

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Um estudo sobre grafos e sua aplicabilidade no ensino médio

Diego Scanavachi Custodio

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Diego Scanavachi Custodio

Um estudo sobre grafos e sua aplicabilidade no ensino médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Wagner Leite Vieira Nunes

USP – São Carlos
Junho de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S987e Scanavachi Custodio, Diego
Um estudo sobre grafos e sua aplicabilidade no
ensino médio / Diego Scanavachi Custodio;
orientador Wagner Vieira Leite Nunes. -- São
Carlos, 2025.
110 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2025.

1. Grafos. 2. Ensino de Matemática. 3. Matriz de
Adjacência. 4. Pensamento Crítico. 5. Educação
Matemática. I. Vieira Leite Nunes, Wagner, orient.
II. Título.

Diego Scanavachi Custodio

**A study on graphs and their applicability in high school
education**

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Wagner Leite Vieira Nunes

**USP – São Carlos
June 2025**

*Este trabalho
é dedicado à minha avó Isaura Fava Scanavachi (in memoriam),
que sempre acreditou em mim e me deu forças pra continuar.
Também dedico à minha família e todos os bons professores.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus avós, que, mesmo in memoriam, continuam sendo uma fonte de inspiração e força em minha vida. Suas histórias, valores e amor deixaram marcas profundas que me acompanham em cada etapa.

À minha família, minha base e meu alicerce. À minha mãe, Vilani Scanavachi, por seu amor incondicional, por sempre acreditar em mim e por ser minha maior incentivadora. À minha tia Ana Alice Scanavachi, pela constante presença, carinho e apoio ao longo dessa trajetória. À minha irmã Daiane Scanavachi Custódio e ao meu cunhado Rafael Pacela, por serem exemplos de união e cumplicidade. Aos meus primos Victor Hugo Scanavachi e Rebecca Monteiro, pela alegria e por compartilharem comigo momentos inesquecíveis.

Aos meus amigos, Samuel Pereira de Lima, Éder Bernardes da Silva e Bárbara Fonseca Sobral, por todo o suporte e companheirismo e por tornarem esta jornada mais leve e prazerosa. A amizade de vocês é muito importante pra mim.

Ao meu orientador, professor Wagner Vieira Leite Nunes, por sua orientação, pela paciência e por acreditar no potencial deste trabalho. Sua dedicação e conhecimento foram fundamentais para que esta dissertação se tornasse realidade.

A banca examinadora, professor Paulo Leandro Dattori da Silva, professor Pedro Luiz Aparecido Malagutti e ao professor Tomas Edson Barros por disponibilizar um pouco do seu tempo para avaliar esse trabalho.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro que possibilitou a realização deste mestrado. Ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) e à Universidade de São Paulo (USP), por oferecerem um ambiente acadêmico de excelência que me proporcionou crescimento profissional e pessoal.

Agradeço aos professores do programa PROFMAT, professor Hermano de Souza Ribeiro, novamente ao professor Paulo Leandro Dattori da Silva pelas aulas, pelos ensinamentos e pela paciência.

Agradeço a Suyara Vergara Emboaba por todas as palavras de apoio, por todo o carinho e por acreditar nas minhas capacidades.

Agradeço também a minha colega de turma, Daniela Naves de Souza, pela ajuda e pelos momentos de estudos para o Exame Nacional de Qualificação, sem você não seria possível.

Também registro meus agradecimentos aos coordenadores do programa de pós-graduação

do PROFMAT, professor Sérgio Luis Zani, que também foi meu professor, e a professora Regilene Delazani dos Santos Oliveira, pelo trabalho incansável e pelo suporte aos alunos.

Também quero agradecer ao Matheus Machado Garcia que me ajudou com o Overleaf para que eu pudesse escrever essa dissertação. Muito obrigado.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, meu mais sincero agradecimento. Sem vocês, esta conquista não teria sido possível.

*“Só existe saber na invenção, na reinvenção,
na busca inquieta, impaciente, permanente,
que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros”
(Paulo Freire)*

RESUMO

CUSTODIO, D. S. **Um estudo sobre grafos e sua aplicabilidade no ensino médio.** 2025. 110 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

O presente estudo visa discorrer sobre a teoria dos grafos e suas aplicações teórico-metodológicas no ensino médio, destacando sua importância como ferramenta matemática e material pedagógico. Percorrendo desde os conceitos fundamentais até as aplicações práticas, este trabalho buscou investigar como os grafos podem ser utilizados para modelar problemas e facilitar o ensino de conceitos teóricos abstratos, facilitando a aprendizagem de alunos que têm maior facilidade na aquisição de conhecimentos não tão teóricos, especialmente na matemática. Ademais, este estudo apresenta atividades didáticas e análises de estratégias pedagógicas que servem de modelo para alcançar um possível aperfeiçoamento do raciocínio lógico e pensamento crítico dos estudantes. Por meio de exemplos clássicos, como o problema das sete pontes de Königsberg e outras ferramentas matemáticas, como a matriz de adjacência, esta dissertação buscou demonstrar o potencial dos grafos como enriquecedor do processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Ensino de Matemática, Matriz de Adjacência, Pensamento Crítico, Educação Matemática.

ABSTRACT

CUSTODIO, D. S. **A study on graphs and their applicability in high school education.** 2025. 110 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

This study aims to discuss graph theory and its theoretical and methodological applications in high school education, highlighting its importance as a mathematical tool and supplementary didactic material. Covering fundamental concepts to practical applications, this study sought to investigate how graphs can be used to model problems and facilitate the teaching of abstract theoretical concepts, thus aiding the learning process for students who find it easier to acquire less theoretical knowledge, especially in mathematics. Furthermore, this study presents didactic activities and analyses of pedagogical strategies that serve as models to enhance student's logical reasoning and critical thinking. Through classical examples, such as the Seven Bridges of Königsberg problem, and other mathematical tools like the adjacency matrix, this dissertation aimed to demonstrate the potential of graphs in enriching the teaching-learning process.

Keywords: Graph Theory, Mathematics Education, Adjacency Matrix, Critical Thinking, Mathematical Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tempo de resposta entre os alunos	24
Figura 2 – Figura a ser reproduzida	25
Figura 3 – Pontes de Königsberg (WIKIPEDIA, 2025)	26
Figura 4 – Grafo G , grafo H e grafo I	28
Figura 5 – Grafo G - Matriz de adjacência	32
Figura 6 – Grau do vértice v_1 do grafo J	35
Figura 7 – Grafo G e grafo H	37
Figura 8 – Isomorfismo entre os grafos G e H	37
Figura 9 – Os grafos G e H são isomorfos?	39
Figura 10 – Vizinhança de V_1 no Grafo G	41
Figura 11 – Grafo G e associação ao conjunto X	42
Figura 12 – Passeio no grafo G	43
Figura 13 – Caminho no grafo G	45
Figura 14 – Grafos C_3 , C_4 , C_5 e C_6	46
Figura 15 – Grafos G , H e I	47
Figura 16 – Grafos G conexo	49
Figura 17 – Grafos H Não conexo	49
Figura 18 – Subgrafos H_1 e H_2 maximais	51
Figura 19 – Componentes conexas do grafo G	54
Figura 20 – Grafo G - Árvore e grafo H - Floresta	55
Figura 21 – Grafo G - Direcionado e grafo H - Ponderado	60
Figura 22 – Árvore geradora do grafo G	62
Figura 23 – Árvore geradora do grafo G - 1	63
Figura 24 – Árvore geradora do grafo G - 2	64
Figura 25 – Árvore geradora do grafo G - 3	64
Figura 26 – Árvore geradora do grafo G - 4	65
Figura 27 – Árvore geradora do grafo G - 5	65
Figura 28 – Árvore geradora do grafo G - 6	66
Figura 29 – Árvore geradora do grafo G - 7	66
Figura 30 – Árvore geradora do grafo G - 8	67
Figura 31 – Grafo não direcionado e não ponderado G	70
Figura 32 – Conjuntos independentes no grafo G	70
Figura 33 – Grafo G planar maximal com 4 vértices	71

Figura 34 – Exemplo de grafo planar maximal	72
Figura 35 – Grafo G - Planar e conexo	73
Figura 36 – Grafo G' - Sem o vértice v_1	74
Figura 37 – Grafo G - Com $K + 1$ arestas e grau maior que 1	75
Figura 38 – Grafo G' - Sem a aresta v_1v_2	75
Figura 39 – Grafos associados aos poliedros platônicos	76
Figura 40 – Grafos planares de cada poliedro platônico	77
Figura 41 – Mapa geográfico da região de São Carlos	77
Figura 42 – Mapa geográfico da região de São Carlos	78
Figura 43 – Grafo G - Grafo trivial	81
Figura 44 – Grafo G - Encontre uma coloração válida	81
Figura 45 – Grafo G - Grafo com coloração válida	82
Figura 46 – Grafo G - Não direcionado	82
Figura 47 – Grafo G - Colorido	83
Figura 48 – Grafo T - Encontre o grafo complementar	83
Figura 49 – Grafo T' - Grafo complementar de T	84
Figura 50 – Grafo G - Grafo com vértices adjacentes a v	86
Figura 51 – Grafo G e os grafos das arestas de G (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; KOHAYAKAWA, 2011)	87
Figura 52 – Vértices do grafo de tempo de resposta	93
Figura 53 – Exemplo de figura a ser reproduzida	95
Figura 54 – Exemplo de figura a ser reproduzida	96
Figura 55 – Vértices do grafos ser reproduzido	96
Figura 56 – Ligando o vértice A ao vértice B	97
Figura 57 – Ligando o vértice B ao vértice C	97
Figura 58 – Ligando o vértice C ao vértice D	98
Figura 59 – Ligando o vértice D ao vértice E	98
Figura 60 – Ligando o vértice E ao vértice A	99
Figura 61 – Ligando o vértice A ao vértice D	99
Figura 62 – Ligando o vértice D ao vértice B	100
Figura 63 – Ligando o vértice B ao vértice E	100
Figura 64 – Pontes de Königsberg - Resolução	101
Figura 65 – Pontes de Königsberg com vértices	102

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Contexto Geral	20
1.2	Contexto Específico	20
1.3	Objetivos da Dissertação	21
1.4	Estrutura da Dissertação	21
2	ATIVIDADES	23
2.1	Exemplos	23
3	TEORIA DOS GRAFOS	27
3.1	Grafos	27
3.2	Grau do vértice	30
3.3	Matriz de Adjacência	31
3.4	Isomorfismo	36
3.5	Vizinhança e corte	40
3.6	Caminhos	42
3.7	Subgrafos	47
3.8	Grafos conexos e componentes	48
3.9	Árvores	54
3.10	Árvore Geradora	59
4	SUBCONJUNTOS ESPECIAIS DE UM GRAFO	69
4.1	Conjuntos Independentes	69
4.2	Grafo Planar	71
4.3	Coloração de Grafos	80
4.4	Coloração de arestas	86
5	RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES	93
5.1	Exemplo 2.1.1	93
5.2	Exemplo 2.1.2	95
5.3	Exemplo 2.1.3	101
6	TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO	105
6.1	Vantagens da Teoria dos Grafos no Ensino	105

6.2	Metodologias de Ensino com Grafos	106
6.3	Desafios na Implementação da Teoria dos Grafos no Ensino	106
7	CONCLUSÃO	107
	REFERÊNCIAS	109

INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos é um ramo da matemática e da ciência da computação que se dedica ao estudo de estruturas compostas por vértices conectados por arestas.

Considerando o trajeto da Matemática no percurso da humanidade, podemos dizer que o desenvolvimento do ramo matemático denominado Teoria dos Grafos é relativamente recente, tendo surgido no século XVIII, se desenvolvendo desde este período e se tornando objeto de estudo desde então. A Teoria dos Grafos foi desenvolvida por Leonhard Euler em 1736, com a publicação de seu artigo na revista *Nature*, em que demonstra como a teoria é extremamente eficiente na resolução de conhecidos problemas matemáticos, especificamente o "Sete Pontes de Königsberg". A teoria proposta por Euler consiste no estudo de grafos, que podem ser definidos - de maneira sintética - como estruturas compostas por vértices que se conectam por arestas. Desde o surgimento desse campo de estudo, diversas são as aplicações e evoluções que ocorreram, tornando-se uma ferramenta crucial para a resolução de problemas complexos em diversas áreas. Atualmente, vê-se uma grande aplicabilidade computacional, como análises de redes sociais, de algoritmos específicos e utilização em instituições financeiras. Na presente pesquisa, proporemos a utilização dessa teoria no ensino de matemática na educação escolar. Para isso consideramos relevante destacar o conceito de Halté (2008), um filósofo que é considerado um dos maiores especialistas em didática e ensino da França. O autor utiliza o conceito denominado como transposição didática, que remete à proposições de Chevallard, em uma discussão que teve origem justamente no campo da matemática e consiste na "transposição do conhecimento científico, o saber sábio - para o conhecimento escolar - o saber ensinado" (RODRIGUES, 2011). Sobre os desafios do ensino na sala de aula, o filósofo francês ainda discorre:

[...] a distinção dos tipos de saber, mesmo que satisfatória para o espírito, é de uma manipulação desastrosa no espaço didático da sala de aula. A aula de leitura (ou de escrita) convoca obrigatoriamente, na sala de aula, ao mesmo tempo, saberes de todos os tipos. Arriscando um resumo abrupto, podemos afirmar que, na prática da sala de aula, o saber científico

[teorizações científicas], a prática social de referência [saberes modelizados construídos nas diferentes profissões humanas], a especialidade [saberes fortemente especializados ligados a instituições não legítimas – o rap, por exemplo] e o conhecimento [saberes instáveis, difusos, conhecimentos que cada um já tem em sua prática], estão literalmente sincretizados. E trata-se mesmo de sincretização: não se trata de dispor os diferentes componentes no tempo escolar [...] E isso, em qualquer que seja o nível escolar: [...] Sem a sincretização, o “puro” saber científico, o puro modelo das práticas, o puro saber especializado não teriam o menor sentido, nem a mínima chance de serem assimilados. (HALTÉ, 2008).

1.1 Contexto Geral

De maneira ampla, verificamos que a teoria dos grafos possui aplicações em diversas áreas de conhecimento, principalmente na computação, já citada anteriormente. No entanto, também encontramos sua utilização na biologia, logística, sociologia e matemática. A utilização dos grafos permite a modelagem e resolução de problemas de naturezas diversas, com relações entre diferentes entidades, possibilitando, assim, uma análise mais clara e precisa das estruturas e interações presentes nessas situações.

1.2 Contexto Específico

A presente pesquisa trataremos de um contexto específico que demanda urgência atualmente, o ensino de matemática na educação formal, seja no nível fundamental ou médio. É sabido que o desempenho matemático do ensino nacional anda muito abaixo da média, haja vista os dados apresentados no IDEB - Índice de desenvolvimento da Educação Básica, que demonstram que em 2023 a média de pontos no 9º ano caiu de 265,2 para 258,9, resultando em uma média de 4,3, muito abaixo da meta de 5,2 (Brasil, 2023). Outro fator que demonstra a problemática educacional é o PISA - Programa Internacional de Avaliação de Alunos, que mensura habilidades e conhecimentos dos jovens de quinze anos, cidadãos que estão nos anos finais da escolarização, verificando se estão com as capacidades educacionais mínimas para serem inseridos na sociedade. O PISA avalia três quesitos, habilidade de leitura, ciência e matemática. Na sua primeira avaliação, no ano de 2000, participaram 4.893 alunos brasileiros, que tiveram o pior desempenho dentre os 43 países que participaram da avaliação (RODRIGUES, 2011), apesar de não terem divulgado especificamente o desempenho em cada área, podemos concluir que o desempenho em matemática não deve ter sido acima do que foi reconhecido pelo IDEB. Em 2006, 57 países participaram da avaliação e o Brasil obteve a 49ª posição (BRASIL, 2024). Deste modo, vemos uma necessidade de reformulação ou alteração no ensino de matemática, é por este motivo que trataremos deste cenário no contexto específico.

1.3 Objetivos da Dissertação

Este estudo tem como objetivo principal explorar a teoria dos grafos e suas diversas aplicações no ensino. Especificamente, pretende-se:

- Analisar os conceitos fundamentais da teoria dos grafos.
- Investigar como os grafos podem ser utilizados para melhorar o ensino de matemática.
- Avaliar métodos e estratégias de ensino que utilizam grafos.
- Propor atividades e recursos didáticos baseados na teoria dos grafos.

1.4 Estrutura da Dissertação

A dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Introdução - Apresentação do tema, sua importância, e os objetivos do estudo.
- **Capítulo 2:** Atividades - Exemplos atrelados à teoria dos grafos.
- **Capítulo 3:** Teoria dos grafos - Estudo dos elementos dos grafos.
- **Capítulo 4:** Subconjuntos especiais de um grafo - Apresentação e análise de subconjuntos dos grafos.
- **Capítulo 5:** Resolução das atividades - Aplicação da teoria dos grafos para resolver as atividades do Capítulo 2.
- **Capítulo 6:** Teoria dos grafos no ensino - Avaliação dos métodos de ensino que utilizam grafos.
- **Capítulo 7:** Conclusão - Síntese das principais aplicações do estudo e sugestões de pesquisas futuras.

ATIVIDADES

2.1 Exemplos

Para iniciarmos, iremos propor algumas atividades, por meio dos seguintes exemplos:

Exemplo 2.1.1. *Problema Introdutório: Otimizando o Grupo de Estudos*

Contexto

Um grupo de 6 alunos do Ensino Médio (Ana, Bruno, Carla, Daniel, Eduarda e Felipe) precisa se organizar para um projeto de estudos coletivo. Eles decidiram que:

- *Cada aluno pode se comunicar diretamente com alguns colegas, mas não com todos (para evitar excesso de mensagens).*
- *O tempo médio de resposta entre cada par de alunos varia conforme a tabela abaixo.*

Objetivo

Determinar quais conexões devem ser mantidas para que:

- *Todos possam se comunicar (direta ou indiretamente).*
- *O tempo total de espera nas respostas seja o menor possível.*

Relação de Comunicação

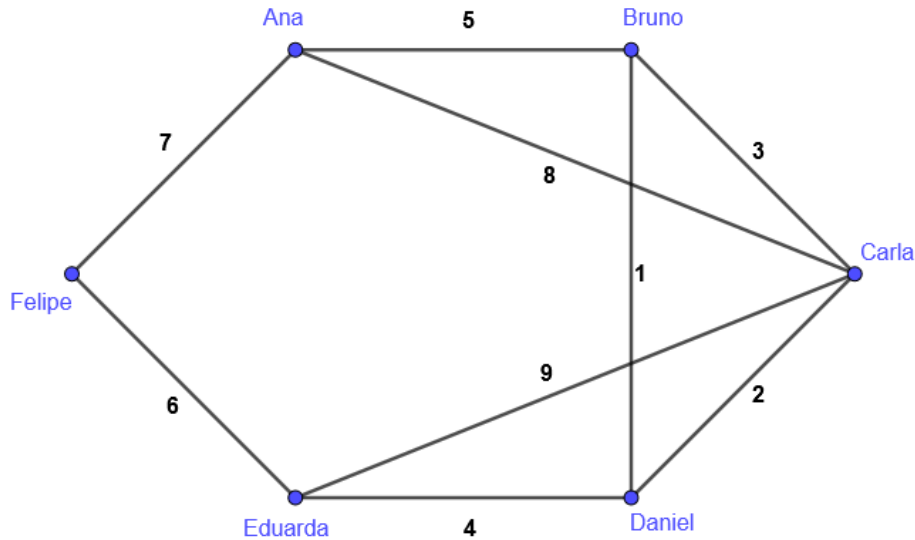


Figura 1 – Tempo de resposta entre os alunos

<i>Aluno 1</i>	<i>Aluno 2</i>	<i>Tempo (min)</i>
Ana	Bruno	5
Bruno	Carla	3
Ana	Carla	8
Carla	Daniel	2
Daniel	Eduarda	4
Eduarda	Felipe	6
Felipe	Ana	7
Bruno	Daniel	1
Carla	Eduarda	9

- Como garantir que todos se comuniquem sem repetir conexões desnecessárias?
- Qual conjunto de conexões minimiza o tempo total de espera?

Exemplo 2.1.2. A próxima atividade consiste em desenhar a figura abaixo sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes sobre a mesma linha ([JURKIEWICZ, 2009](#)).

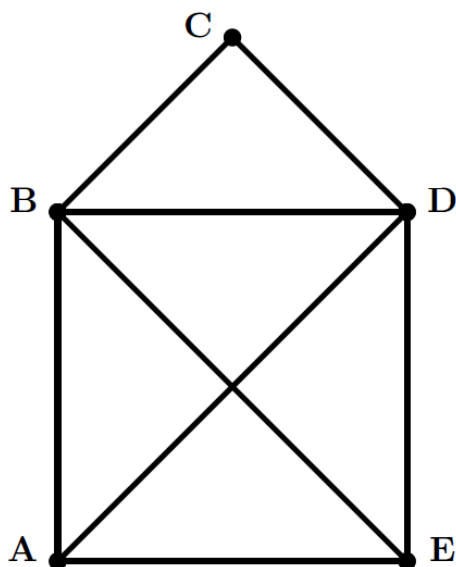


Figura 2 – Figura a ser reproduzida

Essa é uma atividade já famosa na internet e com um pouco de esforço é possível de ser concluída.

Porém caso você desejar realizar essa tarefa, partindo sempre do ponto B, não será nada fácil.

Exemplo 2.1.3. *Esse é o famoso problema das pontes de Königsberg. Imagine a seguinte situação: você mora em uma cidade cercada por um rio, como na figura abaixo. Na cidade existem sete pontes, que estão destacadas, e você precisa fazer um caminho, passando pelas sete pontes, sem passar duas vezes por uma mesma ponte. Qual caminho você faria?*

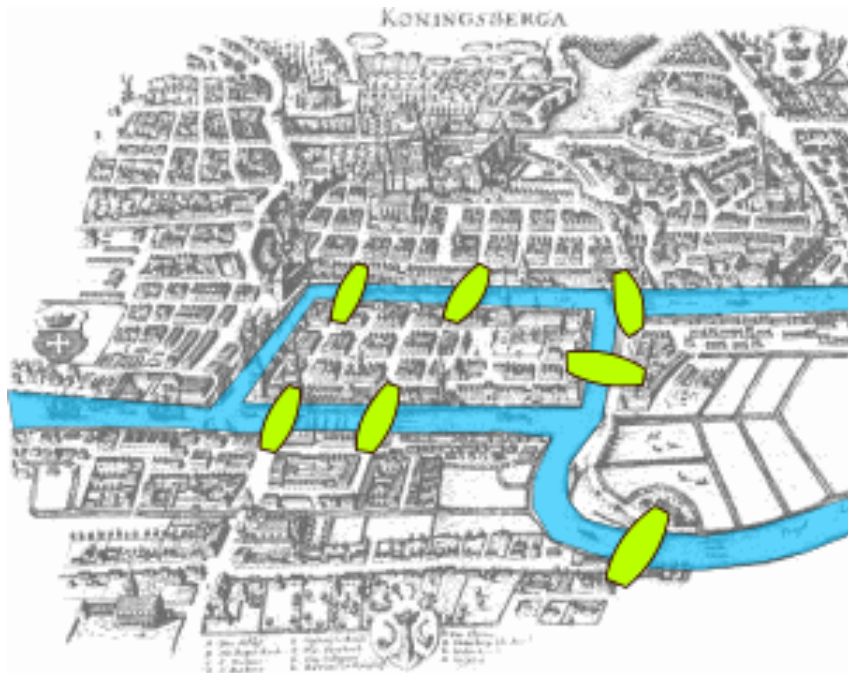


Figura 3 – Pontes de Königsberg (WIKIPEDIA, 2025)

TEORIA DOS GRAFOS

3.1 Grafos

Notação 3.1.1. Dado um conjunto V , denotaremos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não-ordenados de elementos de V .

Os elementos de $V^{(2)}$ serão identificados com todos os subconjuntos de V que têm cardinalidade 2. Assim, cada elemento de $V^{(2)}$ terá a forma $\{v, w\}$, sendo v e w dois elementos distintos de V .

Observação 3.1.1. Se V tem n elementos então $V^{(2)}$ tem

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

elementos.

Definição 3.1.1. Um **grafo** $G = (V, A)$ é uma estrutura matemática que modela relações entre objetos, onde:

- V é um conjunto não vazio de elementos chamados **vértices**;
- E é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos, chamados **arestas**.
- Uma aresta entre v e w é denotada por vw (ou wv), e dizemos que:
 - vw **incide** em v e w ;
 - v e w são **adjacentes**;
 - v e w são as **pontas** da aresta.

Observação 3.1.2.

1. Neste texto, vamos nos restringir a grafos em que o conjunto de vértices é finito.
2. Diremos que um grafo é **nulo** se ele possuir somente um vértice e consequentemente, nenhuma aresta.
3. Diremos que um grafo é **simples** se não possuir duas arestas diferentes com o mesmo par de pontas.

Tais arestas diferentes serão denominadas **arestas paralelas** (vide o grafo H no Exemplo 3.1.1).

4. Um grafo simples também não possui uma aresta com pontas coincidentes.

Tais arestas serão denominadas **laços** (vide o grafo I no Exemplo 2.1.1).

5. Muitas vezes é conveniente dar um nome ao grafo como um todo. Se o nome do grafo for G , o conjunto dos seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto das suas arestas por $A(G)$.

Exemplo 3.1.1. Abaixo temos o grafo simples G , o grafo H possui arestas paralelas e o grafo I laços

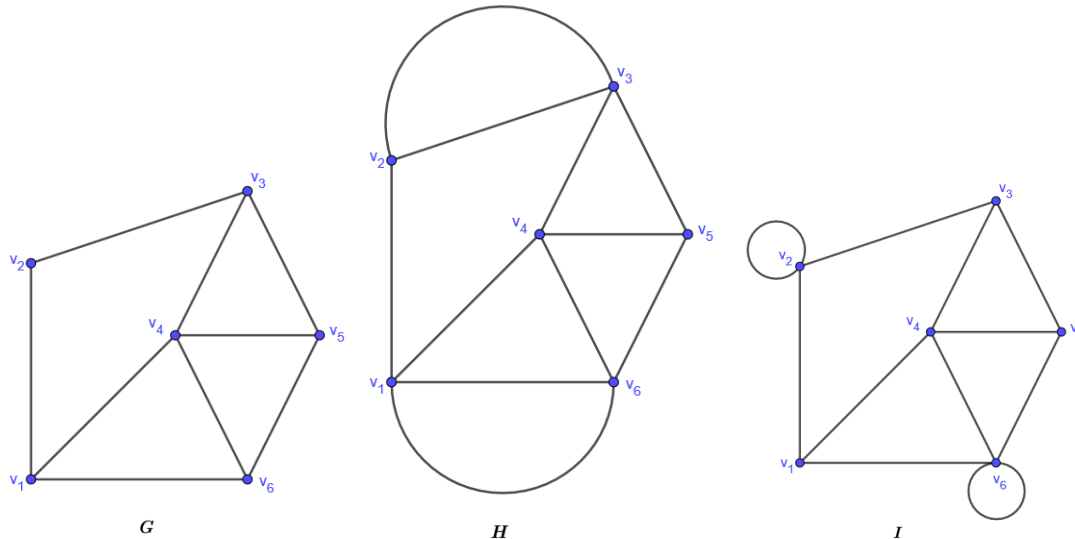


Figura 4 – Grafo G , grafo H e grafo I

Resolução 3.1.1. O grafo G é um grafo simples pois não há arestas paralelas ou vértices com laços.

O grafo H é um grafo que possui arestas paralelas que podem ser observadas entre os vértices v_2 e v_3 e entre os vértices v_1 e v_6 .

O grafo I possui no vértice v_2 , uma aresta que liga v_2 a ele mesmo (laço), o mesmo acontece no vértice v_6 .

Dessa forma, temos que o grafo G é um grafo simples, enquanto H e I não são grafos simples.

Notação 3.1.2. O número de vértices de G é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$; portanto,

$$n(G) = |V(G)| \text{ e } m(G) = |A(G)|,$$

onde $|V(G)|$ e $|A(G)|$ denotam, respectivamente, a cardinalidade (número de elementos) do conjunto de vértices e do conjunto de arestas do grafo G .

O complemento de um grafo (V, A) é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus A)$.

O complemento de um grafo G será denotado por \overline{G} .

Um grafo G é dito completo se

$$A(G) = V^{(2)}$$

onde $V^{(2)}$ denota o conjunto de todos os pares não ordenados de vértices distintos de $V(G)$ e dito vazio se

$$A(G) = \emptyset.$$

Observação 3.1.3.

- A expressão " G é um K_n " é uma abreviatura de " G é um grafo completo com n vértices".
- A expressão " G é um \overline{K}_n " é uma abreviatura de " G é um grafo vazio com n vértices".
- De forma mais simplificada, podemos dizer que um grafo é um conjunto de vértices, interconectados dois a dois por arestas ou arcos. De forma geral, todos os exemplos que introduzimos no capítulo 2 são grafos (veja 2.1).
- Voltando no Exemplo 2.1.2, os pontos A , B , C , D e E da figura são chamados de vértices e os segmentos de reta \overline{AB} , \overline{AE} , \overline{AD} são as arestas do grafo (ligando os respectivos vértices).
- Formalmente, um grafo é um conjunto de vértices (V) e um conjunto de arestas (A) constituídos por pares de vértices. É uma estrutura usada para representar um modelo em que existem relações entre os objetos de um certo conjunto.
- Pense nos vértices como "pontos". O conjunto dos vértices é o conjunto de todos os locais possíveis. Nesta analogia, os arcos (ou arestas) representam caminhos entre estes locais. O conjunto A contém todas as ligações entre os pontos.

- Utilizar grafos é de grande ajuda na representação de problemas da vida real.
- Na prática:
 - Podem ser cidades e uma rede de estradas.
 - Redes de computadores.
 - Movimentos de um cavalo em um tabuleiro de xadrez podem ser representados através de um grafo.
 - Linhas de metrô das grandes cidades utilizam grafos para minimizar o tempo das conexões.
 - Distribuição de correio, otimizando percursos para um único carteiro ou equipe.
 - Sistemas de patrulha da Polícia Militar permitem estudos de otimização com grafos.

As possibilidades são grandes.

3.2 Grau do vértice

Definição 3.2.1. Em um grafo G quando arestas são incidentes a um vértice v , o número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v é chamado **grau do vértice** v , denotado por $d(v)$.

O **grau máximo** de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é o maior grau entre todas os vértices de G .

O **grau mínimo** de um grafo G , denotado por $\delta(G)$, é o menor grau entre todos os vértices de G .

Teorema 3.2.1. Para todo grafo G

$$\sum_{v \in V_G} d(v) = 2 \cdot m$$

ou seja, a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

Demonstração. Notemos que quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes. □

Corolário 3.2.1. Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração. Seja G um grafo qualquer. Sabemos que a soma dos graus de todos os vértices de G é igual ao dobro do número de arestas, ou seja:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m(G),$$

onde $m(G)$ é o número de arestas. Como $2m(G)$ é sempre par, a soma total dos graus é um número par.

Separaremos os vértices de G em dois conjuntos:

- V_{par} : vértices de grau par,
- $V_{\text{ímpar}}$: vértices de grau ímpar.

Denotemos por:

$$S_{\text{par}} = \sum_{v \in V_{\text{par}}} d(v) \quad \text{e} \quad S_{\text{ímpar}} = \sum_{v \in V_{\text{ímpar}}} d(v).$$

Pela igualdade anterior, temos:

$$S_{\text{par}} + S_{\text{ímpar}} = 2m(G) \quad (\text{número par}).$$

Observe que:

- S_{par} é par, pois é a soma de números pares.
- $S_{\text{ímpar}}$ deve ser par, pois é a diferença entre dois números pares:

$$S_{\text{ímpar}} = 2m(G) - S_{\text{par}}.$$

Porém, $S_{\text{ímpar}}$ é a soma dos graus dos vértices em $V_{\text{ímpar}}$. Como cada vértice em $V_{\text{ímpar}}$ tem grau ímpar, a soma $S_{\text{ímpar}}$ só será par se houver um número **par** de termos ímpares.

Portanto, o número de vértices em $V_{\text{ímpar}}$ é par. □

3.3 Matriz de Adjacência

A seguir, introduziremos uma representação computacional de um grafo que deve ter as seguintes características:

- *corresponder de forma única a um grafo dado;*
- *poder ser armazenada e manipulada em um computador.*

A representação gráfica de um grafo através do diagrama de pontos e arestas não satisfaz a segunda condição acima.

Vamos discutir a seguir algumas estruturas que satisfazem estes dois critérios.

Considere um grafo simples $G(V, A)$ com n vértices, onde

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

e

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

é o conjunto formado pelas m arestas.

Definição 3.3.1. Definimos a **matriz de adjacência** associada ao grafo simples G , como sendo a matriz $n \times n$, denotada por $X = (x_{ij})$, onde:

$$x_{ij} \doteq \begin{cases} 1, & \text{se } v_i v_j \text{ for uma aresta,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 3.3.1.

- É necessário fazer uma rotulação nos vértices do grafo G e conseqüentemente conhecer suas arestas.
- Apenas grafos que não possuam arestas paralelas, podem ser representados por matrizes, em particular para grafos simples.

Exemplo 3.3.1. Encontrar a matriz de adjacência associado ao grafo G , simples abaixo.

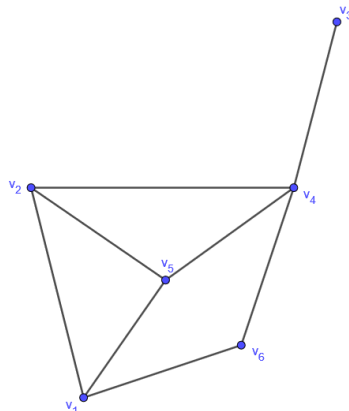


Figura 5 – Grafo G - Matriz de adjacência

Resolução 3.3.1. Notemos que $X = (x_{ij})$, onde

$$\begin{aligned}
x_{11} &= 0, \\
x_{12} &= 1, \text{ pois } v_1v_2 \text{ é uma aresta,} \\
x_{13} &= 0, \text{ pois } v_1v_3 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{14} &= 0, \text{ pois } v_1v_4 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{15} &= 1, \text{ pois } v_1v_5 \text{ é uma aresta,} \\
x_{16} &= 1, \text{ pois } v_1v_6 \text{ é uma aresta,} \\
x_{21} &= 1, \text{ pois } v_2v_1 \text{ é uma aresta,} \\
x_{22} &= 0, \\
x_{23} &= 0, \text{ pois } v_2v_3 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{24} &= 1, \text{ pois } v_2v_4 \text{ é uma aresta,} \\
x_{25} &= 1, \text{ pois } v_2v_5 \text{ é uma aresta,} \\
x_{26} &= 0, \text{ pois } v_2v_6 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{31} &= 0, \text{ pois } v_3v_1 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{32} &= 0, \text{ pois } v_3v_2 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{33} &= 0, \\
x_{34} &= 1, \text{ pois } v_3v_4 \text{ é uma aresta,} \\
x_{35} &= 0, \text{ pois } v_3v_5 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{36} &= 0, \text{ pois } v_3v_6 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{41} &= 0, \text{ pois } v_4v_1 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{42} &= 1, \text{ pois } v_4v_2 \text{ é uma aresta,} \\
x_{43} &= 1, \text{ pois } v_4v_3 \text{ é uma aresta,} \\
x_{44} &= 0, \\
x_{45} &= 1, \text{ pois } v_4v_5 \text{ é uma aresta,} \\
x_{46} &= 1, \text{ pois } v_4v_6 \text{ é uma aresta,} \\
x_{51} &= 1, \text{ pois } v_5v_1 \text{ é uma aresta,} \\
x_{52} &= 1, \text{ pois } v_5v_2 \text{ é uma aresta,} \\
x_{53} &= 0, \text{ pois } v_5v_3 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{54} &= 1, \text{ pois } v_5v_4 \text{ é uma aresta,} \\
x_{55} &= 0, \\
x_{56} &= 0, \text{ pois } v_5v_6 \text{ não é uma aresta,} \\
x_{61} &= 1, \text{ pois } v_6v_1 \text{ é uma aresta,} \\
x_{62} &= 0, \text{ pois } v_6v_2 \text{ não é uma aresta,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{63} &= 0, \text{ pois } v_6v_3 \text{ não é uma aresta,} \\
 x_{64} &= 1, \text{ pois } v_6v_4 \text{ é uma aresta,} \\
 x_{65} &= 0, \text{ pois } v_6v_5 \text{ não é uma aresta,} \\
 x_{66} &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto a matriz de adjacência associado ao grafo simples G acima é

$$X(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação 3.3.2.

1. Notemos no exemplo acima que a matriz $X(G)$ satisfaz:

$$X(G)^t = X(G),$$

ou seja, é simétrica.

Pode se verificar que essa é uma propriedade geral das matrizes de adjacência.

2. Dada uma matriz Q , quadrada de ordem n , simétrica (ou seja, $Q^t = Q$, onde Q^t denota a matriz transposta de Q) e binária (ou seja, onde seus termos são 0 ou 1), sempre é possível construir um grafo simples G , com n vértices, tal que

$$X(G) = Q.$$

3. Se o grafo possui laços, é possível definir a matriz de adjacência associada ao mesmo.
4. Notemos que, as entradas ao longo da diagonal principal de X são todas nulas se, e somente se, o grafo não possui laços, ou seja, é um grafo simples.

Quando há um laço no vértice v_i temos que $x_{ii} = 1$.

5. Em um grafo é simples, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha (ou coluna) correspondente (vide Exemplo 3.3.2).
6. Permutações de linhas e das colunas da matriz de adjacência, não implicam necessariamente em uma matriz simétrica, logo não será uma matriz de adjacência de um grafo. (vide Observação 3.3.3).

Exemplo 3.3.2. No grafo J abaixo, encontre o grau do vértice v_1

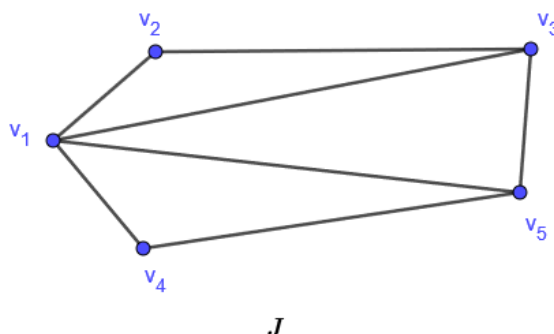


Figura 6 – Grau do vértice v_1 do grafo J

Resolução 3.3.2. Notemos que no grafo J , o grau do vértice v_1 é 4, porque v_1 está conectado por uma aresta aos vértices v_2, v_3, v_4 e v_5 .

Observemos que a matriz de adjacência do grafo J é dada por

$$X(J) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que a soma dos elementos da primeira linha ou da primeira coluna, que corresponde ao vértice v_1 é 4, assim como o grau do vértice.

Observação 3.3.3. A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pode ser obtida da matriz $X(J)$ do Exemplo 3.3.2 permutando-se a segunda com a quarta linha.

Notemos que essa matriz não é uma matriz simétrica, logo não poderá ser uma matriz de adjacência de um grafo.

3.4 Isomorfismo

Definição 3.4.1. Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção f de $V(G)$ em $V(H)$ tal que dois vértices v e w são adjacentes em G se, e somente se, $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H .

Dois grafos G e H são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles.

Observação 3.4.1.

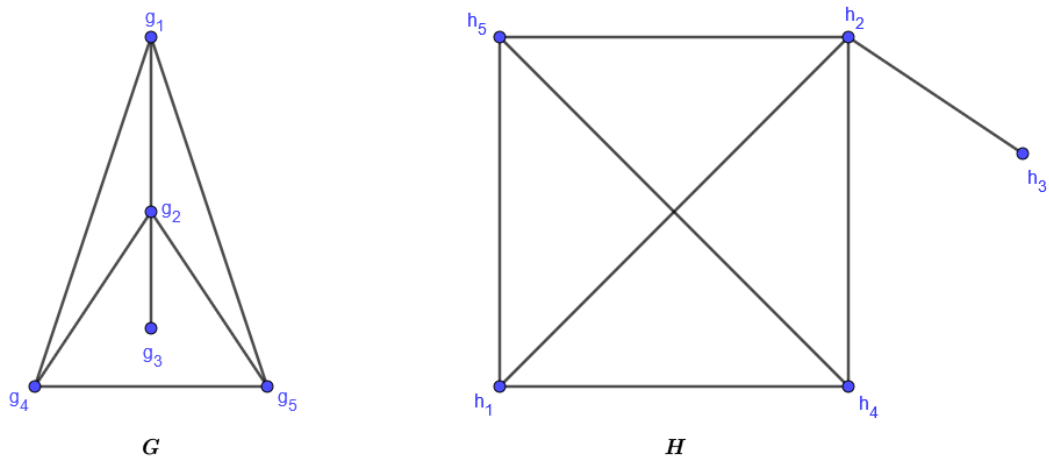
1. Dizemos que dois grafos G e H são isomorfos se existir uma correspondência bijetora entre os vértices de G e os vértices de H que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas.
2. Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais.
3. Para decidir se dois grafos G e H são isomorfos, basta examinar todas as bijeções de $V(G)$ em $V(H)$ (BONDY; MURTY, 2008).
4. Se cada um dos grafos tem n vértices, esse algoritmo consome tempo proporcional a $n!$ (GAREY; JOHNSON, 1979).
5. Notemos que como $n!$ cresce explosivamente com n , esse algoritmo é decididamente insatisfatório na prática. Infelizmente, não se conhece um algoritmo substancialmente melhor (ARVIND; TORÁN, 2015).
6. Pode-se mostrar que dois grafos simples G_1 e G_2 são isomorfos se, e somente se, existir uma matriz de permutação R tal que:

$$X(G_2) = R^{-1}X(G_1)R,$$

onde $X(G_1)$ e $X(G_2)$ são as matrizes de adjacência de G_1 e G_2 , respectivamente (GODSIL; ROYLE, 2001).

7. Como consequência das propriedades do determinante, se duas matrizes quadradas A e B são semelhantes, então os determinantes de A e B são iguais (HORN; JOHNSON, 2013).

Observação 3.4.2. Mostre que os grafos abaixo são isomorfos.

Figura 7 – Grafo G e grafo H **Resolução:**

Consideremos $f : G \rightarrow H$ a função dada por

$$f(g_1) \doteq h_1$$

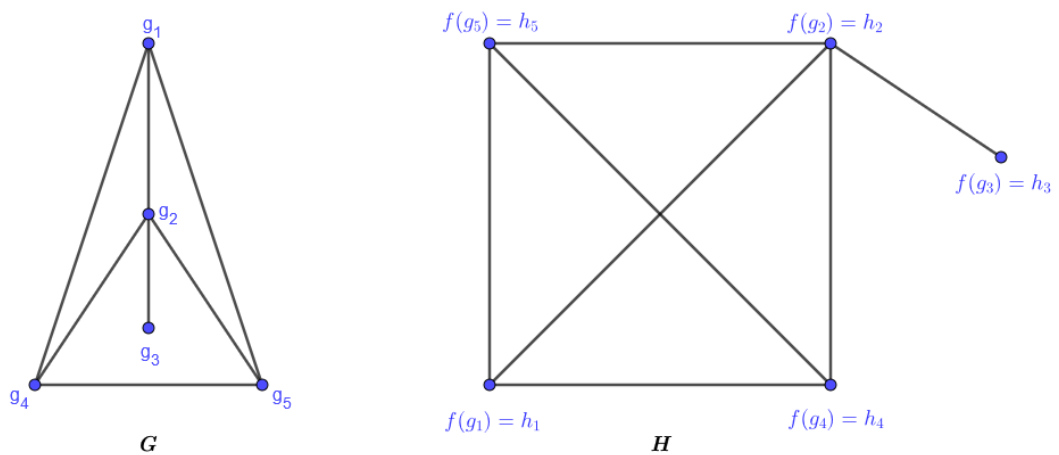
$$f(g_2) \doteq h_2$$

$$f(g_3) \doteq h_3$$

$$f(g_4) \doteq h_4$$

$$f(g_5) \doteq h_5.$$

(3.2)

Figura 8 – Isomorfismo entre os grafos G e H

Portanto, a função f , dada por (3.2), leva vértices adjacentes do grafo G em vértices adjacentes do grafo H , ou seja, é um isomorfismo entre os grafos G e H , logo eles são isomorfos.

Note também que as matrizes de adjacência dos grafos G e H são

$$X(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$X(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que as matrizes $X(G)$ e $X(H)$ são iguais, em particular, são semelhantes. Logo, pelo item 6 da Observação 3.4.1, segue que os grafos G e H são isomorfos. \square

Observação 3.4.1.

- Notemos que no exemplo acima, temos:

Número de vértices de $G = 5$,

Número de vértices de $H = 5$,

Número de arestas de $G = 7$,

Número de arestas de $H = 7$,

$d(a) = 3 = d(f(g_1)) = d(h_1)$,

$d(b) = 4 = d(f(g_2)) = d(h_2)$,

$d(c) = 1 = d(f(g_3)) = d(h_5)$,

$d(d) = 3 = d(f(g_4)) = d(h_4)$,

$d(e) = 3 = d(f(g_5)) = d(h_3)$.

- Baseado no item acima, podemos conjecturar que condições necessárias para existir um isomorfismo entre dois grafos G e H , são:

1. G e H devem possuir o mesmo número de vértices;
2. G e H devem possuir o mesmo número de arestas;
3. G e H devem possuir o mesmo número de vértices com um determinado grau.

- As condições 1., 2. e 3. acima são suficientes para que os grafos G e H sejam isomorfos? Afiramos que não são suficientes, como ilustra o exemplo abaixo:

Exemplo 3.4.1. *Os grafos abaixo são isomorfos?*

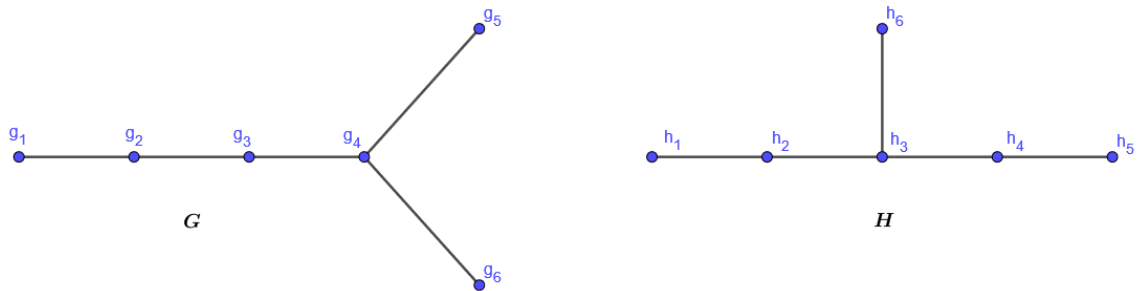


Figura 9 – Os grafos G e H são isomorfos?

Resolução:

Afirmamos que os grafos G e H não são isomorfos.

Observemos que os grafos G e H acima possuem as seguintes propriedades:

1. *possuem mesmo número de vértices, ou seja, 6;*
2. *possuem mesmo número de arestas, ou seja, 5;*
3. *possuem: 3 vértices de grau 1; 2 vértices com grau 2; 1 vértice com grau 3.*

Notemos que não é possível encontrar uma função bijetora entre os grafos G e H de modo preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas dos mesmos.

De fato, é necessário associar o vértice g_4 do grafo G , que tem grau 3 ao vértice h_3 do grafo H , que também tem grau 3 e não existe nenhum outro vértice com grau 3 em H .

Mas o vértice h_3 é adjacente a apenas um vértice de grau 1, enquanto que o vértice g_4 em G é adjacente a dois vértices de grau 1.

Portanto, os grafos G e H não são isomorfos.

□

Observação 3.4.2.

No exemplo acima, notemos que a matriz de adjacência do grafo G é dada por

$$X(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de adjacência do grafo H é dada por

$$X(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que, encontrando o determinante de ambas no software Geogebra, temos que a matriz $X(G)$ possui determinante 0 e a matriz $X(H)$ possui determinante -1 .

Dessa forma, como as matrizes possuem determinantes diferentes pelo item 6. da Observação 3.4.1, as matrizes não são semelhantes, logo os grafos G e H não são isomorfos.

3.5 Vizinhança e corte

Definição 3.5.1. Dado um conjunto X de vértices de um grafo G , definimos a **vizinhança de X em G** como o conjunto de todos os vértices adjacentes a pelo menos um vértice de X . Esse conjunto será denotado por:

$$\Gamma_G(X) \quad \text{ou simplesmente} \quad \Gamma(X).$$

Se $X = \{v\}$ ou seja, X contém apenas um vértice v , a vizinhança de v será denotada por

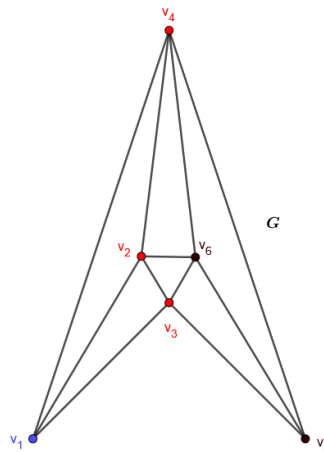
$$\Gamma(v) = \Gamma(\{v\}),$$

que é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v .

Note que se $v \in X$ então

$$\Gamma(v) \subseteq \Gamma(X)$$

Exemplo 3.5.1. No grafo G abaixo,

Figura 10 – Vizinhaça de V_1 no Grafo G

o vértice v_1 possui três vizinhos, pois está conectado por arestas aos vértices v_2 , v_3 e v_4 , ou seja,

$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}.$$

Observemos que os vértices v_5 e v_6 não são vizinhos do vértice v_1 , pois não existe arestas que os conectam ao vértice v_1 .

Se

$$X = \{v_1, v_5\}$$

então

$$\Gamma(X) = \{v_2, v_3, v_4, v_6\}.$$

□

Observação 3.5.1. Notemos que a matriz de adjacência associada ao grafo G acima é dada por

$$X(G) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, é possível identificar se o vértice v_i é vizinho do vértice v_j , encontrando na matriz acima o elemento x_{ij} . Caso ele seja igual a 1, os vértices são vizinhos e se for 0, não o são.

Definição 3.5.1. Dado um conjunto X de vértices de um grafo G , definimos o corte do grafo G associado ao conjunto X como sendo o conjunto de todas as arestas do grafo G que têm um vértice em X e outro em $V(G) \setminus X$.

O corte associado a X será denotado por

$$\nabla_G(X)$$

ou simplesmente por $\nabla(X)$.

Um **corte de um vértice** v é o conjunto $\nabla_G(\{v\})$, que será denotado simplesmente por $\nabla(v)$, que é um subconjunto de $\nabla(X)$.

Exemplo 3.5.2. Considerando o grafo G abaixo e o conjunto $X = \{g_1, g_2, g_3\}$

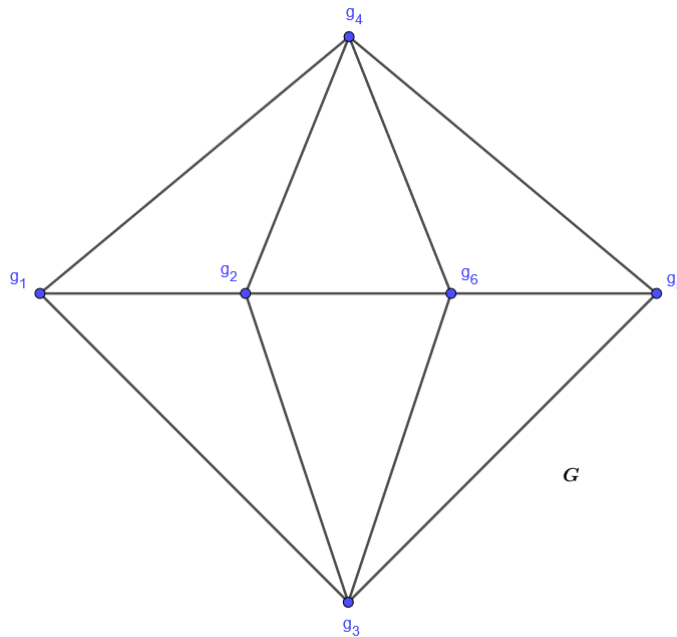


Figura 11 – Grafo G e associação ao conjunto X

notemos que, o corte do grafo G associado ao conjunto X será

$$\nabla_G(X) = \{g_1g_4, g_2g_4, g_2g_6, g_3g_6, g_3g_5\}.$$

Observemos que

$$\nabla_G(g_6) = \{g_6g_2, g_6g_3, g_6g_4, g_6g_5\}.$$

Observação 3.5.2. Notemos que

$$\nabla(\emptyset) = \nabla(V(G)) = \emptyset.$$

3.6 Caminhos

Nessa seção, introduziremos a noção de caminho, que formam uma classe de subgrafos importantes.

Começaremos pela

Definição 3.6.1. Um passeio em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência finita alternada de vértices e arestas, começando e terminando por vértices, onde cada aresta é incidente ao vértice que a precede e ao que a sucede. Formalmente, P é um passeio em G se:

$$P = (v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k)$$

onde:

- v_0, v_1, \dots, v_k são vértices em V
- $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$ são arestas em A
- **Origem:** v_0 é o vértice inicial de P
- **Término:** v_k é o vértice final de P
- **Extremidades:** v_0 e v_k são conjuntamente denominados extremidades do passeio
- **Vértices internos:** Todos os vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} são chamados vértices internos de P

Exemplo 3.6.1. Consideremos o grafo abaixo

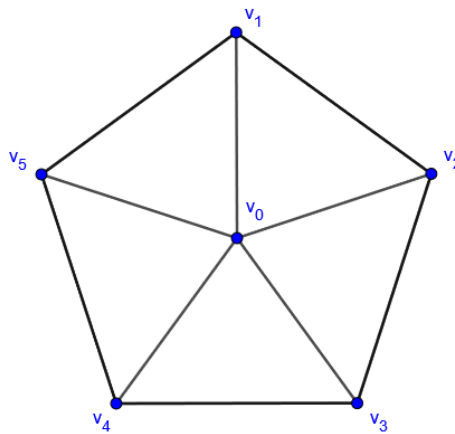


Figura 12 – Passeio no grafo G

Um passeio no grafo G acima é

$$(v_4, v_4v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_0, v_0, v_0v_5, v_5, v_5v_4, v_4, v_4v_3, v_3, v_3v_0, v_0, v_0v_1, v_1).$$

Observação 3.6.1.

- Perceba que, no exemplo acima, o passeio dado passa mais de uma vez pelos mesmos vértices v_3 e v_4 e pela mesma aresta mais de uma vez v_4v_3 .

- O passeio

$$(v_4, v_4v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_0, v_0, v_0v_5, v_5, v_5v_4, v_4),$$

será dito um passaio fechado.

Definição 3.6.2. Uma trilha ou cadeia em um grafo G (como na Definição 3.6.1) é um passeio onde todas as arestas são distintas.

Se o vértice inicial coincide com o vértice final, a trilha é dita fechada.

Observação 3.6.2.

- Notemos que toda trilha é um passeio em um grafo.
- O passeio do Exemplo 3.6.1 não é uma trilha.
- No Exemplo, 3.6.1,

$$(v_3, v_3v_0, v_0, v_0v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4),$$

é um trilha.

- Ainda no Exemplo 3.6.1,

$$(v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_1, v_1, v_1v_0, v_0, v_0v_4, v_4, v_4v_3, v_3),$$

é um trilha fechada.

- Podemos observar nos itens acima que não se repete uma aresta mais de uma vez, apesar dos vértices poderem ser repetidos.

Definição 3.6.3. Um caminho em um grafo G (como na Definição 3.6.1) é uma sequência do tipo

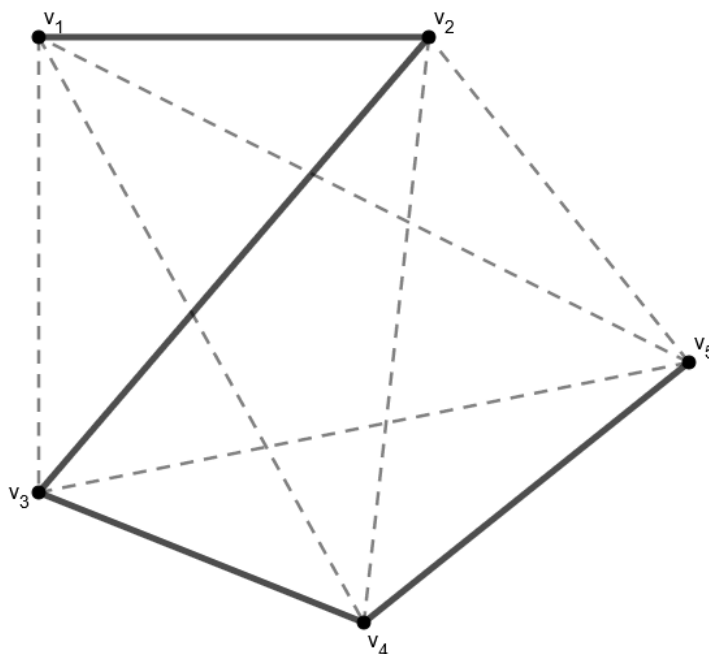
$$\{v_i, v_iv_{i+1}, \dots, v_{j-1}v_j, v_j\},$$

para $0 \leq i \leq j \leq k$, onde além das arestas, todos os vértices são distintos.

Definimos o comprimento de um caminho como sendo a quantidade de arestas que fazem parte do mesmo (no caso acima será $j - i$).

Observação 3.6.3. Notemos que todo caminho é uma trilha em um grafo.

Exemplo 3.6.2. No grafo abaixo

Figura 13 – Caminho no grafo G

observamos que o passeio destacado

$$(v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_5, v_5),$$

é um caminho e seu comprimento é 4, pois existem 4 arestas pertencentes ao mesmo.

Definição 3.6.4. Um ciclo em um grafo G (como na Definição 3.6.1) é um passeio

$$\{v_i, v_iv_{i+1}, \dots, v_{j-1}v_j, v_j\},$$

onde $0 \leq i \leq j \leq k$, tal que,

$$v_i = v_j.$$

Observação 3.6.4.

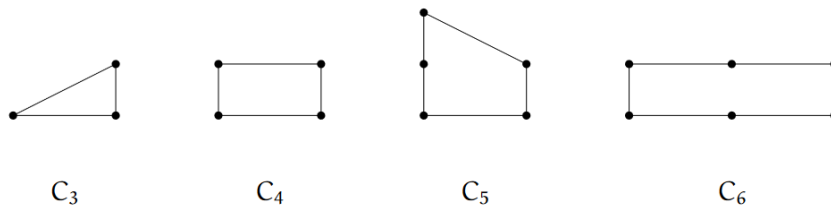
- No Exemplo 3.6.1 o caminho dado por

$$(v_5, v_5v_0, v_0, v_0v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_1, v_1, v_1v_5, v_5)$$

é um ciclo.

- Notemos que um ciclo poderia ser denominado caminho fechado, estendendo o conceito de caminho para permitir a repetição de vértices, desde que estes sejam apenas o primeiro e o último.

Exemplo 3.6.3. Na figura abaixo, temos que C_3 , C_4 , C_5 e C_6 são ciclos de comprimentos 3, 4, 5 e 6 respectivamente.

Figura 14 – Grafos C_3 , C_4 , C_5 e C_6

Definição 3.6.5. Um grafo G é dito **conexo** se para $v, w \in V(G)$, existe um caminho C , com os extremos v e w , tal que $C \subseteq A(G)$.

Essa definição será tratada com mais detalhes na sessão 3.8.

Definição 3.6.6. Um **Passeio Euleriano** em um grafo G é uma sequência de arestas em que cada aresta do grafo é percorrida exatamente uma vez.

O passeio Euleriano é dito **fechado** se o vértice inicial coincide com o vértice final.

Teorema 3.6.1. Um grafo conexo G possui um passeio Euleriano se, e somente se, possui exatamente 0 ou 2 vértices de grau ímpar.

Demonstração:

Dividiremos a demonstração em duas partes:

(\Rightarrow) **Existência do passeio implica em 0 ou 2 vértices ímpares:**

- Seja P um passeio Euleriano em G . Todo vértice interno do passeio (exceto possivelmente o primeiro e o último) tem grau par, pois cada entrada no vértice corresponde a uma saída.
- Se P é fechado (Euleriano fechado), todos os vértices têm grau par (0 ímpares).
- Se P não é fechado (Euleriano aberto), o vértice inicial e final têm grau ímpar (2 ímpares).

(\Leftarrow) **0 ou 2 vértices ímpares implicam na existência do passeio:**

- **Caso 1: 0 vértices ímpares (Todos graus pares):**
 - a) Escolha um vértice inicial v_0 qualquer.
 - b) Inicie um passeio C seguindo arestas não visitadas.
 - c) Em cada vértice, como o grau é par, sempre haverá uma aresta de saída não usada (exceto ao retornar a v_0).
 - d) Repita até retornar a v_0 e esgotar todas as arestas.
- **Caso 2: 2 vértices ímpares (Sejam u e w):**

- a) Adicione uma aresta temporária $e = uw$, tornando todos graus pares.
- b) Construa um ciclo Euleriano C no grafo modificado (como no Caso 1).
- c) Remova e de C : o resultado é um passeio Euleriano de u a w .

1. **Detalhamento da construção:**

- Se o passeio parcial terminar prematuramente em um vértice $v \neq v_0$, a conexidade garante que existirá um caminho não utilizado ligando v a arestas remanescentes.
- Insira esse caminho no passeio principal, estendendo-o até consumir todas as arestas.

Desse modo, concluímos a demonstração.

□

3.7 Subgrafos

Definição 3.7.1. Um subgrafo de um grafo G é um grafo H tal que

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ e } A(H) \subseteq A(G).$$

Um subgrafo H de G é dito próprio se

$$V(H) \neq V(G) \text{ ou } A(H) \neq A(G).$$

Se $X \subseteq V(G)$, um subgrafo induzido por um subconjunto X é o grafo (X, B) , onde B é o conjunto de todas as arestas de G que têm o primeiro e o último vértice em X . Esse subgrafo é denotado por

$$G[X].$$

Exemplo 3.7.1. Na figura abaixo, o grafo G possui os grafos H e I como subgrafos

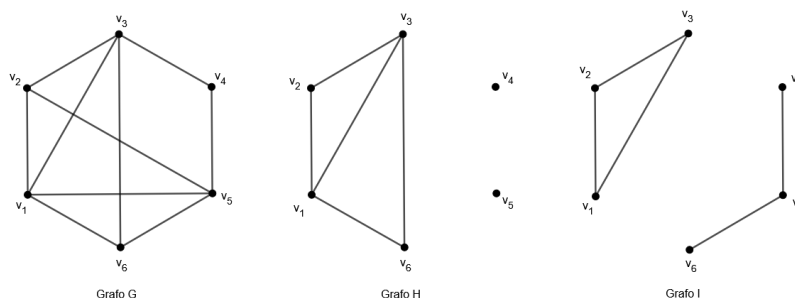


Figura 15 – Grafos G , H e I

Observação 3.7.1. Notemos que as matrizes de adjacência dos grafos acima são

$$X(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X(I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ao comparar os elementos das matrizes $X(H)$ e $X(G)$, notamos que, a ocorrência dos elementos com valor 1 na matriz $X(H)$ (em vermelho) são os mesmos dos respectivos elementos na matriz em $X(G)$.

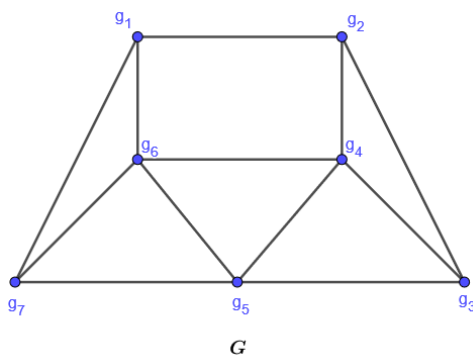
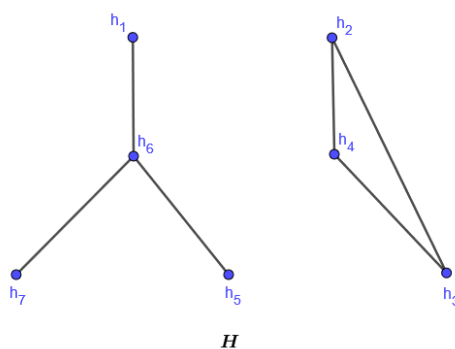
O mesmo ocorre com os elementos das matrizes $X(I)$ e $X(G)$.

Logo, isso nos fornece uma forma de caracterizar subgrafos de um grafos utilizando suas respectivas matrizes de adjacência.

3.8 Grafos conexos e componentes

Definição 3.8.1. Um grafo G é dito **conexo** se para $v, w \in V(G)$, existe um caminho C , com os extremos v e w , tal que $C \subseteq A(G)$.

Exemplo 3.8.1. Consideremos na figura abaixo os grafos G e H . Mostre que o grafo G é conexo e o grafo H não é conexo.

Figura 16 – Grafos G conexoFigura 17 – Grafos H Não conexo**Resolução:**

No grafo G , podemos escolher dois vértices quaisquer, que sempre existirá um caminho no grafo ligando-os, mostrando que o grafo G é conexo.

Por exemplo, os vértices g_1 e g_5 , podem ser ligados pelo caminho

$$\{g_1, g_1g_6, g_6, g_6g_5, g_5\}$$

No grafo H , o vértice h_1 , não pode ser ligado por um caminho ao vértice h_2 , mostrando que o grafo H não é conexo.

□

Observação 3.8.1.

1. Notemos que a matriz de adjacências do grafo G acima é dada por

$$X(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e do grafo H é dada por

$$X(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Importante observar que todo grafo simples, conexo e sem ciclos com n vértices possui exatamente $n - 1$ arestas.*

Proposição 3.8.1. *Um grafo G é conexo se, e somente se, $\nabla(X) \neq \emptyset$, para todo subconjunto próprio e não-vazio X de $V(G)$.*

Demonstração:

Dividiremos a demonstração em duas partes:

(\Rightarrow) *Conexo \Rightarrow Todo corte próprio é não vazio:*

- *Seja $X \subsetneq V(G)$ próprio não-vazio.*
- *Como G é conexo, para qualquer $u \in X$ e $w \notin X$, existe caminho $u \rightarrow w$.*
- *Seja v o último vértice em X neste caminho.*
- *A próxima aresta após v no caminho pertence a $\nabla(X)$.*
- *Portanto, $\nabla(X) \neq \emptyset$.*

(\Leftarrow) *Todos cortes próprios não vazios \Rightarrow Conexo:*

- *Suponha por contradição que G não é conexo.*
- *Então existem vértices $u, w \in V(G)$ sem caminho entre eles.*
- *Seja $X = \{v \in V(G) \mid \exists \text{ caminho de } u \text{ a } v\}$.*

- Por construção, X é próprio ($w \notin X$) e não-vazio ($u \in X$).
- Pela definição de X , não há arestas ligando X a $V(G) \setminus X$.
- Portanto, $\nabla(X) = \emptyset$, contradizendo a hipótese.
- Logo, G deve ser conexo.

□

Definição 3.8.2. Um subgrafo conexo H de um grafo G é **maximal** se H não é subgrafo próprio de nenhum subgrafo conexo de G .

Uma **componente conexa** de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G .

Exemplo 3.8.2. No grafo não conexo G abaixo, temos que os subgrafos H_1 e H_2 são maximais.

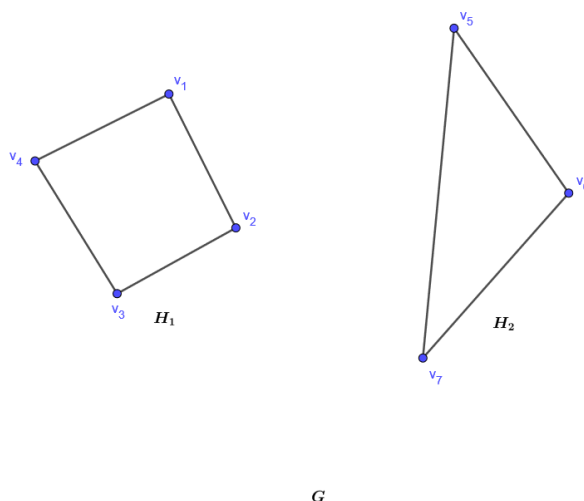


Figura 18 – Subgrafos H_1 e H_2 maximais

Observação 3.8.2.

Observe que o subgrafo H_1 é um subgrafo conexo de G e não é um subgrafo próprio de nenhum subgrafo conexo de G .

De modo análogo, o mesmo ocorre com H_2 .

1. Notemos também a matriz de adjacência do grafo G

$$X(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora vamos observar a matriz do grafo maximal H_1

$$X(H_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos também a matriz de adjacência do grafo maximal H_2

$$X(H_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que tanto as matrizes de adjacência H_1 e H_2 são subblocos diagonais da matriz de adjacência G .

2. As componentes conexas de um grafo G podem ser vistas como as classes de equivalência relativas a relação de equivalência:

$x \simeq y$ se, e somente se, existe um caminho ligando o vértice x ao vértice y ,

ou seja, \simeq satisfaz:

- $x \simeq x$;
- se $x \simeq y$, então $y \simeq x$;
- se $x \simeq y$ e $y \simeq z$, então $x \simeq z$,

para $x, y, z \in V(G)$.

De fato, notemos que vale a primeira, pois o vértice x está ligado a x .

Se o vértice x está ligado ao vértice y , então o vértice y está ligado ao vértice x .

Se o vértice x está ligado ao vértice y e o vértice y está ligado ao vértice z , então existe um caminho que liga o vértice x ao vértice z , para $x, y, z \in V(G)$.

3. A componente conexa de G que contém o vértice v é o maior subgrafo conexo de G que contém o vértice v .
4. Para quaisquer dois vértices de G , suas componentes conexas ou coincidem ou são disjuntas.

De fato, se duas componentes conexas possuem um vértice em comum, elas coincidem, pois a componente conexa é o subgrafo conexo maximal contendo um dado ponto.

Se não possuem vértice em comum, elas serão disjuntas.

Proposição 3.8.2. *Cada vértice de um grafo pertence a uma, e somente uma, componente conexa.*

Um grafo é conexo se, e somente se, tem uma única componente conexa.

Demonstração:

Suponha que temos um grafo G e dois vértices u e v pertencentes a G .

Mostraremos que u e v pertencem à mesma componente conexa se e somente se há um caminho entre eles.

Se u e v pertencem à mesma componente conexa, então, por definição, existe um caminho entre eles no grafo G .

Agora, vamos supor que há um caminho entre u e v no grafo G . Vamos mostrar que u e v pertencem à mesma componente conexa.

Podemos construir um caminho entre u e v no grafo G . Se percorremos esse caminho, visitando os vértices um a um, notamos que cada vértice visitado está conectado ao próximo vértice visitado pelo menos por uma aresta.

Portanto, cada vértice nesse caminho faz parte da mesma componente conexa, já que é possível alcançar qualquer vértice do caminho a partir de qualquer outro vértice no caminho por meio de uma sequência de arestas.

Dessa forma, demonstramos que cada vértice de um grafo pertence a uma, e somente uma, componente conexa.

Suponha agora, que temos um grafo G que é conexo. Vamos mostrar que G tem uma única componente conexa.

Se G é conexo, então para qualquer par de vértices u e v em G , há um caminho entre eles. Portanto, todos os vértices de G podem ser alcançados uns dos outros, e pertencem à mesma componente conexa.

Agora, vamos supor que G tem uma única componente conexa. Vamos mostrar que G é conexo.

Se G tem uma única componente conexa, então todos os vértices em G podem ser alcançados uns dos outros por meio de um caminho. Portanto, para qualquer par de vértices u e v em G , há um caminho entre eles, o que significa que G é conexo.

Dessa forma, demonstramos que um grafo é conexo se e somente se tem uma única componente conexa.

Portanto, concluímos que cada vértice de um grafo pertence a uma, e somente uma, componente conexa, e um grafo é conexo se e somente se tem uma única componente conexa.

□

Exemplo 3.8.3. O grafo abaixo é conexo? Quantas componentes conexas ele possui?

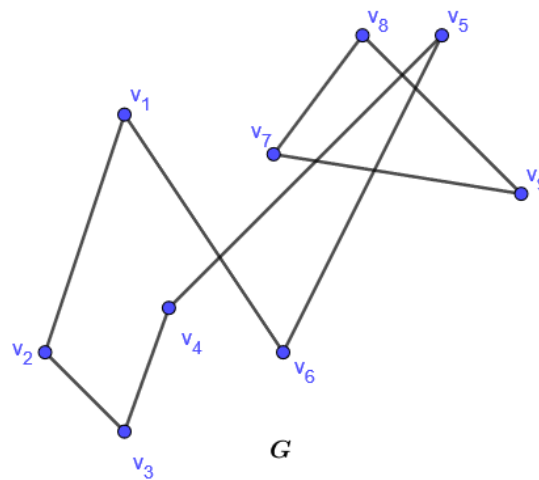


Figura 19 – Componentes conexas do grafo G

Resolução:

Notemos que o grafo acima é um grafo não conexo. Os vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 estão conectados por arestas, porém não possui nenhuma aresta que liga esses vértices aos vértices v_7, v_8 e v_9 , que estão conectados por arestas.

Portanto, o grafo G possui duas componentes conexas que ligam os vértices

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \text{ e } v_6$$

e

$$v_7, v_8 \text{ e } v_9.$$

□

3.9 Árvores

Definição 3.9.1. Uma árvore é um grafo simples conexo sem ciclos.

Se a árvore possui apenas um vértice e nenhuma aresta, será dita folha.

Uma floresta é um grafo que possua pelo menos duas componentes conexas distintas.

Exemplo 3.9.1. Abaixo o grafo G é uma árvore e o grafo H é uma floresta, pois possui duas árvores distintas.

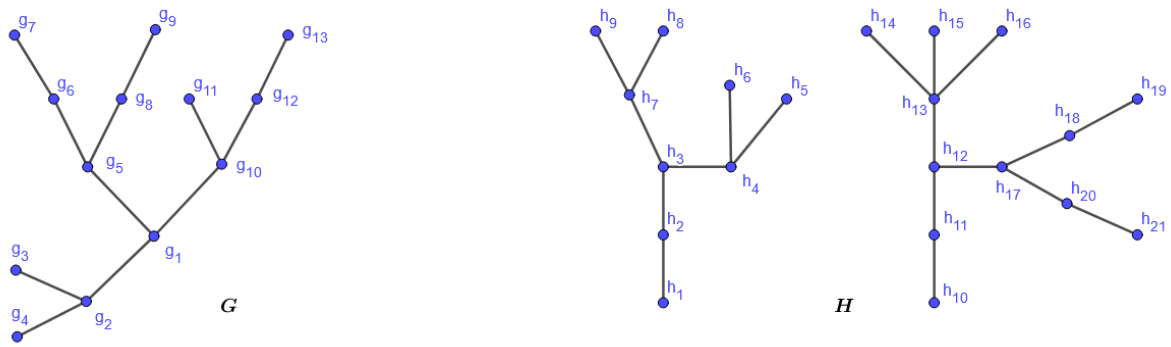


Figura 20 – Grafo G - Árvore e grafo H - Floresta

Observação 3.9.1.

1. Notemos que, ao retirarmos um vértice de grau 1 e a aresta conectada a ele em uma árvore, ainda obtemos uma árvore.
2. Em uma árvore, existem, no mínimo, $n - 1$ arestas com extremos em n vértices distintos.

O resultado a seguir nos fornece noções equivalentes a noção de árvore.

Teorema 3.9.1. *Seja T um grafo simples (sem laços) com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. T é uma árvore;
2. T não contém ciclos e tem $n - 1$ arestas;
3. T é conexo e tem $n - 1$ arestas;
4. T é conexo e não possui arestas paralelas e ciclos;
5. Todo par de vértices de T é ligado por um único caminho;
6. T não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz um único ciclo.

Demonstração:

1. implica em 2.:

Por hipótese T é uma árvore com n vértices e queremos mostrar que T é um grafo simples com $n - 1$ arestas.

Notemos que, pela definição de árvore, o grafo conexo T não contém ciclos.

A prova relacionada ao número de arestas será feita por indução sobre n , o número de vértices.

- **Hipótese de indução:**
- *Toda árvore com k vértices tem $k - 1$ arestas e é acíclica*

• **Passo indutivo ($n = k + 1$):**

• **Existência de folha:**

- *Suponha por contradição que todos os vértices têm grau ≥ 2*
- *Pela Soma dos Graus (Teorema 3.2.1):*

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2|A(T)|$$

- *Se cada vértice tem grau ≥ 2 :*

$$2|A(T)| \geq 2(k + 1) \Rightarrow |A(T)| \geq k + 1$$

- **Contradição 1:** $|A(T)| \geq k + 1$ vs. $|A(T)| = k$ (por hipótese)
- **Contradição 2:** Se $|A(T)| \geq k + 1$, o grafo teria mais arestas que vértices, o que implica a existência de ciclos (pois um grafo conexo sem ciclos tem exatamente $|V(T)| - 1$ arestas)

– **Remoção de folha:**

- *Seja v uma folha (grau 1) com aresta a*
- *Remova v e a , obtendo $T' = T - v$*
- *T' mantém:*
 - * *Conexidade (nenhum caminho entre outros vértices usava v)*
 - * *Aciclicidade (remoção não cria novos ciclos)*

• **Aplicação da hipótese:**

- *T' tem k vértices, logo $|A(T')| = k - 1$*
- *Portanto, $|A(T)| = |A(T')| + 1 = (k - 1) + 1 = k$*

Portanto, a afirmação 2. é verdadeira, mostrando que se T é uma árvore com n vértices, não contém ciclos e tem $n - 1$ arestas.

2. implica em 3.:

Suponhamos, por contradição, que T não seja conexo. Isso significa que T é composto por pelo menos duas componentes conexas.

Por hipótese, T contém n vértices e $n - 1$ arestas e não contém ciclos, portanto, nenhuma das componentes conexas de T possui ciclos.

Suponha portanto que T seja um grafo desconexo que possua k componentes conexas, que chamaremos de T_1, T_2, \dots, T_k , com $k \geq 2$.

Dessa forma, cada componente conexa, é um subgrafo simples, conexo, sem ciclos.

Então suponha que o subgrafo T_i possua m_i vértices e, pelas características acima e pelo item 2. da Observação 3.8.1, possui $m_i - 1$ arestas.

O subgrafo T_2 possui m_2 vértices e $m_2 - 1$ arestas e assim sucessivamente.

De modo análogo o subgrafo T_k possui m_k vértices e $m_k - 1$ arestas.

O grafo T é composto por todas suas componentes conexas e todos os vértices de cada componente conexa também pertence a T , portanto, T possui $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ vértices, e T possui n vértices, então

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

Da mesma forma, as arestas de cada componente conexa de T também fazem parte de T , então T possui $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_k - 1)$ arestas e T também possui $n - 1$ arestas, então,

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_k - 1) = n - 1$$

reagrupando, temos

$$\underbrace{m_1 + m_2 + \dots + m_k}_n - \underbrace{1 - 1 - 1 \dots}_{k \text{ vezes}} = n - 1$$

então,

$$n - k = n - 1$$

mas $k \geq 2$, então

$$n - k \neq n - 1,$$

portanto, T é conexo.

3. implica em 4.:

Sabendo que T é conexo e possui $n - 1$ arestas, basta mostrar que T não possui arestas paralelas ou ciclos.

Suponha, por contradição, que T possua duas arestas paralelas entre o mesmo par de vértices u e v .

Se existissem duas arestas paralelas ligando u e v , poderíamos remover uma delas sem desconectar o grafo, resultando em um novo grafo T' com $n - 2$ arestas.

Porém, isso é um absurdo, visto que, o grafo T' , que é conexo, possui n vértices e assim, pela Observação acima, deve ter no mínimo $n - 1$ arestas.

Portanto, concluímos que T não possui arestas paralelas.

Suponha agora, novamente por contradição, que T possua um ciclo.

Se houver um ciclo em T , podemos remover esse ciclo (que é uma aresta) sem desconectar o grafo, resultando em um novo grafo T' , conexo, com $n - 2$ arestas.

Pela observação acima, temos um absurdo, pois sendo conexo, que possuindo n vértices, terá no mínimo $n - 1$ arestas.

Portanto, concluímos que T não possui ciclos.

Logo, concluímos que T é um grafo conexo, não possui arestas paralelas. Isso prova a afirmação.

4. implica em 5.:

Mostremos que todo par de vértices de T é ligado por um único caminho.

Sejam v_j e v_k vértices do grafo T .

Como T é conexo, existe um caminho ligando v_j a v_k .

Notemos que, por hipótese, esse caminho não pode ser um ciclo ou uma aresta paralela, pois produziria um ciclo, logo o caminho acima é único.

Portanto no grafo T todo par de vértice é ligado por um único caminho.

Demonstração que 5. implica em 6.:

Mostremos que T não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz um único ciclo.

Notemos que se um grafo possui um ciclo existem dois caminhos distintos ligando dois vértices desse grafo.

Logo, se T possuísse um ciclo, haveria um par de vértices ligado por mais de um caminho, contrariando a hipótese.

Portanto, T não contém ciclos.

Notemos que, como $n > 2$ por hipótese, existe um único caminho, digamos, ligando os vértices v_1 e v_3 de modo que v_1v_3 não é uma aresta no grafo.

A adição da aresta v_1v_3 produzirá um ciclo.

Se este ciclo, ligando os vértices v_1 e v_3 , não fosse único, a retirada da aresta v_1v_3 , pela afirmação acima, nos forneceria um caminho, no grafo T , unindo os vértices v_1 e v_3 , contrariando a hipótese.

Portanto, T não possui ciclos e a adição de uma aresta produz um único ciclo.

6. implica em 1.:

Para mostrar que T é árvore, é suficiente mostrar que T é conexo pois, por hipótese, ele não possui ciclos.

Suponhamos por absurdo que T é desconexo, ou seja, existem, pelo menos, duas componentes conexas distintas.

Ligando dois vértices de cada uma dessas duas componentes conexas, isso não produziria um ciclo, contrariando nossa hipótese.

Portanto o grafo T , que é conexo e não possuindo ciclos, é uma árvore.

□

3.10 Árvore Geradora

Para que seja possível prosseguir, precisamos definir alguns tipos de grafos.

Definição 3.10.1.

1. Um **grafo direcionado**, também conhecido como **digrafo**, é um tipo de grafo em que as arestas possuem uma direção associada.

Em outras palavras, as arestas possuem uma seta indicando a orientação do percurso que deve ser adotado, no sentido percurso entre dois vértices.

2. **Grafo ponderado** é um grafo em que cada aresta possui um valor associado, chamado de **peso ou custo**.

Esses pesos representam uma medida ou atributo específico relacionado à aresta, como distância, tempo, capacidade, custo monetário, entre outros.

Exemplo 3.10.1.

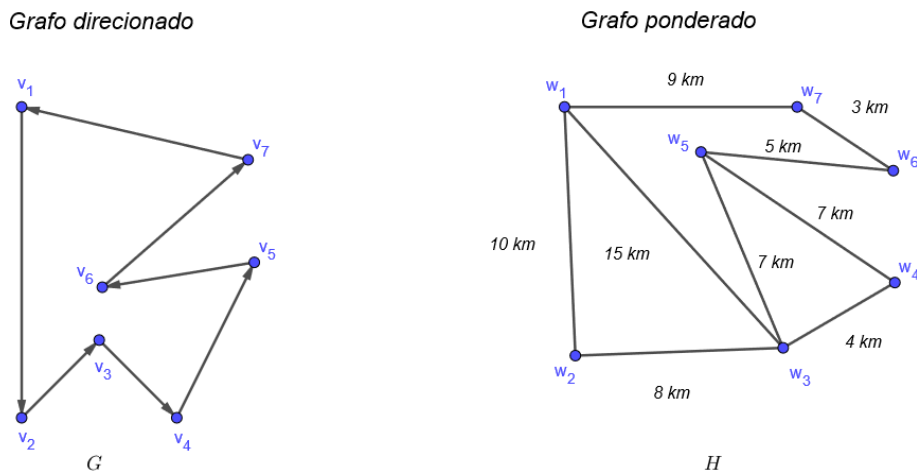


Figura 21 – Grafo G - Direcionado e grafo H - Ponderado

Definição 3.10.2. Uma árvore geradora de um grafo não direcionado G é um subgrafo que é uma árvore e contém todos os vértices de G .

Um resultado fundamental relacionado às árvores geradoras é o Teorema da Árvore Geradora Mínima, que estabelece:

Teorema 3.10.1. Em um grafo conexo ponderado, existe sempre uma árvore geradora cuja soma dos pesos das arestas é mínima, denominada árvore geradora mínima.

Algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal é um método eficiente para encontrar a árvore geradora mínima em um grafo conexo ponderado. Ele segue uma estratégia que pode ser descrita como "escolher o melhor primeiro" (em inglês, greedy), onde as arestas são selecionadas em ordem crescente de peso, desde que sua inclusão não forme um ciclo com as arestas já selecionadas.

O algoritmo de Kruskal pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Inicialmente, todas as arestas do grafo conexo e ponderado são ordenadas em ordem crescente de peso.
2. Um conjunto, inicialmente vazio, denominado de conjunto T , é criado para armazenar as arestas da árvore geradora mínima que será obtida.
3. Caso o grafo possua laços, esses são descartados para a aplicação do algoritmo.
4. Caso o grafo possua arestas paralelas entre dois vértices, as arestas de maior peso serão descartadas, mantendo somente a de menor peso para aplicação do algoritmo.

5. Para aresta em ordem crescente de peso:

- Verifique se a inclusão da aresta forma um ciclo com as arestas já selecionadas.
- Caso a inclusão não forma um ciclo, a aresta é adicionada ao conjunto T de arestas.
- Caso contrário, a aresta é descartada.

Como veremos na demonstração abaixo, conjunto de arestas resultante do algoritmos de Kruskal será a árvore geradora mínima do grafo conexo ponderado dado inicialmente.

Observação 3.10.1. Essa estratégia de "escolher o melhor primeiro" é conhecida como abordagem gulosa, onde a cada passo faz-se a escolha da aresta de menor peso, na esperança de que essa escolha leve a árvore geradora mínima.

No contexto do algoritmo de Kruskal, a abordagem gulosa se manifesta na escolha das arestas de menor peso que não formam ciclos.

A seguir, faremos a demonstração do Teorema 3.10.1:

Suponha que G seja um grafo ponderado e conexo.

Seja T o conjunto de arestas resultante do algoritmo de Kruskal.

O grafo T obtido pelo algoritmo é sempre uma árvore pois, ele contém arestas do grafo G de uma forma que, ao final da aplicação do algoritmo, temos um grafo simples, conexo e sem ciclos, ou seja, uma árvore geradora do grafo ponderado G (Definição 3.9.1).

Vamos mostrar que a árvore geradora T , obtida através da aplicação do algoritmo de Kruskal sobre o grafo G , é uma árvore geradora mínima, ou seja, que T é uma árvore onde a soma dos pesos de todas as arestas é o menor possível.

Suponha, por contradição, que T não seja uma árvore geradora mínima.

Se T não é uma árvore geradora mínima do grafo conexo ponderado G , deve existir uma árvore geradora T' com menor peso possível, portanto, um peso menor que o peso de T .

Considere uma aresta uv , escolhida pelo algoritmo de Kruskal, que não pertence a T' mas pertence a T .

Notemos que os vértices u e v pertencem a T' , pois T' é uma árvore geradora do grafo conexo e ponderado G .

Desta forma deve existir um caminho em T' que conecta os vértices u e v .

Nesse caminho, entre u e v , deve haver pelo menos uma aresta xy pertencente a T' que não pertence a T .

De fato, se todas as arestas do caminho ligando u a v em T' pertencesse a T , teríamos um ciclo em T , o que seria um absurdo.

Removendo a aresta xy desse caminho em T' adicionando a aresta uv , obtemos uma nova árvore geradora T'' .

A árvore geradora T'' inclui todas as arestas de T' , exceto xy , e também inclui a aresta uv .

Como o algoritmo de Kruskal adicionou a aresta uv em T , a aresta uv possui um peso menor que a aresta xy .

Portanto, encontramos uma árvore T'' que tem um peso menor que peso de T' , contradizendo a afirmação de que T' é a árvore com menor peso possível.

Então a árvore geradora T é a árvore obtida com menor peso possível, ou seja, T é a árvore geradora mínima.

Podemos concluir que T é uma árvore geradora mínima associada ao grafo conexo e ponderado G . □

Exemplo 3.10.2. Encontre a árvore geradora mínima do grafo conexo ponderado G abaixo

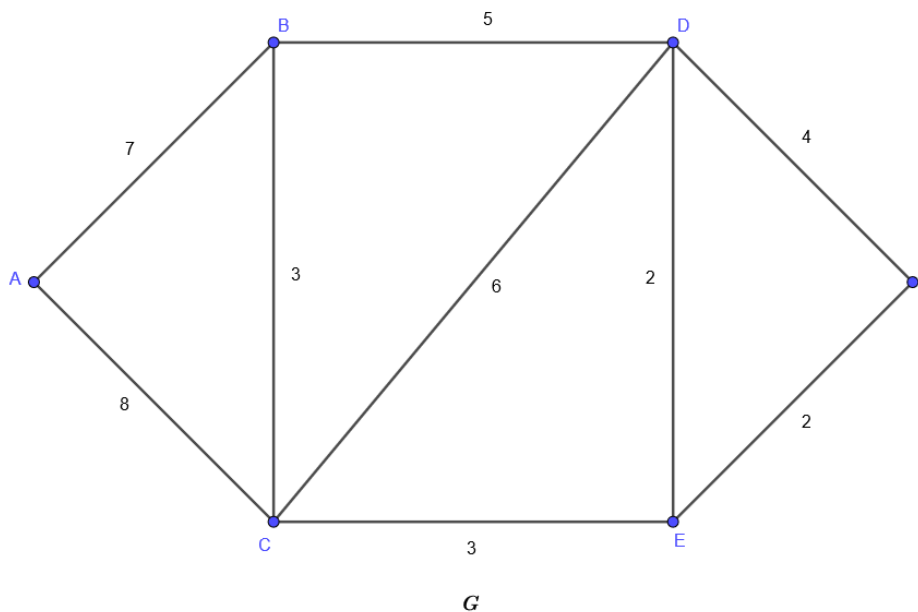
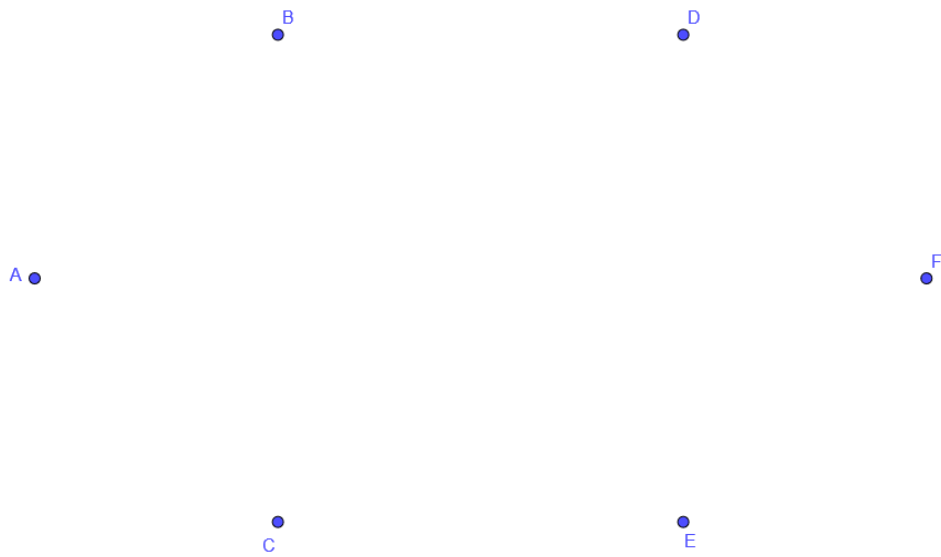


Figura 22 – Árvore geradora do grafo G

Podemos observar que o grafo é conexo, ponderado e não é direcionado. Além disso ele não possui arestas paralelas e nem laços.

Para aplicação do algoritmo, vamos iniciar desconsiderando-se as arestas, com somente os vértices do grafo G

Figura 23 – Árvore geradora do grafo G - 1

1. Organizamos as arestas por ordem crescente de peso

$$ED = 2$$

$$EF = 2$$

$$CB = 3$$

$$CE = 3$$

$$DF = 4$$

$$BD = 5$$

$$CD = 6$$

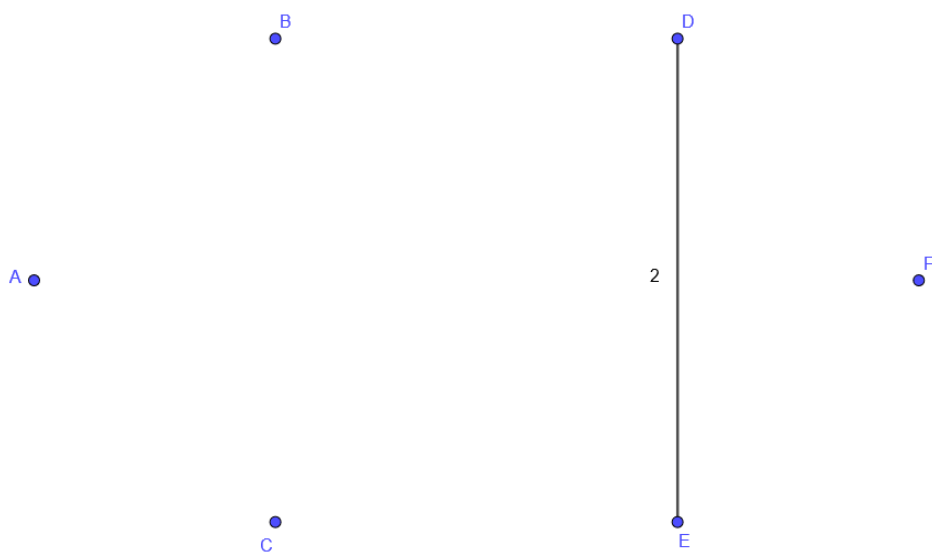
$$AB = 7$$

$$AC = 8$$

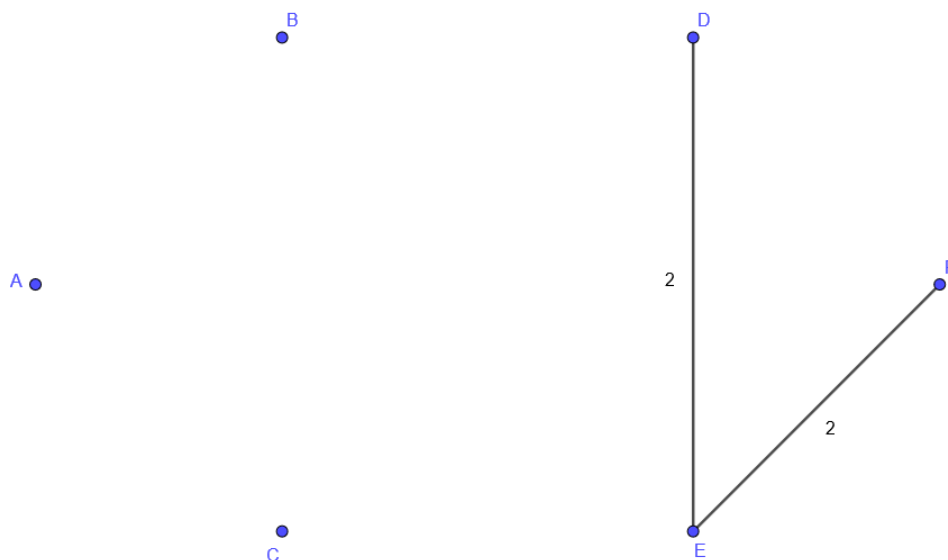
2. Vamos inserindo no grafo T as arestas de menor peso, sem que se forme ciclos.

Caso um ciclo seja formado, descartamos essa aresta e escolhemos a próxima aresta de menor peso.

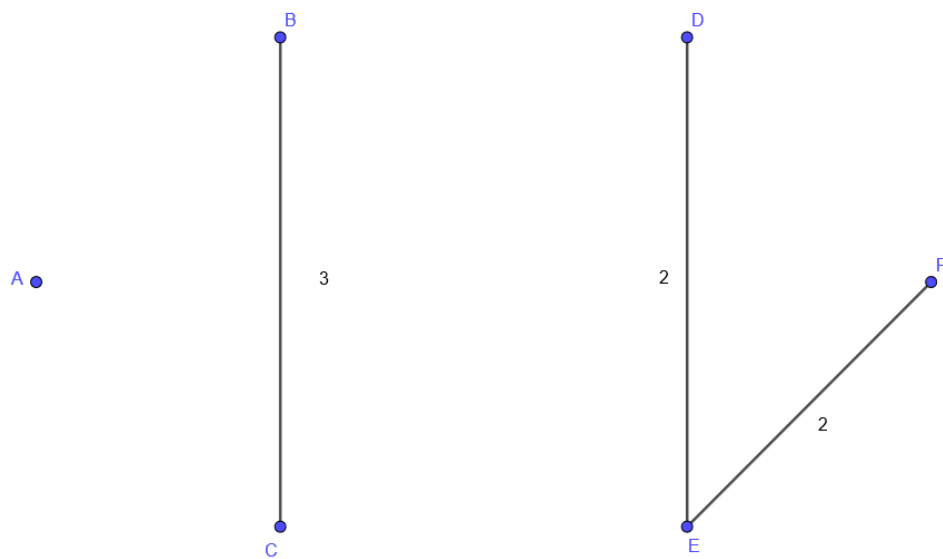
No nosso exemplo acima, primeira aresta, portanto, a ser inserida é a aresta de peso ED de peso 2

Figura 24 – Árvore geradora do grafo $G - 2$

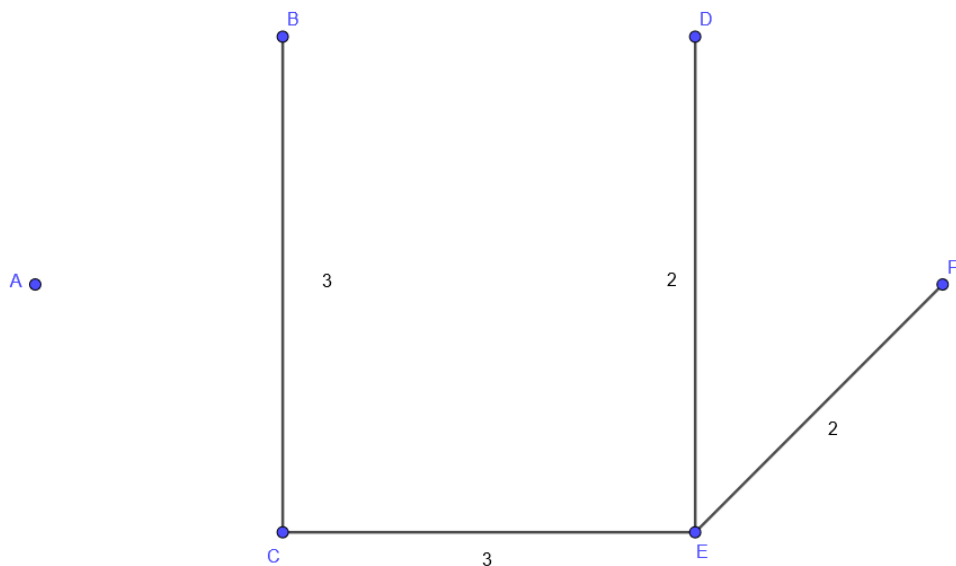
3. A seguir, inserimos a aresta de EF de peso 2

Figura 25 – Árvore geradora do grafo $G - 3$

4. Agora, adicionamos a aresta CB de peso 3

Figura 26 – Árvore geradora do grafo $G - 4$

5. Então adicionamos a aresta CE , também de peso 3

Figura 27 – Árvore geradora do grafo $G - 5$

6. A próxima aresta, de menor peso, é a aresta DF , de peso 4, porém, a adição dessa aresta formará um ciclo (a saber, $DEFD$), como vemos na figura abaixo

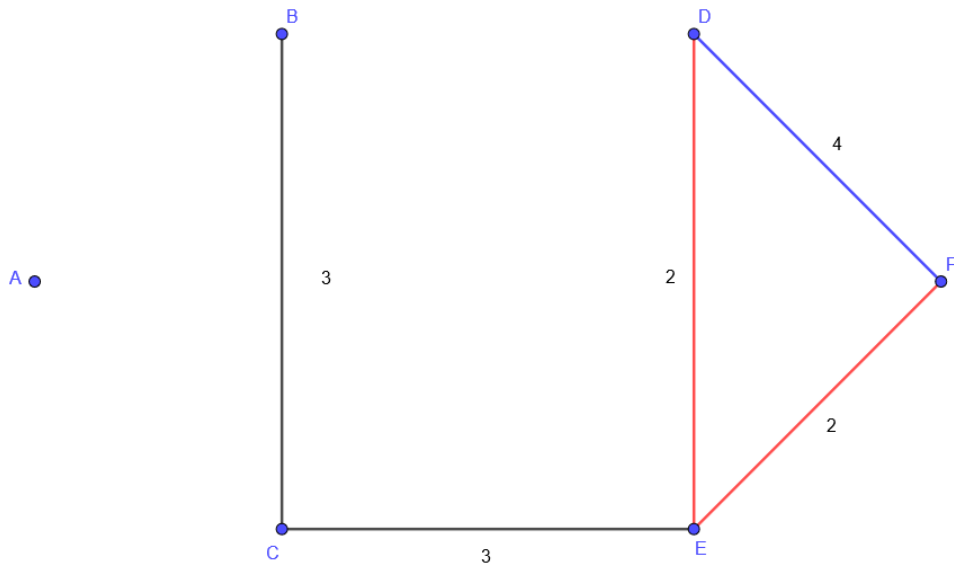


Figura 28 – Árvore geradora do grafo $G - 6$

Portanto a aresta DF será descartada.

7. A próxima aresta é a BD de peso 5, que também formará um ciclo (a saber, $BCEDB$), então também será descartada.
8. A aresta seguinte é a aresta CD de peso 6, que também será descartada por formar ciclo, (a saber, $CDEC$).
9. A seguir é a aresta AB de peso 7, que pode ser acrescentada, pois não causa ciclos

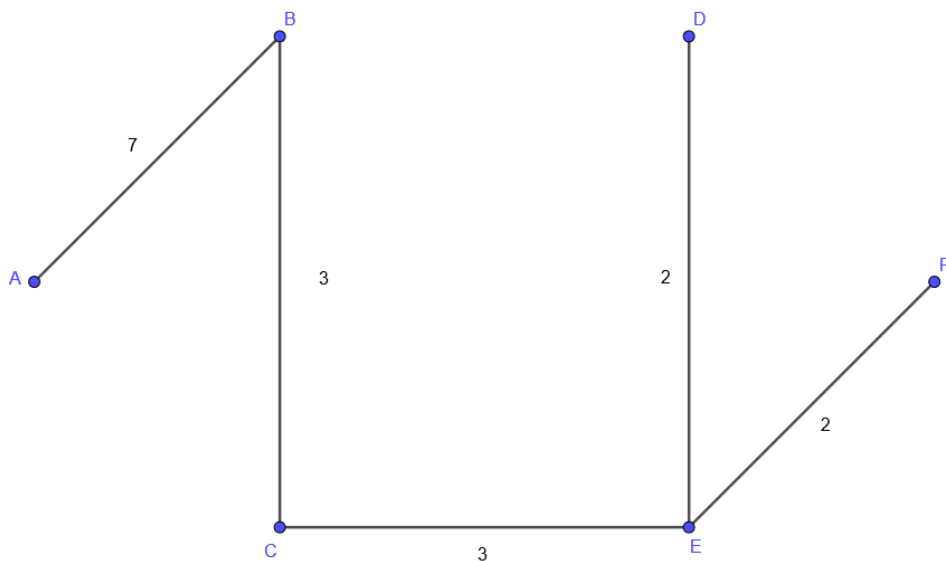


Figura 29 – Árvore geradora do grafo $G - 7$

10. Por último, descartamos a aresta AC de peso 8 pois formará novamente um ciclo (a saber, ABCA).

Dessa forma obtemos o grafo T que será a árvore geradora mínima do grafo G

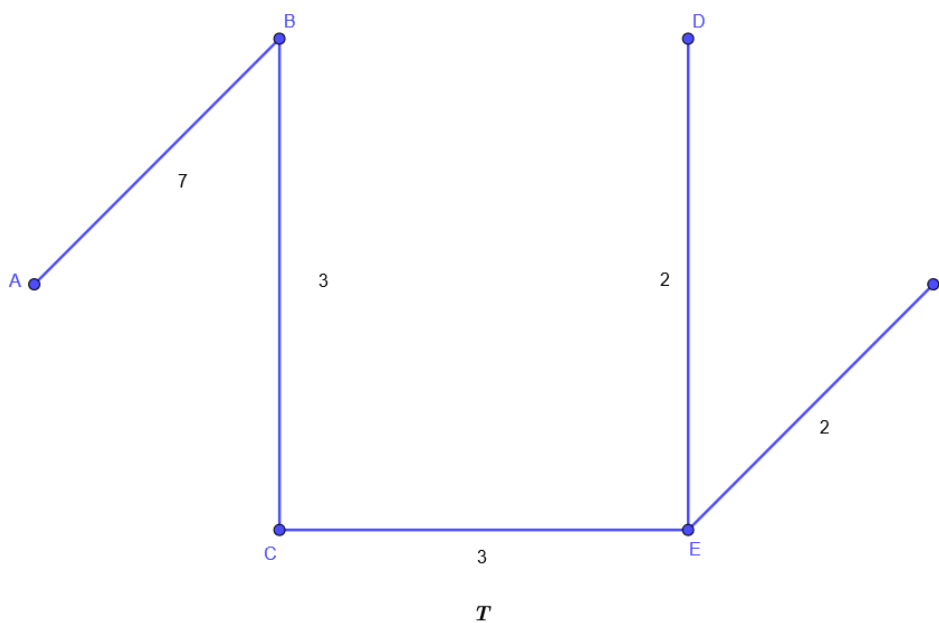


Figura 30 – Árvore geradora do grafo G - 8

SUBCONJUNTOS ESPECIAIS DE UM GRAFO

Este capítulo aborda a análise de subconjuntos especiais em grafos, que são estruturas fundamentais no campo da teoria dos grafos. Dentre esses subconjuntos, destacam-se os conjuntos independentes, também conhecidos como conjuntos independentes máximos ou conjuntos estáveis.

Esse conceito desempenha um papel importante em diversas áreas, como alocação de recursos, programação matemática, otimização combinatória e análise de redes.

Exploraremos as propriedades dos conjuntos independentes e discutiremos algoritmos e técnicas para encontrar conjuntos independentes máximos em grafos. Além disso, investigaremos suas aplicações práticas em diferentes contextos, demonstrando sua relevância e utilidade na resolução de problemas.

Ao compreender a natureza dos conjuntos independentes e sua relação com as características dos grafos, poderemos obter dados valiosos sobre a estrutura e a conectividade dessas redes, contribuindo para avanços no campo da teoria dos grafos e suas aplicações práticas.

4.1 Conjuntos Independentes

Definição 4.1.1. *Um conjunto independente em um grafo é um subconjunto de vértices no qual nenhum par de vértices é adjacente, ou seja, não há arestas que conectam os vértices.*

Exemplo 4.1.1. *Considere o seguinte grafo não direcionado e não ponderado G :*

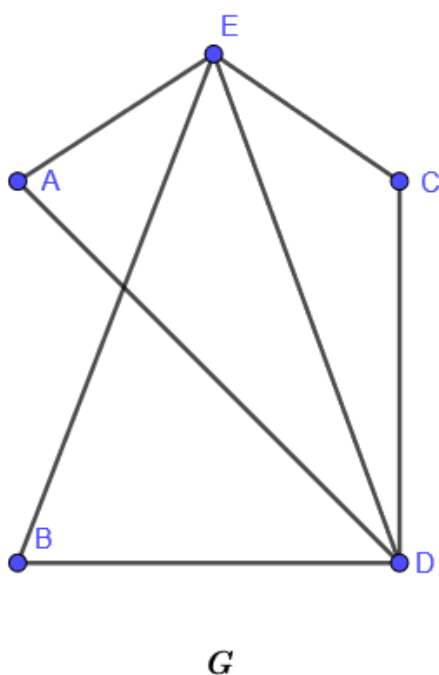


Figura 31 – Grafo não direcionado e não ponderado G

Observe que no grafo acima, os vértices $\{A, B, C\}$ formam um conjunto independente, pois nenhum par de vértices nesse conjunto está conectado por uma aresta. \square

Exemplo 4.1.2. Utilizando o Exemplo 4.1.1 para que o conjunto de vértices $\{A, B, C\}$ não contenha um conjunto independente, o grafo G deveria ser da seguinte forma:

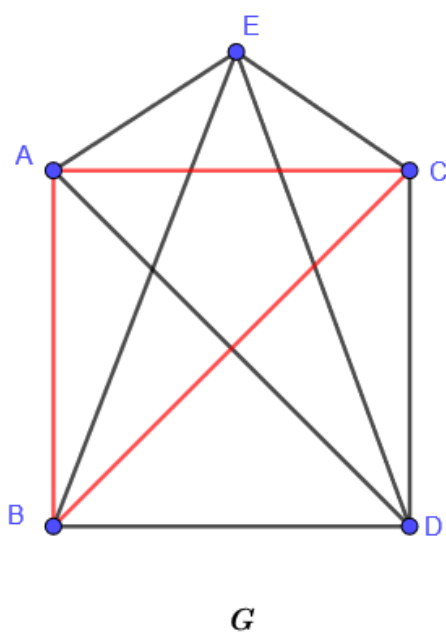


Figura 32 – Conjuntos independentes no grafo G

As arestas em vermelho AB , AC e BC conectam os vértices A , B e C , dessa forma, esses vértices não formam mais conjuntos independentes.

Podemos observar também que no grafo acima, não existe nenhum conjunto independente.

4.2 Grafo Planar

Definição 4.2.1. Um grafo planar é um grafo simples, que pode ser construído em um plano de tal forma que as arestas não se cruzem.

Grafo planar maximal é um grafo planar que não pode ser ampliado para um grafo planar maior, adicionando uma aresta sem adicionar um vértice.

Exemplo 4.2.1. Considere um grafo planar G com 4 vértices e 6 arestas, onde cada vértice está conectado a todos os outros. Esse grafo é planar maximal, pois:

1. G é planar pois pode ser representado no plano sem cruzamentos, como na figura abaixo.
2. A adição de qualquer nova aresta entre vértices já conectados não resultaria em cruzamentos mas o grafo deixaria de ser um grafo simples (ou seja, tendo laço ou arestas paralelas) e conseqüentemente, deixaria de ser um grafo planar.

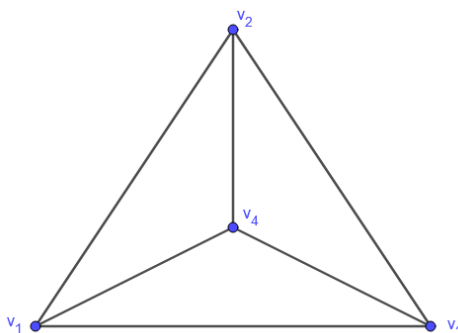


Figura 33 – Grafo G planar maximal com 4 vértices

Observação 4.2.1.

- Pode-se mostrar que um grafo planar maximal com n vértices possui exatamente $3n - 6$ arestas se $n \geq 3$ (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).
- As regiões limitadas, delimitadas pelas arestas do grafo planar, serão chamadas de faces ou regiões.

Fórmula de Euler

A Fórmula de Euler, foi demonstrada para poliedros e se mostra uma ferramenta importante na teoria dos grafos, pois se aplica a qualquer grafo planar conexo.

A essência desta fórmula reside em estabelecer uma relação entre o número de vértices, o número de arestas e o número de faces de um grafo planar de uma maneira concisa e informativa, cuja demonstração será exibida logo após o Exemplo e a Observação abaixo.

Teorema 4.2.1. *Seja G um grafo planar, conexo. Então:*

$$V + F - A = 2 \quad (\text{Fórmula de Euler})$$

onde:

- $V = |V(G)|$ é o número de vértices,
- $A = |A(G)|$ é o número de arestas,
- F é o número total de faces, incluindo a **face externa** (oceano).

Exemplo 4.2.2. *O grafo abaixo possui 4 vértices, 6 arestas e 4 faces.*

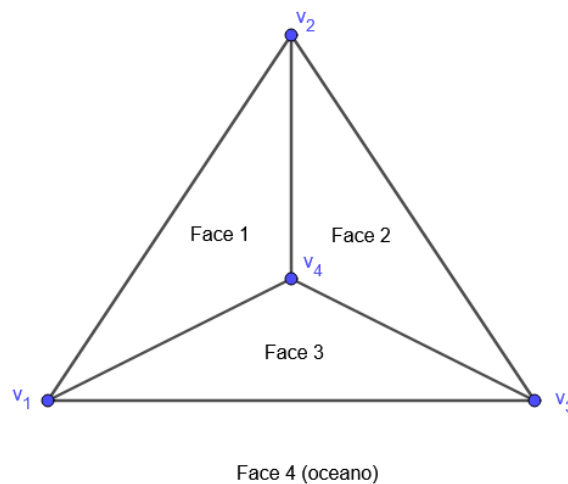


Figura 34 – Exemplo de grafo planar maximal

Demonstração:

A demonstração da fórmula de Euler será realizada por indução sobre o número de arestas $A \geq 1$.

Mostraremos que a Fórmula de Euler é verdadeira para $A = 1$.

Notemos que nesse caso, temos:

$$V = 2, A = 1 \text{ e } F = 1 \text{ (só temos o oceano).}$$

Assim

$$V + F - A = 2 + 1 - 1 = 2,$$

ou seja, vale 4.2.1 para $A = 1$.

Consideremos como hipótese de indução, que a fórmula de Euler é válida para um grafo planar conexo com K arestas, ou seja,

$$V + F - K = 2 \text{ (Hipótese de indução)}$$

Iremos demonstrar agora que, para um grafo planar conexo, com $K + 1$ arestas, a Fórmula de Euler também é válida.

Para isso, consideraremos dois casos:

1º caso - suponhamos que o grafo planar conexo G tem $A = K + 1$ arestas, $V + 1$ vértices sendo um desse vértices de grau 1.

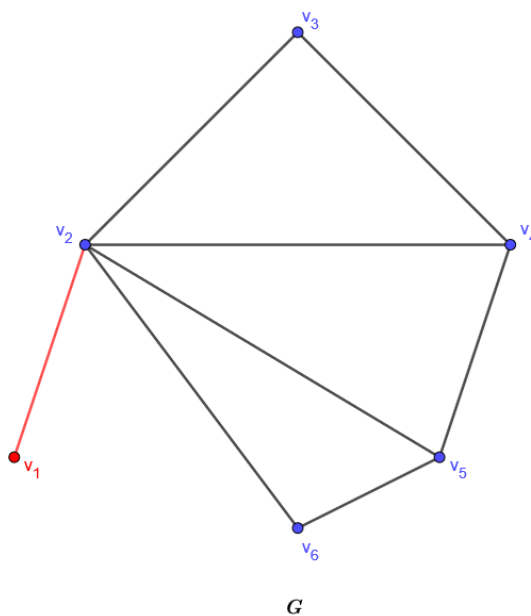


Figura 35 – Grafo G - Planar e conexo

Em destaque, na figura acima, no grafo G , observe que o vértice v_1 , que possui grau 1, e uma aresta que conecta v_1 e v_2 .

Ao removermos o vértice v_1 e a respectiva aresta, temos o grafo G' abaixo:

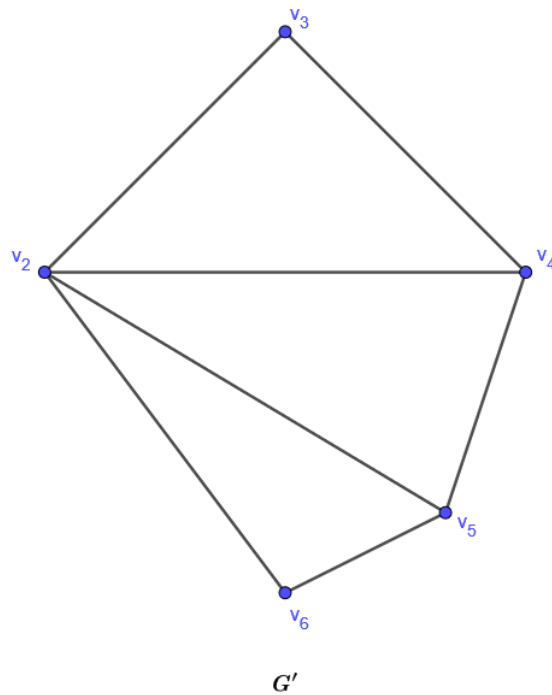


Figura 36 – Grafo G' - Sem o vértice v_1

Notemos que grafo G' possui K arestas e V vértices.

Pela hipótese de indução, a Fórmula de Euler é válida para G' , ou seja:

$$V + F - K = 2$$

Logo, para o grafo G , temos:

$$(V + 1) + F - (K + 1) = V + F - K = 2,$$

onde, na última igualdade, utilizamos a hipótese de indução, mostrando que a Fórmula de Euler é válida no 1º caso.

2º caso - suponha que o grafo G , possui $K + 1$ arestas e todos os seus vértices possuem grau maior que 1.

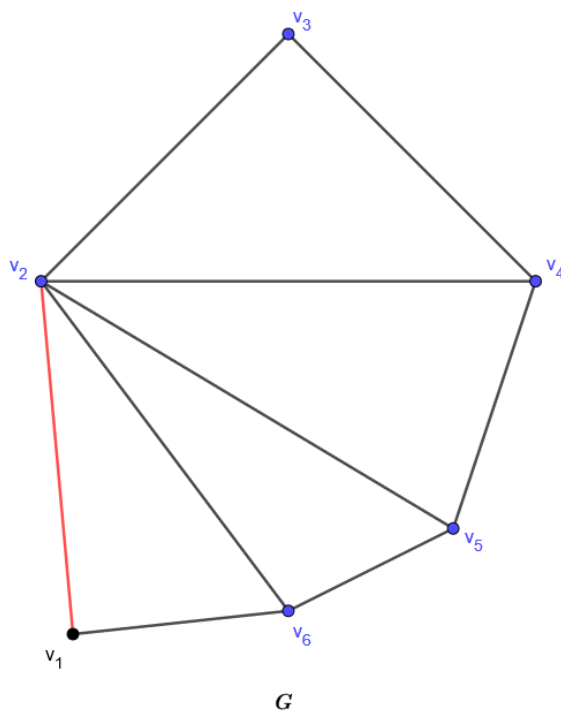


Figura 37 – Grafo G - Com $K + 1$ arestas e grau maior que 1

Removendo uma aresta que faz divisa com a face externa do grafo G (o oceano), a saber, a aresta destacada na figura acima, obtemos o grafo G' , ilustrado na figura abaixo:

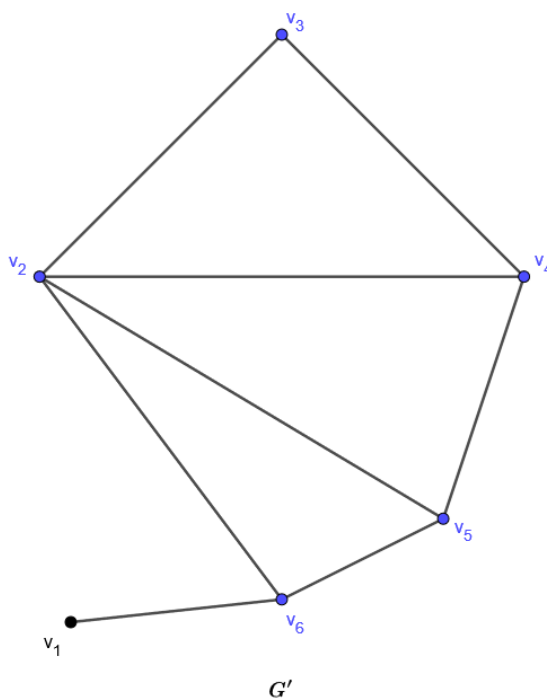


Figura 38 – Grafo G' - Sem a aresta v_1v_2

Notemos que, ao remover a aresta destacada do grafo G , o grafo G' possui uma aresta a

menos e uma face a menos que o grafo G .

Logo, o grafo G' possuirá A' arestas e assim, pela hipótese de indução, temos:

$$V' + F' - A' = 2.$$

Portanto:

$$V' + (F' + 1) - (A' + 1) = V' + F' - A' = 2,$$

onde na última igualdade utilizou-se a hipótese de indução, mostrando que a fórmula de Euler é válida para o 2º caso.

Portanto, a Fórmula de Euler é verdadeira para um grafo G planar e conexo, como queríamos demonstrar.

□

Observação 4.2.2. É importante notar que, com as hipóteses Teorema de Euler (4.2.1) satisfeitas, podemos concluir que o valor da expressão

$$V - F + A$$

independe do grafo planar conexo considerado, ou seja, é um invariante.

Seja o grafo planar simples de um problema prático do mundo real ou um diagrama complexo em um contexto matemático abstrato, a Fórmula de Euler fornece uma estrutura sólida para analisar suas propriedades e relações.

Esta dissertação empregará a Fórmula de Euler como um instrumento valioso na análise de grafos planares, demonstrando sua aplicabilidade e poder em vários contextos ao longo deste trabalho.

A seguir, exibiremos alguns exemplos de grafos associados a poliedros platônicos, mais explicitamente:

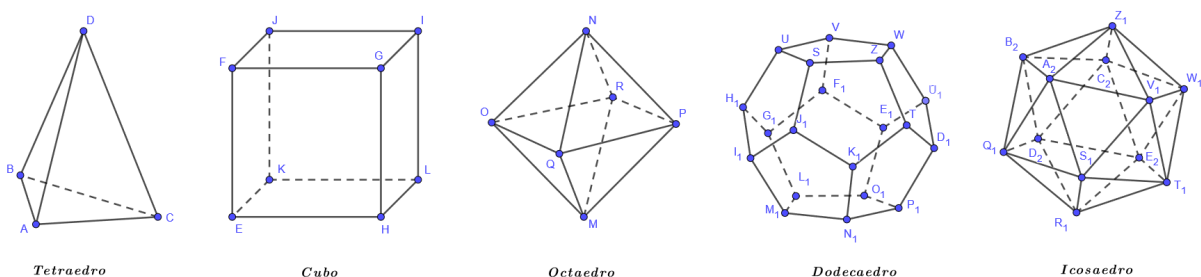


Figura 39 – Grafos associados aos poliedros platônicos

Para se obter um grafo planar, cada vértice e cada aresta do poliedro deve se tornar, respectivamente, um vértice e uma aresta do grafo e as arestas não devem se cruzar.

No caso dos poliedros platônicos acima, temos a seguinte configuração que associa cada poliedro o seguinte grafo planar:

figura abaixo:

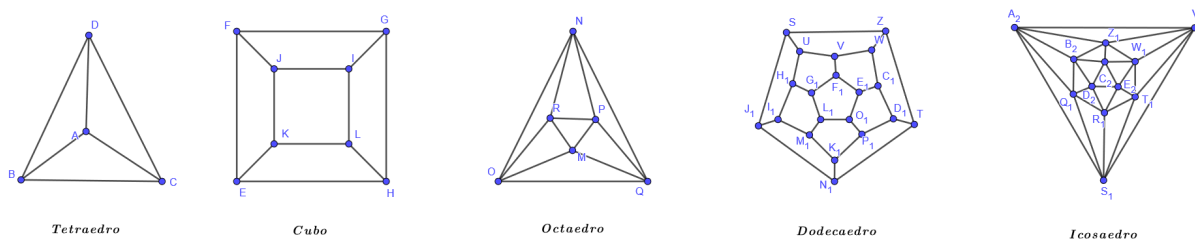


Figura 40 – Grafos planares de cada poliedro platônico

Observe que as arestas dos grafos acima não se cruzam, dessa forma eles são os grafos planares associado a cada poliedro dado. □

Observação 4.2.3. É possível se obter um grafo planar associado um mapa geográfico, adotando o seguinte procedimento:

1. cada município do mapa geográfico será um vértice do grafo.
2. se dois municípios fazem fronteira, os vértices referentes àqueles municípios devem ser ligados por uma única aresta.

Para ilustrar o mapa geográfico da região de São Carlos, dado abaixo:

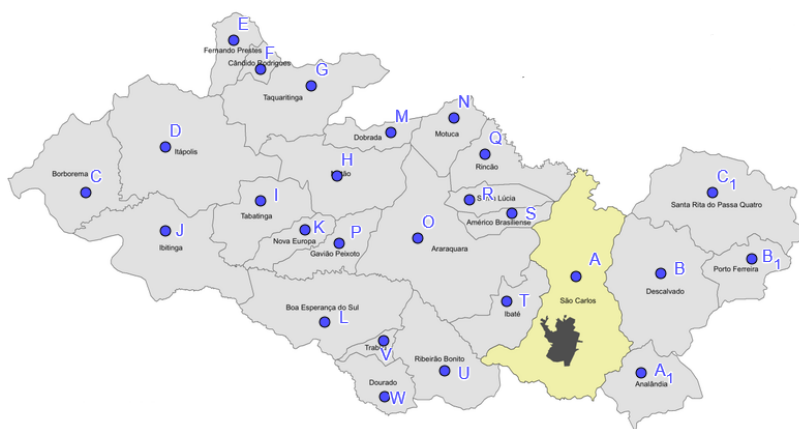


Figura 41 – Mapa geográfico da região de São Carlos

Que pode ser representado pelo grafo abaixo:

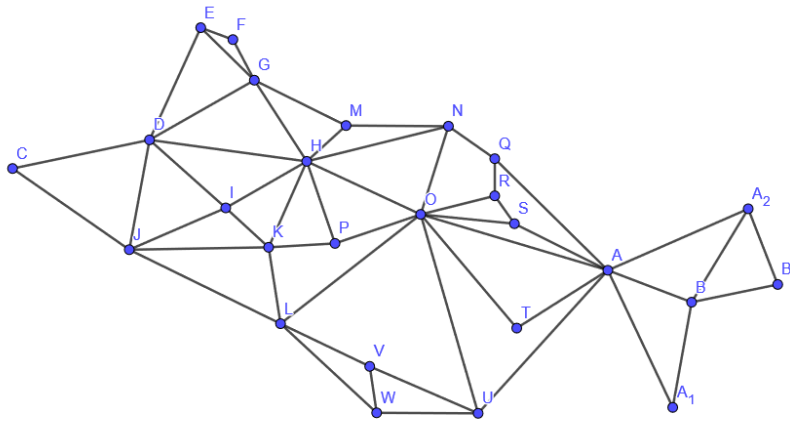


Figura 42 – Mapa geográfico da região de São Carlos

Dessa forma, obtemos um grafo com 26 vértices, 52 arestas e 29 faces.

A seguir, enunciaremos dois lemas que terão importância para a demonstração do Teorema das cinco cores.

Lema 4.2.1. Limite de faces em grafos planares.

Para todo grafo planar conexo, temos:

$$3F \leq 2A \quad (4.1)$$

Onde:

F : Número de faces (incluindo a face externa)

A : Número de arestas

Demonstração:

Em um grafo planar G , as faces do grafo possuem, no mínimo, 3 arestas.

Porém, em todo grafo planar, podemos ter faces com um número maior de arestas.

Portanto, iremos representar o número de faces como F_n , onde n é o número de arestas daquela face com $n \geq 3$.

O número total de faces de um grafo planar, temos:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 \dots \quad (4.2)$$

Se desejamos obter o número total de arestas desse grafo planar, basta multiplicar cada face que possui 3 arestas por 3, ou seja, F_3 multiplicada por 3, cada face que possui 4 arestas por 4, ou seja, F_4 multiplicada por 4, e assim sucessivamente.

Porém, cada aresta do grafo planar é lado de exatamente duas faces, utilizando a igualdade 4.2 e igualando ao dobro de arestas, temos:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \dots$$

Assim:

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 \dots) + F_4 + 2F_5 \dots \quad (4.2)$$

ou seja:

$$2A = 3F + F_4 + F_5 \dots$$

Dessa forma obtemos:

$$2A \geq 3F, \quad (4.3)$$

como queríamos demonstrar.

□

É importante observar que esta desigualdade é uma limitação superior para o número de arestas em um grafo planar, dada a quantidade de arestas.

Lema 4.2.2. Em um grafo planar há, pelo menos, um vértice com grau menor ou igual a 5.

Demonstração:

Observe que o grau de vértice é o número de arestas conectadas a esse vértice. Se somarmos os graus de todos os vértices em um grafo G , como 2 vértices são sempre conectados por 1 aresta, podemos dizer que em um grafo planar, o número de vértices será duas vezes o número de arestas, então,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2A,$$

onde $d(v)$ representa o grau do vértice v e A é o número de arestas em G .

Suponha por contradição que todos os vértices em G tenham grau estritamente maior que 5, ou seja,

$$d(v) > 5, \text{ para todo } v \in V(G). \quad (4.4)$$

Nesse caso, como a soma dos graus de todos os vértices deve ser estritamente maior que 5, a soma de todos os graus é, no mínimo, $6V$.

Então, temos

$$6V \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2A, \quad (4.5)$$

onde V é o número de vértices em G .

No entanto, para grafos planares, temos pelo lema 4.2.1 que:

$$A \leq 3V - 6. \quad (4.6)$$

Logo, de 4.5 e 4.6, segue que:

$$6V \leq 2A \leq 2(3V - 6), \quad (4.7)$$

ou equivalentemente:

$$6V \leq 6V - 12, \quad (4.8)$$

o que é uma contradição, o que confirma que a suposição de que todos os vértices têm grau estritamente maior que 5 é inválida.

Portanto, em um grafo planar, deve haver pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.

□

4.3 Coloração de Grafos

Definição 4.3.1. A coloração de vértices em um grafo G é uma função $f : V(G) \rightarrow C$, onde C é um conjunto de cores, que atribui uma cor a cada vértice de G .

Uma coloração é dita válida se vértices adjacentes têm cores diferentes.

Na situação acima, diremos que um vértice v tem a cor $f(v)$.

O número cromático de G é o número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo G , de forma que esse grafo adquira uma coloração válida e é denotado por $\chi(G)$.

Grafos bipartidos são os grafos cujos vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes, e seu número cromático é 2.

Grafos triviais possuem número cromático igual a 1.

Grafo complementar é um grafo G' que possui os mesmos vértices de G , mas as arestas que não estão em G estão presentes em G' .

Exemplo 4.3.1. O grafo não direcionado G colorido abaixo é um grafo trivial



Figura 43 – Grafo G - Grafo trivial

Exemplo 4.3.2. Encontre uma coloração válida para grafo não direcionado G abaixo:

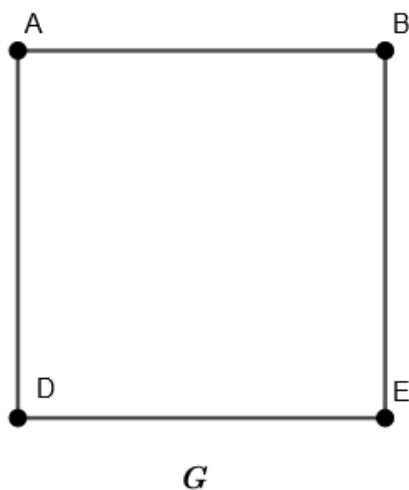


Figura 44 – Grafo G - Encontre uma coloração válida

Resolução:

Para colorir os vértices desse grafo, podemos atribuir as cores vermelho e azul, como ilustra a figura a baixo:

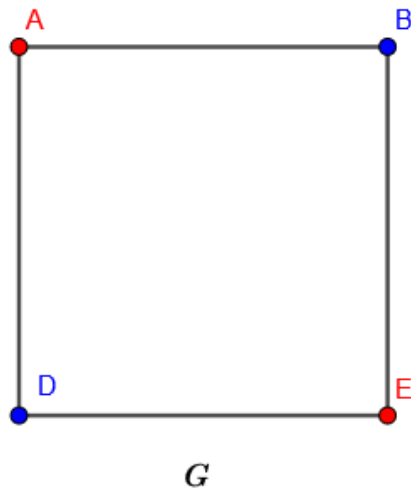


Figura 45 – Grafo G - Grafo com coloração válida

Essa é uma coloração válida, pois vértices adjacentes têm cores diferentes, logo seu número cromático será 2. □

Exemplo 4.3.3. *Considere o seguinte grafo não direcionado G , abaixo.*

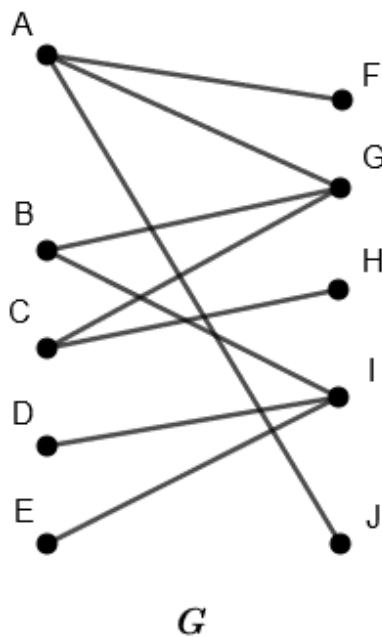
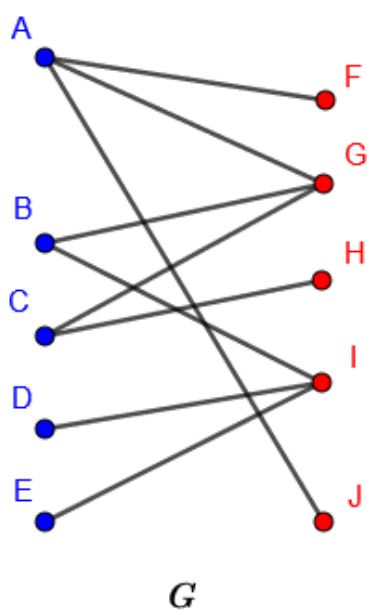


Figura 46 – Grafo G - Não direcionado

Qual o número cromático de G ?

Resolução:

Para colorir os vértices desse grafo, utilizaremos as cores vermelho e azul, como ilustra a figura abaixo:

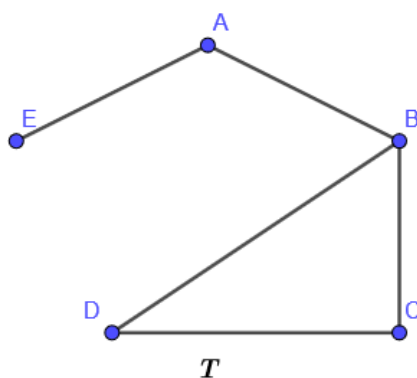
Figura 47 – Grafo G - Colorido

Observemos que a coloração acima é válida e assim o número cromático do grafo acima será 2. \square

Observação 4.3.1. O grafo acima é um grafo bipartido, pois ele pode ser particionado em 2 conjuntos independentes.

A saber, os vértices em azul e os vértices vermelhos.

Exemplo 4.3.4. Encontre o grafo complementar do grafo T abaixo:

Figura 48 – Grafo T - Encontre o grafo complementar

Resolução:

Observe que o grafo T possui os vértices A, B, C e D e as arestas AB, AE, BC, BD e CD . Para obter grafo complementar de T , que denotaremos por T' , consideremos todos os vértices

de T , porém, somente com as arestas que não estão em T , ou seja, as arestas AC , AD , BE , CE e DE , como mostra a figura a seguir:

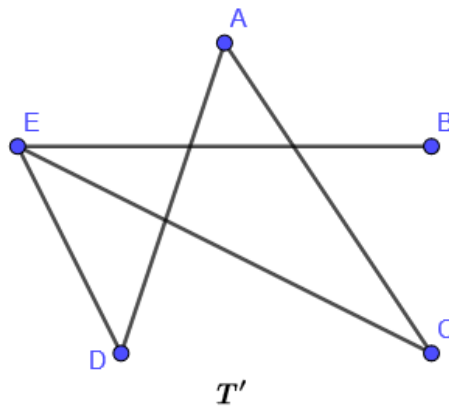


Figura 49 – Grafo T' - Grafo complementar de T

Observação 4.3.2. Esses conceitos nos apresenta um resultado importante conhecido como Teorema das Quatro Cores que será enunciado, sem demonstração, a frente.

A demonstração do teorema das quatro cores, apresentada em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, envolve conceitos avançados de matemática, como por exemplo, teoria dos grafos, topologia e métodos computacionais.

Não existe até o momento uma demonstração do mesmo sem utilizar argumentos computacionais.

O enunciado do mesmo é dado pelo:

Teorema 4.3.1. Qualquer grafo planar pode ser colorido com não mais do que quatro cores, de forma que vértices adjacentes recebam cores diferentes.

Apesar de não existir uma demonstração matemática do teorema das quatro cores, apresentaremos a seguir, uma versão mais fraca, conhecida como teorema das cinco cores, cujo enunciado é:

Teorema 4.3.2. Qualquer grafo planar pode ser colorido com não mais do que cinco cores, de forma que vértices adjacentes recebam cores diferentes.

Demonstração:

A demonstração será feita por indução sobre ao número de vértices.

Notemos que em um grafo G , planar e conexo, com n vértices, com $n \leq 5$, pode ser colorido com não mais que 5 cores, completando o primeiro passo da indução.

Suponhamos que $n \geq 6$ e G_n é um grafo planar e conexo, com n vértices que pode ser colorido por não mais que 5 cores.

Consideremos um grafo, planar e conexo, G_{n+1} , com $n + 1$ vértices.

Mostremos que o grafo G_{n+1} pode ser colorido por não mais que 5 cores.

Como G_{n+1} é um grafo planar e, pelo lema 4.2.2, existe um vértice $v \in V(G)$ de modo que

$$d(v) \leq 5.$$

Considere o grafo

$$G_n \doteq G_{n+1} \setminus \{v\}.$$

Como G_n , é um grafo planar e conexo, que possui n vértices, pela hipótese de indução, ele pode ser colorido com não mais que 5 cores, ou seja,

$$\chi(G_k) \leq 5.$$

Mostremos que,

$$\chi(G_{n+1}) \leq 5.$$

notemos que, se

$$d(v) < 5,$$

ou seja, se o vértice v está ligado a no máximo 4 vértices, podemos colorir o vértice v e os vértices adjacentes a v , com não mais que 5 cores, isto é,

$$\chi(G_{k+1}) \leq 5.$$

Suponhamos agora, que

$$d(v) = 5.$$

Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 os vértices adjacentes a v , nomeados, em sentido horário, como na figura abaixo:

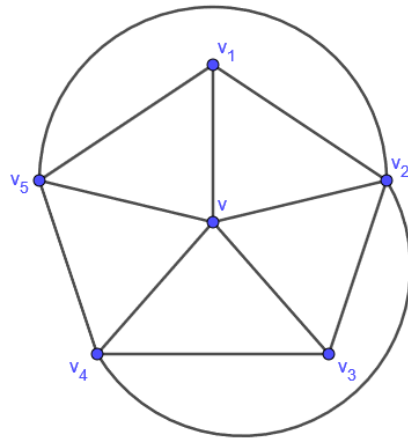


Figura 50 – Grafo G - Grafo com vértices adjacentes a v

Notemos que no grafo G_{n+1} , planar e conexo há, pelo menos, um par de vértices que não são adjacentes entre si, na figura acima, os vértices v_1 e v_3 não adjacentes entre si.

Ao removermos o vértice v_3 , obtemos o grafo G_n , onde

$$G(n) \doteq G_{(n+1)} \setminus \{v_3\}$$

Pela hipótese de indução, sabemos que é possível colorir G_n com não mais que cinco cores.

Assim, podemos obter uma coloração do grafo G_{n+1} colorindo, o vértice v_3 com a mesma coloração do vértice v_1 , desta forma, teremos,

$$\chi(G_{n+1}) \leq 5,$$

completando a demonstração.

□

4.4 Coloração de arestas

Para se colorir aresta, será necessário a seguinte definição:

Definição 4.4.1. Dizemos que duas arestas de um grafo G são adjacentes entre si se possuem um vértice em comum.

Definimos o grafo das arestas de um grafo G , denotado por G' , como o grafo que satisfaz:

- Cada vértice de G' está associada a uma aresta de G ;

- A adjacência entre vértices em G' é determinada pela adjacência das arestas correspondentes em G .

Observação 4.4.1.

1. Os vértices do grafo G' são obtidos associando a cada aresta do grafo G um único vértice, ou seja, cada aresta de G (adjacente ou não) corresponde a um vértice em G' .
2. Dado grafo um grafo G , temos

$$V(G') \sim A(G)$$

onde $A(G)$ é o conjunto das arestas de G e \sim é a associação descrita no item acima.

Exemplo 4.4.1. Na figura abaixo, temos o grafo G e o grafos das arestas de G :

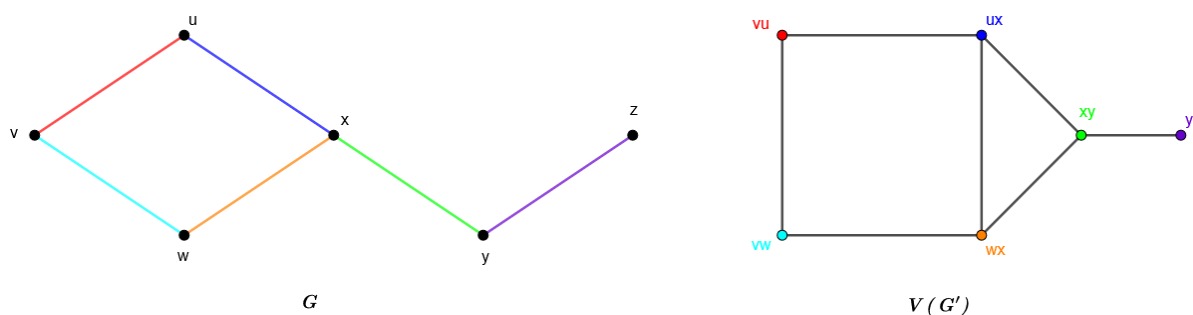


Figura 51 – Grafo G e os grafos das arestas de G (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; KOHAYAKAWA, 2011)

Notemos, na figura acima, que cada aresta d grafo G é identificada a um vértice do grafo G' .

Definição 4.4.2. Uma coloração válida de arestas de um grafo G é uma atribuição de cores às arestas de G tal que arestas adjacentes recebam cores distintas.

Observação 4.4.2.

- Note que uma aresta de um grafo não inclui os vértices por ela conectados.
- Uma coloração das arestas de um grafo é equivalente a coloração dos vértices do grafo das arestas.

Colorações mínimas

A coloração de arestas é mínima quando colorimos as arestas de um grafo planar e conexo de forma que o número de cores é o menor possível.

Definição 4.4.3. O *índice cromático* de um grafo G , denotado por $\chi'(G)$, é o número de cores mínimo para a coloração de suas arestas.

Observação 4.4.3. Notemos que coloração mínima de um grafo G satisfaz

$$\chi'(G) = \chi(G'),$$

onde G' é grafo das arestas de G .

Delimitação inferior

Proposição 4.4.1. Podemos apresentar uma delimitação inferior para coloração das arestas de um grafo.

Em todo grafo G , temos,

$$\chi'(G) \geq \Delta(G), \quad (4.9)$$

onde, $\Delta(G)$ é o grau máximo de um grafo G (Definição 3.2.1).

Demonstração:

Notemos que para qualquer coloração de arestas de um grafo G , com k cores em um vértice v , temos:

$$k \geq d(v). \quad (4.10)$$

De fato, em um grafo G , se o vértice v possuir grau n , ele terá n arestas distintas conectadas a ele.

Portanto, o grafo possui, no mínimo, n arestas adjacentes entre si, conectadas no vértice v , e estas devem ser coloridas de cores diferentes, ou seja, $n \leq k$.

Assim podemos concluir que

$$k \geq d(v).$$

□

Observação 4.4.4. *Uma consequência imediata da proposição acima é que se a coloração do grafo das arestas G é igual a $\Delta(G)$, então a coloração do grafo G' é mínima, ou seja, se $\chi'(G) = \Delta(G)$ a coloração é mínima.*

Grafos bipartidos

Na proposição anterior, vimos que para um grafo G , o índice cromático é maior ou igual ao grau máximo do mesmo, ou seja,

$$\chi'(G) \geq \Delta(G).$$

Para um grafo bipartido (ver definição 4.3.1) G , o índice cromático $\chi'(G)$ a sua delimitação inferior é complementada pela sua delimitação superior, que foi demonstrada acima.

Essa delimitação superior foi estabelecida, mais precisamente, por König, em 1916.

Teorema 4.4.1.

Para todo grafo bipartido G , temos

$$\chi'(G) \leq \Delta(G).$$

Em particular, temos

$$\chi'(G) = \Delta(G),$$

ou seja, a coloração mínima do grafo G' é $\Delta(G)$.

Demonstração:

A demonstração será feita por indução sobre n , o número de arestas do grafo G .

Notemos que, para $n = 0$, onde $A(G) = 0$, a afirmação é verdadeira, pois não há arestas para serem coloridas.

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para $n \geq 1$ arestas, ou seja, para qualquer grafo bipartido G com n arestas, temos

$$\chi'(G) \leq \Delta(G).$$

Mostremos que a afirmação é verdadeira para um grafo bipartido G com $n + 1$ arestas.

Vamos remover uma aresta a qualquer, do grafo bipartido G , resultando no grafo G' . Agora temos dois casos:

Caso 1: a aresta a está em algum ciclo C em G .

Considere a coloração de arestas no grafo G , denotada por $\chi'(G)$.

A remoção de a pode afetar a coloração das arestas no grafo G , pois a faz parte do ciclo C .

Se a remoção de a divide C em dois caminhos distintos, então a coloração de arestas pode ser modificada.

Observemos que a remoção de a não introduz restrições à coloração das outras arestas no grafo G , uma vez que a pertencia a um ciclo.

Portanto, podemos afirmar que a coloração mínima das arestas após a remoção de a permanece igual à coloração mínima original de G , representada por

$$\chi'(G') = \chi'(G).$$

A igualdade acima decorre do fato de que a não era a única conexão entre os vértices envolvidos no ciclo C .

Caso 2: a aresta a não está em nenhum ciclo em G .

Como o grafo G' é um grafo bipartido com n arestas.

Pela hipótese de indução, temos

$$\chi'(G') \leq \Delta(G').$$

No entanto, a remoção de a pode criar um vértice com grau maior em G' , então

$$\Delta(G') \leq \Delta(G).$$

Notemos que o número cromático de arestas não pode aumentar ao remover uma aresta.

Logo,

$$\chi'(G) = \chi'(G') \leq \Delta(G') \leq \Delta(G).$$

Portanto, por indução, para todo grafo bipartido G , temos

$$\chi'(G) \leq \Delta(G).$$

Em particular,

$$\chi'(G) = \Delta(G),$$

como queríamos demonstrar

□

Delimitação superior

Podemos apresentar uma delimitação superior para coloração das arestas de um grafo como a quantidade suficiente para se colorir as arestas de um grafo G .

Teorema 4.4.2.

Em um grafo G , temos:

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (4.11)$$

Demonstração:

A demonstração será feita por indução sobre n , o número de arestas do grafo G .

Notemos que, para $n = 0$, onde $A(G) = 0$, a afirmação é verdadeira, pois não há arestas para serem coloridas.

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para n arestas, ou seja, para qualquer grafo G com n arestas, temos

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Mostremos que a afirmação é verdadeira para um grafo G com $n + 1$ arestas.

Removemos uma aresta a , de G , resultando no grafo G' .

Agora, temos dois casos:

Caso 1: a aresta a está em algum ciclo C em G .

Neste caso, a remoção de a pode ou não afetar o número cromático de arestas.

Se a remoção de a divide C em dois caminhos distintos, então a coloração de arestas pode ser modificada.

Se a coloração de arestas em G' permanecer a mesma após a remoção de a , então

$$\chi'(G) = \chi'(G').$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\chi'(G') \leq \Delta(G') + 1,$$

onde $\Delta(G')$ é o grau máximo de G' .

Como a remoção de uma aresta não pode aumentar o grau máximo, temos

$$\Delta(G') \leq \Delta(G).$$

Portanto,

$$\chi'(G) = \chi'(G') \leq \Delta(G') \leq \Delta(G) + 1.$$

Se a remoção de a afeta a coloração de arestas, então teremos que

$$\chi'(G) = \chi'(G') + 1.$$

Notemos que a afirmação

$$\chi'(G') \leq \Delta(G') + 1,$$

permanece verdadeira.

Caso 2: a aresta a não está em nenhum ciclo em G .

Neste caso, G' é um grafo com n arestas. Pela hipótese de indução, temos

$$\chi'(G') \leq \Delta(G') + 1.$$

Observemos que a remoção de a pode criar um vértice com grau maior em G' , então $\Delta(G')$ pode ser menor que $\Delta(G)$.

No entanto, o número cromático de arestas não pode aumentar ao remover uma aresta.

Portanto,

$$\chi'(G) = \chi'(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

Portanto, por indução, para todo grafo G , temos

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

como queríamos demonstrar. □

RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES

Nesse capítulo, iremos utilizar da teoria dos grafos, vista nos capítulos anteriores para analisar e resolver as atividades propostas no capítulo 2.

5.1 Exemplo 2.1.1

Para resolver essa atividade, vamos, primeiramente, remover as arestas do grafo do tempo de resposta dos alunos.



Figura 52 – Vértices do grafo de tempo de resposta

Passo a Passo do Algoritmo de Kruskal

1. *Ordenação das arestas por peso:*

<i>Aresta</i>	<i>Peso (min)</i>
<i>Bruno–Daniel (B–D)</i>	<i>1</i>
<i>Carla–Daniel (C–D)</i>	<i>2</i>
<i>Bruno–Carla (B–C)</i>	<i>3</i>
<i>Daniel–Eduarda (D–E)</i>	<i>4</i>
<i>Ana–Bruno (A–B)</i>	<i>5</i>
<i>Eduarda–Felipe (E–F)</i>	<i>6</i>
<i>Felipe–Ana (F–A)</i>	<i>7</i>
<i>Ana–Carla (A–C)</i>	<i>8</i>
<i>Carla–Eduarda (C–E)</i>	<i>9</i>

2. Seleção das arestas:

<i>Aresta</i>	<i>Peso</i>	<i>Ação</i>	<i>Justificativa</i>
<i>B–D</i>	<i>1</i>	<i>Adicionada</i>	<i>Primeira aresta (menor peso)</i>
<i>C–D</i>	<i>2</i>	<i>Adicionada</i>	<i>Não forma ciclo</i>
<i>B–C</i>	<i>3</i>	<i>Rejeitada</i>	<i>Formaria ciclo B–D–C–B</i>
<i>D–E</i>	<i>4</i>	<i>Adicionada</i>	<i>Não forma ciclo</i>
<i>A–B</i>	<i>5</i>	<i>Adicionada</i>	<i>Não forma ciclo</i>
<i>E–F</i>	<i>6</i>	<i>Adicionada</i>	<i>Não forma ciclo</i>
<i>F–A</i>	<i>7</i>	<i>Rejeitada</i>	<i>Formaria ciclo A–B–D–E–F–A</i>
<i>A–C</i>	<i>8</i>	<i>Rejeitada</i>	<i>Formaria ciclo A–B–D–C–A</i>
<i>C–E</i>	<i>9</i>	<i>Rejeitada</i>	<i>Formaria ciclo C–D–E–C</i>

3. Árvore Geradora Mínima (AGM) resultante:

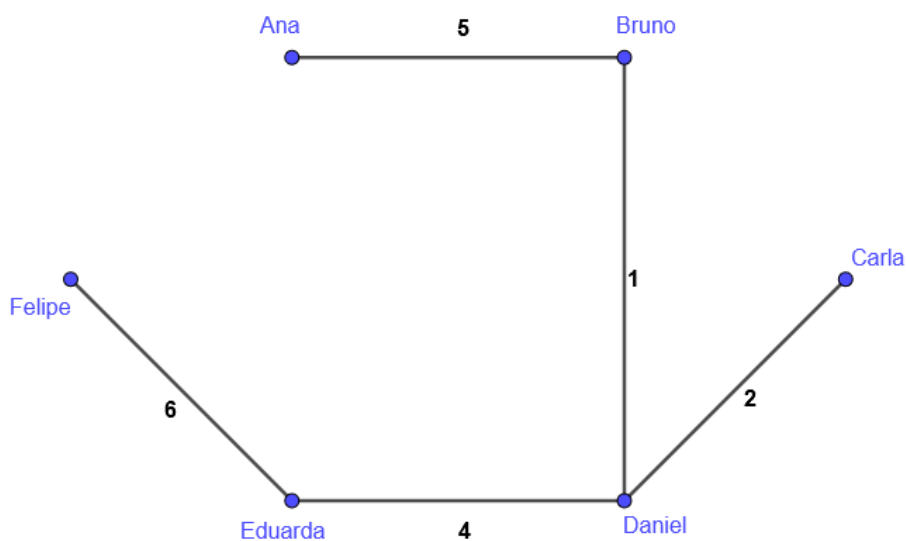


Figura 53 – Exemplo de figura a ser reproduzida

4. *Tempo total:* $1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18$ minutos.

Explicação da Solução

- **Conectividade:** Todos os alunos estão conectados direta ou indiretamente:
 - Ana \leftrightarrow Bruno \leftrightarrow Daniel \leftrightarrow Carla
 - Daniel \leftrightarrow Eduarda \leftrightarrow Felipe
- **Otimização:** A AGM garante o menor tempo total possível sem redundâncias.
- **Ciclos evitados:** Arestas como B–C e F–A foram descartadas para manter a estrutura de árvore.

□

5.2 Exemplo 2.1.2

A próxima atividade consiste em desenhar a figura abaixo sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes sobre a mesma linha.

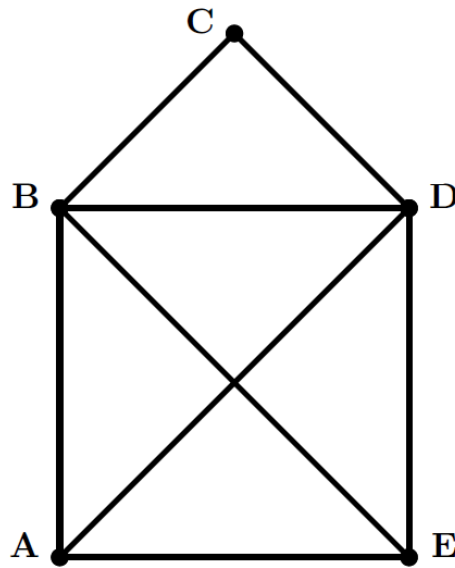


Figura 54 – Exemplo de figura a ser reproduzida

Essa é uma atividade já famosa na internet e com um pouco de esforço é possível de ser concluída.

Realize a mesma tarefa, partindo sempre do ponto B.

Resolução:

Essa atividade exige que, conectando com arestas o grafo abaixo, todos os vértices, seguindo somente um caminho, sem passar duas vezes pela mesma aresta. Pra facilitar, vamos colocar somente os vértices desse grafo:

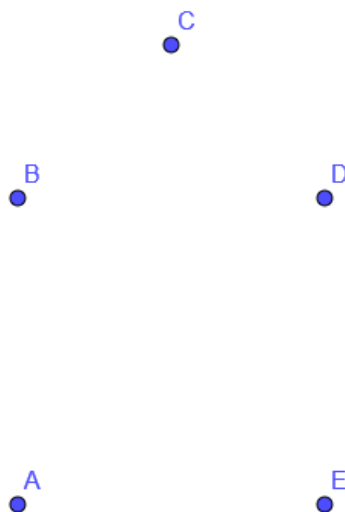


Figura 55 – Vértices do grafos ser reproduzido

Uma das formas possíveis de realizar esse exercício é a seguinte:

1. Colocamos uma aresta de conecta o vértice A com o vértice B

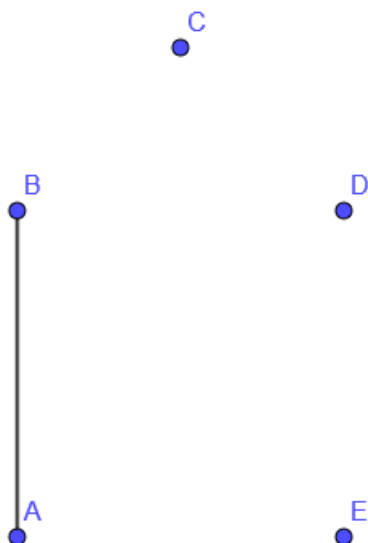


Figura 56 – Ligando o vértice A ao vértice B

2. agora, uma aresta conectando o vértice B ao vértice C

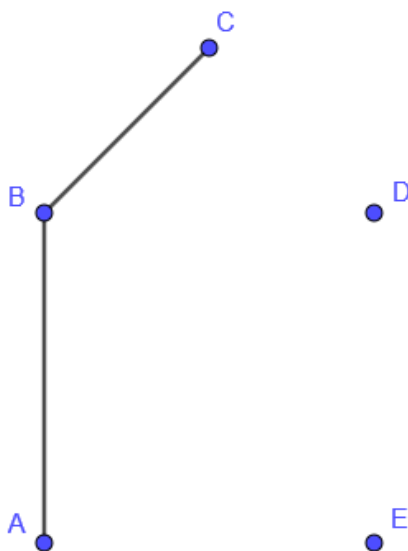


Figura 57 – Ligando o vértice B ao vértice C

3. outra aresta que conecta o vértice C ao vértice D

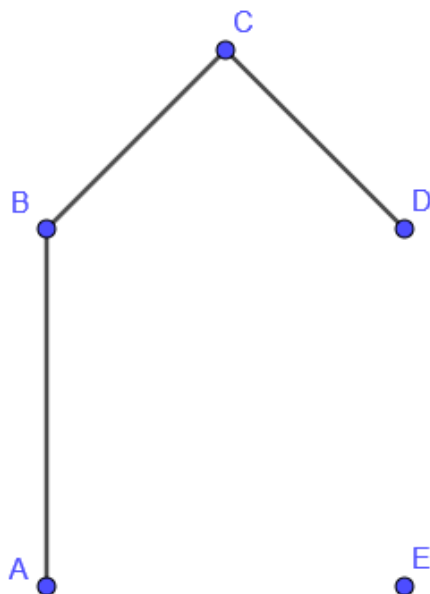


Figura 58 – Ligando o vértice C ao vértice D

4. agora conectamos os vértice D ao vértice E

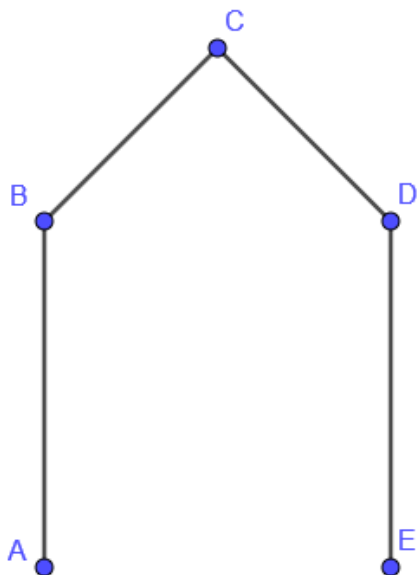
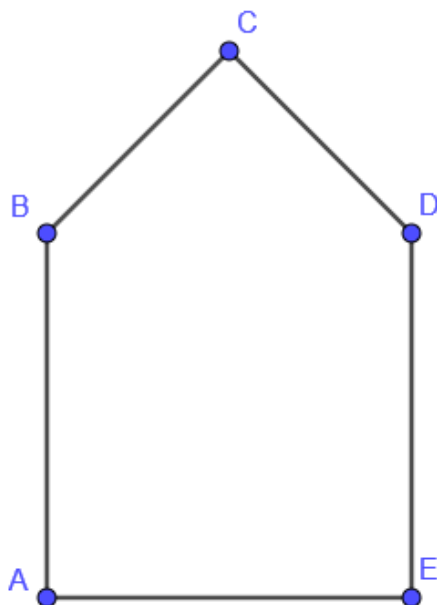
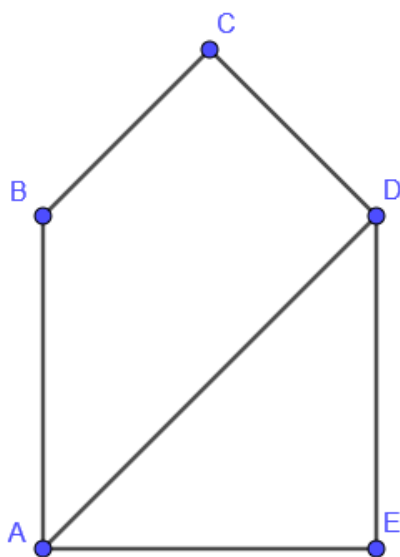


Figura 59 – Ligando o vértice D ao vértice E

5. uma aresta conectando o vértice E ao vértice A

Figura 60 – Ligando o vértice *E* ao vértice *A*

6. *uma aresta conectando os vértices A e D*

Figura 61 – Ligando o vértice *A* ao vértice *D*

7. *uma aresta conectando os vértices D e B*

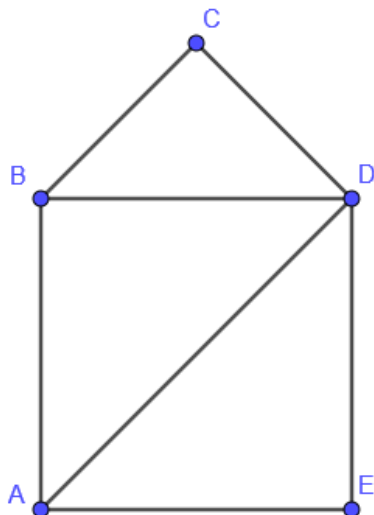


Figura 62 – Ligando o vértice D ao vértice B

8. por último, uma aresta conectando os vértices B e E

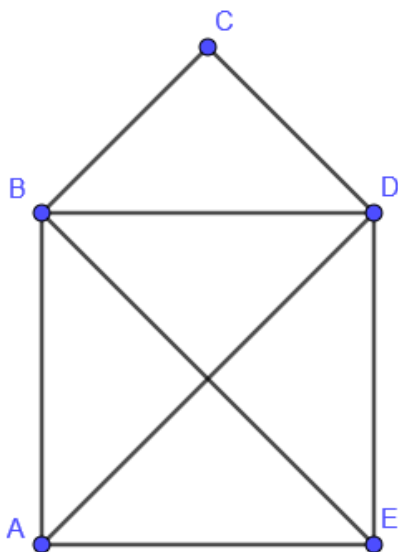


Figura 63 – Ligando o vértice B ao vértice E

completando assim a figura. Podemos observar que, partindo do Vértice E , também é possível realizar o percurso.

O exemplo também nos diz que, quando iniciamos o desafio partindo do vértice B , ele se torna mais desafiador. Isso ocorre pois é impossível realizar o desafio partindo do vértice B . Isso ocorre pois o vértice B é um vértice de grau par (grau 4), enquanto A e E são vértices de grau ímpar (grau 3).

Dessa forma, partindo de A ou E, podemos ter uma trilha ou cadeia fechada, enquanto isso é impossível obter partindo de B, C ou D que possuem grau par. (3.6.1) \square

5.3 Exemplo 2.1.3

Esse é o famoso problema das pontes de Königsberg. Imagine a seguinte situação: você mora em uma cidade cercada por um rio, como na figura abaixo. Na cidade existem sete pontes, que estão destacadas, e você precisa fazer um caminho, passando pelas sete pontes, sem passar duas vezes por uma mesma ponte. Qual caminho você faria?

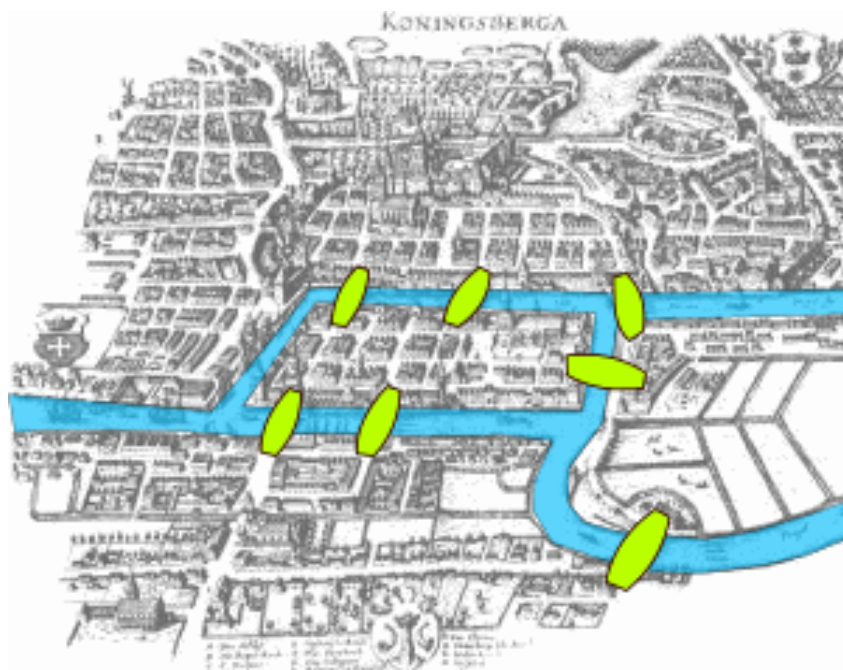


Figura 64 – Pontes de Königsberg - Resolução

Resolução:

Para resolver o problema, podemos modelá-lo usando a teoria dos grafos, onde cada região será um vértice e cada ponte será uma aresta entre os vértices.

Identificamos as regiões:

- A: margem esquerda do rio,
- B: ilha central maior,
- C: ilha central menor,
- D: margem direita do rio.

Cada ponte é uma aresta entre dois vértices:

- Entre A e B: 2 pontes.
- Entre B e D: 2 pontes.
- Entre B e C: 1 ponte.
- Entre A e C: 1 ponte.
- Entre C e D: 1 ponte.

Como no esquema a seguir:

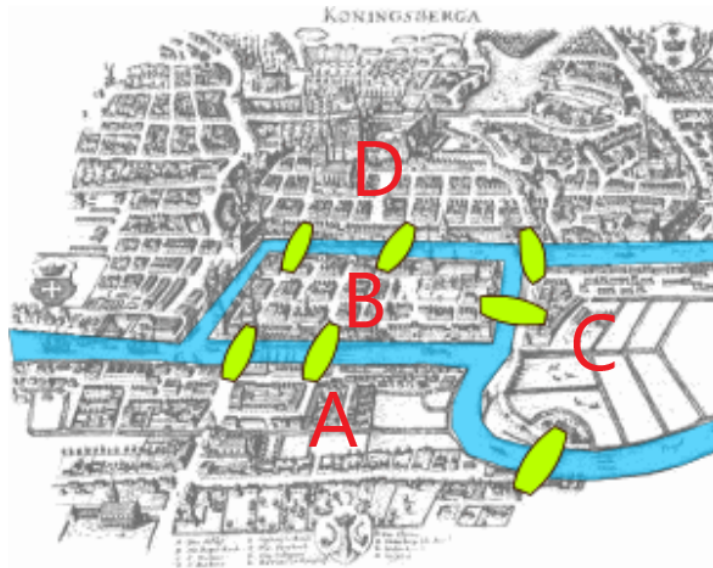


Figura 65 – Pontes de Königsberg com vértices

Análise dos Graus dos Vértices

Para determinar se existe um caminho Euleriano (um caminho que passa por cada aresta exatamente uma vez), vamos calcular o grau de cada vértice:

1. A tem grau 3 (duas pontes conectando A a B e uma ponte conectando A a C).
2. B tem grau 5 (duas pontes conectando B a A, duas pontes conectando B a D, e uma ponte conectando B a C).
3. C tem grau 3 (uma ponte conectando C a A, uma ponte conectando C a B, e uma ponte conectando C a D).
4. D tem grau 3 (duas pontes conectando D a B e uma ponte conectando D a C).

Conclusão

Em um grafo, para que exista um caminho Euleriano, é necessário que haja exatamente 0 ou 2 vértices de grau ímpar. Neste caso, todos os vértices (A, B, C, e D) têm grau ímpar, totalizando quatro vértices de grau ímpar. Isso significa que o grafo não atende às condições para a existência de um caminho Euleriano.

Portanto, não é possível traçar um caminho que passe por todas as pontes exatamente uma vez sem repetir nenhuma delas.

TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO

A teoria dos grafos, com suas estruturas e propriedades matemáticas, oferece um vasto campo de possibilidades no contexto educacional.

Este capítulo explora as diversas maneiras pelas quais a teoria dos grafos pode ser integrada ao ensino, destacando suas vantagens, metodologias e desafios.

A aplicação de grafos no ensino pode enriquecer o processo de aprendizado, promovendo uma compreensão mais profunda e intuitiva de conceitos abstratos.

6.1 Vantagens da Teoria dos Grafos no Ensino

A inclusão da teoria dos grafos no currículo educacional apresenta as seguintes vantagens:

- **Visualização de Conceitos:** *Os grafos permitem a visualização de relações e estruturas complexas, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e tornando o aprendizado mais acessível.*
- **Desenvolvimento do Pensamento Lógico:** *A manipulação e análise de grafos incentivam o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico, habilidades essenciais em diversas áreas do conhecimento.*
- **Interdisciplinaridade:** *A teoria dos grafos pode ser aplicada em diferentes disciplinas, como matemática, biologia, sociologia, português, história, promovendo uma aprendizagem integrada e contextualizada.*
- **Engajamento dos Estudantes:** *A utilização de grafos em atividades e projetos pode aumentar o engajamento dos estudantes, tornando as aulas mais dinâmicas e interativas.*

6.2 Metodologias de Ensino com Grafos

Existem diversas metodologias que podem para ensinar a teoria dos grafos de maneira eficaz:

- **Aprendizagem Baseada em Problemas:** Utilizar problemas reais que podem ser modelados e resolvidos com grafos, permitindo que os estudantes apliquem os conceitos de maneira prática e contextualizada, como apresentado nessa dissertação.
- **Uso de Software e Ferramentas Computacionais:** Existem ferramentas como Graphviz, Gephi, Geogebra e outras que permitem a criação e manipulação de grafos de forma interativa, facilitando a visualização e análise.
- **Projetos Colaborativos:** Incentivar os estudantes a trabalhar em grupo para resolver problemas complexos que envolvem grafos, promovendo a colaboração e o desenvolvimento de habilidades sociais.
- **Atividades Lúdicas:** Jogos e atividades lúdicas que envolvem grafos podem tornar o aprendizado mais divertido e motivador.

6.3 Desafios na Implementação da Teoria dos Grafos no Ensino

Apesar das vantagens, existem muitos desafios na implementação da teoria dos grafos no ensino:

- **Complexidade dos Conceitos:** Alguns conceitos da teoria dos grafos podem ser abstratos e complexos, exigindo uma abordagem didática cuidadosa.
- **Formação de Professores:** É necessário que os professores estejam bem preparados e capacitados para ensinar a teoria dos grafos de maneira eficaz.
- **Recursos Didáticos:** A disponibilidade de materiais e recursos didáticos de qualidade é essencial para o ensino eficaz da teoria dos grafos.
- **Adaptação Curricular:** Integrar a teoria dos grafos ao currículo existente pode requerer ajustes e adaptações, o que pode ser um processo desafiador.

Apesar dos desafios envolvidos na aplicação da teoria dos grafos no ensino de matemática, essa abordagem pode se revelar uma ferramenta eficaz para auxiliar no processo de aprendizagem.

CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, exploramos as potencialidades da teoria dos grafos como ferramenta didática para o Ensino Médio, destacando sua capacidade de tornar conceitos matemáticos abstratos mais tangíveis e interdisciplinares. Apesar da abordagem teórica apresentada, o objetivo central foi demonstrar como os grafos podem ser adaptados à realidade escolar, seja na modelagem de problemas cotidianos, na resolução de desafios lógicos ou na conexão da matemática com outras áreas — como computação e biologia — de modo a engajar os estudantes. Reconhecemos, contudo, que a implementação efetiva requer a elaboração de atividades práticas e sequências didáticas específicas, um caminho que esta pesquisa abre para futuros desenvolvimentos.

A teoria dos grafos, com seus conceitos fundamentais — como vértices, arestas, caminhos e ciclos —, oferece uma base sólida para abordar tanto problemas históricos (e.g., as Pontes de Königsberg) quanto situações relevantes ao cotidiano dos estudantes. Embora esta pesquisa não explore aplicações específicas em redes sociais ou sistemas financeiros, a flexibilidade dos grafos permite sua adaptação a contextos educacionais, como no ensino de lógica matemática, otimização (e.g., problemas de rotas) ou até mesmo em noções básicas de ciência da computação. Essa versatilidade reforça seu potencial como ferramenta pedagógica interdisciplinar no Ensino Médio, desde que associada a atividades que aproximem a teoria da realidade dos alunos.

Por utilizar uma teoria matemática do século XVIII em conjunção com problemas atuais e que fazem parte do cotidiano dos alunos, consideramos um avanço no processo de aquisição do conhecimento matemático de maneira mais prática, menos abstrata e dogmática, o que pode gerar resultados extremamente positivos na qualidade do domínio de matemática dos alunos no âmbito nacional, uma vez que os grafos ocupam o papel de ferramenta didática de maneira empírica e proporcionam aos alunos algo relativamente palpável, já que sua visualização tende a ser mais intuitiva se comparada aos métodos tradicionais de ensino de matemática.

No entanto, apesar dos resultados da discussão e da literatura apontar para uma boa

adição no processo de ensino, vale ressaltar que qualquer passo que se refira à educação no Brasil requer extremo cuidado e esforço imensurável. Nesta pesquisa utilizamos um contexto restrito, um recorte afim de demonstrar a aplicabilidade do estudo. Temos plena ciência que a educação e todo o território nacional não é nada homogêneo, pelo contrário, cada região possui suas características e requer cuidados específicos.

Deste modo, a grande área tem muitas contribuições a serem feitas pelas pesquisas que explorem essa temática aplicada em outras áreas do currículo escolar, bem como em faixas etárias distintas e com maior diversidade de contextos educacionais.

Por fim, consideramos que a teoria dos grafos pode se mostrar enriquecedora no ensino de matemática, promovendo o desenvolvimento de habilidades analíticas e de resolução de problemas e, através dos desafios, pode aperfeiçoar o raciocínio lógico dos alunos.

Esperamos que este trabalho inspire novos estudos e aplicações desta área, que ainda possui tantos contextos e possibilidades a serem explorados, demonstrando como os grafos podem impactar positivamente o campo educacional.

REFERÊNCIAS

ARVIND, V.; TORÁN, J. *Graph isomorphism: The current status*. *ACM SIGACT News*, v. 46, n. 2, p. 6–24, 2015. Citado na página 36.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory*. [S.l.]: Springer, 2008. Citado nas páginas 36 e 71.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2024. Acesso em: 6 jan. 2025. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>. Citado na página 20.

ESTADO DE SÃO PAULO. *Currículo Paulista*. 2024. Acesso em: 6 jan. 2025. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>. Nenhuma citação no texto.

FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; KOHAYAKAWA, Y. *Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática). Citado nas páginas 16 e 87.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. [S.l.]: Freeman, 1979. 155 p. Citado na página 36.

GODSIL, C.; ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*. [S.l.]: Springer, 2001. 135–137 p. Citado na página 36.

HALTÉ, J.-F. O espaço didático e a transposição. *Fórum Lingüístico*, Florianópolis, p. 117–139, 2008. Original publicado em 1998. Citado na página 20.

HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. 62 p. Citado na página 36.

JURKIEWICZ, S. *Grafos - uma introdução*. Rio de Janeiro, 2009. Apostila. Citado na página 24.

LIMA, C. L. G. d. *Um estudo sobre Teoria dos Grafos e o Teorema das Quatro Cores*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016. Dissertação de Mestrado. Nenhuma citação no texto.

NOGUEIRA, D. *Introdução à Teoria dos Grafos: proposta para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Nenhuma citação no texto.

OLIVEIRA, V. A. d.; RANGEL, S. *Propriedades da Matriz de Adjacência em Grafos Simples*. São José do Rio Preto. Sem data. Nenhuma citação no texto.

RODRIGUES, J. C. d. R. S.; ALMEIDA, A. C. L. *Um estudo sobre Teoria dos Grafos e o Teorema das Quatro Cores*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João del-Rei, UFSJ, 2019. Nenhuma citação no texto.

RODRIGUES, R. H. *Linguística aplicada: ensino de língua materna*. Florianópolis: LLV/CE/UFSC, 2011. Citado nas páginas 19 e 20.

SANTOS, S. M. P. d. *Aplicações da Teoria dos Grafos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Aveiro, 2013. Nenhuma citação no texto.

WEST, D. *Introduction to Graph Theory*. 2nd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2001. 244 p. Citado na página 71.

WIKIPEDIA. *Sete pontes de Königsberg*. 2025. Acesso em: 4 jan. 2025. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Sete_pontes_de_K%C3%B6nigsberg>. Citado nas páginas 15 e 26.

