

DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Elvis Thaniel de Souza

Explorando Sudokus

Um argumento heurístico para estimar o número de *puzzles*.

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro 2024

Elvis Thaniel de Souza

Explorando Sudokus

Um argumento heurístico para estimar o número de *puzzles*.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Morais Pinto

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro 2024

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original"
(Albert Einstein)

Agradecimentos

A Deus pela vida e por me dar a fé e a força necessárias para lutar e suplantar os obstáculos encontrados durante a realização deste trabalho. Sempre acreditei que os planos que tens para mim são maiores do que os meus sonhos.

Aos meus pais, Maria do Perpétuo Socorro de Souza e Luís Francisco de Souza, por serem minha maior inspiração, por sempre acreditarem e apoiarem meu sonho.

Aos meus irmãos Robson e Carlos, que como parceiros, cúmplices e amigos que sempre foram a minha rocha quando eu mais precisei, incentivando-me nos momentos difíceis e compreendendo a minha ausência.

À minha esposa, Simone, por ser aquela que jamais solta a minha mão. Por ter me dado o suporte imprescindível para que eu chegasse até aqui. Sem você ao meu lado, certamente os resultados não teriam sido os mesmos. Grato pela sua compreensão, paciência e cumplicidade.

Ao meu filho, Gustavo, que inúmeras vezes foi minha mais pura companhia nas noites de estudo, ofertando-me, através de seu sorriso e carinho, uma injeção de ânimo.

Aos professores orientadores, Edney Augusto Jesus de Oliveira e Thiago Morais Pinto pela dedicação, paciência, amizade, correções e ensinamentos compartilhados durante toda a minha formação no programa. Suas lições guiaram a construção do meu conhecimento ensinando-me na teoria e na prática o verdadeiro objetivo da pesquisa científica. Gratidão eterna!

À Universidade Federal de Ouro Preto, ao Programa de Mestrado Profissional (PROFMAT), aos coordenadores, aos professores, aos funcionários, aos meus colegas de caminhada pela acolhida e participação efetiva no meu processo de formação.

Por fim, as tantas pessoas que, generosamente, se dispuseram a incentivar e apoiar este trabalho participando, direta ou indiretamente, no seu desenvolvimento transformando no que um dia era um sonho, hoje se tornasse uma realidade.

Resumo

Sudoku é um termo abreviado da expressão japonesa “Suji wa dokushin ni kagiru”, cujo significado é “os números devem permanecer únicos”. Os precursores deste jogo são os quadrados latinos, quebra-cabeças, no qual o jogador deve preencher uma grade quadrada com um conjunto de elementos, de tal forma que cada símbolo apareça apenas uma vez em cada linha e coluna. Popular em todo o mundo, o número de Sudokus impresso em jornais e revistas de quebra-cabeças aumentou consideravelmente e o surgimento de variações com mais restrições na sua resolução tornou o jogo mais complexo. Este trabalho tem como objetivo investigar quantos quadrados de Sudoku existem fundamentados em pesquisa, em estudo do jogo, nas suas regras e nas principais técnicas utilizadas para solucionar tal quebra-cabeça. Para tal propósito, será realizada uma revisão dos conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade que será utilizada para estimar o número de Sudokus, um estudo sobre Quadrados Latinos que mostrará o processo para sua construção e um resultado que permitirá determinar o número de quadrados latinos de ordem n . Nosso estudo mostrou que para se resolver um problema matemático complexo é necessário, previamente, resolver problemas menores e mais simples. Tal condição foi verificada quando, auxiliada pela teoria da Análise Combinatória e Probabilidade, aliada a um argumento heurístico e relaxada a condição de que as linhas e colunas do Sudoku são dependentes, apresentamos uma estimativa do número de Sudokus próximo do número real determinado pelos resultados anteriores. Assim, podemos concluir que determinar o número de quadrados latinos não é uma tarefa simples, mesmo tendo-se domínio do conhecimento de uma fórmula fechada e o auxílio de ferramentas computacionais. Este fato evidencia a dificuldade de se encontrar uma solução exata para muitos problemas, mesmo que se disponha de recursos tecnológicos avançados.

Palavras-chave: Sudoku. Quadrados Latinos. Probabilidade.

Abstract

Sudoku is an abbreviated term of the Japanese expression “Suji wa dokushin ni kagiru”, which means “numbers must remain unique”. The precursors of this game are the Latin square puzzles, in which the player must fill a square grid with a set of elements, in such a way that each symbol appears only once in each row and column. Popular around the world, the number of Sudokus printed in newspapers and puzzle magazines increased considerably and the emergence of variations with more restrictions on their resolution made the game more complex. This work aims to investigate how many Sudoku squares there are based on research, study of the game, its rules and the main techniques used to solve such a puzzle. For this purpose, a review of the concepts of Combinatorial Analysis and Probability will be carried out, which will be used to estimate the number of Sudokus, a study on Latin Squares that will show the process for their construction and a result that will allow determining the number of Latin Squares of order n). The study showed that to solve a complex mathematical problem it is necessary to previously solve smaller and simpler problems. This condition was verified when, aided by the theory of Combinatorial Analysis and Probability, combined with a heuristic argument and relaxing the condition that the rows and columns of Sudoku are dependent, we presented an estimate of the number of Sudokus close to the real number determined by previous results. Thus, we can conclude that determining the number of Latin squares is not a simple task, even with knowledge of a closed formula and the help of computational tools. This fact highlights the difficulty of finding an exact solution to many problems, even if advanced technological resources are available.

Keywords: Sudoku. Latin Squares. Probability.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Região de atuação das células A (à esquerda) e da célula B (à direita).	18
Figura 2 – Sudoku 1.	18
Figura 3 – Células preenchidas com a utilização da técnica Célula Forçada.	19
Figura 4 – Sudoku 1 concluído utilizando apenas a técnica de Célula Forçada.	20
Figura 5 – Sudoku 2.	20
Figura 6 – Sudoku 2, utilização do par de gêmeos na 9ª coluna.	21
Figura 7 – Sudoku 2, utilização do par de gêmeos da 6ª linha.	21
Figura 8 – Sudoku 2 par de gêmeos da 5ª linha.	22
Figura 9 – Sudoku 2 pares de gêmeos na 7ª e 8ª linha.	22
Figura 10 – Sudoku 2-Solução.	23
Figura 11 – Sudoku 3, identificação de X-wings.	23
Figura 12 – Aplicando X-wings.	24
Figura 13 – Aplicação do Fio de Ariadne.	26
Figura 14 – Solução do Sudoku 4	26
Figura 15 – Modelo de placa de automóvel no sistema antigo.	30
Figura 16 – Modelo de placas de automóveis atuais.	30
Figura 17 – Círculos divididos em quadrantes.	31
Figura 18 – Disposição das crianças em torno do círculo.	35
Figura 19 – Permutações nos três primeiros círculos.	35
Figura 20 – Permutações nos três últimos círculos.	36
Figura 21 – Posições para o 3º objeto.	37
Figura 22 – Ilustração da disposição das crianças no círculo.	37
Figura 23 – Ilustração das posições no círculo.	38
Figura 24 – Diagrama de $A \cup B$	45
Figura 25 – Diagrama de Venn da $A \cup B$ não disjuntos.	51

Figura 26 – Quadrado latino de ordem 5.	61
Figura 27 – Quadrado latino de ordem 9.	62
Figura 28 – Um quadrado latino que é um Sudoku.	62
Figura 29 – Quadrados latinos de ordem 4 H e K	63
Figura 30 – Quadrado obtido da sobreposição de H em K	63
Figura 31 – Quadrado de ordem 6 com cada regimento com suas respectivas patentes.	64
Figura 32 – Quadrados latinos de ordem 6 representando os regimentos (à esquerda), e as patentes (à direita).	65
Figura 33 – Grade 10×10	66
Figura 34 – Grade 10×10 completa.	66
Figura 35 – Exemplos de Quadrados Latinos.	67
Figura 36 – Deslocamento de comprimento 2 em quadrados de ordem 3 e 5.	68
Figura 37 – Deslocamento em quadrados de ordem 4 e 6.	68
Figura 38 – Grade de ordem 6 com deslocamento de 4 casas.	69
Figura 39 – Quadrados latinos de ordem 4 que não são gerados por deslocamento.	70
Figura 40 – Quadrados latinos de ordem 2.	71
Figura 41 – Quadrados latinos com a 1ª linha preenchida na forma padrão.	71
Figura 42 – Possibilidades de preenchimento para a 2ª linha do quadrado de ordem 3.	72
Figura 43 – Possibilidades para preenchimento do quadrado latino de ordem 3.	72
Figura 44 – Quadrados latinos reduzidos de ordem 2 e 3.	73
Figura 45 – Quadrado latino na configuração reduzida parcialmente preenchido.	73
Figura 46 – Quadrado latino na configuração reduzida parcialmente preenchido com as células da 2ª linha destacada.	73
Figura 47 – Árvore de possibilidades para o preenchimento das células da 2ª linha.	74
Figura 48 – Quadrado latino reduzido, parcialmente preenchido com as células da 3ª linha destacada.	74
Figura 49 – Quadrados latinos reduzidos completados.	75
Figura 50 – Quadrado latino reduzido com a 2ª linha completada com os algarismos 3, 4 e 1.	75
Figura 51 – Quadrado latino reduzido com a 2ª linha completada com os algarismos 4, 1 e 3.	75
Figura 52 – Exemplos de Quadrados Shidokus.	80
Figura 53 – Grade 4×4 com bloco superior esquerdo preenchido.	81
Figura 54 – Grade 4×4 com bloco, linha superior e coluna da esquerda preenchida.	81
Figura 55 – Grade 4×4 parcialmente preenchida.	82
Figura 56 – Árvore de possibilidades para o preenchimento do Shidoku.	82
Figura 57 – Possibilidades de conclusão do Shidoku.	83
Figura 58 – Grade 9×9 com os blocos 3×3 nomeados.	83
Figura 59 – Possibilidades de preenchimento das 3 linhas superiores da grade 9×9	85

Figura 60 – Possibilidades de preenchimento de B2 e B3.	85
Figura 61 – Configuração do Sudoku 1 para primeira parte da Atividade 1.	92
Figura 62 – Configuração do Sudoku 1 para segunda parte da Atividade 1.	92
Figura 63 – Configuração do Sudoku 2 para realização da Atividade 2.	93
Figura 64 – Sudoku 1 à esquerda (nível fácil) e Sudoku 2 à direita (nível médio) para realização da Atividade 3.	93
Figura 65 – Sudoku 3 (nível difícil para realização da Atividade 3).	93
Figura 66 – Exemplos de Sudokus para Atividade 1.	95
Figura 67 – Exemplos de Sudokus para Atividade 2 (Nível Fácil).	96
Figura 68 – Exemplos de Sudokus para Atividade 2 (Nível Médio).	97
Figura 69 – Exemplos de Sudokus para Atividade 2 (Nível Difícil).	98
Figura 70 – Exemplo de Shidokus para Atividade 3 (1ª parte).	98
Figura 71 – Grade 4 × 4 em branco.	99

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	RESOLVENDO O SUDOKU	17
2.1	Célula Forçada	18
2.2	Dupla Possibilidade ou Par de Gêmeos	20
2.3	X-wings	23
2.4	Fio de Ariadne	24
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
3.1	Análise Combinatória	27
3.1.1	Princípio Aditivo	28
3.1.2	Princípio Multiplicativo	29
3.1.3	Fatorial	32
3.1.4	Permutações	32
3.1.5	Combinações	39
3.2	Princípio da Inclusão-Exclusão	44
3.3	Probabilidade	47
3.3.1	Probabilidade Condicional	55
4	QUADRADOS LATINOS	61
4.1	Construindo Quadrados Latinos	65
4.2	Deslocamento e Divisibilidade	67
4.3	Número de Quadrados Latinos	71
5	ESTIMANDO O NÚMERO DE QUADRADOS SUDOKUS	79
5.1	Contando os quadrados Shidokus	80
5.2	Contando o número de grades de Sudokus	83
5.3	Estimando o número de quadrados Sudokus	87
6	SUDOKU NA SALA DE AULA	91

6.1	Proposta de Atividades	94
6.1.1	Atividade 1: Entendendo o Jogo	94
6.1.2	Atividade 2: Resolvendo Sudokus	95
6.1.3	Atividade 3: Determinando o número de Shidokus	97
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
	REFERÊNCIAS	103

Introdução

Neste trabalho apresentaremos o estudo sobre o Sudoku e os seus precursores, os quadrados latinos. O termo Sudoku é uma abreviação da expressão japonesa “*Suji wa dokushin ni kagiru*”, que significa “Os números devem permanecer únicos”. Apesar do nome japonês, o Sudoku, como é conhecido hoje, foi criado pelo arquiteto aposentado norte-americano Howard Garns (1905-1989), em 1979, que batizou o jogo inicialmente como “*Number Place*”, cuja tradução livre significa “lugar do número” (TEIXEIRA, 2014).

O quadrado latino é um quebra-cabeça no qual o jogador deve preencher uma grade quadrada com um conjunto de elementos de forma que cada símbolo apareça uma única vez em cada linha e em cada coluna. Os quadrados latinos foram estudados inicialmente por Leonard Euler (1707-1783), importante matemático suíço do século XVIII, que publicou os seus primeiros resultados a respeito desses objetos na Academia de Ciências de São Petersburgo em 1779. Nesses primeiros resultados, Euler utilizou letras latinas como elementos para o preenchimento desses quadrados (SILVA, 2019).

Howard Garns, ao criar o Sudoku, além de trocar as letras por números, subdividiu a grade 9×9 em nove blocos de ordem 3×3 e a regra de não poder repetir os nove algarismos dentro de cada bloco, tornando, assim, o quebra-cabeça mais desafiador (SILVA, 2019).

A ideia de utilizar números ao invés de letras foi um passo importante para que o Sudoku se tornasse popular no Japão. Inicialmente, isso deveu-se à estrutura da língua japonesa, a qual não proporciona arranjos como os utilizados nas palavras-cruzadas, por exemplo. Sendo assim, um quebra-cabeça que utilizasse algarismos numéricos teria maior sucesso (SILVA, 2023).

Sua primeira versão foi publicada em 1984 no Japão e só ficou conhecido mundialmente após 2004, quando o juiz Wayne Gould, também aposentado, conheceu o jogo em sua viagem a Tóquio. Sua fascinação com o quebra-cabeça foi tanta que o mesmo criou um programa de computador para gerar diferentes jogos e propôs ao jornal britânico “*The Times*” que o publicasse em suas páginas, tornando-se um sucesso e uma fonte de estudos e pesquisa de diversos matemáticos (SANTOS;

VASCONCELLOS, 2018).

Devido a sua popularidade, o número de Sudokus impressos nos jornais e revistas de quebra-cabeça cresceu consideravelmente, de tal modo que hoje existem campeonatos pelo mundo de resolução de Sudokus, estimulando criações de outras variações de Sudokus que apresentavam mais restrições para a sua resolução, tornado o quebra-cabeça mais complexo. Com tantos quebra-cabeças Sudoku sendo impressos, uma pergunta natural seria: quantos quadrados Sudokus existem? Neste trabalho, iremos investigar a resposta para esse questionamento.

Com o objetivo de responder quantos quadrados Sudokus existem, este texto se dividirá em seis capítulos. No Capítulo 2, apresentaremos o jogo, assim como suas regras, além de apresentar as principais técnicas utilizadas para a resolução de Sudokus.

No Capítulo 3, faremos uma breve revisão dos conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade, que serão utilizados no Capítulo 5 para estimar o número de Sudokus.

No Capítulo 4, por sua vez, estudaremos os quadrados latinos. Nesta parte discutiremos o que levou Euler ao estudos desses objetos, apresentaremos um processo para a construção de um quadrado latino e mostraremos um resultado que nos permite determinar o número de quadrados latinos de ordem n .

No Capítulo 5, apresentaremos uma estimativa para o número de Sudokus baseada no argumento heurístico de Kevin Kilfoil mencionado no artigo de Felgenhauer e Jarvis (FELGENHAUER; JARVIS, 2006).

Por fim, no Capítulo 6, apresentaremos um relato de experiência de uma oficina realizada com alunos do ensino médio, participantes do Programa de Iniciação Científica da OBMEP (PIC-OBMEP), ocorrida nas dependências da Ufop. Adicionalmente, forneceremos uma proposta de atividade direcionada ao aprimoramento do raciocínio lógico aliado ao aprofundamento dos conceitos de Análise Combinatória através da utilização dos Sudokus.

Resolvendo o Sudoku

O Sudoku é um quebra-cabeça numérico que estimula a mente e a memória por se tratar de um jogo de raciocínio lógico e experimentação. Em sua versão mais comum, devemos preencher uma grade com 9 linhas e 9 colunas, totalizando 81 células subdivididas em nove blocos 3×3 , utilizando os algarismos de 1 a 9. Inicialmente, o quebra-cabeça apresenta algumas de suas células já preenchidas denominadas de *pistas*.

As células devem ser preenchidas obedecendo aos seguintes critérios:

- i) Não repetir elementos nas linhas (Condição de linhas);
- ii) Não repetir elementos nas colunas (Condição de colunas);
- iii) Não repetir elementos em cada bloco (Condição de blocos).

Deste modo, precisamos apenas verificar se o elemento em questão já foi ou não utilizado (na linha, coluna ou bloco), o que nos permite substituir os 9 dígitos (algarismos de 1 a 9), por 9 letras, ou 9 símbolos quaisquer.

Consequentemente, devemos, inicialmente, conhecer a região de atuação de uma célula, pois, de acordo com os algarismos ou símbolos presentes nessa região, conseguiremos determinar o possível ou os possíveis candidatos para o seu preenchimento. A região de atuação de uma célula é formada pela linha, a coluna e o bloco a qual pertence, e é formada por 21 células. Na Figura 1 vemos as regiões de atuação das células *A* e *B*, respectivamente.

A seguir, apresentaremos algumas técnicas utilizadas no processo de resolução de um Sudoku. À primeira vista, tais técnicas parecem ser intuitivas, sem quaisquer conexões com a Matemática. Todavia, todas elas são baseadas em estratégias lógicas bem fundamentadas. Ressaltamos que a solução de um único Sudoku pode envolver uma ou várias das técnicas que o grau de dificuldade do Sudoku será proporcional ao número de técnicas empregadas na sua resolução.

Figura 1 – Região de atuação das células A (à esquerda) e da célula B (à direita).

	2			9		7		
	1							
4		A				2		8
		5	2					9
			1	8		7		
	4				B			
				6			7	1
	7							
9		3		2		6		5

	2			9		7		
	1							
4		A				2		8
		5	2					9
			1	8		7		
	4				B			
				6			7	1
	7							
9		3		2		6		5

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2.1 Célula Forçada

A estratégia da **Célula Forçada** se baseia na análise de células que possuem apenas uma possibilidade de algarismo ou símbolo para o seu preenchimento. Para sua aplicação devemos analisar quais células contemplam esse requisito, observando sua área de atuação.

O nome Célula Forçada deve-se ao fato de que para essas células só há uma possibilidade de preenchimento, ou seja, devido às restrições impostas pelos elementos da linha, da coluna e do bloco que contém a célula, somos forçados a preenchê-la com determinado algarismo.

A identificação de células em que essa técnica pode ser aplicada será feita através da observação de linhas, colunas e blocos com maior número de casas preenchidas. Como ilustração dessa técnica, considere o Sudoku 1 apresentado na Figura 2 abaixo, em que destacamos algumas células não preenchidas pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.

Figura 2 – Sudoku 1.

5	4	D	2	C	3	E	8	9
	6				4	G		3
		3		1		7		5
J	7	9	I	H	F			6
	5	8		6			3	
4	3	B	1	8	5	2	9	A
3				5	1	9		
6						3	1	
	1	4		3		5		

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Note que as células abertas na 6ª linha, designadas pelas letras *A* e *B*, em virtude da condição de linha, admitem apenas os algarismos 6 e 7 como possibilidades para o seu preenchimento. Agora, se observarmos a região de atuação da célula *A*, a única opção de preenchimento é um 7, pois em sua coluna já existe um 6. Consequentemente, na célula *B* deveremos ter um 6.

Observando a célula indicada por *C* e sua região de atuação, verificamos que a única opção para essa casa é um 7. Assim, deveremos ter em *D* um 1 e, em *E* um 6. Na célula indicada por *F*, devido a sua região de atuação, observamos que o único algarismo candidato é o 2, ocorrendo o mesmo com a célula apontada como *G*, onde o único algarismo possível para o preenchimento é o 1. Preenchida a célula indicada por *F* com o algarismo 2, concluímos que a célula indicada por *H* será preenchida com o algarismo 4, eliminando-se a possibilidade de termos um 4 na célula *I*, sobrando apenas a opção de preenchimento com o algarismo 3. Consequentemente, a célula indicada por *J* será preenchida pelo algarismo 1. Após o preenchimento dessas células, o Sudoku 1 ficará como descrito na Figura 3.

Figura 3 – Células preenchidas com a utilização da técnica Célula Forçada.

5	4	1	2	7	3	6	8	9
	6				4	1		3
		3		1		7		5
1	7	9	3	4	2			6
	5	8		6			3	
4	3	6	1	8	5	2	9	7
3				5	1	9		
6						3	1	
	1	4		3		5		

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Alcançada essa configuração, abrimos outras possibilidades para aplicação da técnica, conseguindo, assim, completar o quebra-cabeça utilizando apenas a técnica de células forçadas (Veja a solução do Sudoku, 1 exibida na Figura 4).

Deste modo, para resolver o Sudoku 1 foi necessária apenas a aplicação da técnica da célula forçada. No entanto, para Sudokus com grau de dificuldade mais elevado devemos recorrer a técnicas mais elaboradas como as que passamos a discutir a seguir.

Figura 4 – Sudoku 1 concluído utilizando apenas a técnica de Célula Forçada.

5	4	1	2	7	3	6	8	9
8	6	7	5	9	4	1	2	3
9	2	3	8	1	6	7	4	5
1	7	9	3	4	2	8	5	6
2	5	8	7	6	9	4	3	1
4	3	6	1	8	5	2	9	7
3	8	2	6	5	1	9	7	4
6	9	5	4	2	7	3	1	8
7	1	4	9	3	8	5	6	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2.2 Dupla Possibilidade ou Par de Gêmeos

Denomina-se **Par de Gêmeos** duas células que estão em uma mesma linha, ou na mesma coluna, que possuem exatamente o mesmo par de algarismos como possibilidades de preenchimento. Sua utilização não nos permite garantir qual algarismo ocupará cada uma das células em questão, mas nos ajuda a reduzir o número de possibilidades de outras casas que pertençam às áreas de atuação de cada célula aberta. Como exemplo, considere o Sudoku 2 apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Sudoku 2.

7	3	6	9	8	5	1	2	4
2	9	4	6	7	1	3	8	5
5	8	1	2	3	4	7	6	9
3	6					8	7	
1		8				4	9	
9	4		8	1		5	3	
4		9		2		6	5	
6			3			2	1	
8					6	9	4	

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Ao analisar as células em aberto com seus respectivos candidatos para preenchimento, conseguimos identificar alguns pares de gêmeos, um dos quais é mostrado na Figura 6, onde temos na última coluna da quinta e da sexta linha, um par de células com os algarismos 2 e 6 como possibilidades. A ocorrência deste par de gêmeos permite eliminar o algarismo 2 como possibilidade na célula que ocupa a 4ª linha e a 9ª coluna, o que implica que esta célula deverá, necessariamente, ser preenchida com o algarismo 1 (Figura 6).

Figura 6 – Sudoku 2, utilização do par de gêmeos na 9ª coluna.

7	3	6	9	8	5	1	2	4
2	9	4	6	7	1	3	8	5
5	8	1	2	3	4	7	6	9
3	6					8	7	¹ ₂
1		8				4	9	² ₆
9	4		8	1		5	3	² ₆
4		9		2		6	5	³ _{7 8}
6			3			2	1	⁷ ₈
8				6	9	4		³ ₇

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora, observe que na 6ª linha aparece outro par de gêmeos cujas possibilidades são os dígitos 2 e 7. Uma vez que o algarismo 2 deve ocupar apenas uma célula em cada linha, podemos eliminar a possibilidade de preencher a última célula dessa linha com o dígito 2 (Figura 7). Porém, mas isso implica que a célula deverá ser ocupada pelo dígito 6. Como consequência, a última célula da 5ª linha será preenchida com o algarismo 2, o que nos permite eliminar o dígito 2 como possibilidade das demais células dessa linha.

Nesse ponto, note que a 5ª linha contém outro par de gêmeos agora formado pelas possibilidades 5 e 7. Novamente, esse par de gêmeos impede a ocorrência dos dígitos 5 e 7 nas células dessa linha. Deste modo, as únicas possibilidades de ocupação para as células dessa linha que pertence às colunas 5ª e a 6ª serão os dígitos 6 e 3 (Figura 8).

Figura 7 – Sudoku 2, utilização do par de gêmeos da 6ª linha.

7	3	6	9	8	5	1	2	4
2	9	4	6	7	1	3	8	5
5	8	1	2	3	4	7	6	9
3	6	² ₅	⁴ ₅	^{2 4} _{5 9}	² ₉	8	7	¹ ₈
1	⁵ ₇	8	⁵ ₇	⁵ ₆	³ ₇	4	9	² ₆
9	4	² ₇	8	1	² ₇	5	3	⁶ ₆
4	¹ ₇	9	¹ ₇	2	⁷ ₈	6	5	³ _{7 8}
6	⁵ ₇	⁵ ₇	3	⁴ _{5 9}	⁷ _{8 9}	2	1	⁷ ₈
8	^{1 2} _{5 7}	^{2 3} _{5 7}	¹ _{5 7}	² ₅	6	9	4	³ ₇

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 8 – Sudoku 2 par de gêmeos da 5ª linha.

7	3	6	9	8	5	1	2	4
2	9	4	6	7	1	3	8	5
5	8	1	2	3	4	7	6	9
3	6	² ₅	⁴ ₅	^{2 4} _{5 9}	² ₉	8	7	1
1	⁵ ₇	8	⁵ ₇	6	3	4	9	2
9	4	² ₇	8	1	² ₇	5	3	6
4	¹ ₇	9	¹ ₇	2	⁷ ₈	6	5	³ _{7 8}
6	⁵ ₇	⁵ ₇	3	⁴ _{5 9}	⁷ _{8 9}	2	1	⁷ ₈
8	^{1 2} _{5 7}	^{2 3} _{5 7}	¹ _{5 7}	² ₅	6	9	4	³ ₇

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Em seguida, o par de gêmeos presente nas linhas 7 e 8 nos permite eliminar mais algumas possibilidades conforme ilustra a Figura 9 e, assim, conseguimos preencher outras células.

Figura 9 – Sudoku 2 pares de gêmeos na 7ª e 8ª linha.

7	3	6	9	8	5	1	2	4
2	9	4	6	7	1	3	8	5
5	8	1	2	3	4	7	6	9
3	6	² ₅	⁴ ₅	^{2 4} _{5 9}	² ₉	8	7	1
1	⁵ ₇	8	⁵ ₇	6	3	4	9	2
9	4	² ₇	8	1	² ₇	5	3	6
4	¹ ₇	9	¹ ₇	2	⁷₈	6	5	³_{7 8}
6	⁵ ₇	⁵ ₇	3	⁴_{5 9}	⁷_{8 9}	2	1	⁷₈
8	^{1 2} _{5 7}	^{2 3} _{5 7}	¹ _{5 7}	² ₅	6	9	4	³ ₇

7	3	6	9	8	5	1	2	4
2	9	4	6	7	1	3	8	5
5	8	1	2	3	4	7	6	9
3	6	5	4	9	2	8	7	1
1	7	8	5	6	3	4	9	2
9	4	2	8	1	7	5	3	6
4	¹ ₇	9	¹ ₇	2	8	6	5	3
6	⁵ ₇	⁵ ₇	3	4	9	2	1	8
8	^{1 2} _{5 7}	^{2 3} _{5 7}	¹ _{5 7}	² ₅	6	9	4	³ ₇

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aplicando essa ideia para o preenchimento das demais células chegamos à solução do Sudoku apresentada na Figura 10.

Figura 10 – Sudoku 2-Solução.

7	3	6	9	8	5	1	2	4
2	9	4	6	7	1	3	8	5
5	8	1	2	3	4	7	6	9
3	6	5	4	9	2	8	7	1
1	7	8	5	6	3	4	9	2
9	4	2	8	1	7	5	3	6
4	1	9	7	2	8	6	5	3
6	5	7	3	4	9	2	1	8
8	2	3	1	5	6	9	4	7

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2.3 X-wings

Essa estratégia se aplica quando existem quatro células apresentando um mesmo algarismo (o qual denominaremos de algarismo "pivô") como uma das possibilidades para o seu preenchimento e que quando unimos as linhas e colunas dessas células através de segmentos, formamos um arranjo retangular. Quando a ocorrência do algarismo pivô em qualquer um dos cantos desse retângulo permitir o preenchimento do vértice diagonalmente oposto com o mesmo algarismo pivô, dizemos que as quatro células contendo o algarismo pivô formam uma estrutura denominada **X-wings**.

Figura 11 – Sudoku 3, identificação de X-wings.

	2 4 7 9	3	8	4 6 9 6		5	1	
	2 4 5	8	7	1 4 6		9	3	
1	4 9	6 9	3	4 6 9	5	7	2	8
	3 5 7		2	1 3 7		8	4	9
8	3 4	1	9	3 4	6	2	5	7
	2 4 7 9	7 9	5	4 7 8		1	6	3
9	6	4	1	2	7	3	8	5
3	8	2	6	5	9	4	7	1
	1		4			6	9	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo ao traçar um "x" que une diagonalmente as extremidades deste retângulo, destacamos

dois pares de células que poderão ser preenchidas com o algarismo pivô, conforme ilustra a Figura 11. Caso o algarismo pivô seja alocado em uma das extremidades das diagonais, isso acarretará no preenchimento da célula diagonalmente oposta com o mesmo algarismo.

Assim como a técnica de Par de Gêmeos, essa estratégia, quando aplicada, auxilia principalmente na redução no número de possibilidades para o preenchimento de células que pertençam às linhas e colunas do retângulo, como podemos observar na Figura 12.

Figura 12 – Aplicando X-wings.

	2 7 9	3	8	9 6		5	1	
	2 5	8	7	1 6		9	3	
1	4 9	6 9	3 4 6 9	5	7	2	8	
	3 5 7		2	1 3 7		8	4	9
8	4 3	1	9 4 3	6	2	5	7	
	2 7 9	7 9	5	7 8		1	6	3
9	6	4	1	2	7	3	8	5
3	8	2	6	5	9	4	7	1
	1		4			6	9	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 12, observe que o algarismo 4 destacado é o único algarismo que está presente nas quatro casas. Como a técnica garante que as extremidades de uma das diagonais deverão conter um algarismo 4, podemos, então, eliminar esse algarismo como candidato nas demais células das linhas e colunas que contêm as extremidades das diagonais, reduzindo, assim, o número de possibilidades de preenchimento de algumas células.

2.4 Fio de Ariadne

Essa técnica tem como essência o método de tentativa e erro, e é aplicada quando estamos em um estágio mais avançado do nosso quebra-cabeça, ou seja, em um ponto em que não podemos aplicar nenhuma das técnicas anteriores. Ela consiste em selecionar uma célula em aberto com o menor número de possibilidades possível, e escolher, aleatoriamente, um dos dígitos para o seu preenchimento e ver até onde a escolha feita pode nos levar.

Se a escolha feita for a correta, poderemos preencher as demais casas até solucionar o Sudoku. Caso contrário, em algum ponto do preenchimento encontraremos alguma inconsistência,

que pode ser dois valores iguais em uma mesma linha, coluna ou bloco 3×3 , neste caso, retroceder ao estágio inicial no qual é possível eliminar uma das opções previamente atribuídas à célula. Se, originariamente, havia apenas duas opções, é suficiente inserir o dígito alternativo na célula inicial, determinando, assim, a opção apropriada para aquela célula. No caso de existirem mais de duas opções, o raciocínio é repetido para os dígitos restantes, e vale notar que em algum ponto deste processo iterativo, restará apenas uma opção para aquela célula, a qual é a escolha adequada. Como exemplo de aplicação dessa técnica, considere Sudoku 3 obtido após o uso da técnica X-wings, conforme mostra a Figura 12.

Partiremos da célula da 5ª linha e 2ª coluna que possui os algarismos 3 e 4 como possibilidades, e vamos supor que a escolha adequada para ocupar essa célula seja o algarismo 4. Investigaremos os desdobramentos dessa escolha, preenchendo as demais casas do Sudoku. Para tal propósito, utilizaremos a notação p_n , com $n \in \mathbb{N}$ para acompanhar a sequência de passos durante o preenchimento.

- p_1 : A célula da 5ª linha e 2ª coluna é o algarismo 4;
- p_2 : A célula da 3ª linha e 5ª coluna é o algarismo 4;
- p_3 : A célula da 3ª linha e 2ª coluna é o algarismo 9;
- p_4 : A célula da 5ª linha e 5ª coluna é o algarismo 3;
- p_5 : A célula da 9ª linha e 5ª coluna é o algarismo 8;
- p_6 : A célula da 6ª linha e 5ª coluna é o algarismo 7;
- p_7 : A célula da 9ª linha e 6ª coluna é o algarismo 3;
- p_8 : A célula da 4ª linha e 6ª coluna é o algarismo 1.

O processo descrito acima está ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Aplicação do Fio de Ariadne.

2 4 6 7	2 7	9	3	8	6 9	2 4	5	1	4 6
2 5	6	2 5	8	7	1 6	1 2 4	9	3	4 6
1	4	9	6 9	3	4 9	6	5	7	2 8
5 6 7	3 7	5 7	5 6 7	2	1 3 7	1 3	8	4	9
8	4	3	1	9	4 3	6	2	5	7
2 4 7	2 7	9	7 9	5	7 8	4 8	1	6	3
9	6	4	1	2	7	3	8	5	
3	8	2	6	5	9	4	7	1	
5 7	1	5 7	4	3 8 3 8	6	9	2		

2 4 6 7	2 7	9	3	8	6 9	2 4	5	1	4 6
2 5	6	2 5	8	7	1 6	1 2 4	9	3	4 6
1	9 ^{P3}	6 9	3	4 ^{P2}	5	7	2	8	
5 6 7	3 7	5 7	5 6 7	2	1 3 7	1 ^{P8}	8	4	9
8	4 ^{P1}	1	9	3 ^{P4}	6	2	5	7	
2 4 7	2 7	9	7 9	5	7 ^{P6}	4 8	1	6	3
9	6	4	1	2	7	3	8	5	
3	8	2	6	5	9	4	7	1	
5 7	1	5 7	4	8 ^{P5}	3 ^{P7}	6	9	2	

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como a Figura 13 acima ilustra, ao atingirmos o oitavo passo do preenchimento, nos deparamos com uma inconsistência, pois a célula que ocupa a 4ª linha e a 5ª coluna possui como candidatos os algarismos 1, 3 e 7. No entanto, todos esses dígitos já foram utilizados na região de atuação dessa célula. Constatamos, assim, que a escolha adequada para ocupar a célula inicial deve ser o algarismo 3.

As demais células do Sudoku podem ser preenchidas, aplicando-se a técnica de célula forçada, repetidas vezes.

Figura 14 – Solução do Sudoku 4

7	9	3	8	6	2	5	1	4
2	5	8	7	1	4	9	3	6
1	4	6	3	9	5	7	2	8
6	7	5	2	3	1	8	4	9
8	3	1	9	4	6	2	5	7
4	2	9	5	7	8	1	6	3
9	6	4	1	2	7	3	8	5
3	8	2	6	5	9	4	7	1
5	1	7	4	8	3	6	9	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Por fim, vale ressaltar que, em sua maioria, a resolução de um determinado Sudoku pode demandar a aplicação de duas ou mais técnicas, cabendo ao jogador identificar as situações que se enquadram a cada técnica.

Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos introdutórios relativos à Análise Combinatória e à Probabilidade que serão utilizados no Capítulo 5.

Para a redação deste capítulo nos baseamos fortemente no livro de Augusto Cesar Morgado, Joao Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez, 9ª edição, publicado pela Editora SBM no ano de 2006 ([MORGADO et al., 2006](#)) e no livro texto de Nazaré Bezerra, 1ª edição, publicado pela Editora EditAedi no ano de 2018 ([BEZERRA et al., 2018](#)).

3.1 Análise Combinatória

A Análise Combinatória é o ramo da Matemática que fornece as ferramentas necessárias para resolver problemas de contagem em conjuntos finitos sem a necessidade de enumerar seus elementos. Embora seja conhecida pelos alunos do ensino médio pelos problemas envolvendo as permutações, os arranjos e as combinações, a Análise Combinatória também trata de vários outros problemas que requerem outras técnicas para serem resolvidos, como o Princípio das Gavetas de Dirichlet, o Princípio da Inclusão-Exclusão, as funções geradoras e a teoria de Ramsey ([MORGADO et al., 2006](#)).

Segundo ([MORGADO et al., 2006](#)) apesar de haver várias formas e técnicas para a resolução de um problema de Combinatória, às vezes é necessário também ter engenhosidade e a uma plena compreensão da situação descrita. Em sua maioria, os problemas se dividem em dois tipos:

- 1) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfaçam certas condições iniciais.
- 2) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfaçam certas condições.

3.1.1 Princípio Aditivo

Definição 3.1.1. Denota-se por $|X|$ a cardinalidade do conjunto X , ou seja, o número de elementos que pertencem ao conjunto X quando este é finito.

Definição 3.1.2. (Princípio Aditivo): Se A e B são dois conjuntos finitos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, com $|A|$ e $|B|$ elementos, respectivamente, então $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Se A e B são conjuntos quaisquer, temos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exemplo 3.1.1. Uma prova de duas questões foi dada a uma classe de 40 alunos. Desses, 25 acertaram a 1ª questão, 20 acertaram a 2ª, e 5 não acertaram questão alguma. Quantos alunos acertaram as duas questões?

Solução: Seja U o conjunto formado pelos alunos dessa turma. Podemos decompor U em dois conjuntos mutuamente excludentes

$$U = X \cup X^c$$

onde:

- X é o conjunto dos alunos que acertaram alguma questão;
- X^c é o conjunto complementar de X , ou seja, o conjunto formado pelos alunos que **não** acertaram nenhuma questão.

Pelo Princípio Aditivo temos:

$$|U| = |X| + |X^c| \Rightarrow |X| = 40 - 5 = 35$$

Por outro lado, X pode ser decomposto como:

$$X = A \cup B$$

onde:

- A representação do conjunto dos alunos que acertaram a 1ª questão;
- B representação do conjunto dos alunos que acertaram a 2ª questão.

Novamente, pelo Princípio Aditivo, temos:

$$|X| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 25 + 20 - 35 = 10.$$

Portanto, 10 alunos acertaram as duas questões.

3.1.2 Princípio Multiplicativo

O segundo conceito que apresentaremos é o Princípio Multiplicativo, o qual, devido a sua grande importância para a Análise Combinatória, é também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem.

Definição 3.1.3. (Princípio Multiplicativo): *Se uma decisão D_1 pode ser tomada de x maneiras, e, se uma vez tomada a decisão D_1 , a decisão D_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$.*

Quando nos deparamos com problemas que usam o Princípio Multiplicativo, assim como outros problemas de Análise Combinatória, é fundamental que adotemos as seguintes recomendações para maior efetividade na resolução:

- 1^o) Colocar-se no lugar da pessoa que deve executar a tarefa;
- 2^o) Dividir a tarefa em etapas mais simples;
- 3^o) Identificar as restrições em cada etapa.

Vejamos as resoluções de alguns problemas aplicando esse princípio.

Exemplo 3.1.2. *Numa sala há 5 homens e 6 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um par formado por um homem e uma mulher?*

Solução:

Para formar um par com um homem e uma mulher devemos tomar as decisões:

- D_1 : escolha do homem;
- D_2 : escolha da mulher.

Como D_1 pode ser tomada de 5 maneiras e, em seguida, D_2 pode ser tomada de 6 maneiras, o número de maneiras de se formar um casal é $5 \cdot 6 = 30$.

Exemplo 3.1.3. *As placas dos automóveis eram formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Atualmente, as placas são formadas por 4 letras e 3 algarismos. Quantas placas podemos formar no sistema antigo e no atual?*

Solução:

Figura 15 – Modelo de placa de automóvel no sistema antigo.



Fonte: <https://www.placnord.com.br/blog/placas-de-identificacao-de-veiculos-no-brasil>

No sistema antigo, a escolha das letras consiste em 3 etapas, sendo que, em cada etapa, teremos 26 letras disponíveis cada, pois o problema não apresenta restrições para escolha das mesmas. A escolha dos algarismos consiste em 4 etapas, e para cada etapa temos 10 modos para escolher cada número (também não apresenta restrição quanto os algarismos). Logo, aplicando o Princípio Multiplicativo, temos um total de

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4 = 175.760.000$$

placas.

Figura 16 – Modelo de placas de automóveis atuais.



Fonte:

<https://autoesporte.globo.com/servicos/noticia/2020/01/como-vai-ficar-placa-do-seu-carro-no-padrao-mercosul.ghtml>

No sistema atual, a escolha das letras consiste em 4 etapas, e para cada etapa teremos 26 letras disponíveis cada. Para a realização e escolha dos algarismos temos 3 etapas, e para cada etapa temos 10 modos de escolher cada número. Aplicando o Princípio Multiplicativo, novamente, teremos um total de

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3 = 456.976.000$$

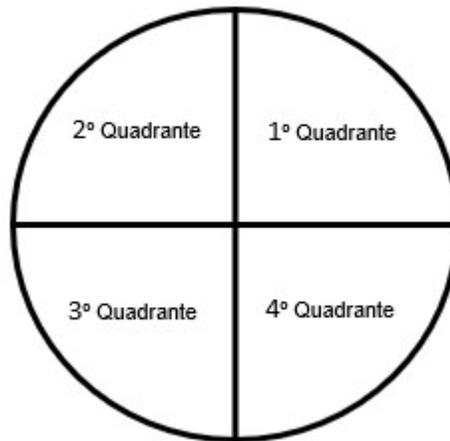
placas.

Tal mudança representa um incremento na quantidade de placas de 281.216.000 (em relação ao antigo padrão de placas), número esse que é maior que a atual população brasileira, que, de acordo com o censo de 2022, é de 203.080.756 (IBGE, 2022).

Exemplo 3.1.4. *Dispondo de 5 cores distintas, de quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, sendo cada quadrante de uma cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?*

Solução:

Figura 17 – Círculos divididos em quadrantes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Temos 2 casos a considerar: o caso em que o primeiro e o terceiro quadrantes têm cores iguais e o caso em que eles têm cores diferentes.

- 1º) **Se o primeiro e terceiro quadrantes possuem a mesma cor:** Neste caso temos 3 etapas, em que a primeira etapa é escolher a cor do primeiro quadrante, o que pode ser feito de 5 formas distintas. A segunda etapa é escolher a cor do segundo quadrante, o que pode ser feito de 4 maneiras. A última etapa consiste em escolher a cor do quarto quadrante, o que pode ser feito de 4 maneiras, devido ao fato de que o quarto quadrante não possui linha em comum com o segundo quadrante. Logo, neste caso, há $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ modos de colorir o círculo.
- 2º) **Se o primeiro e terceiro quadrante possuem cores diferentes:** Neste caso temos 4 etapas: A primeira consiste em escolher a cor para o primeiro quadrante, o que pode ser feito de 5 modos distintos. A segunda etapa é escolher a cor do segundo quadrante, o que pode ser feito de 4 maneiras. A terceira etapa é escolher a cor do terceiro quadrante, para essa etapa temos 3 maneiras, por último temos que escolher a cor do quarto quadrante, o que poderá ser realizada de 3 maneiras também. Logo temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ modos de colorir os círculos para este caso.

Aplicando o Princípio Aditivo temos que o total será de $80 + 180 = 260$ maneiras de colorir o círculo atendendo às restrições.

3.1.3 Fatorial

Outro conceito importante no estudo da Análise Combinatória é o de fatorial, uma vez que está presente em várias expressões obtidas na resolução dos problemas.

Definição 3.1.4. *Define-se o fatorial de um número natural n , denotado por $n!$, de forma recursiva por:*

$$\begin{cases} 0! = 1; \\ 1! = 1; \\ (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Uma forma intuitiva de escrever $n!$ é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad n \geq 1. \quad (3.2)$$

Isso nos possibilita a realização de simplificações do tipo:

$$\text{a) } \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

$$\text{b) } \frac{9!+8!}{10!+9!} = \frac{9 \cdot 8!+8!}{10 \cdot 9 \cdot 8!+9 \cdot 8!} = \frac{8! \cdot (9+1)}{8! \cdot (10 \cdot 9+9)} = \frac{10}{99}.$$

$$\text{c) } \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} = (n-1) \cdot (n-2) = n^2 - 3n + 2.$$

$$\text{d) } \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)} = \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

As operações envolvendo o conceito de fatorial em conjunto com o Princípio Multiplicativo, serão importantes para formulação dos conceitos de permutação e combinações empregados em diversos problemas de Combinatória.

3.1.4 Permutações

Definição 3.1.5. *(Permutação Simples) Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se permutação simples desses elementos a todo agrupamento ordenado (sequência) sem repetição destes n elementos.*

Como os agrupamentos devem ser ordenados, o processo de agrupamento é composto de n etapas, cada uma consistindo na escolha do elemento que ocupará determinada posição dentro da ordenação. Pelo Princípio Multiplicativo, temos n maneiras para a escolha da primeira posição, $n - 1$ modos para a escolha do elemento que ocupará a segunda posição, $n - 2$ modos para a terceira posição, $n - 3$ modos para a escolha do elemento que ocupará a quarta posição, mantendo-se esse

raciocínio até a escolha do elemento que ocupará a última posição. Esta escolha poderá ser feita de 1 maneira. Logo, o número de modos de ordenar os n objetos distintos é:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \quad (3.3)$$

Exemplo 3.1.5. *Quantos são os anagramas da palavra PRATO?*

Solução:

Cada anagrama de PRATO nada mais é que uma ordenação das letras P, R, A, T, O . Assim o número de anagramas de PRATO é:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Exemplo 3.1.6. *Em uma mesma prateleira de uma estante há 12 livros distintos, sendo seis de Álgebra, quatro de Geometria e dois de Trigonometria. De quantos modos podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejarmos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?*

Solução:

Consideraremos os seis livros de álgebra como um só livro, digamos L_A , os quatro de Geometria como um só livro, L_G , e os dois de Trigonometria como um só livro, L_T . Devemos, então, permutar L_A, L_G, L_T , com isso temos um total de $P_3 = 3! = 6$ permutações. Mas, para cada uma dessas configurações, devemos permutar os livros em L_A , os livros em L_G e os livros em L_T , totalizando $6 \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2! = 207.360$ modos de organizar os livros na prateleira.

Agora, veremos como proceder no casos em que ocorrem repetições. Para tanto, considere os seguintes exemplos:

Exemplo 3.1.7. *Quantos são os anagramas da palavra BOTAFOGO?*

Solução:

Se as letras fossem todas diferentes a resposta seria $8!$. Porém, temos três letras "O" que, ao trocarmos de posição entre si, formarão o mesmo anagrama. Por exemplo

BOTAF**O**GO e BOTAF**O**GO

são duas configurações que representam o mesmo anagrama, mas que são contadas distintamente. De fato, em cada uma das $8!$ permutações existem agrupamentos aparentemente distintos que representam o mesmo anagrama. Esses agrupamentos são obtidos trocando-se a posição das letras repetidas no anagrama entre si. Assim, o número total de permutações $8!$ será igual ao número de

anagramas distintos multiplicado pela quantidade de agrupamentos idênticos, que, nesse caso, é igual a $3!$ e, portanto, o número de anagramas distintos será dado pela razão entre $8!$ e $3!$. Logo, o número de anagramas é $\frac{8!}{3!} = 6720$.

De maneira geral, devemos realizar a contagem como se não houvesse elementos repetidos. Em seguida, realizar a divisão do resultado pelas permutações entre os elementos repetidos, ou seja, se o número de permutações de n objetos, dos quais o elemento A_1 repete um número α_1 vezes, o elemento A_2 repete um número α_2 vezes, o elemento A_3 repete um número α_3 vezes e, assim por diante, o número de permutações será:

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \dots} \quad (3.4)$$

Vejamos outro exemplo:

Exemplo 3.1.8. *Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6.000.000, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8?*

Solução:

Temos que, para o número ser maior que 6.000.000, os números devem ter na posição da unidade de milhão os algarismos 6 ou 8. Assim, haverá dois casos a ser considerados

- **Casos que começam com 6:** Para as demais posições devemos permutar os algarismos 1, 3, 6, 6, 8, 8. Portanto, o número de permutações será:

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180.$$

- **Casos em que os algarismos começam com 8:** Nesse caso, teremos para as demais posições os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8. Temos então:

$$P_6^3 = \frac{6!}{3!} = 120.$$

Aplicando o Princípio Aditivo, o total de algarismo maior que 6.000.000 é $180 + 120 = 300$.

Outro tipo de problema envolvendo permutações é aquele em que os elementos estão dispostos de forma circular, ou seja, apenas a ordem relativa dos elementos do agrupamento é relevante. Tais permutações são denominadas permutações circulares, e denotaremos o número destas permutações por $(PC)_n$. Segundo (BEZERRA et al., 2018), é definida da seguinte forma:

Definição 3.1.6. *Chama-se Permutação Circular de n objetos distintos qualquer disposição desses n objetos em torno de um círculo.*

Em geral, esse tipo de permutação é contado de forma diferente das permutações simples, pois na permutação simples o que importa é a posição que os objetos ocupam, ou seja, cada posição ocupada pelo objeto dentro da ordenação gera uma permutação diferente. Porém se adotarmos essa mesma análise com as permutações onde os elementos são dispostos em torno de um círculo, uma simples rotação pode fazer com que os objetos permaneçam na mesma ordem, e, neste caso, dizemos que as permutações circulares são indistinguíveis por rotação. Portanto, para a contagem das permutações circulares devemos considerar a posição relativa dos objetos entre si. Vejamos alguns exemplos:

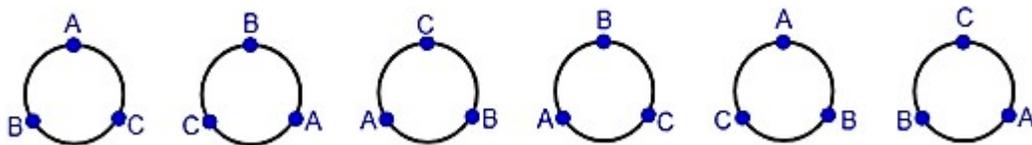
Exemplo 3.1.9. Considerando A , B e C três crianças, de quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com essas crianças?

Solução: Sabemos que temos $3! = 6$ modos de ordenar as três crianças em fila, as quais são:

$$ACB - BAC - CBA - BCA - ABC - CAB.$$

Colocando essas fileiras em torno de um círculo como representado na Figura 18, na qual colocamos a primeira criança no ponto mais ao norte e distribuímos a fila no sentido horário.

Figura 18 – Disposição das crianças em torno do círculo.

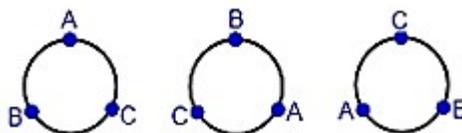


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Note que, nos três primeiros círculos, as crianças ocupam as mesmas posições relativas:

- à direita de A está B , e, à sua esquerda, C ;
- à direita de B está C , e, à sua esquerda, A ;
- à direita de C está A , e, à sua esquerda, B .

Figura 19 – Permutações nos três primeiros círculos.



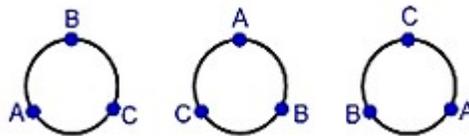
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Observe que qualquer uma dessas permutações pode ser obtida a partir da outra por rotação, ou seja, são permutações circulares, logo são contadas como uma só.

Nos outros três últimos círculos, as crianças estão distribuídas de forma diferente das três primeira. Deste modo, temos que:

- à direita de A está C , e, à sua esquerda, B ;
- à direita de B está A , e, à sua esquerda, C ;
- à direita de C está B , e, à sua esquerda, A .

Figura 20 – Permutações nos três últimos círculos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

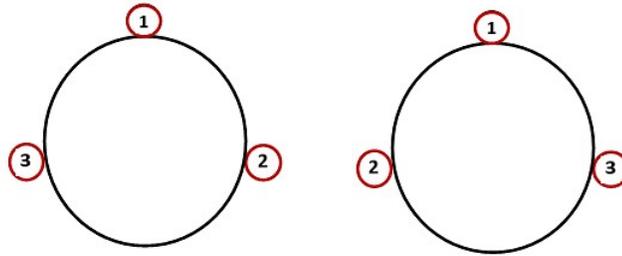
Novamente, qualquer uma das três permutações pode ser obtida através de outra por rotação, ou seja, devem ser contadas como uma só. Desta forma, temos 2 maneiras de formar uma roda com três crianças.

Exemplo 3.1.10. *De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares igualmente espaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?*

Solução:

Como mencionado acima, temos um problema no qual os elementos são posicionados em tornos de um círculo. Por isso, devemos considerar a posição relativa dos objetos. Inicialmente, há uma maneira de colocar o objeto 1 no círculo, pois em qualquer lugar que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo. Agora, temos apenas uma maneira de colocar o objeto 2, uma vez que o objeto 1 definirá um único arco sobre o círculo. Para o objeto 3, note que os objetos 1 e 2 definem dois arcos de circunferência e é sobre um deles que o objeto 3 será inserido. Deste modo, existem 2 modos de posicioná-lo, conforme ilustra a Figura 21.

Figura 21 – Posições para o 3º objeto.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para alocar o quarto objeto existem 3 maneiras, pois os objetos 1, 2 e 3 definem 3 arcos de circunferência sobre o círculo e é sobre um destes arcos que o objeto 4 vai ser posto.

Seguindo indutivamente esse procedimento, veremos que há $n - 1$ modos de posicionar o último objeto. Logo, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$$(PC)_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) = (n - 1)!. \quad (3.5)$$

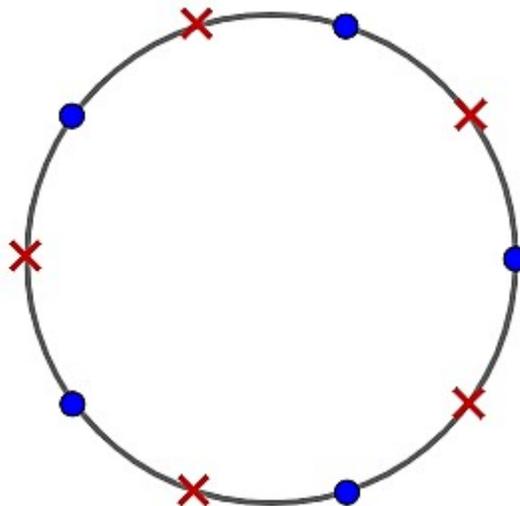
Note que podemos relacionar P_n com $(PC)_n$ da seguinte forma:

$$(PC)_n = \frac{P_n}{n}. \quad (3.6)$$

Exemplo 3.1.11. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem brincar de roda, de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

Solução:

Figura 22 – Ilustração da disposição das crianças no círculo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Iniciaremos colocando crianças de mesmo sexo no círculo. Vamos começar com os meninos representados como bolinhas no círculo da Figura 22, e, utilizando a Expressão (3.5) temos

$$(PC)_5 = 4! = 24$$

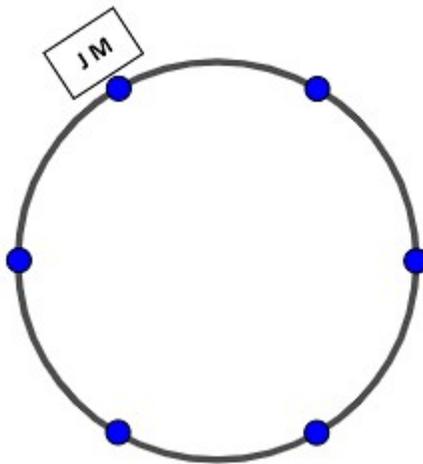
modos diferentes de dispormos os meninos em torno de um círculo. Agora, para distribuir as meninas dispomos de 5 lugares disponíveis localizados entre os meninos, já dispostos no círculo ilustrado na Figura 22 representados com x . Com isso o número de maneiras para distribuirmos as meninas será dado por P_5 , pois aqui cada ordenamento das meninas entre os meninos representa uma distribuição distinta na roda. Aplicando o princípio multiplicativo temos que o número de modos de colocarmos as crianças de forma circular nas condições apresentadas é

$$(PC)_5 \cdot P_5 = 4! \cdot 5! = 2880.$$

Exemplo 3.1.12. *De quantas formas 7 crianças podem brincar de roda, de modo que João e Maria, duas dessas crianças, fiquem sempre juntas?*

Solução:

Figura 23 – Ilustração das posições no círculo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para este exemplo trataremos João e Maria como se fossem um só, conforme ilustrado na Figura 23. Assim, devemos distribuir 6 crianças em torno da roda. Logo temos $(PC)_6$ possibilidades.

$$(PC)_6 = 5! = 120.$$

Agora, observe que na ilustração da Figura 23 Maria está à esquerda de João. Se colocarmos Maria à direita de João teríamos configurações diferentes das anteriores. Logo, devemos multiplicar o número determinado por 2. Então, segue que a resposta é

$$2 \cdot 120 = 240.$$

3.1.5 Combinações

Uma outra categoria de problemas de combinatória são os problemas de Combinações Simples que consistem em determinar de quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre os n objetos distintos disponíveis. O número de combinações simples de p objetos distintos entre os n objetos distintos será representado por C_n^p .

Observe que selecionar p entre os n objetos é equivalente a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, os que serão selecionados, e um grupo de $(n - p)$ objetos que serão os não selecionados. Deste modo, o problema de obter o número de combinações de n tomados p a p é equivalente a calcular o número de permutações de n objetos em que há p objetos iguais a S (selecionados) e $n - p$ objetos iguais a N (não-selecionados). Desta forma,

$$C_n^p = P_n^{p, n-p} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}. \quad (3.7)$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.13. *Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas distintas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?*

Solução:

Para formar uma salada, temos que escolher 4 frutas das 10 disponíveis, o que pode ser feito de $C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$ maneiras.

Exemplo 3.1.14. *Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?*

Solução: Como o enunciado indica pelo menos 3 homens, isso significa que podemos ter comissões formadas por 3 homens e 2 mulheres, por 4 homens e 1 mulher e por 5 homens. Logo, teremos três casos a serem considerados:

- **Comissão formada por 3 homens e 2 mulheres:** primeiro devemos escolher 3 homens dentre os 5 disponíveis, o que pode ser feito de $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ maneiras. Agora devemos escolher 2 mulheres dentre as 4 disponíveis, o que podemos fazer de $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $10 \cdot 6 = 60$ comissões formadas com 3 homens e 2 mulheres.

- **Comissão formada por 4 homens e 1 mulher:** Agora, inicialmente, devemos escolher 4 homens dentre os 5 disponíveis, o que pode ser feito de $C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!} = 5$ maneiras. O passo seguinte é escolher 1 mulher dentre as 4 disponíveis, o que podemos fazer de $C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!} = 4$. Logo temos pelo princípio multiplicativo $5 \cdot 4 = 20$ maneiras de formar comissões com 4 homens e 1 mulher.
- **Comissão formada por 5 homens:** Neste caso, só temos uma possibilidades para formação dessa comissão, que é compor a comissão com todos os homens disponíveis, ou seja, $C_5^5 = 1$.

Por fim, pelo Princípio Aditivo, o total de comissões que podemos formar com, pelo menos, 3 homens é $60 + 20 + 1 = 81$.

Nos exemplos anteriores os problemas envolviam a contagem de combinações nas quais todos elementos eram distintos dois a dois. Agora veremos como proceder para o caso em que nem todos os elementos são distintos.

Exemplo 3.1.15. *Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMÁTICA?*

Solução: Já apresentamos uma forma de determinar o número de anagramas através das permutações. Descrevemos o processo para o caso em que temos letras repetidas. Agora, apresentaremos outra forma utilizando o conceito de combinação simples. Podemos dividir o processo de contagem em 6 etapas:

- 1ª Escolher 3 posições, dentre as 10, para colocar as 3 letras "A", o que podemos fazer de $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ maneiras distintas.
- 2ª Escolher 2 posições, dentre as 7 restantes, para colocar as 2 letras "M", o que podemos fazer de $C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ maneiras distintas.
- 3ª Escolher 2 posições, dentre as 5 restantes, para colocar as 2 letras "T", o que podemos fazer de $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ maneiras distintas.
- 4ª Escolher 1 posição, dentre as 3 restantes, para colocar a letra "E", o que podemos fazer de $C_3^1 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$ maneiras distintas.
- 5ª Escolher 1 posição, dentre as 2 restantes, para colocar a letra "I", o que podemos fazer de $C_2^1 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$ maneiras distintas.
- 6ª Colocar a letra C na posição que resta.

Aplicando o princípio multiplicativo temos que há

$$C_{10}^3 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 7200$$

anagramas da palavra *MATEMÁTICA*.

Generalizando os problemas de permutações com repetições, este pode se expressar na tentativa de responder à seguinte questão: De quantos modos podemos ordenar os n objetos abaixo?

$$\underbrace{A_1 A_1 \dots A_1}_{n_1 \text{ vezes}} \underbrace{A_2 A_2 \dots A_2}_{n_2 \text{ vezes}} \underbrace{A_3 A_3 \dots A_3}_{n_3 \text{ vezes}} \dots \underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{n_k \text{ vezes}},$$

onde, n_1 é o número de objetos A_1 , n_2 é o número de objetos A_2 , \dots , n_k é o número de objetos A_k , com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Logo temos:

1ª: Escolher n_1 posições, dentre as n , para colocar A_1 . O que podemos fazer de $C_n^{n_1} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n_1)!}$ maneiras distintas.

2ª: Escolher n_2 posições, dentre as $n - n_1$ restantes, para colocar A_2 . O que podemos fazer de $C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{(n-n_1)!}{n_2! \cdot (n-n_1-n_2)!}$ maneiras distintas.

3ª: Escolher n_3 posições, dentre as $n - n_1 - n_2$ restantes, para colocar A_3 . O que podemos fazer de $C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3! \cdot (n-n_1-n_2-n_3)!}$ maneiras distintas.

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

k ª: Escolher n_k posições, dentre as últimas n_k restantes, para colocar A_k . O que podemos fazer de $C_{n_k}^{n_k} = \frac{(n_k)!}{n_k! \cdot 0!}$ maneiras.

Aplicando o princípio multiplicativo.

$$\begin{aligned} P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} &= C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \dots \cdot C_{n_k}^{n_k} = \\ &= \frac{n!}{n! \cdot (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2! \cdot (n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3! \cdot (n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \frac{(n_k)!}{n_k! \cdot (n-n_1-\dots-n_{k-1})!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}. \end{aligned}$$

Assim,

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (3.8)$$

Deste modo, obtemos novamente a fórmula estabelecida em (3.4) para o número de permutações com elementos repetidos.

Exemplo 3.1.16. De quantas formas, podemos escolher 3 frutas em uma quitanda tendo à disposição quatro tipos de frutas (laranja, maçã, banana e goiaba)?

Solução:

Caso as 3 frutas fossem diferentes, o número de maneiras de escolher seria dado por $C_4^3 = 4$. Porém, o problema não fala que as frutas devem ser distintas. Portanto, podemos escolher 2 laranjas e 1 maçã, ou 3 maçãs; ou ainda 1 laranja e 2 goiabas, por exemplo. Uma forma é listar todas as possibilidades, nas quais L representa a laranja, M a maçã, B a banana e G a goiaba.

Tabela 1 – Lista de possibilidades de selecionar 3 frutas dentre as 4 opções disponíveis.

{L, L, L}	{L, L, M}	{L, L, B}	{L, L, G}
{M, M, M}	{M, M, L}	{M, M, B}	{M, M, G}
{B, B, B}	{B, B, M}	{B, B, L}	{B, B, G}
{G, G, G}	{G, G, L}	{G, G, B}	{G, G, M}

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora, além das 4 combinações sem repetição contadas inicialmente, teremos mais 16 possibilidades em que levamos pelo menos duas unidades da mesma fruta. Aplicando o Princípio Aditivo, novamente, temos que $4 + 16 = 20$ é o total de maneiras de escolher 3 frutas dentre as 4 disponíveis.

Para este caso, a listagem das possibilidades foi uma estratégia aplicável, pelo fato do número de elementos ser reduzido. Entretanto, essa estratégia se torna-se impraticável quando o número de elementos do conjunto é grande.

Deste modo, devemos encontrar outro modo de contagem sem a necessidade de listar todas as opções. Podemos interpretar o problema do seguinte modo: considere as variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 que assumem valores inteiros não-negativos e tais que x_1 representa a quantidade que vamos comprar de laranja, x_2 é a quantidade que vamos comprar de maçãs, x_3 é a quantidade que vamos comprar de bananas e x_4 é a quantidade que vamos comprar de goiaba.

Logo, escolher 3 frutas equivale a determinar uma solução inteira não-negativa da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3. \quad (3.9)$$

Portanto, o número de soluções inteiras não-negativas corresponde ao número de maneiras em que podemos escolher as 3 frutas com ou sem repetição.

Definição 3.1.7. Chama-se equação linear com coeficientes unitários qualquer equação do tipo:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$$

onde n e p naturais e $n \geq 1$.

Uma solução para a equação acima é uma n -upla $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ onde $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ para todo i tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = p$.

Se para todo i tivermos que $\alpha_i \geq 0$, dizemos que β é uma *solução inteira não negativa*, e se $\alpha_i > 0$ para todo i , então dizemos que β é uma *solução inteira positiva*.

Vejamos, então, como contar as soluções inteiras não negativas das equações lineares com coeficientes unitários, utilizando o procedimento descrito em (MORGADO et al., 2006) e em (BEZERRA et al., 2018).

O processo utiliza dois símbolos distintos, digamos bolinha (\bullet) e barra ($|$). O símbolo bolinha (\bullet) é usado para representar as unidades dos valores dos x'_i s da equação, e as barras ($|$) para separar as incógnitas da equação. Como exemplo, ilustramos, abaixo, algumas soluções para o problema:

- i) $(1, 1, 0, 1) = \bullet | \bullet | \quad | \bullet$. Esta configuração representa a solução em que são escolhidas, respectivamente, uma laranja, uma maçã e uma goiaba.
- ii) $(0, 0, 3, 0) = \quad | \quad | \bullet \bullet \bullet |$. Esta configuração representa a solução em que se são escolhidas 3 bananas como opção de frutas.
- iii) $(0, 1, 0, 2) = \quad | \bullet | \quad | \bullet \bullet$. Aqui temos a configuração em que a solução em que são escolhidas 1 maçã e 2 goiabas.

Note que temos 3 bolinhas \bullet e 3 barras $|$, e que uma solução para o problema corresponde a uma ordenação desses símbolos, fazendo com que tenhamos uma correspondência biunívoca entre as soluções e as permutações dos 6 símbolos.

Posto isso, o número de soluções inteiras não negativas é o número de permutações de esses seis elementos que será dado por:

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

Vejamos outro exemplo:

Exemplo 3.1.17. *Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.*

Solução: Inicialmente, apresentaremos algumas soluções em termos dos símbolos "bolinha" e "barra":

- i) $(3, 4, 3) = \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet$.

$$\text{ii) } (0, 5, 5) = \quad | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet .$$

$$\text{iii) } (8, 0, 2) = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \quad | \bullet \bullet .$$

$$\text{iv) } (0, 0, 10) = \quad | \quad | \bullet \bullet$$

Para esse caso temos 10 "bolinhas" \bullet e 2 "barras" $|$. Logo, o número de soluções é o número de permutações dos 12 símbolos.

$$P_{12}^{10,2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = 66.$$

De modo geral, o número de soluções não negativas de uma equação do tipo $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ é dada pela seguinte expressão:

$$P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p! \cdot (n-1)!}.$$

Os exemplos 3.1.15 e 3.1.16 são classificados como problemas de Combinações com Repetição ou como Combinações Completas. Tais combinações são definidas da seguinte forma:

Definição 3.1.8. Chamam-se *Combinações Completas ou Combinações com Repetição*, de classe p de n objetos, a toda escolha não ordenada de p objetos, distintos ou não, dentre os n objetos dados.

Conforme deduzido no Exemplo 3.1.15, o número de Combinações com Repetição, denotado por CR_n^p , é expressa por:

$$CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p! \cdot (n-1)!}. \quad (3.10)$$

Note que o valor de CR_n^p estabelecido em (3.10) é igual a C_{n+p-1}^p , ou seja, assim,

$$CR_n^p = C_{p+n-1}^p.$$

3.2 Princípio da Inclusão-Exclusão

No início desse capítulo fizemos referência ao princípio da Inclusão-Exclusão que estabelece uma fórmula para contar o número de elementos resultante da união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. Em sua versão mais simples, afirma que, dados dois conjuntos finitos A e B , tem-se

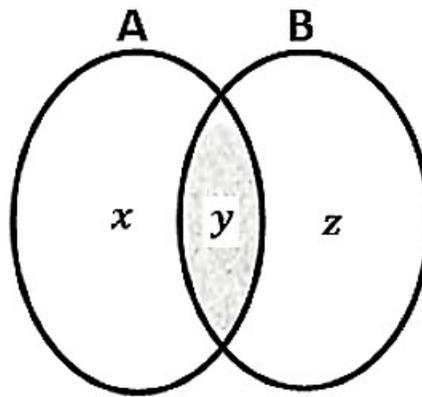
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (3.11)$$

Como modos de justificar a relação apresentada acima há duas formas:

1. Suponha dois conjuntos A e B , onde y é o número de elementos que pertencentes, simultaneamente, a A e B , x o número de elementos que pertencentes somente a A , e z o número de elementos pertencentes somente a B , como ilustrado no diagrama da Figura 24. Temos

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= x + y + z; \\ |A| + |B| - |A \cap B| &= (x + y) + (y + z) - y \\ &= x + y + z = |A \cup B|. \end{aligned}$$

Figura 24 – Diagrama de $A \cup B$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Para a segunda forma, temos que $|A \cup B|$ é o número de elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos A e B . Logo, para determinar o número de elementos de $A \cup B$, contamos todos os elementos de A ($|A|$) e todos os elementos de B ($|B|$). Ao fazermos isso, os elementos de $A \cap B$ foram contados duas vezes, uma em $|A|$ e outra em $|B|$. Por fim, devemos subtrair a segunda contagem desses elementos, chegando a:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Exemplo 3.2.1. *Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou 7?*

Solução: Considerando que:

A = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3.

B = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 7.

Nosso objetivo é determinar $|A \cup B|$. Para isso vamos determinar o número de elementos de A , B e $A \cap B$, teremos que:

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ corresponde à parte inteira da divisão do número real x . Temos, também, que

$$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142.$$

E, por fim, temos que $A \cap B$ é o conjunto dos números inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 e por 7, ou seja, são divisíveis por 21. Assim

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47.$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 333 + 142 - 47 = 428.$$

Portanto, temos 428 inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 7.

Exemplo 3.2.2. *Quantos inteiros há entre 1 e 1.000.000 que não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeitos?*

Solução: Considere os seguintes conjuntos:

$$S_0 = \{1, 2, \dots, 1.000.000\}.$$

$S_1 = \{1, 4, 9, 16, \dots, 1.000.000\} \rightarrow$ conjunto dos números naturais que são quadrados perfeitos).

$S_2 = \{1, 8, 27, 64, \dots, 1.000.000\} \rightarrow$ conjunto dos números naturais que são cubos perfeitos)

$S_3 = \{1, 64, 729, 4096, \dots, 1.000.000\} \rightarrow$ conjunto dos números naturais que são sexta potência).

Note que $|S_0| = 1.000.000$, $|S_1| = \left\lfloor \sqrt{1.000.000} \right\rfloor = 1.000$, $|S_2| = \left\lfloor \sqrt[3]{1.000.000} \right\rfloor = 100$ e $|S_3| = \left\lfloor \sqrt[6]{1.000.000} \right\rfloor = 10$.

Queremos determinar $|S_0| - |S_1 \cup S_2|$. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão temos que

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

Como $|S_1 \cap S_2| = |S_3|$, pois um número que é quadrado e cubo perfeito ao mesmo tempo é uma sexta potência. Com isso, temos que:

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_3| = 1000 + 100 - 10 = 1090.$$

Portanto, a quantidade de inteiros que não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeito é

$$|S_0| - |S_1 \cup S_2| = 1000000 - 1090 = 998910.$$

3.3 Probabilidade

Uma das aplicações dos resultados obtidos na seção de Análise Combinatória é na Teoria da Probabilidade, onde veremos modelos adequados para descrever fenômenos aleatórios observáveis e quantificar as chances desses eventos acontecerem. Esta seção foi elaborada com base nos textos (MORGADO et al., 2006) e (BEZERRA et al., 2018).

Definição 3.3.1. Denomina-se **experimento**, qualquer ação que pode ser repetida, acompanhada de um resultado que se quer analisar.

Exemplo 3.3.1. Lançar um dado não viciado e observar o valor da face voltada para cima.

- Ação: lançar o dado.
- Resultado a observar: o número voltado para cima.

Exemplo 3.3.2. Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.

- Ação: lançar uma moeda.
- Resultado a observar: a face que cai voltada para cima.

Definição 3.3.2. Dizemos que um experimento é **determinístico** quando repetido em condições semelhantes conduz ao mesmo resultado.

Como exemplos temos:

- Abandonar uma moeda e observar o tempo que ela leva para tocar o solo.
- Aquecer a água e observar a temperatura em que ela começa a ferver.

Definição 3.3.3. Dizemos que um experimento é **aleatório** ou **probabilístico**, quando, repetido em condições semelhantes, pode produzir resultados diferentes.

Neste texto consideraremos experimentos aleatórios aqueles com as seguintes características:

- a) Um número n finito de resultados possíveis do experimento.
- b) Os resultados possíveis do experimento são igualmente prováveis de ocorrerem.
- c) Todo evento A é um conjunto união de m resultados possíveis do experimento onde $m \leq n$.

Vale ressaltar que nem todos os experimentos aleatórios possuem essas características. Sortear um número racional entre 0 e 1, por exemplo, oferece infinitos resultados possíveis; sortear a face de uma moeda viciada faz com que os resultados possíveis possuam chances distintas de ocorrer.

Definição 3.3.4. Denomina-se **espaço amostral** (Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento.

Exemplo 3.3.3. Considere o experimento que consiste em lançar uma moeda e observar a face que cai voltada para cima. Neste exemplo, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{Cara, Coroa\}$, donde vemos que $|\Omega| = 2$.

Exemplo 3.3.4. Considere o experimento que consiste em lançar um dado e observar a face voltada para cima.

Para este exemplo o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donde vemos que $|\Omega| = 6$.

Definição 3.3.5. Definimos um evento A como sendo qualquer subconjunto do espaço amostral, ou seja, $A \subset \Omega$.

Exemplo 3.3.5. Considere o experimento que consiste em lançar um dado não viciado e observar o número na face voltada para cima.

- Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $|\Omega| = 6$;
- Evento **A**: sair um número par $\rightarrow A = \{2, 4, 6\}$ e $|A| = 3$;
- Evento **B**: sair um número ímpar $\rightarrow B = \{1, 3, 5\}$ e $|B| = 3$;
- Evento **C**: sair um número maior que 4 $\rightarrow C = \{5, 6\}$ e $|C| = 2$.

Exemplo 3.3.6. Considere o experimento em que lançamos uma moeda honesta três vezes e observamos a face voltada para cima. (Considere $K = Cara$ e $C = Coroa$).

- Espaço amostral: $\Omega = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$ e $|\Omega| = 8$;

- **Evento A:** obter duas caras $\rightarrow A = \{KKC, KCK, CKK\}$ e $|A| = 3$;
- **Evento B:** obter duas coroas $\rightarrow B = \{KCC, CKC, CCK\}$ e $|B| = 3$;
- **Evento C:** obter três resultados iguais $\rightarrow C = \{KKK, CCC\}$ e $|C| = 2$.

Definição 3.3.6. Dizemos que dois eventos C e D são **Mutuamente Excludentes** (ou **Disjuntos**) quando $C \cap D = \emptyset$.

Exemplo 3.3.7. Novamente considere o evento que consiste em lançar um dado não viciado e observar o valor da face voltado para cima. Considere os seguintes eventos:

- **Evento A:** sair um número par $\rightarrow A = \{2, 4, 6\}$ e $|A| = 3$;
- **Evento B:** sair um número ímpar $\rightarrow B = \{1, 3, 5\}$ e $|B| = 3$.

Logo, temos que A e B são eventos mutuamente excludentes, pois $A \cap B = \emptyset$.

Em um experimento aleatório, não podemos garantir a ocorrência de um determinado evento A . No entanto, podemos associar ao evento A um número que traduza a frequência com que este evento ocorra em uma sequência de experimentos idênticos. Tal número é denominado probabilidade de ocorrência do evento A .

Definição 3.3.7. Define-se como **probabilidade** do evento A dentro do espaço amostral finito Ω , como sendo a razão da cardinalidade do subconjunto de A em relação à cardinalidade de Ω , isto é,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (3.12)$$

Laplace¹ entendia a probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis (número de casos elementares em que o evento A ocorre) e o número total de casos possíveis, isto é, sendo $|\Omega| = n$ e $|A| = m$, temos que:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}.$$

¹ Pierre-Simon Laplace (1749-1827) foi matemático, astrônomo e físico francês. Filho de um próspero fazendeiro, revelou um grande talento e perspicácia para a matemática enquanto estudava teologia na Universidade de Caen. Laplace abandonou o curso de teologia e partiu para Paris, onde se concentravam os maiores intelectuais da época.

Em Paris, encontrou-se com D'Alembert, que, impressionado com seu talento, tratou de conduzir seus estudos matemáticos assim como arrumar-lhe um emprego como professor na Escola Militar de Paris. A partir de então, publicou vários trabalhos, em áreas como o cálculo, e, principalmente, astronomia e probabilidade, sendo essas duas últimas suas principais áreas de estudo. Na Teoria da Probabilidade, publicou vários artigos, que foram compilados em uma de suas principais obras, *Théorie analytique des probabilités*, assim como o *Essai philosophique des probabilités*, que seria um livro mais básico e introdutório à probabilidade. Em seu livro *Théorie analytique*, Laplace resgata e refina trabalhos anteriores, como a agulha de Buffon sobre a probabilidade inversa, e também expressa suas descobertas sobre a teoria dos mínimos quadrados e a transformada na de Lagrange (SEPULVEDA et al., 2018).

Como consequência da definição de probabilidade, temos as seguintes propriedades:

- i) Para todo evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$;
- ii) $P(\Omega) = 1$;
- iii) $P(\emptyset) = 0$ (porque $|\emptyset| = 0$);
- iv) Se $A \cap B = \emptyset$, então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Proposição 3.3.1. *Seja A um evento de um espaço amostral finito Ω . Então $P(A^c) = 1 - P(A)$.*

Demonstração. Sabemos que A^c e A são dois conjuntos disjuntos tais que $(A^c \cup A = \Omega)$, e deste modo, temos que

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$$

Logo, temos que $P(A^c) = 1 - P(A)$. □

Proposição 3.3.2. *Sejam A e B dois eventos não disjuntos de um espaço amostral finito Ω . Então*

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B - A).$$

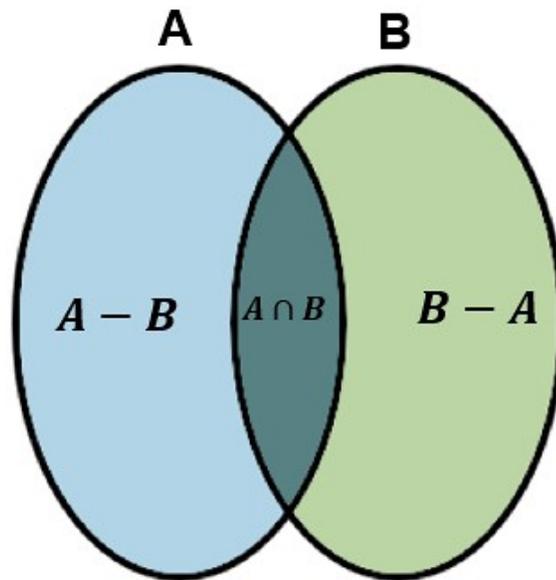
Demonstração. Temos que $A \cup B = A \cup (B - A)$. Com isso $P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$ e, portanto, $P(A) = P(A \cup B) - P(B - A)$. □

Proposição 3.3.3. *Sejam A e B dois eventos, temos que*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração. De fato, segue do princípio da Inclusão-Exclusão (veja a Equação 3.11) que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Figura 25 – Diagrama de Venn da $A \cup B$ não disjuntos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dividindo ambos os lados da igualdade dada em (3.15) por $|\Omega|$, obtemos:

$$\frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.3.8. *Suponha que joguemos dois dados honestos simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma obtida seja maior do que 3.*

Solução: Ao lançar dois dados, a obtenção do número de pares pode ser realizada aplicando o princípio multiplicativo do seguinte modo: observe que há 6 possibilidades, tanto para o resultado do primeiro dado quanto para o segundo dado. Dessa forma, $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ pares de possibilidades, os quais estão listados na Tabela 2.

Tabela 2 – Possíveis resultados para o lançamento de dois dados.

	Número da face voltada para cima do 2º dado						
		1	2	3	4	5	6
Número da face voltada para cima do 1º dado	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Note que os pares em que a soma dos números é menor do que três são (1, 1), (1, 2) e (2, 1). Então, temos 33 pares cuja soma é maior a 3 (evento A). aplicando a definição de Laplace para Probabilidade temos que

$$P(A) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} \approx 91,66\%.$$

Exemplo 3.3.9. *Supondo que para a disputa de uma Copa do Mundo de Futebol, os 32 países classificados são divididos em 8 grupos, contendo 4 países cada um e que a ordem ocupada pela seleção seja revelante, determine a probabilidade de dois países determinados, A e B , caírem no mesmo grupo.*

Solução: Para solucionar o problema tomamos como espaço amostral o conjunto de todas as permutações de 32 países, ou seja, o número de caso possíveis é $32!$.

Devemos obter o número de permutações existentes tais quais A e B pertencem ao mesmo grupo. Inicialmente, note que há 8 possíveis grupos para as seções A e B estarem juntos. Uma vez decidido o grupo, a seleção A pode ser colocada em qualquer um dos 4 lugares no grupo, restando três lugares possíveis para B e com os outros países podendo ser distribuídos em $30!$ formas diferentes.

Portanto, o número de permutações com A e B no mesmo grupo é

$$4 \cdot 3 \cdot 30!.$$

A probabilidade procurada é, portanto,

$$\frac{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 30!}{32!} = \frac{3}{31} \approx 9,68\%.$$

Segundo (BEZERRA et al., 2018, Capítulo 14) denomina-se a razão apresentada na Equação (3.12) como frequência relativa de A , que é obtida repetindo o experimento diversas vezes e contando quantas vezes A ocorre. Podemos formalizar a definição de frequência relativa como se segue:

Definição 3.3.8. *Sejam E um experimento aleatório e A um evento associado a E . Se n_A é o número de vezes que o evento A ocorreu em n repetições do experimento E , então o quociente*

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

é denominado de frequência relativa de A nas repetições de E .

Para isso verifica-se as seguintes propriedades semelhantes às utilizadas em (MORGADO et al., 2006):

- i) $0 \leq f_A \leq 1$;
- ii) $f_A = 1$ se, e somente se A ocorre em todos as n repetições;
- iii) Se A e B são eventos disjuntos, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

Temos ainda em (BEZERRA et al., 2018), que, à medida que n aumenta, f_A se estabiliza próximo de algum valor. Logo, a frequência relativa também é um bom candidato para traduzir as chances de um determinado evento A ocorrer. No entanto, a frequência relativa de um evento é mais simples e fácil de se calcular em modelos probabilísticos mais complicados.

Assim, temos duas maneiras distintas para quantificar eventos aleatórios: a probabilidade do evento $P(A)$ (que demanda a contagem do número de casos favoráveis à ocorrência do evento) e a frequência relativa f_A (que é mais simples e fácil de se calcular).

Felizmente, sob determinadas hipóteses, à medida que n tende a infinito, f_A converge² para $P(A)$ e, assim, podemos trabalhar com a noção que for mais adequada ao nossos propósitos.

Exemplo 3.3.10. *Seis bolas diferentes são colocadas ao acaso em três urnas diferentes. Qual é a probabilidade de que todas as urnas estejam ocupadas?*

Solução: Temos que a escolha da urna em que cada uma das 6 bolas é colocada pode ser feita de 3 modos diferentes. Como temos 6 bolas diferentes e aplicando o Princípio Multiplicativo o número de casos possíveis é

$$|\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6.$$

Agora, considere os seguintes subconjuntos:

$A_1 \rightarrow$ o conjunto de distribuição de bolas que deixa a primeira urna vazia;

$A_2 \rightarrow$ o conjunto de distribuição de bolas que deixa a segunda urna vazia;

$A_3 \rightarrow$ o conjunto de distribuição de bolas que deixa a terceira urna vazia.

Temos que:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^6,$$

uma vez que para cada bola temos apenas 2 urnas. Temos agora que:

$$|(A_1 \cap A_2)| = |(A_1 \cap A_3)| = |(A_2 \cap A_3)| = 1 \text{ e } |(A_1 \cap A_2 \cap A_3)| = 0.$$

² Convergência em Probabilidade, consequência da Lei dos Grandes Números (JAMES, 1981).

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos que:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 3 \cdot 2^6 - 1 - 1 - 1 = 3(2^6 - 1)$$

e a probabilidade de que pelo menos 1 urna esteja vazia é

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{3(2^6 - 1)}{3^6} = \frac{2^6 - 1}{3^5} = \frac{63}{243} = \frac{7}{27}.$$

Portanto, a probabilidade de que todas as urnas estejam ocupadas é dada por:

$$P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c] = 1 - \frac{7}{27} = \frac{27 - 7}{27} = \frac{20}{27}.$$

Exemplo 3.3.11. Um número entre 1 e 300 é escolhido aleatoriamente. Qual a probabilidade de que esse número seja divisível por 3 ou por 5?

Solução: Considere os seguintes conjuntos:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 300\};$$

$$A = \{x \in \Omega \mid 3 \text{ divide } x\};$$

$$B = \{x \in \Omega \mid 5 \text{ divide } x\}.$$

Nosso objetivo é calcular $P(A \cup B)$. Para isso, temos que

$$\begin{aligned} |A| &= \left\lfloor \frac{300}{3} \right\rfloor = 100; \\ |B| &= \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor = 60; \\ |(A \cap B)| &= \left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor = 20, \end{aligned}$$

E, portanto, temos que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{100}{300} = \frac{1}{3}; \\ P(B) &= \frac{60}{300} = \frac{1}{5}; \\ P(A \cap B) &= \frac{20}{300} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

3.3.1 Probabilidade Condicional

Definição 3.3.9. Dados dois eventos A e B , a **probabilidade condicional** de B , dado A é o número $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Este número será representado como $P(B|A)$. Com isso temos:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (3.13)$$

Atentamo-nos para o fato de que este número só estará definido quando $P(A) > 0$. A equação 3.13 pode ser escrita também da forma

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Além disso, se $P(B) > 0$ temos também

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

De posse das relações apresentadas temos as seguintes propriedades: Se A é um evento tal que $P(A) > 0$, então:

- i) $P(\emptyset|A) = 0$;
- ii) $P(\Omega|A) = 1$ e $P(A|A) = 1$;
- iii) $0 \leq P(B|A) \leq 1$;
- iv) $P((B \cup C)|A) = P(B|A) + P(C|A)$, se $B \cap C = \emptyset$.

Exemplo 3.3.12. Um grupo de 360 pessoas está classificado como mostra a tabela a seguir.

Tabela 3 – Classificação quanto a proficiência em outro idioma estrangeiros.

	FALA ALEMÃO	FALA INGLÊS	FALA FRANCÊS
MULHERES	33	101	52
HOMENS	35	92	47

Fonte: Tabela modificada de (MORGADO, *et al*, 2006).

Escolhendo uma pessoa aleatória desse grupo, qual é a probabilidade de que essa pessoa seja um homem, sabendo que essa pessoa fala francês?

Solução:

Como o espaço amostral é constituído por 360 pessoas, temos os seguintes eventos

A : A pessoa escolhida fala francês;

B : A pessoa escolhida é do sexo masculino.

Então, temos

$$P(A) = \frac{52 + 47}{360} = \frac{99}{360},$$

$$P(A \cap B) = \frac{47}{360},$$

logo, segue que a probabilidade da pessoa escolhida falar e que seja homem é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{47}{360}}{\frac{99}{360}} = \frac{47}{99}.$$

Observe que

$$P(B|A) = \frac{47}{99} = \frac{47}{52 + 47} = \frac{|A \cap B|}{|A|},$$

o que acontece sempre quando na probabilidade considerada todos os pontos do espaço amostral Ω são igualmente prováveis.

Exemplo 3.3.13. *Numa prova há 7 perguntas do tipo verdadeiro-falso. Qual é a probabilidade de acertar todas as perguntas se:*

- escolhermos aleatoriamente as 7 respostas,*
- escolhermos as respostas, mas sabendo que há mais respostas "verdadeiro" do que "falso".*

Solução: Considerando A como sendo o evento de acertar as 7 perguntas do teste, segue então:

a) Para cada questão temos 2 opções, que vão ser verdadeiro ou falso, logo há $2^7 = 128$ possibilidades. Com isso temos que

$$P(A) = \frac{1}{128}.$$

b) Considerando A como sendo o conjunto de todos os pontos com mais respostas "verdadeiro" do que "falso" temos, então, que

$$|A| = C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 35 + 21 + 7 + 1 = 64.$$

Portanto a probabilidade de acertar as 7 perguntas sabendo que há mais respostas verdadeiras é

$$P(A) = \frac{1}{64}.$$

Agora, para os casos em que um evento não possui interferência na ocorrência do outro, temos a seguinte definição.

Definição 3.3.10. Dois eventos A e B são chamados de *independentes* se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Como consequência desta definição, o conjunto vazio \emptyset e o espaço amostral Ω são independentes de qualquer outro evento, pois se A é um evento, então segue que

$$P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(\emptyset) \cdot P(A)$$

e

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega).$$

Exemplo 3.3.14. A probabilidade de um nadador X queimar uma largada em uma competição é de 18%. Para o nadador Y , essa probabilidade é de 12%. Se os dois nadadores estão disputando uma mesma prova, qual é a probabilidade de que:

- ambos queimem a largada?
- nenhum deles queime a largada?
- pelo menos um queime a largada?

Solução:

Considerando que A seja o evento onde o nadador X queima a largada e A^c o evento em que o nadador X não queime a largada, temos que:

$$\text{Nadador } X: \begin{cases} P(A) = \text{probabilidade de } X \text{ queimar a largada} = 18\%; \\ P(A^c) = \text{probabilidade de } X \text{ não queimar a largada} = 82\%. \end{cases}$$

Agora, considerando B o evento em que o nadador Y queima a largada e B^c o evento em que o nadador Y não queima a largada, logo temos que:

$$\text{Nadador } Y: \begin{cases} P(B) = \text{probabilidade de } Y \text{ queimar a largada} = 12\%; \\ P(B^c) = \text{probabilidade de } Y \text{ não queimar a largada} = 88\%. \end{cases}$$

- Se ambos queimam a largada, devemos calcular a $P(A \cap B)$. Já que os dois eventos são independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 18\% \cdot 12\% = \frac{1,8}{10} \cdot \frac{1,2}{10} = \frac{2,16}{100} = 2,16\%.$$

- Agora, se nenhum queima a largada, temos que calcular $P(A^c \cap B^c)$ que é

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) = 82\% \cdot 88\% = \frac{8,2}{10} \cdot \frac{8,8}{10} = \frac{72,16}{100} = 72,16\%.$$

c) Para analisarmos o caso em que, pelo menos um deles queime a largada, há que se considerar os três eventos:

a) O evento C , em que o nadador X queima a largada e o nadador Y não.

b) O evento D , em que o nadador X não queima a largada, mas o nadador Y sim.

c) O evento E , em que ambos os nadadores queimam a largada.

Como os eventos C , D e E são mutuamente excludentes, calcularemos suas probabilidades separadamente.

- Observe, inicialmente, que o evento C é dado por

$$C = A \cap B^c,$$

e disso temos que

$$P(C) = P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 18\% \cdot 88\% = \frac{1,8}{10} \cdot \frac{8,8}{10} = 15,84\%.$$

- O evento D é dado por

$$D = A^c \cap B$$

daí vem que

$$P(D) = P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B) = 82\% \cdot 12\% = \frac{8,2}{10} \cdot \frac{1,2}{10} = 9,84\%.$$

- Agora, o evento E é dado por

$$E = A \cap B$$

logo, temos que

$$P(E) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 18\% \cdot 12\% = \frac{1,8}{10} \cdot \frac{1,2}{10} = \frac{2,19}{100} = 2,16\%.$$

Agora, como os eventos são mutuamente exclusivos, ou seja, se acontece um não acontece o outro, temos que somar os resultados obtidos. Portanto, a probabilidade de, pelo menos, um queimar a largada é de

$$15,84\% + 9,84\% + 2,16\% = 27,84\%.$$

Outras formas de resolver o item c :

- Pelo item b calculamos a probabilidade de nenhum dos nadadores queimar a largada. Deste modo, o evento complementar é que, pelo menos um, queime a largada. Posto isso, a probabilidade desse evento acontecer é

$$100\% - 72,16\% = 27,84\%.$$

- Também poderíamos calcular a $P(A \cup B)$ da seguinte forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 18\% + 12\% - 2,16\% = 27,84\%.$$

Quadrados Latinos

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados da teoria dos quadrados latinos. As principais referências utilizadas foram: (CARDOSO; SZYMANSKI; ROSTAMI, 2009), (ROSENHOUSE; TAALMAN, 2011), (NEGRINI, 2018) e (SILVA, 2019).

Definição 4.0.1. *Um quadrado latino de ordem n é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são preenchidas com n símbolos distintos sem que haja repetição de símbolos em nenhuma linha ou coluna.*

O nome quadrados latinos se origina do uso de letras latinas, ao invés de numéricos nos primeiros estudos sérios desses objetos.

Exemplo 4.0.1. *Exemplo de um quadrado latino de ordem 5:*

Figura 26 – Quadrado latino de ordem 5.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>D</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Exemplo 4.0.2. *Exemplo de um quadrado latino de ordem 9:*

Figura 27 – Quadrado latino de ordem 9.

A	C	D	B	G	I	H	F	E
G	F	A	D	I	H	E	C	B
I	E	H	G	B	C	A	D	F
E	I	B	H	C	D	F	G	A
F	H	C	A	D	E	I	B	G
C	A	G	I	H	F	B	E	D
B	D	E	C	F	A	G	I	H
H	B	I	F	E	G	D	A	C
D	G	F	E	A	B	C	H	I

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Outro exemplo de quadrados latinos de ordem 9 são os Sudokus, que, além das restrições impostas para o preenchimento das linhas e colunas, têm a restrição dos blocos, onde não se pode repetir elementos dentro de um mesmo bloco 3×3 .

Exemplo 4.0.3. *Outro exemplo de quadrado latino de ordem 9 que é, em particular, um Sudoku:*

Figura 28 – Um quadrado latino que é um Sudoku.

1	6	4	3	8	5	9	2	7
5	7	2	9	4	6	8	1	3
3	9	8	1	7	2	5	6	4
8	4	5	2	9	1	3	7	6
6	2	9	7	5	3	4	8	1
7	1	3	4	6	8	2	9	5
4	5	1	6	2	9	7	3	8
2	8	6	5	3	7	1	4	9
9	3	7	8	1	4	6	5	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Os quadrados latinos se tornaram conhecidos quando Leonard Euler publicou um artigo em 1782 no qual introduziu o estudo dos quadrados latinos ortogonais e por utilizar as letras latinas e gregas em seu trabalho, Euler denominou esses quadrados como greco-latinos.

Definição 4.0.2. *Dizemos que dois quadrados latinos de ordem n são ortogonais, se o quadrado obtido pela sobreposição deles contém cada par ordenado de caracteres que ocupam a mesma posição dentro da grade possível exatamente uma vez.*

Usaremos a notação de matriz para melhor representação dos quadrados latinos, assim como facilitar as operações que se seguem.

Definição 4.0.3. A sobreposição de um quadrado latino $A = [(a_{ij})]$ de ordem n sobre um quadrado latino $B = [(b_{ij})]$, também de ordem n , é uma matriz $C = [(c_{ij})]$ de ordem n , cujas entradas são pares ordenados formados pelas entradas dos quadrados latinos A e B : $c_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$ os quais denotaremos pela justaposição das entradas, ou seja, $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. De modo geral temos:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.0.4. Considerando os quadrados latinos de ordem 4, H e K .

Figura 29 – Quadrados latinos de ordem 4 H e K .

$$H = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D \\ \hline B & A & D & C \\ \hline C & D & A & B \\ \hline D & C & B & A \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad K = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \hline \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \hline \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \hline \end{array}.$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Temos que a representação de H e K na forma matricial é dada por:

$$H = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

A sobreposição de H em K será a matriz J , conforme representada a seguir.

$$J = \begin{pmatrix} A\alpha & B\beta & C\gamma & D\delta \\ B\gamma & A\delta & D\alpha & C\beta \\ C\delta & D\gamma & A\beta & B\alpha \\ D\beta & C\alpha & B\delta & A\gamma \end{pmatrix}$$

Colocando J na configuração de quadrado temos:

Figura 30 – Quadrado obtido da sobreposição de H em K .

$$J = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A\alpha & B\beta & C\gamma & D\delta \\ \hline B\gamma & A\delta & D\alpha & C\beta \\ \hline C\delta & D\gamma & A\beta & B\alpha \\ \hline D\beta & C\alpha & B\delta & A\gamma \\ \hline \end{array}.$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No exemplo anterior, cada par ordenado aparece uma única vez. Portanto, H e K são ortogonais, e J é um quadrado latino ortogonal.

Euler recorreu aos quadrados latinos ortogonais, a fim de resolver o seguinte problema, conhecido como problema dos 36 oficiais.

"Admita-se a existência de seis destacamentos em cada um dos quais ficam seis oficiais com patentes distintas, dentre seis possíveis. Pretende-se fazer uma parada militar envolvendo estes trinta e seis oficiais, de tal forma que eles apareçam, seis em cada linha, sem que existam dois oficiais com a mesma patente ou pertencentes ao mesmo destacamento numa mesma linha".

Em seu artigo, Euler não dá nenhuma indicação da origem do problema, porém afirma que a solução deste problema requer dois quadrados latinos de ordem 6 ortogonais, como apresentaremos a seguir.

Considerando que os seis regimentos distintos sejam representados pelas letras A, B, C, D, E e F , as patentes dos oficiais representadas pelas letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ e ϕ , temos que as características de cada oficial são representadas por duas letras, sendo uma latina e outra grega, em que a primeira representa o seu regimento e a segunda a sua patente, como ilustra a Figura 31 a seguir.

Figura 31 – Quadrado de ordem 6 com cada regimento com suas respectivas patentes.

$A\alpha$	$A\beta$	$A\gamma$	$A\delta$	$A\theta$	$A\phi$
$B\alpha$	$B\beta$	$B\gamma$	$B\delta$	$B\theta$	$B\phi$
$C\alpha$	$C\beta$	$C\gamma$	$C\delta$	$C\theta$	$C\phi$
$D\alpha$	$D\beta$	$D\gamma$	$D\delta$	$D\theta$	$D\phi$
$E\alpha$	$E\beta$	$E\gamma$	$E\delta$	$E\theta$	$E\phi$
$F\alpha$	$F\beta$	$F\gamma$	$F\delta$	$F\theta$	$F\phi$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Basicamente, o problema consiste em organizar esses 36 pares de letras, de tal forma que em cada linha e coluna tenha um oficial de cada regimento e de cada patente sem repetições.

Logo, para que tenhamos a solução desse problema deveriam existir dois quadrados latinos de ordem 6 que sejam ortogonais, sendo um deles formado pelos regimentos e o outro formado pelas patentes, como os representados na Figura 32.

Figura 32 – Quadrados latinos de ordem 6 representando os regimentos (à esquerda), e as patentes (à direita).

A	C	B	E	D	F
D	B	C	A	F	E
F	E	A	D	C	B
C	F	D	B	E	A
B	D	E	F	A	C
E	A	F	C	B	D

α	γ	β	θ	δ	φ
δ	β	γ	α	φ	θ
φ	θ	α	δ	γ	β
γ	φ	δ	β	θ	α
β	δ	θ	φ	α	γ
θ	α	φ	γ	β	δ

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A ideia de Euler é que, ao realizar a sobreposição de um quadrado formado pelas letras latinas sobre o quadrado formado pelas letras gregas, os 36 oficiais representados no quadrado da Figura 31 estivessem presentes. O fato é que, apesar de ter conseguido gerar quadrados latinos de ordem 6, Euler não conseguiu nenhum par de quadrados latinos de ordem 6 que fossem ortogonais, e isto o levou a conjecturar a não existência de quadrados latinos ortogonais de ordem 6. Desta forma, o problema dos 36 oficiais não teria solução. Na verdade, sua conjectura foi de que não existiriam quadrados latinos de ordem $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Essa hipótese foi derrubada em 1960 por Raj Chandra Bose e Sharadchandra Shankar Shirikhande quando, por meios computacionais, conseguiram encontrar um quadrado ortogonal de ordem 22 e, logo após, Ernes Parker obteve um quadrado ortogonal de ordem 10. Juntos, seus trabalhos determinaram a existência dos quadrados ortogonais de ordem 10, 14, 18, 22, entre outros. Logo os únicos quadrados ortogonais que ainda atendiam a conjectura de Euler passaram a ser os de ordem 2 e ordem 6.

Apesar de ter sua hipótese derrubada, a afirmação de Euler que o problema dos 36 oficiais não teria solução é verdadeira. Este fato só foi provado em 1900, por Gaston Tarry, por análise exaustiva de todas as possibilidades (ROSENHOUSE; TAALMAN, 2012 *apud* Tarry, 1901). Em 1984, Stinson conseguiu realizar uma outra prova teórica do resultado de Tarry (ROSENHOUSE e TAALMAN, 2012 *apud* STINSON, 1984) e 10 anos depois, Dougherty realizou outra prova teórica, usando técnicas totalmente diferentes (ROSENHOUSE e TAALMAN (2012) *apud* DOUGHETY, 1994).

4.1 Construindo Quadrados Latinos

Como podemos construir um quadrado latino? Descreveremos nesta seção um processo de construção de um quadrado latino e abordaremos, também, algumas implicações desse processo. Inicialmente, tentaremos preencher um quadrado de ordem 10 com os algarismos de 1 a 10.

Uma forma simples de fazer isso é completar as entradas da primeira linha em ordem

Figura 33 – Grade 10×10 .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 34 – Grade 10×10 completa.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

crescente, conforme ilustrado na Figura 33. Cada linha subsequente é obtida a partir da anterior, deslocando cada número uma casa para a direita, com a primeira entrada em cada linha sendo movida para o final. Fazemos isso até que a produção de mais uma linha nos faça retornar ao ponto de partida.

Como cada linha subsequente é obtida a partir da primeira por um simples deslocamento dos números, não precisamos nos preocupar com o fato de algum número aparecer repetido em alguma das linhas. Da mesma forma, as colunas não representam um problema, pois o processo de

Figura 35 – Exemplos de Quadrados Latinos.

1	2
2	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

deslocamento das linhas garante que células da mesma coluna não possuam mesmo valor, como podemos observar na Figura 34.

Observe que, em cada um dos quadrados latinos exibidos na Figura 35, a k -ésima coluna lê o mesmo de cima para baixo que a k -ésima linha lê da esquerda para a direita. Esta é uma consequência da nossa técnica de deslocamento. Chegamos assim ao nosso primeiro teorema.

Teorema 4.1.1. *Seja n um inteiro positivo. Seja L a matriz $n \times n$ cuja k -ésima linha, para $1 \leq k \leq n$, lê-se da esquerda para a direita como*

$$(k, k + 1, \dots, n, 1, 2, \dots, k - 1).$$

Então, L é um quadrado latino de ordem n .

Demonstração. Precisamos mostrar que cada um dos números $1, 2, \dots, n$ aparece exatamente uma vez em cada linha e coluna. Está claro, em nossa construção, que isso deve ser verdade em cada linha. Para provar que temos essa propriedade para cada coluna, considere a j -ésima coluna, onde $1 \leq j \leq n$. A entrada mais alta nesta coluna é a j -ésima entrada da primeira linha da matriz. Como a primeira linha é dada por $(1, 2, \dots, n)$, esta j -ésima entrada é o número j . Por construção, cada linha possui entradas que são deslocadas uma à direita em relação à linha anterior. Portanto, a segunda entrada da j -ésima coluna, que é a j -ésima entrada da segunda linha, deve ser $j + 1$, assim seguindo para as demais colunas. Contudo, veremos que a j -ésima coluna é lida de cima para baixo como

$$(j, j + 1, \dots, n, 1, 2, \dots, j - 1),$$

o que forçará cada um dos números $1, 2, \dots, n$ a aparecer exatamente uma vez em cada coluna, conforme desejado. \square

4.2 Deslocamento e Divisibilidade

Verificaremos, agora, se é possível gerar quadrados latinos por outros métodos sistemáticos. Por exemplo, em vez de mudar ciclicamente por translações de comprimento um em cada linha após

a primeira, o que aconteceria se tentássemos outros comprimentos de translação? Deslocar por dois é a próxima escolha óbvia a se tentar. Assim sendo, começaremos com isso, o que funciona bem para quadrados latinos de ordens 3 e 5, conforme podemos observar na Figura 36.

Figura 36 – Deslocamento de comprimento 2 em quadrados de ordem 3 e 5.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

O mesmo não acontece com os quadrados de ordem 4 e 6, pois o deslocamento de comprimento dois em um quadrado de ordem par resulta em linhas repetidas, o que implica que as colunas terão entradas repetidas, como podemos verificar na Figura 37.

Figura 37 – Deslocamento em quadrados de ordem 4 e 6.

1	2	3	4
3	4	1	2
1	2	3	4
3	4	1	2

1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	1	2
5	6	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	1	2
5	6	1	2	3	4

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Podemos generalizar do seguinte modo: sendo n a ordem do quadrado latino e se d for um número inteiro que divide n , então deslocar por d resultará em linhas repetidas. Especificamente, se $n = d \cdot s$, deslocar por d um total de s vezes nos levará de volta à linha original antes de chegarmos a n -ésima linha, visto que $s < n$. Este fato foi o que acabamos de observar na Figura 37, onde $n = 6$, $d = 2$ e $s = 3$, uma vez que deslocar por um comprimento dois, um total de três vezes, nos levou de volta à linha original.

Ainda mais precisamente, se k for qualquer número inteiro entre 1 e $\frac{n}{d}$ inclusive, então a linha k será idêntica à linha $\frac{n}{d} + k$. Por exemplo, se $n = 6$ e $d = 2$, então a linha 1 e a linha 4 serão

idênticas, assim como as linhas 2, e 5, e as linhas 3 e 6. Da mesma forma, se tomarmos um quadrado de ordem $n = 12$ construído por um deslocamento de $d = 4$, as linhas 1, 4, 7 e 10 seriam idênticas, assim como as linhas 2, 5, 8 e 11 e as linhas 3, 6, 9 e 12. Estabelecemos que se d é um divisor de n , então não podemos construir um quadrado latino de ordem n através de deslocamentos cíclicos de comprimento d . Isso significa que se d não é um divisor de n , então podemos construir um quadrado latino de ordem n com deslocamentos d cíclicos? Não necessariamente, observe que o número 4 não divide 6, mas um deslocamento por 4 em um quadrado de ordem 6 produz linhas repetidas.

Figura 38 – Grade de ordem 6 com deslocamento de 4 casas.

1	2	3	4	5	6
5	6	1	2	3	4
3	1	5	6	1	2
1	2	3	4	5	6
5	6	1	2	3	4
3	4	5	6	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Observe que a quarta linha é igual à primeira. Isso ocorre porque chegamos à quarta linha acima deslocando três vezes a primeira linha com um comprimento dois, e isso tem o mesmo efeito líquido que o deslocamento de doze. Como temos seis símbolos, mudar para doze um múltiplo de seis nos traz de volta para onde começamos. Logo, se o comprimento do deslocamento d não for primo com a ordem n , não obteremos um quadrado latino.

Portanto, para que tenhamos um quadrado latino, os inteiros n e d devem ser coprimos. Os números 4 e 6 não são coprimos, e é, por isso, que não obtemos um quadrado latino quando começamos com seis algarismos e deslocamos quatro para formar a linha seguinte.

Devemos provar, então, que nosso argumento é válido, ou seja, queremos mostrar que um deslocamento de d em um quadrado de ordem n produz um quadrado latino precisamente quando d e n são relativamente primos.

Teorema 4.2.1. *Sejam n e d inteiros positivos. Seja L a matriz $n \times n$ cuja k -ésima linha, para $1 \leq k \leq n$, é obtida deslocando-se de d unidades a primeira linha para a direita um total de $(k - 1)$ vezes. Ou seja, a k -ésima linha é lida da esquerda para a direita como:*

$$[(k - 1)d + 1, (k - 1)d + 2, \dots, n, 1, 2, \dots, (k - 1)d].$$

Então, L será um quadrado latino, se e somente se, $\text{mdc}(d, n) = 1$.

Demonstração. Devemos mostrar que cada um dos números $1, 2, \dots, n$ aparece exatamente uma vez em cada linha e coluna. Para as linhas, isso é verdade, independentemente do valor de d , pois, por construção, cada linha consiste nos números de $(k - 1)d + 1$ a n seguidos pelos números de 1 a $(k - 1)d$, para algum valor de k .

Agora, consideremos a primeira coluna da nossa matriz construída L . De acordo com nosso procedimento, as entradas nesta coluna são:

$$[1, d + 1, 2d + 1, \dots, (n - 1)d + 1],$$

em que cada entrada é considerada módulo n .

A partir disso, vemos que a coluna 1 terá entradas repetidas quando houver dois inteiros distintos A e B , entre 0 e $n - 1$, inclusive para:

$$Ad + 1 \equiv Bd + 1 \pmod{n}.$$

Isso equivale a dizer que $Ad \equiv Bd \pmod{n}$, o que só é possível se $\text{mdc}(d, n) \neq 1$. Logo, para que a primeira coluna de nossa matriz deslocada contenha cada um dos números $1, 2, \dots, n$ exatamente uma vez, temos que d e n devem ser relativamente primos. Como cada coluna subsequente é um deslocamento da primeira coluna, garantimos a formação da matriz L , concluindo, assim, a demonstração. \square

Observe que o teorema acima nos mostra como podemos construir quadrados latinos de ordem n . No entanto, tal construção não gera todos os quadrados latinos possíveis, o que pode ser visto na Figura 39, em que são apresentados dois exemplos de quadrados latinos de ordem 4 que não são gerados pelo processo de deslocamento de linhas.

Figura 39 – Quadrados latinos de ordem 4 que não são gerados por deslocamento.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

4.3 Número de Quadrados Latinos

Partindo de uma grade em branco vejamos como determinar o números de quadrados latinos para alguns valores de n . Obviamente que, para $n = 1$, só existe um quadrado possível. Já para a ordem $n = 2$, temos 2 maneiras para o preenchimento da primeira linha, e para a segunda temos 1 maneira, segundo a disposição dos algarismos da 1ª linha em ordem crescente, conforme mostra a Figura 40.

Figura 40 – Quadrados latinos de ordem 2.

1	2
2	1

2	1
1	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para $n = 3$, temos $3!$ maneiras de preencher a 1ª linha. Para prosseguir com a contagem, vamos, inicialmente, considerar a primeira linha ocupada pelos algarismos dispostos na ordem crescente da esquerda para a direita chamada forma padrão, como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Quadrados latinos com a 1ª linha preenchida na forma padrão.

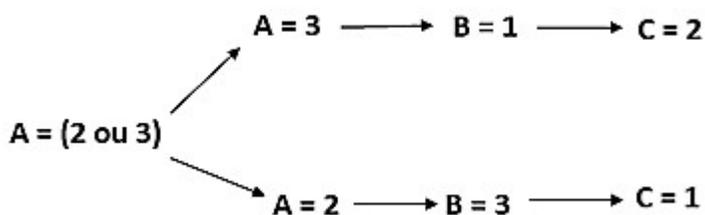
1	2	3
A	B	C

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na 2ª linha para as células indicadas por A , B e C ocorrem as seguintes possibilidades.

- $A \rightarrow 2$ ou 3 ;
- $B \rightarrow 1$ ou 3 ;
- $C \rightarrow 1$ ou 2 .

Figura 42 – Possibilidades de preenchimento para a 2ª linha do quadrado de ordem 3.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Se A for preenchida com 2, C deverá ser preenchido com 1 e B com o algarismo 3. Agora, se A for preenchido com 3, B será preenchido com 1 e C será completado com 2, como ilustra a Figura 42. Deste modo, temos 2 modos de completar a 2ª linha e, com isso, 2 formas de completar o quadrado na forma padrão, conforme mostra a Figura 43. Note que para os quadrados de ordem 3, uma vez definidos os algarismos da primeira linha, independente da ordem, para a segunda linha restarão apenas duas opções de preenchimento, devido às restrições de linha e colunas apresentadas na Definição 4.0.1.

Figura 43 – Possibilidades para preenchimento do quadrado latino de ordem 3.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como o número de maneiras de preencher a 1ª linha é $3!$, e aplicando o princípio multiplicativo, temos que o número de quadrado latinos de ordem 3 é

$$3! \cdot 2 = 12.$$

À medida que n aumenta, mais árduo fica o processo de contagem do número de quadrados latinos, e a saída encontrada para os cálculos foi através de meios computacionais, determinando o número de quadrados latinos reduzidos.

Definição 4.3.1. Um quadrado latino é denominado reduzido se as letras se dispõem por ordem alfabética na 1ª linha e na 1ª coluna ou se os números estiverem em ordem crescente da esquerda para direita e de cima para baixo. O número total de quadrados latinos reduzidos de ordem n será denotado por l_n .

Exemplo 4.3.1. *Quadrados latinos reduzidos de ordem 2 e 3.*

Figura 44 – Quadrados latinos reduzidos de ordem 2 e 3.

1	2
2	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para as ordens $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ existe apenas 1 quadrado latino na forma reduzida. Determinaremos o número de quadrados latinos reduzidos de ordem 4.

Figura 45 – Quadrado latino na configuração reduzida parcialmente preenchido.

1	2	3	4
2			
3			
4			

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Considerando a grade 4×4 com a primeira linha e coluna na forma padronizada de quadrados latinos reduzidos como mostra a Figura 45 e nomeando as células da segunda linha pelas letras do alfabeto A , B , C como mostra a Figura 46.

Figura 46 – Quadrado latino na configuração reduzida parcialmente preenchido com as células da 2ª linha destacada.

1	2	3	4
2	A	B	C
3			
4			

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

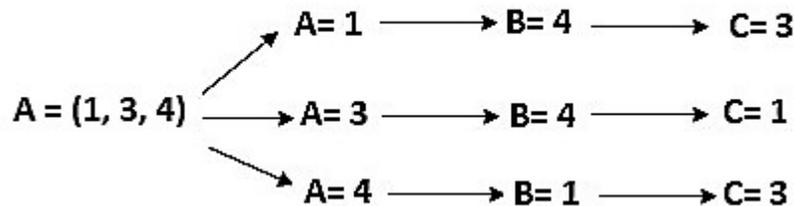
teremos para as células destacadas pelas letras os seguintes algoritmos como possibilidades de preenchimento.

- $A \rightarrow 1, 3$ ou 4 ;

- $B \rightarrow 1$ ou 4 ;
- $C \rightarrow 1$ ou 3 .

Caso A seja preenchido com o algarismo 1, a célula indicada por C será preenchida por 3, e a célula indicada com B será completada com o algarismo 4. Agora, se em A for 3, a célula C será preenchida com 1 e a célula B completada com 4. Para o caso em que A for preenchida com 4, em B teremos o algarismo 1 e, em C , completado com 3, como mostra a árvore de possibilidades da Figura 47. Logo, temos 3 modos distintos de preencher a segunda linha.

Figura 47 – Árvore de possibilidades para o preenchimento das células da 2ª linha.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Considerando que a segunda linha seja preenchida com os algarismos 2, 1, 4 e 3, nesta ordem, como ilustra a Figura 48, temos que a célula da 3ª linha, 2ª coluna indicada por D , será preenchida pelo algarismo 4, a célula na 3ª linha e 3ª coluna indicada por E e a célula da 3ª linha e 4ª coluna indicada por F , temos os algarismos 1 e 2 como candidatos. Caso a célula indicada por E for preenchida com algarismo 1, consequentemente a célula indicada por F será preenchida com 2 e a 4ª linha terá os algarismos 4, 3, 2 e 1, nesta ordem de preenchimento. Agora, caso a célula indicada por E seja preenchida com 2 em F , será completado com 1 teremos a 4ª linha preenchida com 4, 3, 1 e 2. Logo temos 2 quadrados latinos reduzidos, conforme mostra a Figura 49

Figura 48 – Quadrado latino reduzido, parcialmente preenchido com as células da 3ª linha destacada.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	D	E	F
4			

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 49 – Quadrados latinos reduzidos completados.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora para o caso em que a segunda linha é completada com os algarismos 2, 3, 4 e 1, nesta ordem, como podemos observar na Figura 50, temos que a célula indicada por *F* será preenchida com o algarismo 2 a célula indicada por *E* será preenchida com algarismo 1 e a célula indicada por *D* será completada com o algarismo 4. Com isso, a 4ª linha será preenchida com os algarismos 4, 1, 2 e 3, nesta ordem, completando, assim, mais um quadrado latino reduzido.

Figura 50 – Quadrado latino reduzido com a 2ª linha completada com os algarismos 3, 4 e 1.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	D	E	F
4			

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para a configuração em que a segunda linha é completada com os algarismos 2, 4, 1 e 3, nesta ordem, a célula indicada por *D* será preenchida por 1, a célula indicada por *F* será preenchida com o algarismo 2, e, por fim, para a célula indicada por *E* restará o algarismo 4 para seu preenchimento. Com isso, completamos a 4ª linha com os algarismos 4, 3, 2 e 1, nessa ordem, completando mais um quadrado latino reduzido, conforme Figura 51.

Figura 51 – Quadrado latino reduzido com a 2ª linha completada com os algarismos 4, 1 e 3.

1	2	3	4
2	4	1	3
3	D	E	F
4			

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Portanto para os quadrados latinos de ordem 4, temos o total de 4 quadrados latinos reduzidos.

Para ordens maiores que 4, o processo começa a ficar cada vez mais árduo gerando muitos casos para serem contados, deixando obsoleto o raciocínio abordado acima para o caso de ordem 4. É a partir desse ponto que o recurso computacional tem seu papel principal para a determinação do número de quadrados latinos reduzidos para ordem maiores.

O número de quadrados latinos reduzidos com ordem $n \leq 11$ foi apresentado por Brendan D. McKay e Ian M. Wanless em 2005 (MCKAY; WANLESS, 2005). O trabalho de McKay e Wanless tem como resultado a Tabela 4 com os número de quadrados latinos reduzidos até $n = 11$. Para as ordens iguais a $n = 12$, $n = 13$, $n = 14$ e $n = 15$, os valores são estimativas (MCKAY; ROGOYSKI, 1995), mostrando que, mesmo com o recurso computacional, a determinação dos números de quadrados latinos reduzidos se torna processo muito complexo a ponto de não ser possível obter os valores exatos para estas ordens.

Tabela 4 – Tabela com números quadrados latinos reduzidos para $n \leq 11$.

n	N ° de quadrados latinos reduzidos
2	1
3	1
4	2^2
5	$2^3 \cdot 7$
6	$2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$
7	$2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1103$
8	$2^{17} \cdot 3 \cdot 1361291$
9	$2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5231 \cdot 3824477$
10	$2^{28} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 547135293937$
11	$2^{35} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 2801 \cdot 2206449 \cdot 62368028479$

Fonte: (MCKAY; WANLESS, 2005).

Com isso a determinação do número de quadrados latinos fica condicionado ao número de quadrados latinos reduzidos, o que não torna o processo mais fácil, uma vez que o número exato de quadrados reduzidos conhecidos é até o de ordem 11, e para ordens superiores o que conhecemos são apenas estimativas como mostra a Tabela 5.

Tabela 5 – Estimativa dos números de quadrados latinos reduzidos para ordens $n = 12$, $n = 13$, $n = 14$ e $n = 15$.

n	l_n
12	$1,62 \times 10^{44}$
13	$2,51 \times 10^{56}$
14	$2,33 \times 10^{70}$
15	$1,5 \times 10^{86}$

Fonte: Adaptado de (MCKAY; ROGOYSKI, 1995).

O resultado abaixo revela como o número de quadrados latinos de ordem n , L_n está relacionado com o número de quadrados latinos na forma reduzida, l_n .

Teorema 4.3.1. *O número de quadrados latinos L_n para $n \geq 2$ é dado pela expressão:*

$$L_n = n! \cdot (n - 1)! \cdot l_n. \quad (4.1)$$

Demonstração. Dado um quadrado latino de ordem n , podemos trocar as colunas de $n!$ maneiras. Cada permutação dá origem a outro quadrado latino diferentes do inicial. Fixamos a primeira linha (a fim de que não tenhamos quadrados latinos iguais ao primeiro), permutamos as $n - 1$ linhas restantes e temos $(n - 1)!$ quadrados latinos diferentes do inicial.

Uma vez que existem l_n quadrados latinos na forma reduzida, segue o resultado que o número de quadrados latinos totais é dado pela expressão

$$L_n = n!(n - 1)!l_n.$$

□

Deste modo, a partir dos valores conhecidos para l_n , obtemos o número de quadrados latinos L_n , conforme mostra a Tabela 6.

Tabela 6 – Número de quadrados latinos para ordens $n \leq 15$.

n	L_n
1	1
2	2
3	12
4	$2^6 \cdot 3^2$
5	$2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
6	$2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
7	$2^{18} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1103$
8	$2^{28} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 1361291$
9	$2^{35} \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 5231 \cdot 3824477$
10	$2^{43} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 547135293937$
11	$2^{51} \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 2801 \cdot 2206449 \cdot 62368028479$
12	$\approx 3,09 \times 10^{60}$
13	$\approx 7,49 \times 10^{74}$
14	$\approx 1,81 \times 10^{99}$
15	$\approx 1,71 \times 10^{108}$

Fonte: Elaborado pelo autor a partir das Tabelas 4 e 5.

Depois dos resultados apresentados, temos que L_9 , o número de quadrados latinos de ordem 9, é uma estimativa superior para o número de Sudokus, que será o assunto do próximo capítulo.

Estimando o número de quadrados Sudokus

No final de 2004, principalmente na Grã-Bretanha, os quebra-cabeças Sudoku se tornaram muito populares, isso graças a Wayne Gould, que conheceu o jogo no Japão em 1997 e criou um programa capaz de gerar vários quebra-cabeças Sudokus e propôs ao jornal britânico, "The Times" que publicasse o jogo em suas páginas. Devido a esse sucesso e com cada vez mais jornais e revistas publicando quebra-cabeças para atenderem ao público crescente, uma pergunta que surge é: quantos quadrados Sudokus existem, ou seja, de quantas formas podemos preencher uma grade 9×9 de modo que cada linha, coluna e bloco 3×3 contenham os algarismos de 1 a 9 exatamente uma vez (SANTOS; VASCONCELLOS, 2018).

Como mencionamado no capítulo anterior, o Sudoku também é um quadrado latino, que deve satisfazer, também, a condição blocos. Temos a noção de que o número de Sudokus a ser calculado também seria um valor expressivo como os que apresentamos na Tabela 6 no Capítulo 4.

Em 2006, Bertram Felgenhauer e Frazer Jarvis foram os primeiros a determinar o número de Sudokus através da utilização de computadores e algoritmos especificamente preparados para a realização dessa tarefa (FELGENHAUER; JARVIS, 2006). O método utilizado por Felgenhauer e Jarvis consistia em preencher uma grade em branco de todas as formas possíveis e verificar quais funcionavam como Sudoku. Este método se assemelha como o que foi utilizado para a contagem dos quadrados latinos 9×9 , 10×10 e 11×11 , chegando ao número:

$$6.670.903.752.021.072.936.960 \approx 6,671 \cdot 10^{21} \quad (5.1)$$

de grades de Sudokus válidos.

Posteriormente, esse resultado foi verificado por Ed Russel, Guenter Stertenbrink e Kjell

Fredrick Pettersen. Esses dois últimos desenvolveram um método que realiza todos os cálculos necessários em menos de um segundo (FELGENHAUER; JARVIS, 2006)!

Neste capítulo, apresentaremos um processo utilizado para estimar o número de Sudokus, chegando a um resultado próximo ao número determinado por Felgenhauer e Jarvis. Mas, para motivar o procedimento utilizado na contagem, analisaremos um caso mais simples: o dos Shidokus.

5.1 Contando os quadrados Shidokus

A princípio, o processo de contagem de grades Sudoku a princípio pode parecer simples. Olhamos para a primeira linha da grade 9×9 , é claro que existem $9! = 362880$ maneiras de preencher as nove células com os algarismos de 1 a 9. Para a segunda linha, temos menos de $9!$ maneiras de preenchimento, pois as células que compõem essa linha não poderão ter o mesmo algarismo utilizado na célula de cima. Esta é uma restrição imposta pela condição das colunas, o que faz com que o número de algarismos para preenchimento seja menor. Para a terceira linha, as regras são ainda mais restritivas, pois, além de termos que atender a condição de linha e coluna, os blocos também devem conter os algarismos de 1 a 9 somente uma vez, ou seja, à medida que vamos preenchendo a grade, as restrições vão aumentando e, com elas, a dificuldade de realizar a contagem, o que torna a determinação do número de Sudokus extremamente complexa.

No intuito de elucidar melhor o método a ser utilizado, resolveremos um problema menos complexo, o de contar o número de quadrados Shidokus. Os Shidokus são quebra-cabeças como os Sudokus, mas, no lugar de uma grade 9×9 , teremos uma grade 4×4 subdividida em blocos 2×2 , que devem ser preenchidos com os algarismos de 1 a 4, e as regras são as mesmas exigidas para o Sudoku.

Figura 52 – Exemplos de Quadrados Shidokus.

4			
3	1		
		4	1
			2

			4
4		2	
	3		1
1			

	3		
	1		
		2	
		3	

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Inicialmente, partiremos de uma grade em branco e veremos de quantas formas podemos completá-la com os algarismos de 1 a 4 de modo que cada linha, coluna e o bloco 2×2 não tenha algarismos repetidos. Para tanto, começaremos completando o bloco superior esquerdo, o que

pode ser realizado de $4! = 24$ maneiras diferentes. Dentre essas 24 maneiras, escolheremos a que apresenta a forma ordenada dos algarismos conforme mostrado na Figura 53.

Figura 53 – Grade 4×4 com bloco superior esquerdo preenchido.

1	2		
3	4		

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Feito isso, nossa tarefa agora é determinar quantos quadrados Shidokus existem com o bloco superior esquerdo nesta configuração. Ao determinarmos esse número basta, multiplicá-lo por $4!$ e teremos o número de Shidokus. Seguindo com o preenchimento restante da linha superior e da primeira coluna, veremos que há dois modos para completar a linha e duas maneiras para completar a coluna, logo teremos $2 \cdot 2 = 4$ maneiras para realização dessas etapas, sendo uma delas a apresentada na Figura 54.

Figura 54 – Grade 4×4 com bloco, linha superior e coluna da esquerda preenchida.

1	2	3	4
3	4		
2			
4			

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A próxima etapa é contar quantas grades Shidokus cuja primeira linha, coluna e bloco 2×2 possuem essa configuração de preenchimento e, em seguida, multiplicar por $24 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.

Para isso teremos que resolver o Shidoku acima e contar suas possíveis possibilidades. Note que no bloco inferior direito aparecerá uma célula forçada que será preenchida com o algarismo que ocupa a posição da célula da 2ª linha e da 2ª coluna. Ou seja, na configuração apresentada é o algarismo 4 que preencherá a célula forçada na 3ª linha e na 3ª coluna. Com isso veremos de quantas maneiras podemos preencher as demais células em aberto.

Figura 55 – Grade 4×4 parcialmente preenchida.

1	2	3	4
3	4	A	B
2	D	4	C
4			

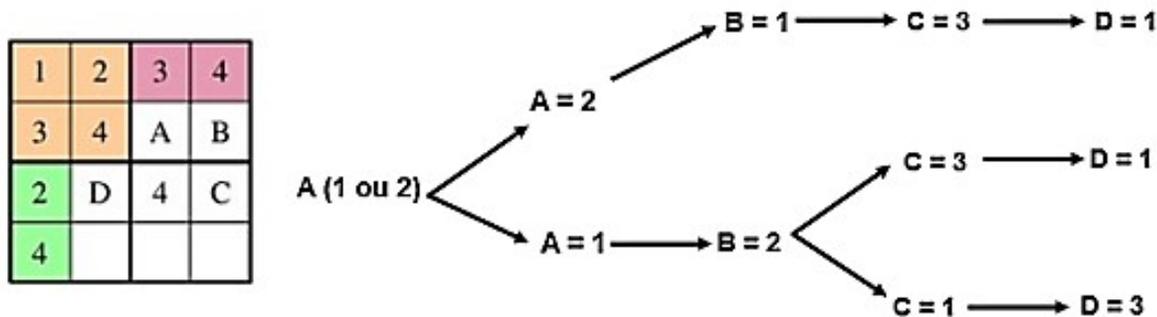
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 55, para as células indicadas por A , B , C , e D teremos os seguintes possíveis candidatos para seu preenchimento:

$$\begin{cases} A \rightarrow 1 \text{ ou } 2; \\ B \rightarrow 1 \text{ ou } 2; \\ C \rightarrow 1 \text{ ou } 3; \\ D \rightarrow 1 \text{ ou } 3. \end{cases}$$

Se em A tivermos o algarismo 1, a célula indicada com B será preenchida com 2, a célula C com 3 e D com 1. Agora, se célula A for preenchida com 2 na célula B teremos um 2 e não conseguiremos definir o algarismo de C , que possui duas possibilidades: uma com o preenchimento de C com 3 e conseqüentemente D com 1 e a outra com o preenchimento de C com 1 e, conseqüentemente, D com 3, como podemos ver na árvore de possibilidades, ilustrada na Figura 56.

Figura 56 – Árvore de possibilidades para o preenchimento do Shidoku.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como mostrado, chegamos ao número de três configurações para a conclusão do Shidoku, as quais estão exibidas na Figura 57.

Figura 57 – Possibilidades de conclusão do Shidoku.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Portanto, o número de quadrados Shidoku possíveis é:

$$24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 288. \quad (5.2)$$

5.2 Contando o número de grades de Sudokus

Agora, utilizaremos um procedimento semelhante ao da seção anterior para determinar o número de Sudokus. Começaremos nossa tarefa nomeando os blocos 3×3 por B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8 e B9, como apresentados na Figura 58.

Figura 58 – Grade 9×9 com os blocos 3×3 nomeados.

	B1		B2		B3			
	B4		B5		B6			
	B7		B8		B9			

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Preenchendo o bloco B1 com os algarismos de 1 a 9, podemos realizar essa etapa de $9! = 362880$ modos diferentes. Sem perda de generalidade, podemos supor que os algarismos são distribuídos de forma ordenada dentro do bloco B1, cuja configuração chamaremos de forma padrão.

A próxima etapa é determinar de quantas formas podemos preencher os blocos B2 e B3 com B1 na forma padrão. Diferentemente dos quadrados Shidoku, o preenchimento da primeira linha do Sudoku apresenta mais possibilidades a serem consideradas, sendo elas:

Tabela 7 – Tabelas de possibilidades para 1ª linha de B2 e B3.

1ª linha de B2	1ª linha de B3	1ª linha de B2	1ª linha de B3
{4, 5, 6}	{7, 8, 9}	{7, 8, 9}	{4, 5, 6}
{4, 5, 7}	{6, 8, 9}	{6, 8, 9}	{4, 5, 7}
{4, 5, 8}	{6, 7, 9}	{6, 7, 9}	{4, 5, 8}
{4, 5, 9}	{6, 7, 8}	{6, 7, 8}	{4, 5, 9}
{4, 6, 7}	{5, 8, 9}	{5, 8, 9}	{4, 6, 7}
{4, 6, 8}	{5, 7, 9}	{5, 7, 9}	{4, 6, 8}
{4, 6, 9}	{5, 7, 8}	{5, 7, 8}	{4, 6, 9}
{5, 6, 7}	{4, 8, 9}	{4, 8, 9}	{5, 6, 7}
{5, 6, 8}	{4, 7, 9}	{4, 7, 9}	{5, 6, 8}
{5, 6, 9}	{4, 7, 8}	{4, 7, 8}	{5, 6, 9}

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da tabela apresentada em (FELGENHAUER; JARVIS, 2006).

Assim, temos vinte arranjos possíveis para o preenchimento da primeira linha do bloco B2 e da primeira linha do bloco B3. A tarefa de preencher a primeira linha do bloco B2 pode ser dividida em dois casos:

- **Caso 1:** A linha superior de B2 é algum arranjo dos algarismos da 2ª ou 3ª linha de B1 e, assim, o caso 1 subdivide-se em mais dois outros casos:
 - 1.a:** A linha superior de B2 é um arranjo da 2ª linha de B1, ou seja, {4, 5, 6} em alguma ordem;
 - 1.b:** A linha superior de B2 é algum arranjo da 3ª linha de B1, ou seja, {7, 8, 9} em alguma ordem.
- **Caso 2:** A linha superior de B2 é um arranjo da linha 2ª e 3ª de B1, como, por exemplo, {4, 5, 7}, {5, 7, 9}, ou {4, 6, 8} em alguma ordem.

Para o caso 1, há dois grupos de algarismos como possibilidades para o preenchimento da 1ª linha dos blocos B2 e B3. Se considerarmos para o preenchimento da linha superior de B2 a permutação dos algarismos {4, 5, 6}, conseqüentemente a linha superior de B3 deverá ser preenchida com um a permutação dos algarismos {7, 8, 9}. Desta forma, podemos definir com quais elementos serão utilizados para o preenchimento das 2ª e 3ª linhas de B2 e B3, conforme mostrados na Figura 59.

Deste modo, o preenchimento das seis linhas restantes dos blocos B2 e B3, no caso 1, consiste em seis etapas nas quais para cada uma temos $3! = 6$ modos diferentes de preenchimento.

Figura 59 – Possibilidades de preenchimento das 3 linhas superiores da grade 9×9 .

1	2	3	{4, 5, 6}	{7, 8, 9}
4	5	6	{7, 8, 9}	{1, 2, 3}
7	8	9	{1, 2, 3}	{4, 5, 6}

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo teremos $(3!)^6$ modos de completar os blocos B2 e B3. O mesmo vale se considerarmos o grupo de algarismo $\{7, 8, 9\}$ para o preenchimento da linha superior do bloco B2, ou seja, também teremos $(3!)^6$ modos de completar as etapas. Portanto, no caso 1, o número de maneiras de completar os blocos B2 e B3 é:

$$2 \cdot (3!)^6 = 93.312. \quad (5.3)$$

Agora, para contarmos as possibilidades de preenchimento dos blocos B2 e B3 no caso 2, devemos considerar as outras 18 possibilidades restantes de arranjos mostrados na Tabela 7. Note que esses arranjos são constituídos por uma miscigenação dos algarismos da 2ª e 3ª linhas de B1. Considerando o grupo de algarismo $\{4, 5, 7\}$ em alguma ordem para o preenchimento da linha superior do bloco B2, temos, por consequência, que a linha superior do bloco B3 será formada pelo grupo de algarismos $\{6, 8, 9\}$ em alguma ordem. Assim, as linhas superiores poderão ser concluídas conforme mostrado na Figura 60.

Figura 60 – Possibilidades de preenchimento de B2 e B3.

1	2	3	{4, 5, 7}	{6, 8, 9}
4	5	6	{8, 9, a}	{7, b, c}
7	8	9	{6, b, c}	{4, 5, a}

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

As letras a , b e c representam os algarismos 1, 2 e 3 em alguma ordem. Note que temos 3 escolhas para a posição a e, uma vez determinado o algarismo que fará o papel de a , os algarismos para b e c estarão estabelecidos. Com isso, teremos que o número de maneiras de completar os blocos B2 e B3, para o caso 2 com a primeira de B1, formada a partir do conjunto $\{4, 5, 7\}$, e a primeira de B3, formada pelo elementos de $\{6, 8, 9\}$ é $3 \cdot (3!)^6$ configurações possíveis, podendo b e c permutarem entre si.

Como temos 18 arranjos possíveis para completar as primeiras linhas de B2 e B3, no caso 2, o número total de preenchimentos nesse caso é:

$$18 \cdot 3 \cdot (3!)^6 = 2.519.424. \quad (5.4)$$

Somando os números do caso 1 com os números do caso 2, chegamos a:

$$2 \cdot (3!)^6 + 18 \cdot 3 \cdot (3!)^6 = 56 \cdot (3!)^6 = 2.612.723 \quad (5.5)$$

maneiras de preencher as três primeiras linhas da grade 9×9 com B1 na forma padrão.

Como temos $9!$ modos de preencher B1, totalizamos:

$$9! \cdot 56 \cdot (3!)^6 = 2^{16} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2 = 948.109.639.680 \quad (5.6)$$

modos de completar as três primeiras linhas.

Porém ainda restam seis linhas para serem preenchidas. Entretanto, essa tarefa se torna cada vez mais complexa, pois temos mais condições a serem consideradas, restringindo ainda mais a quantidade de algarismos de entrada, gerando, assim, mais casos a serem analisados, o que inviabiliza a realização da contagem dos Sudokus pelo mesmo processo de contagem direta utilizado para as três primeiras linhas.

A saída foi recorrer a um recurso computacional, em que Felgenhauer e Jarvis elaboraram algoritmos que geram possíveis grades válidas de Sudoku, enquanto também contavam essas grades. Entretanto, mesmo com o recurso computacional para realização da tarefa, foi necessário realizar a redução do número de possibilidades de preenchimento dos blocos B2 e B3, pois percorrer todas as 2.612.736 possibilidades exigiria um custo computacional muito alto.

No entanto, existem operações que podemos aplicar às três primeiras linhas da grade que não alteram o número de soluções. Por exemplo, se trocarmos B2 e B3, então cada forma de completar B2-B3 para uma grade completa nos dá uma maneira única de completar B3-B2 para uma grade completa (basta trocar B5 e B6, e B8 e B9). De fato, podemos permutar B1, B2 e B3 da maneira que escolhermos. Embora isso altere B1, podemos renomeá-lo para colocar B1 de volta na forma padrão.

Além disso, podemos permutar as colunas dentro de qualquer bloco da maneira que desejarmos, realizando a mesma operação para as colunas em uma grade completa. Podemos, inclusive, permutar as três linhas de B1, B2 e B3, e, novamente, redefinir B1 para colocá-lo na forma padrão de uma grade completa. Operações deste tipo possibilitaram a redução do número de possibilidades de 2.612.736 para 44, tornando o tempo necessário para cálculo computacional viável, podendo, desta forma, determinar o número de grades que são Sudokus.

5.3 Estimando o número de quadrados Sudokus

Determinar a quantidade de Sudokus sem a utilização de computadores é uma tarefa impraticável. Uma alternativa é estimar o número de sudokus, utilizando um argumento heurístico¹. A estratégia que apresentaremos é creditada a Kevin Kilfoil e foi divulgada por Felgenhauer e Jarvis (FELGENHAUER; JARVIS, 2006).

Já determinamos o número de possibilidades para o preenchimento das três primeiras linhas de uma grade 9×9 . Agora, observe que o número de possíveis preenchimentos para as linhas 4 – 6 e para 7 – 9 é o mesmo que encontramos para as linhas 1 – 3. Ao unirmos todas as 9 linhas, teremos contado a quantidade de quadrados 9×9 que satisfaz as condições de linha e bloco. É fácil ver que a condição de colunas não é, necessariamente, respeitada, pois podemos tomar as mesmas 3 linhas 3 vezes pelo processo descrito acima. Consequentemente, o número de possibilidades para o preenchimento da grade 9×9 de modo que cada linha e cada bloco 3×3 contenham os algarismos de 1 a 9 apenas uma vez é:

$$LB = (2^{16} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2)^3.$$

Observe que se ao invés de preenchermos as três primeiras linhas, tivéssemos preenchido as três primeiras colunas, aplicando o mesmo argumento que utilizamos no preenchimento das três primeiras linhas, concluiríamos que o número grades que atendem as condições de colunas e blocos é o mesmo que o obtido para o número de grades que atendem as condições de linhas e blocos, que, a saber, é

$$CB = (2^{16} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2)^3 = (948.109.639.680)^3.$$

Agora, como o número de maneiras de preencher um bloco 3×3 é $9!$ e como são nove blocos no quadrado Sudoku, temos que o número N de maneiras de preencher todos os blocos de uma grade 9×9 que atendam a condição de blocos é

$$N = (9!)^9 = 2^{63} \cdot 3^{36} \cdot 5^9 \cdot 7^9.$$

Com os valores determinados, a proporção k entre o número de grades que satisfaz, simultaneamente, as condições de linha e de blocos, e o número de grades que satisfaz a condição de blocos é

$$k = \frac{LB}{N} = \frac{2^{48} \cdot 3^{30} \cdot 5^3 \cdot 7^6}{2^{63} \cdot 3^{36} \cdot 5^9 \cdot 7^9}. \quad (5.7)$$

Ao verificarmos a ordem de grandeza de k temos:

¹ Entende-se por argumento heurístico, aquele que chega próximo da verdade ou resposta certa, porém não está totalmente correto

$$k = \frac{LB}{N} = \frac{2^{48} \cdot 3^{30} \cdot 5^3 \cdot 7^6}{2^{63} \cdot 3^{36} \cdot 5^9 \cdot 7^9} = \frac{1}{128.024.064.000.000}. \quad (5.8)$$

Portanto, vemos que k é um valor relativamente pequeno, ou seja, a frequência com que encontramos um quadrado que atenda, simultaneamente, as condições de linha e de bloco dentro do conjunto de todas as grades 9×9 que satisfaçam apenas a condição de blocos é muito pequena.

Por um argumento análogo, observamos que k também será a proporção de que uma grade atenda a condição de blocos também atenda a condição de colunas.

Para que a grade 9×9 seja considerada um Sudoku devemos ter as condições de linha, coluna e de blocos satisfeitas simultaneamente. Observe, inicialmente, que a probabilidade de encontrar uma grade Sudoku é expressa por:

$$P(S) = \frac{N_S}{N} = \frac{N_S}{2^{63} \cdot 3^{36} \cdot 5^9 \cdot 7^9} \quad (5.9)$$

, em que N_S representa o número de Sudokus dentro do universo amostral N de todas as grades 9×9 que atendem a condição de blocos. Se assumirmos que os eventos em que os blocos satisfazem as condições de linha e de coluna são independentes, fato este que sabemos não ser verdadeiro, temos que a probabilidade $P(S)$ também pode ser expressa como:

$$P(S) = k \cdot k = k^2. \quad (5.10)$$

Pelas equações 5.9 e 5.10, temos

$$k^2 = \frac{N_S}{2^{63} \cdot 3^{36} \cdot 5^9 \cdot 7^9} \Rightarrow N_S = k^2 \cdot 2^{63} \cdot 3^{36} \cdot 5^9 \cdot 7^9. \quad (5.11)$$

Substituindo o valor de k em (5.11):

$$N_S = \left(\frac{1}{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^3} \right)^2 \cdot 2^{63} \cdot 3^{36} \cdot 5^9 \cdot 7^9 = \frac{2^{33} \cdot 3^{24} \cdot 7^3}{5^3} \approx 6,656 \cdot 10^{21}. \quad (5.12)$$

Claro que esta não é a resposta exata (o número encontrado não é sequer um número inteiro), e a condição de linha e coluna também não são independentes como considerado acima.

O fato é que esse resultado se aproxima do valor determinado por Felgenhauer e Jarvis, tendo um erro de 0,2% do valor real, o que é considerado uma boa estimativa para o número de quadrados Sudokus.

Tal evidência tranquilizou os jogadores, os jornais e as revistas que publicavam o quebra-cabeça em suas variadas versões, uma vez que, se jornal ou uma revista tivesse em seu banco de

dados todos os Sudokus existentes e publicassem, diariamente, 100 Sudokus diariamente em cada edição, levaria aproximadamente 182.356.164.383.561.643 anos para começar a repetir jogos já publicados!

Sudoku na sala de aula

Neste capítulo, trazemos uma conexão do estudo do Sudoku com o ensino de matemática, visando enriquecer processo de ensino-aprendizagem dos estudantes. Para tanto, discorreremos sobre uma atividade desenvolvida no Encontro Regional 2023 do PIC-OBMEP, em que, foi ministrado o minicurso: "A matemática do Sudoku", com duração de 2 horas, direcionado a um grupo de estudantes do 2º e 3º ano do Ensino Médio, participantes do programa. Por fim, apresentamos uma proposta de atividade planejada para ser implementada em ambiente de sala de aula.

O objetivo dessa apresentação foi apresentar as técnicas de resolução do Sudoku e mostrar aos alunos que, com o uso de um argumento heurístico e de conceitos básicos da Análise Combinatória e probabilidade, pode-se chegar a uma estimativa para o número de Sudokus bem próxima da quantidade real, cuja determinação é um problema complexo. A apresentação dividiu-se em uma parte teórica e uma prática. Os alunos foram convidados a resolver Sudokus, seguindo as orientações fornecidas referentes às estratégias de resolução de Sudokus.

Iniciou-se a apresentação perguntando aos alunos se conheciam ou ouviram falar do Sudoku. Constatou-se que vários alunos conheciam e resolviam o quebra-cabeças em suas horas vagas por meio de aplicativos de celulares. Dando sequência, apresentou-se o jogo e as suas regras, e, em seguida, foram abordadas as principais técnicas utilizadas na resolução do Sudoku: Célula Forçada, Par de Gêmeos, X-Wings e Fio de Ariadne. Para utilização de cada técnica, foram apresentadas as suas respectivas condições para utilização de cada uma através de exemplos projetados. Ao final de cada técnica, foram realizadas atividades que possibilitassem aos alunos preencher as células de alguns Sudokus como as apresentadas abaixo:

Atividade 1: Aplicando Célula Forçada.

Nesta atividade, os alunos deveriam preencher as células indicadas com as letras do nosso alfabeto, utilizando a técnica de Célula Forçada. Durante a realização da atividade, observou-se que os alunos não apresentaram dificuldades na aplicação da técnica, e que completaram a atividade a

Figura 61 – Configuração do Sudoku 1 para primeira parte da Atividade 1.

5	4	D	2	C	3	E	8	9
	6				4	G		3
		3		1		7		5
J	7	9	I	H	F			6
	5	8		6			3	
4	3	6	1	8	5	2	9	7
3				5	1	9		
6						3	1	
	1	4		3		5		

5	4		2		3		8	9
	6				4			3
		3		1		7		5
	7	9						6
	5	8		6			3	
4	3	6	1	8	5	2	9	7
3				5	1	9		
6						3	1	
	1	4		3		5		

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 62 – Configuração do Sudoku 1 para segunda parte da Atividade 1.

5	4	1	2	7	3	6	8	9
L	6	B	K	I	4	1	E	3
M	N	3		1		7	F	5
1	7	9	3	4	2	G	H	6
A	5	8		6		T	3	U
4	3	6	1	8	5	2	9	7
3	P	C		5	1	9	S	
6	Q	D		J		3	1	
O	1	4		3		5	R	

5	4	1	2	7	3	6	8	9
	6				4	1		3
		3		1		7		5
1	7	9	3	4	2			6
	5	8		6			3	
4	3	6	1	8	5	2	9	7
3				5	1	9		
6						3	1	
	1	4		3		5		

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

tempo (cerca de 5 minutos).

Atividade 2: Aplicando o Fio de Ariadne.

Aqui, os alunos deveriam aplicar a técnica Fio de Ariadne, partindo da célula localizada na 5ª linha e 2ª coluna, esta última preenchida com o algarismo 3 destacado. Conforme mostra a Figura 63 as células que deveriam ser completadas já apresentavam os possíveis algarismos a serem utilizados no preenchimento. Alguns alunos relataram que, como já estava preenchidos os nomes dos possíveis candidatos, a aplicação da técnica ficou mais fácil. Comentaram, também, que muitos aplicativos possibilitavam a utilização, ou seja, de indicar os possíveis candidatos de uma célula.

Após a apresentação das técnicas, foi realizada a Atividade 3, no qual os alunos deveriam resolver os Sudokus em menos tempo, tendo como uma motivação uma premiação para os primeiros colocados. Infelizmente não conseguimos realizar a tarefa com o Sudoku 3, devido ao tempo disponibilizado para a apresentação, que não foi suficiente.

Figura 63 – Configuração do Sudoku 2 para realização da Atividade 2.

2	4	2	3	8	6	2	4	5	1	4	6			
6	7	7	9		9	1	2	9	3	4	6			
5	6	2	5	8	7	1	6	4	2	9	3	4	6	
1	4	9	6	9	3	4	6	5	7	2	8			
5	6	3	5	5	6	2	1	3	1	3	8	4	9	
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	
8	3	1	9	3	4	6	2	5	7					
2	4	2	7	9	7	9	5	7	8	4	8	1	6	3
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
9	6	4	1	2	7	3	8	5						
3	8	2	6	5	9	4	7	1						
5	7	1	5	7	4	3	8	3	8	6	9	2		

		3	8			5	1	
		8	7			9	3	
1			3		5	7	2	8
			2			8	4	9
8	3	1	9		6	2	5	7
			5			1	6	3
9	6	4	1	2	7	3	8	5
3	8	2	6	5	9	4	7	1
	1	4				6	9	2

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 64 – Sudoku 1 à esquerda (nível fácil) e Sudoku 2 à direita (nível médio) para realização da Atividade 3.

			1	6	3				
5		6	1			8	9	3	
	2		8		9				
		9		1		3	5		
8			9		2	7	6		
2		5	4					1	
6			3	4					
1	4				2	7	3		
	5			8	1			9	

9					4			
			8			4	6	
				3			7	
	8		7	6				1
		6	4		8	7		
5				1	9		3	
	9			7				
	3	5			1			
			5					6

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Atividade 3: Resolvendo Sudokus.

Figura 65 – Sudoku 3 (nível difícil para realização da Atividade 3).

		9			6	5		
1				5				8
8			4					7
2						3		
	8						1	
		7						9
6					1			2
7				3				1
		3	5			4		

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Após realização dessas atividades, passamos para a apresentação da parte teórica da apresentação, cujo objetivo era apresentar uma estimativa do número de Sudokus.

Introduzimos a parte teórica elucidando o que é um argumento heurístico. Na sequência passamos à construção, junto com os alunos, para estimativa do número do Sudoku. Tal qual foi apresentado neste trabalho, a atividade proposta iniciou-se com a realização de contagem do número de Shidokus que, em cada etapa, os conceitos necessários iam sendo elucidados aos alunos. Ao final deste cálculo, um aluno mencionou os quadrados Shidokus que apareceram em uma questão das Olimpíadas de Matemática.

Seguindo, apresentamos o processo utilizado para estimar o Sudoku. Esta etapa foi realizada de forma mais sucinta e objetiva, com foco no argumento heurístico utilizado, frisando que é possível chegar a resultados bem próximos do valor real, e que, com a base conceitual adquirida por boa parte da turma, seria possível chegar a uma boa estimativa para o número de Sudokus.

Após a apresentação, alguns alunos comentaram que conheciam algumas das técnicas apresentadas, mas que outras como o X-wings, ainda não conheciam.

6.1 Proposta de Atividades

As contas apresentadas para estimar o número de Sudoku fogem do escopo do conteúdo ensinado no Ensino fundamental e médio. No entanto, entendemos que o trabalho com os Shidokus podem ser uma ferramenta no auxílio da aprendizagem dos conceitos da Análise Combinatória relacionados com o Princípio Multiplicativo e das permutações estudados no 2º e 3º anos do Ensino médio. Apresentaremos, aqui, algumas propostas de atividades que podem ser aplicadas em turmas de 9º ano do ensino fundamental e em turmas de Ensino médio.

Inicialmente, deve-se apresentar o Sudoku por meio de uma exposição de suas regras. Caso julgue relevante, o professor pode fazer uma breve apresentação histórica sobre o Sudoku. Após esta introdução, passaremos para a primeira atividade. Ressaltamos que os Sudokus e Shidokus propostos neste capítulo foram gerados pelo aplicativo gratuito Sudoku-Quebra-cabeça-Clássico, nome disponível na loja de aplicativos do Google (Play Store) (Shared Fun (ed.), 2024).

6.1.1 Atividade 1: Entendendo o Jogo

Público-Alvo: Alunos do 9º ano do Fundamental e Ensino médio. **Tempo Previsto:** 140 minutos (2 aulas/ horas).

Objetivo: Desenvolver o raciocínio lógico através da resolução de problemas relacionados ao preenchimento de células de uma grade Sudoku.

Material:

- Quadro;
- folha com os Sudokus impressos para realização das atividades;
- projetor de multimídia.

Desenvolvimento: Após a apresentação dos critérios que devem ser utilizados para preenchimento das células do Sudoku. O professor(a) deve entregar para aos alunos a folha com os Sudokus contendo algumas células indicadas com letras do alfabeto e perguntar-lhes quais algarismos podem ser utilizados para o preenchimento das células destacadas.

Exemplos de Sudokus para aplicação da Atividade 1.

Figura 66 – Exemplos de Sudokus para Atividade 1.

2	3	7		5	9		6	
6				7	2		5	
9	1	A	3	B	6	8	7	2
5		2	7	8	C	1	4	
8	F	1	2	9	4	G	3	7
3	7	4	5	6	D	2	E	8
	8		4		5	9	2	3
4				3	8		1	5
H		3	9	2	7	6		4

4	A	7		1	F		9	3
8	5	2	9			H		6
9	B	C	6	7	2	D	4	5
E		4				9	2	
1			8	2	9	G		
2		9				3		
7				5		6	3	2
	4		2					
	2			9	6	1		4

Fonte: Elaborado pelo autora partir de (Shared Fun (ed.), 2024).

Avaliação: O(a) professor(a) deverá avaliar se a turma entendeu os critérios para o preenchimento das células de acordo com as regras do jogo e, se os alunos conseguiram observar a região de atuação de cada célula e determinar os possíveis candidatos para o preenchimento das células.

6.1.2 Atividade 2: Resolvendo Sudokus

Público-Alvo: Alunos do 9º ano do Fundamental e Ensino médio.

Tempo Previsto: 50 minutos (1 aulas/ horas)

Objetivo: Desenvolver o raciocínio lógico através da resolução de quebra-cabeça Sudoku.

Material:

- Folha impressa com os Sudokus para realização das atividades.

Figura 67 – Exemplos de Sudokus para Atividade 2 (Nível Fácil).

	1			8	7	3	9	6
6	9	3	1	5	4	7	2	
	2	8	6		3		5	1
		9	3	1	5	6		7
	4	7	8		6	9	3	5
3	6	5	7	4		1	8	2
	5		9		8		7	
9		2	5			8	6	4
		6		3	2		1	9

	2	4	5	1	6			
7	5	8	4		2	6		
6	9	1	7		3		4	5
2	4		1	3		9		8
8		9	2	6		7	5	1
	1	6	8	7		3		4
9	6	5		4	7			2
4	8	3	6	2		5	9	7
	7		9	5			3	6

3	2		1			6	7	9
	5	8	6		4	1		
6	9	1	7		3			8
2	1	3		4	9	5	6	7
4	8		2				3	
	6		3	1	7	8	4	2
8		2	4	6	1	7		
9	7	6		3	8	2	1	
		5	9	7	2	3	8	6

Fonte: Elaborado pelo autora partir de (Shared Fun (ed.), 2024).

Desenvolvimento: Após a determinação dos algarismos ou possíveis algarismos candidatos ao preenchimento das células na Atividade 1, a atividade poderá ser desenvolvida de forma individual ou em dupla, e os alunos tentarão resolver por completo os Sudokus. Inicialmente, trabalha-se com quebra-cabeças considerados mais fáceis, podendo-se, inclusive, utilizar os Sudokus da Atividade 1. Posteriormente, aumenta-se o nível de dificuldade, como os sugeridos nas Figuras 67, 68 e 69.

Avaliação: O professor(a) deverá avaliar as estratégias utilizadas dos alunos, identificando as dificuldades. Deve-se observar a interação da dupla e avaliar o tempo de resposta da turma na realização da atividade.

Observação: Caso os alunos não consigam resolver os Sudokus propostos, o(a) professor(a) poderá trabalhar com estes as técnicas de Células Forçadas, Par de Gêmeos, X-wings e o Fio de Ariadne, apresentadas no Capítulo 2.

A atividade que se segue foi baseada nos textos de (SANTOS; VASCONCELLOS, 2018) (SILVA, 2019), que propõem, para além do desenvolvimento do raciocínio lógico, uma aplicação dos conceitos previamente trabalhados da Análise Combinatória.

Figura 68 – Exemplos de Sudokus para Atividade 2 (Nível Médio).

				6	2		4
1		7	2		4	5	8
2	3	4	8		5		7
3		8					1
5	9	1		2			3
7	2				9		4
		3		5			
				8	3		5
		9	7	4			2

	3		4	8				9
2			3			6	8	1
7				6	1			4
			8	2			9	3
1	5		6			4		
3	9	2		7	4		6	8
		7	2		8			6
5				4				
8	6		7	2	3			

8	3	7	1		6		9
				3			
2		1	4				
	7	3		9			6
5				6	8		9
9	8		3		4		1
3	2		6			1	
6				7	2	5	4
7		4	8		3		2

Fonte: Elaborado pelo autora partir de (Shared Fun (ed.), 2024).

6.1.3 Atividade 3: Determinando o número de Shidokus

Público-Alvo: Alunos dos 2º e 3º anos do Ensino médio.

Tempo Previsto: 140 minutos (2 aulas/ horas).

Objetivo: Desenvolver o raciocínio lógico através da resolução de quebra-cabeça Shidoku, e aplicar e reforçar os conceitos da Análise Combinatória para determinar o número de grades Shidokus.

Material:

- Quadro;
- folha com os Shidokus impressos para realização das atividades;
- projetor de multimídia.

Desenvolvimento: Com as atividades 1 e 2 espera-se que os alunos já possuam habilidades para a resolução dos quebra-cabeças Sudokus. Agora, nesta atividade, trabalharemos com conceitos

Figura 69 – Exemplos de Sudokus para Atividade 2 (Nível Difícil).

	7		9			4	6	8
			7	1		2		
					8		9	1
8								7
2	5	7		9		1		
3	9		4	7		5	8	6
					7	6		9
9			1	8			7	
7		4		6	9			

			6	4			2	3
4	6				3	5		
9	2				1	4		7
6	5		3		4		8	2
2		9						
	3					6		5
8		5	1	3			4	
	4	2	8	5	9		7	
							5	

			5		9		6		
9		6					2		4
	2								5
			5				9	2	3
		4	9						
		9	2	6			4		7
6	7	2		1			4		8
1	9			8			7		
	5	8	7	2	6	3	1		

Fonte: Elaborado pelo autora partir de (Shared Fun (ed.), 2024).

matemáticos para a determinação do número de Shidokus. Nesse sentido, divide-se esta atividade se dividirá em 2 partes.

1ª Parte: O(a) professor(a) apresentará aos alunos uma versão menor do Sudoku denominada de Shidoku. Inicialmente, os alunos deverão resolver algumas grades de Shidokus com variados graus de dificuldades. Seguem algumas sugestões de Shidokus que podem ser utilizados na atividade.

Figura 70 – Exemplo de Shidokus para Atividade 3 (1ª parte).

	4	1	2
1		3	
			3
4	3		1

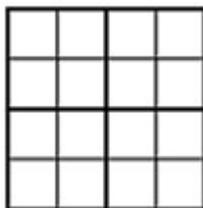
3	4	1	
	2		
		2	
	1	4	3

			3
3	2	4	
	4		2
2			

	1	3	
2			
			3
	2	1	

Fonte: Elaborado pelo autor baseado em (SILVA, 2019).

Após o preenchimento das grades, o professor deverá discutir com os alunos as suas impressões sobre o Shidoku. Em seguida, ele deverá apresentar a questão: Quantas formas podem ser utilizadas para preencher uma grade 4×4 de tal forma que ela seja considerada um Shidoku? Ou: Quantas grades Sudokus existem?

Figura 71 – Grade 4×4 em branco.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2ª Parte: O professor concederá um tempo para que os alunos reflitam sobre o problema e, em seguida, debaterá com eles suas possíveis respostas, avaliando as direções que estas poderiam seguir. Posteriormente, serão realizados os cálculos de maneira gradual, utilizando-se os conceitos de Análise Combinatória já estudados, previamente estudadas pela turma, conforme apresentado na Seção 5.1 deste trabalho.

Ressaltamos que, caso o deseje e, de acordo com o desenvolvimento da turma, o professor poderá introduzir a contagem do número de maneiras de preencher as três primeiras linhas do Sudoku como apresentado na Seção 5.2. Todavia, como o cálculo extrapola o escopo do estudo do Ensino médio, aconselhamos apresentá-lo a título de curiosidade para os alunos ou para grupos específicos, como, por exemplo, grupos de estudantes em preparação para olimpíadas em matemática.

Considerações finais

Ao final deste trabalho, podemos evidenciar que o Sudoku é um jogo que estimula a mente das pessoas e que, apesar de não demandar cálculos matemáticos para a sua execução, motiva diversas questões relevantes do ponto de vista matemático, como a determinação da quantidade de quadrados latinos e o número total de Sudokus existentes.

No entanto, a Matemática nos oferece outras saídas para seus diversos problemas. Cabe a nós enxergarmos, pois mesmo que muitas vezes não cheguemos à resposta correta, chegamos bem perto dela. Em certas situações, para se resolver, um problema complexo é necessário resolver, antes, problemas menores e mais simples. Deste modo, é possível obter ferramentas e experiência para enfrentar o problema que se pretende solucionar. Vale ressaltar que nem sempre o que mais importa é o domínio de uma teoria robusta e elaborada para se obter resultados satisfatórios.

Foi isso que aconteceu ao articularmos a teoria da Análise Combinatória e Probabilidade unidos a um argumento heurístico, e, relaxando a condição de que as linhas e colunas de Sudoku são dependentes, apresentamos a estimativa do número de Sudokus próximos do real ao que foi determinado por Felgenhauer e Jarvis em 2006.

No estudo dos quadrados latinos, foi possível ver que, mesmo conhecendo uma fórmula fechada e com o auxílio de meios computacionais, a determinação do número exato de quadrados latinos não é uma tarefa simples, sendo que, para ordens maiores, temos apenas estimativas desse número. Isso evidencia que, para muitos problemas, mesmo com recursos tecnológicos avançados, a busca por uma solução exata é tarefa impraticável.

A apresentação realizada para os alunos do Programa de Iniciação Científica da OBMEP (PIC-OBMEP) mostrou que o Sudoku é um jogo cativante que atrai a atenção dos alunos. Além disso, demonstrou várias possibilidades de atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula no intuito de aprimorar os conceitos da Análise Combinatória.

Como sugestão de continuidade desse trabalho, deixamos em aberto sobre Sudokus a determinação do número mínimo de pistas necessário para que o Sudoku apresente solução única, a aplicação das atividades propostas em sala de aula e a análise de seus efeitos no aprendizado da Análise Combinatória.

Referências

- BEZERRA, M. d. N. C. et al. Análise combinatória e probabilidade. Editora Universitária da Assessoria de Educação a Distância, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 27, 34, 43, 47, 52 e 53.
- CARDOSO, D. M.; SZYMANSKI, J.; ROSTAMI, M. Matemática discreta. *Escolar Editora*, v. 41, 2009. Citado na página 61.
- FELGENHAUER, B.; JARVIS, F. Mathematics of sudoku i. *Mathematical Spectrum*, Citeaser, v. 39, n. 1, p. 15–22, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 16, 79, 80, 84 e 87.
- JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro: Impa, 1981. v. 12. Citado na página 53.
- MCKAY, B. D.; ROGOYSKI, E. Latin squares of order 10. *the electronic journal of combinatorics*, v. 2, n. 1, p. N3, 1995. Citado na página 76.
- MCKAY, B. D.; WANLESS, I. M. On the number of latin squares. *Annals of combinatorics*, Springer, v. 9, n. 3, p. 335–344, 2005. Citado na página 76.
- MORGADO, A. C. et al. Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios. *Coleção do Professor de Matemática, ed*, v. 9, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 27, 43, 47 e 52.
- NEGRINI, M. V. *Quadrados latinos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018. Citado na página 61.
- ROSENHOUSE, J.; TAALMAN, L. *Taking sudoku seriously: The math behind the world's most popular pencil puzzle*. [S.l.]: OUP USA, 2011. Citado na página 61.
- SANTOS, R. P. dos; VASCONCELLOS, L. A. da S. A matemática por trás do sudoku. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 16, 79 e 96.
- SEPULVEDA, L. D. et al. O conceito de ação à distância na obra mecânica celeste de pierre simon laplace. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2018. Citado na página 49.
- Shared Fun (ed.). *Sudoku: Quebra-Cabeça Clássico*. 2024. Acesso em: 19 abr. 2024. Disponível em: <<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.sharedfun.sudoku>>. Citado 5 vezes nas páginas 94, 95, 96, 97 e 98.

SILVA, G. B. d. Aplicações da matemática no sudoku. UFAL Campus Arapiraca, 2023. Citado na página 15.

SILVA, R. Z. S. Um estudo do sudoku 4x4 e uma proposta de aplicação em sala de aula. UFSCar, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 15, 61, 96 e 98.

TEIXEIRA, R. E. C. O sudoku. *Tribuna das Ilhas*, Informação, Animação e Intercâmbio Cultural, p. 10, 2014. Citado na página 15.