



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

DANIEL LUIZ AVANZI

**A LOUSA DIGITAL E O GEOGEBRA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA
ESPACIAL**

Londrina

2024

DANIEL LUIZ AVANZI

**A LOUSA DIGITAL E O GEOGEBRA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA
ESPACIAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Magna Natália Marin Pires

Londrina

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

A946a AVANZI, DANIEL LUIZ .
A LOUSA DIGITAL E O GEOGEBRA : UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL / DANIEL LUIZ AVANZI. - Londrina, 2024.
90 f. : il.

Orientador: Magna Natalia Marin Pires.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2024.
Inclui bibliografia.

1. Lousa Digital - Tese. 2. GeoGebra - Tese. 3. Geometria Espacial - Tese. 4. Ensino de Matemática - Tese. I. Pires, Magna Natalia Marin. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

DANIEL LUIZ AVANZI

**A LOUSA DIGITAL E O GEOGEBRA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA
ESPACIAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
UEL - Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
UEL - Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Loreni Aparecida Ferreira Baldini
SEED - Secretaria de Estado da Educação

Londrina, 22 de abril de 2024

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me dado competência, discernimento e forças para superar as dificuldades que surgiram no caminho.

À minha esposa, Tatiana, pela compreensão, apoio e incentivo.

Aos meus familiares, em especial meus pais, Francisco e Bernadete, que me apoiaram em todos os momentos.

À minha orientadora, Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires, por me acolher, apoiar, corrigir, guiar e incentivar sempre transmitindo muita confiança e por muito ter contribuído para a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Neuza Teramon, pelo apoio inicial, o qual serviu de base para a elaboração deste trabalho.

Ao corpo docente PROFMAT da UEL, por ter compartilhado o conhecimento fundamental para a conclusão deste trabalho.

Às colegas de curso Marília e Izis, pelas contribuições e pelas horas de estudo e que tivemos juntos.

Ao Colégio Estadual Machado de Assis de Barbosa Ferraz, na pessoa da diretora professora Cléria Cristina, pela disponibilidade do espaço físico e dos materiais utilizados.

Ao corpo docente e demais funcionários do Colégio Estadual Machado de Assis de Barbosa Ferraz, em especial às professoras Izabel Cristina e Beatriz pelo apoio.

À CAPES.

A todos que de alguma forma contribuíram para que esse trabalho fosse realizado.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”
(Galileu Galilei)

AVANZI, Daniel Luiz. **A lousa digital e o GeoGebra: uma proposta para o ensino de Geometria Espacial**. 2024. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

RESUMO

As tecnologias estão em constante evolução e se fazem presentes em quase todas as áreas de nossas vidas. Nesse contexto, a escola não pode ignorar essas inovações tecnológicas, mas deve aproveitá-las para enriquecer os processos de ensino e de aprendizagem dos estudantes. Este estudo tem por objetivo discutir e apresentar uma proposta de ensino utilizando a lousa digital e o GeoGebra como ferramentas potenciais para o ensino de Geometria Espacial. Muitas instituições de ensino já estão equipadas com lousas digitais, no entanto, observa-se que poucos professores fazem uso efetivo dessa tecnologia, que muitas vezes acaba sendo subutilizada ou mesmo esquecida. Além disso, há uma escassez de materiais didáticos e recursos pedagógicos voltados para a utilização da lousa digital em sala de aula. Diante desse cenário, este trabalho apresenta algumas propostas para explorar o uso da lousa digital e do GeoGebra em sala de aula, trazendo ideias que podem servir como inspiração para o professor e tarefas que podem ser exploradas com os estudantes em sala de aula. A intenção é incentivar o uso dessa tecnologia. A elaboração desse trabalho permitiu reconhecer que a lousa digital e o GeoGebra são instrumentos que podem colaborar na construção de conceitos matemáticos, porém é necessário entender que a lousa digital ou qualquer outra tecnologia, por si só, não é solução para os desafios da educação e que é importante usá-las de forma estratégica e complementar e ainda que o professor continua sendo essencial para os processos de ensino e de aprendizagem.

Palavras-Chave: Lousa Digital, GeoGebra, Tecnologia Digital, Geometria Espacial, Ensino de Matemática.

AVANZI, Daniel Luiz. **The Digital Whiteboard as a resource for teaching Spatial Geometry**. 2024. 90 f. Dissertation (Professional National Masters in Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

ABSTRACT

Technologies are constantly evolving and are present in almost all areas of our lives. In this context, the school cannot ignore these technological innovations, but must take advantage of them to enrich the teaching and learning processes of students. This study aims to discuss and present a teaching proposal using the digital whiteboard and GeoGebra as potential tools for the teaching of Spatial Geometry. Many educational institutions are already equipped with digital whiteboards, however, it is observed that few teachers make effective use of this technology, which often ends up being underused or even forgotten. In addition, there is a shortage of teaching materials and pedagogical resources aimed at the use of the digital whiteboard in the classroom. In view of this scenario, this work presents some proposals to explore the use of the digital whiteboard and GeoGebra in the classroom, bringing ideas that can serve as inspiration for the teacher and tasks that can be explored with students in the classroom. The intention is to encourage the use of this technology. The elaboration of this work allowed us to recognize that the digital whiteboard and GeoGebra are instruments that can collaborate in the construction of mathematical concepts, but it is necessary to understand that the digital whiteboard or any other technology, by itself, is not a solution to the challenges of education and that it is important to use them in a strategic and complementary way and that the teacher continues to be essential for the teaching and learning processes.

Key words: Digital Whiteboard, GeoGebra, Digital Technology, Spatial Geometry, Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tela do GeoGebra Classic	19
Figura 2 – Calculadora Gráfica do GeoGebra	20
Figura 3 – Visualização de Pirâmide utilizando realidade aumentada no GeoGebra	21
Figura 4 – Materiais separados por tema no site do GeoGebra	22
Figura 5 – Materiais sobre volume de sólidos geométricos	23
Figura 6 – Funcionamento da lousa digital	25
Figura 7 – Lousa digital adquirida pelo ProInfo	30
Figura 8 – Caneta e estojo da lousa digital	31
Figura 9 – Quadro para projeção	31
Figura 10 – Lousa digital Touch	32
Figura 11 – Representação do cubo em 3D usando o GeoGebra	39
Figura 12 – Destaque das faces e arestas do cubo	40
Figura 13 – Destaque das faces e arestas do cubo em outra posição	40
Figura 14 – Destaque das faces, arestas e dos vértices do cubo	41
Figura 15 – Destaque dos vértices do cubo	41
Figura 16 – Representação do ponto P	42
Figura 17 – Vértices do cubo com anotações	43
Figura 18 – Arestas do cubo	43
Figura 19 – Representação da reta r	44
Figura 20 – Arestas do cubo com algumas anotações	44
Figura 21 – Faces do cubo	45
Figura 22 – Representação do plano α	45
Figura 23 – Faces do cubo e anotações	46
Figura 24 – Tarefa sobre os elementos do cubo com anotações no Xournal++	47
Figura 25 – Tela do notebook exibida dentro do aplicativo da lousa digital	48
Figura 26 – Elementos de um poliedro	49
Figura 27 – Prisma regular com raio da base igual à 1 e altura igual à 3	50
Figura 28 – Prisma regular com raio da base igual à 3 e altura igual à 3	50
Figura 29 – Prisma de base triangular	51
Figura 30 – Prisma de base hexagonal	52
Figura 31 – Classificação do prisma quanto o número de lados da base	52
Figura 32 – Prismas retos com diferentes alturas	53
Figura 33 – Prisma	54
Figura 34 – Prisma sendo planificado	55
Figura 35 – Planificação do prisma hexagonal	55
Figura 36 – Cálculo da área da base do prisma	56
Figura 37 – Cálculo da área da base do prisma no GeoGebra	57
Figura 38 – Cálculo da área lateral do prisma	58
Figura 39 – Cálculo da área lateral do prisma no GeoGebra	58
Figura 40 – Cálculo da área total do prisma	59
Figura 41 – Cálculo do volume do prisma	60
Figura 42 – Cálculo do volume do prisma no GeoGebra	60
Figura 43 – Pirâmide quadrangular da tarefa proposta	61
Figura 44 – Cálculo da aresta da base da pirâmide	62
Figura 45 – Cálculo do apótema da base da pirâmide	63
Figura 46 – Cálculo do apótema da base da pirâmide no GeoGebra	63
Figura 47 – Cálculo do apótema da pirâmide	64

Figura 48 – Cálculo do apótema da pirâmide no GeoGebra	64
Figura 49 – Cálculo da área lateral da pirâmide	65
Figura 50 – Cálculo da área total da pirâmide	65
Figura 51 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando o Teorema de Pitágoras	66
Figura 52 – Cálculo da altura da pirâmide no GeoGebra	66
Figura 53 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando tangente	67
Figura 54 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando seno	67
Figura 55 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando cosseno	68
Figura 56 – Cálculo do volume da pirâmide	68
Figura 57 – Cálculo do volume da pirâmide no GeoGebra	69
Figura 58 – Tipos de paralelepípedo	71
Figura 59 – Paralelepípedo retângulo no Whiteboard	72
Figura 60 – Cálculo das áreas dos retângulos utilizando o Whiteboard no celular ...	73
Figura 61 – Cálculo das áreas dos retângulos sendo exibido no computador	74
Figura 62 – Cálculo da área total do paralelepípedo realizado no smartphone	74
Figura 63 – Cálculo da área total do paralelepípedo sendo exibido no computador .	75
Figura 64 – Traçando a diagonal AC'	76
Figura 65 – Cálculo da diagonal AC	77
Figura 66 – Cálculo da diagonal AC'	77
Figura 67 – Cálculo das diagonais das caixas	78
Figura 68 – Tabela para preencher com a soma de dois quadrados	80
Figura 69 – Tabela com a soma de dois quadrados preenchida	81
Figura 70 – Expressões com as parcelas comuns	82
Figura 71 – Pares de trios diferentes de quadrados cujas somas são iguais	82
Figura 72 – Algumas soluções para o problema da diagonal das caixas	83

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Trabalhos a respeito de lousa digital desenvolvidos no PROFMAT35

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
2	TECNOLOGIA	15
2.1	Tecnologias DIGITAIS na Educação.....	16
2.1.1	GeoGebra	19
2.1.2	Lousa digital.....	24
2.1.3	Lousa digital em sala de aula.....	25
2.1.4	Lousa digital nas escolas estaduais do Paraná	29
3	ETAPAS DO TRABALHO	34
3.1	Trabalhos do PROFMAT que abordam a lousa digital.....	34
3.2	Composição da Proposta.....	36
4	A PROPOSTA	38
4.1	Primeira Tarefa	38
4.2	Segunda Tarefa	49
4.3	Terceira Tarefa	61
4.4	Quarta Tarefa.....	69
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	84
	REFERÊNCIAS.....	87

1 INTRODUÇÃO

O uso das tecnologias digitais¹ (TD) na educação tem crescido rapidamente nos últimos anos. A lousa digital é uma dessas tecnologias e tem se tornado cada vez mais comum nas salas de aula. Ela permite aos professores apresentarem conteúdo de maneira interativa e dinâmica, e pode ser usada para promover a colaboração entre os estudantes. Além disso, muitas lousas digitais são compatíveis com dispositivos móveis, o que significa que os estudantes podem acessar o conteúdo e participar das atividades usando seus próprios dispositivos.

Na Educação Básica, o uso dessa TD pode ser particularmente útil em disciplinas como a Matemática, especialmente no ensino de Geometria Espacial, porque facilita a visualização dos objetos tridimensionais. Geralmente pouco tempo é dispensado para as tarefas de Geometria, os professores costumam investir mais tempo na aritmética e na álgebra, o que impacta nos anos posteriores e, muitas vezes, os estudantes trazem conceitos equivocados e até pensam não gostar de dessa área da Matemática.

Assim como a lousa tradicional, a lousa digital pode ser usada para simples escrita, nela o professor pode realizar cálculos matemáticos e resolver problemas, além disso pode ser usada para exibir gráficos, fórmulas e outros materiais visualmente complexos de maneira interativa e que pode trazer o estudante para o centro do processo de aprendizagem.

As TD devem ser usadas em sala de aula não apenas para facilitar o trabalho do professor e tornar a aula mais interessante, elas estão presentes no dia a dia do estudante, podemos utilizar as aulas de matemática para explorar conteúdos de várias maneiras, o que auxilia o estudante a ler, a compreender, a interpretar (Soares, 2008). No entanto, é importante destacar que as TD si só não garante o sucesso da educação, ela precisa ser usada de forma estratégica, complementar e criativa, com foco nos objetivos de ensino.

A eficácia do uso de TD em sala de aula é determinada tanto pela metodologia empregada quanto pela seleção de softwares, levando em consideração os objetivos a serem alcançados e a visão de conhecimento e aprendizado que guia o processo (Gladcheff, 2001).

¹ Na continuação desse texto, sempre que nos referirmos a tecnologias digitais, utilizaremos a sigla TD.

Dessa forma, um dos fatores que levou à escolha do tema desse trabalho foi justamente a tentativa de mostrar possíveis usos da lousa digital, apresentando algumas propostas para utilizá-la em sala de aula. A escassez de materiais sobre o tema também foi um fator que motivou o desenvolvimento desse estudo, que pretende ser um subsídio para o professor que estiver disposto a utilizar essa tecnologia para explorar o tema de Geometria Espacial.

Mais especificamente, esse estudo tem por objetivo discutir e apresentar uma proposta de ensino, utilizando a lousa digital e o GeoGebra, como ferramentas potenciais para o ensino de Geometria Espacial.

A escrita desse estudo está organizada na maneira que segue.

O capítulo 2 explora alguma teoria a respeito de Tecnologias, Tecnologias Digitais na Educação, GeoGebra e a lousa digital.

O capítulo 3 apresenta as etapas do desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 4 são apresentadas e discutidas quatro propostas de tarefas.

Por fim, as CONSIDERAÇÕES FINAIS trazem uma síntese das principais reflexões obtidas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

2 TECNOLOGIA

Quando se fala em tecnologia muitas vezes se pensa em grandes inovações voltadas principalmente na área da eletrônica. No entanto, conforme afirma Kenski (2013, n.p.), “as tecnologias são tão antigas quanto a espécie humana.”

Ainda segundo Kenski (2013, n.p.),

Desde o início dos tempos, o domínio de determinados tipos de tecnologias, assim como o domínio de certas informações, distingue os seres humanos. Tecnologia é poder. Na Idade da Pedra, os homens – que eram frágeis fisicamente diante dos outros animais e das manifestações da natureza – conseguiram garantir a sobrevivência da espécie e sua supremacia, pela engenhosidade e astúcia com que dominavam o uso de elementos da natureza. A água, o fogo, um pedaço de pau ou o osso de um animal eram utilizados para matar, dominar ou afugentar os animais e outros homens que não tinham os mesmos conhecimentos e habilidades.

Ao analisar a evolução histórica das técnicas criadas pela humanidade, inseridas nos contextos socioculturais de cada período, podemos aprofundar nossa compreensão da contribuição ativa do homem e da tecnologia para o avanço da sociedade. Isso amplia nossa percepção do termo “tecnologia”, destacando seu papel fundamental no progresso humano (Veraszto, 2008).

Tecnologia é um termo abrangente que engloba diversos significados e aplicações. A palavra tecnologia tem origem nos vocábulos gregos *tekhné* (que significa “arte, indústria, habilidade”) e *logos* (que significa “argumento, discussão, razão”). Portanto, a tecnologia, em sua etimologia, consiste no conjunto de conhecimentos, saberes, argumentos e razões relacionados a uma arte, ofício ou atividade específica (Tecnologia, 2024).

No dicionário escolar da língua portuguesa Aurélio Júnior, Ferreira (2011, p. 864), define tecnologia como o “conjunto de conhecimentos, especialmente de princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade”.

Diante de conceituações tão amplas, estabelecer uma definição precisa e exata para o termo “tecnologia” é um desafio, considerando que, ao longo da história, o conceito tem sido interpretado de várias formas por diferentes indivíduos. Essas interpretações são frequentemente baseadas em teorias que podem divergir significativamente e são moldadas pelos contextos sociais distintos em que são formuladas (Gama, 1987, *apud* Veraszto 2008).

Nessa mesma linha, Moran *et al.* (2023) nos apresenta que

Tecnologia é um termo usado para atividades do domínio humano, embasadas no conhecimento de um processo e/ou no manuseio de ferramentas. A tecnologia tem a possibilidade de acrescentar mudanças aos meios por resultados adicionais à competência natural, proporcionando, desta forma, uma evolução na capacidade das atividades humanas, desde os primórdios do tempo (Moran *et al.*, 2023).

Dessa forma, portanto, um simples objeto ou técnica que puder ser utilizado de forma inovadora para resolver um problema ou facilitar uma tarefa pode ser considerado como uma “nova tecnologia”.

Em resumo, tecnologia abrange desde o estudo científico dos métodos industriais até a aplicação prática do conhecimento para resolver problemas em diversas áreas. Ela está presente em nosso cotidiano e continua a evoluir constantemente.

2.1 TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO

Vivemos em uma era na qual os avanços tecnológicos ocorrem de forma extremamente rápida. O que hoje é novo, em pouco tempo já se torna obsoleto. Borba (2018) afirma que

A forma acelerada com que inovações tecnológicas vêm tomando corpo é, atualmente, uma característica marcante de nossa sociedade, de maneira cada vez mais rápida, os computadores pessoais têm maior capacidade de processamento e memória, as interfaces ficam mais amigáveis e interativas e a conexão da internet mais veloz (Borba, 2018, p. 21).

Tais avanços têm transformado profundamente a sociedade em muitos aspectos, incluindo a educação. Os avanços tecnológicos estão mudando a forma como ensinamos e aprendemos, oferecendo novas possibilidades que podem favorecer a aprendizagem dos estudantes.

Segundo o “*Global education monitoring report, 2023: technology in education: a tool on whose terms?*”, publicado pela UNESCO em 2023, a utilização das TD em sala de aula proporcionou várias mudanças no processo de ensino e de aprendizagem.

O relatório aponta que

Grandes avanços na tecnologia, especialmente na tecnologia digital, estão transformando rapidamente o mundo. A tecnologia da informação e comunicação (TIC) é utilizada há 100 anos na educação, desde a popularização do rádio na década de 1920. Mas é a utilização da tecnologia digital ao longo dos últimos 40 anos que tem o potencial mais significativo

para transformar a educação. Uma indústria de tecnologia educacional surgiu e se concentrou, por sua vez, no desenvolvimento e distribuição de conteúdo educacional, sistemas de gestão de aprendizagem, aplicações linguísticas, realidade aumentada e virtual, tutoria personalizada e testes. Mais recentemente, os avanços nos métodos de inteligência artificial (IA) aumentaram o poder das ferramentas tecnológicas educativas, levando à especulação de que a tecnologia poderia até suplantiar a interação humana na educação (UNESCO, 2023, p. 8, tradução nossa).

O uso de tecnologias em sala de aula não é algo recente. De acordo com Costa (2015), a incorporação de tecnologias no processo educacional é um fenômeno que remonta aos tempos antigos. Já na Grécia Antiga, um mestre, com seu vasto conhecimento e sabedoria, transmitia ensinamentos a um pequeno grupo de aprendizes, geralmente composto por dois ou três discípulos. Essa era a forma mais rudimentar de integração de tecnologia ao ensino e, a “tecnologia” era o conhecimento do mestre. A partir do século XVI a integração de tecnologias ao ensino começou a tomar uma forma mais reconhecível para os padrões mais atuais. Durante esse período, as primeiras salas de aula com ensino múltiplo começaram a ser estruturadas e disseminadas, permitindo que um único professor ensinasse a vários estudantes ao mesmo tempo, otimizando os processos de ensino e de aprendizagem. Esta foi uma etapa crucial na evolução da educação, marcando o início de uma nova era na integração de tecnologias ao ensino.

Ao longo dos anos, temos testemunhado uma evolução contínua dos recursos pedagógicos, impulsionada pela introdução de novas tecnologias no ambiente escolar. O retroprojetor, que antes dependia de transparências para a projeção de imagens, foi substituído pelo projetor multimídia. Este novo dispositivo é capaz de utilizar arquivos em uma variedade de formatos, incluindo áudios e vídeos, proporcionando uma experiência de aprendizado mais rica e diversificada. O videocassete e as fitas cassetes, que eram os principais meios de reprodução de áudio e vídeo, foram substituídos pelos DVDs que, por sua vez, deram lugares aos computadores, smartphones e tablets conectados à internet (Diniz, 2015).

Por fim, o quadro-negro, que já não é mais negro, mas sim verde ou branco, evoluiu para a lousa digital. Esta inovação tecnológica já está presente em muitas escolas e permite uma interação mais dinâmica e participativa entre professores e estudantes. A lousa digital representa um marco na evolução da educação, demonstrando como a tecnologia pode ser utilizada para enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem (Diniz, 2015).

Atualmente, vivemos em uma sociedade na qual os canais de comunicação se expandiram exponencialmente e o acesso a uma vasta quantidade de informações foi grandemente facilitado. A metodologia tradicional de ensino, caracterizada por sua rigidez, onde o professor é visto como a figura central e o principal detentor do conhecimento e o estudante é frequentemente retratado como um receptor passivo, sem a oportunidade de dialogar, debater ou expressar suas próprias ideias (Souza, 2015), deve ser repensada a fim de melhor aproveitar as tecnologias em sala de aula.

Diante desse quadro é necessário observar e repensar as várias atitudes distintas entre os professores em relação ao uso das tecnologias em sala de aula. Alguns professores encaram-nas com ceticismo, tentando evitar o máximo possível qualquer interação com elas. Há ainda aqueles que as utilizam, mas não estão seguros de como incorporá-las em suas atividades. E existem ainda aqueles que tentam implementá-las em suas aulas, mas sem modificar suas metodologias de ensino. São poucos os que se aventuram em explorá-la mais intensamente buscando ideias ou inovações para utilizar em sala de aula (Ponte, 2000).

Considerando a interação entre educação e tecnologia, é importante ressaltar que a educação não deve ser vista como um processo que simplesmente “deposita” conteúdos na mente “vazia” dos estudantes. Em vez disso, a educação deve ser um processo que desafia os estudantes a pensar de maneira crítica e criativa. Nesse contexto, o papel do professor vai além de apenas transmitir informações a respeito dos conteúdos aos estudantes, ele tem a responsabilidade de conduzir os estudantes a pensarem (Freire, 1983, *apud* Pereira *et al*, 2016).

Para assegurar que o uso da tecnologia possa contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem, é imprescindível a definição de objetivos e princípios, de maneira mais clara possível. A utilização da tecnologia digital na educação pode ter aspectos negativos e prejudiciais, como o risco de distração, diminuição do contato humano, alguns participantes da aula se ausentam sem conhecimento do professor, alguns se intimidam para fazer perguntas, entre outros. É fundamental que os sistemas educacionais estejam adequadamente preparados para instruir sobre e por meio da tecnologia digital, um recurso que deve atender aos melhores interesses de todos os estudantes, professores e administradores. É importante disseminar de maneira mais abrangente evidências imparciais que demonstram que a tecnologia está sendo empregada em certos locais para aprimorar a educação, e que bons exemplos desse uso precisam ser compartilhados, para que o método de distribuição

mais adequado possa ser selecionado para cada contexto (UNESCO, 2023).

Neste trabalho iremos discutir a utilização de algumas TD nas aulas de Matemática.

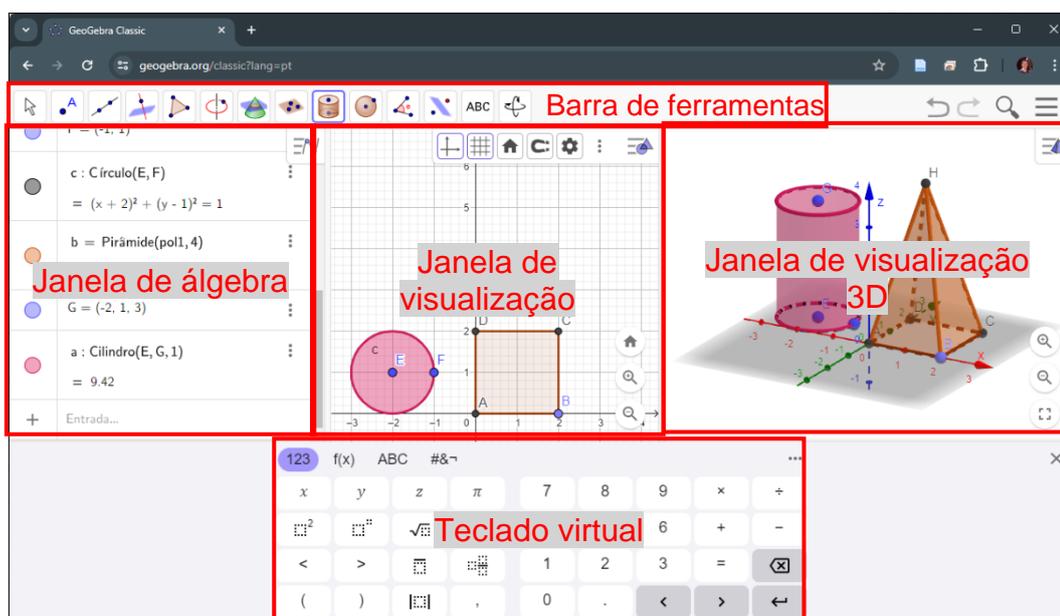
2.1.1 GeoGebra

O GeoGebra² é um software livre de matemática dinâmica que combina geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único pacote fácil de usar e disponível em diversas plataformas.

Ele conta com várias ferramentas, todas integradas, por meio das quais é possível realizar diversos cálculos e construções, com uma atenção especial para a Geometria.

A Figura 1 traz uma captura de tela do GeoGebra Classic, na versão para computador, que pode ser acessado por meio do link <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt>, na qual é possível visualizar os elementos da interface do programa com o nome de cada área.

Figura 1 – Tela do GeoGebra Classic



Fonte: o autor

² <https://www.geogebra.org/>

Na “Janela de Visualização” são mostradas construções geométricas em duas dimensões, sendo também utilizada para exibir funções. Nela é possível mostrar ou ocultar os eixos coordenados e a malha quadriculada.

Na “Janela de Visualização 3D”, como o nome já traz, são mostradas as construções em três dimensões.

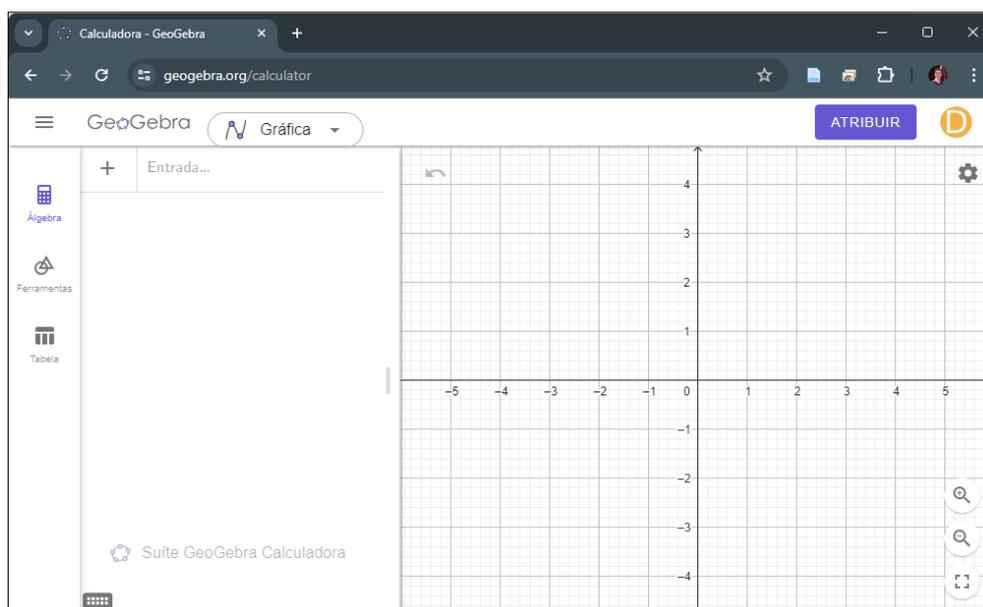
A “Barra de Ferramentas” contém botões cujas funções possibilitam inserir elementos diretamente nas Janelas de Visualização. Tais botões variam de acordo com a Janela de Visualização ativa.

Na “Janela de Álgebra” são exibidos todos os elementos da construção, sendo possível os inserir manualmente através do campo “Entrada” na parte de baixo da janela.

Por fim, o “Teclado Virtual” auxilia na digitação das expressões matemáticas pois contém letras e números, ou outros símbolos que não estão disponíveis no teclado físico, como letras gregas e sinais de operações.

Além da versão clássica, o GeoGebra conta com diversas outras versões do aplicativo, no entanto, estas possuem basicamente as mesmas funcionalidades, mudando apenas a disposição das barras e janelas na interface do programa como podemos ver na Calculadora Gráfica mostrada na Figura 2.

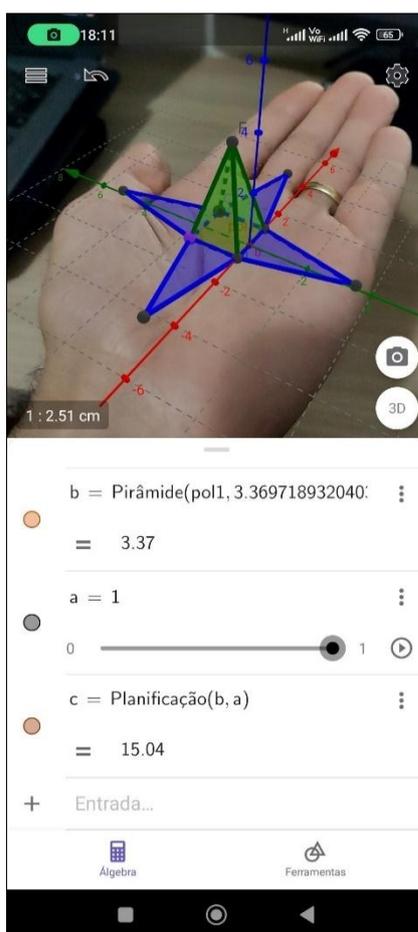
Figura 2 – Calculadora Gráfica do GeoGebra



Fonte: o autor

Além da versão para computador e da versão on-line, o GeoGebra conta com algumas versões que podem ser instaladas em dispositivos móveis como smartphones e tablets, sendo que em uma delas é possível utilizar os recursos de realidade aumentada³ para proporcionar uma experiência muito mais imersiva na visualização dos elementos, como visto na Figura 3.

Figura 3 – Visualização de Pirâmide utilizando realidade aumentada no GeoGebra



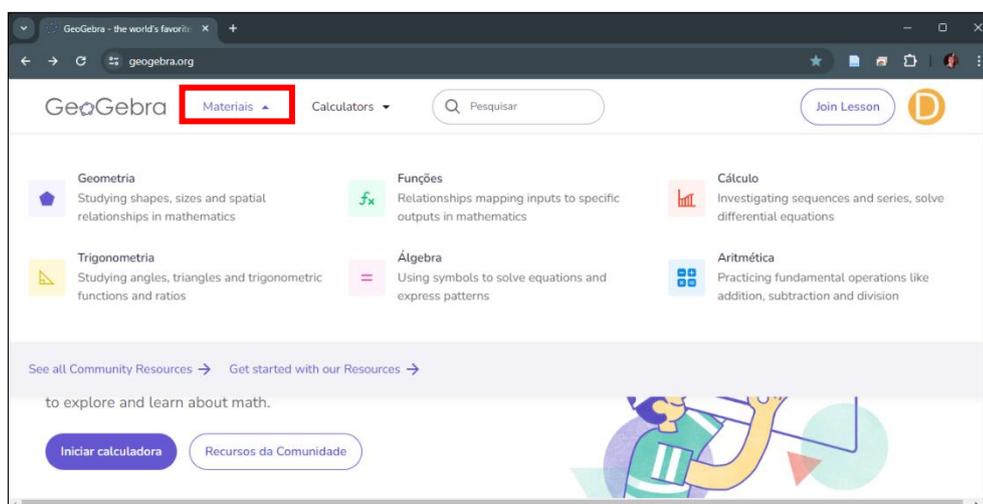
Fonte: o autor

Com o passar do tempo, o GeoGebra deixou de ser apenas um aplicativo para realizar cálculos e simulações que, para funcionar, deveria ser instalado no computador e se tornou uma plataforma online, permitindo aos usuários não apenas criar seus próprios projetos e atividades, mas compartilhá-los com a comunidade global do GeoGebra.

³ Tecnologia que permite visualizar um conteúdo virtual em um cenário real

Hoje ele conta com um vasto banco de dados online com uma infinidade de materiais sobre os mais diversos temas da Matemática. Esses materiais podem ser facilmente encontrados por meio da ferramenta de pesquisa disponibilizada no site, bastando apenas digitar o conteúdo ou alguma palavra-chave para que os materiais sejam encontrados. Também é possível navegar manualmente pelos materiais por temas específicos, como podemos observar na Figura 40.

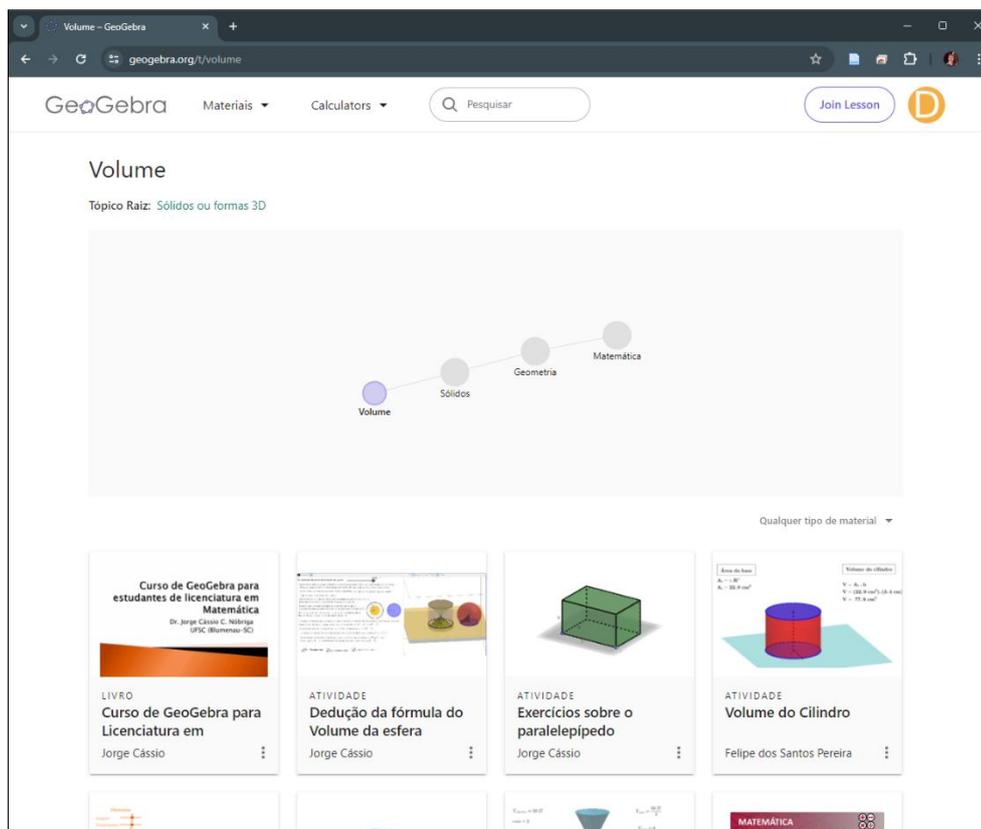
Figura 4 – Materiais separados por tema no site do GeoGebra



Fonte: o autor

Dentro de cada tema existem ainda várias divisões e subdivisões organizadas de acordo com os conteúdos, o que facilita a busca pelos materiais. Um exemplo disso pode ser visto na Figura 5, que traz uma seleção de materiais sobre volume de sólidos geométricos

Figura 5 – Materiais sobre volume de sólidos geométricos



Fonte: o autor

Realizando uma pesquisa ou navegando diretamente pela lista de materiais disponíveis, teremos acesso a uma variedade de recursos que foram criados e compartilhados pela comunidade de usuários. Esses materiais podem ser utilizados exatamente como foram disponibilizados, proporcionando uma rica fonte de conteúdo, mas podem ser adaptados ou modificados para atender às necessidades específicas do professor.

Dessa forma, quando algum usuário desenvolve uma construção geométrica, uma demonstração de um conceito de álgebra ou uma atividade interativa, pode facilmente torná-la acessível para outros usuários do GeoGebra em todo o mundo. Com isso o GeoGebra deixa de ser apenas uma ferramenta que realiza cálculos e simulações e se torna um espaço colaborativo para a criação, compartilhamento e acesso a uma infinidade de materiais educativos em matemática.

2.1.2 Lousa digital

Dentre as várias TD podemos destacar a lousa digital, que está sendo usada cada vez mais na educação, além de funcionar como uma lousa tradicional, permite a utilização de recursos interativos, como imagens, vídeos e até aplicativos, durante a aula, ou seja, “tudo o que se pensar em termos de recursos de um computador, de multimídia, simulação de imagens e navegação na internet é possível com ela” (Costa, 2009).

Conforme nos aponta Melhado (2016, p.1) “a lousa digital interativa foi criada no Canadá em 1987 por Dave Martin e Nancy Knowlton, fundadores da empresa *Smart Technologies* e começou a ser comercializada no ano de 1991”. Basicamente a lousa digital é uma tela de grandes dimensões que está conectada a um computador, permitindo uma interação direta na própria tela. Esta tela pode ser um painel de proporções consideráveis, semelhante a uma grande televisão, que possui a capacidade de exibir imagens ou pode-se utilizar um projetor de imagens, o que é mais comum, e que tem a vantagem de transformar qualquer superfície em uma tela interativa, fazendo com que a lousa digital não fique restrita a um formato ou tamanho específico, mas podendo ser adaptada para se adequar a uma variedade de contextos e ambientes.

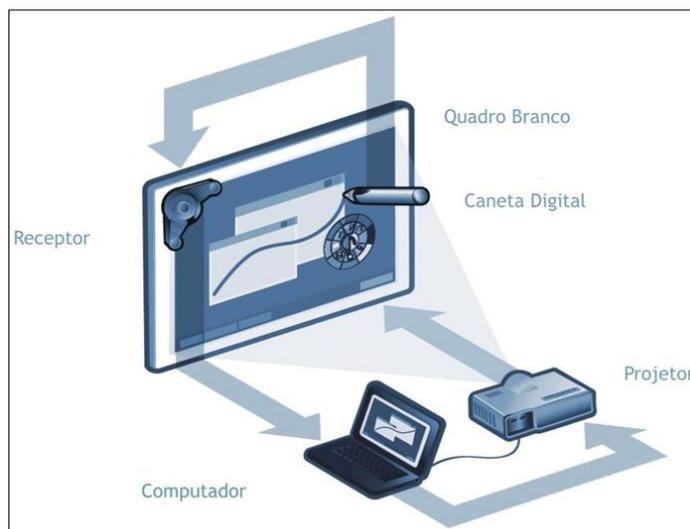
Normalmente, a interação com a lousa digital é realizada através de instrumentos específicos, que lembram os bastões de giz ou pincéis usados em lousas tradicionais. Esses instrumentos são capazes de detectar sua localização na tela e transmitir essa informação para o computador. Há modelos de lousas digitais que são sensíveis ao toque, equipados com sensores incorporados na própria tela ou ao redor dela. Esses modelos permitem que o usuário interaja diretamente com a tela usando o dedo, eliminando a necessidade de usar um objeto específico para essa finalidade.

Em resumo,

a lousa digital pode ser entendida como esse conjunto de três componentes: a lousa propriamente dita, um computador e um projetor multimídia. Algumas lousas já estão incorporando o computador em seu próprio corpo, mas todas elas precisam de um computador para funcionar. (Antonio, 2012)

A Figura 6 traz uma representação do funcionamento da lousa digital, por meio da interação entre esses três componentes citados por Antonio (2012).

Figura 6 – Funcionamento da lousa digital



Fonte: (Antonio, 2012)

Nesta representação, quando a caneta digital é movida sobre o quadro branco, o receptor capta esse movimento e transmite as informações para o computador. O computador, por sua vez, processa essas informações e envia o resultado para o projetor. O projetor, então, é encarregado de projetar a imagem resultante no quadro branco. Todo esse processo ocorre de maneira extremamente rápida, fazendo com que a ação executada na lousa seja exibida quase instantaneamente.

2.1.3 Lousa digital em sala de aula

A evolução tecnológica tem transformado os espaços escolares de maneira sem precedentes, tornando essencial a modernização das aulas para acompanhar a cultura digital, incrementando os modelos de ensino que não integram as ferramentas tecnológicas presentes em nosso cotidiano. A familiaridade com programas de computador e a navegação na web são essenciais para a cidadania, e as escolas que não incorporam métodos que dialoguem com as tecnologias são consideradas atrasadas pedagogicamente, portanto, é fundamental que as escolas e professores adotem e utilizem tecnologias de forma segura como ferramentas didáticas (Carneiro; Figueiredo; Ladeira, 2020).

Para Pontes (2019, p. 43), “o uso de Tecnologias Digitais no ensino de matemática fortalece a relação professor-aluno e minimiza as defasagens entre o

ensino tradicional e a realidade do aprendiz”.

Ao encontro dessas ideias, a lousa digital se apresenta como uma ferramenta tecnológica que tem o potencial de tornar as aulas mais dinâmicas, interessantes e, conseqüentemente, mais produtivas. Não apenas pelo fato de transformar o analógico em digital, ou seja, de substituir o giz por uma caneta moderna, e nem tampouco por proporcionar uma variedade de cores à disposição do professor.

Como para o seu funcionamento se faz necessário o uso de um computador, ela não serve apenas para “escrever no quadro”, mas suas possibilidades de uso são tão amplas quanto a criatividade do professor. Segundo Feitosa e Pinto (2023, p.441), “recursos como softwares educativos, aplicativos e jogos digitais tornam o processo de ensino e aprendizagem mais atrativos e engajador” e, através da lousa digital é possível utilizar qualquer um desses recursos.

Dessa forma, um dos grandes potenciais que pode ser explorado na lousa digital é a interatividade. Além das simples trocas de informações, a interatividade permite que os estudantes saiam de suas zonas de conforto e deixem de ser apenas meros receptores de conteúdo para poderem contribuir de maneira ativa no processo de construção do seu conhecimento, estimulando, assim, a criatividade e fomentando a colaboração. É um convite para que todos se tornem produtores, não apenas consumidores passivos (Gobbi; Bernardini, 2013).

Em relação à interação e à interatividade, Santos e Nicot (2020) argumentam que

mesmo que o professor saiba dominar todas as ferramentas tecnológicas e seja capaz de incentivar seu uso por parte dos alunos, é necessário ir além. Ele precisa ter a competência para desenvolver dinâmicas e estabelecer conexões entre tais ferramentas e as relações interpessoais entre os próprios alunos e entre o docente e os alunos. O uso puramente mecânico de ferramentas tecnológicas, mesmo que usadas para uma simples pesquisa de conteúdo, não é efetivo se não houver troca de informações interpessoais, pois é nessa interação entre os sujeitos da aprendizagem juntamente à interatividade por meios das ferramentas tecnológicas que irá de fato ocorrer a construção do conhecimento (Santos; Nicot, 2020, p. 107).

Sendo assim, a lousa digital deve ser vista como uma ferramenta pedagógica que tem o potencial de tornar a sala de aula em um espaço de aprendizado mais cooperativo e interativo, reforçando a ideia de que ela não deve ser simplesmente usada para substituir a lousa tradicional.

Ainda sobre as funcionalidades da lousa digital, é possível guardar todas as anotações feitas durante a aula, facilitando a rápida retomada de conteúdos pelo

professor caso necessário. Além disso, se uma aula terminar antes que um conteúdo ou exercício seja concluído, é possível continuar na próxima aula exatamente de onde parou, otimizando assim, o tempo da aula.

Outra facilidade que a lousa digital possibilita é exportar o arquivo da aula e compartilhá-lo com o estudante para revisão posterior do conteúdo.

É claro que muitas das tarefas que são realizadas com o auxílio da lousa digital podem ser executadas diretamente no computador. No entanto, isso não diminui a importância ou a utilidade da lousa digital no ambiente educacional. A lousa digital não deve ser vista como um recurso a ser usado apenas quando o computador por si só não é suficiente; ao contrário, ela deve ser considerada uma ferramenta complementar que pode enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem.

Além disso, a lousa digital pode servir como um estímulo para aqueles professores mais tradicionais que às vezes não se sentem confortáveis em utilizar ferramentas digitais. A familiaridade do uso básico da lousa digital, que é muito semelhante ao quadro de giz convencional, com o qual os professores já estão acostumados, pode ajudar a aliviar qualquer hesitação. Isso pode incentivá-los a explorar mais a fundo as possibilidades oferecidas por essa ferramenta, proporcionando-lhes maior confiança e permitindo que integrem de maneira eficaz essas ferramentas em suas práticas de ensino. Assim, mesmo aqueles que inicialmente podem ser relutantes em adotar a tecnologia digital podem descobrir que a lousa digital, é uma ponte acessível para o mundo das ferramentas de ensino digitais.

Durante a pandemia da COVID-19 os desafios encontrados foram imensos, tanto para os professores quanto para os estudantes. Quando as escolas se viram forçadas à transição das aulas para o ensino remoto em 2020, a maioria teve que se ajustar rapidamente a um método completamente novo de ensino (Cruz, 2023, p.43).

Nas aulas de matemática esses desafios foram ainda maiores visto que, muitas vezes se faz necessário o desenvolvimento das atividades por meio da escrita. Em resposta ao desafio do ensino remoto, muitos professores se adaptaram de maneira criativa. Alguns utilizaram slides com o conteúdo das aulas e as atividades já prontos e iam exibindo gradativamente conforme explicavam aos estudantes. Outros apontaram a câmera para uma folha de papel que utilizavam para fazer as anotações pertinentes à aula e para resolver os exercícios. Alguns professores recorreram ao uso de mesas digitalizadoras com o objetivo de tornar suas aulas mais interativas e

estimular o aprendizado dos estudantes tornando-os corresponsáveis pelo seu processo de aprendizagem.

Uma outra estratégia comum foi o uso de uma pequena lousa durante as aulas virtuais, permitindo que os professores apresentassem informações de maneira semelhante ao que fariam em uma sala de aula física. No entanto, nem todos os professores tinham acesso a uma lousa e, nesses casos, alguns educadores demonstraram uma incrível resiliência, chegando ao ponto de escrever diretamente nas paredes de suas próprias casas para poderem ministrar suas aulas de alguma maneira. Conforme a vivência⁴ do autor desse estudo, essa forma de trabalhar a aula, na qual o professor fica de frente à lousa, foi a preferida pelos estudantes. É possível que essa preferência tenha sido constatada porque foi a mais próxima daquela que os estudantes viveram na escola.

A lousa digita também pode ser uma aliada na prevenção de problemas de saúde causados por esforço ou repetição excessiva de certos movimentos, o que normalmente acontece quando o professor usa frequentemente uma lousa comum, e em particular, quando escreve numa região mais elevada, acima de seu ombro. Conforme Dutra, Stecca e Pereira (2005),

As síndromes dolorosas do ombro são comuns na população em geral, sendo a força excessiva, alta repetitividade de um mesmo movimento e postura incorreta, fatores primordiais na etiologia das mesmas. Vários profissionais estão sujeitos a estes transtornos, entre eles os professores. Estes passam por longos períodos com o membro superior abduzido acima de 90°, apresentando alterações acompanhadas de algia (dor) nos ombros (Dutra; Stecca; Pereira, 2005, p. 79).

Com a lousa digital, os professores têm a opção de escrever em uma área mais baixa da lousa. Uma vez que o conteúdo é escrito, ele pode ser facilmente movido para uma posição mais alta, facilitando a visualização do conteúdo por todos os estudantes na sala de aula, independentemente de onde eles estão sentados. Portanto, a lousa digital reduz significativamente a necessidade do professor de manter o braço estendido para cima a fim de escrever nas regiões mais altas da lousa, minimizando, assim, os problemas de saúde relacionados à postura e ao esforço físico.

Neste contexto, esse estudo tem por objetivo discutir e apresentar uma proposta de ensino, utilizando a lousa digital e o GeoGebra, como ferramentas

⁴ conversas com os estudantes durante as aulas e nas trocas de informações realizadas nos grupos de estudo entre os professores.

potenciais para o ensino de Geometria Espacial.

No entanto, é importante lembrar que a lousa digital ou qualquer outra tecnologia por si só não é a solução para todos os desafios da educação e que é importante usá-la de forma estratégica e complementar.

2.1.4 Lousa digital nas escolas estaduais do Paraná

Como professor da rede pública há vários anos, tive a oportunidade de acompanhar a chegada das lousas digitais na rede estadual, mais especificamente, já recebemos três modelos diferentes. Nas escolas do Paraná, a lousa digital está presente como um recurso pedagógico já há algum tempo. A primeira lousa digital enviada às escolas foi adquirida pelo Programa Nacional de Tecnologia Educacional – ProInfo, através do Pregão Eletrônico 72/2011⁵, e veio como um complemento para o Computador Interativo (Projetor ProInfo) que as escolas já haviam recebido, mas poderia ser instalada em qualquer outro computador ligado a um projetor.

Grande foi a empolgação ao receber a notícia de que as escolas receberiam lousas digitais, porém, maior ainda foi o espanto ao receber o kit numa pequena caixa, visto que, por se tratar de uma “lousa”, pensava-se que seria algo com as proporções de uma lousa real.

Essa lousa é composta por um receptor, que se conecta ao computador por meio de um transmissor sem fio Bluetooth™ ou diretamente por cabo USB, duas canetas digitais com várias ponteiros sobressalentes, além de outros acessórios como cabos e suportes para fixação dos componentes e um DVD contendo os arquivos de instalação dos programas necessários para o funcionamento da lousa digital.

⁵ <https://www.fnde.gov.br/portaldecompras/index.php/editais/pregoes-eletronicos/pregao-eletronico-2011/item/179-pregao-eletronico-n-72-2011>

Figura 7 – Lousa digital adquirida pelo ProlInfo



Foto: o autor

No início, houve muita relutância por parte de alguns professores em utilizar essa nova ferramenta, visto que, durante o seu funcionamento, a caneta utilizada para escrever na tela emite um ruído semelhante ao de uma descarga elétrica, o que, de certa forma, assustava alguns. Porém, ao perceberem que o equipamento não apresentava nenhum risco, começaram a manuseá-la com mais segurança.

Outro ponto que dificultou a utilização da lousa, foi o fato de que os professores não tinham conhecimento de como operá-la por ser uma ferramenta, até então, nunca vista por eles. Porém, pouco tempo depois de receber as lousas digitais, foram ofertadas formações específicas pela SEED - Secretaria de Estado da Educação, por meio da CRTE⁶ de cada Núcleo Regional de Educação, o que possibilitou uma maior confiança para o professor para utilizar a lousa digital.

Dados obtidos no Portal da Transparência do Estado do Paraná⁷ mostram que, no segundo semestre de 2021, o Governo do Estado do Paraná, por meio da SEED, protocolou o Pregão Eletrônico 340/2021 – protocolo 17.034.365-4, com o objetivo de adquirir de equipamentos de Tecnologia da Informação para as escolas que ofertam Ensino Médio em Tempo Integral, participantes do Programa Federal de Fomento à EMTI. Este pregão previa a aquisição de 158 Kits compostos por notebook, webcam

⁶ Coordenação Regional de Tecnologia na Educação.

⁷ <http://www.transparencia.pr.gov.br>

e a lousa digital para 31 escolas, distribuídas entre 17 Núcleos Regionais de Educação.

A lousa digital em questão, representada na Figura 8, consiste em uma caneta digital e um estojo que, além de servir para guardar a caneta é o receptor que deve ser ligado ao computador.

Figura 8 – Caneta e estojo da lousa digital



Foto: o autor

Também acompanha um quadro para projeção com dimensões de 2,5 m por 1,5 m conforme a Figura 9, e os cabos e softwares necessários para o seu funcionamento.

Figura 9 – Quadro para projeção



Foto: o autor

Além da aquisição dos equipamentos, o edital contemplava a instalação e treinamento específico para sua utilização, treinamento esse que foi realizado com um técnico da CRTE do Núcleo Regional de Educação e um representante de cada escola que recebeu o kit, os quais ficaram responsáveis por repassarem o treinamento para os demais professores da escola.

Em março de 2023, foi licitada pelo DECON - Departamento de Logística para Contratações Públicas (Antigo DEAM), sob o Pregão Eletrônico 52/2023, protocolo nº 19.626.258-0, a aquisição de projetores multimídia, suporte de teto para projetores multimídia e lousa de película interativa digital, com Recurso Federal MEC/FNDE do Programa de Fomento as Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral, num total de 2163 kits a serem distribuídos a estas escolas. A entrega e instalação desses equipamentos começou a ser feita ainda no final de 2023.

Essa lousa digital possui um quadro interativo de dimensões 2,2 m por 1,3 m aproximadamente, que receberá a projeção das imagens e que se liga diretamente ao computador por meio de uma conexão USB. Além dos cabos e softwares necessários para o funcionamento desta lousa, acompanham o kit, duas canetas, semelhantes aos marcadores de quadro branco tradicionais, porém, diferente das canetas das outras lousas recebidas anteriormente, essas canetas não são digitais. Elas servem apenas como um auxílio para manipular a lousa, uma vez que o quadro possui sensores instalados na sua periferia, possibilitando controlá-la simplesmente com o dedo.

Figura 10 – Lousa digital Touch



Foto: o autor

Infelizmente não foi possível obter uma melhor percepção do funcionamento dessa lousa pois sua implantação na escola ocorreu durante a finalização deste trabalho, não havendo, portanto, tempo hábil para maiores testes e manipulação do equipamento.

3 ETAPAS DO TRABALHO

Esse trabalho foi desenvolvido de acordo com as seguintes etapas:

- 1) busca no banco de dissertações do PROFMAT de trabalhos que abordam o tema “lousa digital”, foram encontrados 4 trabalhos;
- 2) estudo dos trabalhos encontrados, os quais serviram de inspiração para a elaboração dos objetivos dessa pesquisa;
- 3) estudo de teóricos que abordam o tema lousa digital e tecnologia (Antonio (2012); Borba (2018); Carneiro, Figueiredo e Ladeira (2020); Costa (2009); Costa (2015); Cruz (2023); Diniz (2015); Dutra, Stecca e Pereira (2005); Feitosa e Pinto (2023); Ferreira (2011); Freire (1983), apud Pereira et al (2016); Gama (1987), apud Veraszto (2008); Gobbi e Bernardini (2013); Kenski (2013); Melhado (2016); Moran, Silva, Almeida e Prado (2023); Ponte (2000); Pontes (2019); Santos e Nicot (2020); Veraszto (2008)), apresentados no capítulo 2.
- 4) desenvolvimento de uma proposta para ser trabalhada no Educação Básica com o tema Lousa Digital, GeoGebra e Geometria Espacial, apresentada no capítulo 4.

3.1 TRABALHOS DO PROFMAT QUE ABORDAM A LOUSA DIGITAL

Na busca realizada no banco de dados do PROFMAT foram encontrados apenas 4 trabalhos que tratam da utilização da lousa digital nas aulas de Matemática. Estes trabalhos são apresentados no Quadro 1

Quadro 1 – Trabalhos a respeito de lousa digital desenvolvidos no PROFMAT

Data de defesa	Autor	Título da Dissertação	Instituição
15/04/2014	Marizete Nink de Carvalho	As potencialidades do uso da lousa digital no ensino de matemática	UNIR
07/12/2015	Marthonni Wandré dos Santos Souza	Lousa digital no ensino da matemática	UFRN
21/12/2018	Thiago Lessa dos Santos Melo	O uso da lousa digital na construção do conhecimento matemático	UFAL
25/04/2019	Monique Andrade da Conceição Couto	Resolução de problemas de análise combinatória e aplicação na lousa digital	UERJ

Fonte: Banco de Dissertações do PROFMAT⁸

Em seu trabalho, Carvalho (2014) relata sobre a “Escola e a Modernidade”, descrevendo sobre a lousa digital e sua utilização no mundo, no Brasil e no estado de Rondônia. Apresenta algumas marcas e tipos de lousa digital e apresenta a lousa digital como alternativa para o ensino de Matemática, trazendo exemplos de utilização.

Souza (2015) inicia sua abordagem de maneira semelhante, tratando inicialmente da presença das tecnologias na educação e posteriormente discorre sobre a lousa digital e suas aplicações pedagógicas. Elabora um questionário a fim de obter uma percepção sobre o uso da lousa digital na região metropolitana de Natal, no qual apresenta com resultado uma utilização ainda muito precária da lousa digital pelos professores. Por fim, apresenta aplicações de conteúdos matemáticos utilizando softwares e como montar uma lousa digital de baixo custo.

Melo (2018) fala sobre as TIC's⁹ na Educação Matemática e posteriormente apresenta a lousa digital, trazendo a construção de uma lousa digital e aborda a sua aplicação como recurso pedagógico por meio da utilização do GeoGebra e do Excel.

Por fim, Santos (2019) faz uma abordagem sobre a resolução de problemas tendo como foco a Análise Combinatória. Também apresenta a lousa digital e finaliza com resoluções de questões de Análise Combinatória na lousa digital.

Fizemos a opção de tomar como base somente os trabalhos realizados nos

⁸ <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=lousa+digital&polo=>

⁹ As novas Tecnologias de Informação e Comunicação (Tic's) surgiram na metade da década de 1970 no contexto da Terceira Revolução Industrial e Revolução Informacional. As Tic's são entendidas como um conjunto de recursos tecnológicos integrados entre si, que proporcionam, por meio das funções de hardware, software e telecomunicações, a automação e comunicação dos processos de negócios, da pesquisa científica e de ensino e aprendizagem. Elas correspondem a todas as tecnologias que interferem e medeiam os processos informacionais e comunicativos dos seres (TONELLI et al., 2016).

PROFMAT. Considerando que esse Programa é desenvolvido no âmbito nacional, é que foram encontrados apenas quatro estudos, entendemos que, embora a lousa digital seja uma ferramenta cada vez mais comum no ambiente educacional, ainda há uma lacuna significativa na literatura acadêmica produzida pelo PROFMAT a respeito da lousa digital, sua aplicação prática e impacto no ensino de Matemática. Essa descoberta ressalta a necessidade de mais pesquisas focadas nessa área para entender melhor como a lousa digital pode ser efetivamente integrada às práticas de ensino e quais são seus benefícios e desafios específicos.

3.2 COMPOSIÇÃO DA PROPOSTA

A proposta que será apresentada no capítulo 4 é composta por quatro tarefas. Cada uma dessas tarefas aborda um conjunto de conceitos e conteúdos, que são:

- Primeira Tarefa – Aborda os elementos de um poliedro: vértices, faces e arestas. Além disso, ela relaciona os elementos do poliedro com conceitos básicos de geometria: como ponto, reta e plano.
- Segunda Tarefa – Aborda planificação de um prisma e o cálculo de áreas das faces e o cálculo do volume de um de prisma.
- Terceira Tarefa – Aborda áreas e volumes de pirâmides.
- Quarta Tarefa – Aborda áreas e diagonais do paralelepípedo retângulo.

Estes tópicos foram selecionados para o desenvolvimento dos conteúdos de Geometria Espacial. Julgamos que eles são essenciais para entender como as formas tridimensionais se apresentam e como elas podem ser manipuladas e utilizadas em uma variedade de contextos.

Em cada tarefa o GeoGebra será utilizado como uma ferramenta para auxiliar na representação e visualização dos poliedros e dos diversos elementos que serão abordados. Como ele possibilita a representação, visualização e manipulação de formas geométricas em geral, colabora, dessa forma, para a compreensão dos conceitos trabalhados. Além disso, o GeoGebra será utilizado em diversos momentos para obtermos os valores das medidas envolvidas, como comprimentos, áreas e volumes.

Inicialmente o professor pode apresentar as figuras prontas no GeoGebra e, à medida que os estudantes se familiarizem com a ferramenta e adquirem prática no

seu uso, ele pode pedir que os próprios estudantes as construam.

A lousa digital será utilizada como um recurso pedagógico, em que serão realizadas explorações interativas utilizando os aplicativos que já vêm integrados à própria lousa, e outros softwares gratuitos que estão disponíveis para diversas plataformas, sendo que, por meio de alguns deles, é possível trabalhar de forma colaborativa em diversos dispositivos simultaneamente, o que auxilia no engajamento dos estudantes tornando a aula dinâmica. Os aplicativos e softwares serão apresentados no decorrer de cada tarefa.

4 A PROPOSTA

Apresentaremos aqui algumas ideias e sugestões que podem servir como inspiração para a utilização da lousa digital em sala de aula. Antes, porém, é importante deixar claro que cada modelo de lousa digital vem acompanhado de um software específico próprio. Embora todos possuam recursos básicos que permitem a escrita, desenhos e a manipulação de outros objetos, eles apresentam características únicas. Considerando essas particularidades de cada software, além de utilizá-los no desenvolvimento da proposta, decidimos empregar outros softwares gratuitos (Xournal++, OpenBoard e Microsoft Whiteboard) que podem ser acessados e instalados em qualquer computador, independentemente do Sistema Operacional¹⁰ que ele possua. Dessa forma, a aplicação das tarefas não ficará limitada a um modelo específico de lousa digital, podendo, inclusive, ser adaptada para ser utilizada até mesmo sem a lousa digital.

Optamos por usar o software GeoGebra nas sugestões das tarefas propostas devido à sua extensa base de dados já estabelecida. Ele oferece atividades prontas que contemplam os mais diversos conteúdos, de modo que uma pesquisa simples sobre o conteúdo de interesse é suficiente para acessar uma variedade destas atividades.

4.1 PRIMEIRA TAREFA

Objetivo: verificar se os estudantes já conhecem os conceitos de vértice, aresta e face e formalizar a definição de poliedro.

Público-alvo: Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

¹⁰ O Sistema Operacional é o software responsável por gerenciar e administrar os recursos do sistema, servindo como uma ponte de comunicação entre a máquina e o usuário final. Atualmente, os principais Sistemas Operacionais disponíveis para os computadores são o Windows, Linux e o Mac OS X e para os dispositivos móveis, como smartphones e tablets, são o Android e o iOS.

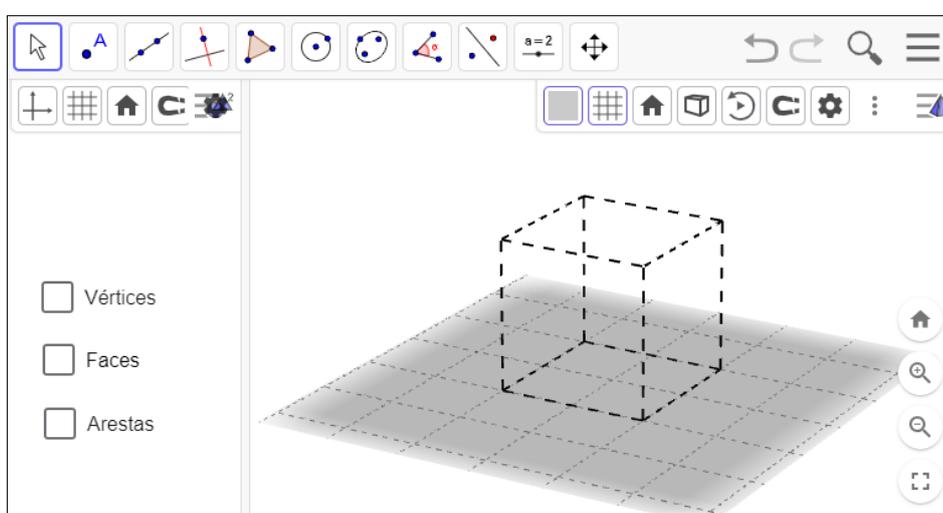
Tarefa 1:

Explorar a imagem do Cubo no GeoGebra. Identificar os elementos do Cubo e fazer relações com outros objetos matemáticos.

A tarefa em questão, que pode ser acessada pelo link <https://www.geogebra.org/m/x7xpehvr>, consiste na utilização do software GeoGebra para apresentação de um poliedro, neste caso, o cubo, no qual os estudantes devem identificar as faces, arestas e vértices, e fazer suas respectivas contagens.

Essa tarefa explora a imagem de um cubo construído no GeoGebra, os movimentos desse cubo permitem a visualização dos elementos face, arestas e vértice. O GeoGebra proporciona a imagem clara e a lousa digital permite a apresentação dessa imagem e as anotações escritas que o professor julgar convenientes, podem ainda ser salvas e utilizadas em outros momentos da aula.

Figura 11 – Representação do cubo em 3D usando o GeoGebra



Fonte: o autor

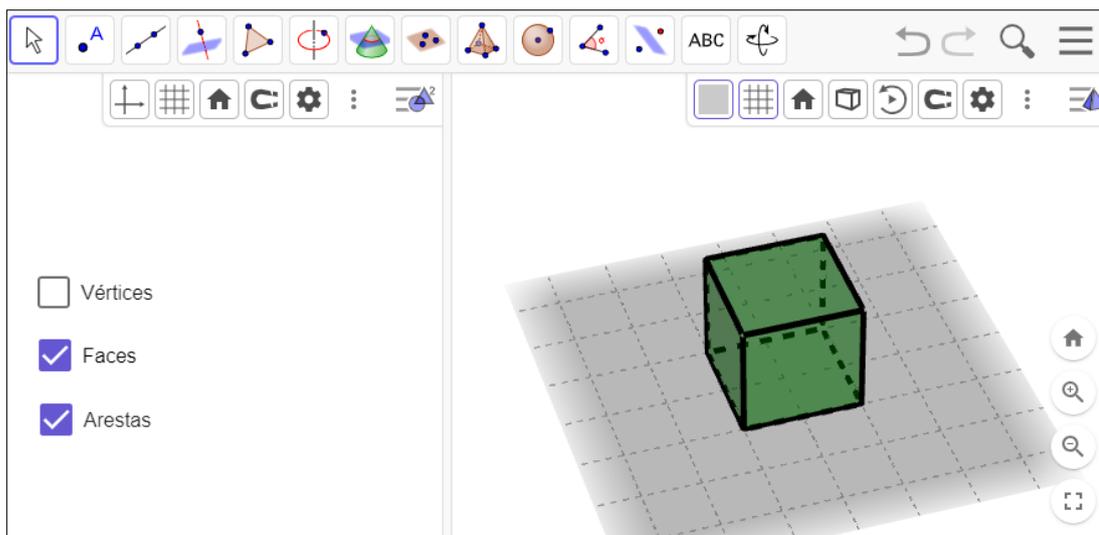
A capacidade de girar o cubo em diversas direções, uma funcionalidade oferecida pelo software GeoGebra, amplia significativamente a observação dos elementos do cubo, tornando-a mais completa e eficiente. Isso permite uma visualização mais detalhada e a compreensão da estrutura tridimensional do cubo.

No entanto, quando essas manipulações são realizadas utilizando a lousa digital, o professor ganha um controle ainda mais preciso sobre os movimentos do

cubo. Isso permite que ele ajuste a visualização do cubo de acordo com as necessidades específicas da aula, tornando a experiência de aprendizado interativa e dinâmica.

Na Figura 12, por exemplo, podemos observar o destaque nas arestas e nas faces do cubo.

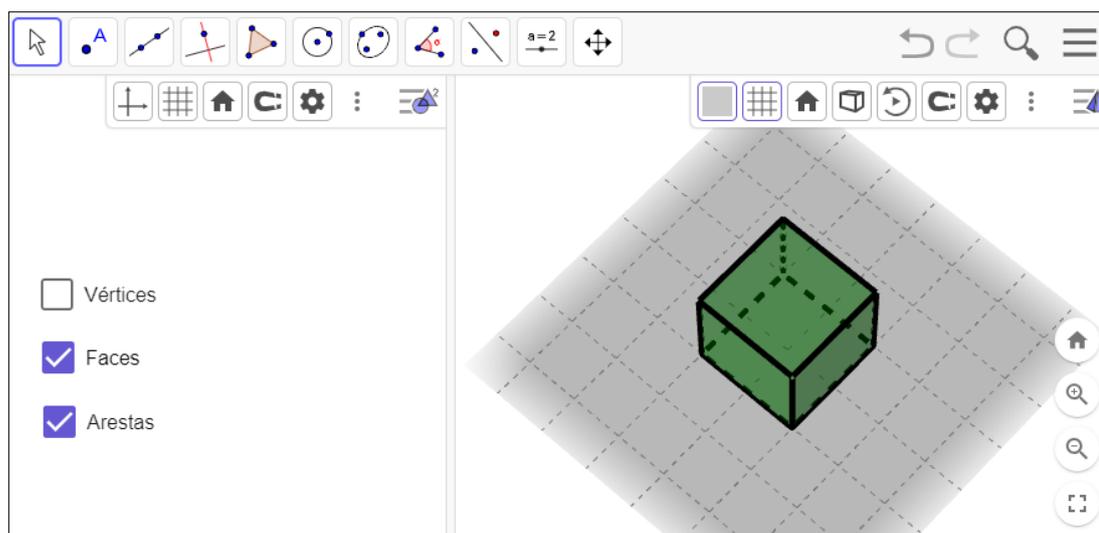
Figura 12 – Destaque das faces e arestas do cubo



Fonte: o autor

Já na Figura 13 podemos observar outra posição de visualização do cubo.

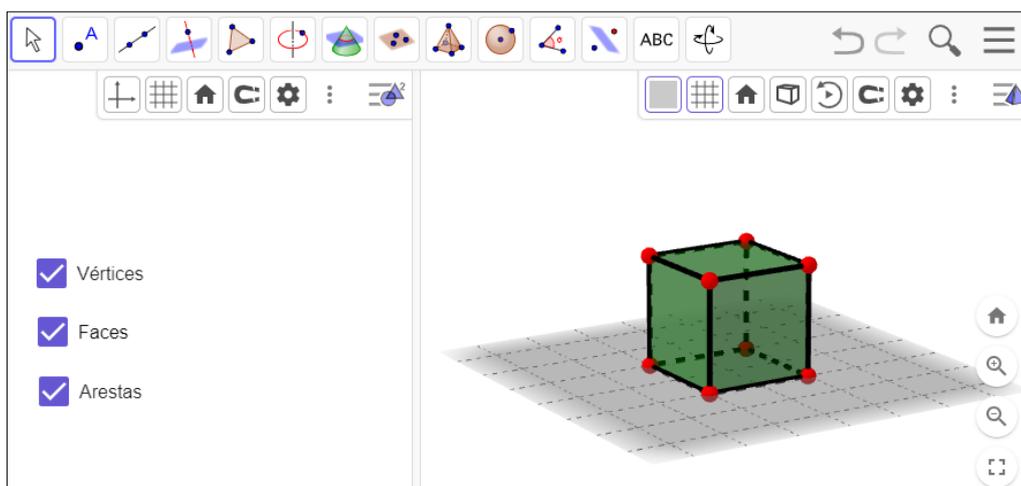
Figura 13 – Destaque das faces e arestas do cubo em outra posição



Fonte: o autor

Na Figura 14 vemos o destaque das faces, arestas e dos vértices do cubo.

Figura 14 – Destaque das faces, arestas e dos vértices do cubo

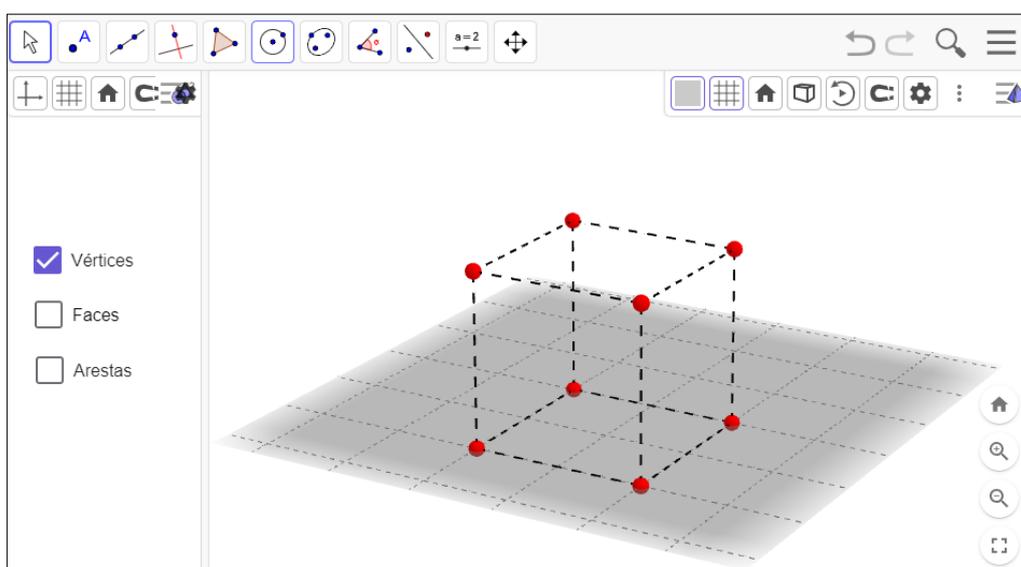


Fonte: o autor

Com esta tarefa é possível ainda exibir de maneira independente os elementos do cubo, a fim de proporcionar uma visão mais clara e detalhada de cada um deles. Assim, iremos analisar separadamente cada elemento.

Ao marcar a caixa de seleção “Vértices”, são destacados na imagem os pontos que representam os vértices. É importante ressaltar aqui e deve ficar claro para o estudante que, como os vértices são pontos, eles não possuem dimensões, os destaques na representação são para favorecer a visualização na imagem.

Figura 15 – Destaque dos vértices do cubo

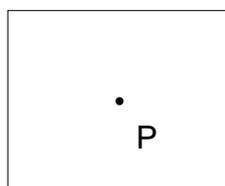


Fonte: o autor

Os conceitos de vértice, aresta e face estão respectivamente relacionados ao ponto, à reta e ao plano, que, segundo Dolce e Pompeo (2013), são conceitos intuitivos que acabamos aprendendo por meio da observação e pela própria experiência no dia a dia.

Os vértices de um sólido geométrico podem ser representados por pontos, conceito mais básico em geometria. Ele não tem dimensão, ou seja, não tem comprimento, largura ou altura. No entanto, é a partir de pontos que todas as outras figuras geométricas são formadas.

Figura 16 – Representação do ponto P

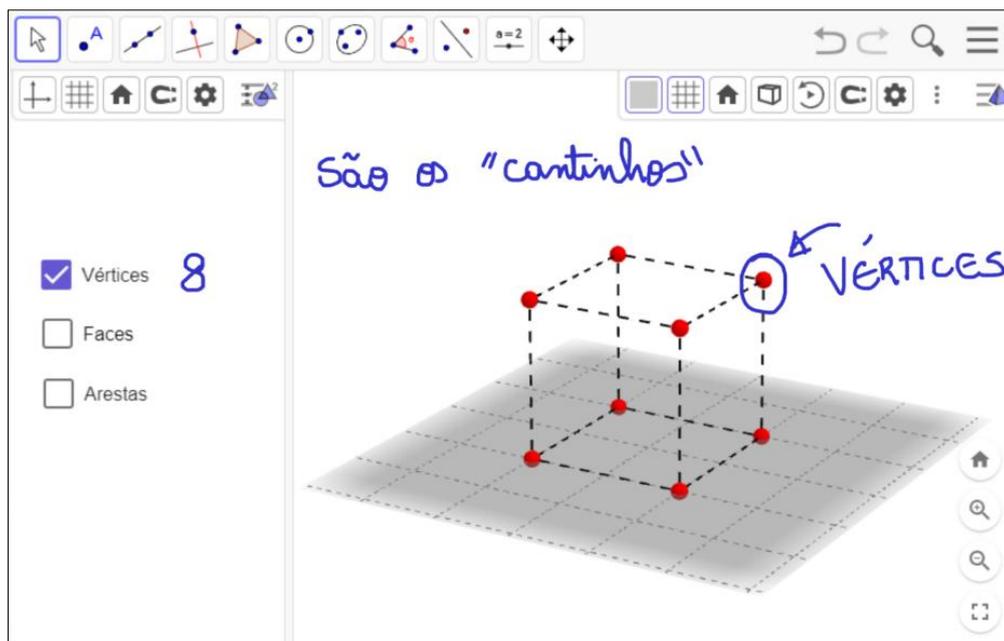


Fonte: o autor

Neste momento da tarefa, o professor pode fazer a captura da tela com a representação do cubo e o destaque dos seus elementos e enviá-la para o aplicativo da lousa digital, o que permitirá fazer anotações diretamente na imagem capturada. Isso significa que o professor pode adicionar suas próprias observações, comentários e considerações à imagem, com a identificação de elementos específicos, destacar as relações entre eles, ou ainda apontar algumas características notáveis.

A Figura 17 traz um exemplo da captura dessa tela com algumas anotações.

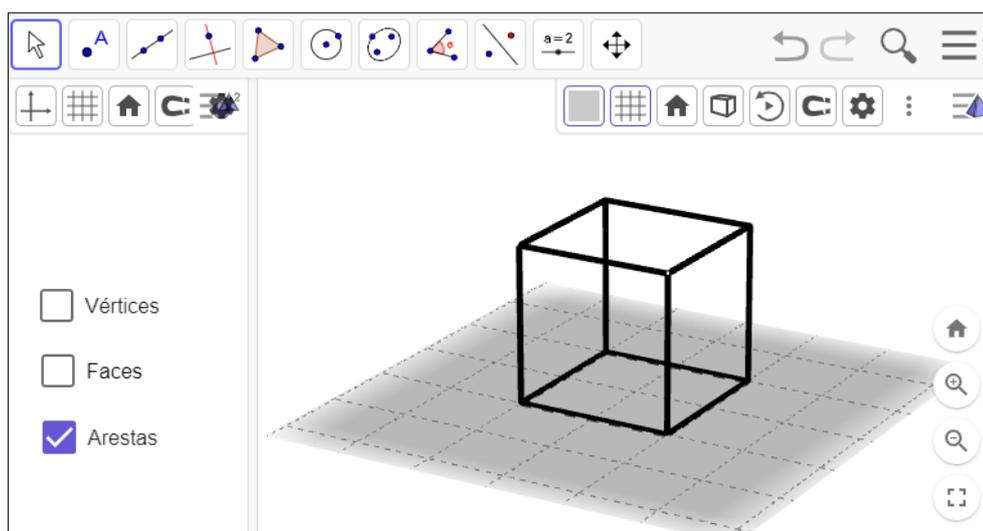
Figura 17 – Vértices do cubo com anotações



Fonte: o autor

Marcando a caixa de seleção "Arestas" são destacadas as linhas correspondentes às arestas do cubo.

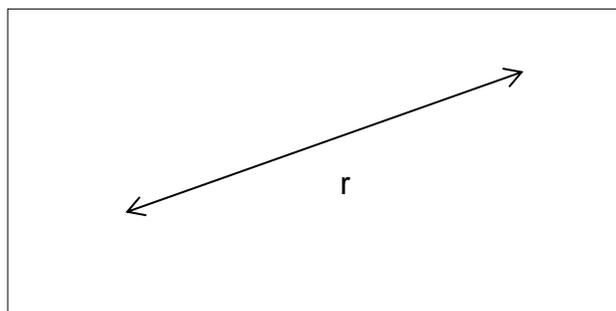
Figura 18 – Arestas do cubo



Fonte: o autor

Na Figura 18, apesar das arestas terem sido representadas por uma linha grossa, para facilitar a visualização, é importante reforçar com o estudante que a aresta, assim como a reta, não possui espessura.

Figura 19 – Representação da reta r

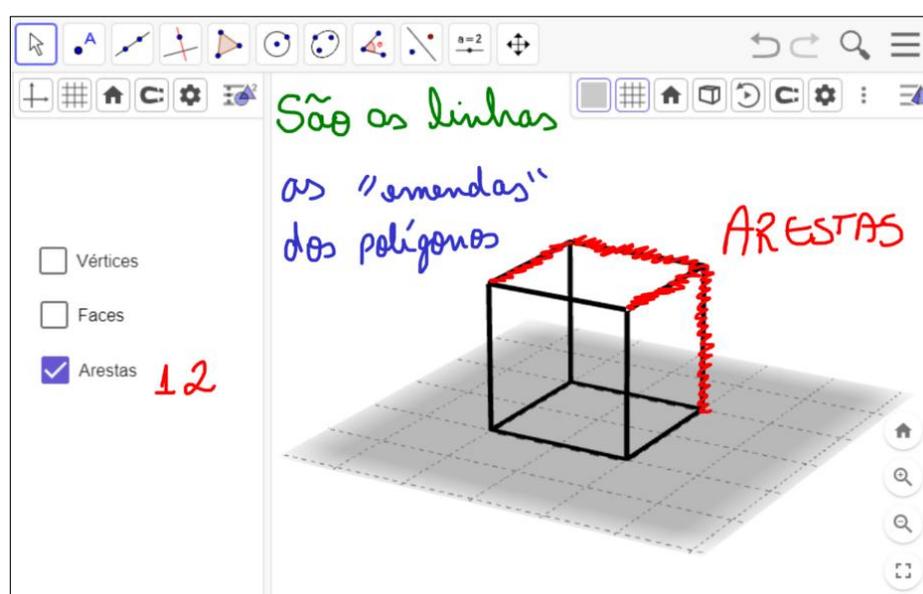


Fonte: o autor

Da mesma forma como foi feito com os vértices, o professor tem agora a possibilidade de capturar a imagem que está sendo exibida na tela e abri-la diretamente no aplicativo específico da lousa digital para que possa fazer seus próprios comentários, destacar partes específicas da imagem ou fazer quaisquer outras anotações que ele considere relevantes e úteis para o processo de ensino.

Na Figura 20 temos uma imagem que ilustra algumas anotações acerca da aresta do cubo.

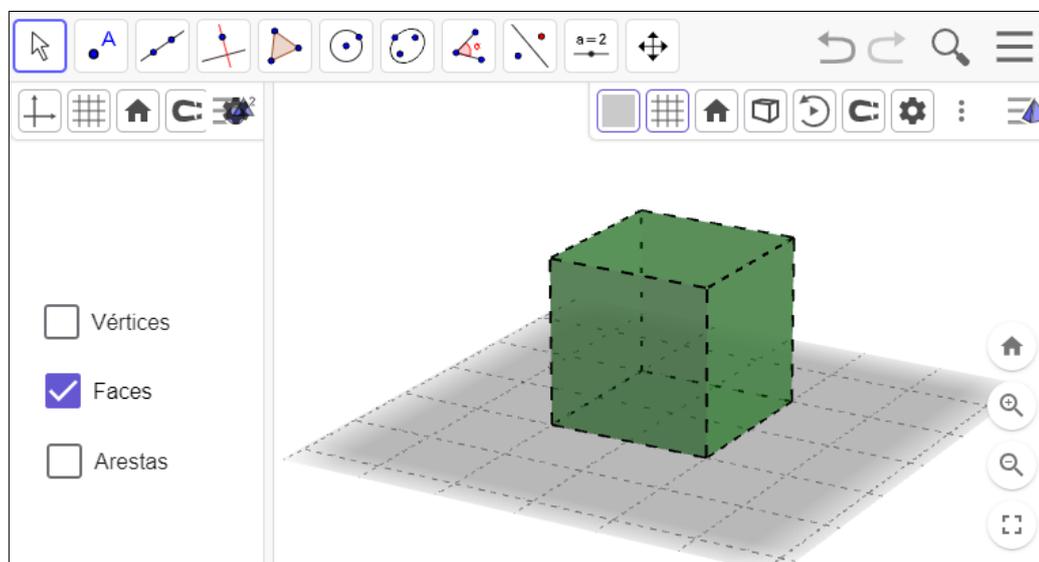
Figura 20 – Arestas do cubo com algumas anotações



Fonte: o autor

Por fim, marcando a opção “Faces” são exibidas no cubo as regiões correspondentes aos polígonos que formam suas faces, conforme mostra a Figura 21.

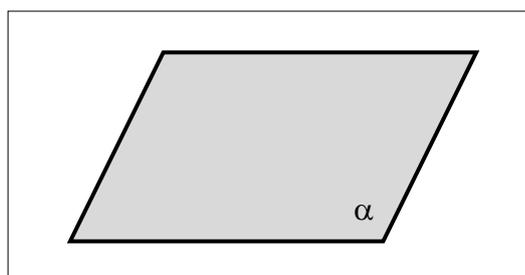
Figura 21 – Faces do cubo



Fonte: o autor

Cabe ressaltar aqui a noção intuitiva de plano, uma superfície que se estende infinitamente em todas as direções. Ele é formado por uma infinidade de retas paralelas.

Figura 22 – Representação do plano α

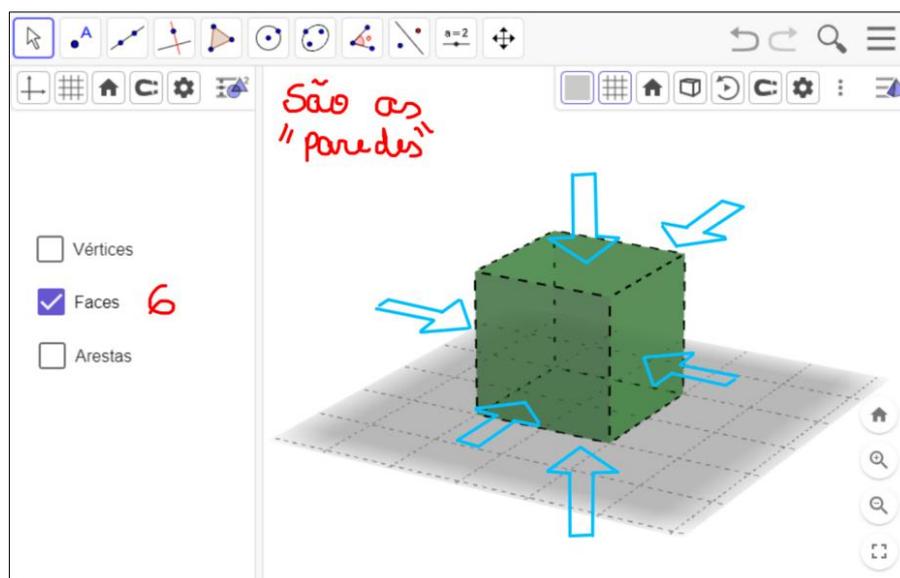


Fonte: o autor

Novamente o professor tem a possibilidade de exportar a imagem para o aplicativo da lousa digital e fazer suas anotações. Ele poderá, por exemplo, proceder a contagem das faces a medida em que vai destacando cada uma delas no cubo.

A Figura 23 ilustra essa situação.

Figura 23 – Faces do cubo e anotações



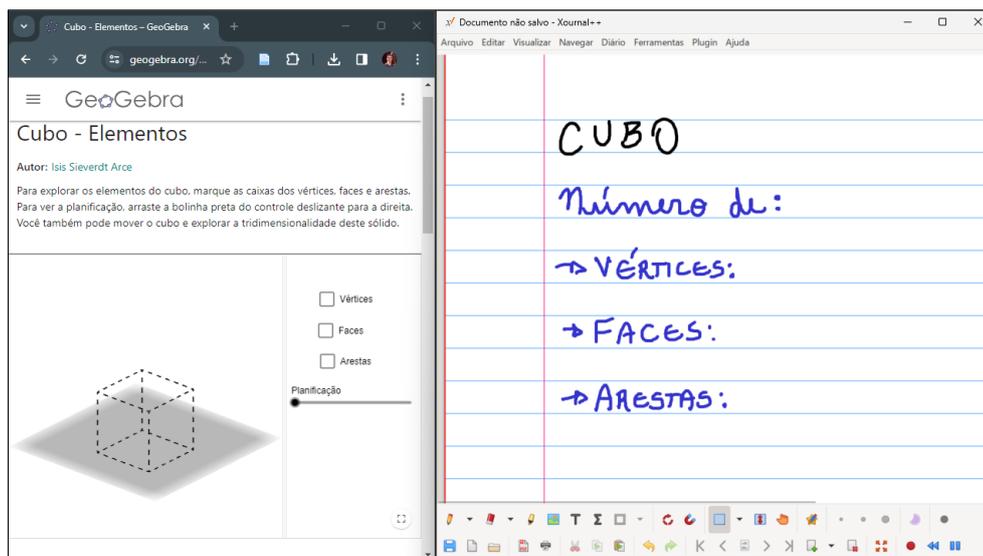
Fonte: o autor

Uma outra abordagem que o professor pode utilizar para explorar essa tarefa é abrir simultaneamente o GeoGebra e outro aplicativo que permita a escrita, como o Xournal++, OpenBoard, Microsoft Whiteboard, os quais serão abordados mais adiante, ou ainda por meio do próprio software da lousa digital caso ele permita trabalhar simultaneamente com outra janela.

Isso permite que o professor faça as manipulações necessárias no GeoGebra e faça as anotações pertinentes no outro aplicativo. Essa abordagem integrada favorece a transição entre a demonstração e a anotação, economizando tempo e tornando o processo de ensino dinâmico.

A Figura 24, a seguir, mostra uma captura de tela em que o GeoGebra, exibindo a tarefa sobre os elementos do cubo, e o software Xournal++, um aplicativo gratuito que permite fazer anotações escritas à mão, são dispostos lado a lado, ilustrando como essa abordagem combinada pode ser implementada na prática.

Figura 24 – Tarefa sobre os elementos do cubo com anotações no Xournal++



Fonte: o autor

Há ainda uma outra possibilidade para se trabalhar integrando a tarefa no GeoGebra com a escrita diretamente no aplicativo da lousa digital, porém, essa funcionalidade não está presente em todos os modelos de lousa digital.

Alguns modelos como a lousa digital adquirida pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná, no Pregão Eletrônico 340/2021, já citada anteriormente, não permite que outra janela seja exibida simultaneamente com seu aplicativo. A razão para essa restrição é que, para o funcionamento adequado dessa lousa digital, o projetor é configurado para funcionar como uma segunda tela, que é independente da tela do notebook. O aplicativo da lousa digital, por sua vez, é aberto de forma a ocupar completamente essa segunda tela, não podendo ser redimensionado, o que impede a exibição simultânea de outra janela.

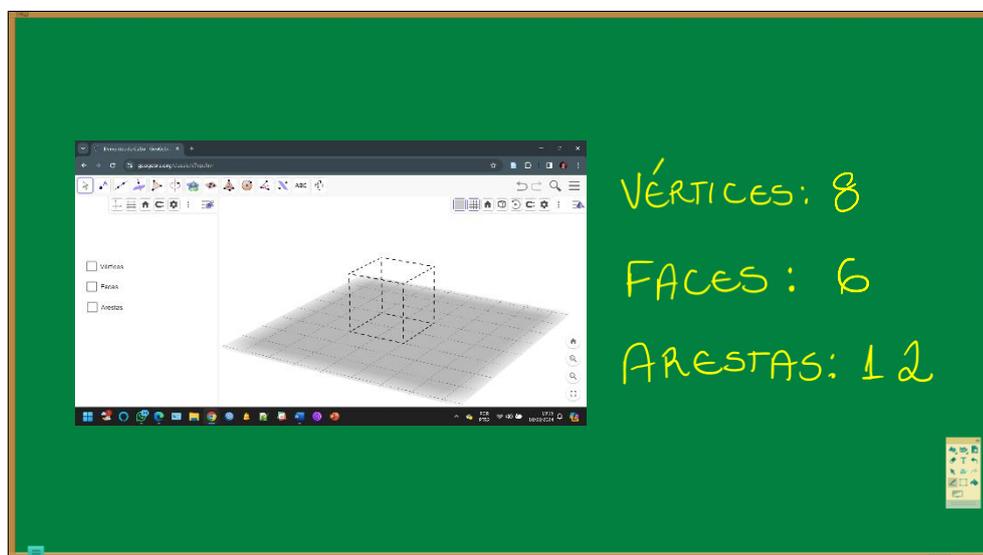
Porém, nesse caso, o aplicativo da lousa digital conta com um recurso para exibir o conteúdo presente na tela do notebook dentro de uma caixa específica, permitindo inclusive que o professor controle os programas diretamente através da interface da lousa digital.

Dessa forma, o professor tem a opção de iniciar a tarefa no monitor principal do seu notebook e, em seguida, acessar essa tarefa diretamente na lousa digital, utilizando o recurso de exibição de tela disponível no aplicativo da lousa.

Com isso o professor pode fazer as manipulações necessárias na tarefa e as anotações pertinentes para a sua aula, tudo diretamente no aplicativo da lousa digital.

A Figura 25 mostra como fica a exibição da tela do notebook dentro do aplicativo da lousa digital.

Figura 25 – Tela do notebook exibida dentro do aplicativo da lousa digital



Fonte: o autor

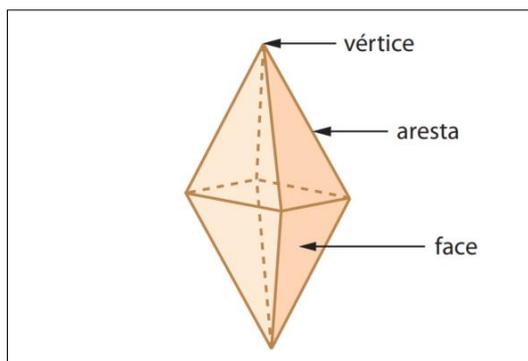
Entretanto, a viabilidade dessa abordagem dependerá do modelo específico de lousa digital que está sendo utilizado pois, como dito anteriormente, nem todas as lousas digitais contam com esse recurso.

Após toda essa explanação sobre vértices, arestas e faces, o professor pode explorar os elementos Vértice, Face e Arestas em outras figuras, e em seguida, introduzir o conceito de poliedros:

“*Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono” (Lima *et al*, 2006, p. 231).

Aos planos poligonais que determinam os “lados” do poliedro chamamos de FACE. O encontro das faces determina as ARESTAS dos poliedros e, ao encontro das arestas chamamos de VÉRTICE do poliedro.

Figura 26 – Elementos de um poliedro



Fonte: Dante, 2006, p. 206

Na Figura 26 temos a representação visual de um poliedro, juntamente com os elementos que o constituem.

4.2 SEGUNDA TAREFA

Objetivo: Explorar a planificação, o cálculo de área e de volume de prismas.

Público-alvo: 8º e 9º do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

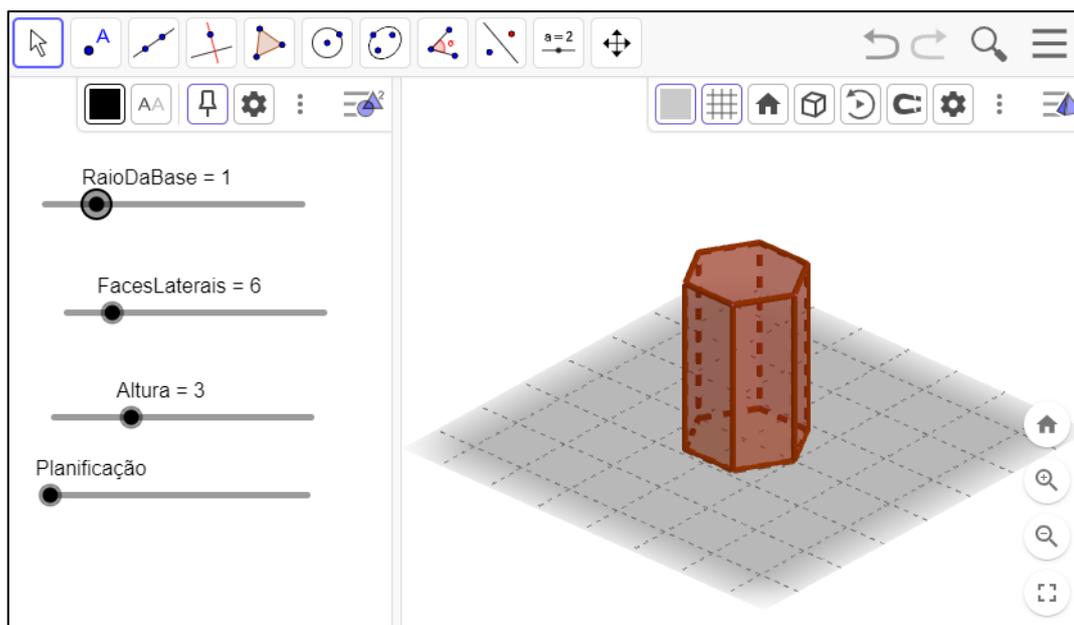
Tarefa 2:

Modelar diferentes números de lados do polígono da base e diferentes medidas da altura e do raio da base, a partir do modelo apresentado no GeoGebra. Escolher alguns desses modelo, realizar cálculos de área de faces e volume e comparar com os resultados obtidos no próprio GeoGebra.

Nesta tarefa será feita uma exploração de um poliedro por meio da modelagem em 3D de um prisma regular utilizando o GeoGebra, disponível em <https://www.geogebra.org/m/zxqcvb2j>, que permite alterar o raio da base, o número de lados do polígono da base (que influenciam diretamente no número de faces laterais), a altura e será apresentada uma de suas planificações.

A Figura 27 mostra um prisma hexagonal cujo raio da base é igual à 1 e a altura é igual à 3.

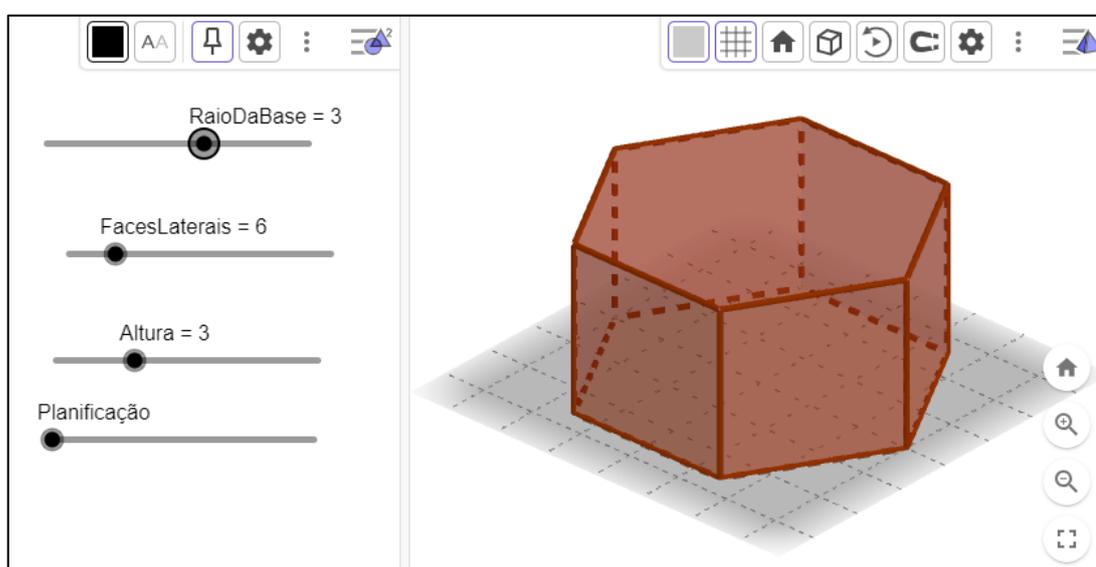
Figura 27 – Prisma regular com raio da base igual à 1 e altura igual à 3.



Fonte: o autor

Ajustando o raio da base para 3, obtemos o prisma mostrado na Figura 28.

Figura 28 – Prisma regular com raio da base igual à 3 e altura igual à 3.



Fonte: o autor

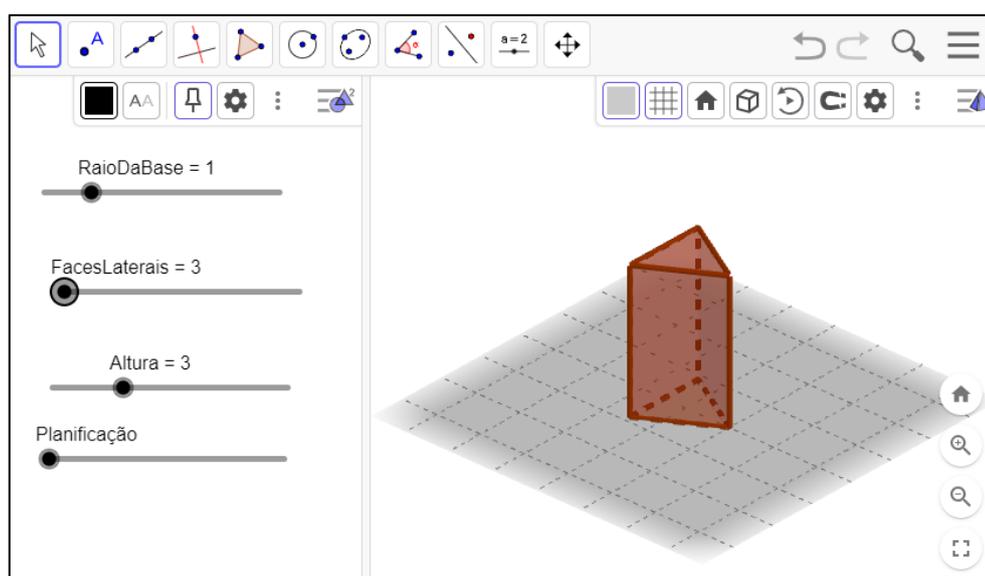
É interessante observar que no modelo, mesmo quando o raio da base do prisma é modificado, o número de faces laterais se mantém constante. Da mesma forma, a altura não sofre alterações. Contudo, durante o processo de mudança do raio da base, alguns estudantes podem erroneamente acreditar que a altura diminui

conforme o raio cresce, ou o contrário, que a altura aumenta à medida em que o raio diminui, pois eles podem associar a animação com o efeito de zoom, dando a impressão de que o prisma está se aproximando ou se afastando conforme a medida do raio é alterada.

Ao utilizar a lousa digital para manipular o raio da base, o professor pode sobrepor algum objeto na aresta do prisma como uma régua, ajustar a altura do prisma de modo que fique com o mesmo tamanho desse objeto e em seguida fazer as modificações no raio da base mostrando que, apesar das demais medidas de o prisma sofrerem alteração, sua altura permanece inalterada.

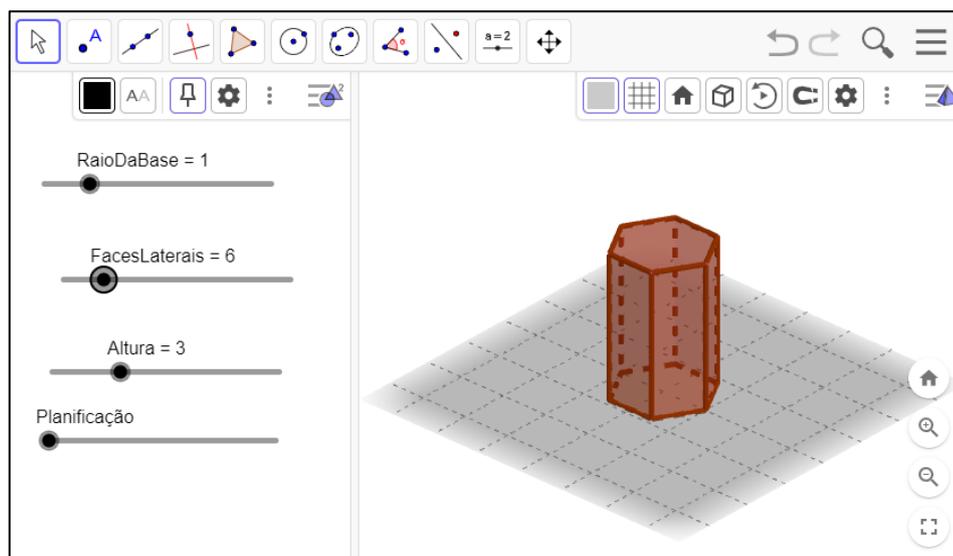
Na Figura 29 temos um prisma de base triangular e, fazendo alterações apenas no número de faces laterais, podemos obter outros prismas, conforme mostrado na Figura 30.

Figura 29 – Prisma de base triangular



Fonte: o autor

Figura 30 – Prisma de base hexagonal

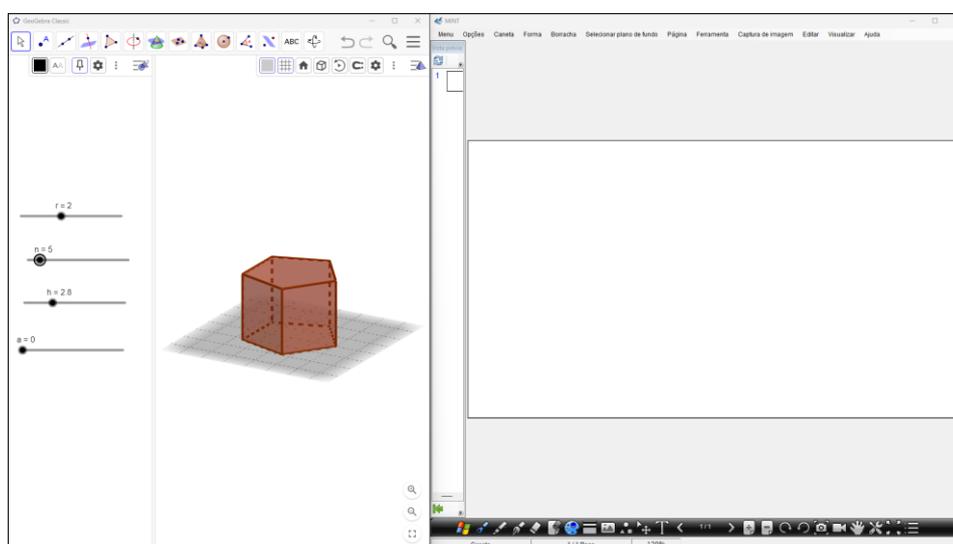


Fonte: o autor

Nesse momento é conveniente explorar com os estudantes o nome que o prisma recebe de acordo com o polígono da base. Para isso, pode-se abrir simultaneamente o modelo em 3D para ser manipulado e um outro aplicativo que permita fazer anotações na lousa digital. Utilizaremos aqui o software MINT Interactive, que acompanha a lousa digital e complementa o projetor ProInfo.

A Figura 31 exhibe, à esquerda, o modelo em 3D do prisma e à direita o software MINT Interactive para se fazer as anotações necessárias.

Figura 31 – Classificação do prisma quanto o número de lados da base

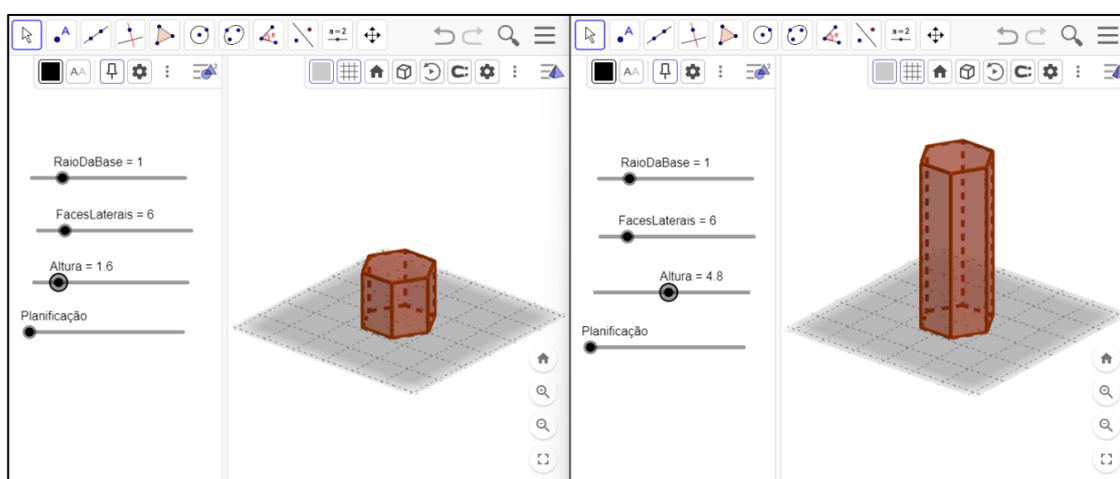


Fonte: o autor

Vale ressaltar que a última versão do software MINT Interactive foi lançada já há bastante tempo, no ano de 2014 e, apesar de ser antiga e de não estar mais sendo disponibilizada de maneira oficial pelo fornecedor da lousa digital, ainda é possível encontrar os arquivos de instalação no DVD que acompanha a lousa digital ou ainda disponibilizado em alguns sites de download na internet.

Na Figura 32 podemos observar um compilado de duas representações de prismas em que apenas sua altura foi alterada.

Figura 32 – Prismas retos com diferentes alturas



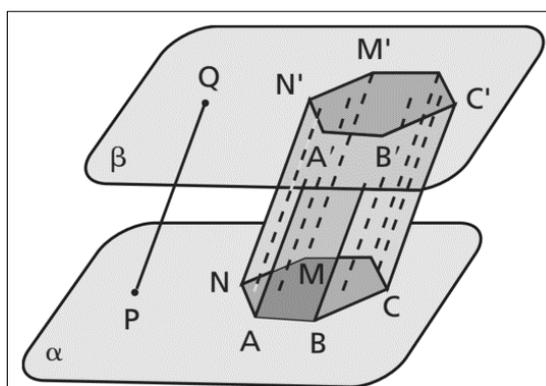
Fonte: o autor

As alterações citadas e ilustradas até aqui, apesar de simples, possibilitam ao estudante perceber o impacto que cada modificação tem na estrutura final do poliedro. Além disso, o professor tem a opção de envolver ainda mais os estudantes no processo de aprendizagem solicitando, por exemplo, que os próprios estudantes façam as manipulações na lousa digital.

Após fazer as explorações citadas acima, o professor poderá formalizar com os estudantes o conceito de prisma.

Considere um polígono convexo ABCD...MN contido em um plano α e um segmento PQ qualquer, com P pertencente à α e Q pertencente ao plano β , sendo β paralelo à α e β diferente de α . A reunião de todos os segmentos de reta congruentes e paralelos à PQ que contém uma extremidade no polígono ABCD...MN e outra extremidade em β é chamada de prisma (Dolce e Pompeo, 2013. p.136).

Figura 33 – Prisma



Fonte: Dolce; Pompeo, 2013, p. 136

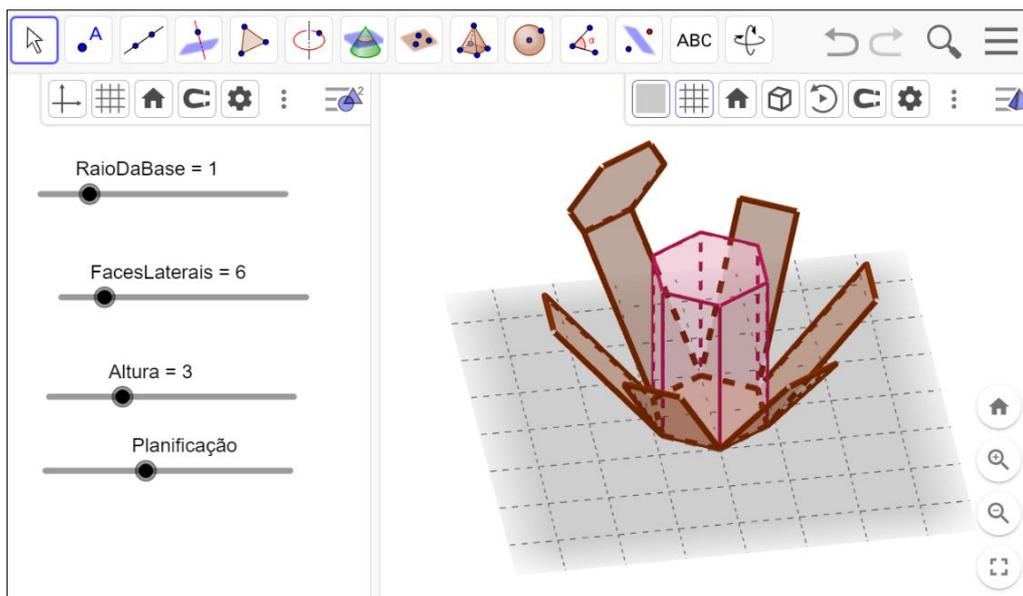
Elementos e classificação de um prisma:

O prisma possui 2 bases congruentes, n faces laterais que são paralelogramos, $n + 2$ faces, $3n$ arestas e $2n$ vértices e podem ser classificados como *oblíquo*: quando as arestas são oblíquas aos planos das bases, *reto*: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases (as faces laterais são retângulos) ou *regular*: quando for um prisma reto cujas bases são polígonos regulares (Dolce; Pompeo, 2013, p. 136-137).

Por meio do modelo em 3D apresentado no GeoGebra Figura 27 podemos ainda explorar uma das possíveis planificações do prisma. À medida em que o controle deslizante “planificação” é alterado, é possível “abrir” o prisma e ver como ele seria se fosse desmontado e suas faces colocadas todas numa mesma superfície plana.

Na Figura 34 temos uma ilustração de como essa planificação é mostrada no modelo em 3D.

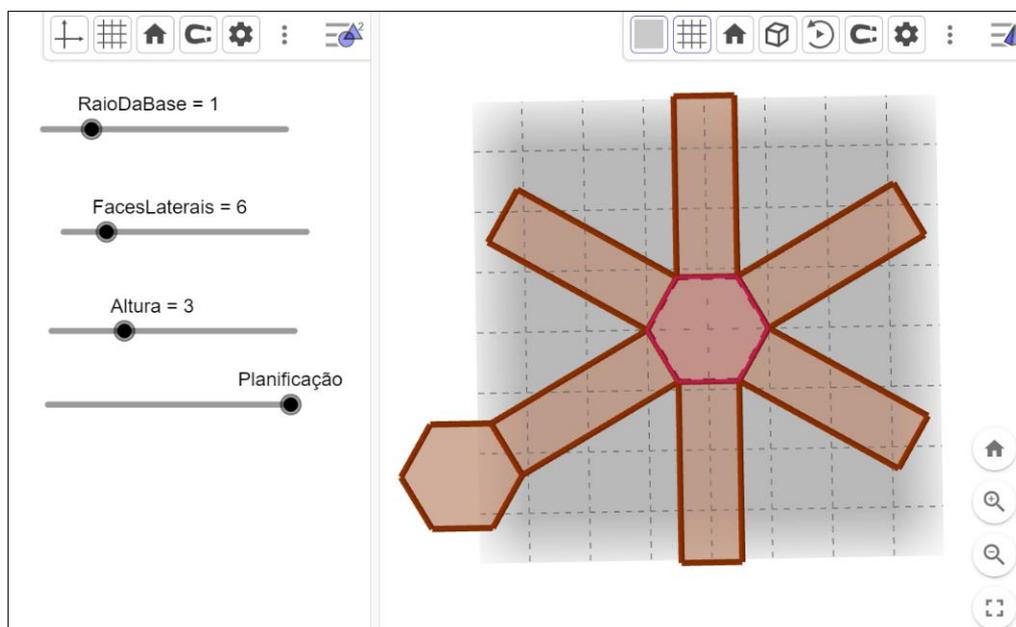
Figura 34 – Prisma sendo planificado



Fonte: o autor

Na Figura 35 podemos ver todas as faces do prisma dispostas numa mesma superfície plana.

Figura 35 – Planificação do prisma hexagonal



Fonte: o autor

É possível ainda aproveitar o mesmo modelo para explorar as áreas das faces e o volume do prisma.

Ao exibir a planificação do prisma conforme mostrado na Figura 35, é notável que sempre teremos dois polígonos congruentes que são as bases do prisma e a quantidade de faces laterais corresponde ao número de lados dos polígonos que formam as bases.

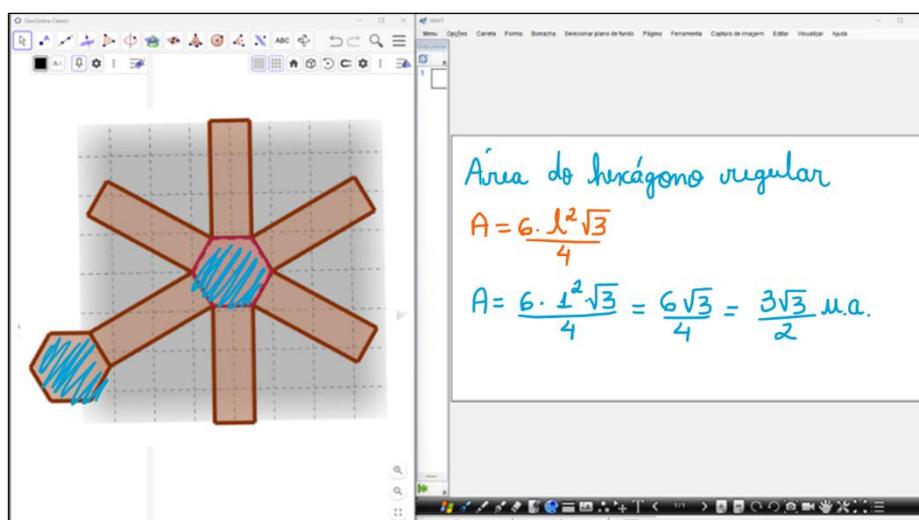
O fato de o Geogebra permitir realizar planificações favorece a exploração do cálculo da área do prisma, lembrando que a área total do prisma é igual à duas vezes a área da base do prisma com a soma das áreas de todos os retângulos correspondentes às faces laterais do prisma.

$$A_{\text{Total}} = 2 \cdot A_{\text{Base}} + A_{\text{Lateral}}$$

Vamos explorar o cálculo da área do prisma ilustrado na Figura 30, que tem a base hexagonal, regular, com raio da base medindo 1 unidade, altura medindo 3 unidades e a planificação foi representada na Figura 35.

Na Figura 36 temos o desenvolvimento do cálculo da área da base do prisma na lousa digital.

Figura 36 – Cálculo da área da base do prisma

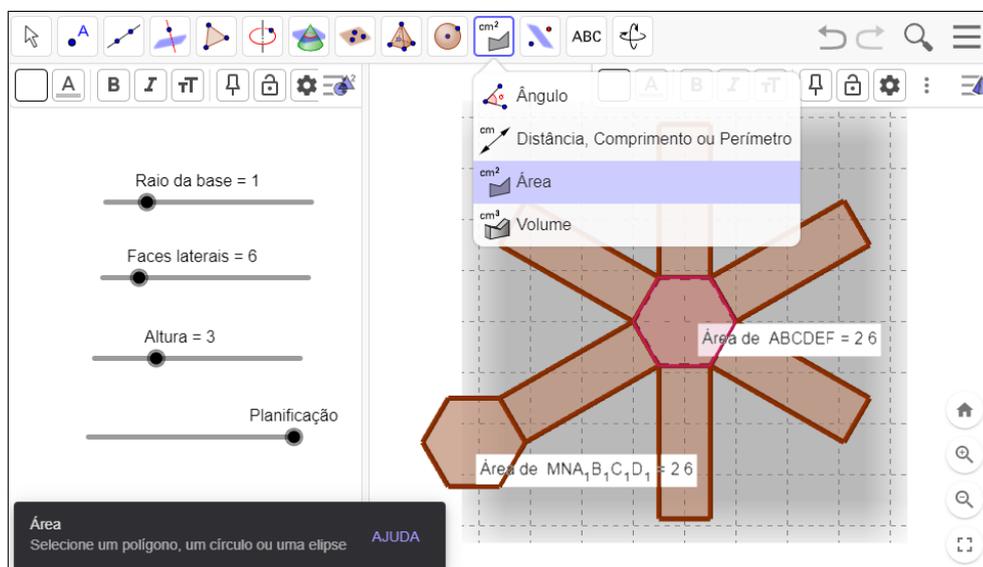


Fonte: o autor

Pelo GeoGebra podemos fazer a conferência do valor encontrado, bastando, para isso, selecionar o botão “Área” na barra de ferramentas e clicar sobre o polígono que queremos determinar a área, no caso, os hexágonos da base do prisma.

Na Figura 37 temos exibidas as áreas das bases do prisma e mostra o botão “Área” na barra de ferramentas.

Figura 37 – Cálculo da área da base do prisma no GeoGebra



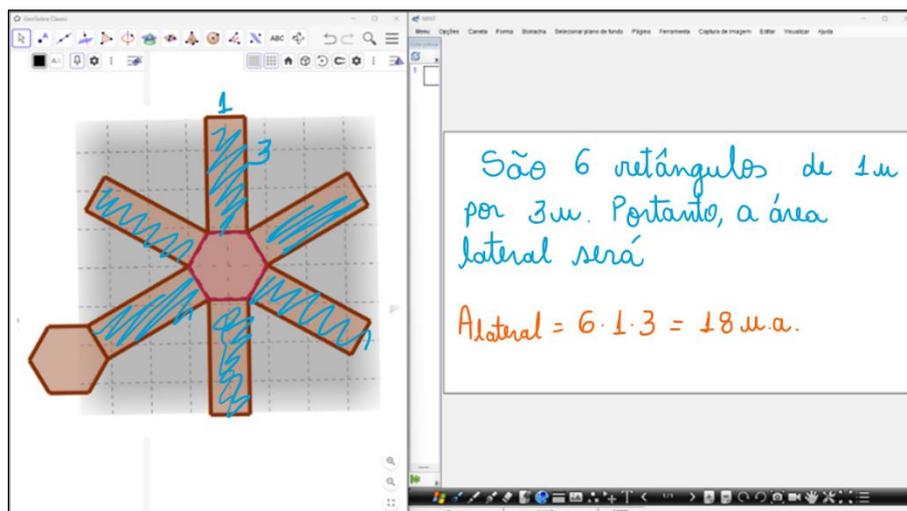
Fonte: o autor

Note que a área apresentada pelo GeoGebra foi arredondada para 2,6, o que corresponde a $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Capturando a planificação do prisma e colocando-a no aplicativo da lousa digital para fazer anotações, o professor tem a possibilidade de mostrar e fazer destaques no polígono enquanto faz as anotações pertinentes ao cálculo da área da base.

Na Figura 38 podemos observar o cálculo da área lateral do prisma feito na lousa digital.

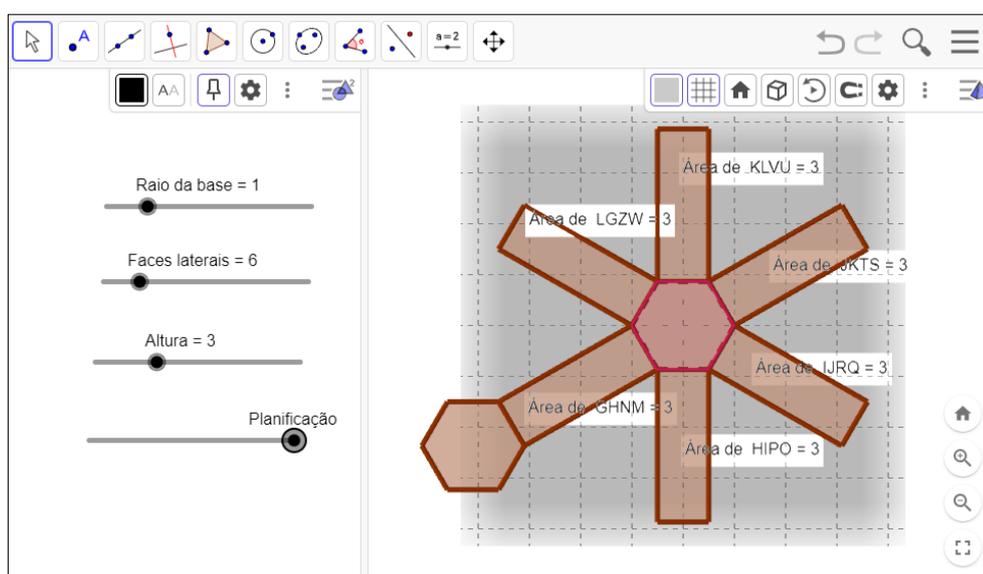
Figura 38 – Cálculo da área lateral do prisma



Fonte: o autor

Podemos novamente verificar o cálculo da área lateral no GeoGebra, o qual nos dará a área de cada face lateral, bastando apenas somá-las para obter a área lateral do prisma. A Figura 39 apresenta as áreas das faces laterais do prisma.

Figura 39 – Cálculo da área lateral do prisma no GeoGebra



Fonte: o autor

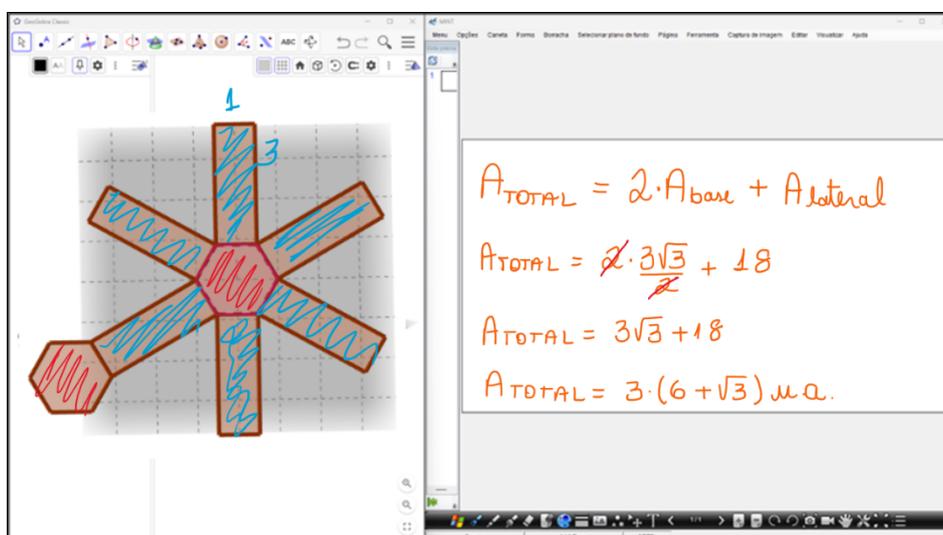
Para o cálculo da área lateral, além das facilidades proporcionadas pela exibição simultânea da planificação e do aplicativo da lousa digital em uma mesma página, é possível duplicar esta página, excluir as anotações deixando apenas a

planificação e alterar rapidamente o destaque dos polígonos da base para os retângulos que formam as laterais do prisma.

Já em uma lousa tradicional seria necessário desenhar novamente a planificação, o que levaria um certo tempo, ou então realizar os destaques na mesma figura, porém diferentes dos das bases, não sendo possível deixar destacada apenas a área que está sendo calculada.

Na Figura 40 temos ilustrado o cálculo da área total do prisma, obtido somando-se a área da base à área lateral.

Figura 40 – Cálculo da área total do prisma

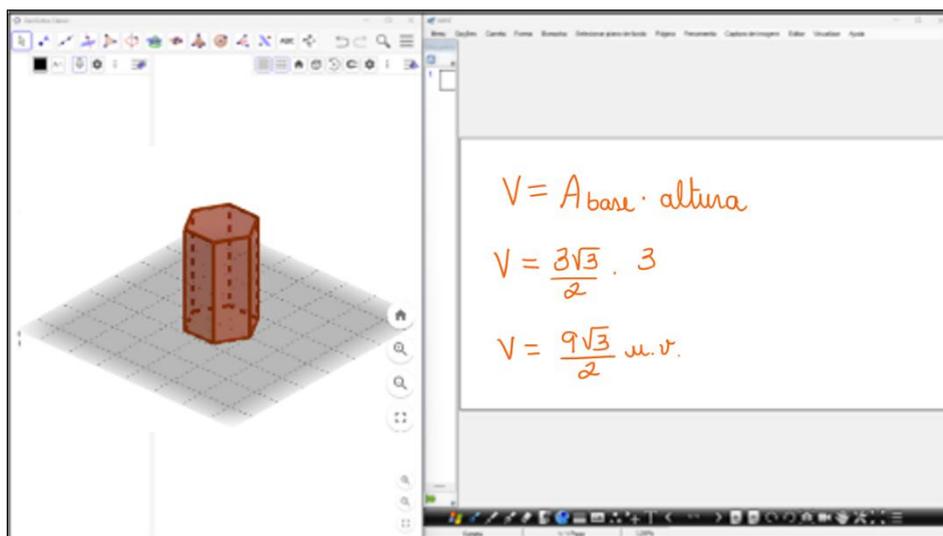


Fonte: o autor

Com relação ao volume, as simulações mostradas na Figura 27 e na Figura 28 evidenciam que o volume do prisma depende da área da base e as simulações mostradas na Figura 32 ajudam a evidenciar que o volume do prisma depende também da sua altura. Combinando essas simulações e, fazendo anotações na lousa digital, chegamos à fórmula comumente utilizada para determinar o volume do prisma, na qual multiplicamos a medida da área da base pela medida da altura do prisma.

Vamos novamente utilizar o prisma apresentado na Figura 30 para explorar o cálculo do seu volume.

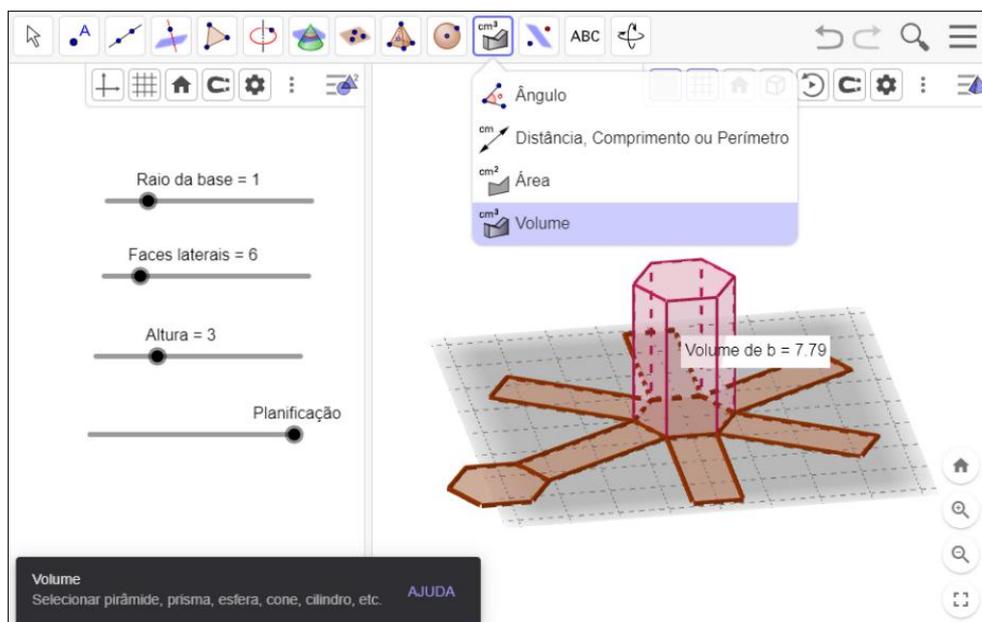
Figura 41 – Cálculo do volume do prisma



Fonte: o autor

Podemos ainda verificar o cálculo do volume do prisma no GeoGebra selecionando a ferramenta “Volume” e clicando no prisma. Novamente o GeoGebra apresentará o resultado em número decimal, conforme vemos na Figura 42, que mostra o botão “Volume” na barra de ferramentas.

Figura 42 – Cálculo do volume do prisma no GeoGebra



Fonte: o autor

4.3 TERCEIRA TAREFA

Objetivo: Resolver um problema de cálculo de área e de volume de pirâmide.

Público-alvo: 8º e 9º do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

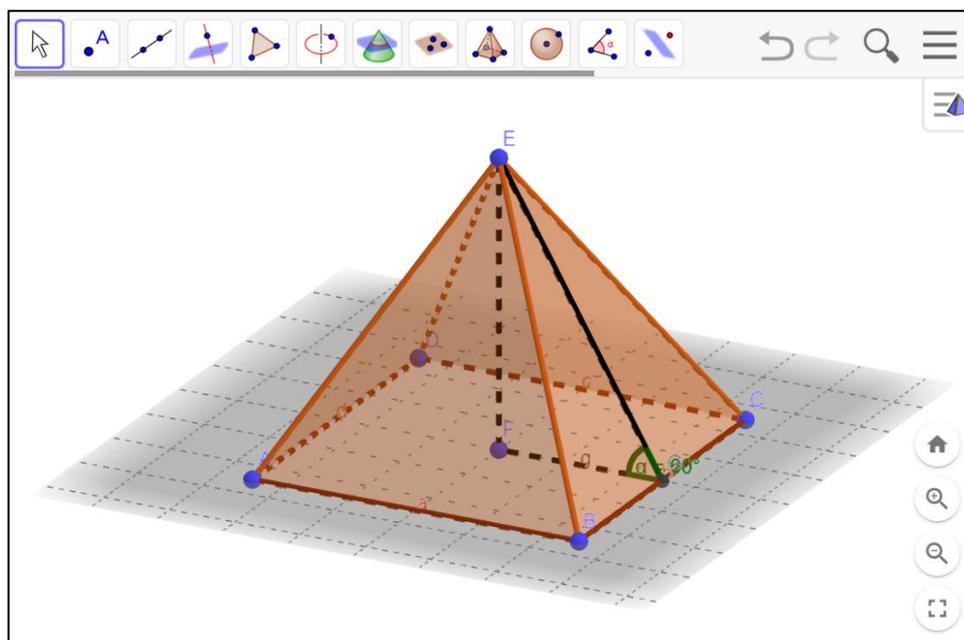
Tarefa 3:

Numa pirâmide quadrangular regular o ângulo de cada face com a base mede 60° . Sabendo que a área da base dessa pirâmide é 100 cm^2 . Qual a área total e o volume dessa pirâmide?

Para esta tarefa, sugerimos a utilização do GeoGebra e do OpenBoard, que é um software gratuito, disponível para diversos sistemas operacionais e que pode ser utilizado em conjunto com a maioria das lousas digitais disponíveis no mercado.

Na Figura 43 temos a representação da pirâmide feita no GeoGebra, que pode ser acessada através do link <https://www.geogebra.org/m/gxatz2sg>.

Figura 43 – Pirâmide quadrangular da tarefa proposta



Fonte: o autor

Para determinar a área total da pirâmide podemos questionar os estudantes:

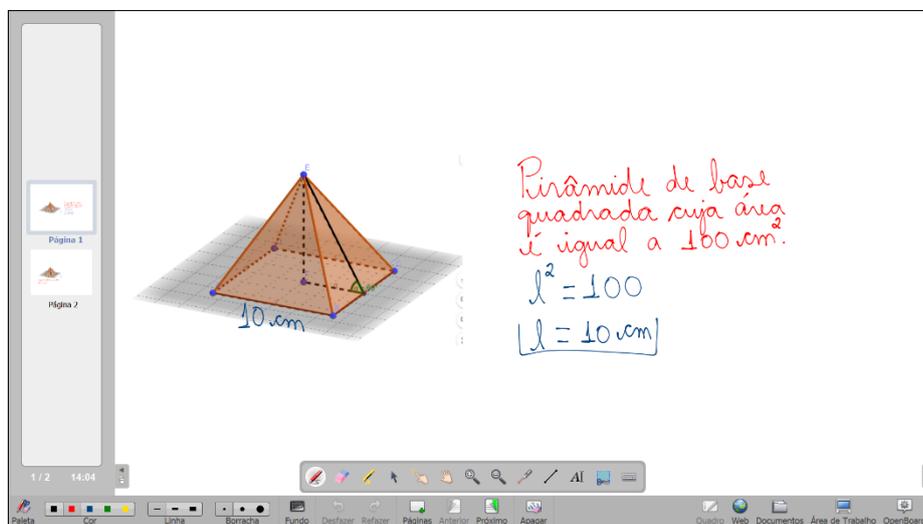
- Quais os elementos necessários para calcularmos a área de uma pirâmide?
- Qual a medida do lado do quadrado da base?
- Quanto mede o apótema da base e o apótema da pirâmide?
- Quanto mede a altura da pirâmide?

Conhecendo-se os valores desses elementos, prosseguiremos para o cálculo da área total da pirâmide. Quanto ao volume, antes de calculá-lo, só nos resta descobrir a altura da pirâmide, pois o enunciado do exercício já trouxe o valor da área da base.

No GeoGebra podemos ajustar a posição da pirâmide para favorecer a visualização dos elementos que serão utilizados para os cálculos e em seguida capturar a imagem e enviá-la para o OpenBoard, a fim de realizar as anotações e cálculos pertinentes.

A Figura 44 mostra uma captura da imagem da pirâmide junto com o cálculo da medida da aresta da sua base.

Figura 44 – Cálculo da aresta da base da pirâmide

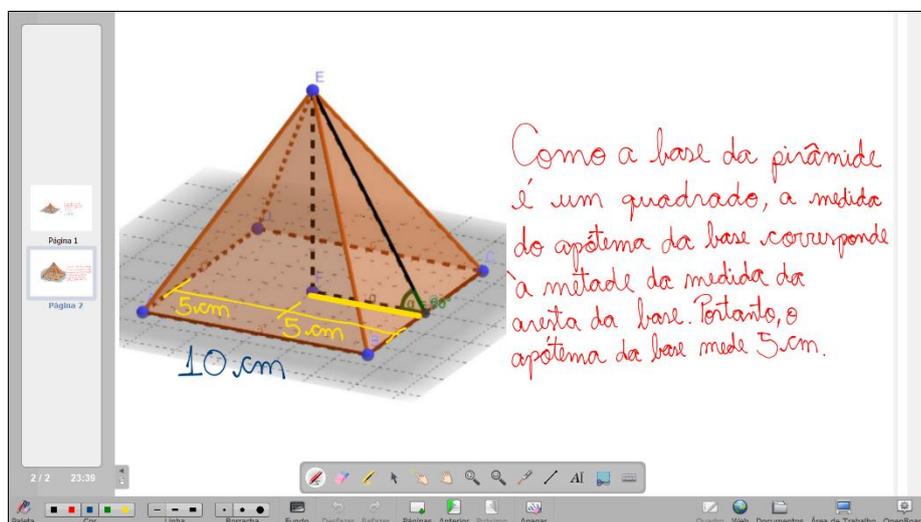


Fonte: o autor

Uma facilidade oferecida pelo OpenBoard é a possibilidade de inserir novas páginas ou duplicar uma página já existente. Dessa forma, podemos separar cada cálculo numa página distinta, deixando apenas as informações necessárias e evitando, assim, distrações devido ao excesso de informações.

Na Figura 45 temos uma nova página com a representação em destaque do apótema da pirâmide juntamente com as anotações feitas para determinar sua medida.

Figura 45 – Cálculo do apótema da base da pirâmide

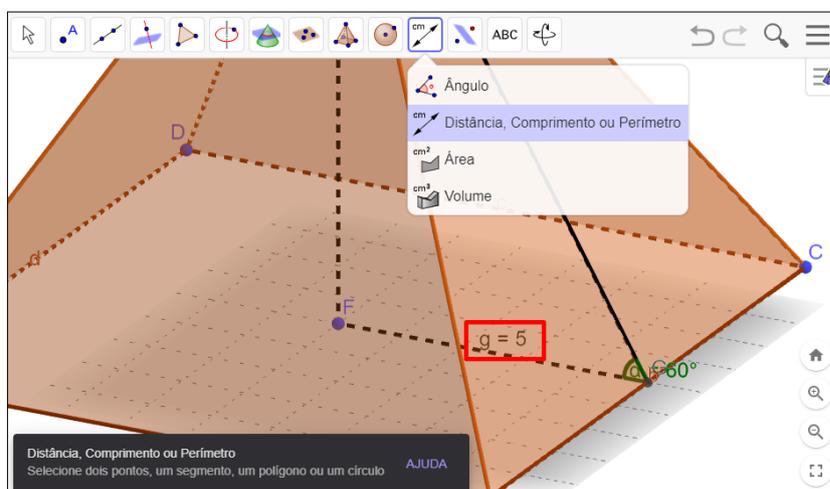


Fonte: o autor

Ampliar a visualização da aresta da base, melhora a percepção do elemento e facilita o entendimento dos estudantes de que, como a base da pirâmide é um quadrado, o apótema da base terá a metade da medida da aresta da base.

Podemos verificar o valor do apótema da base no GeoGebra. Para isto, basta selecionar o botão “Distância, Comprimento ou Perímetro” na barra de ferramentas e depois clicar no apótema da base, conforme nos apresenta a Figura 46.

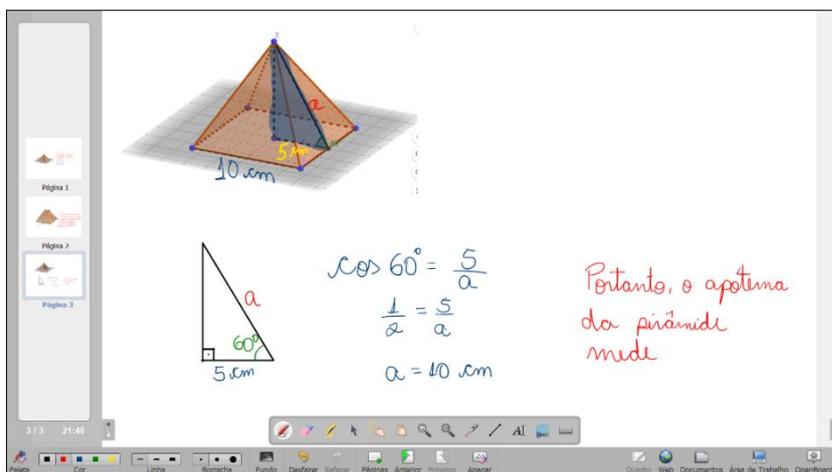
Figura 46 – Cálculo do apótema da base da pirâmide no GeoGebra



Fonte: o autor

Para o cálculo do apótema da pirâmide, podemos isolar o triângulo retângulo formado pela altura e os apótemas da base e da pirâmide, conforme mostrado na Figura 47.

Figura 47 – Cálculo do apótema da pirâmide

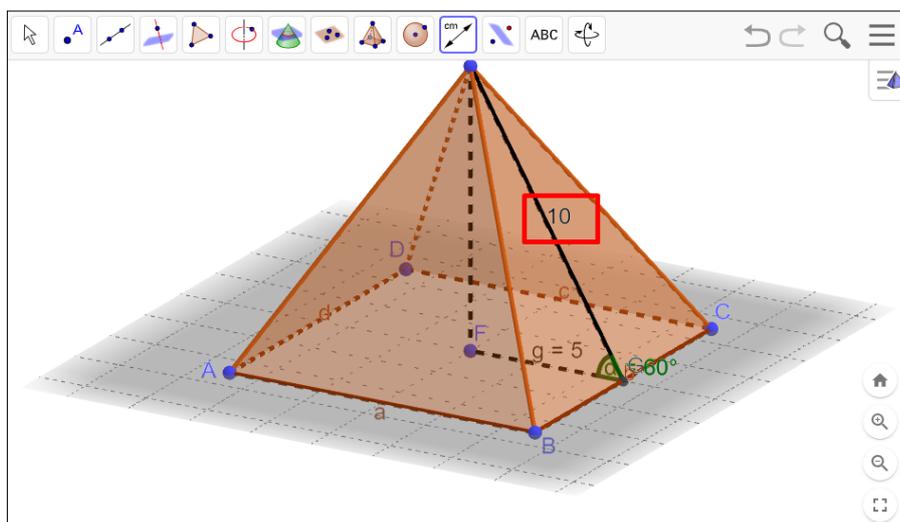


Fonte: o autor

Ao desenhar separadamente o triângulo e destacar as medidas conhecidas, fica mais fácil para o estudante perceber que poderá utilizar a razão trigonométrica cosseno para determinar a medida do apótema da pirâmide.

Na Figura 48 temos a medida do apótema da pirâmide calculada pelo GeoGebra.

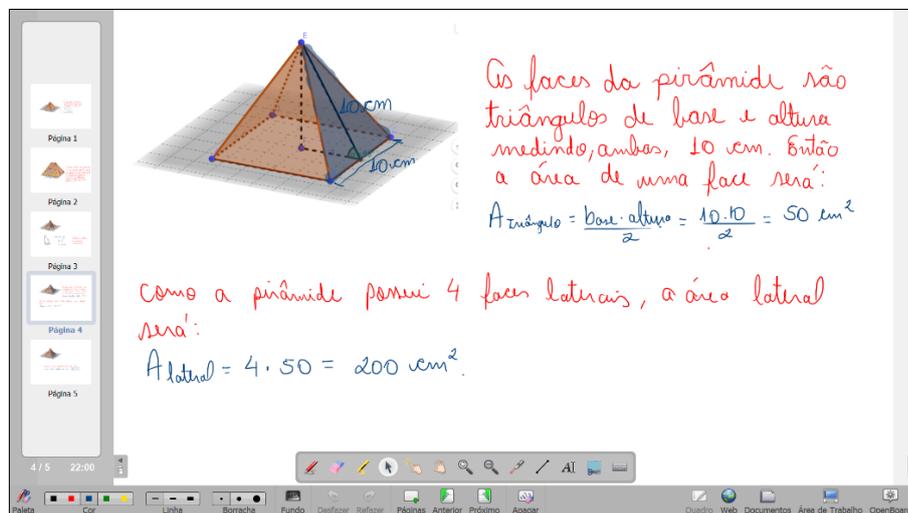
Figura 48 – Cálculo do apótema da pirâmide no GeoGebra



Fonte: o autor

Tendo encontrado a medida do apótema da pirâmide, agora é possível determinar o valor da área lateral, conforme demonstrado na Figura 49.

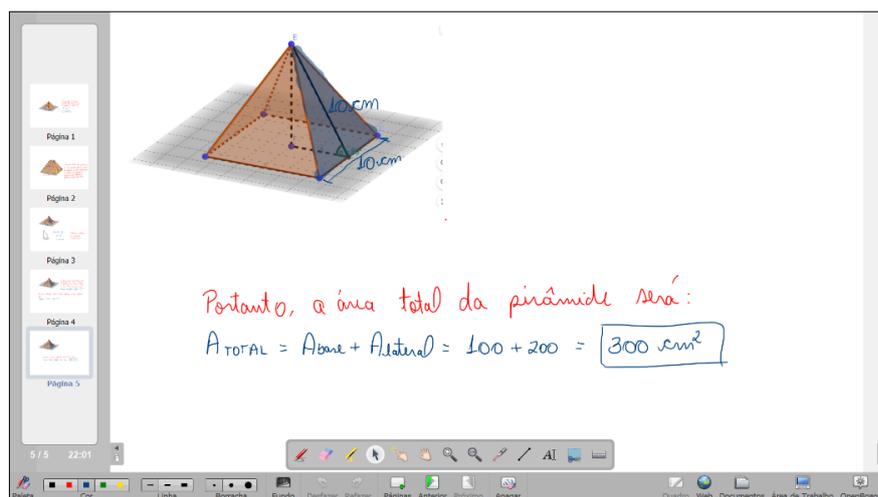
Figura 49 – Cálculo da área lateral da pirâmide



Fonte: o autor

Após encontrar a área lateral, basta somá-la à área da base para obtermos a área total da pirâmide, conforme mostrado na Figura 50.

Figura 50 – Cálculo da área total da pirâmide



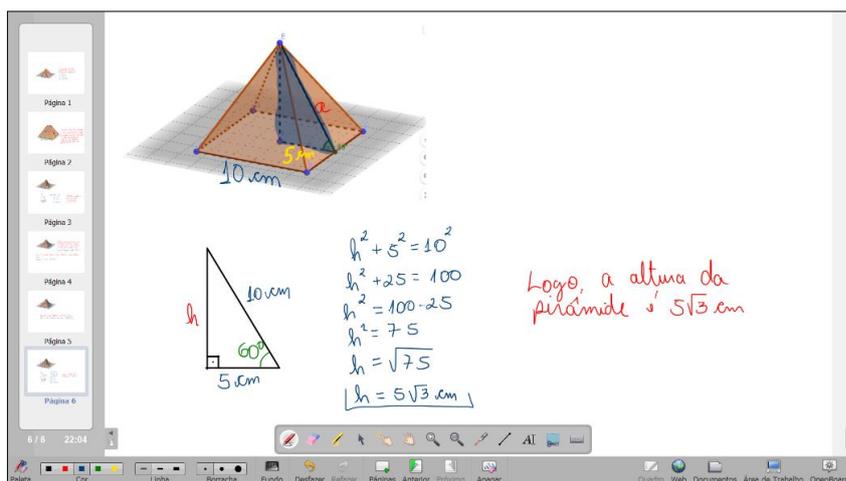
Fonte: o autor

Para prosseguir com o cálculo do volume da pirâmide, precisamos primeiro determinar o valor da sua altura. Aqui é válido ressaltar para os estudantes que existem várias abordagens possíveis para calcular a altura da pirâmide. Aproveitando

o triângulo da Figura 47, mas agora conhecendo dois de seus lados, podemos instigá-los a descobrirem a medida da altura da pirâmide de diversas maneiras.

Na Figura 51, por exemplo, temos o cálculo da altura sendo realizado por meio do Teorema de Pitágoras.

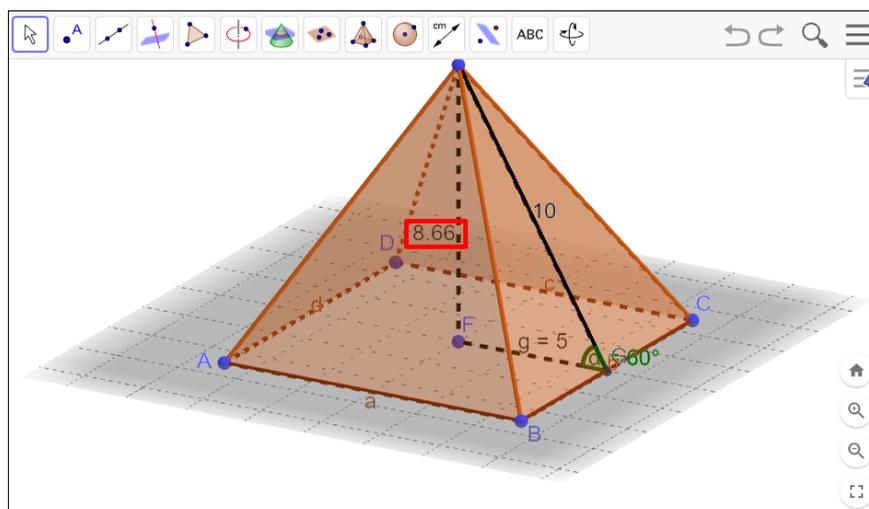
Figura 51 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando o Teorema de Pitágoras



Fonte: o autor

Na Figura 52 podemos verificar a altura da pirâmide calculada pelo GeoGebra.

Figura 52 – Cálculo da altura da pirâmide no GeoGebra



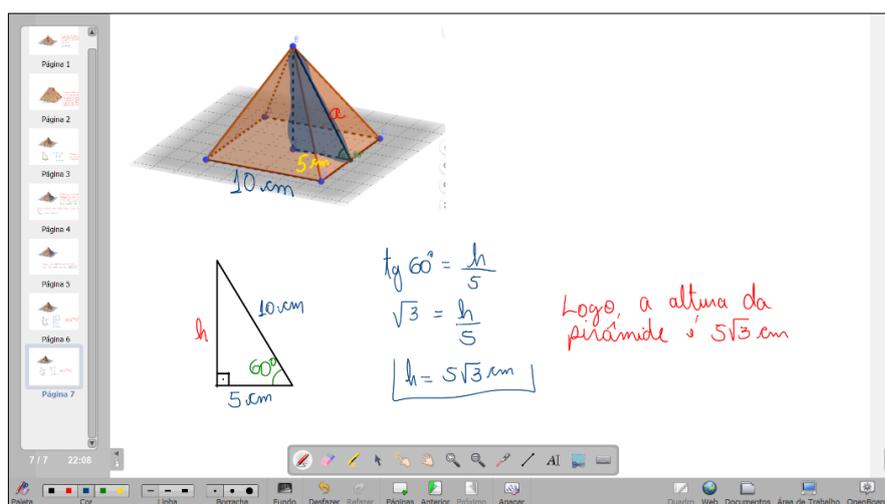
Fonte: o autor

Assim como foi feito para calcular o apótema da base, podemos utilizar a trigonometria para encontrar a altura da pirâmide. A escolha de qual razão

trigonométrica usar dependerá do ângulo e dos lados que serão considerados para a resolução.

Considerando o apótema da base e o ângulo entre a base e a face lateral da pirâmide, que são, respectivamente, 5 cm e 60° , podemos determinar a altura utilizando tangente, como podemos observar na Figura 53.

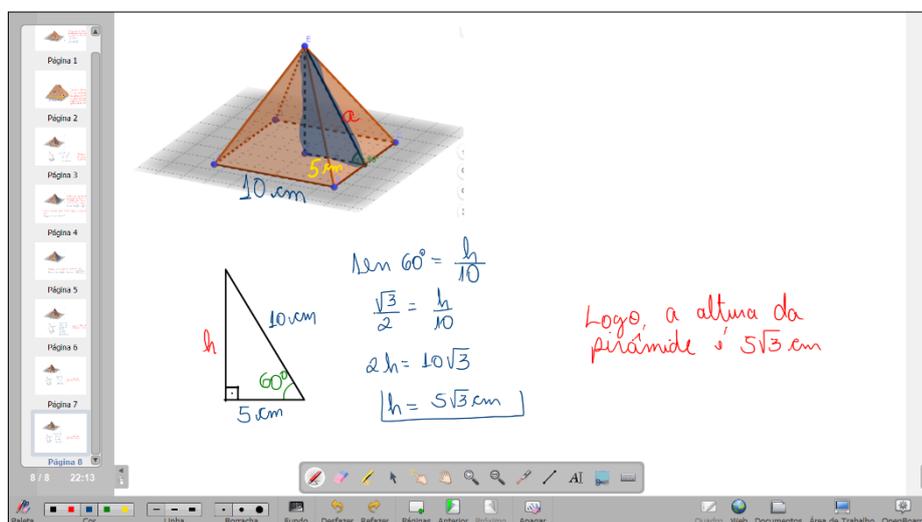
Figura 53 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando tangente



Fonte: o autor

No entanto, se ao invés do apótema da base, considerarmos o apótema da pirâmide, que possui 10 cm, também será possível determinar a altura da pirâmide, porém, utilizando o seno. A Figura 54 mostra esse cálculo.

Figura 54 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando seno

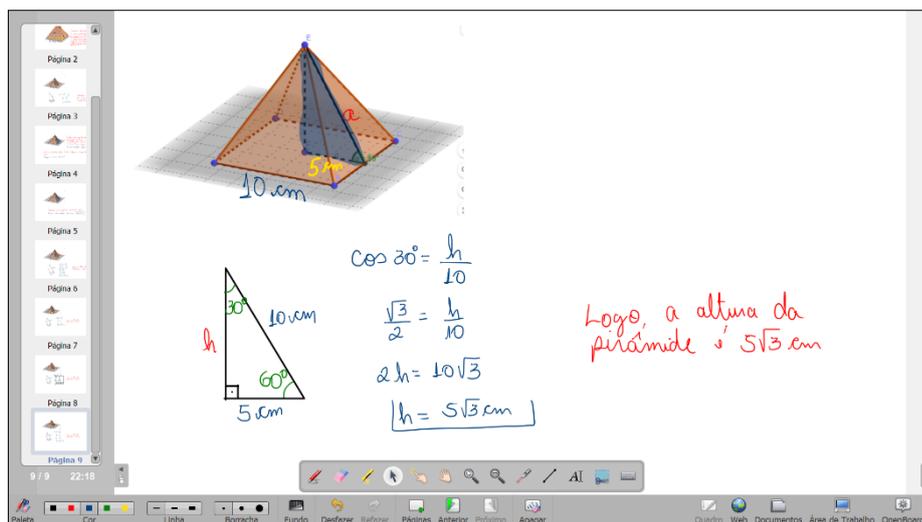


Fonte: o autor

É possível ainda utilizar o cosseno para determinar a altura da pirâmide, mas para isso devemos considerar o outro ângulo agudo do triângulo, que mede 30° .

Na Figura 55 podemos ver o cálculo da altura da pirâmide utilizando o cosseno.

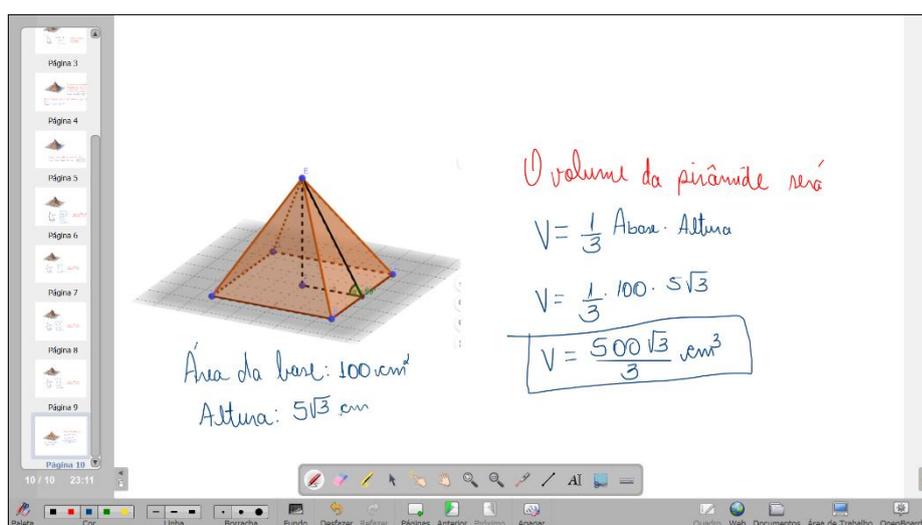
Figura 55 – Cálculo da altura da pirâmide utilizando cosseno



Fonte: o autor

Tendo calculado o valor da altura, podemos, enfim, calcular o volume da pirâmide conforme a Figura 56.

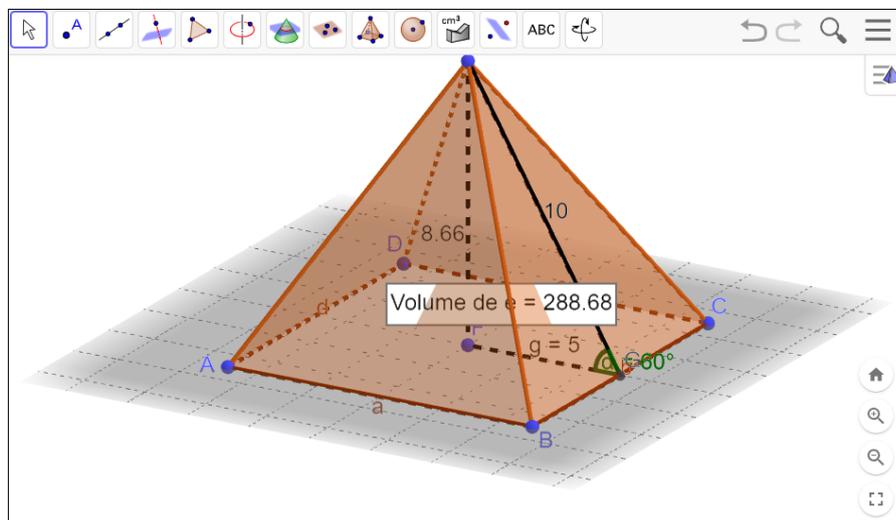
Figura 56 – Cálculo do volume da pirâmide



Fonte: o autor

No GeoGebra podemos verificar esse valor clicando no botão “Volume” e em seguida na pirâmide. O resultado pode ser visto na Figura 57.

Figura 57 – Cálculo do volume da pirâmide no GeoGebra



Fonte: o autor

4.4 QUARTA TAREFA

Objetivo: Explorar a construção algébrica das fórmulas do cálculo de área e de diagonais de paralelepípedos retângulos. Resolver problemas de investigação com a comparação de caixas no formato de paralelepípedos retângulos.

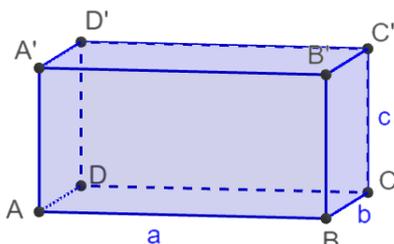
Público-alvo: 8º e 9º do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Tarefa 4.A:

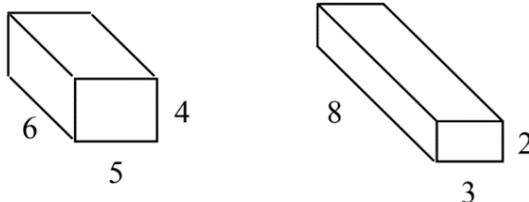
Determine a área total S de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são a , b e c .

Tarefa 4.B:

Considere o paralelepípedo retângulo de dimensões a , b e c representado abaixo.



Determine a medida da diagonal AC' do paralelepípedo.

Tarefa 4.C:

- Calcula e compara as medidas das diagonais das duas caixas.
- Encontra as dimensões de outros pares de caixas cujas medidas das arestas sejam números inteiros e tenham diagonais com o mesmo comprimento. Há pelo menos mais três soluções com dimensões inferiores a 10 unidades.

Fonte: Cunha, *et al*, 1998, p. 90

Antes de iniciarmos a exploração da **tarefa 4.A**, podemos apresentar algumas definições sobre paralelepípedos trazidas por Dolce e Pompeo (2013).

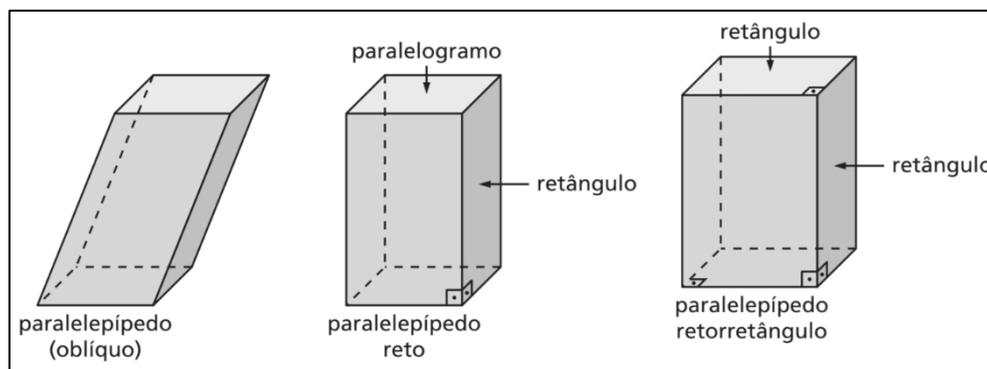
Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

Paralelepípedo reto-retângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.

Na Figura 58 podemos observar uma representação dos prismas definidos acima.

Figura 58 – Tipos de paralelepípedo.



Fonte: Dolce; Pompeo, 2013, p. 139

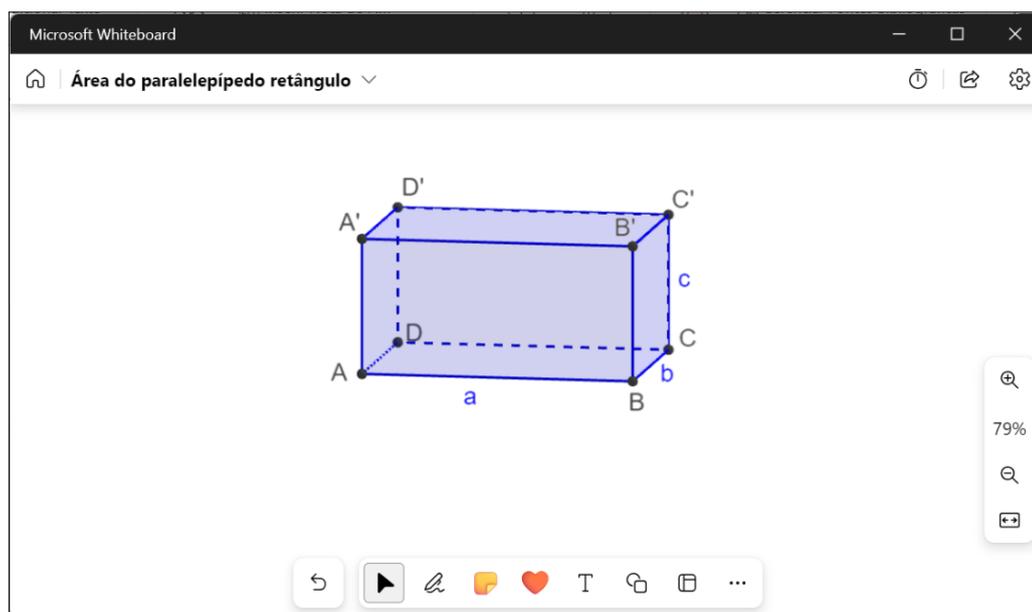
Tarefa 4.A:

Determine a área total S de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são a , b e c .

Utilizaremos para esta tarefa um paralelepípedo retângulo, iremos explorar sua área e suas diagonais. Vamos utilizar o aplicativo Microsoft Whiteboard, um software gratuito que oferece uma ampla gama de funcionalidades e pode ser usado em várias plataformas. Pode ser instalado em smartphones e computadores com sistema operacional Windows, mas pode ser acessado de forma online, sem a necessidade de instalação, podendo, assim, ser utilizado em qualquer sistema operacional. Além disso, o Microsoft Whiteboard permite o compartilhamento de informações e a colaboração entre os usuários em tempo real, permitindo que várias pessoas editem o mesmo arquivo simultaneamente.

Na Figura 59 temos a representação do paralelepípedo da tarefa A, feita no GeoGebra, disponível em <https://www.geogebra.org/m/jd8zsyvcv>, que posteriormente foi capturada e importada para o Whiteboard.

Figura 59 – Paralelepípedo retângulo no Whiteboard



Fonte: o autor

Sabemos que para determinar a área total do paralelepípedo os estudantes deverão somar as áreas de cada uma das seis faces retangulares que o constituem. Para que haja o engajamento dos estudantes na tarefa, o professor pode dividi-los em grupos de dois ou três estudantes, compartilhar a tarefa para que eles acessem pelo computador, tablets ou nos seus próprios smartphones e solicitar que calculem essas áreas de forma colaborativa e apresentem o resultado encontrado.

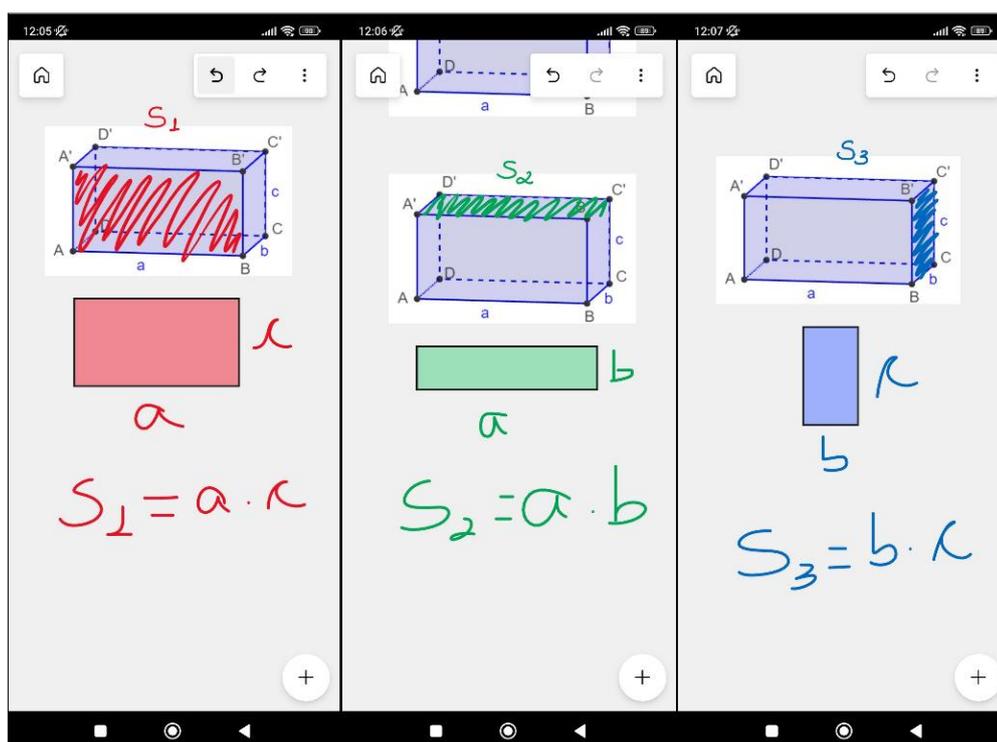
O simples fato de poder abrir o aplicativo Microsoft Whiteboard em um smartphone abre um leque de possibilidades. Isso permite, por exemplo, que os estudantes escrevam diretamente na tela do aparelho usando o dedo, o que pode ser uma experiência mais intuitiva e natural. É como se cada estudante tivesse sua própria lousa digital para desenvolver a tarefa. Ao mesmo tempo em que eles fazem as anotações em suas lousas digitais, elas ficarão visíveis para todos os outros participantes que estão trabalhando em conjunto, facilitando a colaboração e a troca de ideias entre os estudantes.

O Whiteboard não permite que sejam criadas páginas distintas ou telas separadas para inserir os conteúdos. Ao invés disso, ele conta com uma espécie de “página infinita” que pode ser ampliada e deslocada para poder acrescentar novas informações nas regiões ainda vazias. Dessa forma, os estudantes trabalharão em

conjunto na mesma tela, mas cada um pode fazer suas anotações de forma independente.

Na Figura 60 temos três capturas da tela do celular que mostram os cálculos para encontrar as áreas dos retângulos anotadas no Whiteboard de maneira colaborativa.

Figura 60 – Cálculo das áreas dos retângulos utilizando o Whiteboard no celular

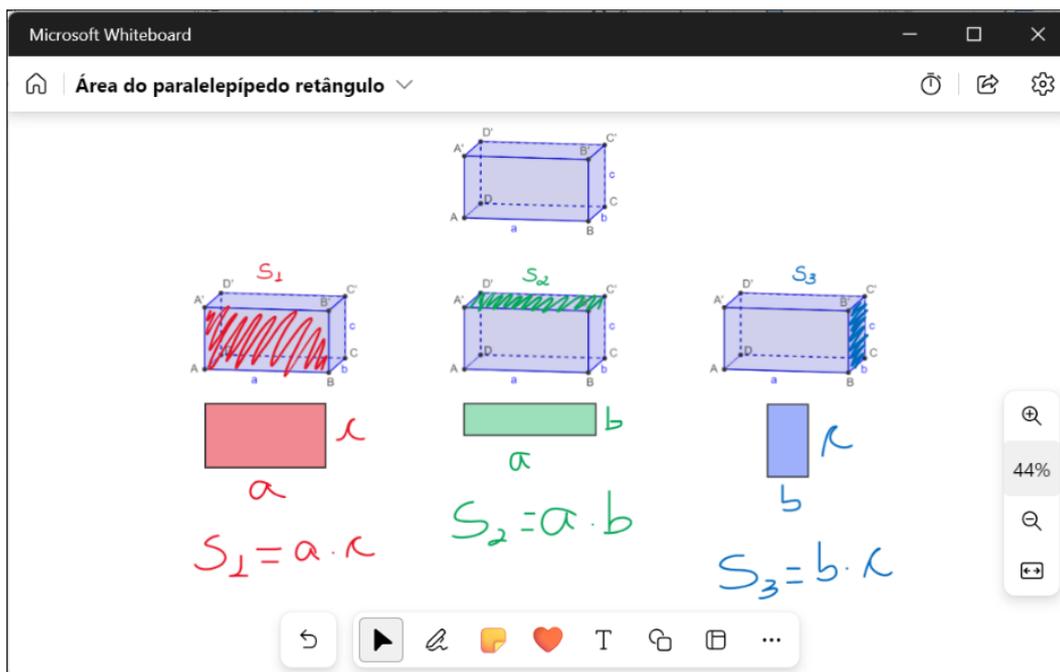


Fonte: o autor

Além disso, o trabalho simultâneo e colaborativo proporcionado pelo Whiteboard permite ainda que todas as operações realizadas pelos estudantes no aplicativo sejam exibidas em tempo real na tela do computador do professor, que por sua vez está ligado à lousa digital. Conforme os estudantes vão realizando as tarefas, o professor pode acompanhar o desenvolvimento do trabalho de cada um, podendo inclusive fazer as observações e comentários pertinentes ao longo do processo, contribuindo para o aprendizado dos estudantes.

A Figura 61 mostra como ficará a exibição no Whiteboard do computador após os estudantes terem efetuado os cálculos no smartphone.

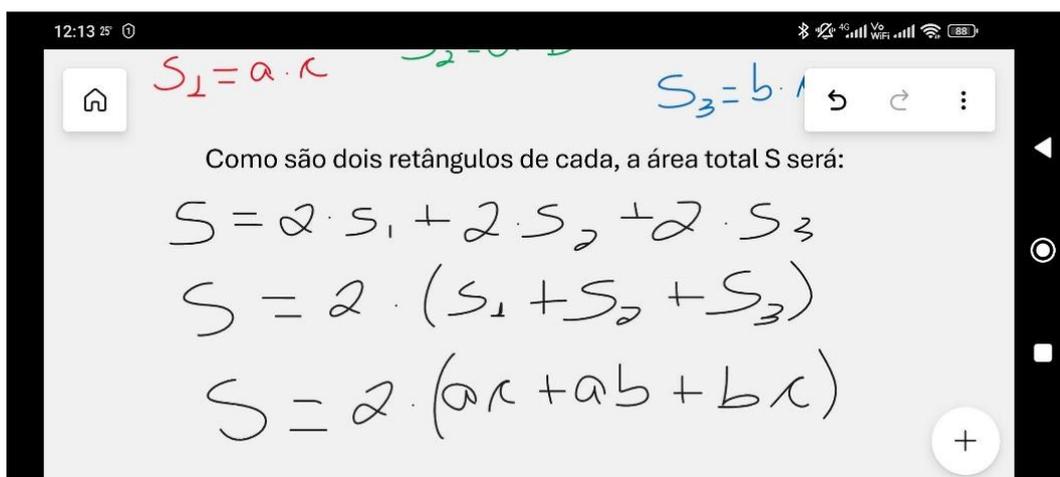
Figura 61 – Cálculo das áreas dos retângulos sendo exibido no computador



Fonte: o autor

Na Figura 62 temos outra captura de tela do smartphone mostrando a parte final da tarefa na qual são efetuadas as somas das três áreas encontradas anteriormente, a fim de obter a área total do paralelepípedo.

Figura 62 – Cálculo da área total do paralelepípedo realizado no smartphone



Fonte: o autor

Já na Figura 63 podemos ver um panorama geral de toda a tarefa por meio de uma captura de tela feita a partir do computador.

Figura 63 – Cálculo da área total do paralelepípedo sendo exibido no computador

Microsoft Whiteboard

Área do paralelepípedo retângulo

Como são dois retângulos de cada, a área total S será:

$$S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + 2 \cdot S_3$$

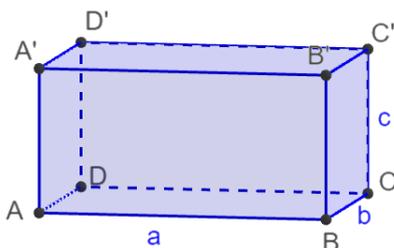
$$S = 2 \cdot (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$S = 2 \cdot (a \cdot c + a \cdot b + b \cdot c)$$

Fonte: o autor

Tarefa 4.B:

Considere o paralelepípedo retângulo de dimensões a , b e c representado abaixo.

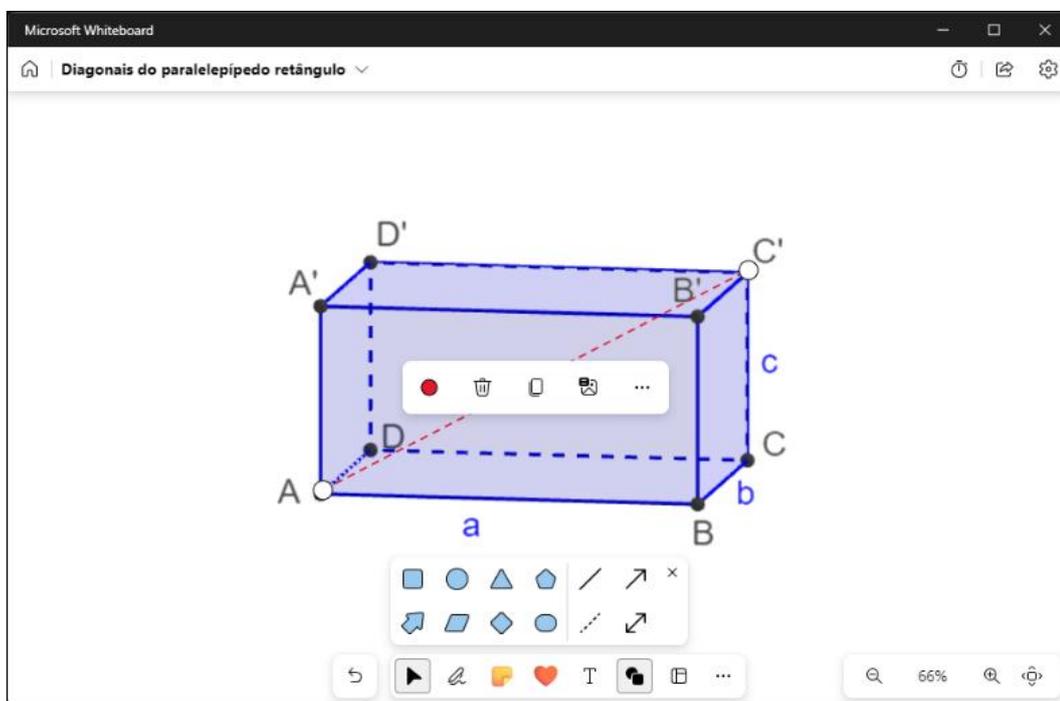


Determine a medida da diagonal AC' do paralelepípedo.

Na tarefa 4.B, o professor poderá utilizar o Whiteboard para desenvolvê-la, pode ainda utilizar o mesmo paralelepípedo apresentado na Tarefa A. É recomendável também dividir a sala em grupos e deixar que os estudantes trabalhem de forma colaborativa para tentar resolver a tarefa proposta.

Usando as ferramentas disponíveis no WhiteBoard, os estudantes poderão traçar a diagonal AC' , conforme podemos observar na Figura 64.

Figura 64 – Traçando a diagonal AC'

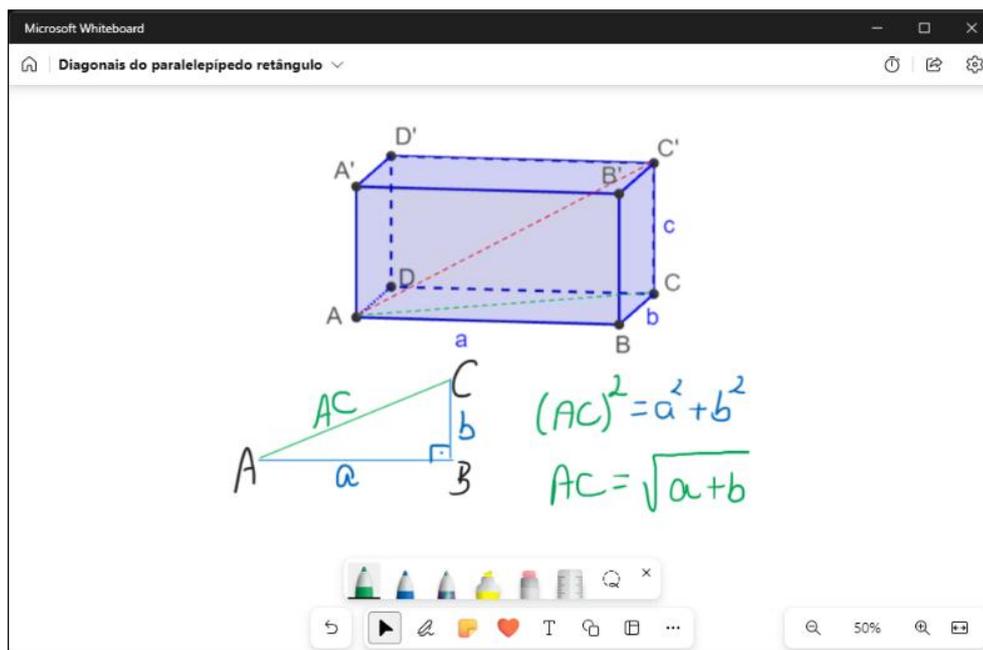


Fonte: o autor

Após isso, poderão traçar a diagonal AC para visualizar o triângulo retângulo ACC' e perceberem que, para calcular a diagonal AC' , primeiro precisarão calcular a medida da diagonal AC .

Ao desenharem o triângulo ABC separadamente, ficará mais fácil perceber que se trata de um triângulo retângulo e que poderão determinar a medida da diagonal AC utilizando o Teorema de Pitágoras, conforme os cálculos apresentados na Figura 65.

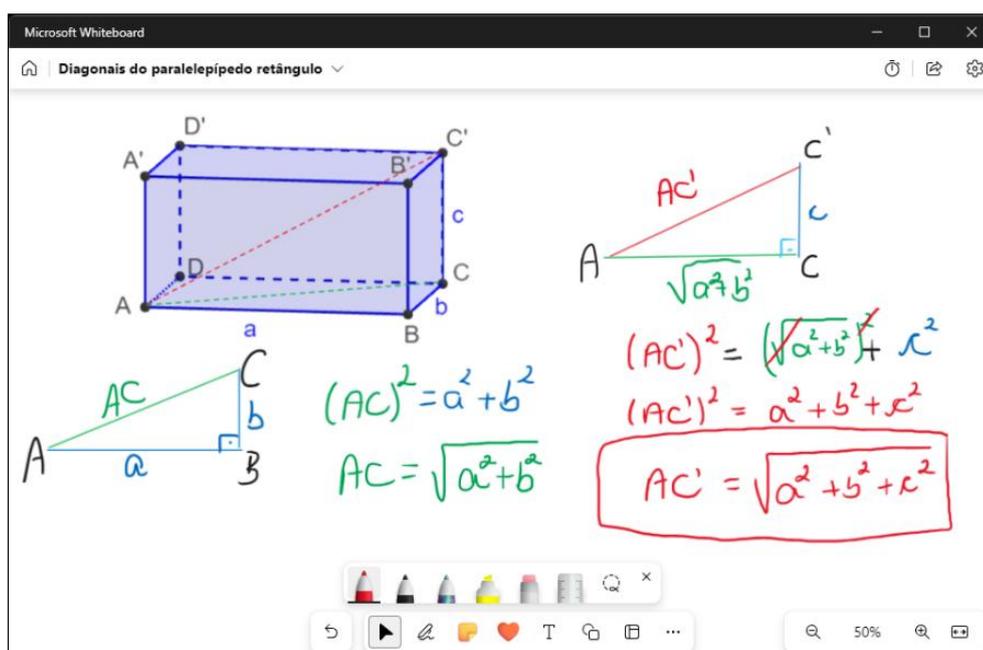
Figura 65 – Cálculo da diagonal AC



Fonte: o autor

Em seguida, desenhando separadamente o triângulo ACC' pode-se notar que também se trata de um triângulo retângulo, poderão novamente aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar a medida da diagonal AC', deduzindo, assim, a fórmula para o cálculo da área do paralelepípedo retângulo, conforme mostrado na Figura 66.

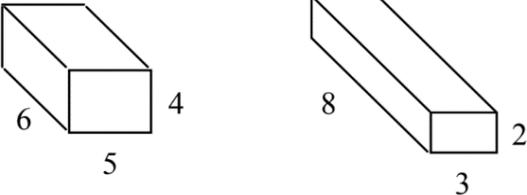
Figura 66 – Cálculo da diagonal AC'



Fonte: o autor

A fim de complementar a Tarefa 4.B, seguimos para a **Tarefa 4.C**, proposta por Cunha, *et al*, (1998), no livro “Histórias de investigações matemáticas”, intitulado “Um problema com muitas soluções”.

Tarefa 4.C:

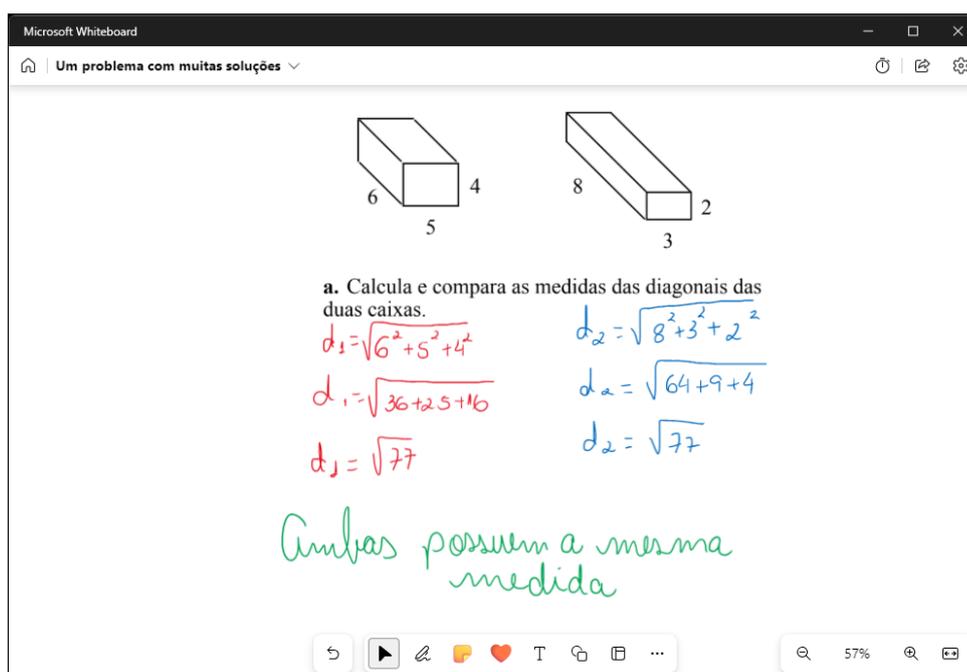


a) Calcula e compara as medidas das diagonais das duas caixas.
b) Encontra as dimensões de outros pares de caixas cujas medidas das arestas sejam números inteiros e tenham diagonais com o mesmo comprimento. Há pelo menos mais três soluções com dimensões inferiores a 10 unidades.

Fonte: Cunha, *et al*, 1998, p. 90

Sabendo as medidas das dimensões de cada caixa e conhecendo agora a fórmula para o cálculo da diagonal do paralelepípedo, os estudantes poderão facilmente resolver o item a. Uma possível resolução é mostrada na Figura 67.

Figura 67 – Cálculo das diagonais das caixas



a. Calcula e compara as medidas das diagonais das duas caixas.

$$d_1 = \sqrt{6^2 + 5^2 + 4^2}$$

$$d_1 = \sqrt{36 + 25 + 16}$$

$$d_1 = \sqrt{77}$$

$$d_2 = \sqrt{8^2 + 3^2 + 2^2}$$

$$d_2 = \sqrt{64 + 9 + 4}$$

$$d_2 = \sqrt{77}$$

Ambas possuem a mesma medida

Fonte: o autor

Uma possível maneira de resolver o item b do problema seria calcular as diagonais de todas as caixas com arestas inteiras menores do que 10 e verificar quais têm a mesma medida, mas seria muito trabalhoso calcular e comparar todas as possibilidades.

Porém, uma vez que o problema nos informa que há ao menos mais três soluções e pede para encontrar outros pares de caixas cujas diagonais possuam a mesma medida, não precisaremos encontrar todas as soluções possíveis, mas pelo menos mais três como informado no enunciado.

Note que, como as diagonais das caixas devem ter a mesma medida, as somas dos quadrados das medidas das arestas correspondentes às suas três dimensões também deverão ser numericamente iguais. Assim, para resolver o problema, basta determinar dois trios de quadrados entre 1^2 e 9^2 , cujas somas sejam iguais. A solução do problema será composta pelas bases desses quadrados.

Para isso podemos inicialmente verificar se há dois pares diferentes de quadrados cujas somas sejam iguais. Havendo esses dois pares, basta então somar um outro quadrado a esses pares para obtermos os trios que procuramos.

Podemos orientar os estudantes para que organizem as informações numa tabela, colocando os quadrados à esquerda e acima e preenchendo o interior da tabela com a soma dos respectivos quadrados da linha e da coluna.

A Figura 68 traz um exemplo de como podemos organizar essa tabela.

Figura 68 – Tabela para preencher com a soma de dois quadrados

Microsoft Whiteboard

Um problema com muitas soluções

b. Encontra as dimensões de outros pares de caixas cujas medidas das arestas sejam números inteiros e tenham diagonais com o mesmo comprimento. Há pelo menos mais três soluções com dimensões inferiores a 10 unidades.

das
2
-4

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	1									
2	4									
3	9									
4	16									
5	25									
6	36									
7	49									
8	64									
9	81									

Fonte: o autor

Note que na tabela não há necessidade de preencher os espaços com fundo cinza pois os resultados são simétricos em relação à diagonal principal da tabela.

Neste contexto, podemos mais uma vez aproveitar a capacidade de trabalho colaborativo oferecida pelo Microsoft Whiteboard, sendo particularmente útil para acelerar o processo de preenchimento da tabela. Podemos solicitar que cada estudante acesse a tabela e preencha uma parte. Dessa forma, cada estudante contribui individualmente para o trabalho coletivo, tornando o processo mais eficiente e participativo.

Após preencher todas as somas, basta verificar se há alguma que se repete sendo que, nesse caso, encontramos três pares de quadrados com a mesma soma, $5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 = 50$, $7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 = 65$ e $7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 = 85$, conforme vemos na Figura 69.

Figura 69 – Tabela com a soma de dois quadrados preenchida

Microsoft Whiteboard

Um problema com muitas soluções

b. Encontra as dimensões de outros pares de caixas cujas medidas das arestas sejam números inteiros e tenham diagonais com o mesmo comprimento. Há pelo menos mais três soluções com dimensões inferiores a 10 unidades.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
2	4		8	13	20	29	40	53	68	85
3	9			18	25	34	45	58	73	90
4	16				32	41	52	65	80	97
5	25					50	61	74	89	106
6	36						72	85	100	117
7	49							98	113	130
8	64								128	145
9	81									162

$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 = 50$
 $7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 = 65$
 $7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 = 85$

Fonte: o autor

Por fim, basta somarmos a esses pares um outro quadrado de 1^2 a 9^2 para obtermos os dois trios de quadrados que estamos procurando.

Escrever todas essas somas em uma lousa tradicional seria muito dispendioso, mas com a lousa digital podemos simplificar, e muito, esse trabalho. Para isso, basta escrever uma única vez as parcelas da soma que se repetirão em todas as expressões deixando um espaço para acrescentar o quadrado que será somado, duplicar essa expressão diversas vezes, totalizando nove e depois completá-las com os quadrados de 1^2 a 9^2 .

Na Figura 70 podemos ver como ficaria as expressões, apenas com as parcelas comuns a todas elas, prontas para acrescentar os demais quadrados e o resultado da operação.

Figura 70 – Expressões com as parcelas comuns

The screenshot shows a Microsoft Whiteboard window titled "Um problema com muitas soluções". At the top, there is a table with the following values:

9	81									162
---	----	--	--	--	--	--	--	--	--	-----

Below the table, there are ten rows of handwritten equations in red ink:

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

$$5^2 + 5^2 + \quad = 7^2 + 1^2 + \quad =$$

The whiteboard interface includes a toolbar at the bottom with various drawing tools and a search bar showing "57%".

Fonte: o autor

Feito isso, é só acrescentar os quadrados faltantes em cada linha e completar com o resultado, conforme mostrado na Figura 71.

Figura 71 – Pares de trios diferentes de quadrados cujas somas são iguais

The screenshot shows a Microsoft Whiteboard window titled "Um problema com muitas soluções". At the top, there is a table with the following values:

7	49					70	115	190
8	64						128	145
9	81							162

Below the table, there are ten rows of handwritten equations in red ink, showing the completion of the sums from Figure 70:

$$5^2 + 5^2 + 1^2 = 7^2 + 1^2 + 1^2 = 51$$

$$5^2 + 5^2 + 2^2 = 7^2 + 1^2 + 2^2 = 54$$

$$5^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 1^2 + 3^2 = 59$$

$$5^2 + 5^2 + 4^2 = 7^2 + 1^2 + 4^2 = 66$$

$$5^2 + 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 + 5^2 = 75$$

$$5^2 + 5^2 + 6^2 = 7^2 + 1^2 + 6^2 = 86$$

$$5^2 + 5^2 + 7^2 = 7^2 + 1^2 + 7^2 = 99$$

$$5^2 + 5^2 + 8^2 = 7^2 + 1^2 + 8^2 = 114$$

$$5^2 + 5^2 + 9^2 = 7^2 + 1^2 + 9^2 = 131$$

The whiteboard interface includes a toolbar at the bottom with various drawing tools and a search bar showing "54%".

Fonte: o autor

Novamente os estudantes podem trabalhar em equipe, de maneira colaborativa para agilizar a resolução da tarefa.

Figura 72 – Algumas soluções para o problema da diagonal das caixas

Microsoft Whiteboard

Um problema com muitas soluções

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
2	4		8	13	20	29	40	53	68	85
3	9			18	25	34	45	58	73	90
4	16				32	41	52	65	80	97
5	25					50	61	74	89	106
6	36						72	85	100	117
7	49							98	113	130
8	64								128	145
9	81									162

$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 = 50$
 $7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 = 65$
 $7^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 = 85$

$5^2 + 5^2 + 1^2 = 7^2 + 1^2 + 1^2 = 51$
 $5^2 + 5^2 + 2^2 = 7^2 + 1^2 + 2^2 = 54$
 $5^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 1^2 + 3^2 = 59$
 $5^2 + 5^2 + 4^2 = 7^2 + 1^2 + 4^2 = 66$
 $5^2 + 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 + 5^2 = 75$
 $5^2 + 5^2 + 6^2 = 7^2 + 1^2 + 6^2 = 86$
 $5^2 + 5^2 + 7^2 = 7^2 + 1^2 + 7^2 = 99$
 $5^2 + 5^2 + 8^2 = 7^2 + 1^2 + 8^2 = 114$
 $5^2 + 5^2 + 9^2 = 7^2 + 1^2 + 9^2 = 131$

$7^2 + 4^2 + 1^2 = 8^2 + 1^2 + 1^2 = 66$
 $7^2 + 4^2 + 2^2 = 8^2 + 1^2 + 2^2 = 69$
 $7^2 + 4^2 + 3^2 = 8^2 + 1^2 + 3^2 = 74$
 $7^2 + 4^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 + 4^2 = 81$
 $7^2 + 4^2 + 5^2 = 8^2 + 1^2 + 5^2 = 90$
 $7^2 + 4^2 + 6^2 = 8^2 + 1^2 + 6^2 = 101$
 $7^2 + 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2 + 7^2 = 114$
 $7^2 + 4^2 + 8^2 = 8^2 + 1^2 + 8^2 = 129$
 $7^2 + 4^2 + 9^2 = 8^2 + 1^2 + 9^2 = 146$

$7^2 + 6^2 + 1^2 = 9^2 + 2^2 + 1^2 = 86$
 $7^2 + 6^2 + 2^2 = 9^2 + 2^2 + 2^2 = 89$
 $7^2 + 6^2 + 3^2 = 9^2 + 2^2 + 3^2 = 94$
 $7^2 + 6^2 + 4^2 = 9^2 + 2^2 + 4^2 = 101$
 $7^2 + 6^2 + 5^2 = 9^2 + 2^2 + 5^2 = 110$
 $7^2 + 6^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 + 6^2 = 121$
 $7^2 + 6^2 + 7^2 = 9^2 + 2^2 + 7^2 = 134$
 $7^2 + 6^2 + 8^2 = 9^2 + 2^2 + 8^2 = 149$
 $7^2 + 6^2 + 9^2 = 9^2 + 2^2 + 9^2 = 166$

Fonte: o autor

Dessa forma, obtemos mais que três soluções para o problema.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O mote para o desenvolvimento desta proposta foi discutir e apresentar uma proposta de ensino utilizando a lousa digital e o GeoGebra como ferramentas potenciais para o ensino de Geometria Espacial, trazendo ideias que podem servir como inspiração para o professor e tarefas que podem ser exploradas com os estudantes em sala de aula.

Com propósito de desenvolver tópicos importantes do conteúdo de Geometria Espacial, foram apresentadas e exploradas quatro tarefas que ilustram como utilizar a lousa digital, o GeoGebra e outros softwares gratuitos (Xournal++, OpenBoard e Microsoft Whiteboard) nas aulas de matemática.

No desenrolar das tarefas pode-se observar várias possibilidades de utilização da lousa digital em comparação à utilização de uma lousa tradicional. Podemos enumerá-las:

- representação precisa do poliedro;
- visualização do poliedro de vários pontos de vista;
- movimentos na planificação de um poliedro;
- utilização de cálculos recorrentes;
- trabalho colaborativo em uma mesma tarefa por meio de dispositivos móveis;
- facilidade na reorganização e/ou correção de informações presentes na lousa, sem a necessidade de apagar e inseri-las novamente;
- armazenamento das anotações feitas durante a aula;
- exportação e compartilhamento de conteúdo;
- visualização das diagonais das faces e dos prismas;
- visualização do apótema e da altura em representações de pirâmides;
- apresentação dos resultados dos cálculos de medidas de áreas e volumes realizados pelo GeoGebra.

Na tarefa 1 foram explorados os conceitos de vértice, aresta e face e formalizada a definição de poliedro.

Na tarefa 2 foram abordadas a planificação, o cálculo de área e de volume de prismas.

Na tarefa 3 foram abordados os cálculos de área e de volume de pirâmides.

Na tarefa 4 foi explorada a possibilidade de apresentar o conteúdo de maneira interativa e dinâmica, e a colaboração entre os estudantes.

Foi possível constatar que assim como a lousa tradicional, a lousa digital pode ser usada para simples escrita, nela o professor pode realizar cálculos matemáticos e resolver problemas. Porém a lousa digital exibe com mais clareza e exatidão gráficos, fórmulas e outros elementos visualmente complexos (planificação, alturas, apótema, diagonais, entre outros – tarefa 2, 3, 4) o que pode favorecer a aprendizagem.

Estamos imersos em uma era digital na qual a tecnologia está em constante evolução e permeia quase todos os aspectos de nossas vidas. A tecnologia tem um papel fundamental desde a maneira como nos comunicamos até a forma como trabalhamos, aprendemos e nos divertimos.

As TD, quando usadas de maneira apropriada, podem oferecer várias possibilidades de forma dinâmica e interativa para os processos de ensino e de aprendizagem, permitindo que os estudantes aprendam no seu próprio ritmo e de acordo com suas necessidades.

Além disso, as TD podem proporcionar aos estudantes acesso a uma infinidade de recursos e informações, ampliando suas oportunidades na construção do conhecimento.

Nesse cenário é importante e essencial que a educação contemple as inovações tecnológicas. As instituições de ensino devem buscar maneiras de integrar essas tecnologias ao processo educacional, a fim de enriquecer a experiência de aprendizagem dos estudantes.

Softwares como o GeoGebra, por exemplo, são ferramentas que oferecem diversas funcionalidades e facilitam a compreensão dos mais diversos conceitos matemáticos, promovendo aulas mais dinâmicas.

A lousa digital é uma das várias TD que está cada vez mais presente na educação. Além de funcionar como uma lousa tradicional, ela permite a utilização de recursos interativos, como imagens, vídeos e aplicativos, durante a aula. Ela tem o potencial de tornar as aulas mais dinâmicas, interessantes e produtivas, pois pode tornar a sala de aula um espaço de aprendizado cooperativo e interativo.

Podemos inferir que a lousa digital também pode servir como um estímulo para os professores mais tradicionais, que às vezes não se sentem confortáveis em utilizar ferramentas digitais, possibilitando um repensar das suas práticas, pois se assemelha

muito a uma lousa tradicional, proporcionando-lhes maior confiança no uso de ferramentas digitais.

Constatamos também, que além de favorecer a prática do professor, a lousa digital contribui para a prevenção de problemas de saúde do professor, ela reduz a necessidade de estender o braço para escrever em áreas altas minimizando assim problemas relacionados à postura e ao esforço físico.

A construção desse trabalho permitiu entender que a lousa digital ou qualquer outra tecnologia, por si só, não é solução para os desafios da educação e que é importante usá-las de forma estratégica e complementar e ainda que o professor continua sendo essencial para os processos de ensino e de aprendizagem.

O PROFMAT teve um impacto significativo em minha carreira como professor de Matemática na rede pública. Ao longo do curso, tive a oportunidade de rever e consolidar conhecimentos fundamentais da matemática, o que me possibilitou uma melhor aplicação desses conteúdos em sala de aula. Essa experiência não só aprimorou meu domínio sobre os temas trabalhado, mas também proporcionou novas abordagens que enriqueceram minha prática docente.

REFERÊNCIAS

- ANTONIO, José Carlos. A lousa digital interativa chegou! E agora?, Professor Digital, 2012. Disponível em <https://professordigital.wordpress.com/2012/08/01/a-lousa-digital-interativa-chegou-e-agora/>.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula é internet em movimento** - 2. ed. - Belo Horizonte : Autêntica Editora, 2018, (Coleção Tendências em Educação Matemática)
- BRASIL, Base Nacional Comum Curricular. **Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no contexto escolar: possibilidades**. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/193-tecnologias-digitais-da-informacao-e-comunicacao-no-contexto-escolar-possibilidades>. Acesso em 13 jan. 2023.
- CARNEIRO, Auner Pereira; FIGUEIREDO, Ismérie Salles de Souza; LADEIRA, Thalles Azevedo. A importância das tecnologias digitais na Educação e seus desafios. Revista Educação Pública, v. 20, nº 35, 15 de setembro de 2020. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/35/joseph-a-importancia-das-tecnologias-digitais-na-educacao-e-seus-desafios-a-educacao-na-era-da-informacao-e-da-cibercultura>
- CARVALHO, Marizete Nink de. **As potencialidades do uso da lousa digital no ensino de matemática**. 2014. 104f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2014.
- COSTA, Renata. Como funciona uma lousa digital? Nova Escola, 2009. Disponível em <https://novaescola.org.br/conteudo/1487/como-funciona-uma-lousa-digital>
- COUTO, Monique Andrade da Conceição. **Resolução de Problemas de Análise Combinatória e aplicação na Lousa Digital**. 2019. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.
- DA CRUZ, Keyte Rocha. Uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática: desafios em tempos de crise de COVID-19. **Rebena - Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**, [S. l.], v. 6, p. 42–55, 2023. Disponível em: <https://rebena.emnuvens.com.br/revista/article/view/96>. Acesso em: 1 fev. 2024.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contextos e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.
- DINIZ, Cristiane Straioto, A lousa digital como ferramenta pedagógica na visão de professores de matemática. Curitiba, 2015.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**. Vol. 10. - 7. ed. - São Paulo: Atual, 2013.

DUTRA, Denise; STECCA, Elaine Jaqueline; PEREIRA, Priscilla Fracalossi Riguetti; SIQUEIRA, Claudia Patrícia Cardoso Martins. Prevalência de algias nos ombros em professores da rede municipal de ensino fundamental de Umuarama – PR no ano de 2004. **Arquivos de Ciências da Saúde da UNIPAR**, [S. l.], v. 9, n. 2, 2008.

Disponível em: <https://revistas.unipar.br/index.php/saude/article/view/202>. Acesso em: 31 jan. 2024.

FEITOSA, Wladimir Nascimento; PINTO, Jacyguara Costa. Software educativo para ensino e aprendizagem de Matemática e seus usos no Ensino Médio. **Rebena - Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**, [S. l.], v. 6, p. 437–452, 2023.

Disponível em: <https://rebena.emnuvens.com.br/revista/article/view/125>. Acesso em: 1 fev. 2024.

GLADCHEF, Ana Paula; ZUFFI, Edna Maura e SILVA, Dilma Menezes da. Um Instrumento para avaliação da Qualidade de Softwares Educacionais de Matemática para o Ensino Fundamental. In: VII Workshop de Informática na Escola, 2001, Fortaleza – CE. **Anais**. Disponível em: <https://f7e265abd2.cbau-cdnwnd.com/c4a712071083033d0a0ef1a595b0e0bf/200000055-65616665b6/Avalia%C3%A7%C3%A3o%20de%20software%20educativo%20para%20o%20ensino%20da%20matem%C3%A1tica%20do%20fundamental.PDF> Acesso em: 13. dezembro. 2023.

GOBBI, Maria Cristina; BERNARDINI, Gleice. Interatividade: um conceito além da internet. **Revista GEMINIS**, [S. l.], v. 4, n. 2, p. 42–56, 2013. Disponível em: <https://www.revistageminis.ufscar.br/index.php/geminis/article/view/143>. Acesso em: 12 fev. 2024.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. São Paulo: Papirus Editora, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A matemática do ensino médio – volume 2*. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOBATO, Lydia Fernandes. Desafios do ensino de geometria no ensino médio. 2019. 13 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em docência do ensino de Matemática) - Instituto Federal do Piauí - Campus Corrente, Corrente, 2019. <http://bia.ifpi.edu.br:8080/jspui/handle/123456789/582>

MELHADO, Elaine Eskildssen. A percepção dos professores a respeito do uso de lousas digitais interativas no ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. [s.d.]. Disponível em http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_elaine_eskildssen.pdf

MELO, Thiago Lessa dos Santos. **O uso da lousa digital na construção do conhecimento matemático**. 2019. 73f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018.

MORAN, José Manuel; SILVA, Maria da Graça Moreira da; ALMEIDA; Maria Elizabeth B. de; PRADO; Maria Elisabette B. Brito. *Mídias na educação*. Disponível

em http://penta3.ufrgs.br/MEC-CicloAvan/integracao_midias/modulos/1_introdutorio/etapa_1/p1_02.html. Acesso em: 13 dez. 2023.

MOREIRA, Marília Maia; ROCHA, Elizabeth Matos. Softwares educativos para o ensino de geometria espacial. Iguatu, CE : Quipá Editora, 2022.

PONTE, João Pedro, et al. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Uma abordagem analítica da interpolação polinomial em um ambiente computacional: uma experiência prática no processo de ensino e aprendizagem de matemática na Educação Técnica. **Revista Thema**, Pelotas, v. 16, n. 1, p. 42–49, 2019. DOI: 10.15536/thema.16.2019.42-49.1100. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1100>. Acesso em: 2 fev. 2024.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades. 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf> . Acesso em: 08 jul. 2014.

SANTOS, Cintia Melo dos; NEVES, Tatiani Garcia; TOGURA, Tiaki Cintia Faoro. As tecnologias digitais no ensino de matemática: Uma análise das práticas pedagógicas e dos objetos educacionais digitais. SBEM, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5245_2978_ID.pdf. Acesso em: 26 de outubro de 2023.

SANTOS, Cimara Pereira dos; NICOT, Yuri Expósito. A interatividade no processo de ensino e aprendizagem de ciências. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 8, n. 3, p. 98–112, 7 set. 2020.

SOARES, Magda. **O livro didático e a escolarização da leitura**, disponível em: <http://entrevistasbrasil.blogspot.com.br/2008/10/magda-soares-o-livro-diditico-e.html>. 2008. Acesso: 15. dezembro. 2023.

SOUZA, Marthonni Wandré dos Santos. **Lousa digital no ensino de matemática**. 2015. 76. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

TECNOLOGIA, In: Glossário TDICs Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação. Disponível em: <https://www.tdics.epsjv.fiocruz.br/glossario/tecnologia#>>. Acesso em: 08 fev. 2024.

TECNOLOGIA, In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Aurélio Júnior: dicionário escolar da língua portuguesa. 2ª edição. Curitiba: Positivo, 2011.

TONELLI, Elizangela da Silva; SOUSA, Maria Aparecida Silva de; CORADINI, Alef Barbosa. Inclusão digital: Acervo e desafios do uso tics no espaço educacional público. *Revista de Pesquisa Interdisciplinar*, v. 1, p. 297–306, 2016. Edição Especial.

UNESCO. 2023. Global Education Monitoring Report 2023: Technology in education – A tool on whose terms? Paris, UNESCO. Disponível em <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000385723>

VERASZTO, Estéfano Vizconde et al. Tecnologia: buscando uma definição para o conceito, Revista Prisma, com, n. 7, p. 60-84, 2008.