DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

PROFMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Renan de Oliveira Pereira

Uma proposta para a aplicação do Método de Newton para o ensino médio: uma experiência com professores de matemática

Ouro Preto - MG, Brasil

Janeiro de 2024

Renan de Oliveira Pereira

Uma proposta para a aplicação do Método de Newton para o ensino médio: uma experiência com professores de matemática

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em matemática, através do PROFMAT - mestrado profissional em Matemática Rede Nacional, área de concentração: Matemática.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional(PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins

Coorientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira

Ouro Preto - MG, Brasil

Janeiro de 2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

P436u Pereira, Renan De Oliveira.
Uma proposta para a aplicação do Método de Newton para o ensino médio [manuscrito]: uma experiência com professores de matemática. / Renan De Oliveira Pereira. - 2024.
103 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.
Coorientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. Método de Newton. 2. GeoGebra. 3. Raízes. 4. Derivada. I. Martins, Eder Marinho. II. Ferreira, Wenderson Marques. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 510:374:004

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
PROGRAMA DE POS-GRADUACAO EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL

FOLHA DE APROVAÇÃO

Renan de Oliveira Pereira

Uma Proposta para a Aplicação do Método de Newton para o Ensino Médio: Uma Experiência com Professores de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em 17 de julho de 2024

Membros da banca

Prof. Dr. Eder Marinho Martins - Presidente Orientador Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Ronei Sandro Vieira - Instituto Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Leandro Correa Paes Leme - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira - Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Eder Marinho Martins, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 17/07/2024

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1629 - www.ufop.br

"Existem três coisas que não podem ser interrompidas: o sonho dos homens, o fluxo do tempo e a vontade herdada, enquanto as pessoas continuarem buscando o sentido da liberdade, tudo isso jamais deixará de existir."

(Gol D. Roger)

Agradecimentos

Agradeço a minha família, principalmente aos meus pais, Paula e Paulo, e aos meus avós (*in memorian*), João Marques, Nair, Conceição e Elói, pelo amor incondicional, pela paciência, por serem meu porto seguro, pelo apoio e incentivo aos meus estudos e, sobretudo, por acreditarem em mim quando, muitas vezes, eu mesmo não acreditei.

Ao meu grande amigo de longa data Gian e também sua família, pela amizade, respeito e preocupação, um irmão que está presente na minha vida desde os meus 11 anos idade.

Aos meus orientadores, Eder e Wenderson, pela dedicação, conhecimentos compartilhados e pela paciência que tiveram comigo ao longo dessa caminhada.

Aos colegas de curso, em especial à Érica e ao Elvis, sem a companhia e o apoio deles, todo o caminho seria ainda mais árduo.

Aos meus irmãos de república, Vitor, Gabriel, Lucas, Alan, Rafael, Weyder, Kesse, Wander, Gustavo, Luís Fernando, Kaiky, Marcos, Douglas, Natã, Alexandre e nosso companheiro canino Bago, por estarem presentes no meu dia a dia, me incentivando e colecionando memórias, por transformarem uma simples casa em um local que virou meu segundo lar desde a minha chegada, por me permitirem construir uma segunda família quando pensei que me encontraria sozinho em uma cidade distante dos meus familiares. Lembrarei para sempre de todos vocês.

Aos meus queridos amigos Eduardo, Emanuela, Fernanda, Thales, Lara, João, Clara, Paulo e Rodrigo, pela grande amizade, conversas, conselhos e momentos únicos durante essa jornada.

Agradeço a Universidade Federal de Ouro Preto pela oportunidade de concluir mais esta etapa da minha formação.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que passaram pela minha vida nesse período, que de uma forma ou de outra, acabaram contribuindo para que eu esteja onde estou hoje.

Resumo

O presente trabalho apresenta uma proposta para o cálculo de raízes de equações não lineares, que normalmente não são vistas no ensino médio, utilizando o Método de Newton em conjunto com o *software* GeoGebra. O objetivo deste trabalho é criar uma atividade interativa abordando o conceito de derivada de uma maneira alternativa a usual, que se dá pelo uso de limites. Foram desenvolvidos dois roteiros para utilização do GeoGebra e a atividade foi aplicada com professores mestrandos em matemática, em dois dias distintos. Os dados foram obtidos através da percepção e interação dos participantes e com o preenchimento de dois formulários aplicados ao fim de cada encontro.

Palavras chaves: Método de Newton; GeoGebra; Raízes; Derivada.

Abstract

The work presents a proposal for calculating the roots of non-linear equations, which are not normally seen in high school, using the Newton Method in conjunction with the GeoGebra software. The objective of this work is to create an interactive activity approaching the concept of derivative in an alternative way to the usual one, which is done through the use of limits. Two scripts were developed for using GeoGebra and the activity was applied with teachers studying for a master's degree in mathematics, on two different days. The data were obtained through the perception and interaction of the participants and by filling out two forms applied at the end of each meeting.

keywords: Keywords: Newton's method; GeoGebra; Roots; Derivative.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Obter raízes de equações é um tema frequente na escola básica e geralmente as equações trabalhadas são resolvidas por métodos vistos no decorrer do ensino básico. Entretanto, há outros métodos que também podem ser utilizados no intuito de auxiliar na compreensão e resolução de equações não lineares, como por exemplo o Método de Newton. Mesmo assim, é possível que algum aluno pergunte como resolver a equação $x^5 - x - 1 = 0$, a qual não seria possível resolver com os métodos vistos no ensino médio, porém, muitos métodos para a obtenção de raízes estudados no ensino superior não são abordados no ensino básico, como por exemplo, o Método de Newton, e, com ele é possível resolver a equação $x^5 - x - 1 = 0$. Ao mesmo tempo, podemos destacar que o impacto das tecnologias digitais emergentes na educação tem sido evidente. A utilização de *softwares*, como o GeoGebra, pode aprimorar o processo de ensino-aprendizagem ao possibilitar a experimentação e a descoberta, estimulando o interesse e a curiosidade dos estudantes. Sendo assim, a proposta deste trabalho é apresentar uma maneira de utilizar o Método de Newton, através de ferramentas digitais, na obtenção de raízes no ensino médio.

Neste estudo, o objetivo principal é propor e aplicar uma atividade investigativa, diferente daquelas apresentadas na literatura, para o cálculo de raízes de equações não lineares [1] utilizando o Método de Newton e o GeoGebra além de apresentar os resultados obtidos após aplicar a atividade em uma turma de alunos do do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). A escolha de aplicar a atividade para professores do ensino básico se deve ao objetivo de verificar a percepção de atuantes na área e debater sobre a aplicabilidade da proposta.

A partir de um levantamento bibliográfico, via portal da CAPES, das dissertações produzidas por mestrandos do PROFMAT que abordaram o Método de Newton aplicado no ensino médio, identificamos alguns desses trabalhos: (FILHO, 2022), (AFUSO, 2014), (MAURÍCIO, 2013), (SOBRAL, 2021), (SANTOS, 2018), (ROSS, 2017), (CARDOSO, 2016), (CAVALCANTI, 2015),

[1] Equação linear em uma variável é da forma $ax + b = 0$ e as demais são não lineares.

(TEODORO, 2015), (OLIVEIRA, 2014), (BROCKVELD, 2021).

Todos esses têm como tema o Método de Newton, porém com uma abordagem distinta da qual estamos propondo. Como exemplo, podemos citar (FILHO, 2022) que desenvolve um estudo sobre os métodos e propõe uma atividade. O uso do GeoGebra é sugerido, porém a aplicação ou atividade que utilize o *software* não é explorada. Outro trabalho que envolve métodos numéricos é (AFUSO, 2014), no qual o autor aborda outros métodos numéricos além do de Newton, cita habilidades exigidas no ENEM, propõe atividades para serem aplicadas. Entretanto, a abordagem não utiliza o Geogebra ou a aplicação da atividade sugerida. Na pesquisa realizada por (MAURÍCIO, 2013), o autor faz um estudo histórico da equação quadrática abordando as diferentes formas de resolvê-la, também estuda os métodos numéricos e resolve equações que são vistas no ensino médio, porém, não utiliza o Geogebra ou aplica a atividade com professores. Também podemos citar (SOBRAL, 2021), que apresenta algumas soluções de problemas e realiza uma abordagem sobre os métodos numéricos utilizando planilhas e estabelecendo uma comparação entre os métodos em uma situação problema criada. Outro trabalho que utiliza do Método de Newton é o de (SANTOS, 2018), que traz como proposta um estudo sobre números complexos, usa o Método para solucionar equações, em especial a equação $2^x = x^2$ e o cálculo de logaritmos de números negativos. Outra referência é (ROSS, 2017) na qual o autor faz um estudo sobre o Método de Newton e o utiliza para sistemas de equações não lineares. O trabalho realizado por (CARDOSO, 2016) usa o Método de Newton, porém, foca na resolução de equações do 3º grau e e equações com índices ímpares pelo Método de Cardano-Tartaglia e 4º grau através de manipulação algébrica criada por Ferrari. Ao final do estudo, utiliza o Método de Newton para aproximar os valores das raízes. No trabalho (CAVALCANTI, 2015), o autor foca parte do estudo no tratamento de conteúdos de cálculo, abordando limites e, ao final, utiliza o software Excel para usar as planilhas eletrônicas. Já (TEODORO, 2015) trabalha o método de Newton e bacias de atração e fractais. Em (OLIVEIRA, 2014), o método de Newton é utilizado para encontrar raízes polinomiais. Por fim, o estudo desenvolvido por (BROCKVELD, 2021), tem por objetivo calcular as raízes de funções polinomiais, trazendo a criação de vídeos e um livro dinâmico no GeoGebra com a atividade proposta.

O nosso estudo se difere dos anteriores, pois, tem o objetivo de criar e aplicar uma atividade interativa, utilizando o GeoGebra, que possa ser utilizada com alunos do Ensino Médio, apresentando o Método de Newton como uma alternativa para o cálculo de raízes de equações de diferentes tipos. Este estudo foi dividido em 7 capítulos e descreveremos, de maneira breve, cada um deles a seguir.

No primeiro capítulo, de título Caminhos da Pesquisa e a BNCC, citamos os objetivos principais e secundários deste trabalho, além de sua motivação. Também destacamos o que é dito na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), citando os objetivos e quais habilidades gerais alunos da educação básica devem desenvolver durante o período escolar.

No segundo capítulo, denominado Métodos Numéricos, realizamos um estudo sobre os Métodos da Bisseção e do Ponto Fixo, demonstrando e citando exemplos de ambos os métodos.

No terceiro capítulo, intitulado Derivadas, realizamos um estudo sobre a derivada, apresentando sua definição clássica e a definimos de maneira alternativa, com o objetivo de utilizarmos o GeoGebra. Neste capítulo, também é criada, passo a passo, uma sugestão de roteiro para o ensino do conceito de derivada no ensino médio utilizando o GeoGebra que, pode ser utilizado para que os alunos encontrem derivadas das mais variadas funções.

No quarto capítulo, nomeado Regras de Derivação, partindo da definição de derivada sugerida no capítulo 3, foi realizado um estudo, no qual deduzimos intuitivamente as regras de derivação: soma e diferença, produto, regra da cadeia e do quociente.

No quinto capítulo, intitulado Método de Newton, abordamos e estudamos o Método de Newton e sua recursividade, além de discutir a sua convergência, enunciando e demonstrando o Teorema que a comprova.

No sexto capítulo, Geogebra e o Método de Newton, nos valemos da definição de derivada já estudada, do método de Newton e do *software* GeoGebra, para propormos um roteiro que utiliza o GeoGebra para a aplicação e visualização do Método de Newton. Ao final do capítulo são estudados alguns exemplos utilizando o próprio arquivo criado a partir do roteiro.

No sétimo capítulo, Atividade Aplicada a alunos do PROFMAT-UFOP, discorremos sobre a aplicação da atividade sobre derivadas, utilizando o roteiro apresentado no capítulo 3, além de uma atividade sobre o Método de Newton, na qual foi utilizado o roteiro criado no capítulo 6. Ao final de cada atividade, foi realizado um questionário com os alunos participantes. Para concluir o capítulo, foi realizada a análise sobre as respostas dos alunos acerca da sua percepção em relação à aplicação do Método de Newton para o cálculo de raízes para alunos do ensino médio.

Por último, foram realizadas as considerações finais sobre este estudo e apresentada a bibliografia.

Capítulo 1

Caminhos da pesquisa e a BNCC

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é propor e aplicar uma atividade educacional sobre Método de Newton utilizando o *software* Geogebra. Para isso, será necessário alcançar alguns objetivos específicos, cruciais no nosso estudo: definir a derivada de uma forma alternativa; desenvolver um estudo da derivada que não utilize limite por meio algébrico e utilize o aplicativo Geogebra; deduzir, mesmo que de forma intuitiva, as regras de derivação; e, por fim, novamente fazendo uso do *software*, aplicar o Método para aproximação de raízes de equações, com alunos do ensino médio.

1.2 Metodologia

Neste trabalho, será desenvolvido um estudo sobre os métodos numéricos, focado no Método de Newton, contemplando a sua convergência, elaboração de dois roteiros, um voltado para o conceito de derivada e outro para a implementação do Método de Newton, ambos utilizando o GeoGebra. Foram elaboradas atividades que envolvem diretamente o *software*, além da aplicação das atividades com professores atuantes na educação básica e atualmente mestrandos do PROFMAT. A aplicação foi realizada em dois encontros, a fim de recolher dados sobre a percepção, entendimento e opinião dos participantes em relação a proposta e a atividade em si. Ao final, foi realizado um estudo sobre as respostas dos participantes.

1.3 BNCC e a nossa pesquisa

A educação brasileira atual é baseada e orientada pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (BNCC, 2018). Conforme estabelecido no próprio documento nacional:

> A BNCC e os currículos se identificam na comunhão de princípios e valores que orientam a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) e as DCN Diretrizes curriculares Nacionais. Dessa maneira, reconhecem que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica. Além disso, BNCC e currículos têm papéis complementares para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, uma vez que tais aprendizagens só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação.

A BNCC possui, também, como objetivos:

- Selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;
- Conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;
- Construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos;
- Selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
- Criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem;

Com isso, a BNCC determina competências e habilidades que devem ser trabalhadas durante toda a educação básica. E dessa forma, destacamos algumas habilidades que se alinham com o tema abordado neste trabalho:

Habilidades - Ensino Fundamental

- **(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
- **(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- **(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Habilidades - Ensino Médio

- **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT403)** - Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
- **(EM13MAT501)** - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- **(EM13MAT502)** - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
- **(EM13MAT503)** - Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Capítulo 2

Métodos numéricos

Métodos numéricos para o cálculo de raízes de funções são técnicas matemáticas que buscam determinar os valores ou pontos nos quais uma função específica se anula, ou seja, onde o valor da função é zero. Esses pontos são chamados de "raízes" ou "zeros" da função. Em determinados casos, não é fácil ou possível encontrar as raízes de uma função em uma forma fechada (expressão exata), isto é, por meio de operações algébricas. Nesses casos, os métodos numéricos são utilizados para obter aproximações para as raízes com uma precisão desejada.

Neste capítulo, serão abordados e explorados dois métodos numéricos clássicos para o cálculo de raízes: o método da bisseção e o método do Ponto Fixo. Para isso, iremos investigar o método, o seu funcionamento, a geometria e a aplicação em alguns exemplos.

2.1 Método da bisseção

O método da bisseção opera dividindo o intervalo inicial ao meio repetidamente até que se encontre uma aproximação satisfatória da raiz. O procedimento é iterativo e consiste em calcular o ponto médio do intervalo inicial, avaliar a função nesse ponto e, em seguida, determinar qual metade do intervalo contém a raiz. Essa escolha é feita com base no sinal da função no ponto médio. Se a função possuir sinais opostos nos extremos do intervalo, então a raiz está contida nessa metade; caso contrário, a raiz está na outra metade.

O método da bisseção é uma técnica clássica e amplamente utilizada para encontrar as raízes de uma função. Se baseia no Teorema do Valor Intermediário (LIMA, 2004), que afirma que se uma função é contínua em um intervalo fechado e tem sinais opostos nos extremos desse intervalo, então existe pelo menos um ponto dentro desse intervalo no qual a função se anula.

Teorema 2.1.1. *(Teorema do Valor Intermediário.) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

O método consiste em dividir iterativamente o intervalo em duas partes de mesmo comprimento e verificar qual dessas partes contém uma raiz da função. Esse processo é repetido até que a raiz seja encontrada com a precisão desejada [1].

Inicialmente, definindo $a_1 = a$ e $b_1 = b$, seja p_1 o ponto médio de $[a, b]$, ou seja,

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

A partir disso, temos duas possibilidades:

1. Se $f(p_1) = 0$, então $p_1 = p$ é a raiz de f e já foi encontrada.

2. Se $f(p_1) \neq 0$, então nos restam duas situações: $f(p_1)$ possui o mesmo sinal de $f(a_1)$ ou o mesmo sinal de $f(b_1)$.

   - Se $f(p_1)$ e $f(a_1)$ tem o mesmo sinal, podemos afirmar que $p \in (p_1, b_1)$ e definimos $a_2 = p_1$ e $b_2 = b_1$.
   - Se $f(p_1)$ e $f(b_1)$ tem o mesmo sinal, podemos afirmar que $p \in (a_1, p_1)$ e definimos $a_2 = a_1$ e $b_2 = p_1$.

Após essa análise, basta reproduzir o processo no novo intervalo $[a_2, b_2]$ até encontrar a aproximação com a precisão desejada.

A Figura 1 ilustra como o processo funciona

[1] Quando dizemos precisão desejada, significa que escolhemos o critério de parada de acordo com o desejado e que atenda o problema proposto

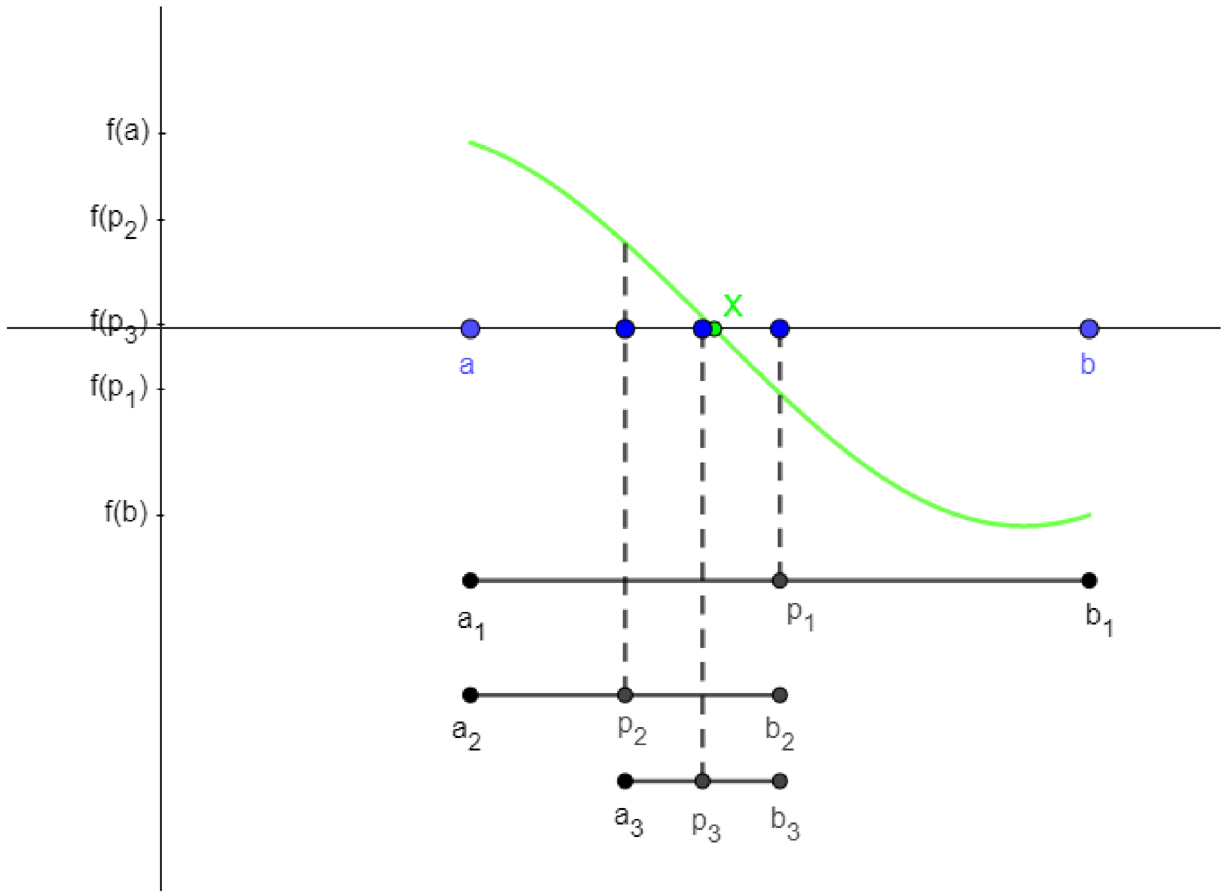


Figura 1 – Método da Bisseção.

Fonte: elabora pelo autor

Teorema 2.1.2. *Suponha que $f \in [a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. O método da bisseção gera uma sequência (p_n) aproximando um zero p de f com*

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

quando $n \neq 1$.

Demonstração. A cada aproximação, o tamanho do intervalo é dividido por dois, ou seja, a distância de p_n até p é, no máximo, metade do intervalo $[a, b]$. Sendo $n > 1$, temos $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a)$. Daí,

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}.$$

□

O método da bisseção pode ser considerado lento em comparação com os métodos numéricos mais sofisticados, já que em alguns casos requer um número maior de iterações. Entretanto, ele garante a convergência para uma solução, além de ser de fácil implementação em qualquer linguagem de programação.

Vejamos outro método, o Método do Ponto Fixo.

2.1.1 Método do Ponto Fixo

O método do Ponto Fixo está entre os métodos numéricos clássicos para cálculo de raízes de funções e seu conceito é: se uma função tem uma raiz em um ponto $x = r$, então podemos reescrever a equação $f(x) = 0$ como $x = g(x)$, em que $g(x) = x - f(x)$. Então, podemos começar com uma estimativa inicial x_0 e aplicar a fórmula iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ repetidamente até que a sequência x_n produza um valor x tão próximo de r, quando desejarmos.

O método da iteração do Ponto Fixo começa com uma estimativa inicial x_0 e gera uma sequência de valores x_n pela fórmula $x_{n+1} = g(x_n)$. Se a sequência converge para um valor x tal que $g(x) = x$, então x é a raiz da função f. A convergência é alcançada quando a diferença entre x_{n+1} e x_n é suficientemente pequena.

Atualmente, é um método amplamente utilizado em muitas áreas da matemática aplicada e das ciências, incluindo engenharia, física, computação, economia dentre outras. O método é particularmente útil quando as soluções são muito complicadas para serem encontradas.

Definição 2.1.1. *Um ponto $x \in X$ chama-se ponto fixo da função $f : X \to X$ se $f(x) = x$.*

Quando nos deparamos com o gráfico de uma função e queremos saber se a mesma possui ponto fixo, basta verificarmos se há intersecção entre tal gráfico e o da reta $y = x$, com $x \in D_f$ e $y \in \mathbb{R}$. Em resumo: geometricamente os pontos tais que $f(x) = x$ se encontram na interseção do gráfico de f com o da função identidade.

Vejamos a seguir alguns exemplos:

1. $f(x) = x^2$

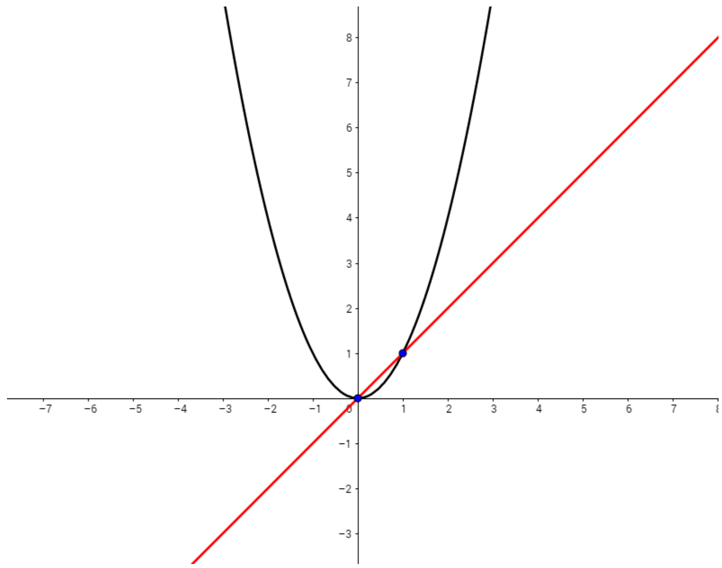


Figura 2 – Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no qual são indicados dois pontos fixos, $x = 0$ e $x = 1$.

Fonte: elaborado pelo autor

2. $g(x) = x^2 + 3$

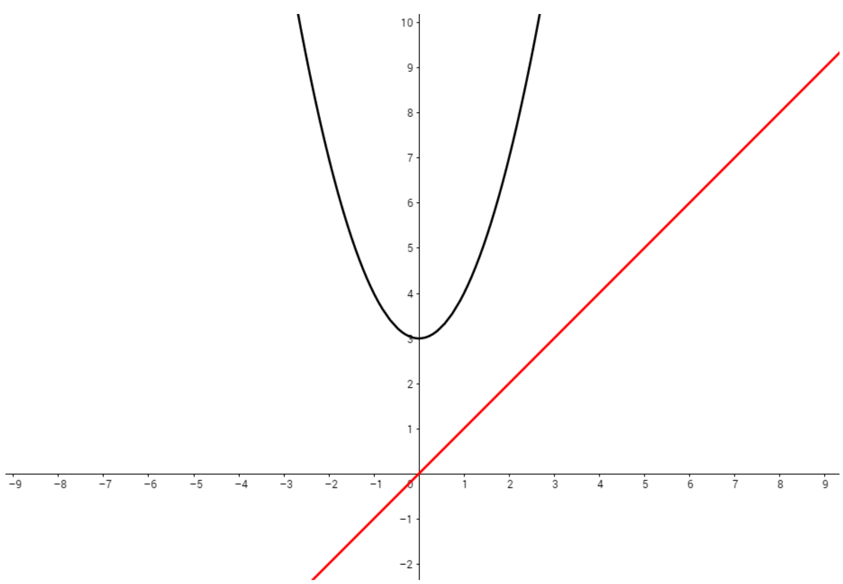


Figura 3 – A função $g(x) = x^2 + 3$ não possui pontos fixos (graficamente não há intersecção com o gráfico de $y = x$).

Fonte: elaborado pelo autor

3. $h(x) = x^3$

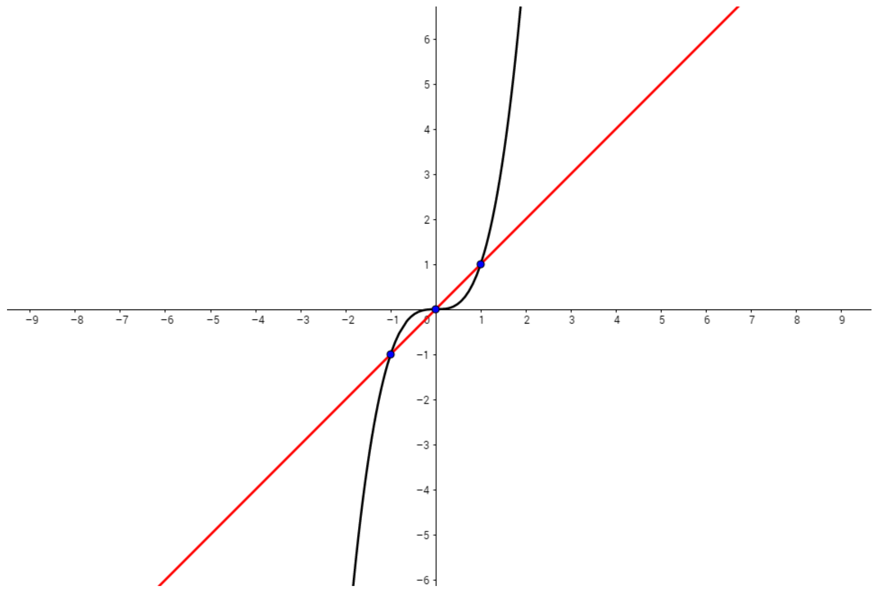


Figura 4 – A função $h(x) = x^3$ possui três pontos fixos, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Tais pontos são notados no gráfico.

Fonte: elaborado pelo autor

4. $i(x) = 3x^2 + 4x - 5$

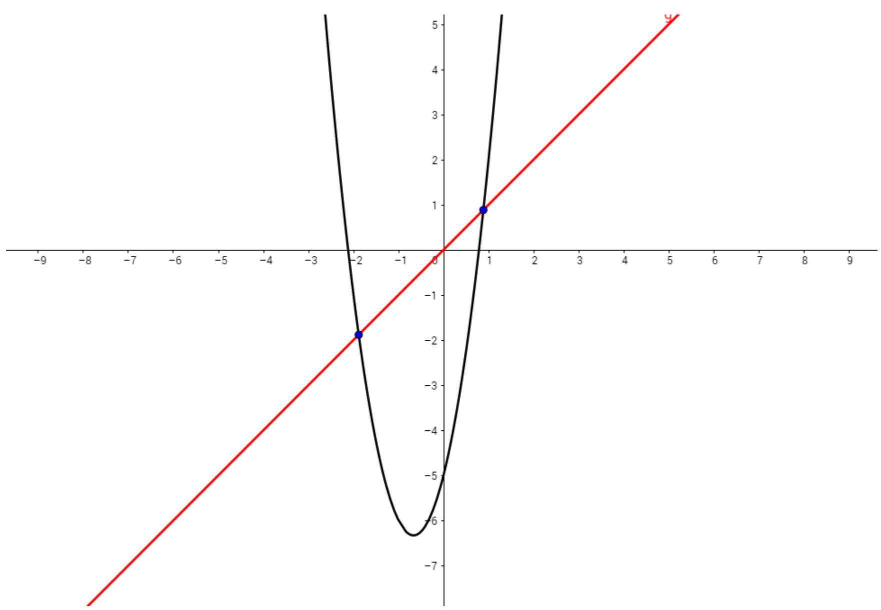


Figura 5 – Gráfico da função $i(x) = 3x^2 + 4x - 5$ no qual são indicados dois pontos fixos.

Fonte: elaborado pelo autor

5. $j(x) = \log x$

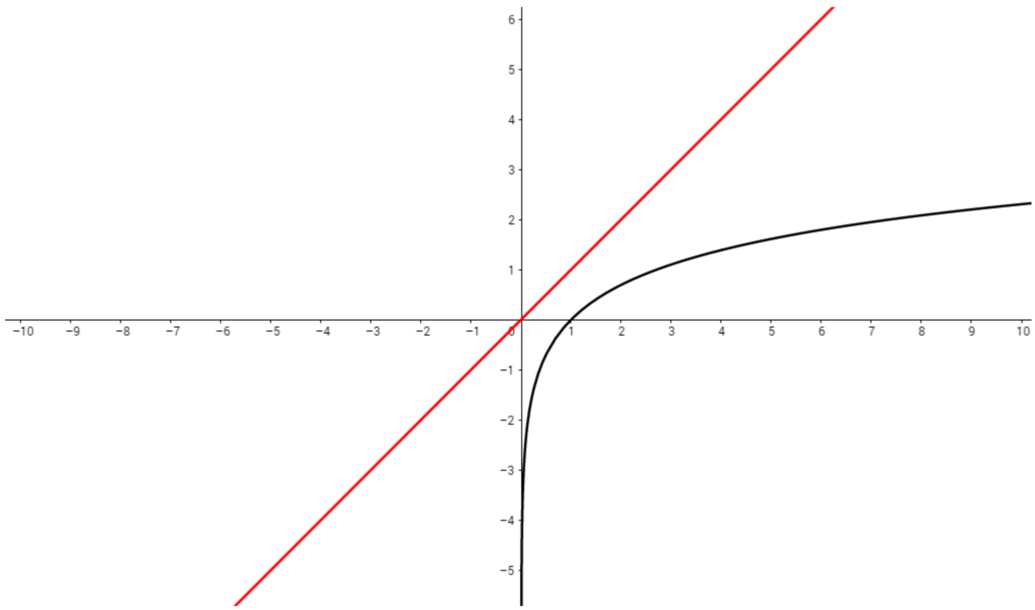


Figura 6 – A função logaritmo não possui ponto fixo.

Fonte: elaborado pelo autor

6. $k(x) = \cos(x)$

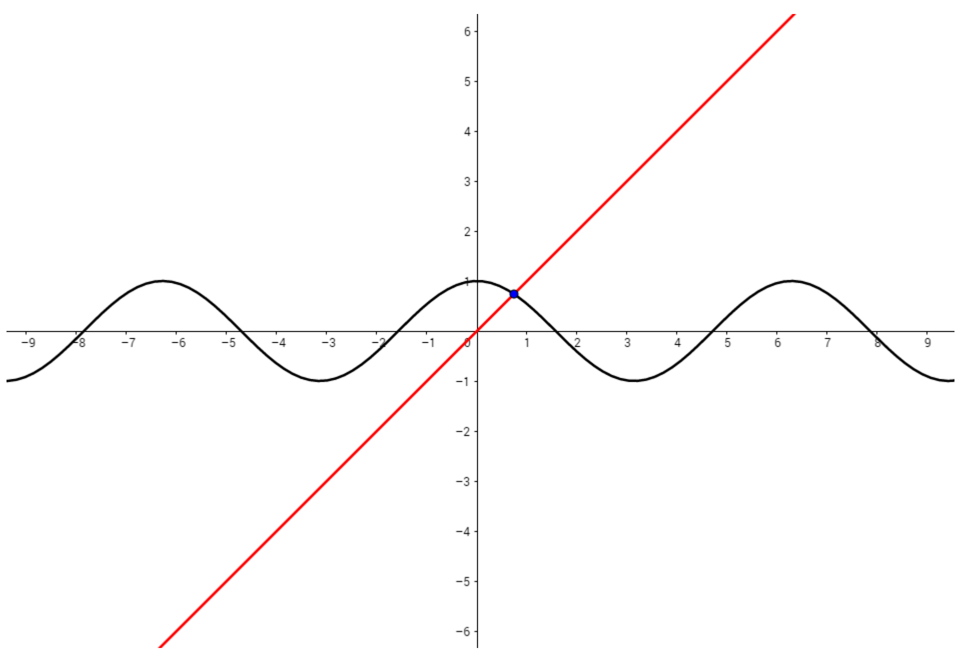


Figura 7 – Gráfico da função $k(x) = \cos(x)$ ilustra que há apenas um ponto fixo.

Fonte: elaborado pelo autor

A obtenção do ponto fixo de f através do método de iteração do ponto fixo é feita da seguinte forma: dada f e uma aproximação p_0 do ponto fixo p, a equação $p_n = f(p_{n+1})$; $n \geq 1$ gera a sequência (p_n), de modo que, cada valor p_n é uma estimativa nova para o ponto fixo de f. Partindo de p_0, temos $p_1 = f(p_0)$ que será a abscissa do ponto de interseção entre as retas $y = x$ e $y = f(p_0)$. Depois de encontrado p_1, se repete o processo para encontrar p_2 e, assim, sucessivamente. Na figura 8, podemos ver geometricamente o funcionamento do método:

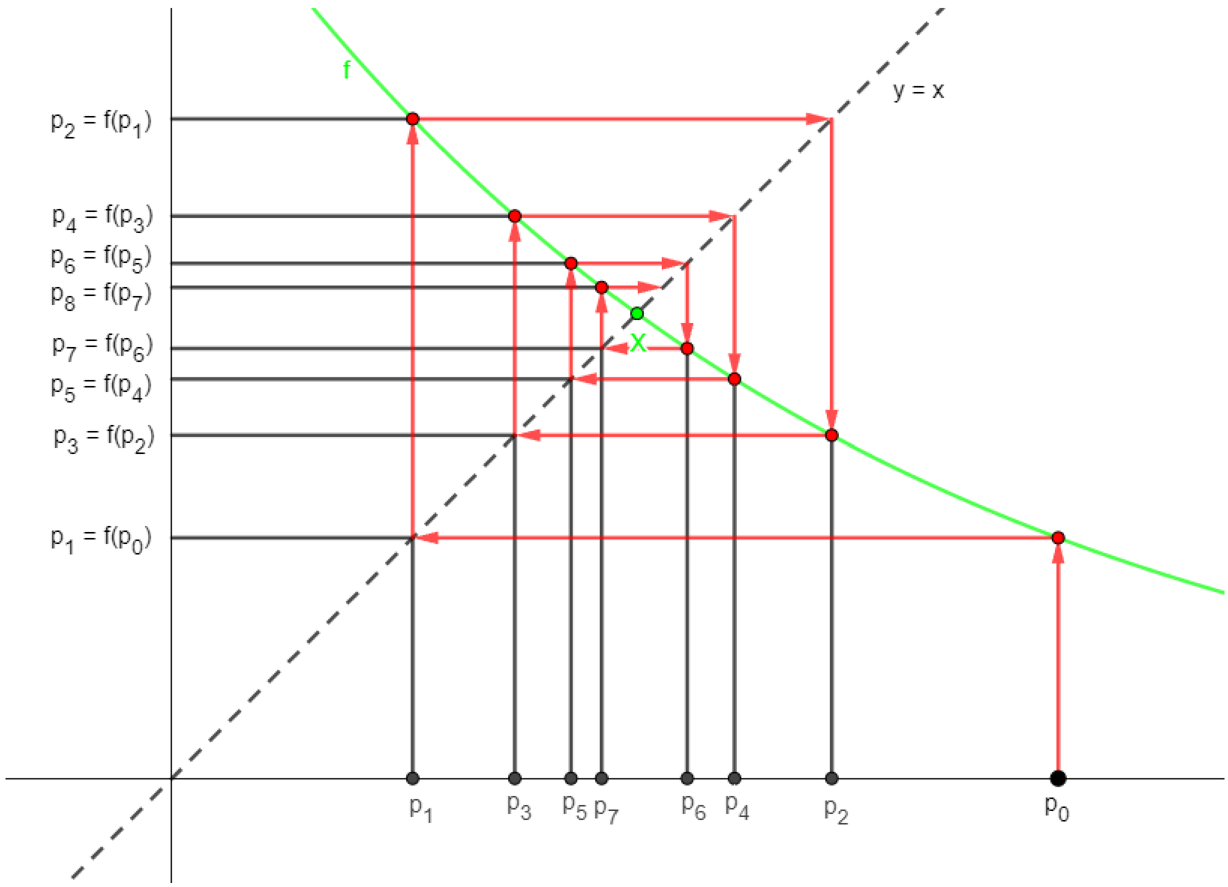


Figura 8 – Método do Ponto Fixo.

Fonte: elaborado pelo autor

Diferente do método da bisseção, que trabalha com os sinais dos extremos do intervalo, precisamos garantir que o método de iteração ao ponto fixo deve convergir e que, além de convergir, deve convergir para o ponto fixo da função $g(x)$. O teorema a seguir garante condições para a convergência da sequência x_n, além de garantir a existência e unicidade do ponto fixo. Antes de enunciá-lo, vejamos uma importante definição.

Definição 2.1.2. *Temos que f é contração se*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

para todo $x, y \in I \subseteq D_f$ e $0 < k < 1$.

Teorema 2.1.3. *(Ponto fixo de Banach) Seja I um intervalo fechado e limitado, se $f : I \to I$ for uma contração, então f tem um único ponto fixo. Além disso, se $x_0 \in I$ e $\{x_n\}$ for uma sequência numérica dada por $x_{n+1} = f(x_n)$, então $x_n \to x$, em que x é o ponto fixo de f.*

Demonstração. Seja $f : I \to I$ uma contração, com constante $0 < k < 1$. Escolhendo $a \in I$ temos a sequência $(f^n(a)) = (f(a), f^2(a), f^3(a)...)$. Dado $x_0 \in I$, podemos construir a seguinte sequência:

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) \\
x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\
x_3 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0) \\
&\vdots \\
x_n &= f(x_{n-1}) = \cdots = f^n(x_0)
\end{aligned}$$

Como I é fechado, se (a_n) for uma sequência de Cauchy [2], (a_n) é convergente. Também podemos observar que:

$$|x_1 - x_2| = |f(x_0) - f(x_1)| \leq k \cdot |x_0 - x_1|. \tag{2.1}$$

Vamos supor, por indução que:

$$|x_{n-1} - x_n| < k^{n-1} \cdot |x_0 - x_1|.$$

Daí,

$$|x_n - x_{n+1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leq k \cdot |x_{n-1} - x_n| = k^n \cdot |x_0 - x_1|. \tag{2.2}$$

Por 2.1, 2.2 e pelo princípio de indução finita, temos:

$$|x_n - x_{n+1}| \leq k^n \cdot |x_0 - x_1| \tag{2.3}$$

Veja que:

$$|x_n - x_{n+p}| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+2} + ... - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p}|$$

$$\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + ... + |x_{n+p-2} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p}|.$$

Então, temos:

$$|x_n - x_{n+p}| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + ... + |x_{n+p-2} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p}| \tag{2.4}$$

[2] (x_n) é uma sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$. Ver (LIMA, 2004).

Portanto, utilizando (2.3) em (2.4):

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_{n+p}| &\leq k^n|x_0 - x_1| + k^{n+1}|x_0 - x_1| + ... + k^{n+p-1}|x_0 - x_1| \\
&= (k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1})|x_0 - x_1| \\
&< \sum_{n}^{\infty} k^i |x_0 - x_1| \\
&= \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_0 - x_1|.
\end{aligned}
$$

Concluímos que:

$$|x_n - x_{n+p}| < \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_0 - x_1|. \tag{2.5}$$

Utilizamos o fato de $\sum_n^\infty k^i$ ser uma progressão geométrica, com o primeiro termo sendo k^n e razão k.

Como já sabemos que $0 < k < 1$, então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_0 - x_1| = 0.$$

Pela definição de sequência convergente, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos:

$$\frac{k^n}{1-k} \cdot |x_0 - x_1| < \epsilon.$$

Sendo assim, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| < \epsilon$, ou seja, (x_n) é de Cauchy, e, portanto, é convergente, de modo que $x = \lim x_n$ é um número real.

Seja $x = \lim x_n$. Pela continuidade de f e pelo teorema de composição de funções, temos:

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x.$$

Concluímos que x é ponto fixo de f, pois $f(x) = x$.

Para provar a unicidade, vamos supor que também exista $y \in I$ tal que $y \neq x$ e $f(y) = y$. Então,

$$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y| < |x - y|,$$

o que é uma contradição pois $|x - y|$ não pode ser menor que $|x - y|$. Portanto x é o único ponto fixo de f. □

Vale destacar que o Teorema 2.1.3 garante a convergência da sequência x_n formada pelo Método de Newton desde que o chute inicial esteja próximo o suficiente da raiz da função f.

CAPÍTULO 3

Derivadas

A derivada é um conceito fundamental no cálculo diferencial e está ligado à taxa de variação, que tem como uma de suas aplicações, a obtenção do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em um determinado ponto. Ao considerar uma função f, a derivada de f em x é denotada por $f'(x)$. A partir de (STEWART, 2011), a derivada é definida como:

Definição 3.0.1. *A derivada de uma função f em um número a. Denotada por $f'(a)$ é*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existe.

Neste trabalho, exploraremos uma abordagem alternativa apresentando a derivada como a inclinação da reta tangente e a sua utilização para o cálculo de raízes. Dessa forma, definimos a derivada como:

Definição 3.0.2. *Seja $f : A \to B$ e $x_0 \in A$, a derivada da função f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, será: se $f(x) = ax + b$, então $f'(x_0) = a$. Caso $f(x) \neq ax + b$, $f'(x_0)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.*

Vale observar que, nos exemplos descritos ainda neste capítulo, é possível aplicar a definição para funções f definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Para entendermos a definição da derivada como o coeficiente angular da reta tangente, imagine que desejamos encontrar a derivada de uma função $f(x)$ em um ponto específico $P(x, f(x))$. Traçamos uma reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, a inclinação dessa reta tangente, ou seja, o coeficiente angular, é exatamente igual à derivada da função f no ponto P.

Na sequência, será feito um exemplo de roteiro com o uso do GeoGebra, que mostra a construção da reta tangente a um gráfico e esse processo será justificado mais à frente quando apresentarmos o método de Newton.

É válido ressaltar que o objetivo da pesquisa não é ensinar sobre o *software* e, salientamos que outras possibilidades de se abordar o conceito de derivadas são possíveis e aqui trataremos de uma delas.

Roteiro

1. Criar um controle deslizante, denominado n, com incremento 1 e com o valor mínimo de 0 e máximo de 15 e atribua $n = 2$. Após isso, desabilite a função exibir objeto do controle deslizante.

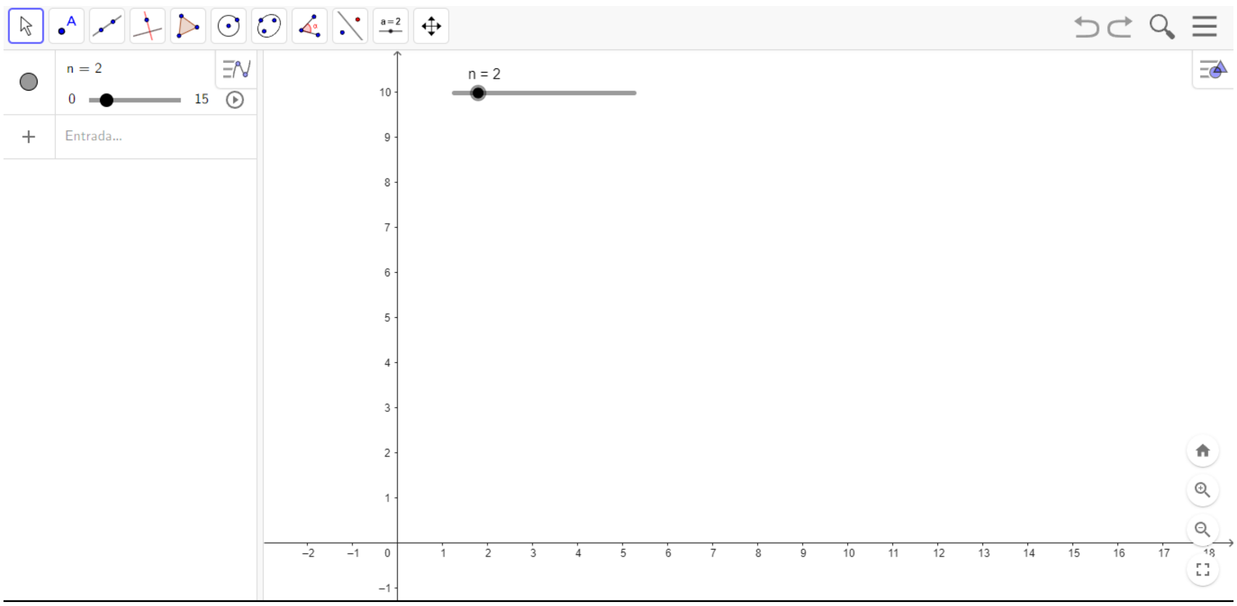


Figura 9 – Roteiro de Derivadas - Etapa 1.

Fonte: elaborado pelo autor

2. Digitar na janela de entrada a função $f(x) = x^n$.

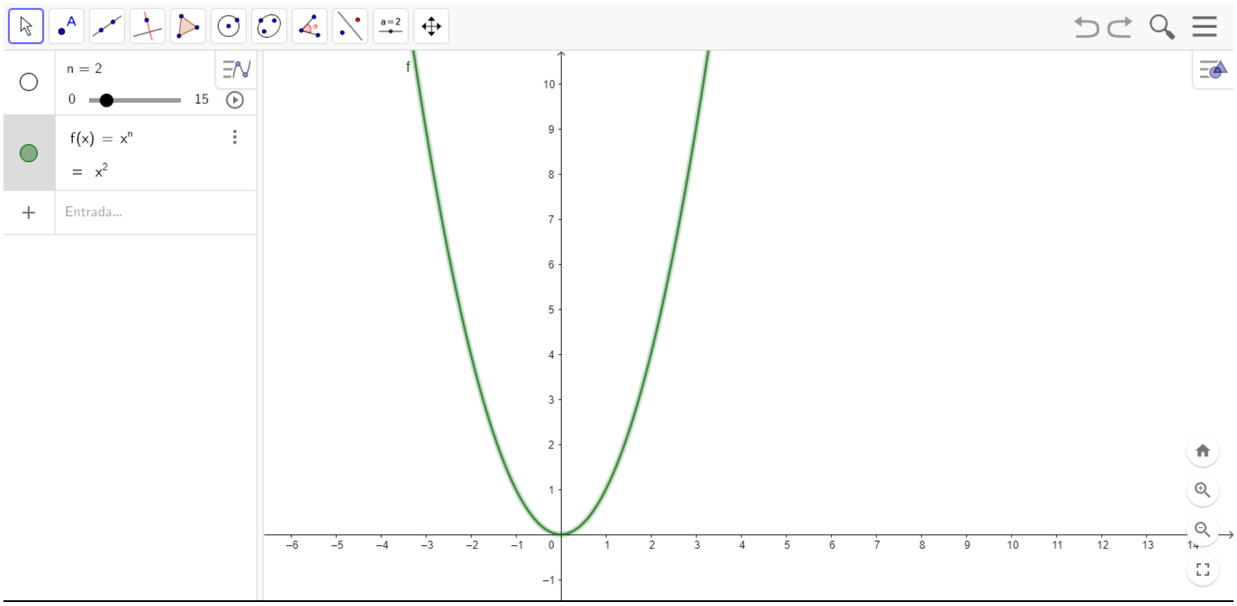


Figura 10 – Roteiro de Derivadas - Etapa 2.

Fonte: elaborado pelo autor

3. Selecionar a ferramenta "ponto" e criar o ponto A pertencente ao gráfico da função f.

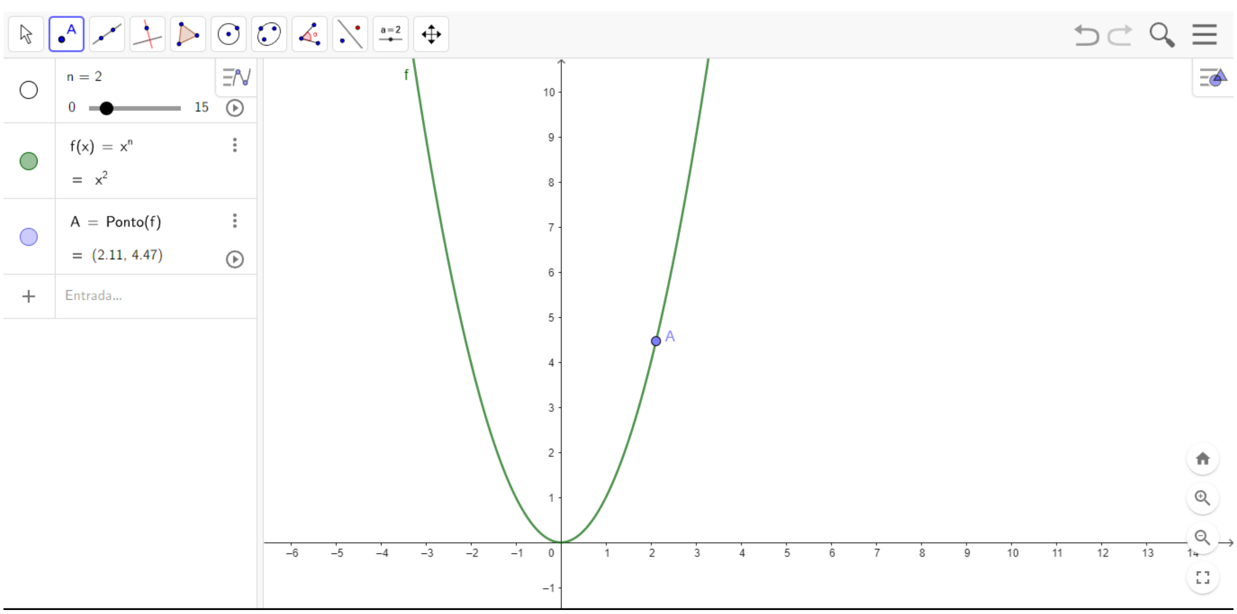


Figura 11 – Roteiro de Derivadas - Etapa 3.

Fonte: elaborado pelo autor

4. Selecionar a ferramenta "Tangente" e traçar a reta r tangente ao gráfico de f no ponto A.

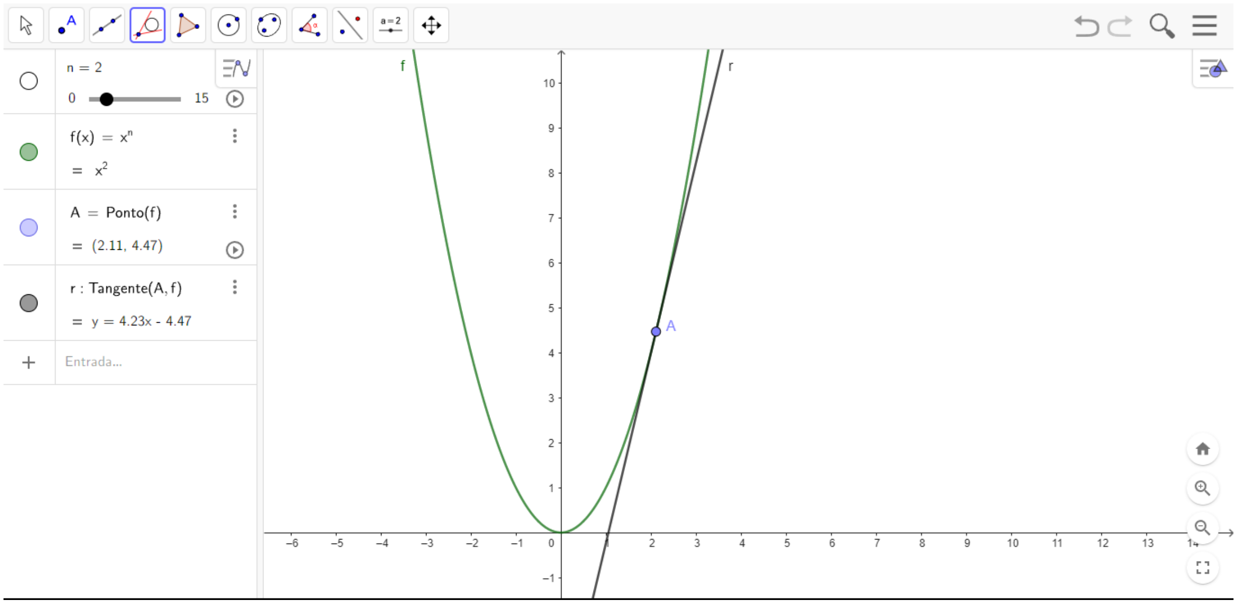


Figura 12 – Roteiro de Derivadas - Etapa 4.

Fonte: elaborado pelo autor

5. Selecionar a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e marcar a interseção entre a reta r e o eixo x, renomear a interseção de ponto B caso necessário.

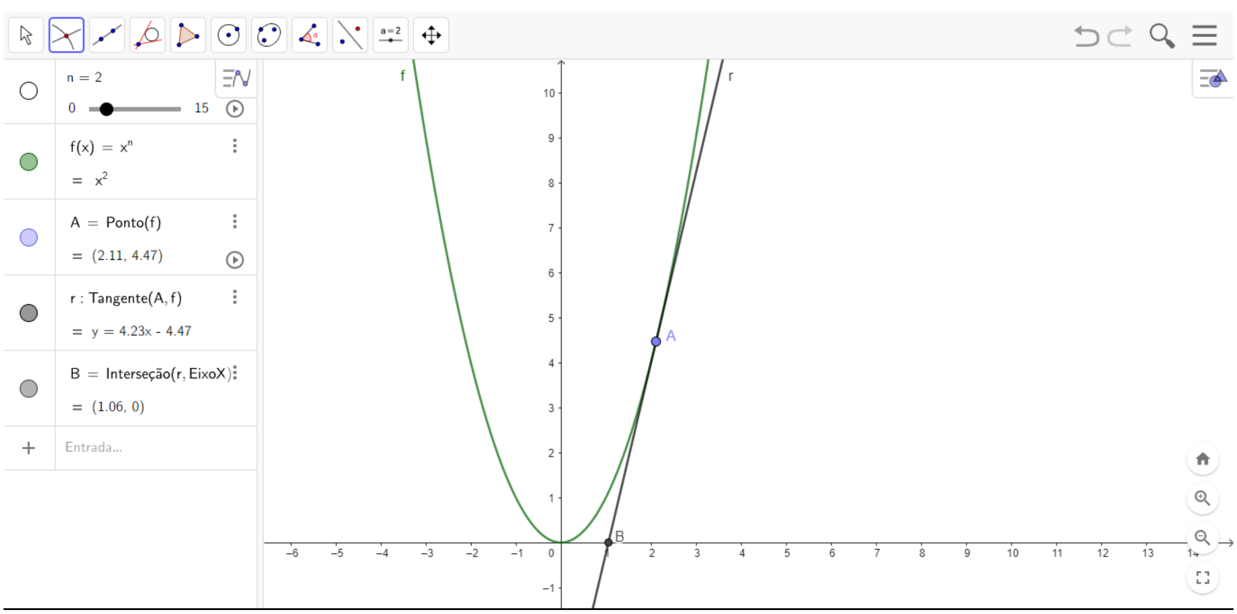


Figura 13 – Roteiro de Derivadas - Etapa 5.

Fonte: elaborado pelo autor

6. Marcar um ponto C sobre o eixo x e a direita do ponto B.

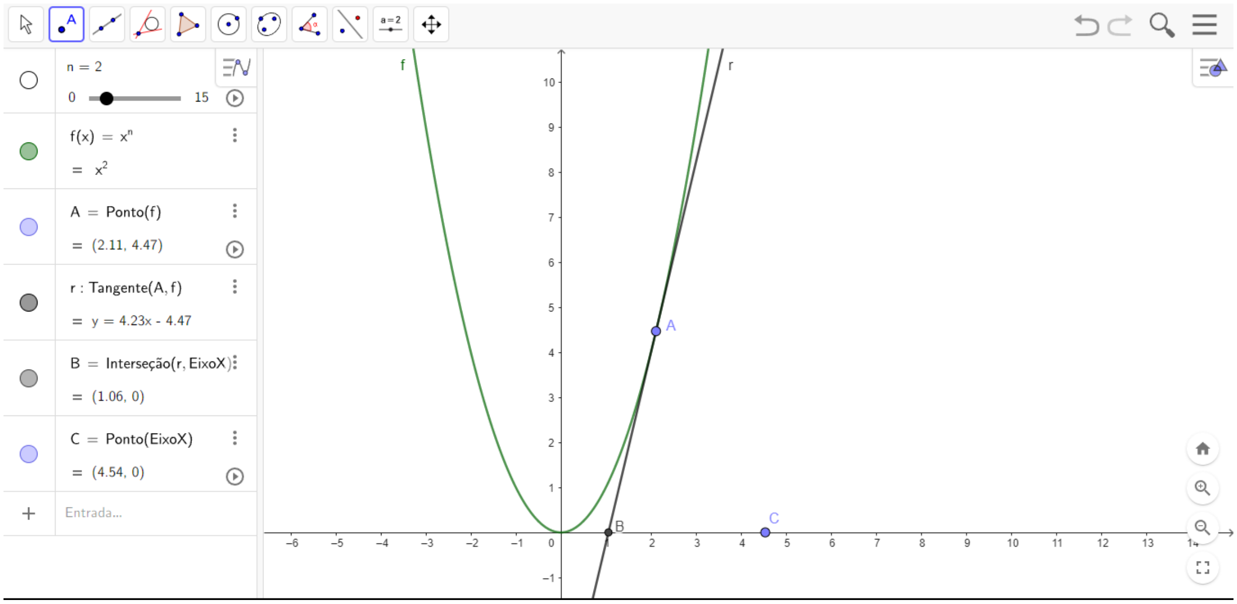


Figura 14 – Roteiro de Derivadas - Etapa 6.

Fonte: elaborado pelo autor

7. Utilizar a ferramenta "Ângulo" e criar o ângulo $C\hat{B}A$, depois ocultar o ponto C desabilitando a opção "exibir objeto".

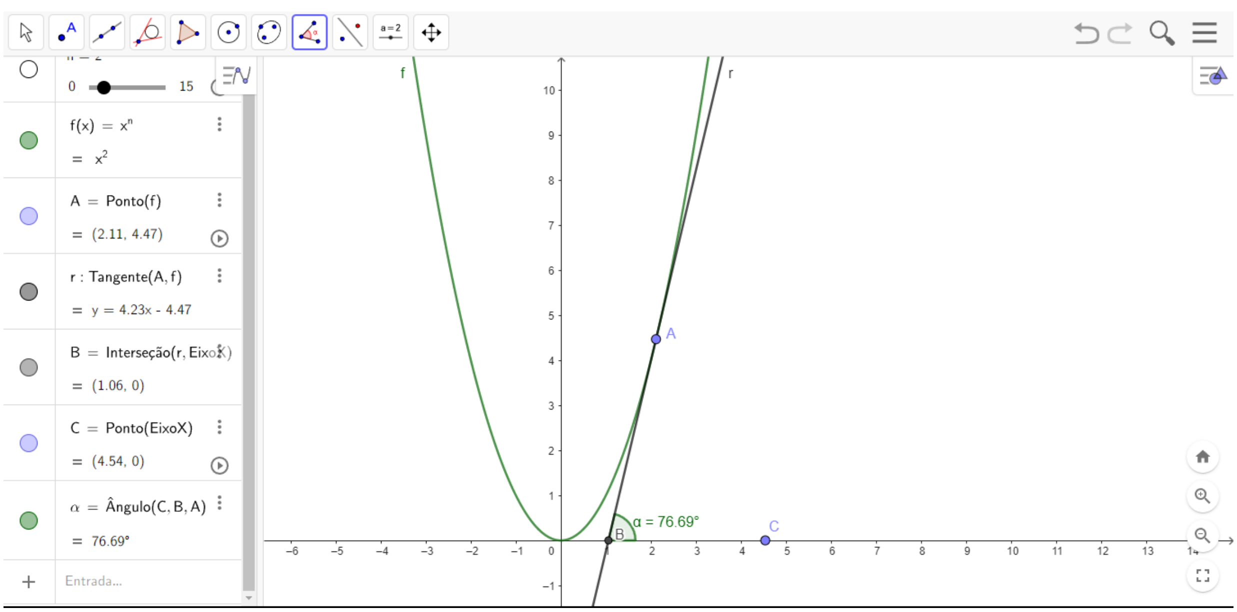


Figura 15 – Roteiro de Derivadas - Etapa 7.

Fonte: elaborado pelo autor

8. Abrir a janela de visualização 2D e habilitar a malha nesta janela.

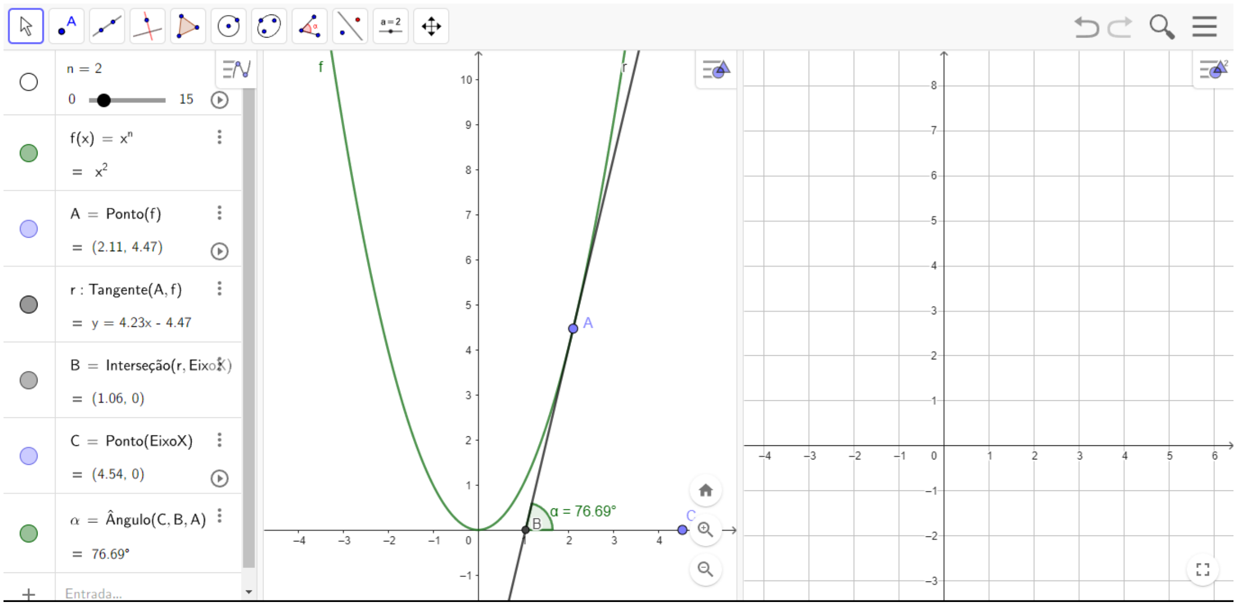


Figura 16 – Roteiro de Derivadas - Etapa 8.

Fonte: elaborado pelo autor

9. Criar, na janela de visualição 2D, o ponto $D = \left(x(A), \frac{y(A)-y(B)}{x(A)-x(B)}\right)$.

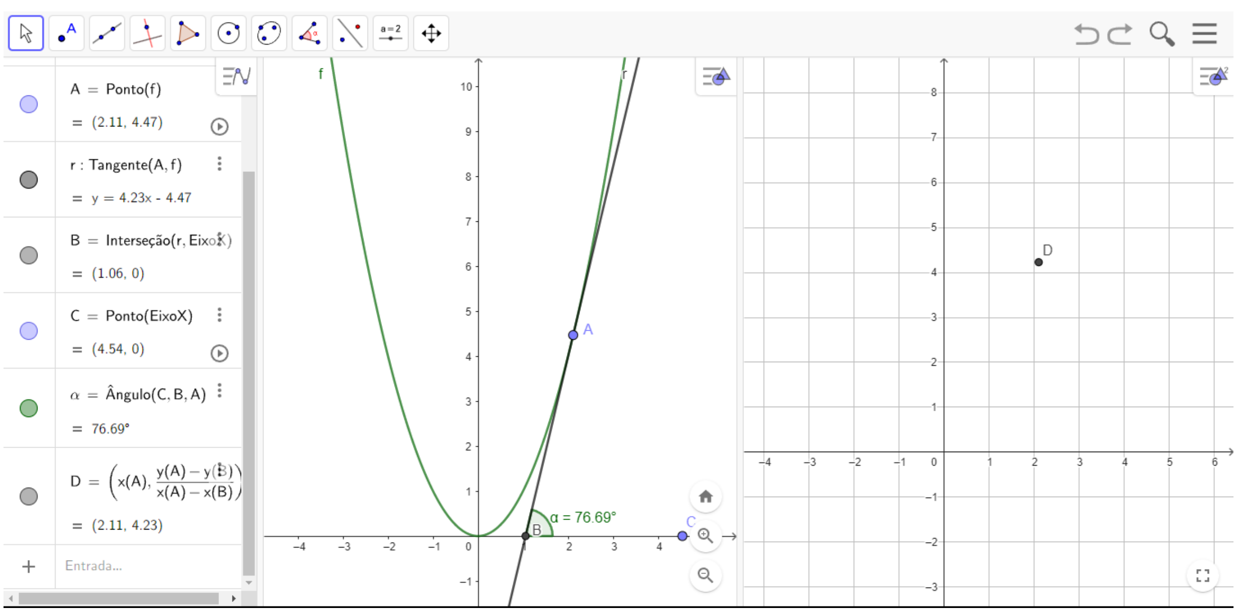


Figura 17 – Roteiro de Derivadas - Etapa 9.

Fonte: elaborado pelo autor

10. Abrir as configurações do ponto D, habilitar opção exibir rastro. Se desejar, é possível editar a cor e tamanho do ponto D para melhorar a visualização.

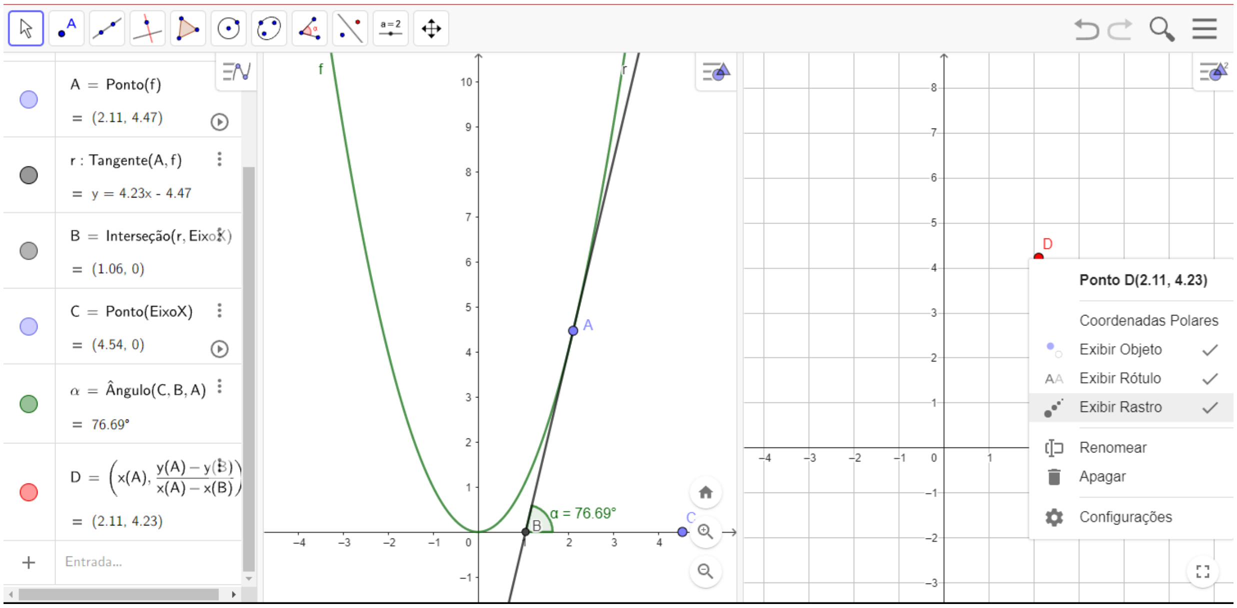


Figura 18 – Roteiro de Derivadas - Etapa 10.

Fonte: elaborado pelo autor

11. Clicar com o botão direito no ponto A e ativar a animação do ponto A.

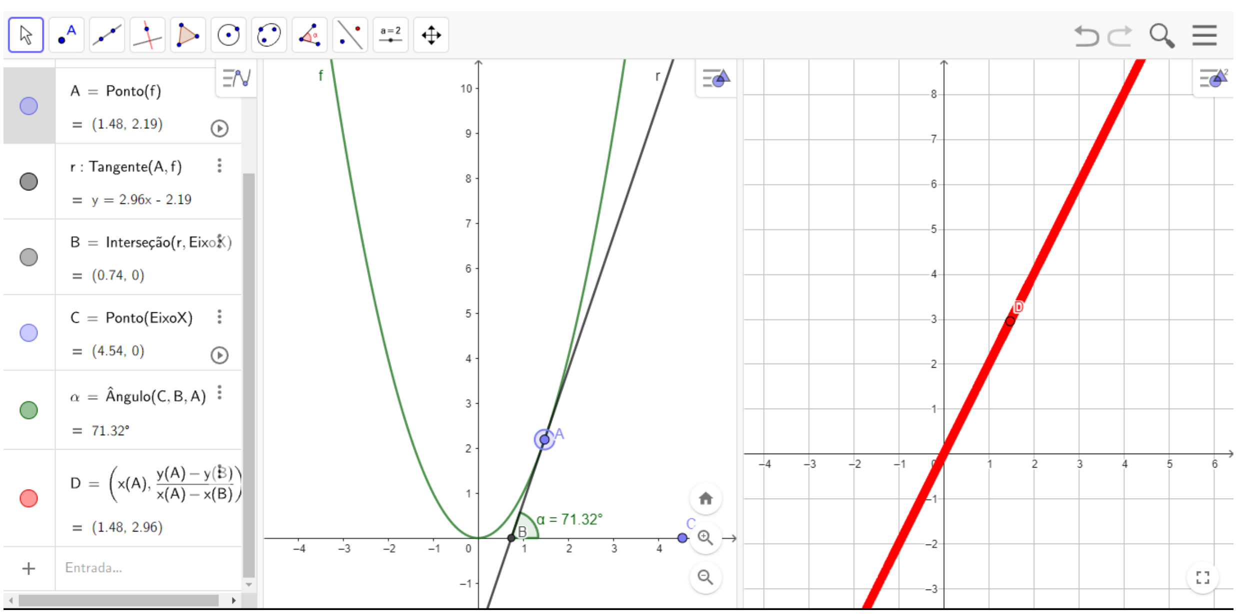


Figura 19 – Roteiro de Derivadas - Etapa 11.

Fonte: elaborado pelo autor

12. Qual o gráfico é exibido pelo rastro do ponto D na janela 2D? É possível escrever a lei de formação que descreve esse gráfico?

13. Para que o roteiro possa ser utilizado para outras funções, utilizaremos a ferramenta "campo de entrada" a legenda será "Função"e o objeto vinculado será $f(x) = x^n$

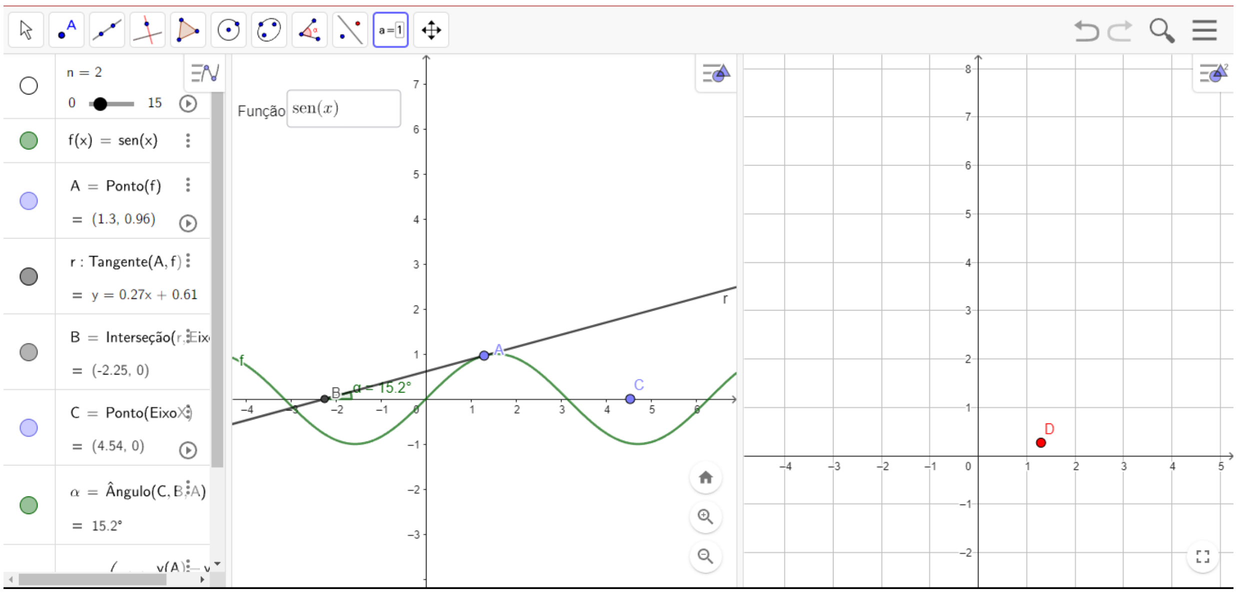


Figura 20 – Roteiro de Derivadas - Etapa 12.

Fonte: elaborado pelo autor

3.1 Exemplos

Nesta subseção, iremos apresentar alguns exemplos de funções e suas respectivas derivadas utilizando o *software* GeoGebra e o roteiro que acabamos de descrever neste capítulo. Após criar as funções, o ponto A é um ponto pertencente ao gráfico da função f e B é o ponto de interseção entre a reta tangente a f no ponto A e o eixo das abcissas, enquanto o ponto D foi definido da seguinte maneira: $D = \left(x(A), \frac{y(A)-y(B)}{x(A)-x(B)}\right)$. Podemos assim observar que a coordenada y_D é a derivada de f no ponto A, conforme estabelecido na definição 3.0.2. Note que a cada ponto do gráfico de f corresponde a um único ponto do gráfico da derivada.

Em cada caso, o rastro do ponto D irá representar o gráfico da derivada na janela 2D, e em todos é possível identificar f' através da análise de cada caso, analisando pontos pertencentes ao rastro do ponto D e algumas noções de geometria analítica. Vale observar que ressaltamos que maior formalismo pode ser usado nessa identificação das derivadas caso o público tenha maior conhecimento de cálculo. Para o nosso objetivo, faremos a identificação por inspeção.

1. Função constante $f(x) = 2$

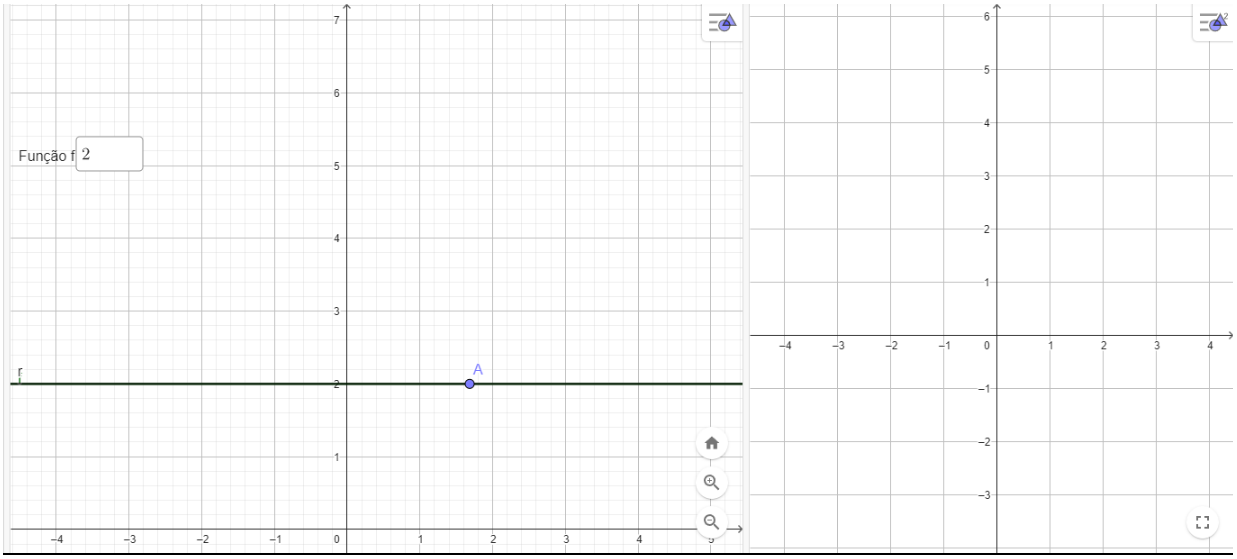


Figura 21 – Gráfico da função constante $f(x) = 2$.

Fonte: elaborado pelo autor

Quando $f(x) = 2$ não é possível se utilizar a mesma construção pois não existe interseção do gráfico de f com o eixo x para se determinar a inclinação da reta tangente. Como esse tipo de derivada será utilizada na sequência do trabalho, precisamos definir a derivada de uma constante.

2. Função quadrática $f(x) = x^2$

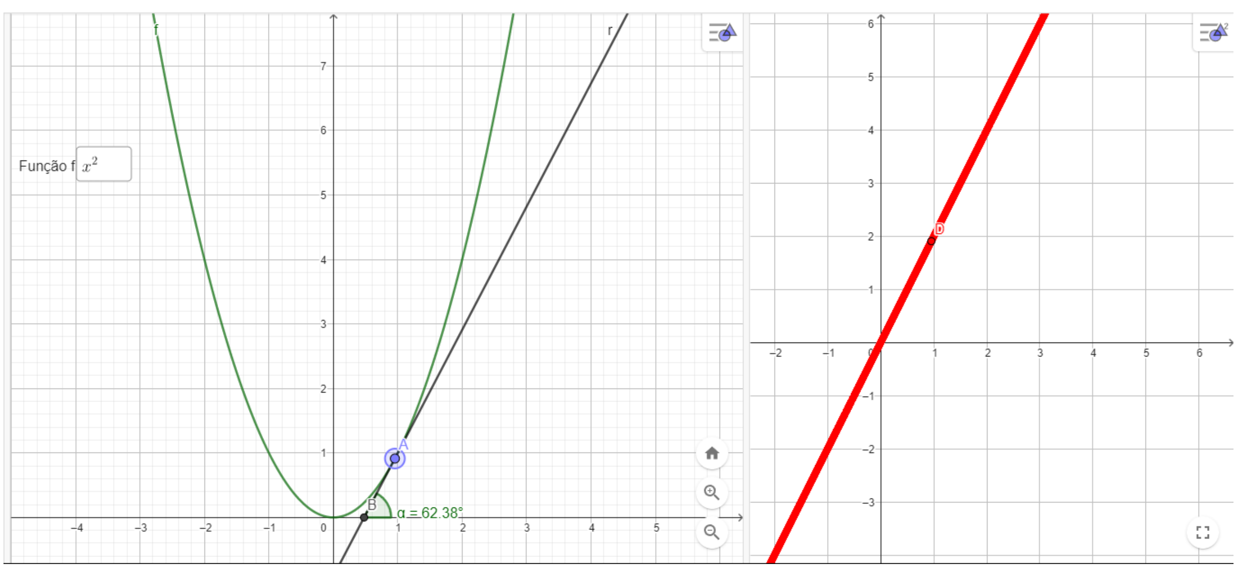


Figura 22 – Gráfico da função $f(x) = x^2$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

No caso de $f(x) = x^2$ temos que o rastro do ponto D é uma reta e é possível encontrá-lo ao perceber que os pontos $(1, 2)$ e $(0, 0)$ pertencem ao rastro. A partir disso e de conhecimentos vistos no ensino médio, pode-se deduzir que a reta é da forma ax já que intercepta o eixo y na coordenada 0. Novamente pelo fato de o ponto $(1, 2)$ pertencer à reta, é possível concluir que $f'(x) = 2x$.

3. Função cúbica $f(x) = x^3$

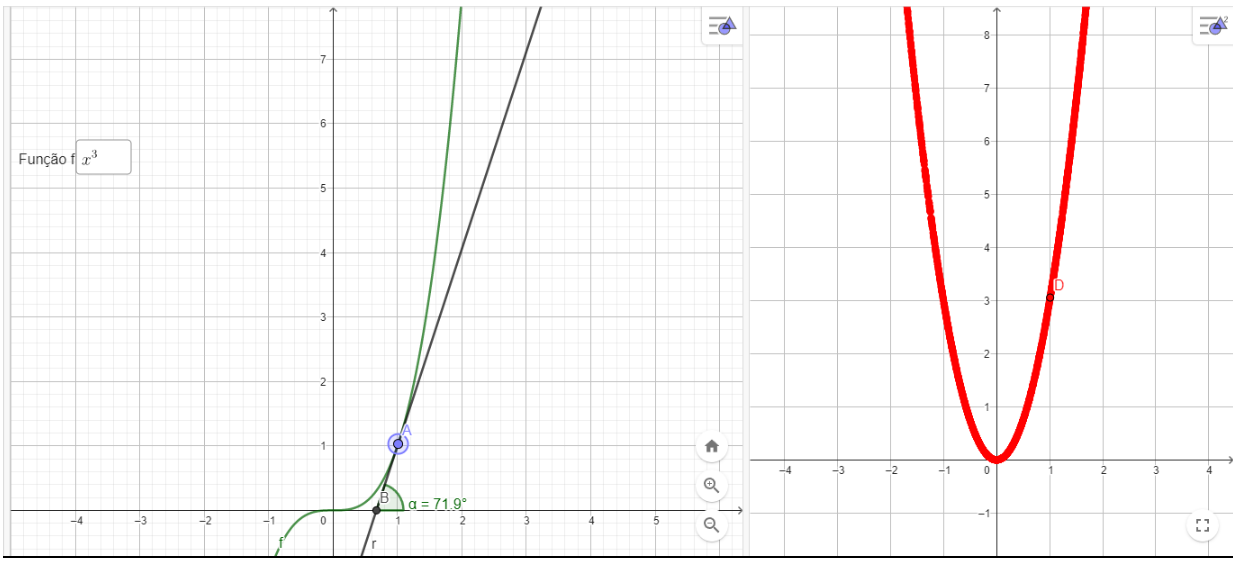


Figura 23 – Gráfico da função $f(x) = x^3$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

Com $f(x) = x^3$ e ao observar o rastro do ponto D, por conhecimentos do ensino médio, é possível supor que o rastro na janela 2D é uma parábola. Nesse caso, a parábola é da forma ax^2, pois, o vértice da parábola se encontra na origem do plano cartesiano. Como o ponto $(1, 3)$ pertence ao rastro do ponto D, temos que $a = 3$ e portanto $f'(x) = 3x^2$.

4. Função Seno $f(x) = \text{sen}(x)$

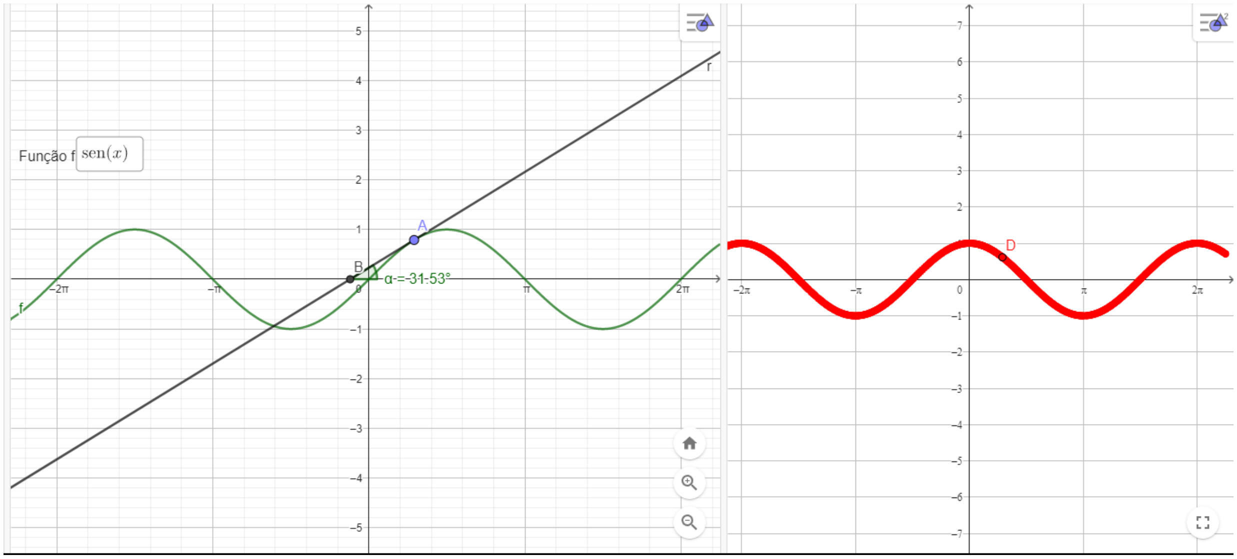


Figura 24 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

A função seno faz com que o rastro do ponto D se transforme em algo bem parecido com o próprio gráfico do seno. É possível observar que o gráfico foi transladado $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda, ou seja, temos a derivada como:

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(x) = \text{sen}(x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(x) = \cos(x).$$

Portanto, nesse caso, $f'(x) = \cos(x)$.

5. Função Cosseno $f(x) = \cos(x)$

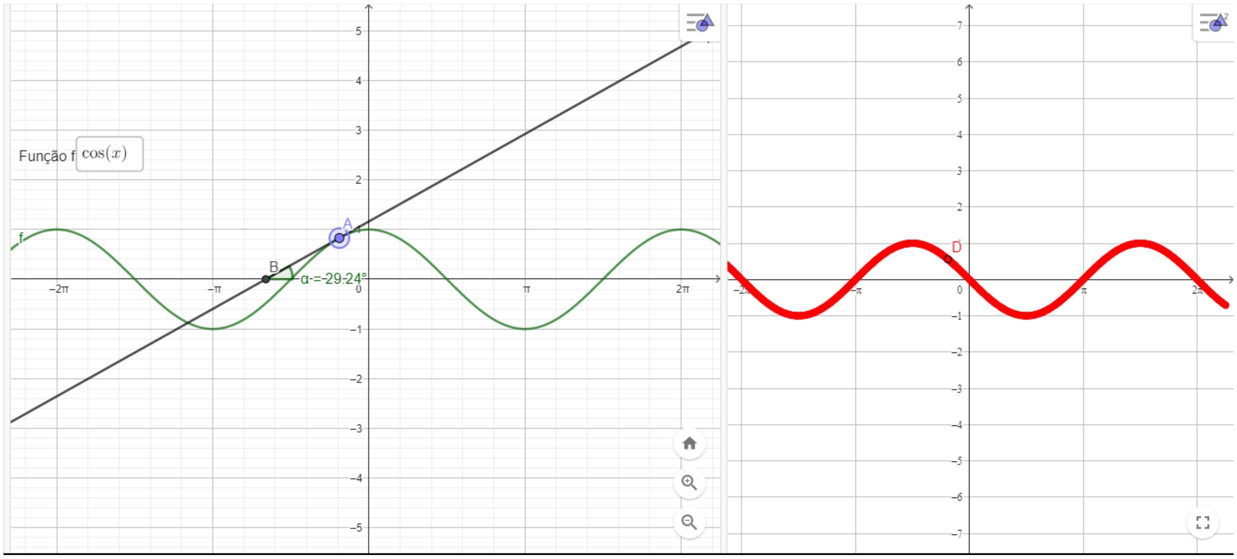


Figura 25 – Gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

No caso da função $\cos(x)$, que é bem similar ao da função $\text{sen}(x)$, novamente, é possível verificar que o gráfico foi transladado $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda, daí:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cdot 0 - \text{sen}(x) \cdot 1 = -\text{sen}(x)$$

Concluindo assim, que a derivada de $f(x) = \cos(x)$ é $f'(x) = -\text{sen}(x)$.

6. Função Exponencial $f(x) = e^x$

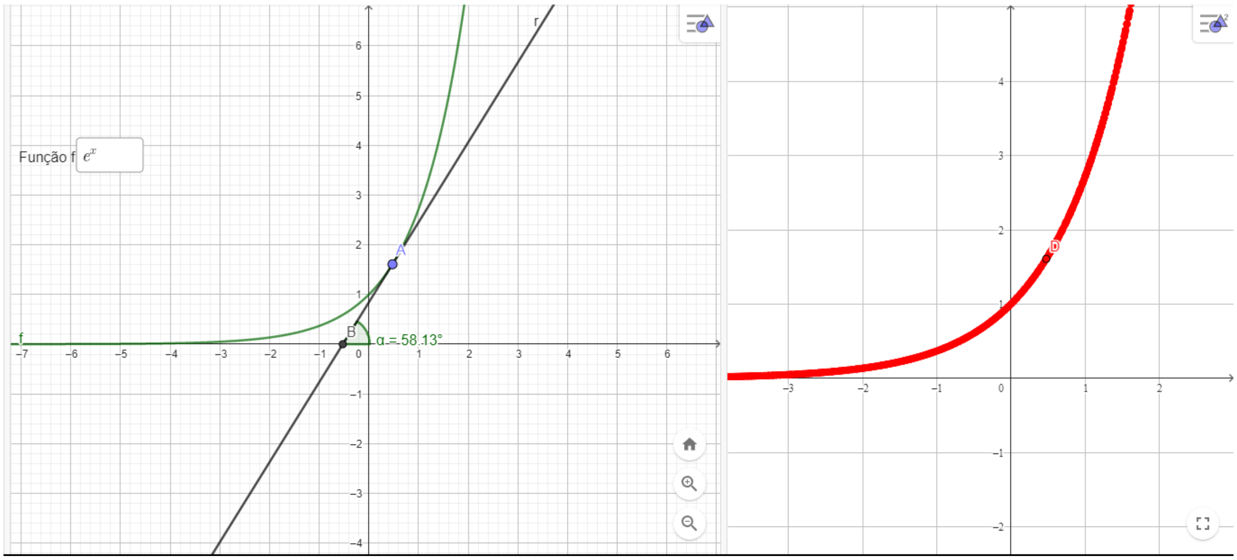


Figura 26 – Gráfico da função $f(x) = e^x$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

No caso $f(x) = e^x$, é possível observar que rastro do ponto D é bem similar ao da própria função $f(x) = e^x$. Uma segunda afirmação seria que o gráfico formado pelo rastro do ponto D também intercepta o eixo das ordenadas em $(0, 1)$. E para ter certeza que ambos os gráficos são iguais, basta que na própria janela 2D plotar o gráfico de e^x e confirmar que o rastro de D está exatamente sobre o gráfico de e^x. Sendo assim, a derivada de $f(x) = e^x$ é exatamente $f'(x) = e^x$.

7. Função Logaritmo $f(x) = \ln(x)$
Nesse caso, em que $f(x) = \ln(x)$, é interessante mostrar o gráfico de $\frac{1}{x}$, já que durante o ensino médio, esse tipo de gráfico, na maioria das vezes, não é explorado. E com essa pré atividade, associar que o rastro na janela 2D lembra o gráfico feito e, assim como na função exponencial, inserir o gráfico de $\frac{1}{x}$ e concluir que $f'(x) = \frac{1}{x}$.

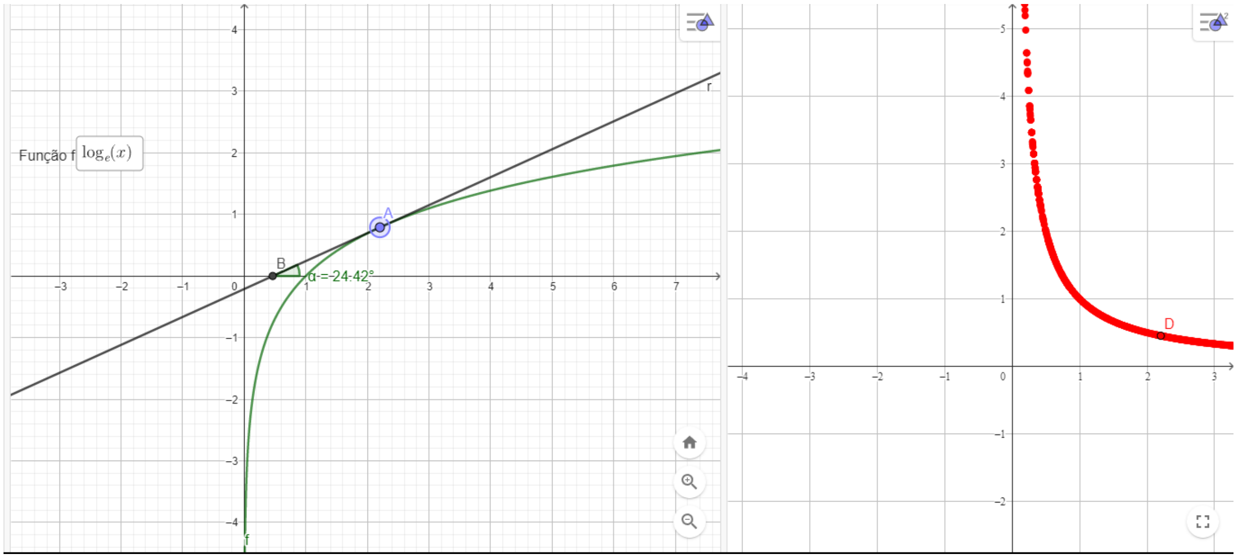


Figura 27 – Gráfico da função $f(x) = \ln(x)$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

No capítulo 4 será necessário utilizarmos derivadas de funções polinomiais com expoente negativo. Vejamos o exemplo $f(x) = x^{-1}$.

8. Função $f(x) = x^{-1}$

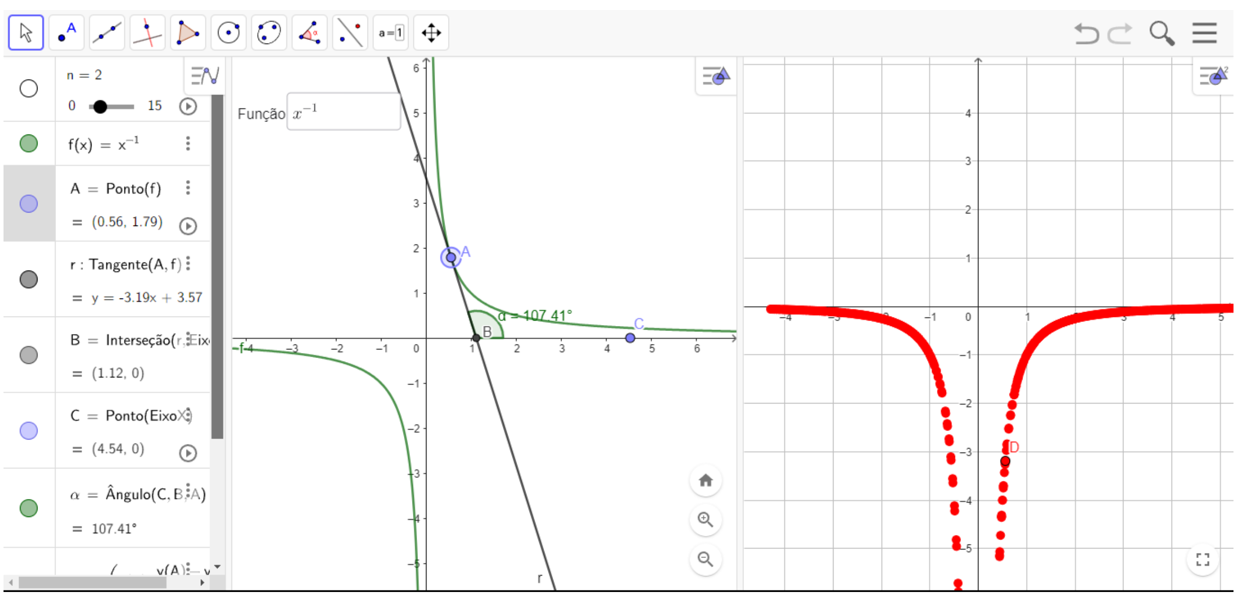


Figura 28 – Gráfico da função $f(x) = x^{-1}$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

O gráfico formado pelo rastro do ponto D não é um gráfico visto com frequência. Porém, baseados nos outros exemplos vistos anteriormente neste capítulo, é possivel supor que

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. A partir disso, podemos plotar o gráfico de $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ na janela 2D e verificar que ambos coincidem.

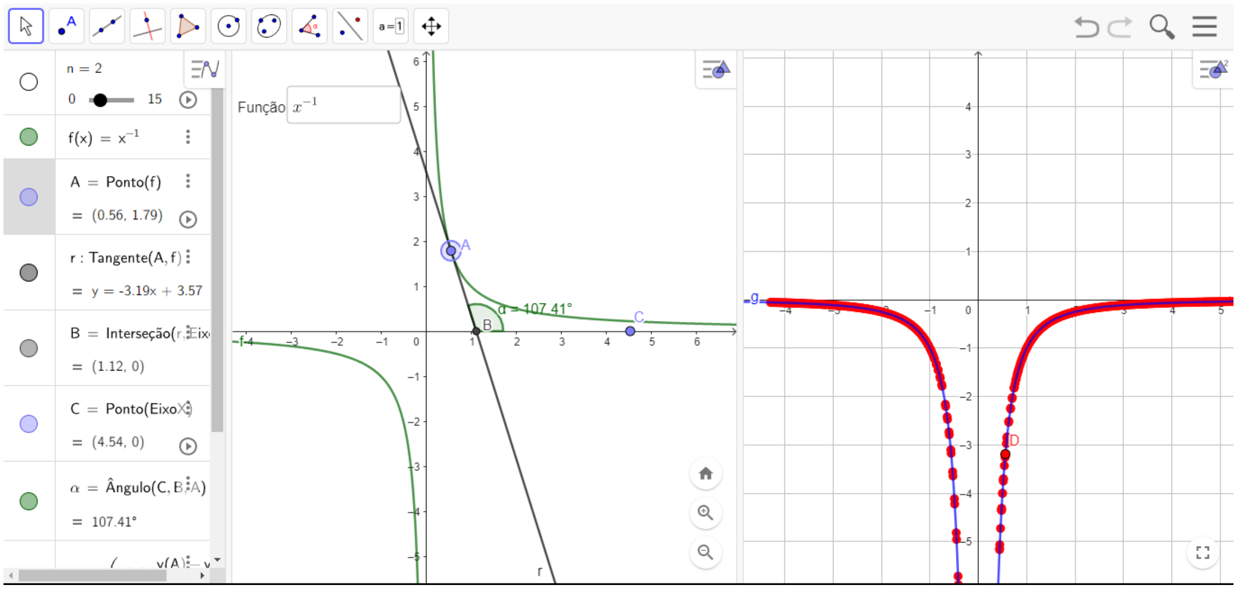


Figura 29 – Gráfico da função $f(x) = x^{-1}$, sua derivada e o gráfico de $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Fonte: elaborado pelo autor

Durante a atividade é possível, a construção de uma tabela para consulta por parte dos estudantes. Como a que se segue em que $c \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}^*$

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
c	0
x^m	$m \cdot x^{m-1}$
sen(x)	$\cos(x)$
$\cos(x)$	-sen(x)
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

A partir do nosso método, o gráfico da derivada de outras funções pode ser obtido, embora nem sempre seja fácil intuir qual a expressão da sua derivada. A seguir, colocamos dois exemplos de funções que são vistas com maior frequência no ensino médio e que também podem ser exploradas durante a atividade, mesmo não sendo fácil encontrar a expressão de suas derivadas através do rastro do ponto D.

9. Função Exponencial $f(x) = 2^x$

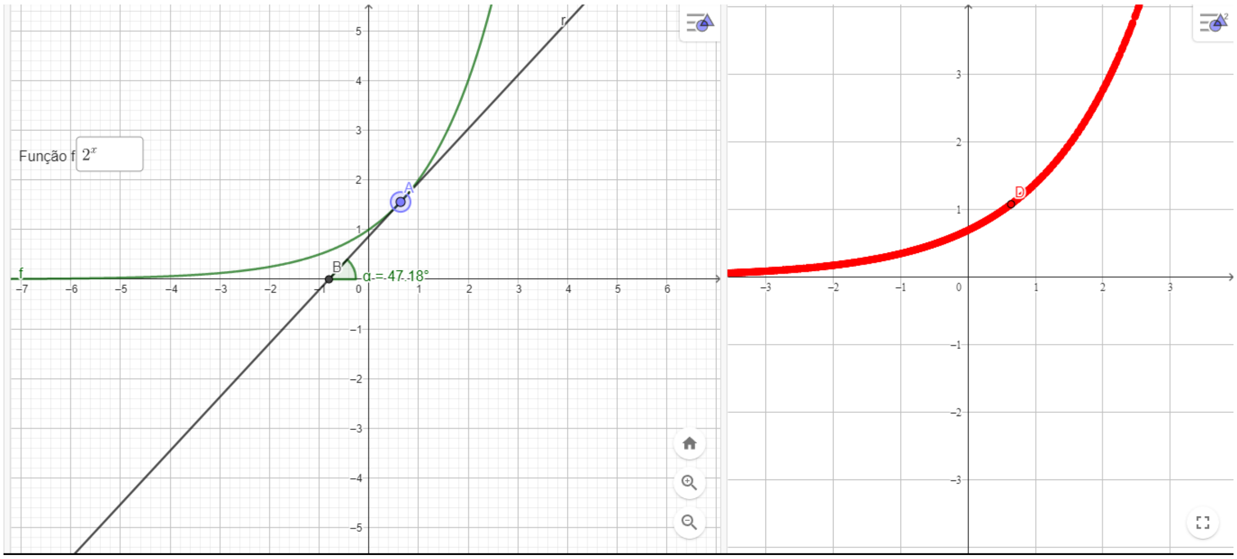


Figura 30 – Gráfico da função $f(x) = 2^x$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

10. Função Logaritmo $f(x) = \log_{10}(x)$

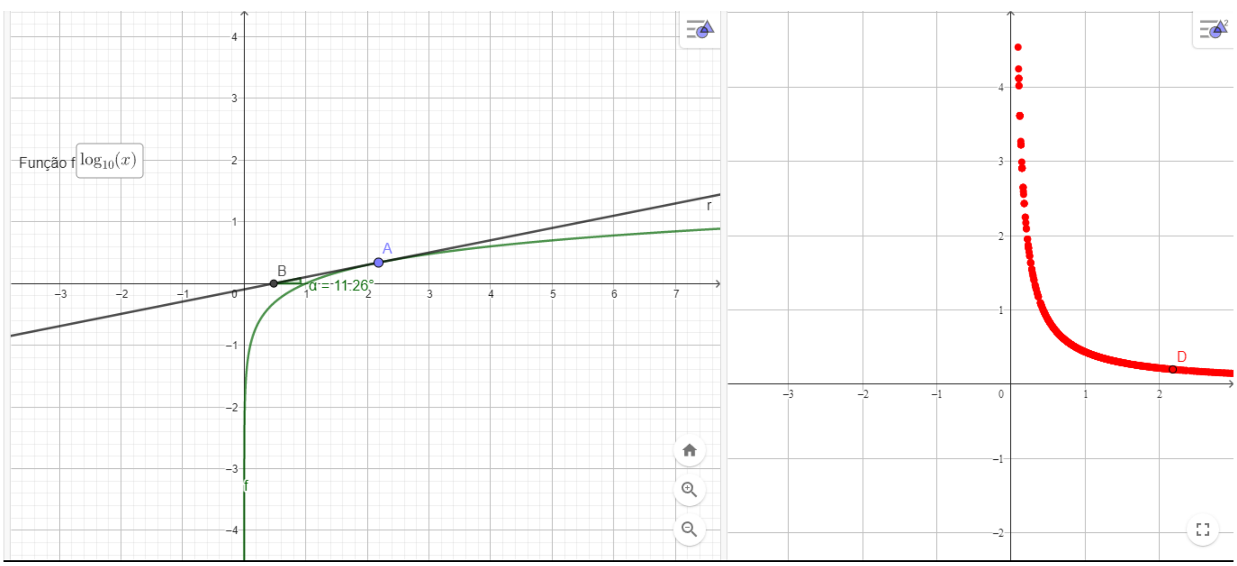


Figura 31 – Gráfico da função $f(x) = \log_{10}(x)$ e sua derivada.

Fonte: elaborado pelo autor

Capítulo 4

Regras de derivação

As regras de derivação são um conjunto de procedimentos que simplificam a determinação da derivada de uma função. Sendo assim, a partir dessas regras é possível encontrar a derivada de funções a partir de operações com derivadas de funções básicas conhecidas.

Nosso objetivo neste capítulo, é abordar uma maneira de se concluir as regras de derivação da soma e diferença de funções, produto e quociente entre funções e composta de funções. A discussão apresentada não é rigorosa do ponto de vista matemático, pois seria necessário o uso do conceito de limite (algo que evitamos neste texto) e essa discussão pode ser vista, por exemplo em (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014) ou (LIMA, 2004).

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = x_0$ é:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Quando x está relativamente próximo de x_0, temos a situção descrita na Figura 32.

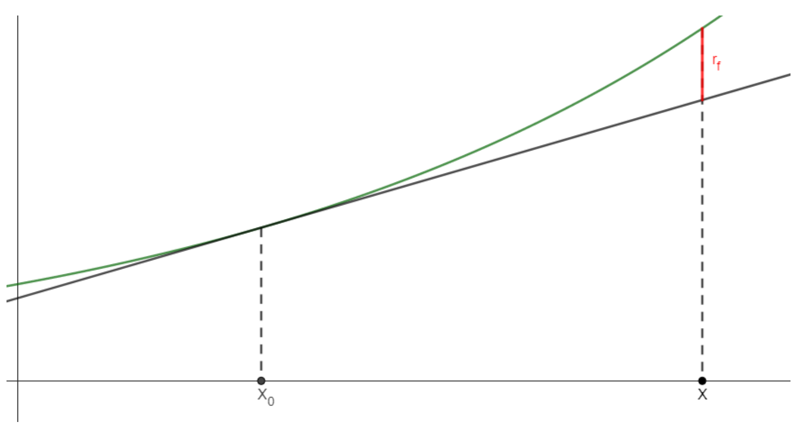


Figura 32 – Representação do resto r_f

Fonte: elaborado pelo autor

De modo que podemos escrever

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f. \tag{4.1}$$

Nos referiremos ao termo r_f como resto de f em x_0. Utilizaremos a ideia apresentada na Equação (4.1) para obtermos as propriedades operacionais da derivada.

Observação 4.0.1. *A rigor, a discussão acima diz que se f for derivável no ponto x_0, então vale (4.1). Nas discussões que se seguem, iremos utilizar a recíproca: se f puder ser escrita como*

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r_f$$

para algum $a \in \mathbb{R}$, então $a = f'(x_0)$. Essa afirmação, claramente não é verdadeira, pois, por exemplo, podemos escrever, para $f(x) = x^3$:

$$x^3 = x_0^3 + a(x - x_0) + r_f,$$

em que $r_f = x^3 - x_0^3 - a(x - x_0)$ e podemos ter $a \neq 3x_0^2 = f'(x_0)$ (a igualdade dada vale para qualquer $a \in \mathbb{R}$, bastando escolher o r_f de forma adequada). O que falta para obter a igualdade $a = f'(x_0)$ é justamente a hipótese

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_f}{x - x_0} = 0$$

e não estamos utilizando o conceito de limite. Embora saibamos que do ponto de vista matemático, a discussão que se segue não é totalmente correta, optamos por deixar no texto para dar uma noção de que as regras de derivação são válidas. Uma outra alternativa seria termos enunciado os resultados sem uma discussão, ainda que intuitiva, ideia esta que não seguimos.

Soma e diferença

Teorema 4.0.1. *Se f e g forem funções deriváveis em x_0, então $f \pm g$ também é derivável em x_0. Além disso, $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.*

Prova Intuitiva: Parece que f, g deriváveis, então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f \text{ e } g(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g, \tag{4.2}$$

obtemos

$$f(x) \pm g(x) = \left(f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f\right) \pm \left(g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g\right),$$

Parece que: Se 4.2 vale, então a função é derivável

$$(f \pm g)(x) = (f \pm g)(x_0) + (f' \pm g')(x_0) \cdot (x - x_0) + (r_f \pm r_g).$$

Observe que o resto de $f + g$ em x_0 é dado por $(r_f \pm r_g)$ e, portanto, de acordo com (4.1), tem-se $(f \pm g)'(x_0) = (f' \pm g')(x_0)$.

Produto

Teorema 4.0.2. *Se f e g forem deriváveis em x_0 então $f(x) \cdot g(x)$ também é derivável em x_0 e temos, $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.*

Prova Intuitiva:

Partindo novamente do fato de que f e g são deriváveis então por 4.1 temos:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f$$

e

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g,$$

temos que:

$$f(x) \cdot g(x) = (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f) \cdot (g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g).$$

Realizando a multiplicação

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) = {} & f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \cdot r_g + f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0) \\ & + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot r_g + r_f \cdot (g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g)\end{aligned}$$

que é reescrita como:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) = {} & f(x_0) \cdot g(x_0) + (f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)) \cdot (x - x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ & + r_f \cdot (g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g) + r_g \cdot (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)).\end{aligned}$$

Como enfatizado, r_f e r_g são os resto de f e g, dessa forma, o resto de $f \cdot g$ é:

$$f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + r_f \cdot (g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g) + r_g \cdot (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)).$$

Chamaremos a atenção que se a diferença $x - x_0$ for bem pequena (próxima a zero), podemos afirmar que $(x - x_0)^2$ é ainda mais próximo de zero. Portanto, por (4.1), concluímos que $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$.

Regra da cadeia

Teorema 4.0.3. *Se g e f forem deriváveis em x_0, caso exista $g \circ f$, então $g \circ f$ também é derivável em x_0. Além do que $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.*

Prova Intuitiva: Partindo de $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f$ e $g(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g$, podemos destacar que:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f. \tag{4.3}$$

Também temos que somando e subtraindo $f(x_0)$ em $g(f(x))$, obtemos:

$$g(f(x)) = g(f(x_0) + f(x) - f(x_0)).$$

Pela definição de $g(x)$ e assumindo que $f(x)$ próximo de $f(x_0)$ se x próximo (o que é válido se f for contínua). Novamente por (4.1) e utilizando $x = f(x)$, temos que

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot (f(x) - f(x_0)) + r_g. \tag{4.4}$$

Utilizando (4.3) em (4.4):

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f) + r_g$$

Reagrupando

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot (x - x_0) + g'(f(x_0)) \cdot r_f + r_g$$

Novamente, nos valendo do fato de que r_f e r_g são os restos de f e g respectivamente, serem muito próximos a zero, consta que $[g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Quociente

Teorema 4.0.4. *Se g e f forem deriváveis em x_0 e com $g \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ também é derivável em x_0. Portanto, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.*

Prova Intuitiva: Utilizaremos a Regra do Produto e a Regra da Cadeia que acabamos de concluir, para verificar a regra do quociente. Seja

$$g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow g'(x) = -x^{-2}. \tag{4.5}$$

Também é válido que

$$g(f(x)) = \frac{1}{f(x)}. \tag{4.6}$$

Logo, pelo Teorema 4.0.3,

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

aplicando (4.5)

$$[g(f(x))]' = -(f(x))^{-2} \cdot f'(x).$$

Portanto,

$$[g(f(x))]' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Finalmente, vamos calcular $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$. Notemos que

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'.$$

Agora podemos utilizar a regra do produto em $\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'$, obtendo

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'.$$

Por (4.5), temos $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$, daí:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g(x)}{(g(x))^2}\right).$$

Fazendo o mínimo múltiplo comum, concluímos que:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Sendo assim, concluímos este capítulo com as regras de derivação.

CAPÍTULO 5

Método de Newton

O método de Newton é uma técnica matemática utilizada para encontrar a raiz de uma função, essencialmente, utilizando a inclinação do gráfico da função para aproximar cada vez mais a raiz. Temos que C^1 é o conjunto de funções que possuem derivada de primeira ordem e C^2 é o conjunto de funções que possuem derivada de segunda ordem. Seja $f \in C^1[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$ tal que x_0 é uma aproximação da raiz x de f, ou seja, x_0 pode ser qualquer ponto dado que inicialmente pertença ao intervalo $[a,b]$. O coeficiente angular da reta tangente a f no ponto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ é a derivada $f'(x_0)$. Tomando (x,y) é um ponto da reta, temos que:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0).$$

A partir disso e sabendo que $y_0 = f(x_0)$, podemos isolar y

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

o que equivale a

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Portanto,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Se $y = 0$, temos

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e, aplicando a distributividade

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot (x_0)$$

isolando $f'(x_0) \cdot x$

$$f'(x_0) \cdot x = f'(x_0) \cdot (x_0) - f(x_0)$$

dividindo ambos os lados por $f'(x_0)$

$$x = \frac{f'(x_0) \cdot (x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

concluímos que:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Denominamos x_1 como sendo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Assim, x_1 é a nova aproximação da raiz.

Geometricamente, o método de Newton para o cálculo de aproximação de raízes de funções pode ser visualizado como um processo de aproximação sucessiva de uma curva não-linear a uma linha reta.

Em síntese, o método de Newton usa uma reta tangente à curva da função em um ponto para estimar a localização da raiz da função. O ponto de interseção entre a reta tangente e o eixo x é a nova estimativa da raiz, que, dessa forma, é usada para para construir uma nova reta tangente e encontrar uma estimativa ainda mais precisa da raiz. Esse processo é repetido várias vezes até que a estimativa da raiz convirja para um valor que será a raiz procurada.

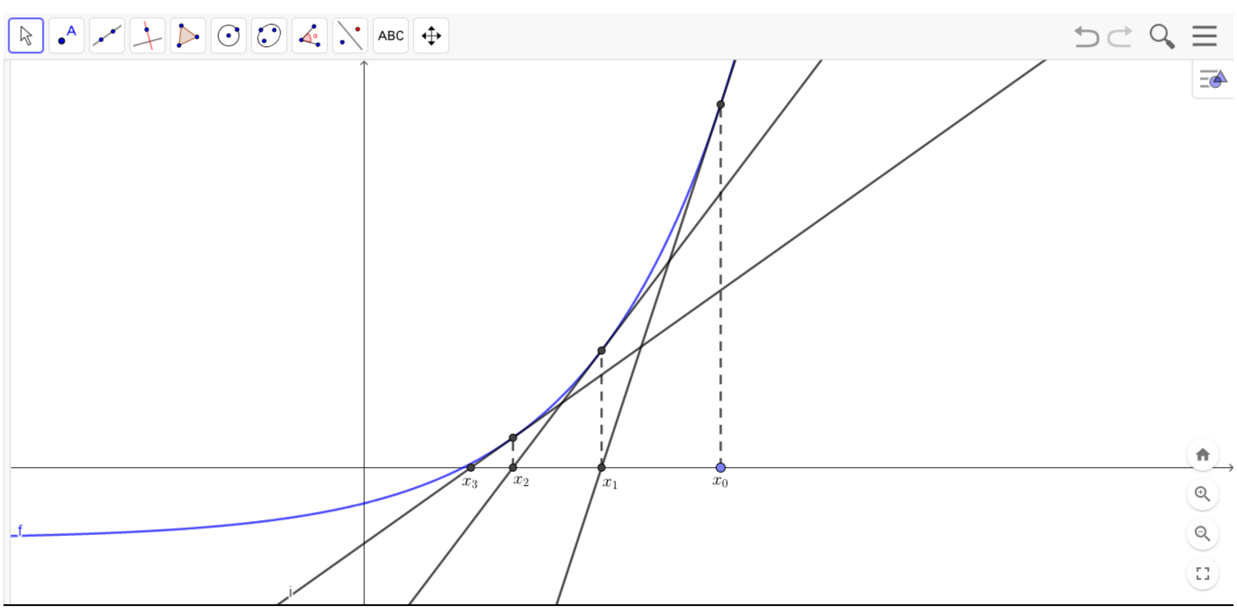


Figura 33 – Método de Newton

Fonte: elaborado pelo autor

Porém, nem sempre essa ideia geométrica fornece uma sequência que converge para a raiz x. Na próxima seção, veremos que se o valor de x_0 for próximo o suficiente da raiz procurada, a sequência (x_n), obtida pela equação

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}}{f'(x_{n-1})},$$

irá convergir para a raiz x de f. É importante lembrar que o método de Newton pode falhar ou ser lento se a estimativa inicial estiver muito longe da raiz real ou se a função tiver propriedades complicadas.

5.0.1 Convergência do método de Newton

Vejamos um teorema que garante a convergência da sequência (x_n) para a raiz x.

Teorema 5.0.1. *Seja $f \in C^2[a,b]$. Se $x \in (a,b)$ for tal que $f(x) = 0$ e que $f'(x) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que para qualquer aproximação $x_0 \in [x-\delta, x+\delta]$ o método de Newton gera uma sequência (x_n) que converge para x.*

Demonstração. Vamos considerar a função $S(x_{n+1}) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Podemos observar que: x é raiz de $f \Leftrightarrow x$ for ponto fixo de S.

Temos que f' é contínua, $f'(x) \neq 0$, então existe $\alpha > 0$ tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in [x-\alpha, x+\alpha] \subseteq [a,b]$.

Seja

$$\begin{aligned} &T : I \to \mathbb{R} \\ &T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Podemos afirmar que $T(z)$ está bem definida e contínua em $[x-\alpha, x+\alpha]$. Ao calcularmos $T'(z)$ temos:

$$T'(z) = 1 - \frac{f'(z) \cdot f'(z) - f(z) \cdot f''(z)}{(f'(z))^2}$$

portanto:

$$T'(z) = \frac{f(z) \cdot f''(z)}{(f'(z))^2},$$

para $z \in [x-\alpha, x+\alpha]$. Como $f \in C^2[a,b]$, logo $T \in C^1[x-\alpha, x+\alpha]$. Como $f(x) = 0$ então

$$T'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = 0.$$

Como T' é contínua, dado $0 < k < 1$ existe δ que satisfaz $0 < \delta < \alpha$ de tal forma que $|T'(z)| \leq k$ para todo $z \in [x - \delta, x + \delta]$. Precisamos que T seja uma contração para podermos aplicar o ponto fixo de Banach. Se $y \in [x - \delta, x + \delta]$ temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe um número c entre x e y tal que

$$\frac{T(y) - T(x)}{y - x} = T'(c)$$

portanto:

$$T(y) - T(x) = T'(c) \cdot (y - x)$$

e daí:

$$|T(y) - T(x)| = |T'(c)| \cdot |y - x|.$$

Lembremos que x é ponto fixo de $T(x)$ pois $f(x) = 0$. Logo,

$$|T(y) - x| = |T(y) - T(x)| = |T'(c)| \cdot |y - x| \leq k \cdot |y - x| < |y - x|.$$

Como $y \in [x - \delta, x + \delta]$, podemos afirmar que $|y - x| < \delta$ e que $|T(y) - x| < \delta$. Concluímos que T aplica $[x - \delta, x + \delta]$ em $[x - \delta, x + \delta]$ e que T é contração.

Aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, podemos afirmar que a sequência (x_n) tal que:

$$x_n = T(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

converge para x desde que a estimativa inicial x_0 esteja contido em $(x - \delta, x + \delta)$.

$\square$

CAPÍTULO 6

GeoGebra e o Método de Newton

Nos capítulos anteriores, definimos e apresentamos a geometria relativa ao conceito de derivada. Neste capítulo, apresentaremos uma atividade que foi planejada para trabalhar o modelo de Newton no software GeoGebra.

6.1 Atividade

Vamos descrever um roteiro passo a passo para a construção de uma ferramenta no *software* para a aplicação do Método de Newton.

Roteiro

1. Retire a malha e crie uma função f qualquer, por exemplo $f(x) = x^3$

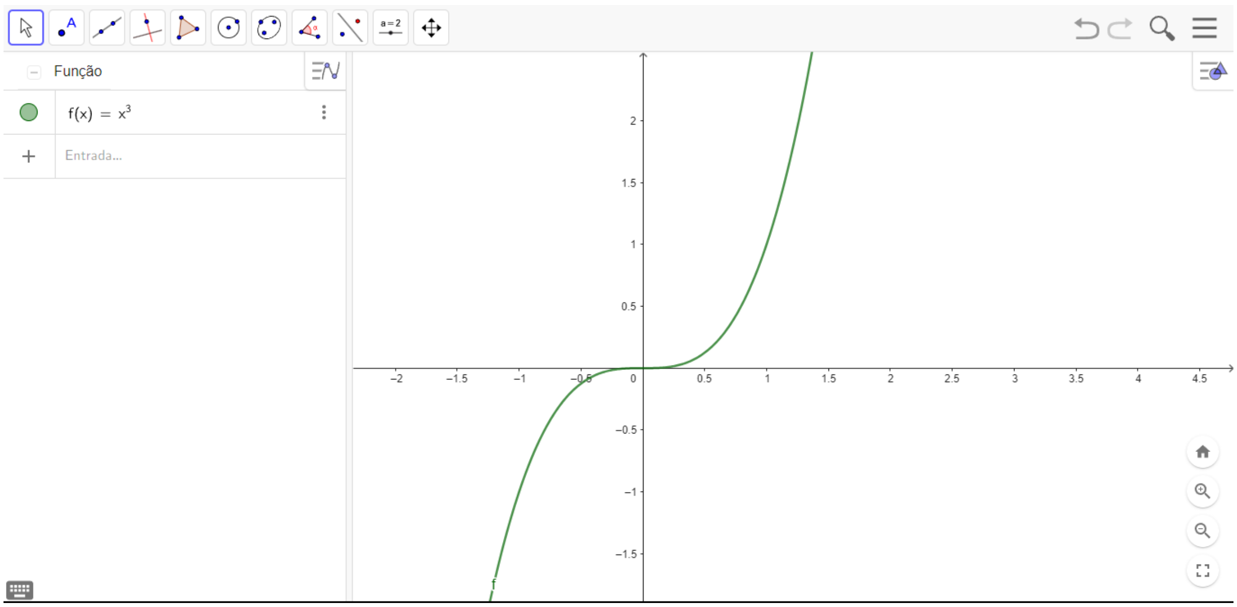


Figura 34 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 1.

Fonte: elaborado pelo autor

2. Utilize a ferramenta "Campo De Entrada"e vincule $f(x)$ a esse campo de entrada.

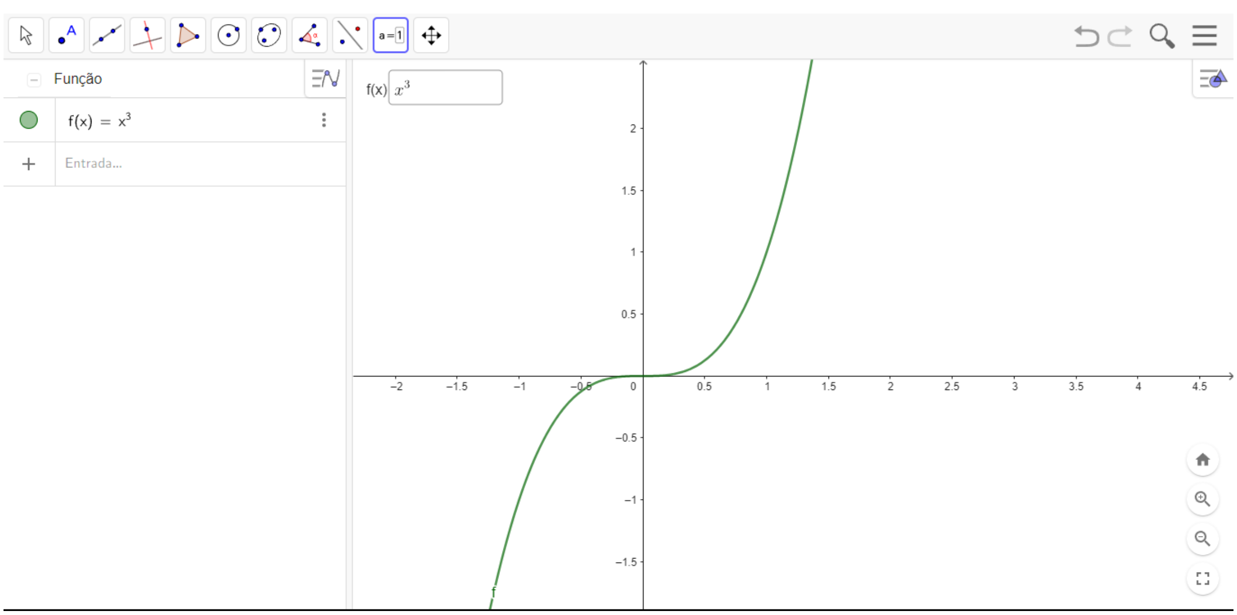


Figura 35 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 2.

Fonte: elaborado pelo autor

3. Crie um controle deslizante X, em seguida, crie um campo de entrada nomeado de "Estimativa inicial x_0" e vincule-o ao controle deslizante X.

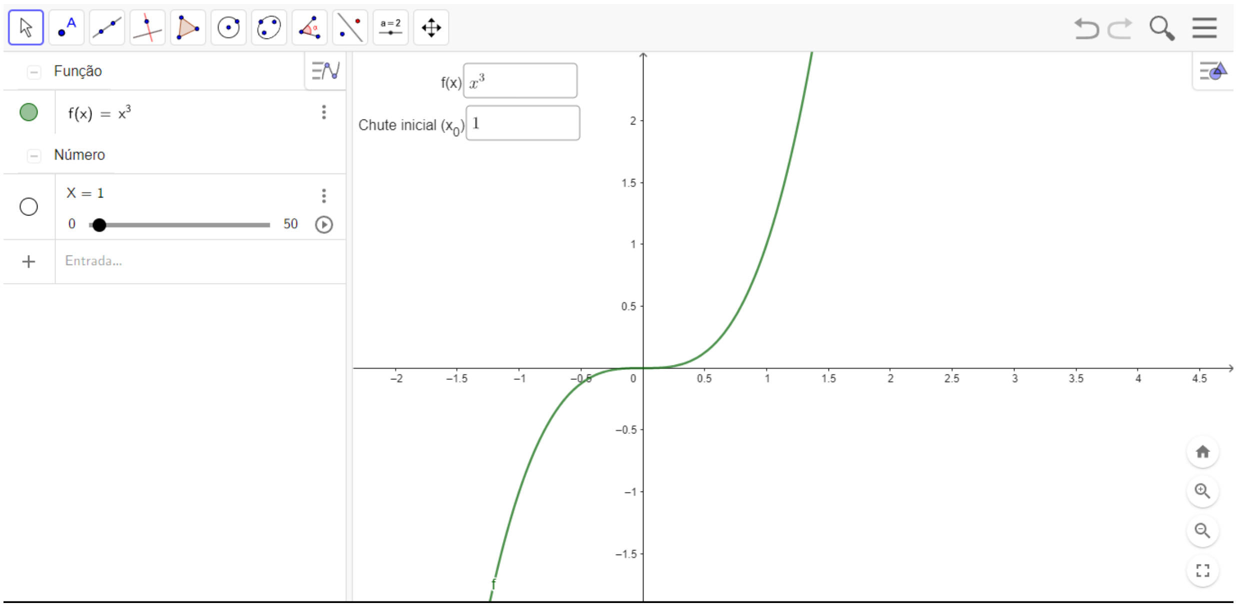


Figura 36 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 3.

Fonte: elaborado pelo autor

4. Crie um novo controle deslizante denominado "iterações" e o configure com valor mínimo igual a zero, valor máximo 50 e incremento sendo 1.

Figura 37 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 4.

Fonte: elaborado pelo autor

5. Utilize o comando Derivada na caixa de entrada para calcular a derivada da função f.

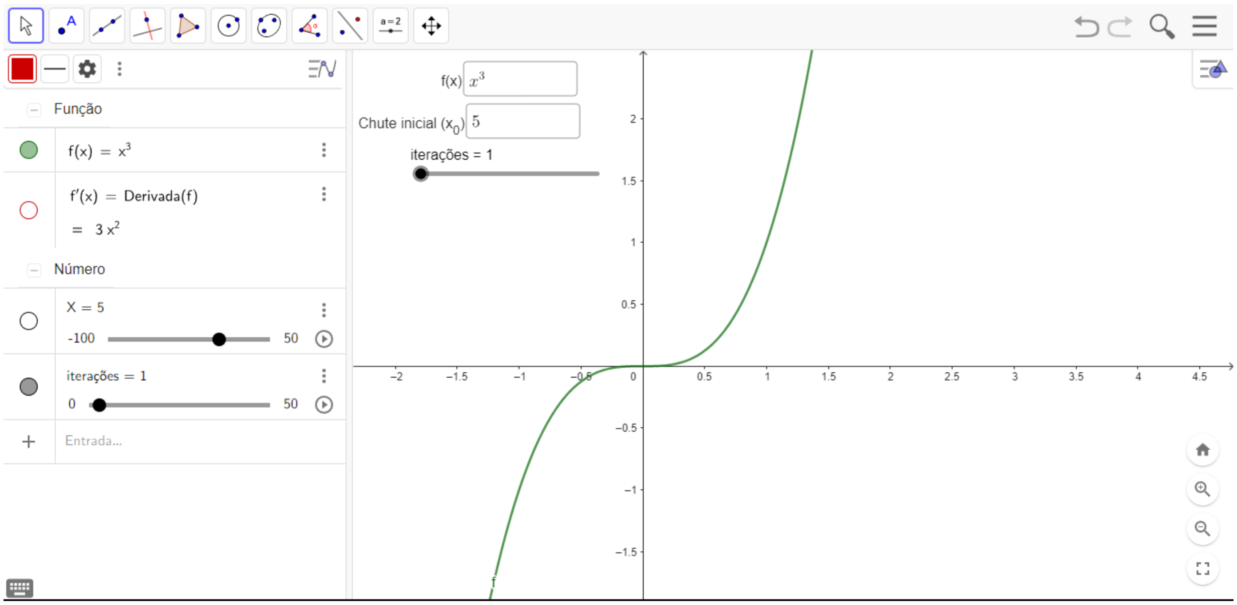


Figura 38 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 5.

Fonte: elaborado pelo autor

6. Será necessário utilizar o comando ListaDeIteração, para isso, digite na caixa de entrada: ListaDeIteração(X - f(X) / f'(X), X, {X}, iterações). Esta será a lista l1 que listará as aproximações do método de Newton para a função f a partir do valor inicial X.

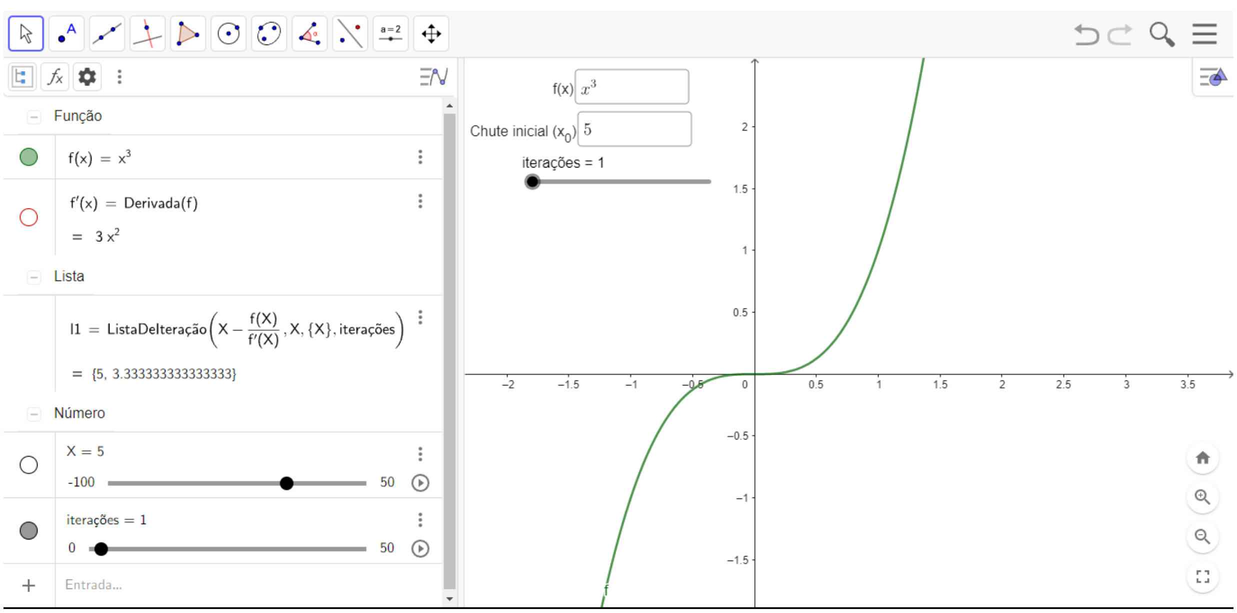


Figura 39 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 6.

Fonte: elaborado pelo autor

7. Para marcar os pontos de aproximação no eixo das abscissas, digite o seguinte comando na caixa de entrada: (l1,0). Essa será a l2.

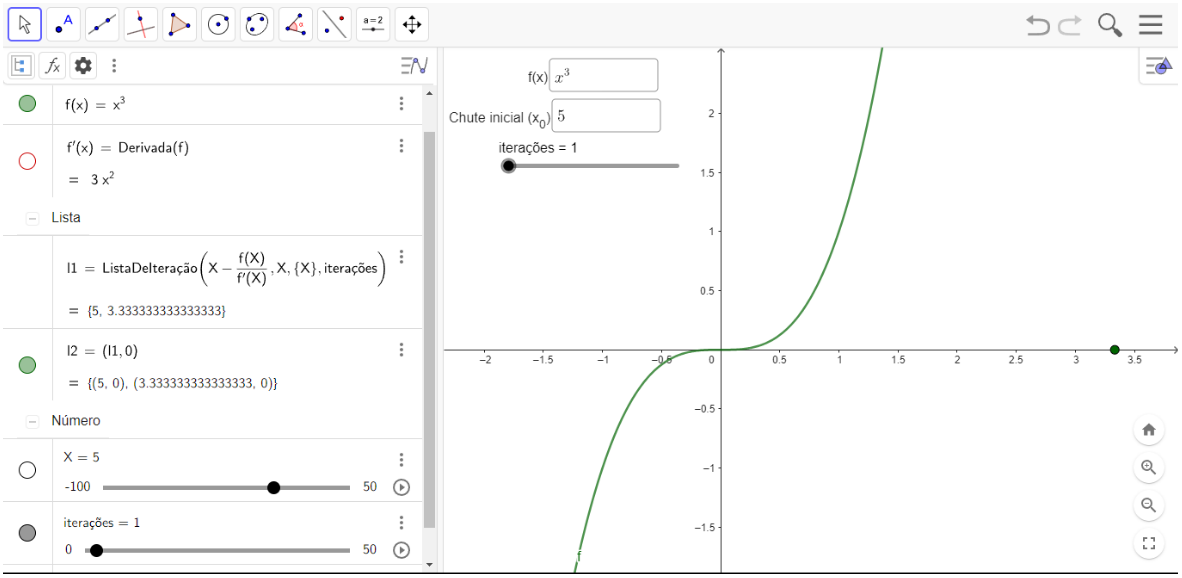


Figura 40 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 7.

Fonte: elaborado pelo autor

8. Para exibir as retas tangentes à função f para cada aproximação feita, precisamos criar uma lista l3. Basta digitar o seguinte comando na caixa de entrada: (l1, f(l1)). Essa será a l3 que será utilizada no passo seguinte.

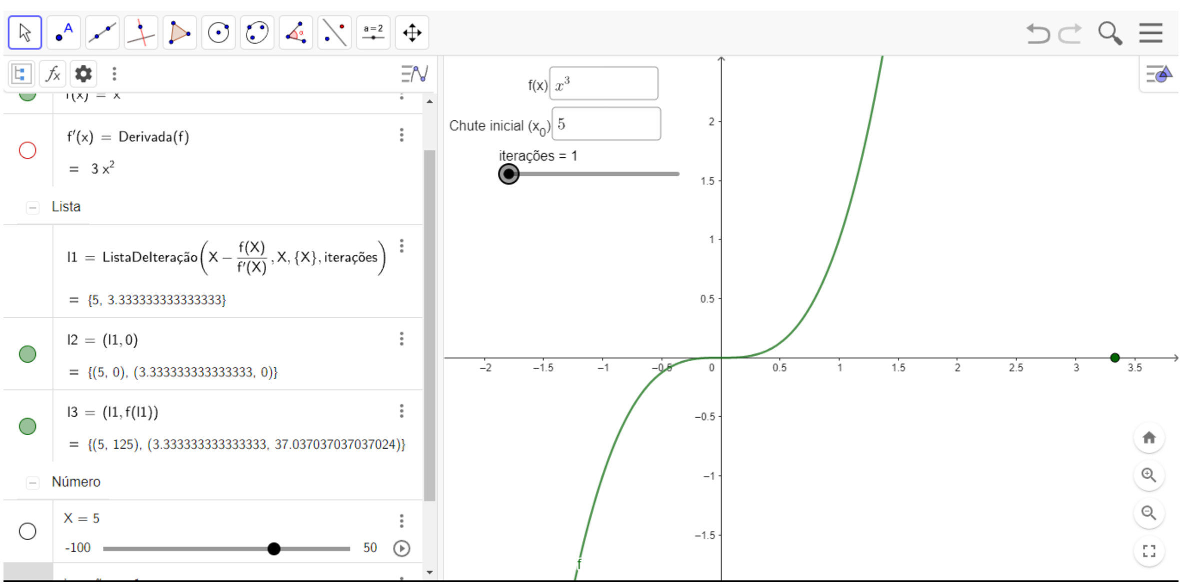


Figura 41 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 8.

Fonte: elaborado pelo autor

9. Como queremos evidenciar as retas tangentes, precisaremos utilizar o comando de sequências. Digite no caixa de entrada: Sequência(Tangente(l3(i), f), i, 1, iterações, 1). Essa será a l4.

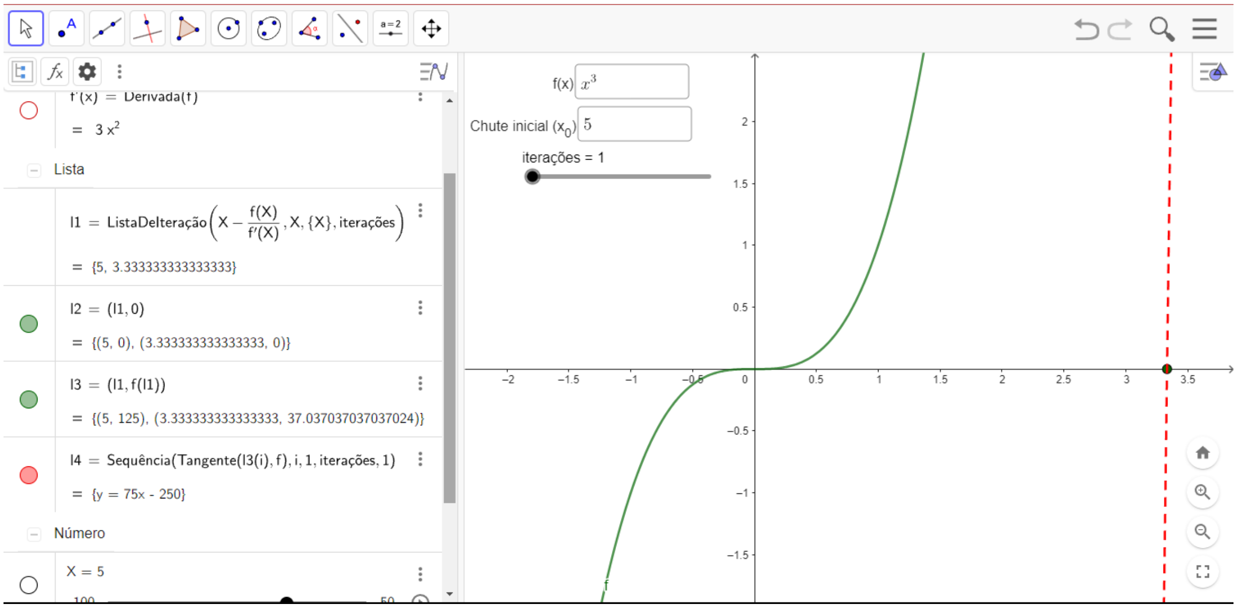


Figura 42 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 9.

Fonte: elaborado pelo autor

10. Abra a função planilha dentro do próprio GeoGebra. (Aba lateral direita)

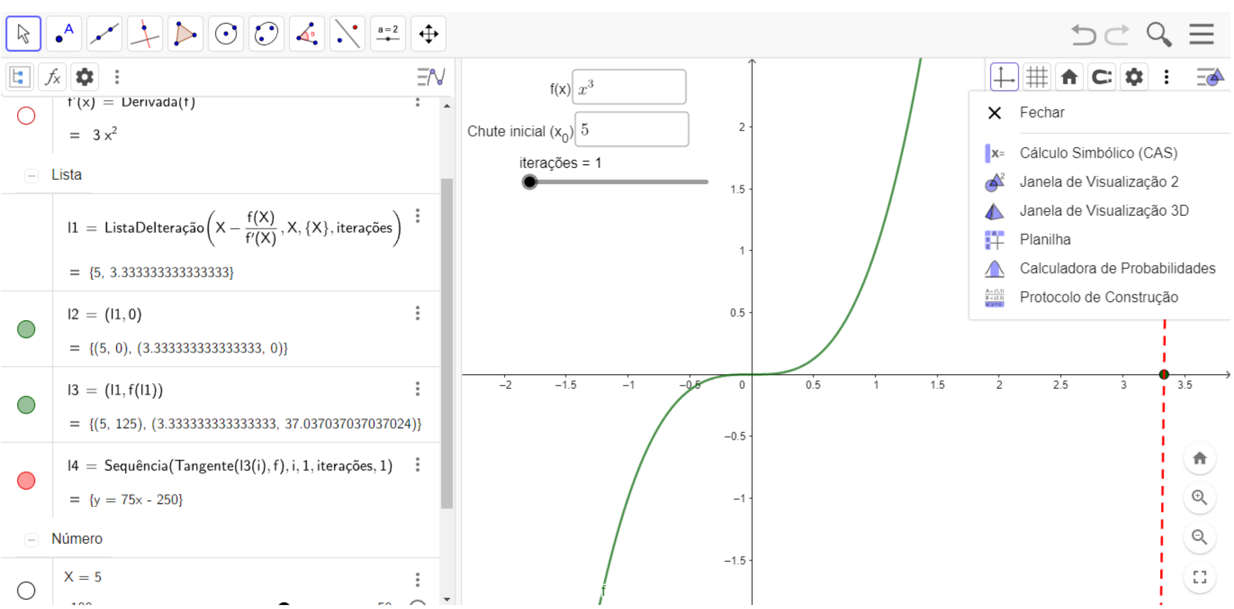


Figura 43 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 10.

Fonte: elaborado pelo autor

11. Digite na célula A1 a estimativa inicial X

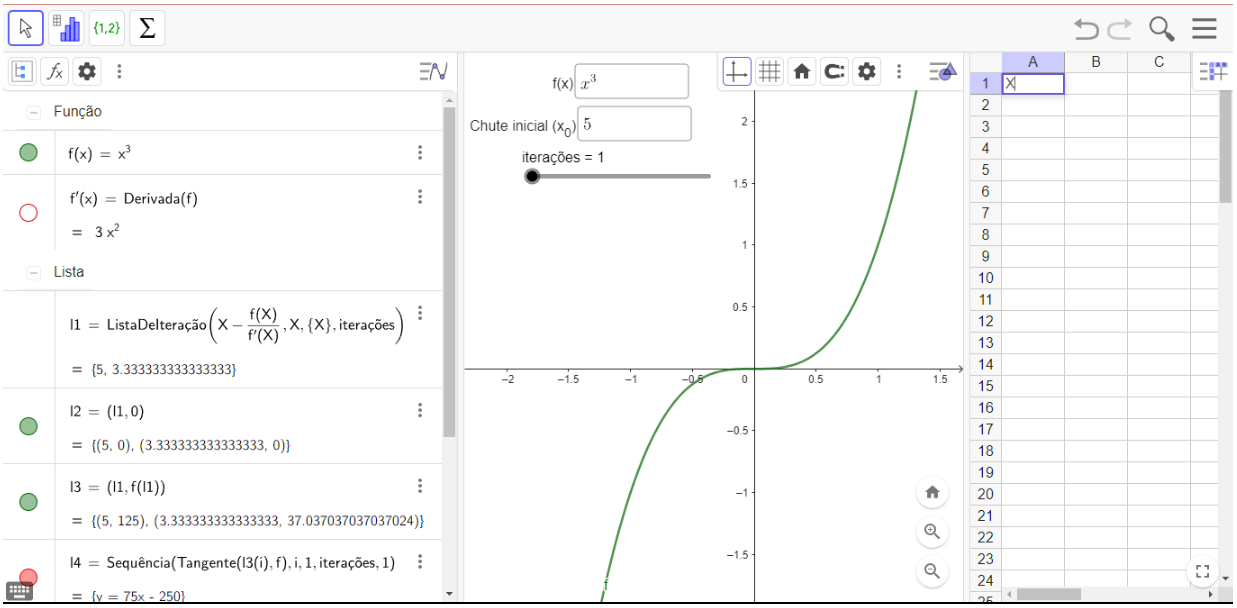


Figura 44 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 11.

Fonte: elaborado pelo autor

12. Digite nas célula B1 e A2: A1 - f(A1) / f'(A1)

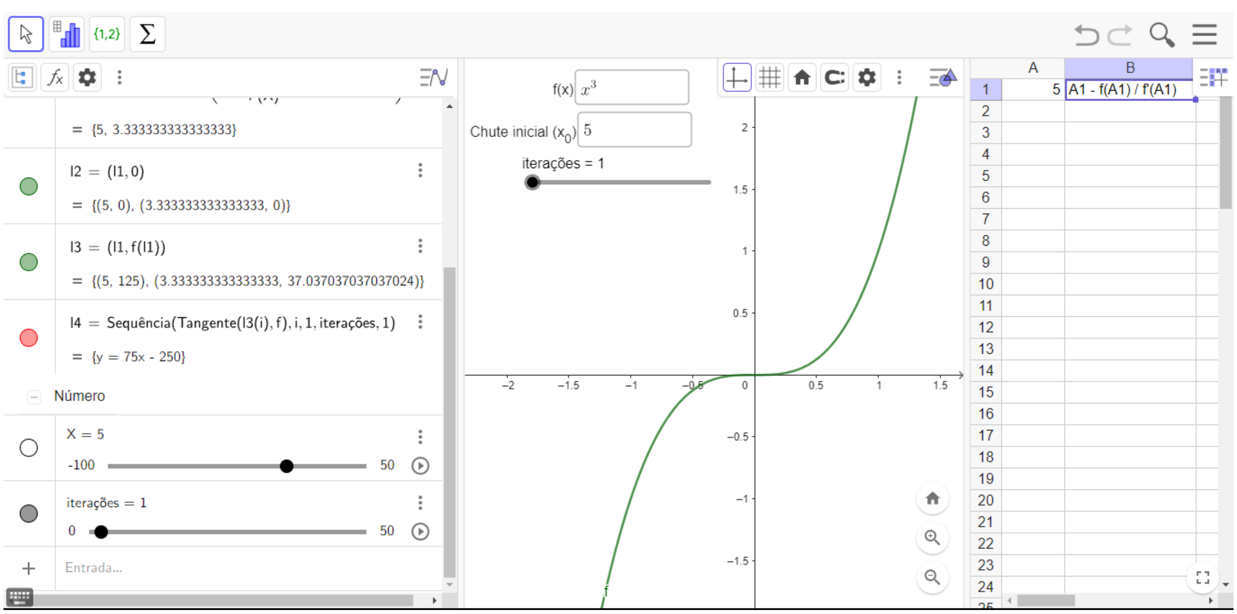


Figura 45 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 12.

Fonte: elaborado pelo autor

13. Agora basta arrastar as células A2 e B1 para a quantidade de iterações desejadas, por exemplo, 10 iterações.

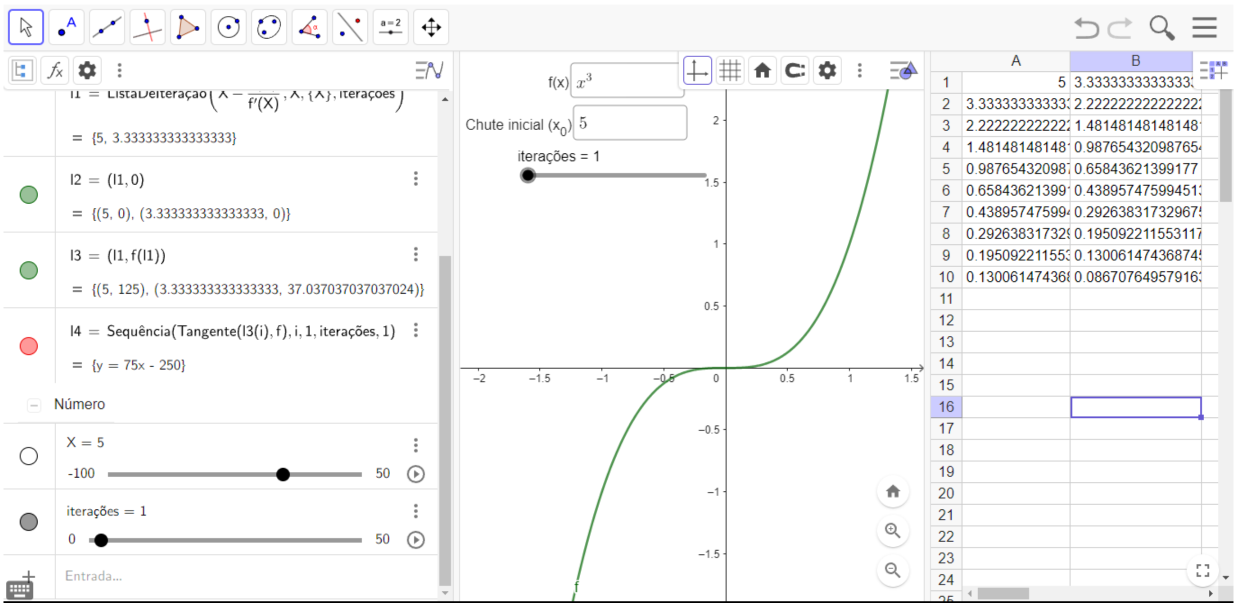


Figura 46 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 13.

Fonte: elaborado pelo autor

14. Por fim, é possível aumentar o número de iterações com o uso do controle deslizante e o número de iterações na tabela.

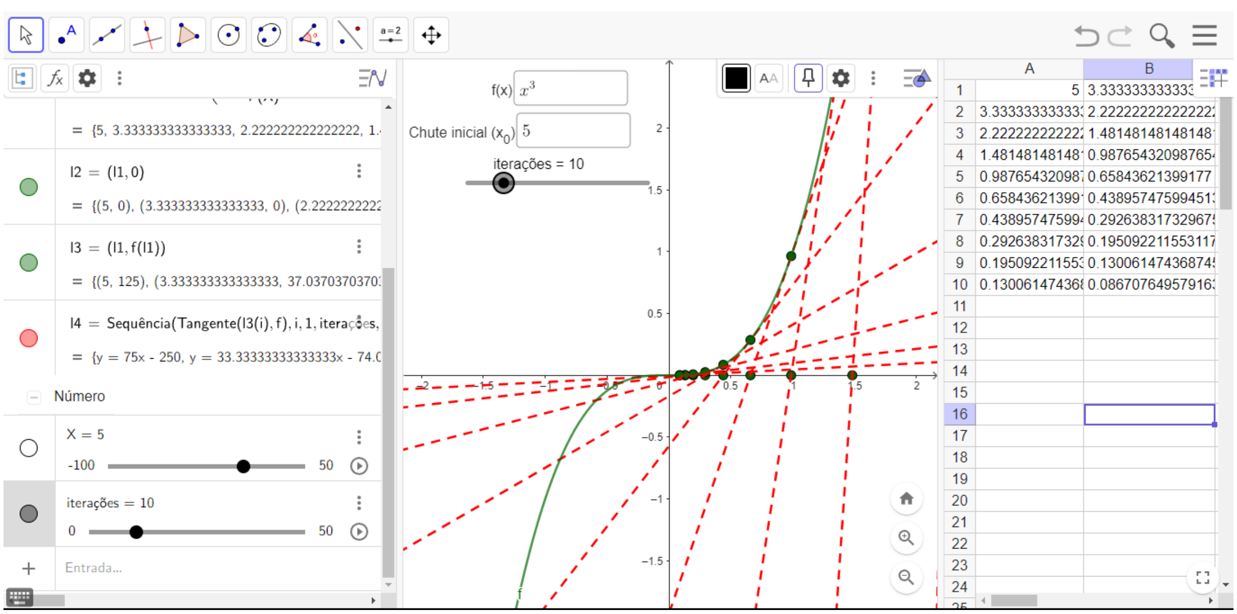


Figura 47 – Roteiro do Método de Newton - Etapa 14.

Fonte: elaborado pelo autor

6.2 Exemplos da aplicação do Método de Newton no GeoGebra

Vejamos a seguir alguns exemplos utilizando o método de Newton implementado no arquivo descrito no roteiro. Relembrando que é possível garantir que o método de Newton converge se o chute inicial x_0 estiver numa vizinhança próxima o suficiente da raiz procurada. Já evidenciamos isso quando discutimos a convergência do método, mas, devemos relembrar para justificarmos as estimativas iniciais escolhidos em cada exemplo.

1. Aproximar $\sqrt{2}$ utilizando o Método de Newton.

   Para conseguirmos aproximar o valor de $\sqrt{2}$ utilizaremos a função $f(x) = x^2 - 2$, já que é fácil ver que $\sqrt{2}$ é raiz dessa função. Como sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$, utilizamos o chute inicial $x_0 = 2$ e é possível observar que após 5 iterações já temos um valor aproximado com precisão de 12 casas decimais.

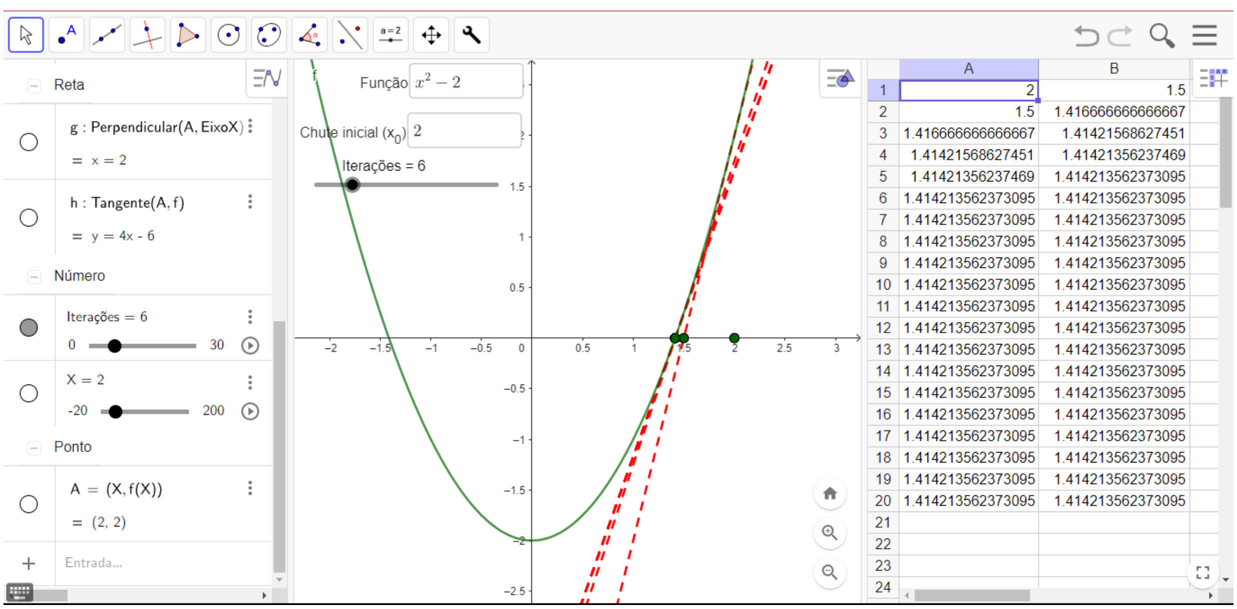


Figura 48 – Exemplo: $\sqrt{2}$.

Fonte: elaborado pelo autor

2. Encontrar uma raiz de $f(x) = x^5 - x - 1$

   Temos que $f(1) = -1$ e que $f(2) = 29$, portanto, existe uma raiz de $f(x)$ entre 1 e 2.

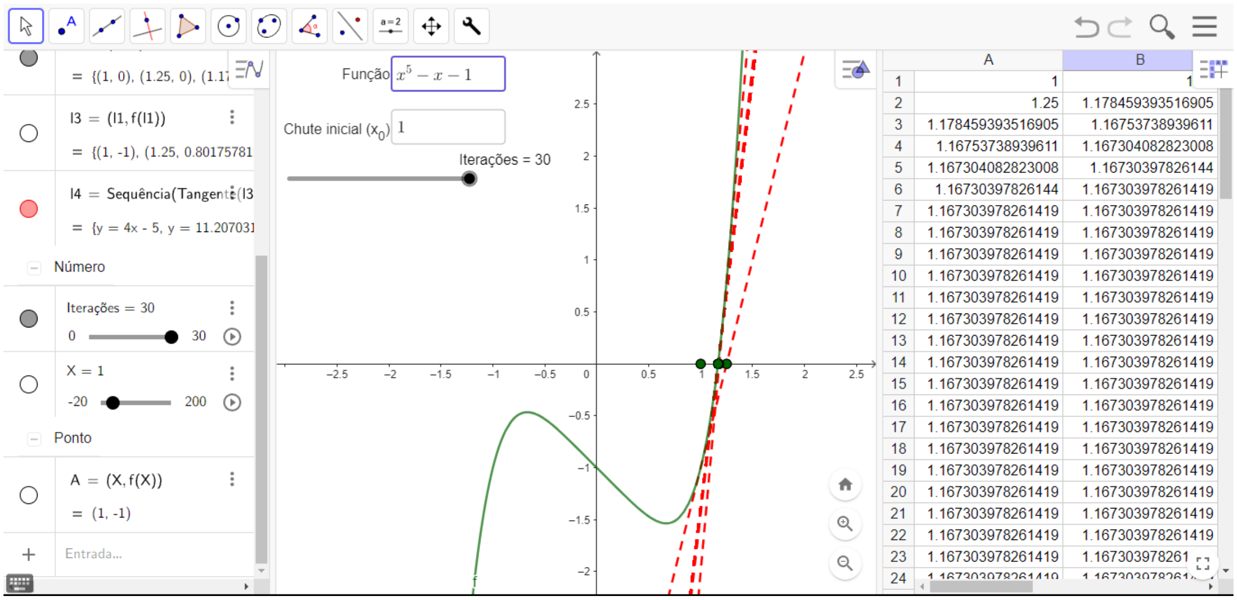


Figura 49 – Exemplo: $f(x) = x^5 - x - 1$.

Fonte: elaborado pelo autor

Tomando $x_0 = 1$, após 6 iterações, obtemos uma aproximação da raiz com precisão de 15 casas decimais.

O exemplo a seguir, nos mostra um caso de uma função que apesar da estimativa inicial $x_0 = 100$ não pertencer a uma vizinhança relativamente próxima da raiz, a sequência (x_n) ainda converge para a raiz da função.

3. Encontrar a uma raiz da função $f(x) = x^5 - x + \frac{1}{3}$.

   Como $f(-2) = -\frac{89}{3}$ e $f(1) = \frac{1}{3}$ e pelo Teorema do valor intermediário, temos a existência de uma raiz de f entre -2 e 1. Poderíamos chutar o $x_0 = -2$, porém iremos fazer $x_0 = 100$, para ilustrar que há casos em que a convergência ocorre mesmo com chutes iniciais distantes de um intervalo que certamente contém raízes. E após 27 interações chegamos a uma aproximação da raiz com uma precisão de 14 casas decimais.

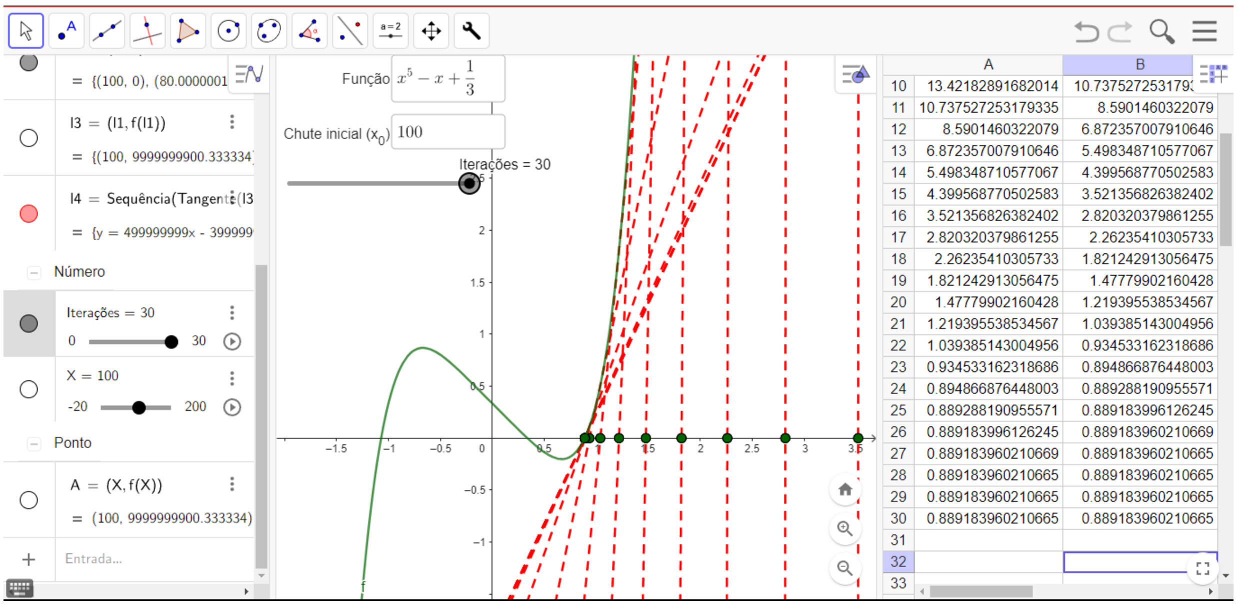


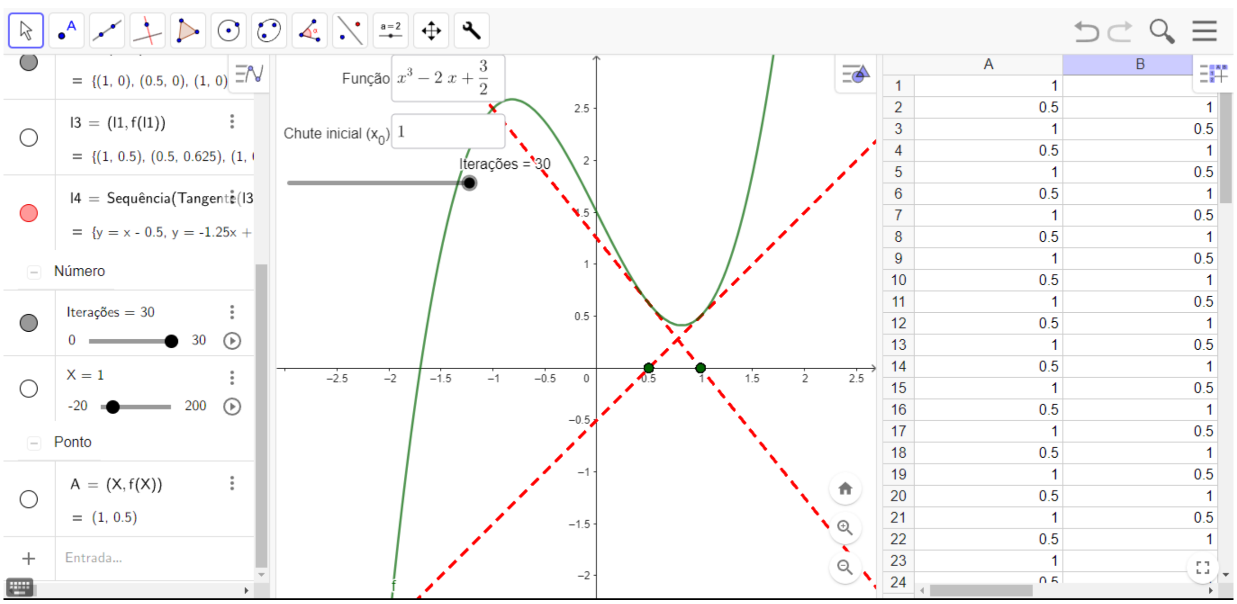
Figura 50 – Exemplo: $f(x) = x^5 - x + \frac{1}{3}$.

Fonte: elaborado pelo autor

   Agora, vejamos um exemplo no qual a função possui uma raiz. O chute é relativamente próximo da raiz, porém, o método de Newton não converge, pois, $x_0 = 1$ ao ser aplicado na função, retorna o valor $x_1 = \frac{1}{2}$ e novamente aplicando o método em x_1 temos $x_2 = x_0$.

4. Aproximar uma raiz de $f(x) = x^3 - 2x + \frac{3}{2}$

   É possível observar que $f(-2) = -\frac{5}{2}$ e $f(2) = \frac{11}{2}$, portanto, existe uma raiz no intervalo entre -2 e 2. Então, chutaremos $x_0 = 1$ e o que ocorre é que as iterações formam um ciclo, já que $f(1) = \frac{1}{2}$ e $f(\frac{1}{2}) = 1$. Portanto, independentemente do número de iterações, temos que a sequência (x_n) não converge para a raiz de $f(x)$.



	A	B
1	1	
2	0.5	1
3	1	0.5
4	0.5	1
5	1	0.5
6	0.5	1
7	1	0.5
8	0.5	1
9	1	0.5
10	0.5	1
11	1	0.5
12	0.5	1
13	1	0.5
14	0.5	1
15	1	0.5
16	0.5	1
17	1	0.5
18	0.5	1
19	1	0.5
20	0.5	1
21	1	0.5
22	0.5	1
23	1	
24	0.5	

Figura 51 – Exemplo: $f(x) = x^3 - 2x + \frac{3}{2}$.

Fonte: elaborado pelo autor

CAPÍTULO 7

Atividade aplicada a alunos do PROFMAT-UFOP

Neste capítulo apresentamos um estudo qualitativo, realizado com mestrandos do PROFMAT-UFOP que são professores de matemática atuantes no ensino fundamental e médio. A atividade tem como proposta apresentar o método de Newton para o cálculo de raízes de funções não lineares utilizando o GeoGebra. O objetivo é coletar a percepção dos participantes em relação à proposta de atividades do nosso trabalho.

7.1 Sujeitos e contexto

Os sujeitos deste estudo foram seis alunos do PROFMAT-UFOP, matriculados na disciplina MA 36 – Recursos Computacionais no Ensino de Matemática no campus Morro do Cruzeiro, da Universidade Federal de Ouro Preto, ofertada no segundo semestre do ano de 2023. Iremos nos referir aos participantes como A1, A2, A3, A4, A5 e A6.

Os resultados descritos na sequência foram fundamentados no comportamento e na fala dos participantes durante a apresentação da atividade. A apresentação foi planejada para ser ministrada em dois encontros com duração de 3 horas e 30 minutos cada, ocorridos nos dias 29/09/2023 e 06/10/2023 no laboratório de matemática do departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Em ambos os dias os encontros tiveram início às 13h30 e término às 17h.

A atividade teve o objetivo de permitir a aproximação de raízes de equações que normalmente alunos do ensino médio não conseguiriam resolver com métodos propostos no modelo educacional tradicional.

7.2 Descrição da atividade

A atividade proposta é implementar o Método de Newton para encontrar, mesmo que de forma aproximada, as raízes de equações. Para isso, foi construído em sala e em conjunto com os participantes, o roteiro descrito no capítulo 3 sobre derivadas e o roteiro sobre o Método de Newton descrito no capítulo 6. Também foram aplicadas perguntas que auxiliassem na compreensão da metodologia.

7.2.1 Primeiro encontro - Atividade 1: Introduzindo o conceito de derivada

O objetivo do primeiro encontro foi introduzir o conceito de derivada, apresentado na Definição 3.0.2, por não ser um conteúdo abordado no ensino médio. Dessa forma, para abordar o lado intuitivo do método, não foi exposto aos participantes o nome do método que seria utilizado, e sim, que naquela aula seriam apresentadas as definições dos conceitos necessários para o entendimento e aplicação do restante da atividade. Antes de iniciarmos, de fato, a atividade prevista, foi perguntado aos participantes:

Quais equações normalmente são vistas durante o ensino fundamental e médio?

Os participantes citaram equações do primeiro e segundo grau, equações biquadradas, equações irracionais, equações trigonométricas, equações exponenciais e logarítmicas. Foi pedido que eles dessem três exemplos de cada uma das equações citadas. Os exemplos foram:

Irracionais:

1. $\sqrt{x+3} = x$
2. $\sqrt[3]{2x+1} = 3$
3. $\sqrt{2x+9} = 6$

Trigonométricas:

1. $\text{sen}(x) = 1$
2. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
3. $\tan(x) = -1$

Exponenciais:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$

2. $3^{x+2} = 81$

3. $5^x = 1$

Os exemplos de equações logarítmicas demoraram um pouco mais para serem pensados.

Logarítmicas:

1. $\log(x) = 1$

2. $\log_2(x+3) = 16$

3. $\log_2(x^2) = 4$

Em seguida, foi perguntado: **Quais os métodos que utilizamos para resolvemos as equações citadas?**

Equações do primeiro grau: os participantes relataram que equações na forma $ax + b = 0$ tem solução $x = -\frac{b}{a}$.

Equações do segundo grau: rapidamente, também, foram citados os métodos soma e produto (Relações de Girard) e Fórmula de Bhaskara para resolver equações no formato $ax^2 + bx + c = 0$.

Equações biquadradas: para as equações biquadradas, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, os participantes citaram a mudança de variável $y = x^2$. Foi observado novamente por eles que este tipo de equação, após ser aplicada a mudança de variável, voltam para uma equação de segundo grau.

Para as equações irracionais citadas $\sqrt{x+3} = x$ e $\sqrt{2x+9} = 6$, segundo os participantes, basta elevar ao quadrado os dois lados da equação e para a equação $\sqrt[3]{2x+1} = 3$ deveria se elevar ao cubo os dois lados da equação. Dessa forma deduziram que, no geral, basta analisar o índice da raiz e elevar ambos os lados à potência de expoente igual ao valor presente no índice da raiz que aparece na equação. [1]

Equações trigonométricas: para essas equações, os participantes demandaram um tempo maior para formularem a descrição da solução da equação $\text{sen}(x) = 1$. Mas, por fim, responderam que a solução será $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Concluíram dizendo que nos outros exemplos citados, $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ e $\tan(x) = -1$, basta analisar o círculo trigonométrico e encontrar os dois ângulos que resolvam as equações. Um ângulo que possui cosseno no valor de $-\frac{1}{2}$ e outro ângulo cuja tangente assume ao valor de -1.

[1] Vale ressaltar que radicais com índices no formato $2n$ com $n \in \mathbb{Z}$ neste processo podem levar à raízes falsas. Por isso, as soluções devem ser testadas.

Equações exponenciais: para resolver as três equações citadas $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$, $3^{x+2} = 81$ e $5^x = 1$, utilizaram propriedades de potência para igualar as bases e na sequência poderem igualar os valores presentes nos expoentes.

Equações logarítmicas: para resolver as equações $\log(x) = 1$, $\log_2(x+3) = 16$ e $\log_2(x^2) = 4$ utilizaram a própria definição de logaritmo: o valor do logaritmo corresponde ao expoente que se deve elevar uma determinada base, positiva e diferente de 1, para que o resultado seja igual a um número positivo b, além das propriedades de potências.

Após as análises das resoluções dos exemplos citados pelos participantes, foi realizado o seguinte questionamento: **O que todas as equações possuem em comum?**

Os participantes responderam que as equações biquadradas e irracionais citadas por eles são tais que, após a utilização de alguma manipulação algébrica ou propriedade, se resumem a sub-casos de equações do primeiro e segundo grau. Por fim, todos concordaram que para resolver qualquer equação citada, utilizamos estratégias já conhecidas e as adaptamos conforme as "novas" equações que aparecem. Ressaltamos que entre os tipos de equações citadas, a trigonométrica se diferencia das demais na maneira de encontrar a resolução. Por fim, um dos participantes destacou que na maioria das vezes, equações, após alguma transformação ou utilização de alguma estratégia, sempre voltam a algo que os participantes conseguem resolver.

Observamos que os participantes basicamente escolheram exemplos que são diretos e que as resoluções se reduzem a equações de primeiro e segundo grau.

Após o primeiro momento da atividade, foi feito o questionamento: **É possível resolver, usando técnicas vistas no ensino médio, a equação $x^5 - x - 1 = 0$? E quais estratégias os estudantes podem aplicar para resolver?**

Os participantes fizeram alguns comentários que serão citados a seguir.

A1: "Sei que $x^5 - x$ deve ter raiz $x = 1$, então tentaria colocar o fator comum em evidência $x(x^4 - 1)$."

Logo na sequência A1 disse, nas palavras dele, que "travou" nessa parte e que a equação foge do padrão de equações vistas no ensino médio.

Na sequência, A5 fez a observação: "A resposta é algo entre 1 e 2, pois ao calcular $x = 1$ o valor da equação resulta em um número negativo e para $x = 2$ resulta em um valor positivo." Sendo possível perceber que o aluno utilizou o Teorema do Valor Intermediário de maneira intuitiva.

O A5 estava utilizando uma calculadora para realizar tentativas de possíveis valores para x. E, por fim, os participantes questionaram se existia alguma fórmula para chegar a uma solução. Então, todos afirmaram que não sabiam resolver a equação $x^5 - x - 1 = 0$ e que a grande dificuldade é não conhecer um método de resolver a equação citada, como por exemplo, o método resolutivo da equação do segundo grau, que nos gera um algoritmo que pode ser sempre aplicado.

A3 fez a seguinte observação: "Se eu conseguisse encontrar uma raiz da equação, daria para a partir dela, fazer algo."

Então comentamos sobre o Teorema do Valor Intermediário e como ele garante a presença de uma raiz entre 1 e 2, já que de maneira intuitiva, A5 utilizou esse teorema para afirmar que a raiz se encontrava no intervalo entre os números 1 e 2.

A4 sugeriu dividir toda a equação por x^5 resultando em $1 - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} = 0$ que resulta em $1 - x^{-4} - x^{-5} = 0$, o que não é possível resolver diretamente.

Por último, houve uma concordância geral de que não eram capazes de encontrar uma fórmula fechada para a resolução da equação apresentada.

Logo, foi conversado que em determinados casos, não é simples encontrar as raízes de uma função ou não é possível encontrar suas raízes em uma expressão exata. Nesses casos, os métodos numéricos são utilizados para obter aproximações para as raízes com uma precisão desejada.

Esse assunto foi retomado na segunda aula. Para podermos abordá-lo, apresentamos conceitos e definições necessárias e, no terceiro momento do encontro, foram realizadas as seguintes perguntas:

Como encontrar a equação de uma reta?

Os participantes responderam de maneira correta afirmando que: para encontrar a equação de qualquer reta é necessário conhecer dois pontos pertencentes à reta ou conhecer um ponto e o coeficiente angular da reta.

Dessa forma, foi exposto que o conceito de derivada seria necessário. Antes de discutir o conceito de derivada apresentado em 3.0.2, foi realizado uma última pergunta:

Qual a definição de derivada de uma função f no ponto $(x_0, f(x_0))$?

A1 respondeu que, definimos derivada através do limite e houve um consenso de toda a turma. Na sequência, A4 citou que seria a inclinação da reta no ponto, porém, ainda utilizando o conceito de limite. Entretanto, nesse momento, foi abordado que limite não é um conteúdo visto no ensino médio e por isso iríamos buscar uma maneira alternativa de definir a derivada de uma função. Dessa forma, foi apresentada a Definição 3.0.2.

Partindo dessa definição e com conceitos de geometria analítica que são estudados durante o ensino médio, temos que:

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

e, a partir disso, podemos reescrever $f'(x_0)$ da seguinte forma:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Logo em seguida, demos início ao quarto momento da atividade, no qual partimos para o uso do *software* GeoGebra. E assim, a fim de compreender o conceito de derivada, foi apresentado o roteiro na página 32, já apresentado no capítulo 3 e ele foi aplicado durante essa etapa.

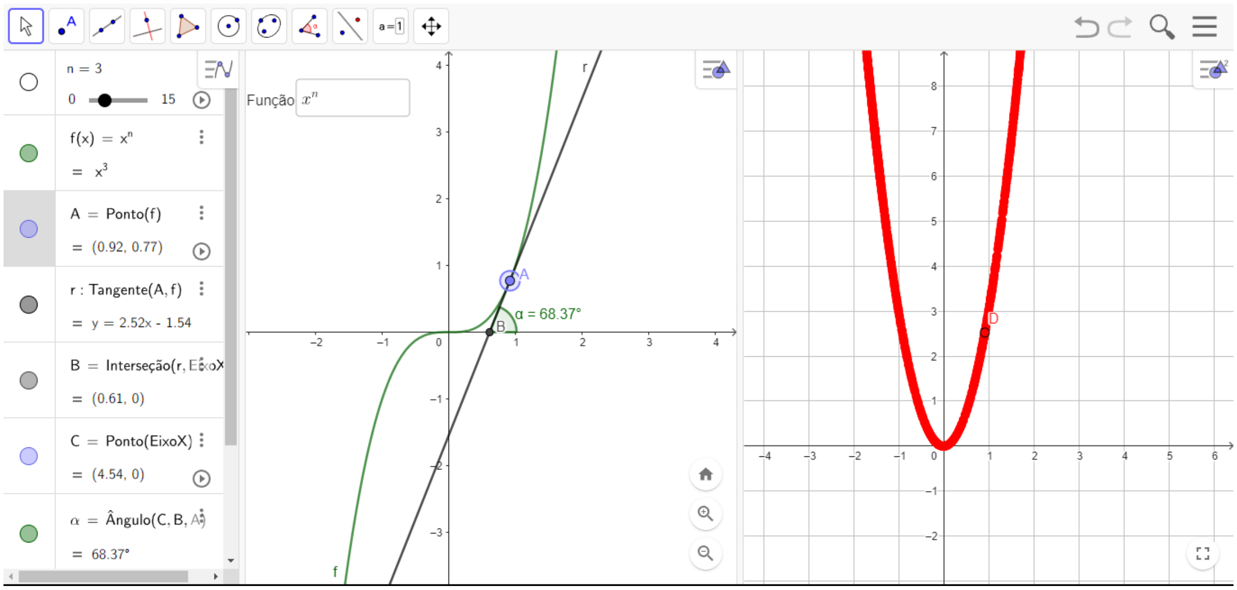
Para cada $f(x)$ a seguir, foi realizada a pergunta: **É possível encontrar a equação da reta formada pelo ponto D na janela 2D secundária?**

Após a construção, e com $f(x) = x^2$ temos a seguinte situação:

Fonte: elaborado pelo autor

A partir disso, A1 comentou que a reta passa pela origem. Como a reta é da forma $ax + b$, portanto $b = 0$. Continuaram a análise afirmando que $f(1) = 2$, portanto, $a = 2$ e daí a reta é $y = 2x$, que os estudantes reconheceram ser a derivada de $f(x) = x^2$.

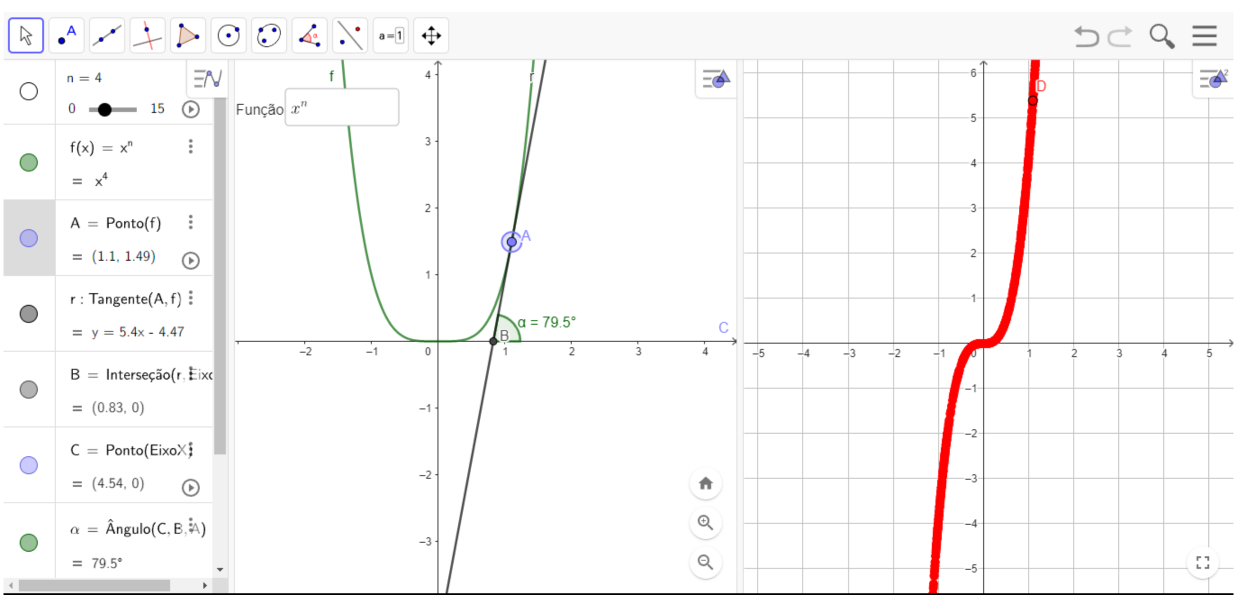
Fazendo $f(x) = x^3$, temos o seguinte caso:



Fonte: elaborado pelo autor

Após um pequeno momento de reflexão, os discentes observaram que se parecia com uma parábola. A1 citou que se for uma parábola e $c = 0$, pois o gráfico intercepta o eixo y no zero. A3 disse que $b = 0$, pois o vértice intercepta o eixo y. Foi observado que $f(1) = 3$, portanto, $a = 3$, daí $y = 3x^2$, que é derivada de $f(x)$, logo, $f'(x) = 3x^2$.

Novamente alterando $f(x)$, dessa vez, $f(x) = x^4$



Fonte: elaborado pelo autor

Nesse momento, houve um silêncio um pouco mais prolongado por parte da turma que, na sequência, adaptou os passos executados anteriormente, observando que o gráfico que o rastro do ponto D exibia se parecia com o gráfico da função x^3 e mais uma vez, destacaram que deveria ser da forma ax^3 e como o ponto $(1, 4)$ pertencia ao gráfico, então $a = 4$ e portanto $f'(x) = 4x^3$.

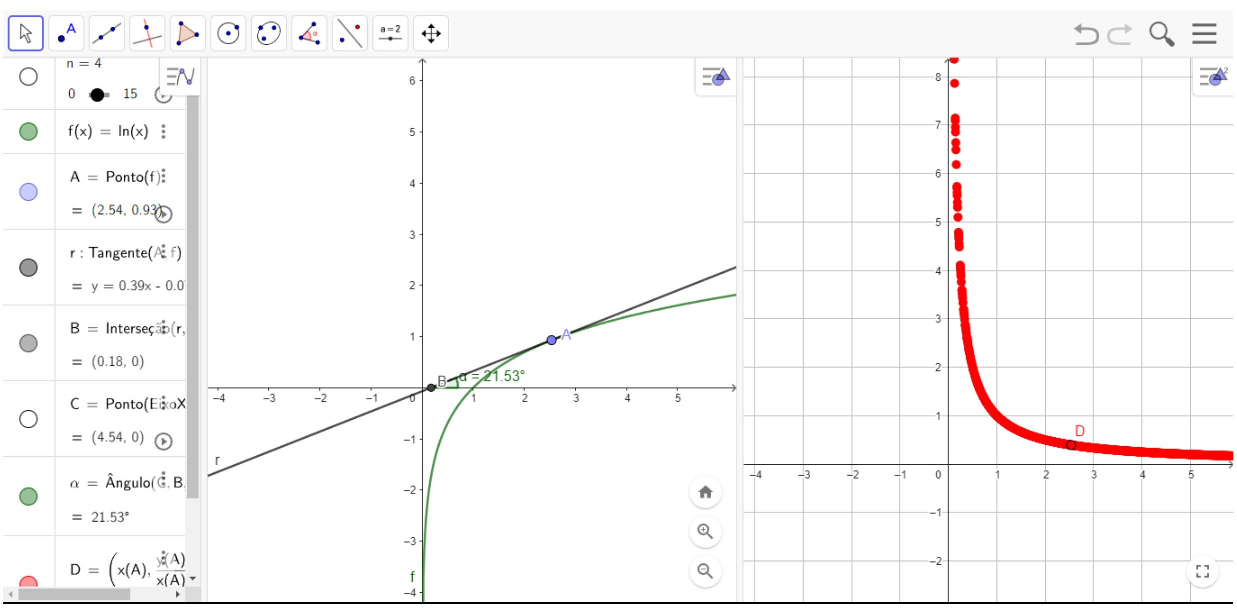
Durante toda a exploração, foi construída uma tabela no quadro:

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
x^2	$2 \cdot x$
x^3	$3 \cdot x^2$
x^4	$4 \cdot x^3$

Em sequência foi perguntado: **Qual será a derivada de $f(x) = x^5$?**

E ao olharem a tabela, deduziram que seria $f'(x) = 5x^4$. Em seguida, foi perguntado: **Qual a derivada de $f(x) = x^n$?** e ao observarem os exemplos, houve uma conjectura de que a resposta era $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, desde que $n \in \mathbb{N}$.

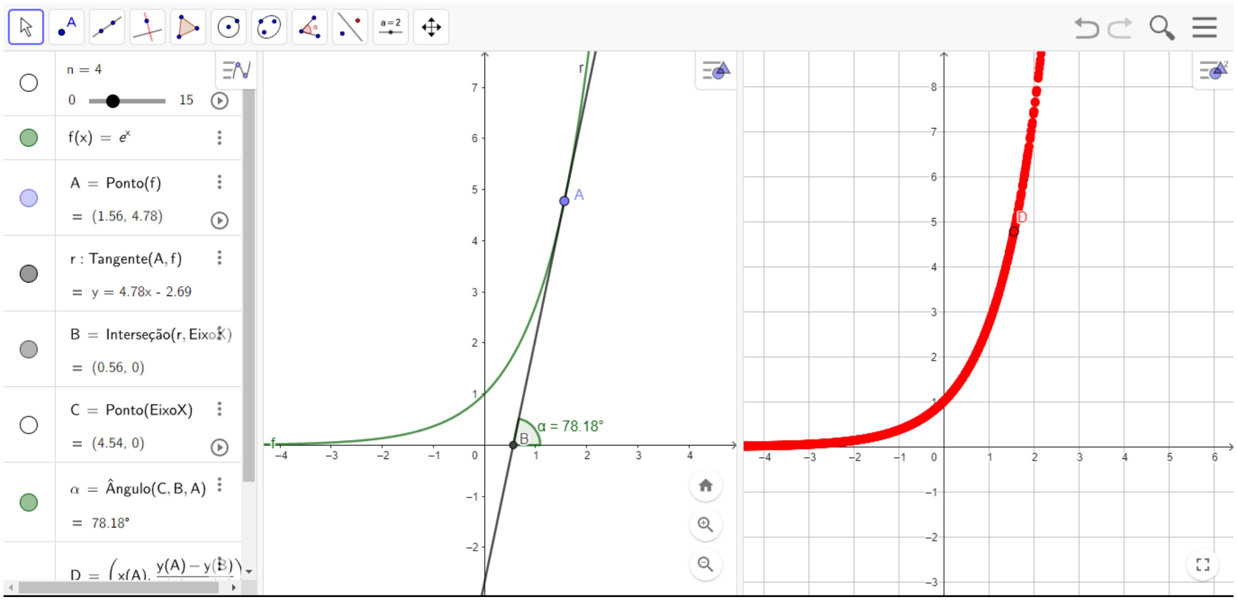
Após essa conclusão, foi perguntado se havia alguma função citada anteriormente que gostariam de encontrar a derivada. Assim foi decidido usar $f(x) = \ln(x)$ e observarmos o ponto D:



Fonte: elaborado pelo autor

Os participantes observaram que o ponto $(1, 1)$ pertence ao gráfico do rastro do ponto D, enquanto A1 também destacou: "Quando x é pequeno, o rastro explode." Enquanto A2 complementou: "E quando x é um valor grande, fica perto de zero." Então A4 sugeriu que deveria ser alguma constante dividida pela variável, como o ponto $(1, 1)$ estava no rastro, se utilizaram do GeoGebra e escreveram no campo de entrada do Geogebra a função $g(x) = \frac{1}{x}$. Portanto, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

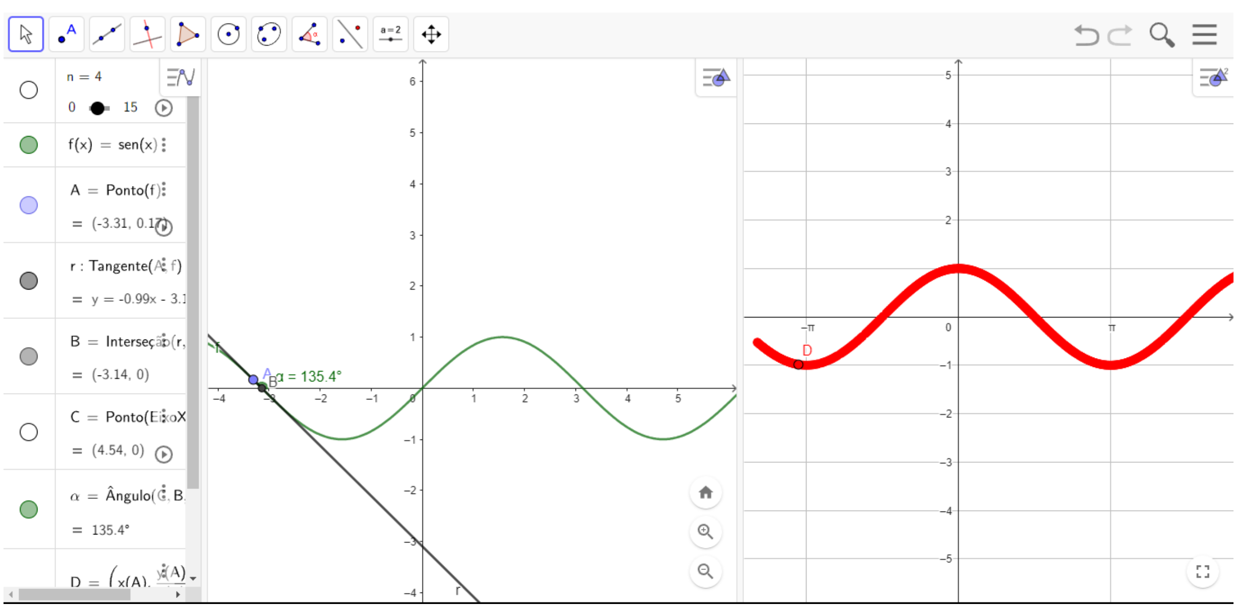
Em sequência, foi sugerido aos participantes $f(x) = e^x$, e temos o seguinte caso:



Fonte: elaborado pelo autor

No primeiro momento, os participantes cogitaram ser o gráfico da mesma função, visto o comportamento do rastro do ponto D e ao fato do ponto $(0, 1)$ pertencer a ambos os gráficos. Em seguida, na própria janela 2D do Geogebra, utilizando a caixa de entrada, foi feito $g(x) = e^x$, e confirmando que todo o gráfico da função $f(x) = e^x$ ficava exatamente contida no rasto do ponto D. Portanto, todos os participantes puderam concluir que $f'(x) = e^x$.

Em seguida, consideramos $f(x) = \text{sen}(x)$ e nos encontramos no seguinte caso:



Fonte: elaborado pelo autor

Para melhor visualização, foi alterada a unidade do eixo x para π e se baseando nos outros casos, os participantes destacaram que os pontos $(-\pi, -1)$, (0,1) e $(\pi, -1)$ pertencem ao rastro de D. Assim como o seno é uma função limitada por -1 e 1, o rastro de D também aparenta ser limitado. Após alguns instantes de silêncio da turma, A1 comenta: "É o mesmo gráfico só que está deslocado, deve ser o cosseno." Nesse momento foi perguntado: **Quanto e como o gráfico está deslocado?**

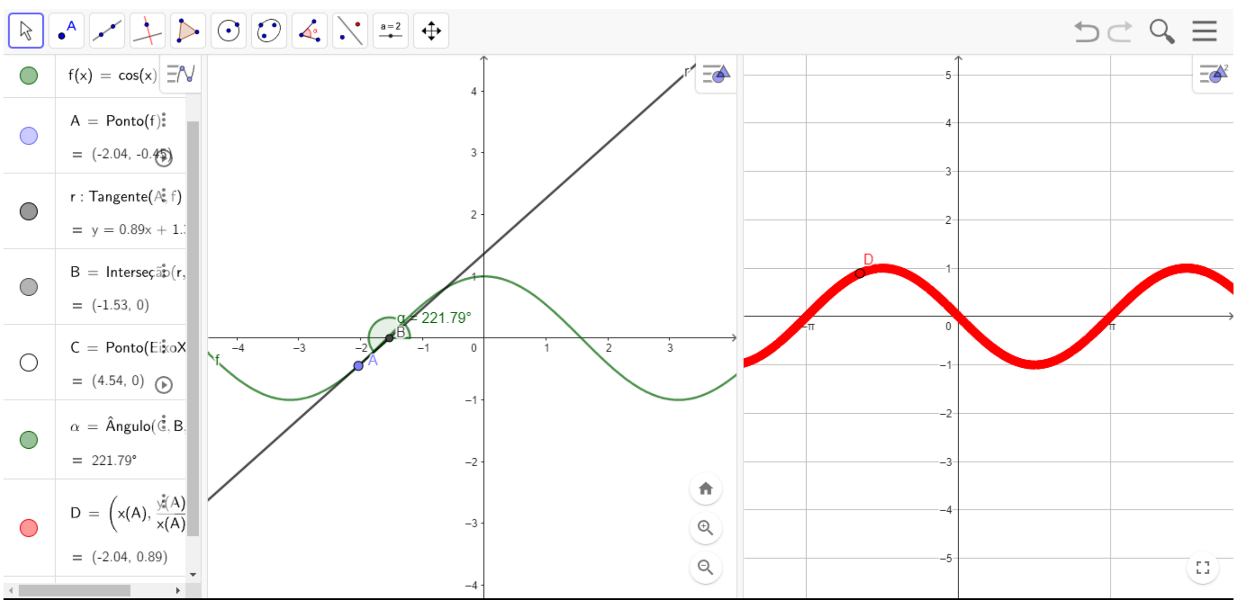
A4 respondeu: "Parece que deslocou $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda."

Então, para confirmamos a conjectura de que o rastro de D é gráfico do cosseno, foi feito no quadro, utilizando o seno da soma:

$$\text{sen}(x + \tfrac{\pi}{2}) = \text{sen}(x) \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) + \text{sen}(\tfrac{\pi}{2}) \cdot \cos(x) = \cos(x)$$

Desse modo, foi possível relembrar esse assunto com os professores participantes. Portanto, $f'(x) = \cos(x)$.

Por último, foi analisado $f(x) = \cos(x)$



Fonte: elaborado pelo autor

Baseando nos outros casos, os alunos destacaram que os pontos $(-\pi, 0)$, (0,0) e $(\pi, 0)$ pertencem ao rastro de D e que a curva representada pelo rastro de D, assim como o seno, possui a imagem limitada por -1 e 1. Novamente, nos valendo do fato de que o gráfico do cosseno está deslocado $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda. Utilizando o cosseno da soma, temos:

$$\cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(x) \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) - \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(\tfrac{\pi}{2}) = -\text{sen}(x)$$

Sendo assim, foi possível montar a seguinte tabela, contendo as funções e suas respectivas derivadas:

Essa tabela foi utilizada durante todo o segundo dia de atividades.

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
c	0
x^m	$m \cdot x^{m-1}$, com $m \in \mathbb{N}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
sen(x)	$\cos(x)$
$\cos(x)$	-sen(x)

Por fim, foram discutidos, de maneira intuitiva, as regras de derivação e como é possível obtê-las. Optamos por não demonstrar todas as propriedades de derivação por não ser um dos objetivos da atividade, entretanto foram apresentadas aos alunos. Fizemos no quadro somente a derivada da soma, que foi discutida neste trabalho no capítulo 4.

Para concluir, ao final da atividade, os alunos responderam a um questionário sobre a atividade do primeiro encontro.

7.2.2 Atividade 2 - Aplicando o Método de Newton no GeoGebra

Agora, iremos discorrer sobre a segunda atividade, que foi aplicada no segundo encontro com a classe. Como na primeira atividade, iniciamos a partir de alguns questionamentos. Vale destacar que A3 esteve ausente nesse dia devido a um problema de saúde.

O primeiro questionamento do dia foi: **É possível relacionar o conceito de Derivada e o problema inicial proposto, que é resolver a equação $x^5 - x - 1 = 0$?**

Todos os participantes disseram que não é possível relacionar Derivada e a solução do problema.

Então, foi revelado para a turma que sim, seria possível, e que o método que utilizaríamos para a resolução do problema proposto seria o Método de Newton. Assim, esboçamos o seguinte gráfico de uma função $f(x)$ genérica a seguir:

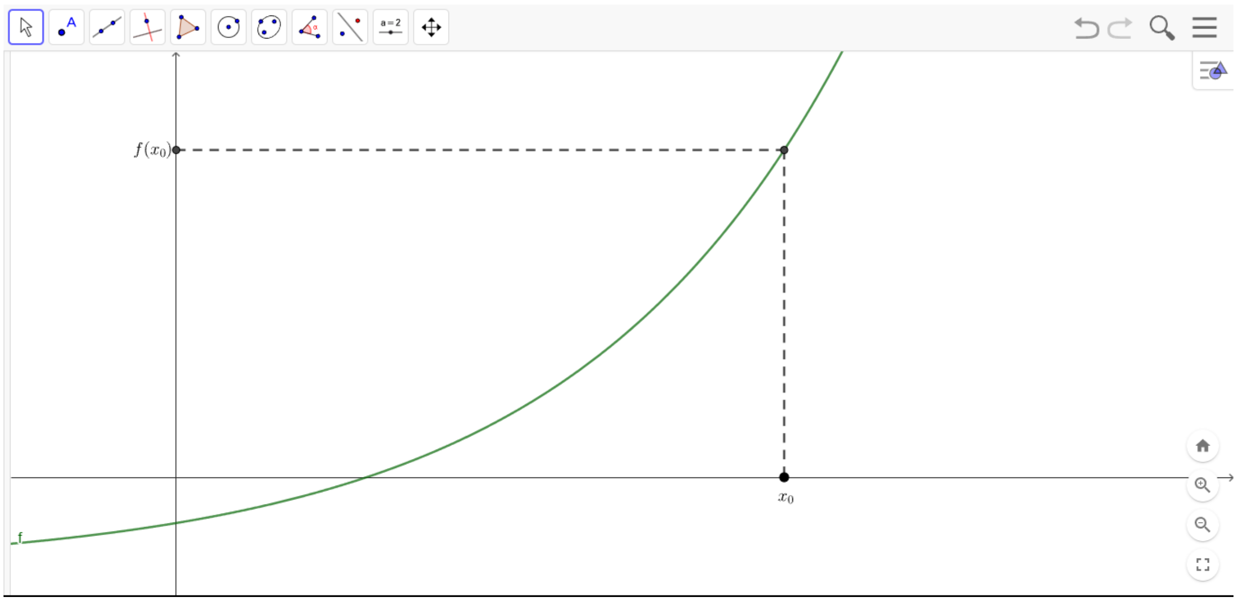
É possível traçar a reta tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$ e obter x_1, que é a abscissa do ponto de interseção entre a reta tangente e o eixo x.

O que podemos afirmar sobre x_1?

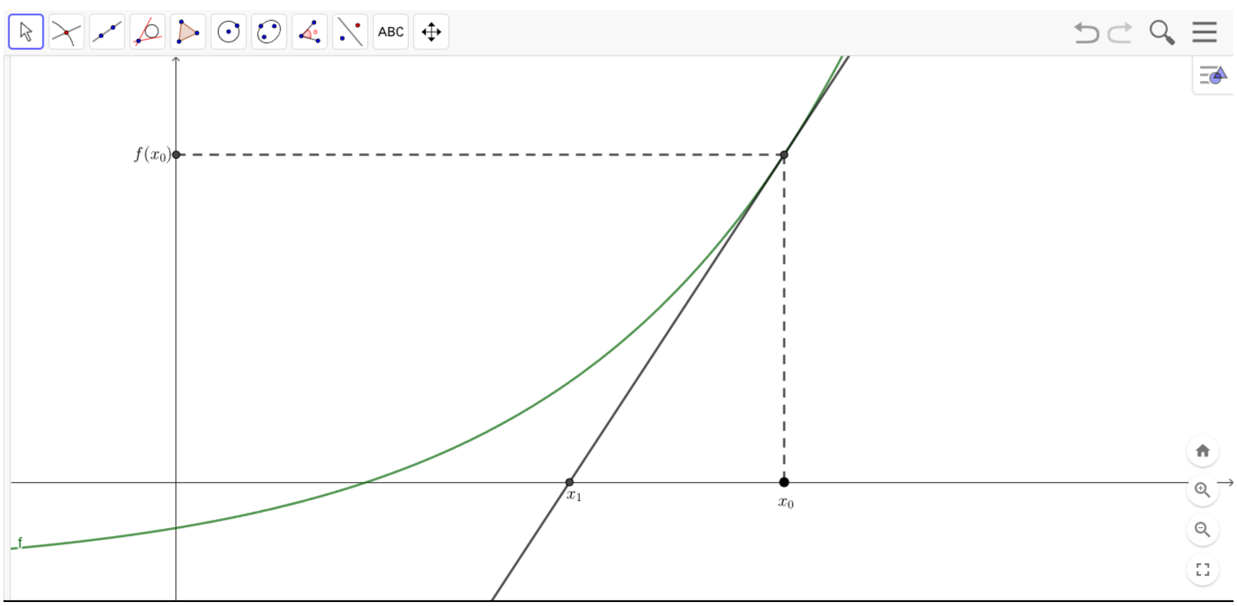
A5 fez a seguinte observação: "Se x_1 da função afim coincidir com a raiz, então teremos encontrado a raiz."

E, em seguida, ele completou: "x_1 está mais próximo da raiz do que o x_0."

Perguntou-se: **É possível encontrar x_1 utilizando a reta tangente ao ponto que pertence o gráfico da função?**



Fonte: elaborado pelo autor



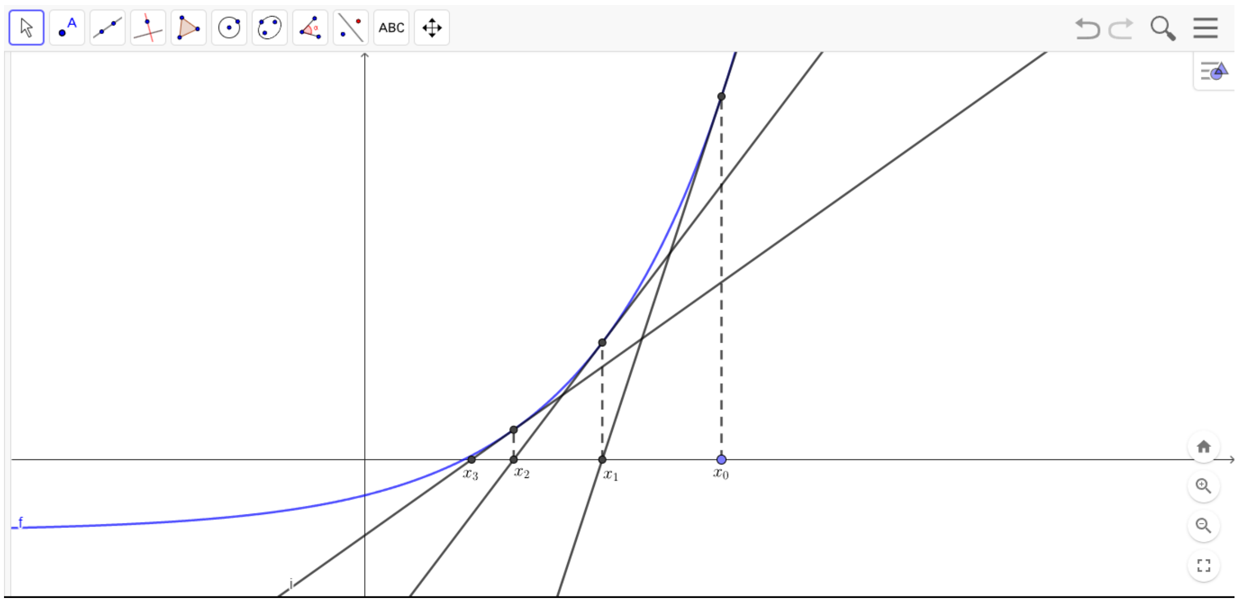
Fonte: elaborado pelo autor

A1 responde: "Sim, podemos fazer a equação da reta $f'(x_0) = \frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1}$.

Nesse momento, houve um equívoco, ao dizer que bastava encontrar a equação da reta, quando na verdade a participante A1 estava calculando a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$. Porém, essa precipitação, nos permite encontrar x_1 já que definimos e conseguimos calcular a $f'(x_0)$ pelo conteúdo do primeiro encontro.

A1 completou dizendo que: "Agora devemos repetir o processo com x_1 até coincidir com a raiz."

A seguir, comentamos se realmente em algum momento x_1 poderia coincidir exatamente com a raiz da função. Para elucidar, no GeoGebra fizemos uma construção de como encontrar a sequência de pontos que aproximam o valor da raiz de uma função através do método, utilizando as ferramentas do próprio *software* e a função $f(x) = e^{\frac{x}{4}} - 2$:



Fonte: elaborado pelo autor

Como definimos a derivada, partimos para a explicação de como funciona o Método de Newton. Os próprios participantes nos afirmaram que é possível calcular a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$ da seguinte forma:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Já que o coeficiente angular da reta tangente é $f'(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, temos:

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

logo:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

sendo assim:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Como queremos aproximar a raiz, procuramos o caso em que $y = 0$, ou seja:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

obtemos:

$$-f(x_0) = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot (x_0)$$

o que equivale a:

$$f'(x_0) \cdot x = f'(x_0) \cdot (x_0) - f(x_0)$$

portanto:

$$x = \frac{f'(x_0) \cdot (x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

e daí:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Denominamos x_1 como sendo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Repetimos o processo para x_1, e podemos encontrar x_2 tal que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

E, de maneira recursiva, continuamos até atingir a aproximação desejada da raiz da função. Dessa forma, foi perguntado se há a possibilidade de generalizar uma fórmula para x_n e os participantes então responderam que sim, sendo ela:

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Logo, podemos escrever $x_n = T(x_{n-1})$ e por fim $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

De posse do Método, antes de resolver o problema $x^5 - x - 1 = 0$, foi sugerido utilizar o método de Newton para resolver o problema $x^2 - 2 = 0$ e aproximar a raiz de 2.

Antes de os participantes aplicarem o método para o problema proposto, debatemos a seguinte questão: **O que é uma boa aproximação?**

A4: Depende.

A1: Do número de casas.

Logo, os participantes foram estimulados a encontrar como calcular essa aproximação e algumas sugestões foram:

A5: O erro é a diferença entre a raiz e o candidato a raiz. Erro como $e_n = x_n - x$, em que $f(x) = 0$.

Porém, nesse ponto, A5 não percebeu que ele estava utilizando a resposta do problema para calcular o erro, uma vez que o nosso objetivo é aproximar o valor da raiz, porém, não sabemos de fato qual é esse valor, quando estamos numa situação geral

Então, A4 sugeriu utilizar os candidatos à raiz: Erro como $e_n = x_n - x_{n-1}$.

Nesse ponto, os participantes relembraram que $\sqrt{2}$ é irracional, logo, realmente é necessário estabelecer um critério de parada. O escolhido pelos participantes foram 3 casas decimais, portanto, o critério adotado foi $|e_n| < 10^{-3}$, ou seja, quando a diferença entre os dois últimos candidatos a raiz atingir um valor menor do que 3 casas decimais.

Voltando a equação $x^2 - 2 = 0$, consideramos $f(x) = x^2 - 2$ pela tabela do encontro 1 , temos $f'(x) = 2x$. Os participantes encontraram $T(x) = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{x^2+2}{2x}$. Portanto, os participantes chegaram a conclusão de que:

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}$$

Em comum acordo, os alunos tomaram $x_0 = 2$, e começaram os cálculos:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} = \frac{2^2 + 2}{2 \cdot 2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 2}{2x_1} = \frac{(1,5)^2 + 2}{2 \cdot 1,5} = 1,41666...$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 2}{2x_2} = \frac{(1,41666...)^2 + 2}{2 \cdot 1,41666...} = 1,41421568...$$

$$x_4 = \frac{x_3^2 + 2}{2x_3} = \frac{(1,41421568...)^2 + 2}{2 \cdot 1,41421568...} = 1,414213562...$$

Montando uma tabela, temos os seguintes candidatos à raiz:

x_n	Valor
x_0	2
x_1	$1,5$
x_2	$1,41666...$
x_3	$1,41421568...$
x_4	$1,414213562...$

A4 afirmou: "Acho que atingimos o erro nessa iteração"

E para conferir, calculou-se utilizando uma calculadora $|e_4| = |x_4 - x_3| = 1,41421568... - 1,414213562... = 0,00000212....$ Como $|e_4| < 10^{-3}$, o valor aproximado da raiz da equação $x^2 - 2 = 0$ é $x = 1,414213562....$

Finalmente, de posse dos conhecimentos adquiridos no primeiro e no segundo encontro, foi pedido aos participantes que aproximassem a raiz da equação $x^5 - x - 1 = 0$.

Sendo $f(x) = x^5 - x - 1$, pela tabela do encontro 1, temos $f'(x) = 5x^4 - 1$. Os alunos encontraram $T(x) = x - \frac{x^5-x-1}{5x^4-1} = \frac{4x^5+1}{5x^4-1}$ os alunos concluíram que:

$$x_n = \frac{4x_{n-1}^5 + 1}{5x_{n-1}^4 - 1}$$

Novamente, os participantes decidiram adotar o mesmo critério de parada, optaram por $|e_n| < 10^{-3}$ e um valor inicial para todos começarem, que foi $x_0 = 1,5$. A partir disso, os alunos, em conjunto fizeram os seguintes cálculos:

$$x_1 = \frac{4x_0^5 + 1}{5x_0^4 - 1} = 1,29048843...$$

$$x_2 = \frac{4x_1^5 + 1}{5x_1^4 - 1} = 1,190342934...$$

$$x_3 = \frac{4x_2^5 + 1}{5x_2^4 - 1} = 1,1682754979...$$

$$x_4 = \frac{4x_3^5 + 1}{5x_3^4 - 1} = 1,1673057868975...$$

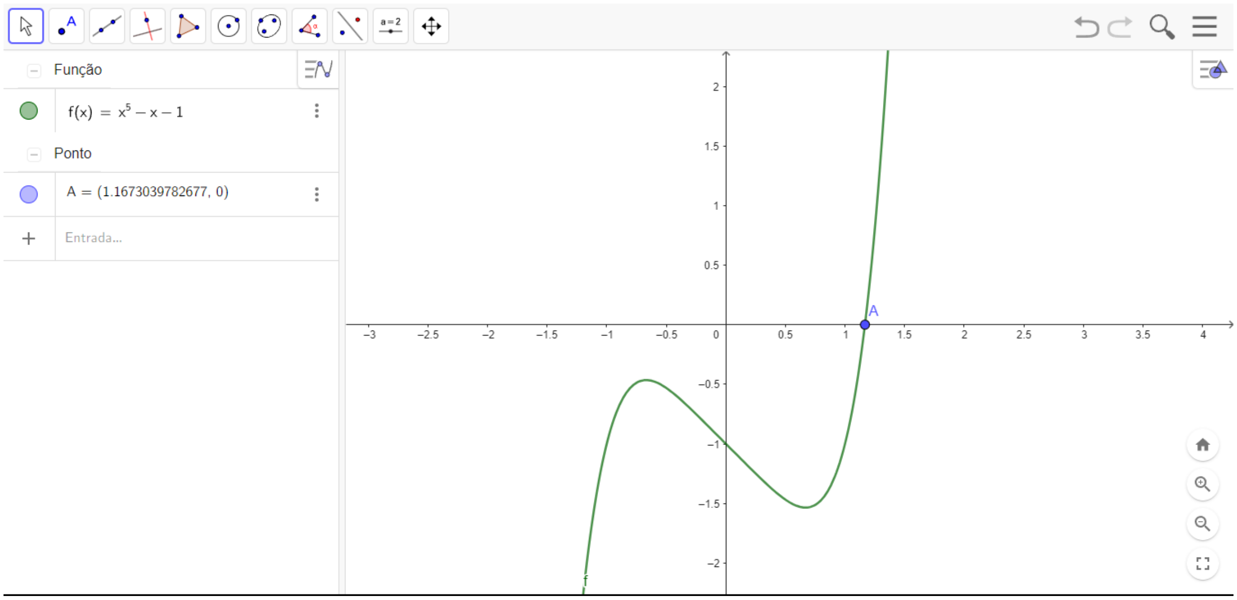
$$x_5 = \frac{4x_4^5 + 1}{5x_4^4 - 1} = 1,1673039782677...$$

Mais uma vez, A4 se atentou para o critério de parada ao calcular o erro, utilizando a calculadora e constatou que:

$$|e_5| = |x_5 - x_4| = |1,1673039782677... - 1,1673057868975...| = 0,0000018086298...$$

Assim, os alunos atingiram o erro estabelecido em 5 iterações: $e_5 < 10^{-3}$ e a aproximação da raiz da equação para o critério estabelecido, será $x = 1,1673039782677...$

Concluímos a atividade utilizando o GeoGebra, analisando o gráfico de $f(x) = x^5 - x - 1$ e marcando o ponto $(x_5, 0)$.



Fonte: elaborado pelo autor

Foi possível perceber que os alunos se adaptaram ao método, porém o Método de Newton pode não convergir para o valor da raiz em alguns casos. No capítulo 5, mais especificamente no Teorema 5.0.1, discutimos a convergência do Método, sendo assim, existem funções em que o Método falha em aproximar o valor da raiz.

Baseado nisto, pedimos que os alunos resolvessem um problema que ilustra uma função para a qual o Método não converge para a raiz: **Resolver a equação** $x^3 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ **para** $x_0 = 1$

Sendo $f(x) = x^3 - 2x + \frac{3}{2}$, novamente pela tabela do encontro 1, $f'(x) = 3x^2 - 2$ os participantes encontraram $T(x) = x - \frac{x^3 - 2x + \frac{3}{2}}{3x^2 - 2} = \frac{2x^3 - \frac{3}{2}}{3x^2 - 2}$. E concluíram que:

$$x_n = \frac{2x_{n-1}^3 - \frac{3}{2}}{3x_{n-1}^2 - 2}.$$

Ao calcular x_1, obtiveram:

$$x_1 = \frac{2x_0^3 - \frac{3}{2}}{3x_0^2 - 2} = \frac{2(1)^3 - \frac{3}{2}}{3(1)^2 - 2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

E x_2 foi determinado:

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - \frac{3}{2}}{3x_1^2 - 2} = \frac{2(0,5)^3 - \frac{3}{2}}{3(0,5)^2 - 2} = \frac{-1,25}{-1,25} = 1$$

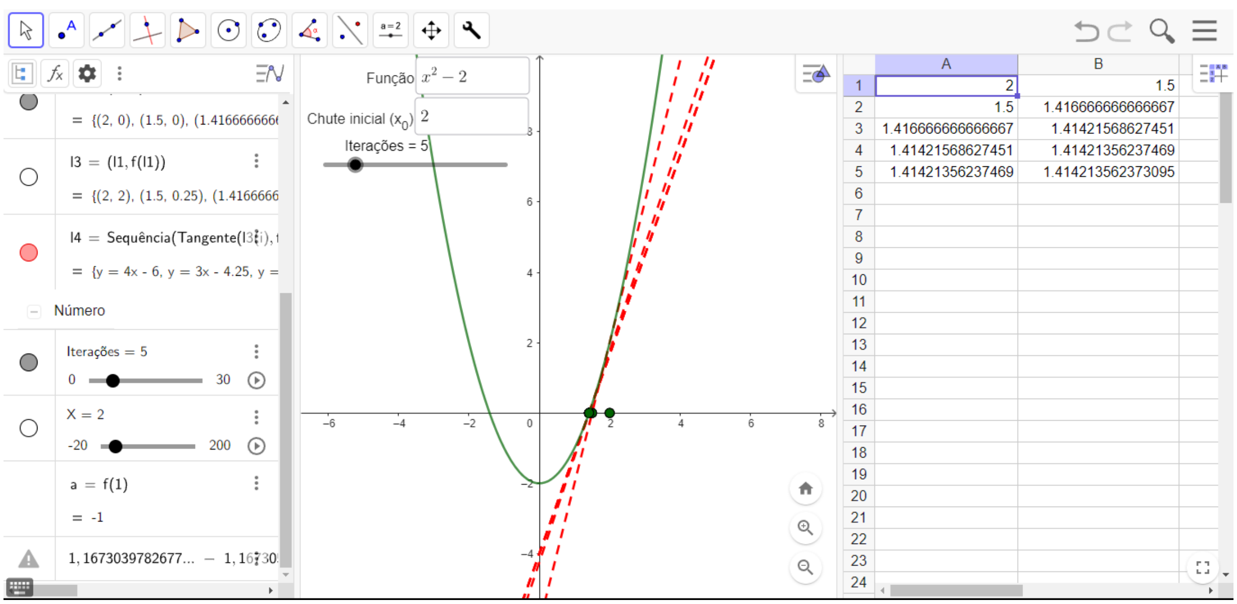
A2:"O método não funcionou agora, fica pulando de 1 para meio."

Dessa forma, pudemos perceber que o Método não convergiu para o valor da raiz quando $x_0 = 1$, mesmo com a função possuindo uma raiz e com o chute relativamente próximo ao valor da raiz.

Em seguida, apresentamos aos alunos, uma ferramenta criada no *software* GeoGebra, que implementa o método de Newton. Tal ferramenta corresponde ao roteiro 6.1 que foi apresentado na página 58 no capítulo 6 .

Ressaltamos que o arquivo foi compartilhado com os alunos, diferente do primeiro encontro, no qual os alunos realmente seguiram o roteiro sugerido passo a passo e criaram totalmente o arquivo. Foram utilizados os exemplos nos quais os participantes já aproximaram as raízes utilizando papel e lápis, $x^2 - 2 = 0$, o problema inicial $x^5 - x - 1 = 0$, e o exemplo $x^3 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ para $x_0 = 1$. E com isso, esperamos que a visualização de como o método funciona, reforce e facilite a compreensão dos participantes sobre o próprio método de Newton, utilizando o GeoGebra, o que fez com que a geometria do método fique clara.

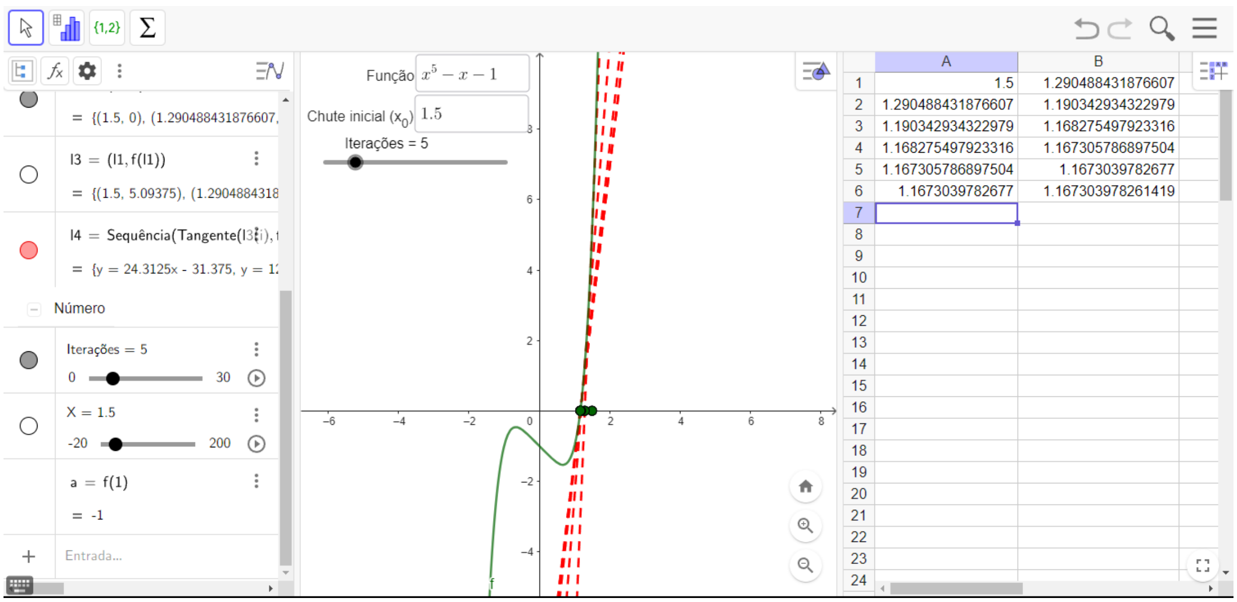
De posse da ferramenta construída, podemos aproximar o valor da raiz da equação $x^2 - 2 = 0$. Utilizamos a estimativas inicial $x_0 = 2$ com critério de parada $|e_n| < 10^{-3}$ exatamente como os alunos fizeram, porém, utilizando o Geogebra, obtemos:



Fonte: elaborado pelo autor

Vale ressaltar que a estimativa inicial x_0 pode ser escolhida de diversas maneiras, o que é facilitado pelo uso do *software*, pois basta alterar x_0 na caixa de entrada e assim testar novos valores para o chute inicial, de maneira mais simples que aplicação do método manualmente.

Finalmente, continuando a usar o arquivo, podemos resolver o problema inicial, que seria aproximar a raiz da equação $x^5 - x - 1 = 0$. Com $x_0 = 1,5$ temos:



Fonte: elaborado pelo autor

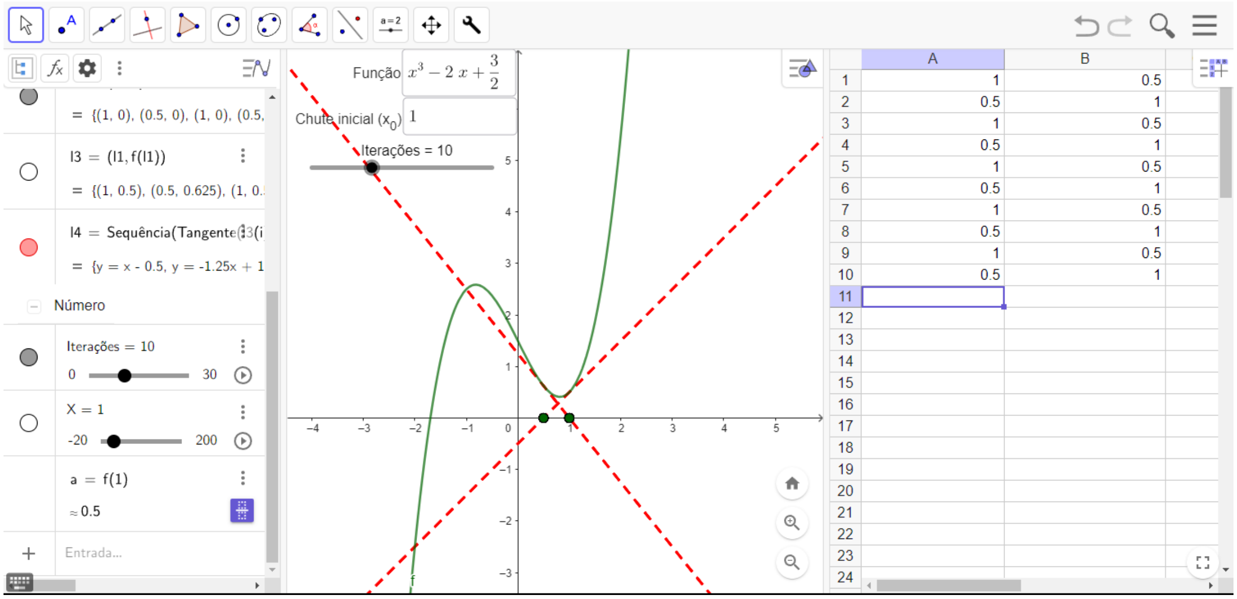
A2 perguntou: "Se mudar o chute inicial $x_0 = 2$ mudaria muita coisa?"

Após A2 utilizar do arquivo, concluiu: "Demorou o mesmo número de interações, porém, o chute inicial influencia no erro."

E por último, fizemos o exemplo $x^3 - 2x + \frac{3}{2} = 0$, no qual a função possui uma raiz, o chute é relativamente próximo À raiz, porém, mesmo assim o método de Newton não converge, como os próprios participantes constataram durante a própria atividade. (ver página 85)

É possível observar que em $f(-2) = -\frac{5}{2}$ e $f(2) = \frac{11}{2}$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe uma raiz no intervalo entre -2 e 2. Então, chutaremos $x_0 = 1$ e o que ocorre é que o método não converge para a raiz.

Como fica claro, não importa quantas interações sejam feitas, para a função $x^3 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ temos que a sequência x_n, quando $x_0 = 1$, fica alternando entre os valores 1 e $\frac{1}{2}$, reafirmando o que os alunos já haviam percebido ao realizar os cálculos manualmente.



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 52 – Registro da aplicação com professores.

Fonte: arquivo do autor

7.3 Análise dos questionários

Ao final de cada encontro e, após a realização das atividades, foi solicitado aos alunos do PROFMAT que respondessem a um questionário via *Google Forms*, devido à sua praticidade e para manter a veracidade das respostas ao se transcrever exatamente o que os participantes responderam. O questionário aplicado após o primeiro dia de atividade foi composto de questões de identificação dos participantes. Enquanto que, no segundo dia, o questionário tinha o objetivo de recolher a percepção dos participantes sobre a atividade de modo geral.

7.3.1 Questionário da Atividade 1

Esse questionário tem como objetivo a identificação dos professores de Matemática que participaram das atividades e construções propostas no *software* GeoGebra, relacionadas às derivadas e ao Método de Newton no Ensino Médio.

As respostas dadas não serão relacionadas de nenhuma forma aos respondentes e somente serão utilizadas sob a forma de dados na nossa dissertação em desenvolvimento no PROFMAT / UFOP.

1. *Nome:*

2. *Tempo (anos) de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática:*

3. *Tempo (anos) de experiência docente no Ensino Fundamental:*

4. *Tempo (anos) de experiência docente no Ensino Médio:*

5. *Você utiliza(ou) o software GeoGebra em suas aulas? Se positivo, descreva brevemente a(s) experiência(s); se negativo, justifique brevemente porque ainda não utilizou e/ou se gostaria de utilizar!*

7.3.2 Análise das respostas - Questionário da Atividade 1

As 4 primeiras perguntas têm o objetivo de recolher informações sobre o perfil dos participantes. Como mantivemos o sigilo em relação aos nomes dos participantes, iniciaremos a análise pela questão 2: *Tempo (anos) de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática:*

A1, A3 e A5 se formaram há 5 anos, A4 há 7 anos, A6 há 13 anos e A2 há 19 anos.

A terceira questão: *Tempo (anos) de experiência docente no Ensino Fundamental:* Dentre as respostas, A3 participante trabalha há 4 anos, A1 e A5 trabalham há 5 anos, A4 há 7 anos, A6 possui 13 anos de experiência e A2 possui 17 anos de experiência.

A quarta questão: *Tempo (anos) de experiência docente no Ensino Médio:*

A1 e A6 nunca trabalharam com o Ensino Médio, A5 possui 1 ano de experiência com alunos do PIC-OBMEP, A3 aluno possui 5 anos de trabalho no Ensino Médio, A2 e A4 alunos possuem 10 anos de experiência no Ensino Médio.

A última pergunta do primeiro questionário é: *Você utiliza(ou) o software GeoGebra em suas aulas? Se positivo, descreva brevemente a(s) experiência(s); se negativo, justifique brevemente porque ainda não utilizou e/ou se gostaria de utilizar!*

A1: Utilizo sempre que possível, tanto em sala de aula quanto em aulas particulares. Noção do plano cartesiano e localização de pontos, construção de ângulos, identificação de ângulos e suas medidas em polígonos regulares, identificação de tipos de segmentos e tipos de retas, identificação de tipos de pontos, construção de funções, identificação de elementos da função,...

A2: Não utilizei por falta de oportunidade e por, às vezes, as turmas serem com muitos alunos.

A3: Já usei o GeoGebra para mostrar gráficos de funções (afim, quadrática, trigonométrica) e como elas se comportavam ao mudar os coeficientes.

A4: Já utilizei o GeoGebra para o estudo de funções quadráticas na turma do Ensino Médio.

A5: Não utilizo, pois os alunos não demonstram interesse em aprender, o que me desmotiva de aplicar o *software* GeoGebra com eles.

A6: Não utilizo o GeoGebra em sala de aula. Tenho pouco conhecimento sobre as funções e ferramentas do programa. E muitas vezes, as escolas não dispõem de laboratórios de informática adequados para um bom trabalho com os alunos.

Três dos participantes responderam que não utilizam o *software* GeoGebra, que justificaram a não utilização pela falta de interesse dos alunos em aprender, o que desmotiva o professor a aplicar atividades que envolvam o GeoGebra. Dois participantes alegaram a falta de estrutura das escolas, turmas lotadas e o pouco conhecimento sobre o recurso computacional citado. Enquanto que três participantes utilizam ou já utilizaram tanto em sala de aula quanto em aulas particulares, para o estudo de funções e comportamento dos seus coeficientes. A1 destacou em detalhes os assuntos nos quais já utilizou o Geogebra: noção do plano cartesiano e localização de pontos, construção de ângulos, identificação de ângulos e suas medidas em polígonos regulares, identificação de tipos de segmentos e tipos de retas, identificação de tipos de pontos, construção de funções e identificação de elementos da função.

7.3.3 Questionário da Atividade 2

Após o segundo dia, os alunos responderam o seguinte questionário:

Esse questionário tem como objetivo a identificação dos professores de Matemática que participaram das atividades e construções propostas no *software* GeoGebra, relacionadas a derivadas e Método de Newton no Ensino Médio. As respostas dadas não serão atreladas de nenhuma forma aos respondentes e somente serão utilizadas sob a forma de dados na nossa dissertação em desenvolvimento no PROFMAT / UFOP.

1. *Na sua opinião, é possível abordar derivadas no Ensino Médio? Qual seria uma abordagem*

mais adequada do ponto de vista didático?

2. *Após realizar e explorar a Atividade 1 e as construções propostas, você entende que ela pode ser utilizada para introduzir o conceito de derivada para alunos do Ensino Médio? Quais seriam as contribuições para a aprendizagem dos alunos?*

3. *Na sua opinião, com os conteúdos tradicionalmente abordados no Ensino Médio, um aluno seria capaz de encontrar, ainda que de forma aproximada, a raiz real do polinômio $x^5 - x - 1$? Justifique brevemente.*

4. *Após realizar e explorar a Atividade 2 e as construções propostas, você entende que ela pode ser utilizada para introduzir o Método de Newton para a obtenção de forma aproximada de raízes de equações polinomiais ou não lineares? Quais seriam as contribuições para a aprendizagem dos alunos?*

5. *De forma geral, o que você pensa sobre a utilização de Tecnologias Digitais e, particularmente, do software GeoGebra nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática?*

Quanto à primeira pergunta, todos os alunos responderam que é possível sim, trabalhar derivada no ensino médio utilizando uma ideia geométrica. Algumas respostas foram:

A1: Acredito que seja possível ao se trabalhar sobre inclinação da reta e associado aos conceitos já apreendidos por eles. Dessa forma, poderiam, ao menos, ter noção de como poderiam identificar raízes (ou aproximação dessas) de equações não apresentadas convencionalmente.

Nessa resposta, A1 confunde o conceito de derivada e o seu uso no Método de Newton, visto que a derivada em si sozinha, não é utilizada para o cálculo de raízes de funções.

A5: Seria possível abordar derivadas no Ensino Médio de maneira indireta, utilizando o conceito de inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função com o auxílio de um *software* de geometria, como o Geogebra.

A6: Dependendo da turma e dos recursos disponíveis seria possível sim. Uma abordagem geométrica seria mais fácil de ser compreendida pelos alunos.

Para a segunda pergunta, todos concordaram novamente que o conceito de derivada apresentado pode sim ser trabalhado para o Ensino Médio e as contribuições citadas foram bastante variadas, desde trabalhar conceitos já conhecidos pelos alunos até trazer aplicações diferentes. Algumas das respostas foram:

A2: Entendo sim. Pois a partir do momento em que os alunos conseguem visualizar atráves dos gráficos, dá para perceber as relações que acontecem. Mostrando que o conceito de derivada pode ser mostrado sem a definição com limites.

A4: Poderia sim, pois a atividade aborda conceitos trabalhados no Ensino Médio. As contribuições seria um maior entendimento dos conceitos de gráficos de funções, aproximação de valores, cálculos de raízes.

A5: Sim. As contribuições seriam no fato dos alunos verem uma aplicação prática da Matemática, algo que eles reclamam muito por dizer ser algo muito abstrato.

Para a terceira pergunta, todos os alunos concordaram novamente que não seria possível de fato resolver a equação proposta, que somente através de aproximações utilizando recursos computacionais ou chutes chegariam a um valor próximo da raiz.

A1: Não seria possível. Apenas com "chutes", que, provavelmente, ainda assim não seriam "bons chutes"

A2: Da forma ensinada, não seria possível. Porque o aluno só iria pensar em números inteiros para a raiz.

A4: Não seriam capazes, pois os métodos de resolução utilizados no Ensino Médio abrangem apenas métodos de solução de equações de 1° e 2° graus.

A5: Não. Até para nós professores não encontramos com facilidade, assim os alunos tendo um conhecimento mais limitado, acredito que não encontrariam.

Para a penúltima pergunta, todos os professores concordaram que é possível introduzir o método e trazer benefícios para os alunos do ensino médio.

A1: As construções feitas seriam ótimas para que os estudantes possam entender o que acontece ao se aproximar das raízes desejadas e também entender que nem todo método e nem todo valor inicial será capaz de atender ao pretendido.

A2: Sim. O aluno passaria a ver que é possível "chutar"algum valor e ver se esse chute foi uma boa aproximação ou não e estar variando esse valor para melhorar a aproximação da raiz.

A4: Com certeza, poderia sim ser utilizado para introduzir o Método de Newton para obtenção de raízes aproximadas de equações polinomiais ou não lineares. Isso contribuiria para o aluno entender melhor como encontrar soluções matemáticas de problemas mais realistas.

Essa resposta reforça a nossa motivação inicial, já que o grande o objetivo do nosso trabalho é aplicar o Método de Newton para alunos do Ensino Médio.

A5: Sim. Através desse método, pode ser encontradas raízes de diversas equações, coisa que antes não era possível com as ferramentas que eles possuíam.

A6: O método é interessante para obter aproximação das raízes, mas volta no que ocorre no estudo de equações no dia a dia que a abordagem de casos específicos.

E por fim, no último questionamento, todos os alunos presentes constataram que sim, os recursos tecnológicos podem otimizar a aprendizagem dos alunos no geral, apesar de algumas observações sobre a realidade escolar serem feitas.

A1: São essenciais para abordagem de alguns assuntos. Além de facilitar e agilizar a visualização de conceitos e construções, permite que se faça etapas que, manualmente, seriam "impossíveis". Tornam as aulas mais atrativas também.

A2: Eu acho muito válido o uso do GeoGebra para os alunos, pois pode trazer contribuições de visualizações mais complexas e também é importante tomar cuidado para não utilizar o *software* só para construir o básico e sim mostrar desde o início todos os passos da construção.

A5: Acredito que o GeoGebra é uma excelente ferramenta a ser utilizada em aula, porém para ser utilizada é necessário que se tenha uma turma realmente interessada em aprender e discutir coisas novas, o que nos dias atuais está sendo algo quase impossível de encontrar.

A6: Muito importante para a visualização de situações que não seriam possíveis utilizando materiais limitados que normalmente temos a disposição.

Ao analisar os 6 questionários do primeiro dia e os 5 do segundo dia, e observando o comportamento dos alunos-professores durante a atividade, podemos afirmar que os participantes acolheram a proposta com entusiasmo e com participação ativa nos dois encontros, interagindo e trazendo comentários. É válido ressaltar que talvez parte desse interesse seja por serem professores e cursarem o PROFMAT. Fica para pesquisas futuras, a aplicação com alunos e até mesmo uma comparação entre as respostas desses estudos.

Considerações Finais

Neste estudo, nosso objetivo foi propor e aplicar uma atividade investigativa, aplicável ao Ensino Médio, para o cálculo de raízes de equações utilizando o Método de Newton e o *software* GeoGebra. Podemos também destacar a abordagem do conceito de derivada, que é alternativa da usual vistas em outros trabalhos já citados. A intenção da atividade é estimular a curiosidade e promover a participação ativa dos alunos. Sendo assim, planejada para utilizar as mídias disponíveis – lápis, papel e computador – de forma interativa, permitindo a busca e uma melhor compreensão, via dedução e experimentação.

Analisando os questionários preenchidos, obtivemos como resultado uma resposta positiva por parte dos participantes. Durante a discussão após aplicação da atividade, foi debatido sobre a necessidade de professores de matemática se preocuparem com a criação e desenvolvimento de aulas mais dinâmicas e interessantes. Concluindo que o uso das tecnologias, como o GeoGebra, dentro da sala de aula desperta discussões e pode auxiliar no processo de descoberta guiados e mediados pelo professor.

Além disso, foi ressaltado como esse modelo de atividade transforma o estudante em protagonista do processo de aprendizagem, favorecendo uma compreensão mais aprofundada dos conceitos abordados. Contribuindo também, segundo os resultados, para uma nova percepção dos professores de como inovar e desenvolver novas dinâmicas no cotidiano da sala de aula.

Por fim, concluímos que a atividade possui aplicabilidade ao Ensino Médio e contribui para a obtenção de raízes e compreensão do Método de Newton. Entendemos assim, que é uma maneira positiva utilizar as mídias digitais no ensino de Matemática, desenvolvendo atividades que enfatizam a experimentação, visualização, simulação de forma interativa, utilizando a tecnologia a favor do ensino.

Durante a minha experiência pessoal no ensino de matemática, não havia tido a oportunidade de trabalhar com o Método de Newton. Como professor, já utilizei tecnologias em aulas, porém, hoje observo que em algumas aplicações, não extraí o máximo do que o recurso tecnológico poderia proporcionar aos meus alunos, e por fim, voltava aos métodos tradicionais. A partir deste trabalho, me re-incentivei a trabalhar de uma nova maneira e buscar aprimorar a minha metodologia de ensino, podendo assim afirmar que, atualmente, a tecnologia é uma grande aliada da Matemática. A oportunidade de aplicar a atividade foi fundamental para a troca de conhecimento e o meu crescimento profissional.

Referências

AFUSO, A. Y. *Métodos Numéricos para encontrar zeros de funções: aplicações para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2014. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1374&id2=28510.> Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo-Volume I-10*. [S.l.]: Bookman Editora, 2014. Citado na página 47.

BNCC, B.-M. da Educação Secretaria da E. B. *BNCC: Base nacional comum curricular*. 2018. [Online; accessado em 4 de janeiro de 2024]. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado na página 17.

BROCKVELD, L. d. L. *Estudando métodos iterativos no ensino médio: uma proposta didática exploratória envolvendo o método de Newton e geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Santa Catarina, 2021. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/231038/PMTM-B0012-D.pdf?sequence=-1&isAllowed=y.> Citado na página 14.

CARDOSO, L. C. d. S. *Solução por Radicais de certas equações polinomiais de grau ímpar e método de Newton*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2016. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://sigpos.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/3355.> Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

CAVALCANTI, E. S. *Soluções de equações polinomiais via método de Newton-raphson com uso de planilhas eletrônicas*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Pará, 2015. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1843&id2=76964.> Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

FILHO, C. A. S. M. *Uma proposta para encontrar raízes de funções utilizando os métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Bahia, 2022. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/35320.> Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

LIMA, E. L. *Análise real*. [S.l.]: Impa Rio de Janeiro, 2004. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 21, 29 e 47.

MAURÍCIO, H. A. *Da equação do 2° grau aos métodos numéricos para resolução de equações*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/2360/1/henriqueaparecidomauricio.pdf.> Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

OLIVEIRA, J. C. de. *Método de Newton-Raphson Aplicado a Localização de Raízes Polinomiais*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Maranhão, 2014. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC/2013/TCC%20Marcelo%20Moura%20Teodoro.pdf.> Citado na página 14.

ROSS, D. *Abordagem geométrica do Método de Newton*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado de Mato Grosso, 2017. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3250&id2=150880655>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

SANTOS, J. C. A. *O método de Newton-Raphson na solução da equação $2^x = x^2$: uma motivação para o estudo da existência de logaritmo de números negativos*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) -Universidade Federal de Goiás, 2018. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4104&id2=150301345.> Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

SOBRAL, E. d. S. *Uma abordagem sobre métodos numéricos para determinar as raízes de funções polinomiais para alunos do ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/26296.> Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

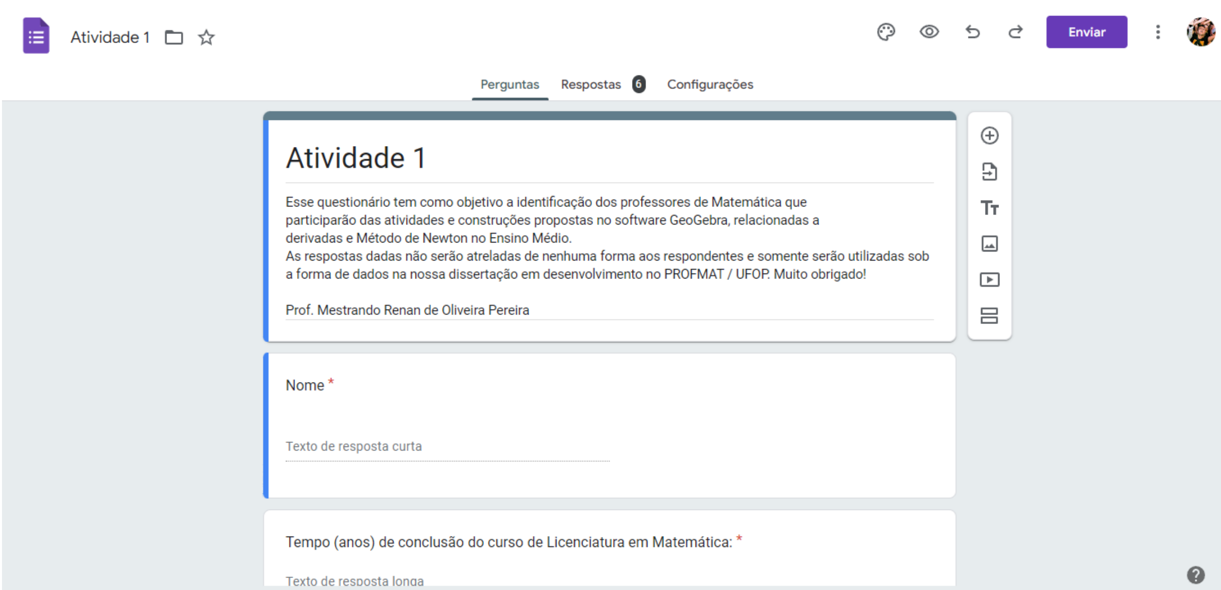
STEWART, J. *Cálculo*. 6ª. ed. São Paulo - Brasil: Cengage Learning, 2011. v. 1. Citado na página 31.

TEODORO, M. M. *O método de Newton e fractais*. Dissertação (Mestrado) — (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João del-Rei, 2015. Acesso em: 18 abr. 2024. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/231038/PMTM-B0012-D.pdf?sequence=-1&isAllowed=y.> Citado na página 14.

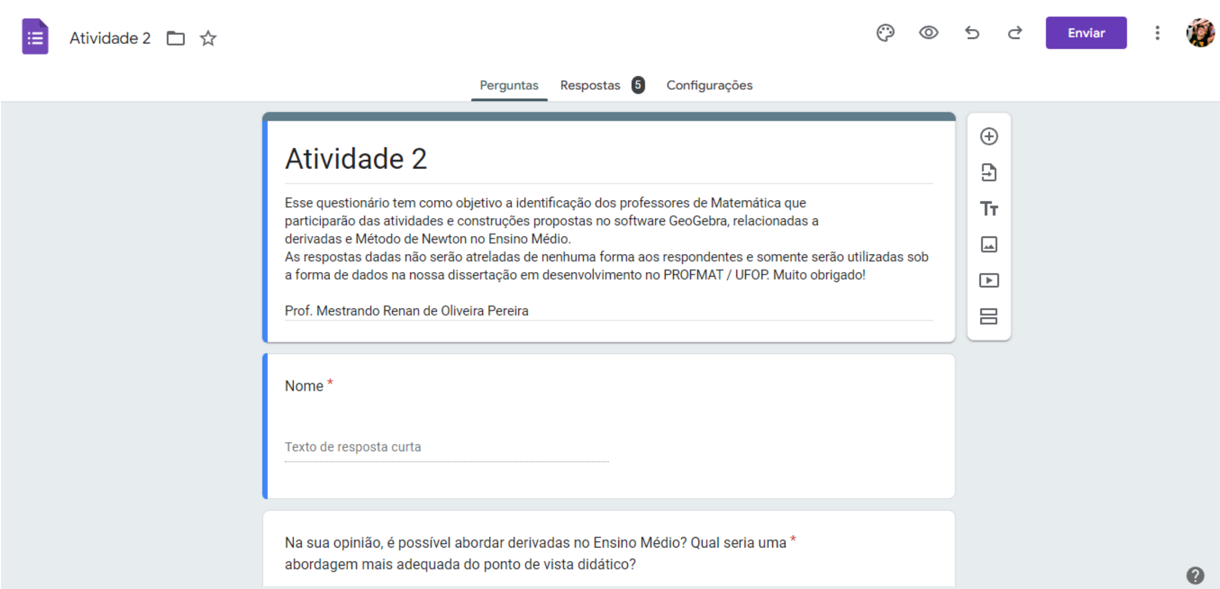
APÊNDICE A

Apêndice

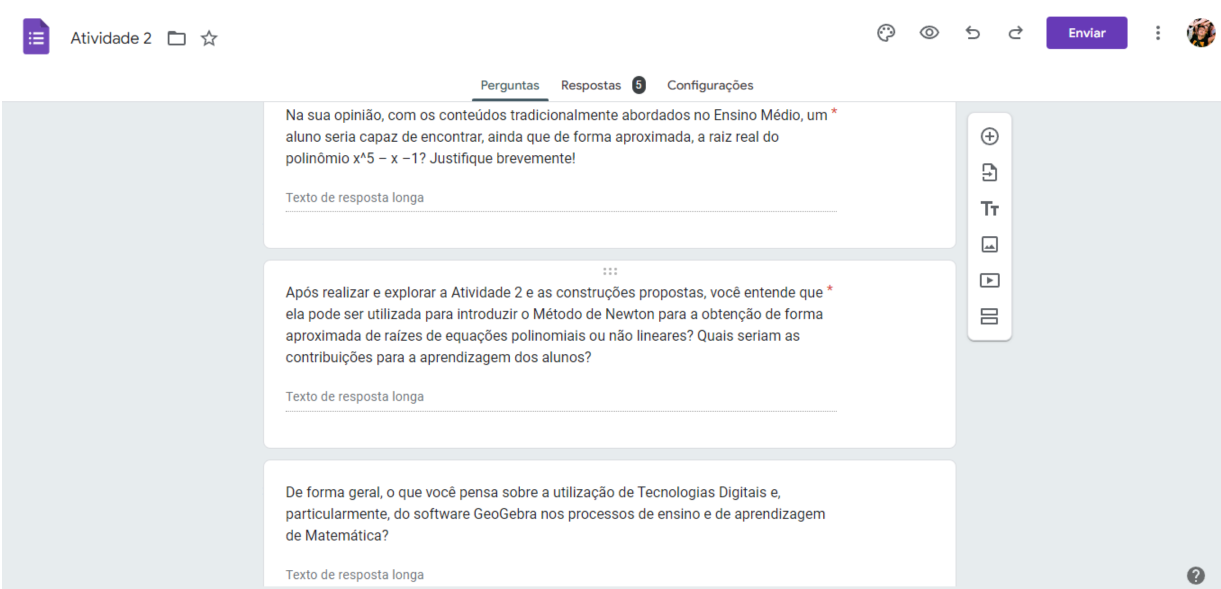
Seguem os questionários aplicados através do formulários do Google




Atividade 1
Enviar
Perguntas
Respostas 6
Configurações
Tempo (anos) de experiência docente no Ensino Fundamental: *
Texto de resposta longa
Tempo (anos) de experiência docente no Ensino Médio: *
Texto de resposta longa
Você utiliza(ou) o software GeoGebra em suas aulas? Se positivo, descreva brevemente a(s) experiência(s); se negativo, justifique brevemente porque ainda não utilizou e/ou se gostaria de utilizar! *
Texto de resposta longa


Atividade 2
Enviar
Perguntas
Respostas 5
Configurações
Atividade 2
Esse questionário tem como objetivo a identificação dos professores de Matemática que participarão das atividades e construções propostas no software GeoGebra, relacionadas a derivadas e Método de Newton no Ensino Médio.
As respostas dadas não serão atreladas de nenhuma forma aos respondentes e somente serão utilizadas sob a forma de dados na nossa dissertação em desenvolvimento no PROFMAT / UFOP. Muito obrigado!
Prof. Mestrando Renan de Oliveira Pereira
Nome *
Texto de resposta curta
Na sua opinião, é possível abordar derivadas no Ensino Médio? Qual seria uma abordagem mais adequada do ponto de vista didático? *


Atividade 2
Enviar
Perguntas
Respostas 5
Configurações
Na sua opinião, é possível abordar derivadas no Ensino Médio? Qual seria uma abordagem mais adequada do ponto de vista didático? *
Texto de resposta longa
Após realizar e explorar a Atividade 1 e as construções propostas, você entende que ela pode ser utilizada para introduzir o conceito de derivada para alunos do Ensino Médio? Quais seriam as contribuições para a aprendizagem dos alunos? *
Texto de resposta longa
Na sua opinião, com os conteúdos tradicionalmente abordados no Ensino Médio, um aluno seria capaz de encontrar, ainda que de forma aproximada, a raiz real do polinômio x^5 – x –1? Justifique brevemente! *
Texto de resposta longa


Atividade 2
Enviar
Perguntas
Respostas 5
Configurações
Na sua opinião, com os conteúdos tradicionalmente abordados no Ensino Médio, um aluno seria capaz de encontrar, ainda que de forma aproximada, a raiz real do polinômio x^5 – x –1? Justifique brevemente! *
Texto de resposta longa
Após realizar e explorar a Atividade 2 e as construções propostas, você entende que ela pode ser utilizada para introduzir o Método de Newton para a obtenção de forma aproximada de raízes de equações polinomiais ou não lineares? Quais seriam as contribuições para a aprendizagem dos alunos? *
Texto de resposta longa
De forma geral, o que você pensa sobre a utilização de Tecnologias Digitais e, particularmente, do software GeoGebra nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática?
Texto de resposta longa