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$
- $12x^2 - 3x^2 = (12 - 3)x^2 = 9x^2$
- $-x^5 - 7x^5 = (-1 - 7)x^5 = -8x^5$

Adição e Subtração de polinômios

Denominamos soma de dois ou mais polinômios ao polinômio que se obtém adicionando todos os termos semelhantes dos polinômios dados. Observe os exemplos:

- Se $p(x) = 3x + 12x^2$ e $q(x) = 5x - 3x^2$, então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x + 12x^2) + (5x - 3x^2) \\ &= 3x + 5x + 12x^2 - 3x^2 \\ &= (3 + 5)x + (12 - 3)x^2 \\ &= 8x + 9x^2. \end{aligned}$$

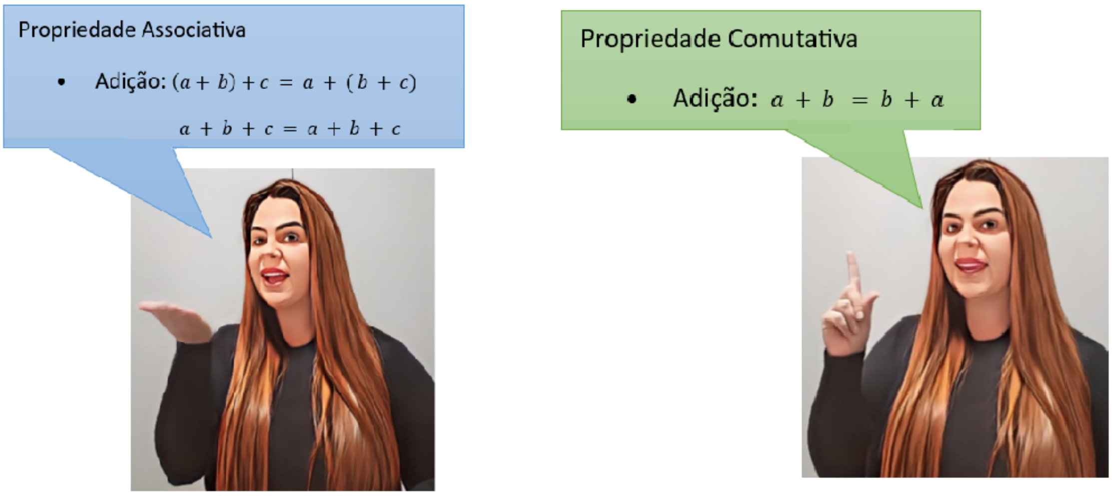
- Se $p(x) = 3x^2 - 5x + 8$ e $q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 9$, então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x^2 - 5x + 8) + (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) \\ &= (0x^3 + 3x^2 - 5x + 8) + (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) \\ &= 0x^3 + 2x^3 + 3x^2 + 5x^2 - 5x - 2x + 8 - 9 \\ &= (0 + 2)x^3 + (3 + 5)x^2 + (-5 - 2)x + (8 - 9) \\ &= 2x^3 + 8x^2 - 7x - 1 \end{aligned}$$

- Se $p(x) = -x^5 + 2x - 1$ e $q(x) = -7x^5 + 4x^3 + 2$, então

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (-x^5 + 2x - 1) + (-7x^5 + 4x^3 + 2) \\ &= (-x^5 + 0x^3 + 2x - 1) + (-7x^5 + 4x^3 + 0x + 2) \\ &= -x^5 + (-7x^5) + 4x^3 + 0x^3 + 2x + 0x + (-1) + 2 \\ &= (-1 - 7)x^5 + (4 + 0)x^3 + (2 + 0)x + (-1 + 2) \\ &= -8x^5 + 4x^3 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Percebam que para efetuar a adição de polinômios usamos as propriedades associativa e comutativa da adição, além da distributiva para adicionar os termos semelhantes.



Observação: Para os alunos do Ensino Médio deve-se adicionar a seguinte definição:

Considere dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, sendo eles na forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

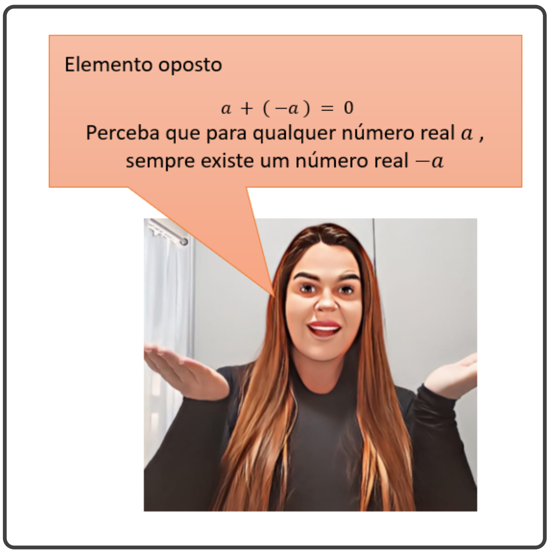
Define-se a adição $p(x) + q(x)$ como

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Pode-se também definir a subtração entre dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ por

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x)),$$

em que $-q(x)$ é o polinômio oposto de $q(x)$.



Observe os seguintes exemplos: Se $p(x) = 3x^2 - 5x + 8$ e $a(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 9$, então:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (3x^2 - 5x + 8) - (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) \\ &= -2x^3 + (3 - 5)x^2 + (-5 - (-2))x + (8 - (-9)) \\ &= -2x^3 - 2x^2 - 3x + 17 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q(x) - p(x) &= (2x^3 + 5x^2 - 2x - 9) - (3x^2 - 5x + 8) \\ &= 2x^3 + (5 - 3)x^2 + (-2 - (-5))x + (-9 - 8) \\ &= 2x^3 + 2x^2 + 3x - 17 \end{aligned}$$

Observe que a subtração de polinômios não é comutativa, pois no exemplo acima temos que $p(x) - q(x) \neq q(x) - p(x)$.

Observação: Para os alunos do Ensino Médio pode-se adicionar a seguinte definição:

Considere dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, sendo eles na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e

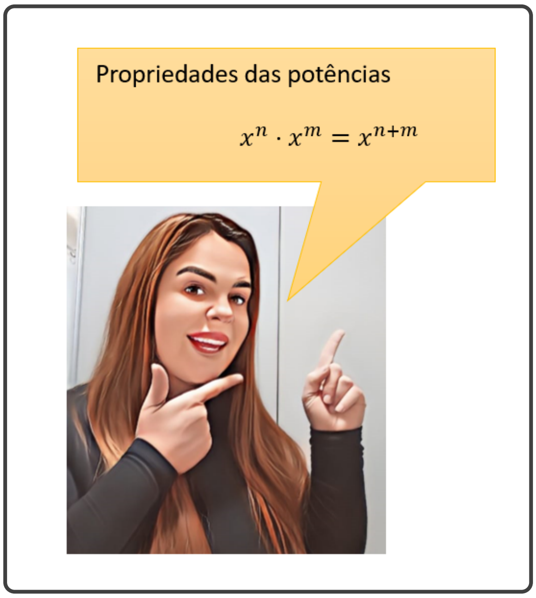
$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Temos que a diferença (subtração) $p(x) - q(x)$ é dada por

$$p(x) - q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Multiplicação de monômios

Aplicando a propriedade da potenciação da figura abaixo podemos multiplicar monômios.



Observe os seguintes exemplos:

- $(3x^3)\cdot(5x^2) = 3\cdot5\cdot x^3\cdot x^2 = 15\cdot x^{3+2} = 15x^5$
- $(12x)\cdot(-3x^5) = 12\cdot(-3)\cdot x^1\cdot x^5 = -36x^{1+5} = -36x^6$
- $x^7 \cdot 3x^7 = 3x^{7+7} = 3x^{14}$

Multiplicação de polinômios

Para efetuar a multiplicação de dois ou mais polinômios, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Devemos multiplicar dois a dois todos os termos do primeiro polinômio com todos os termos do segundo. Veja exemplos:

- Se $p(x) = 3x+5$ e $q(x) = x^3+2x-3$, então

$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) &= (3x+5)\cdot(x^3+2x-3) \\ &= 3x\cdot x^3 + 3x\cdot 2x + 3x\cdot(-3) + 5\cdot x^3 + 5\cdot 2x + 5\cdot(-3) \\ &= 3x^4 + 6x^2 - 9x + 5x^3 + 10x - 15 \\ &= 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 + (-9+10)x - 15 \\ &= 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x - 15 \end{aligned}$$

- Se $p(x) = 2x^2+3x+1$ e $q(x) = 4x^4 - x^2$, então

$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) &= (2x^2+3x+1)\cdot(4x^4-x^2) \\ &= 2x^2\cdot 4x^4 + 2x^2\cdot(-x^2) + 3x\cdot 4x^4 + 3x\cdot(-x^2) + 1\cdot 4x^4 + 1\cdot(-x^2) \\ &= 8x^6 - 2x^4 + 12x^5 - 3x^3 + 4x^4 - x^2 \\ &= 8x^6 + 12x^5 + (-2+4)x^4 - 3x^3 - x^2 \\ &= 8x^6 + 12x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Observação: Note que se $\mathrm{gr}(p)$ é grau de $p(x)$ e $\mathrm{gr}(q)$ é grau de $q(x)$, então $\mathrm{gr}(p \cdot q) = \mathrm{gr}(p) + \mathrm{gr}(q)(p)$.

Atividade de Fixação

Questão 1: Considere os polinômios $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7$ e $q(x) = x^2 + 5x + 3$.

(a) Determine $p(x) + q(x)$, apresente a resposta em sua forma simplificada.

Resolução:

(b) Determine $p(x) - q(x)$, apresente a resposta em sua forma simplificada.

Resolução:

Questão 2: Calcule o produto dos polinômios $p(x) = 3x^2 + 1$ e $q(x) = x^3 - 3x$, em seguida, apresente a resposta em sua forma simplificada.

Resolução:

Com esta atividade, eu aprendi a:

- ☐ Somar e subtrair polinômios semelhantes combinando os termos correspondentes.
- ☐ Identificar o grau de um polinômio e entender como ele afeta as operações.
- ☐ Reduzir expressões polinomiais ao combinar termos semelhantes e aplicar as propriedades da álgebra.
- ☐ Aplicar os conceitos aprendidos para resolver problemas práticos que envolvem operações com polinômios.

Proposta 03: Fatoração de polinômios

Fatoração Algébrica

Os números primos, ao mesmo tempo tão simples e essenciais, possuem a capacidade de gerar todos os números naturais maiores que 1.

Vocês já aprenderam que fatorar um número natural ou inteiro consiste em escrevê-lo como um produto de dois ou mais fatores primos. Vamos relembrar esse conceito, fatorando o número 60.

$$60 \div 2 = 30$$

$$30 \div 2 = 15$$

$$15 \div 3 = 5$$

$$5 \div 5 = 1.$$

Assim,

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem de fatores) como um produto de fatores primos,

$$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n},$$

em que p_i são números primos e α_i são números naturais.

Vocês já perceberam que a fatoração pode ser utilizada para simplificar uma divisão? Veja o exemplo a seguir:

$$\frac{60}{15} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5} = 2^2 = 4.$$

Fatoração algébrica para auxiliar a simplificação de expressões racionais

É possível realizar a fatoração de uma expressão racional, como vemos na quociente entre dois monômios:

$$\frac{60x^2y^3}{15xy^2} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{3 \cdot \cdot x \cdot y \cdot y} = 2^2 \cdot x \cdot y = 4xy.$$

Observe que utilizamos a fatoração para efetuar a divisão entre monômios.

Apresentaremos a seguir as regras que podemos utilizar para realizar esse cálculo de maneira simplificada.

Na divisão de monômios, realizamos a divisão dos coeficientes do numerador pelo coeficiente do denominador. Ao lidarmos com a parte algébrica, utilizamos a regra da potenciação quando as bases são iguais. Dessa forma, ao dividirmos x^2 por x, mantemos a letra x como base e subtraímos os expoentes. Da mesma forma, ao dividirmos y^3 por y^2, conservamos a letra e subtraímos os expoentes.

Fatoração de Polinômios

De acordo com o dicionário, encontramos o significado da palavra "fatorar".

✓ Na Aritmética: decompor (um número) em seus fatores primos.

✓ Na Álgebra: decompor (um polinômio) em um produto de fatores irredutíveis.

Com base nessas informações, vamos adquirir conhecimento sobre alguns tipos distintos de fatoração de polinômios.

Fator Comum em evidência

Quando uma expressão algébrica apresenta um fator comum em todos os seus termos, é possível colocá-lo em evidência, obtendo uma forma fatorada do polinômio.

Há duas dicas importantes a serem consideradas:

✓ Para encontrar o fator comum entre os coeficientes, é recomendado calcular o máximo divisor comum (mdc) entre eles. Dessa forma, é possível identificar o maior divisor comum que divide todos os coeficientes.

✓ No caso do fator comum na parte literal, quando as letras são iguais, devemos selecionar aquela com o menor expoente para evidenciá-la.

Veja o exemplo a seguir: Dada a expressão

$$18x^5 - 24x^3 + 12x^2 - 6x^6$$

temos que o mdc dos coeficientes é

$$\mathrm{mdc}(18, 24, 12, 6) = 6.$$

Ao identificarmos as letras comuns, devemos selecionar aquela que possui o expoente menor, neste caso é x^2.

Dessa forma, o fator a ser evidenciado é determinado por $6x^2$.

O fator comum deve ser escrito fora dos parênteses. Em seguida, é necessário dividir cada termo do polinômio pelo fator comum. O resultado dessa divisão deve ser colocado dentro dos parênteses.

$$18x^5 - 24x^3 + 12x^2 - 6x^6 = 6x^2(3x^3 - 4x + 2 - x^4).$$

Podemos empregar a propriedade distributiva na resposta final como um meio concreto para verificar a correção do resultado.

Agrupamento

Conforme o próprio termo "agrupamento" sugere, essa técnica é utilizada quando a expressão algébrica apresenta grupos de termos que podem ser combinados devido a fatores em comum. Além disso, ao fatorar cada grupo, esses grupos revelam um novo fator comum, que pode ser identificado, finalizando assim o processo de fatoração.

Como exemplo, vamos fatorar a expressão a seguir:

$$ab + 3b - 7a - 21.$$

Observem que $ab + 3b = b(a + 3)$ e $-7a - 21 = -7(a + 3)$, sendo assim,

$$ab + 3b - 7a - 21 = b(a + 3) - 7(a + 3).$$

Dessa forma, constatamos a presença de um novo fator comum: $a + 3$. Ao evidenciá-lo, obtemos:

$$ab + 3b - 7a - 21 = b(a + 3) - 7(a + 3) = (a + 3) \cdot (b - 7)$$

.

Novamente, podemos empregar a propriedade distributiva na resposta final como um meio concreto para verificar a correção do resultado.

Diferença entre Quadrados

A forma fatorada da diferença de dois quadrados segue a regra do produto da soma pela diferença das bases, na ordem dada. Aqui está um exemplo:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

É importante notar que essa fatoração é aplicada nas seguintes condições:

- A expressão é um binômio;
- Há um sinal de "subtração" entre os termos.
- Para resolver, é necessário extrair a raiz quadrada dos termos e, em seguida, seguir a regra como apresentada no exemplo.

Vamos fatorar a expressão a seguir:

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4).$$

Empregamos a propriedade distributiva na resposta final como um meio concreto para verificar a correção do resultado.

Trinômio Quadrado Perfeito

Esse procedimento é aplicado para fatorar ou decompor expressões algébricas que são trinômios quadrados perfeitos.

Um trinômio é chamado de trinômio quadrado perfeito, pois é igual ao quadrado de um binômio. Em outras palavras, é um trinômio que pode ser escrito na forma $(a+b)^2$ ou na forma $(a-b)^2$, em que a e b são termos ou coeficientes.

Analisem os exemplos a seguir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Identificamos um trinômio quadrado perfeito e obtemos a sua forma fatorada ao observarmos os seguintes aspectos:

- ✓ O trinômio é composto por três termos.
- ✓ Dois dos termos são quadrados perfeitos (a^2 e b^2)
- ✓ O terceiro termo é equivalente a "mais" ou "menos" duas vezes o produto das bases desses quadrados.

Vamos analisar mais um exemplo e responder algumas perguntas.

$$x^2 - 16x + 64.$$

1. Possui três termos?
   Resposta:
2. Quais desses termos são quadrados perfeitos?
   Resposta:
3. Quais são as bases desses quadrados perfeitos?
   Resposta:
4. Se multiplicarmos por dois os resultados dos termos anteriores, obtemos o resultado do termo que não é um quadrado perfeito?
   Resposta:

Se todas as respostas forem "Sim", significa que é um trinômio quadrado perfeito. Vamos para a solução.

1. Abra parênteses e escreva a base de um dos quadrados perfeitos.

2. Utilize o sinal do termo que não é um quadrado perfeito.

3. Escreva a base do outro quadrado perfeito e feche os parênteses.

4. Eleve tudo ao quadrado.

Sendo assim:

$$x^2 - 16x + 64 =$$

Simplificação de Frações Algébricas

As simplificações algébricas podem desempenhar um papel relevante na divisão de polinômios.

Embora a simplificação algébrica não seja diretamente uma forma de dividir polinômios, ela tem o potencial de simplificar as expressões utilizadas na divisão e tornar o processo mais acessível.

Observem os exemplos de simplificação de algumas expressões:

- $\dfrac{35}{7a - 7x} = \dfrac{7 \cdot 5}{7(a - x)} = \dfrac{5}{(a - x)}$;
- $\dfrac{15a + 5b}{3a + b} = \dfrac{5(3a + b)}{3a + b} = 5$;
- $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)(x - 3)} = \dfrac{(x + 3)}{(x - 3)}$;
- $\dfrac{a^2 + 8a}{ab + 8b + a + 8} = \dfrac{a(a + 8)}{b(a + 8) + 1(a + 8)} = \dfrac{a(a + 8)}{(a + 8)(b + 1)} = \dfrac{a}{b + 1}$.

Com esta atividade, eu aprendi a:

- ☐ Reconhecer que fatorar uma expressão algébrica significa expressá-la como a multiplicação de dois ou mais fatores.

- ☐ Reconhecer as condições para aplicar diferentes técnicas de fatoração, como fator comum em evidência, diferença entre quadrados, agrupamentos e trinômios quadrados perfeitos.

- ☐ Utilizar diferentes técnicas de fatoração, como fator comum em evidência, diferença entre quadrados, agrupamentos e trinômios quadrados perfeitos.

- ☐ Simplificar expressões algébricas envolvendo frações, identificando fatores comuns e cancelando termos equivalentes.

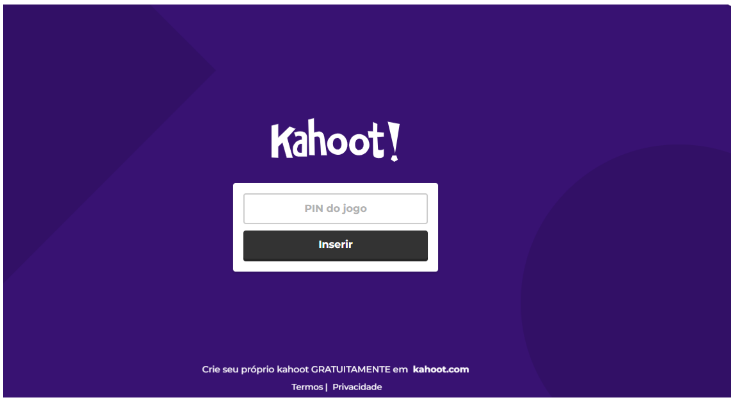
Proposta 04: Desafio de Fatoração em um Jogo de Perguntas e Respostas

Querido aluno, está pronto para aplicar o conhecimento adquirido nas aulas de matemática sobre fatoração?

Acesse o link: https://kahoot.it/.

A imagem que está sendo exibida na sua tela será conforme ilustrado na Figura 3.6.

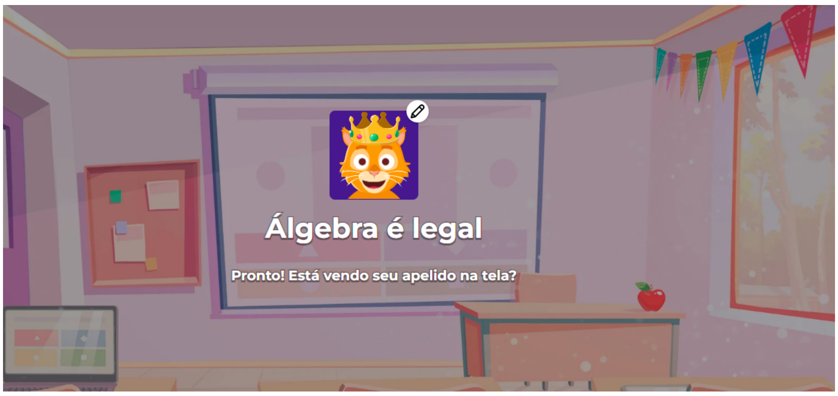
Figura 3.6 – PIN



Nessa tela, você deve inserir o número PIN do jogo, conforme o número informado pelo seu professor.

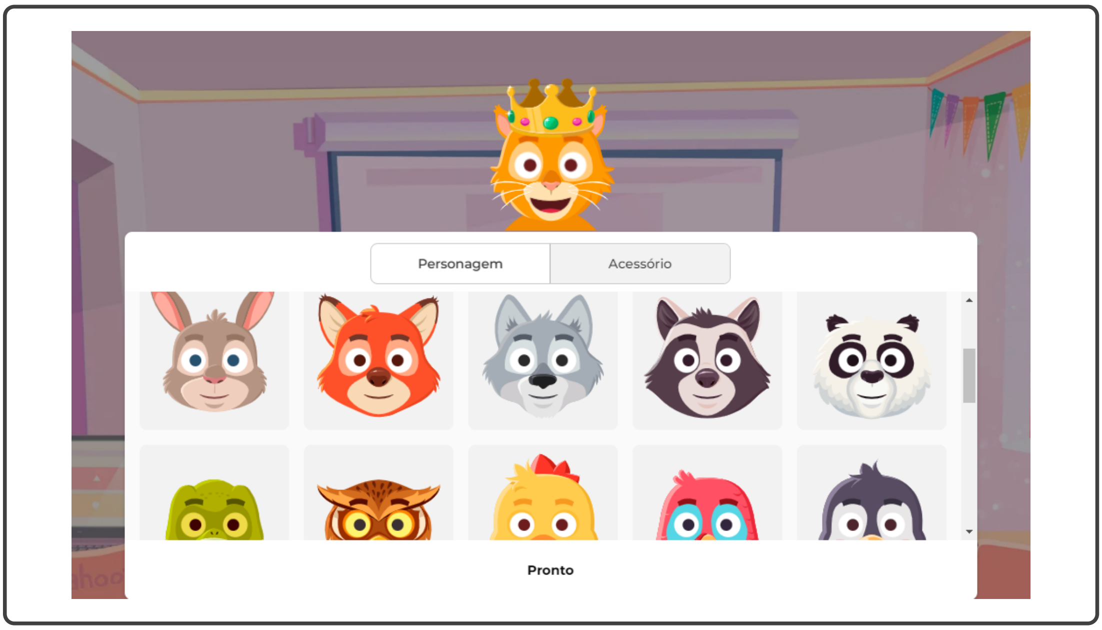
Agora, escolha um nome ou apelido para o seu avatar. Veja um exemplo de acordo com a Figura 3.7 em sua tela.

Figura 3.7 – Nome ou apelido do aluno



Logo depois, você pode personalizar seu avatar no jogo. Para fazer isso, basta clicar no ícone de lápis e escolher o avatar desejado, conforme ilustrado na Figura 3.8.

Figura 3.8 – Escolha do Avatar



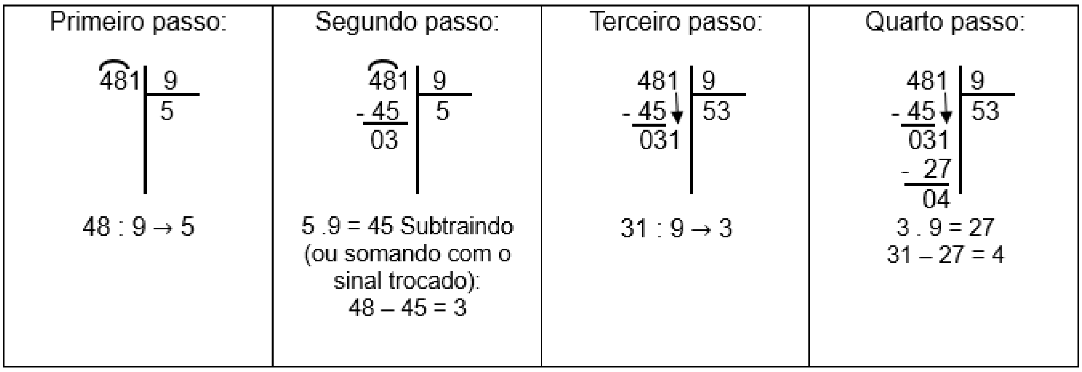
Avatar escolhido, pode clicar no botão iniciar, que seu avatar aparecerá na tela do seu professor. Aguarde todos os seus colegas entrarem no jogo.

Vamos jogar!

Proposta 05: Divisão de polinômios pelo método da chave, aplicação na terceira série do Ensino Médio

Antes de iniciarmos a divisão entre polinômios vamos lembrar como resolvemos a divisão empregando números inteiros. Consideremos a seguinte divisão de números inteiros:

Figura 3.9 – Método da chave



Fonte: Acervo da Autora

Pela divisão acima, temos que

$$481 = 9 \cdot 53 + 4$$

em que 481 é o dividendo, 9 é o divisor, 53 é o quociente e 4 é o resto.

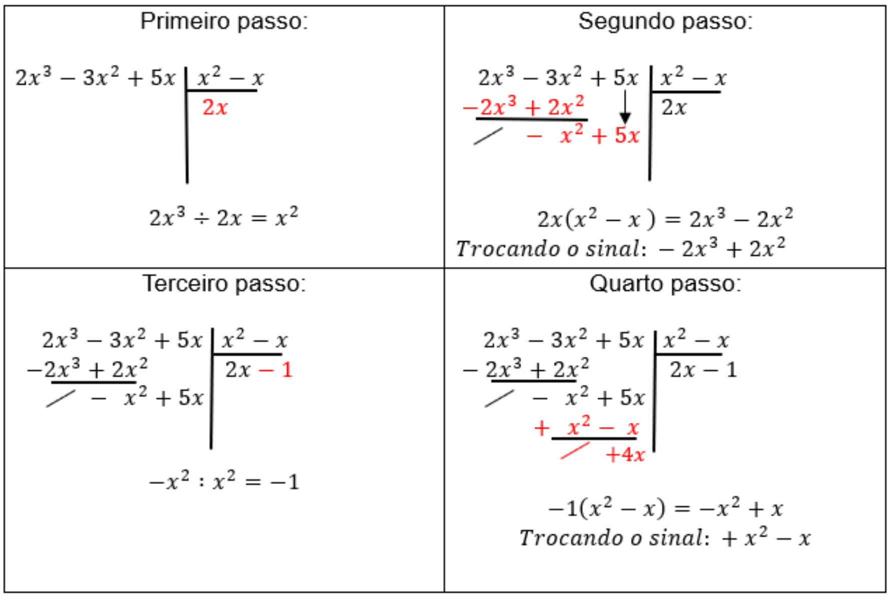
Vamos utilizar a mesma regra prática na divisão de polinômios.

Sejam $p(x)$ e $d(x)$ dois polinômios, com $d(x)$ não nulo, e gr(p) o grau de $p(x)$ e d(d) o grau de $d(x)$. Ao dividir $p(x)$ por $q(x)$, encontramos dois polinômios, $q(x)$, denominado quociente, e $r(x)$, denominado o resto. Esses dois polinômios devem satisfazer as seguintes condições:

- $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
- $r(x)$ é o polinômio nulo ou o grau de $r(x)$ deve satisfazer $0 \leq gr(r) \leq gr(d)$.

Aplicaremos o método da chave na divisão de $2x^3 - 3x^2 + 5x$ por $x^2 - x$. Veja a Figura 3.10.

Figura 3.10 – Método da chave para os polinômios



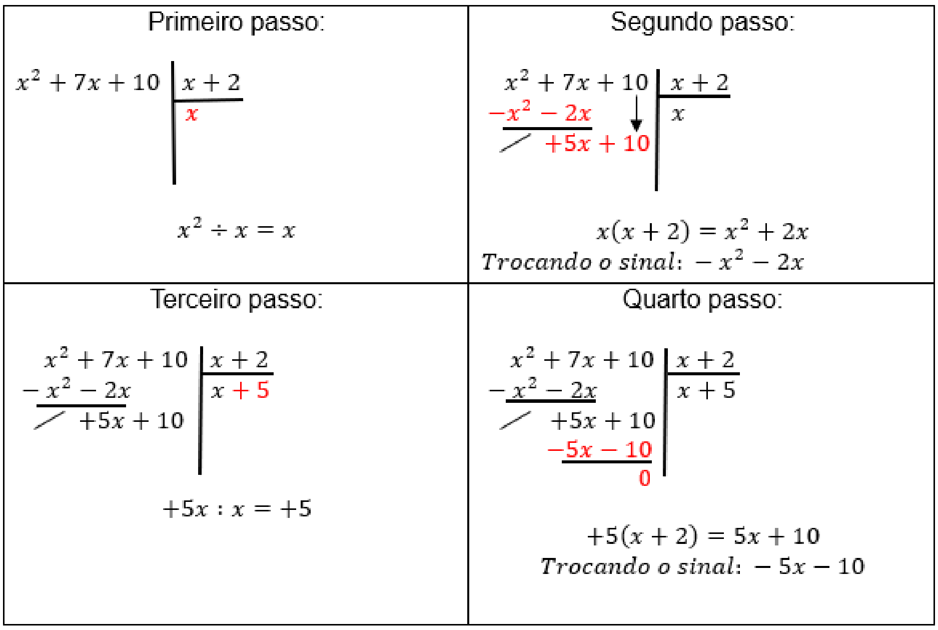
Fonte: Acervo da Autora

Lembre-se que $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. Assim,

$$2x^3 - 3x^2 + 5x = (x^2 - x) \cdot (2x - 1) + 4x.$$

Novamente, aplicaremos o método da chave na divisão de $x^2 + 7x + 10$ por $(x + 2)$. Veja a Figura 3.11.

Figura 3.11 – Método da chave para os polinômios



Fonte: Acervo da Autora

Lembre-se que $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. Assim,

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2) \cdot (x + 5) + 0.$$

Nesse caso, temos que $x^2 + 7x + 10$ é o dividendo, $x + 2$ é o divisor, $x + 5$ é o quociente e o polinômio nulo, 0, é o resto.

Observações:

- Quando o resto é nulo, $r(x) = 0$, dizemos que o polinômio $p(x)$ é divisível por $q(x)$, ou seja, a divisão é exata.
- O grau do quociente $q(x)$ sempre será a diferença entre os graus do dividendo $p(x)$ e do divisor $d(x)$ quando $\text{gr}(p) \geq \text{gr}(q)$.

Atividade de Fixação

Questão 1: Divida o polinômio $p(x) = 4x^2 + 6x - 12$ pelo polinômio $q(x) = 2x - 1$ utilizando o método da chave, em seguida, determine o quociente e o resto da divisão.

Resposta:

Questão 2: Divida o polinômio $p(x) = 3x^2 + 10x - 8$ pelo polinômio $q(x) = x + 4$ utilizando o método da chave, em seguida, determine o quociente e o resto da divisão.

Resposta:

Com esta atividade, eu aprendi a:

- ☐ Compreender que na divisão de polinômios, a regra prática é semelhante ao método da chave utilizado para números inteiros.
- ☐ Realizar a divisão de polinômios, considerando $p(x)$ como o dividendo e $d(x)$ como o divisor, a fim de encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ que atendam às condições $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$.
- ☐ Observar que o polinômio resultante do quociente $q(x)$ deve ter um grau menor ou igual ao grau do dividendo $p(x)$ quando $\text{gr}(p) \geq \text{gr}(q)$.

Proposta 06: Expressões algébricas e divisão

Você já se perguntou como é possível manter mensagens privadas em um mundo digital repleto de ameaças?

Figura 3.12 – Criptografia

Fonte: https://pixabay.com/illustrations/cyber-attack-encryption-smartphone-4444448/

A Criptografia RSA é responsável pela segurança do sistema RSA, e é um algoritmo de criptografia assimétrica que permite a segurança e a confidencialidade das informações disponibilizadas pela internet e outras comunicações.

Os responsáveis pelo desenvolvimento foram Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, em 1977, e tal algoritmo vem sendo aceito em sistemas criptográficos. Assim, percebemos como a matemática, especialmente na Álgebra, garante a segurança das comunicações digitais, um tópico relevante no contexto atual de tecnologia e informação.

Em resumo, chamamos essa criptografia de assimétrica pois existe um par de chaves diferentes em que uma delas tem a função de criptografar, enquanto a outra tem a função de descriptografar as informações. Tais chaves são conhecidas como: **chave pública** e **chave privada**.

A chave pública pode ser compartilhada com qualquer pessoa, ela é usada para criptografar dados antes de enviar, já a chave privada é secreta, sendo utilizada para descriptografar os dados recebidos.

O algoritmo está conectado à dificuldade de fatorar grandes números, ou seja, a segurança RSA consiste no fato de que a fatoração de grandes números primos é, computacionalmente ou não, um processo extremamente complicado e demorado.

A fatoração de números é a chave para quebrar a criptografia RSA, pois ele permitiria identificar os fatores primos essenciais para descobrir a chave privada e descriptografar uma mensagem.

E você? Está pronto para decodificar a seguinte palavra?

[**25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13**]

Objetivos a serem alcançados:

- Introduzir a linguagem simbólica através do uso de símbolos e letras para representar quantidades desconhecidas;
- Resolver situações-problema que envolvam o cálculo do valor numérico de expressões algébricas;
- Compreender a relação entre a divisão aritmética e expressões algébricas através da criptografia;
- Explorar o processo de descriptografia usando equações;
- Usar a calculadora científica para calcular potências e divisão com resto;
- Interpretar os resultados na calculadora como letras do texto original;
- Analisar a relação entre os números criptografados, e as chaves pública e privada.

ATIVIDADE

Para essa atividade, uma palavra foi transformada em uma sequência de números utilizando a Tabela 2.

Tabela 2 – Letras do alfabeto e suas respectivas posições.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Fonte: Acervo da Autora

Em seguida, foi utilizada a **chave pública**, $(n, e) = (33, 7)$, para codificar essa sequência de números, o que resultou na seguinte sequência de números:

[**25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13**].

Para decodificar essa palavra, ou seja, para descobrir qual palavra a sequência $[25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13]$ representa, utilizamos a seguinte expressão:

$$x \equiv c^d \mod n.$$

Na qual:

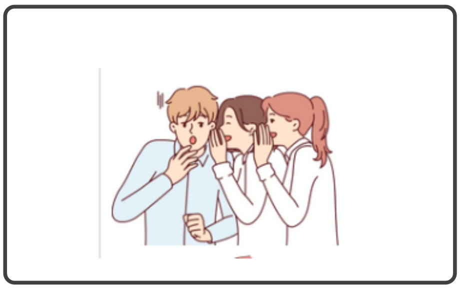
- x: é o resultado da operação de descriptografia. Representa a mensagem original que queremos obter.
- c: é o texto criptografado, ou seja, a mensagem que foi previamente criptografada usando a chave pública do destinatário.
- d: é a chave privada de descriptografia, essa chave é mantida em segredo pelo destinatário e é usada para descriptografar o texto criptografado c.
- n: é a chave pública e o módulo utilizado na operação de criptografia. É um número composto pela multiplicação de dois primos grandes, geralmente denominados p e q. O valor de n é utilizado tanto na criptografia quanto na descriptografia.

No entanto, o que significa a expressão $x \equiv c^d \mod n$? Significa que x é o resto da divisão de n por c^d.

Vamos explicar como você deve proceder para completar o desafio de decodificar a palavra

$$[25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13].$$

Para isso, vou te contar um segredo: "A chave privada é $d = 3$." Além disso, já sabemos que $n = 33$.



Com o uso de uma calculadora científica, calculamos c^d. Em seguida, o resultado obtido deverá ser dividido por n. O resto dessa divisão será o código referente à primeira letra, ou seja, o valor de x.

A agora, mostraremos como é o processo para realizar a decodificação da primeira letra da sequência. Nesse caso, temos os seguintes números: $c = 25$, $d = 3$ e $n = 33$. Temos que

$$25^3 = 15625$$

Em seguida, efetuando a divisão por 33 obtemos:

$$\begin{array}{r|l}
15625 & 33 \\ \cline{2-2}
-132 & 473 \\ \cline{1-1}
242 & \\
-231 & \\ \cline{1-1}
115 & \\
-99 & \\ \cline{1-1}
16 &
\end{array}$$

Logo, o resto é 16. Temos que a letra desejada é a que está na posição 16 da Tabela **??**. Assim, a primeira letra da palavra é **P**.

Agora é com você!

Faça esse mesmo processo com os seguintes números da sequência

[**25, 1, 6, 1, 29, 14, 20, 13**].

Com esta atividade, eu aprendi a:

- ☐ Explorar o processo de decodificação usando a equação para obter o número da mensagem original.
- ☐ Usar a calculadora científica para calcular potências e divisão com resto.
- ☐ Simplificar e desenvolver expressões algébricas.

4 Conclusão

Espero que o produto educacional desenvolvido possa contribuir com os professores que buscam aprimorar suas práticas pedagógicas no ensino da álgebra. A abordagem inovadora, a utilização de recursos tecnológicos e a integração da fatoração como ferramenta prática demonstram o potencial desse material para tornar o aprendizado da álgebra mais significativo para os estudantes.

Ao investir em metodologias que envolvam os alunos e promovam o desenvolvimento de habilidades essenciais, como o pensamento crítico e a resolução de problemas, os educadores estarão preparando os estudantes para enfrentar desafios futuros e utilizar a matemática de forma eficiente em suas vidas pessoais e profissionais.