

Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas
Campus Diadema



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

**O USO DA MEGA SENA E TÉCNICAS DE PROGRAMAÇÃO COMO
FERRAMENTAS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E
PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

FABIANO DA CONCEIÇÃO REGO

Orientador: Dr. Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos

**DIADEMA
2025**

FABIANO DA CONCEIÇÃO REGO

**O USO DA MEGA SENA E TÉCNICAS DE PROGRAMAÇÃO COMO
FERRAMENTAS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E
PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

Orientador: Dr. Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos

**DIADEMA
2025**

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Rego, Fabiano da Conceição

O uso da Mega Sena e técnicas de programação como ferramentas para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade na educação básica / Fabiano da Conceição Rego. – – Diadema, 2025.

138 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2025.

Orientador: Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos

1. Análise Combinatória. 2. Probabilidade. 3. Mega Sena. 4. MIT App Inventor. 5. Sequências didáticas. I. Título.

Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas
Campus Diadema



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Chefe de Departamento:

Prof^ª. Dra. Simone Alves de Assis Martorano

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof^ª. Dra. Gleiciane da Silva Aragão



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de São Paulo



PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DISSERTAÇÃO E TESE nº 2596375/2025/PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

DIA - PPG - PROFMAT, 14 de fevereiro de 2025.

No dia vinte e oito de fevereiro de dois mil e vinte e cinco reuniu-se, através da Plataforma Google Meet às 16:00 horas, a Comissão Julgadora para a defesa de Dissertação de Mestrado solicitada por **FABIANO DA CONCEIÇÃO REGO**, aluno(a) do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Em Rede Nacional (PROFMAT), que apresentou a dissertação sob o Título: **O Uso da Mega Sena e Técnicas de Programação como Ferramentas para o Ensino de Análise Combinatória e Probabilidade na Educação Básica**.

A referida Comissão esteve constituída pelos Professores Doutores:

Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - Universidade Federal de São Paulo

Prof. Dr. Leonardo André Testoni - Universidade Federal de São Paulo

Profa. Dra. Carla Neves Costa - Universidade Estadual de Campinas

O(A) Presidente Prof(a). Dr(a). **Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos** inicia a sessão dando a palavra ao(à) candidato(a), que dispõe de um período de tempo entre trinta e quarenta minutos para expor sua tese. A seguir, dá a palavra aos examinadores para a arguição. Cada examinador dispõe de até quarenta minutos, no máximo, para arguição, bem como o(a) candidato(a) para as respostas. Tendo o(a) candidato(a) respondido todas as arguições em tempo hábil, os membros da Banca Examinadora emitiram seus Pareceres:

Prof(a). Dr(a). Gleiciane da Silva Aragão	(X) APROVADO () REPROVADO
Prof(a). Dr(a). Leonardo André Testoni	(X) APROVADO () REPROVADO
Prof(a). Dr(a). Carla Neves Costa	(X) APROVADO () REPROVADO

Em face dos referidos pareceres, a Comissão Julgadora considera o(a) Sr(a). **FABIANO DA CONCEIÇÃO REGO**:

(X) habilitado / () **não** habilitado a receber o título de MESTRE pelo programa de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO.

E por estarem de acordo, assinam a presente ata.

Diadema, 28 de fevereiro de 2025.

Sugestões e Observações:



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos, Docente**, em 28/02/2025, às 19:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gleiciane da Silva Aragao, Docente**, em 28/02/2025, às 19:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carla Neves Costa, Usuário Externo**, em 28/02/2025, às 19:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Andre Testoni, Chefe de Departamento em Exercício**, em 28/02/2025, às 19:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida [clikando aqui](#), ou pelo endereço: "https://sei.unifesp.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0" informando o código verificador **2596375** e o código CRC **E3D93D2F**.

*Dedico este trabalho a toda minha família e aos meus amigos
que sempre acreditaram no meu potencial, em especial à minha esposa
Denise e aos meus filhos Enzo e Henry.*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder a vida, me amparar nos momentos difíceis em que pensei em desistir e sempre me fortalecer para seguir em frente na busca incessante pela realização deste sonho. Um sonho que não é apenas meu, mas também da minha família e de todos que sempre acreditaram em mim e no meu trabalho. Obrigado, Senhor!

À minha esposa, Denise, meu profundo agradecimento por sempre acreditar no meu potencial, estar ao meu lado e me incentivar a nunca desistir. Sua força e compreensão foram fundamentais, especialmente nos momentos em que precisei me trancar por horas no quarto estudando e pesquisando para concluir este trabalho. Muito obrigado por seu apoio incondicional.

Aos meus filhos, Enzo e Henry, minha gratidão eterna. Mesmo com pouca idade, vocês compreenderam que o papai estava trabalhando por vocês. Vocês são minha maior fonte de inspiração. Amo vocês profundamente.

Agradeço aos professores do PROFMAT - Diadema, pelos ensinamentos e conhecimentos transmitidos ao longo do curso, e por todo o carinho e compreensão demonstrados durante as aulas.

Ao meu orientador, Leonardo Sioufi Fagundes, registro minha imensa gratidão por sua paciência, pelos valiosos aprendizados e pelas trocas de conhecimento enriquecedoras durante as orientações. Sua disponibilidade e confiança no meu potencial foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Serei eternamente grato.

À minha comadre Kátia e ao meu compadre Douglas, meu muito obrigado por acreditarem na minha capacidade e sempre me incentivarem a persistir, cientes da importância desse sonho para mim e para minha família.

Ao meu amigo Cleydiel, agradeço pelo apoio constante e pelos incentivos que me motivaram a continuar e não desistir desse sonho de me tornar mestre em matemática.

Aos colegas de curso Rui, Patrícia e Lucas, minha sincera gratidão. Um agradecimento especial ao Lucas pela parceria nos estudos, que foram momentos importantes e motivadores. Também agradeço ao Rui e à Patrícia pelas trocas de experiências e histórias de superação que tanto me inspiraram.

Por último, manifesto minha gratidão a todos que, de alguma maneira, colaboraram para a realização bem-sucedida deste trabalho.

“Você não é derrotado quando perde. Você só é derrotado quando desiste”.

Dr. House

“As questões mais importantes da vida são, na maioria das vezes, apenas problemas de probabilidade”.

Pierre-Simon Laplace

RESUMO

Este trabalho investiga como a utilização de jogos de loteria, especificamente a Mega Sena, associada a ferramentas tecnológicas, pode contribuir para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade no ensino médio. Para isso, foi desenvolvido um aplicativo na plataforma *MIT App Inventor*, capaz de simular sorteios e promover uma experiência interativa e contextualizada com os conceitos matemáticos. O objetivo geral foi apresentar estratégias inovadoras para o ensino desses conteúdos, enquanto os objetivos específicos incluíram a discussão da história dos jogos de loteria no Brasil, a exploração das possibilidades pedagógicas das tecnologias digitais, o desenvolvimento do aplicativo e a proposição de sequências didáticas que integram esses elementos ao ensino. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, com características exploratórias e aplicadas, estruturada em quatro etapas: revisão de literatura, desenvolvimento do aplicativo, elaboração de sequências didáticas e redação final. Destaca-se que os jogos de loteria podem ser ferramentas valiosas no ensino de matemática, pois despertam o interesse dos alunos e contextualizam conceitos abstratos. O uso do aplicativo potencializa a interatividade e permite a integração de elementos de programação ao ensino, aproximando os estudantes da realidade tecnológica e fortalecendo a aprendizagem dos conteúdos. As sequências didáticas propostas trazem possibilidades de transformar o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade em uma experiência prática e significativa, incentivando a participação ativa dos alunos e a construção colaborativa do conhecimento. Além disso, o guia prático para a criação do aplicativo contribui diretamente para a formação de professores, incentivando abordagens pedagógicas mais criativas e tecnológicas. Conclui-se, portanto, que a associação entre jogos de loteria e ferramentas digitais constitui uma estratégia inovadora para tornar o ensino de matemática mais dinâmico e contextualizado, apontando para novas possibilidades pedagógicas no ensino médio.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Probabilidade. Mega Sena. *MIT App Inventor*. Sequências didáticas.

ABSTRACT

This study investigates how the use of lottery games, specifically Mega Sena, associated with technological tools, can contribute to the teaching of Combinatorial Analysis and Probability in high school. To this end, an application was developed on the MIT App Inventor platform, capable of simulating lotteries and promoting an interactive and contextualized experience with mathematical concepts. The general objective was to present innovative strategies for teaching these contents, while the specific objectives included the discussion of the history of lottery games in Brazil, the exploration of the pedagogical possibilities of digital technologies, the development of the application and the proposal of didactic sequences that integrate these elements into teaching. The research adopted a qualitative approach, with exploratory and applied characteristics, structured in four stages: literature review, development of the application, elaboration of didactic sequences and final writing. It is worth noting that lottery games can be valuable tools in teaching mathematics, as they arouse students' interest and contextualize abstract concepts. The use of the application enhances interactivity and allows the integration of programming elements into teaching, bringing students closer to the technological reality and strengthening the learning of content. The proposed teaching sequences provide possibilities for transforming the teaching of Combinatorial Analysis and Probability into a practical and meaningful experience, encouraging active student participation and the collaborative construction of knowledge. In addition, the practical guide for creating the application directly contributes to teacher training, encouraging more creative and technological pedagogical approaches. It is therefore concluded that the association between lottery games and digital tools constitutes an innovative strategy for making mathematics teaching more dynamic and contextualized, pointing to new pedagogical possibilities in high school.

Keywords: Combinatorial Analysis. Probability. Mega Sena. MIT App Inventor. Didactic sequences.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Cartão de aposta da Mega Sena	47
Figura 2 – Cartão de aposta da Quina	70
Figura 3 – Cartão de aposta da Lotofácil.....	73
Figura 4 – Cartão de aposta da Lotomania.....	75
Figura 5 – Cartão de aposta da Dupla Sena.....	78
Figura 6 – Iniciando o acesso na plataforma <i>MIT App Inventor</i>	92
Figura 7 – Tela de login com a conta <i>google</i>	93
Figura 8 – Interface de criação de aplicativos do <i>MIT App Inventor</i>	93
Figura 9 – Iniciando um novo projeto no <i>MIT App Inventor</i>	94
Figura 10 – Nomeando um projeto.....	94
Figura 11 – Funcionalidades da interface de criação de aplicativos no ambiente Designer ...	95
Figura 12 – Funcionalidades da interface de criação de aplicativos no ambiente de Blocos...	96
Figura 13 – Acessando a galeria da plataforma do <i>Mit App Inventor</i>	97
Figura 14 – Pesquisando por projetos dentro da galeria do <i>Mit App Inventor</i>	97
Figura 15 – Ferramentas utilizadas no processo de criação do aplicativo.....	98
Figura 16 – Selecionando as ferramentas	99
Figura 17 – Alinhando as ferramentas na tela do celular	99
Figura 18 – Alterando as propriedades da ferramenta imagem.....	100
Figura 19 – Alterando as propriedades de uma legenda.....	101
Figura 20 – Alterando as propriedades do organizador horizontal	101
Figura 21 – Alterando as propriedades das legendas dentro do organizador horizontal	102
Figura 22 – Alterando as propriedades do botão gerador.....	102
Figura 23 – Alterando as propriedades das legendas abaixo do botão gerador.....	103
Figura 24 – Alterando as propriedades do botão limpar	104
Figura 25 – Alterando as propriedades da última imagem.....	104
Figura 26 – Acessando a tela de programação do aplicativo	105
Figura 27 – Primeira etapa da programação: criação de variáveis	105
Figura 28 – Segunda etapa da programação (parte 1)	106
Figura 29 – Segunda etapa da programação (parte 2)	107
Figura 30 – Blocos de programação após o final da segunda etapa	107
Figura 31 – Encolhendo um bloco após finalizar a programação	108
Figura 32 – Programando o botão com a função limpar	109

Figura 33 – Blocos de programação após o final da terceira etapa	109
Figura 34 – Todos os blocos utilizados na quarta etapa da programação	110
Figura 35 – Blocos de programação da quarta etapa.....	111
Figura 36 – Compilação de todos os blocos utilizados nas etapas de desenvolvimento	112
Figura 37 – Acessando o assistente AI.....	112
Figura 38 – Códigos para visualizar o aplicativo desenvolvido e realizar testes	113
Figura 39 – Fazendo o <i>download</i> do aplicativo desenvolvido	113
Figura 40 – Design do aplicativo após finalizar todo o processo de criação.....	114
Figura 41 – Cartão para a atividade Mega Sorte	123

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Valor da aposta na Mega Sena conforme a quantidade de números marcados	48
Quadro 2 – Distribuição do valor arrecadado nos jogos de Loteria	49
Quadro 3 – Probabilidade de ganhar na Mega Sena conforme a quantidade de números marcados	52
Quadro 4 – Quantidade de prêmios a receber em uma aposta com 10 dezenas marcadas	62
Quadro 5 – Quantidade de prêmios a receber em relação à quantidade de números marcados e acertados	65
Quadro 6 – Quantidade de premiações para uma aposta feita com 8 dezenas e acertando a Sena	66
Quadro 7 – Quantidade de premiações para uma aposta feita com 8 dezenas e acertando a Quina	67
Quadro 8 – Quantidade de premiações para uma aposta feita com 8 dezenas e acertando a Quadra	68
Quadro 9 – Valor da aposta na Quina de conforme a quantidade de números marcados	71
Quadro 10 – Probabilidade de ganhar na Quina conforme a quantidade de números marcados	72
Quadro 11 – Valor da aposta na Lotofácil conforme a quantidade de números marcados	73
Quadro 12 – Probabilidade de ganhar na Lotofácil conforme a quantidade de números marcados	75
Quadro 13 – Valor da aposta única na Lotomania	76
Quadro 14 – Probabilidade de ganhar na Lotomania conforme a quantidade de acertos por faixa	77
Quadro 15 – Valor da aposta na Dupla Sena conforme a quantidade de números marcados ..	78
Quadro 16 – Probabilidade de ganhar na Dupla Sena conforme a quantidade de números marcados	79
Quadro 17 – Exemplo de registro de um aluno	119
Quadro 18 – Tabela de frequências: exemplo de um aluno	120
Quadro 19 – Tabela para a atividade prática Mega Sorte	124
Quadro 20 – Solução do questionamento 3 da atividade prática Mega Sorte	125

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

BNCC	- Base Nacional Comum Curricular
CBC	- Comitê Brasileiro de Clubes
CBCP	- Comitê Brasileiro de Clubes Paralímpicos
CBDE	- Confederação Brasileira do Desporto Escolar
CBDU	- Confederação Brasileira do Desporto Universitário
CBP	- Comitê Paralímpico Brasileiro
CEF	- Caixa Econômica Federal
COB	- Comitê Olímpico do Brasil
FDL	- Fundo de Desenvolvimento de Loterias
FIES	- Fundo de Financiamento Estudantil
FNC	- Fundo Nacional da Cultura
FNSP	- Fundo Nacional de Segurança Pública ¹⁾
FUNPEN	- Fundo Penitenciário Nacional
IMC	- Índice de Massa Corporal
MIT	- <i>Massachusetts Institute of Technology</i>
PCN	- Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	- Princípio Fundamental da Contagem
PISA	- Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
TICs	- Tecnologias da Informação e Comunicação
UNIFESP	- Universidade Federal de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
1 ANÁLISE COMBINATÓRIA	20
1.1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.....	21
1.2 FATORIAL	23
1.3 PERMUTAÇÃO SIMPLES	25
1.4 ARRANJO SIMPLES	27
1.5 COMBINAÇÃO SIMPLES	28
2 PROBABILIDADE	31
2.1 CONCEITOS BÁSICOS.....	32
2.2 DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE	33
2.3 ALGUNS TEOREMAS DA PROBABILIDADE	34
2.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL	37
2.5 PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES	37
2.6 PROBABILIDADE COM ESPAÇO AMOSTRAL DISCRETO FINITO E COM EVENTOS ELEMENTARES EQUIPROVÁVEIS	38
3 APRENDIZAGEM MATEMÁTICA POR MEIO DE JOGOS.....	43
4 PANORAMA HISTÓRICO E TEÓRICO DOS JOGOS DE LOTERIA NO BRASIL	46
4.1 ORIGEM E EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS JOGOS DE LOTERIA NO BRASIL	46
4.2 MEGA SENA.....	47
4.2.1 As chances de ganhar na Mega Sena	52
4.3 QUINA	70
4.4 LOTOFÁCIL	72
4.5 LOTOMANIA.....	75
4.6 DUPLA SENA	77
5 TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	81
6 ASPECTOS METODOLÓGICOS	84
6.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA	84
6.2 ETAPAS DA PESQUISA	85
7 A PLATAFORMA <i>MIT APP INVENTOR</i> COMO RECURSO PEDAGÓGICO.....	87
7.1 CONHECENDO O <i>MIT APP INVENTOR</i>	87
7.2 CRIANDO O APLICATIVO SORTEADOR COM O <i>MIT APP INVENTOR</i>	98

8 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE ANÁLISE	
COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE	115
8.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1	115
8.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2	121
9 CONCLUSÕES.....	130
REFERÊNCIAS	132

INTRODUÇÃO

A Teoria das Probabilidades e a Análise Combinatória surgiram como ferramentas matemáticas indispensáveis no estudo de fenômenos envolvendo incertezas e estruturas discretas. Com origens que remontam à Idade Média, quando jogos de azar começaram a se disseminar, sobretudo na China e no Japão, essas áreas da matemática passaram a ser aplicadas amplamente no cotidiano, seja na previsão de resultados esportivos, no cálculo de riscos financeiros ou mesmo nas apostas em loterias (Gomes et al., 2019).

A loteria, em especial, desperta curiosidade e fascínio, não apenas pelo desejo de ganhar prêmios milionários, mas também pelo complexo arcabouço matemático que rege suas regras e probabilidades. No Brasil, a Mega Sena é um dos jogos de loteria mais populares e pode ser utilizada como um objeto de estudo para a aplicação de conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade (Fraga, 2013).

Contudo, com base em minha experiência adquirida como professor da educação básica, identifiquei que esses conteúdos frequentemente enfrentam resistência por parte dos estudantes do ensino médio, devido à forma abstrata e descontextualizada como costumam ser abordados nas salas de aula, apesar da relevância prática. Observei que muitos alunos têm dificuldade em enxergar a aplicabilidade desses tópicos na vida cotidiana, o que reduz seu engajamento e interesse pelo aprendizado.

A matemática, enquanto disciplina fundamental nas bases curriculares, abrange uma ampla variedade de tópicos com níveis de abstração diversos. Enquanto alguns conteúdos são assimilados relativamente com facilidade, outros, mais abstratos, demandam dos educadores abordagens inovadoras que facilitem a compreensão (Silva, 2024a). Essa necessidade de adaptação pedagógica é particularmente relevante em temas como Probabilidade e Combinatória, que requerem um esforço maior para conectar o aprendizado teórico à prática cotidiana.

A sociedade contemporânea se caracteriza por constantes avanços tecnológicos, que transformam significativamente os processos educacionais. A popularização de computadores, *smartphones* e aplicativos promove um aprendizado mais dinâmico e interativo. Nesse contexto, as tecnologias educacionais emergem como aliadas estratégicas no ensino, especialmente na matemática. Como afirmam Borba, Silva e Gadanis (2018), as diferentes dimensões da inovação tecnológica possibilitam a criação e a exploração de novos cenários para a educação, com destaque para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Entre as ferramentas tecnológicas que podem contribuir para o ensino de matemática, destaca-se a plataforma *MIT App Inventor*. Essa ferramenta permite aos professores explorar, juntamente com seus alunos, conteúdos por meio da programação em blocos, podendo auxiliar na compreensão, assimilação e fixação dos conceitos. O uso de tecnologias digitais no ensino de matemática não apenas facilita a compreensão de conteúdos complexos, mas também aproxima as aulas de aplicações práticas e significativas, despertando maior interesse pelo aprendizado (Silva, 2024a).

Assim, a proposta deste estudo se fundamenta na integração entre inovação tecnológica e ensino de matemática, buscando superar os desafios encontrados na abordagem de temas abstratos e melhorar a experiência de aprendizado no ensino básico.

Diante desse cenário, este estudo tem como objetivo responder à seguinte questão: como a utilização de jogos de loteria, em especial da Mega Sena, associada a ferramentas tecnológicas, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória e Probabilidade no ensino médio? A partir dessa problematização, propõe-se a criação de um aplicativo, utilizando a plataforma *MIT App Inventor*, capaz de simular sorteios de números da Mega Sena e calcular as probabilidades envolvidas, proporcionando aos alunos uma experiência interativa e contextualizada com os conceitos matemáticos em questão.

O objetivo geral deste estudo é apresentar estratégias inovadoras para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, utilizando os jogos de loteria e técnicas de programação como recursos pedagógicos. Especificamente, busca-se: (1) discutir a história dos jogos de loteria no Brasil e suas implicações culturais e matemáticas; (2) explorar as possibilidades pedagógicas oferecidas pelas tecnologias digitais no ensino de matemática; (3) desenvolver um aplicativo que simule sorteios e calcule probabilidades, promovendo a aplicação prática dos conceitos estudados; e (4) propor sequências didáticas que integrem esses elementos, visando facilitar o aprendizado dos estudantes.

A escolha de trabalhar com jogos de loteria, como a Mega Sena justifica-se pela familiaridade e interesse que despertam nos estudantes, facilitando a contextualização dos conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. Além disso, a utilização de tecnologias digitais, como o *MIT App Inventor*, permite aproximar o ensino da realidade tecnológica em que os alunos estão inseridos, promovendo maior engajamento e interatividade no processo de aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância de conteúdos como Probabilidade e Análise Combinatória no desenvolvimento do pensamento crítico e na tomada de decisões fundamentadas (Brasil, 2006). Assim, proporcionar aos alunos uma

compreensão mais clara e prática desses tópicos contribui para sua formação como cidadãos autônomos e conscientes, capazes de aplicar a matemática em situações reais.

Este trabalho também se fundamenta na perspectiva de que os jogos, além de serem ferramentas motivadoras, têm grande potencial educativo. Conforme Kishimoto (2000), os jogos promovem o desenvolvimento de aspectos cognitivos, sociais e emocionais, além de estimular o aprendizado de maneira significativa. Ao associar o estudo da loteria com o uso de tecnologias digitais, pretende-se criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e interdisciplinar.

Por fim, espera-se que este estudo contribua não apenas para a melhoria do ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, mas também para a formação de professores, fornecendo-lhes ferramentas e metodologias inovadoras que integrem a matemática ao cotidiano dos alunos. Dessa forma, busca-se transformar o aprendizado em uma experiência prática, interativa e significativa, rompendo com o ensino tradicional e promovendo novas possibilidades pedagógicas no ensino médio.

Visando atingir os objetivos propostos, para a estrutura metodológica utilizada nesta pesquisa adotou-se uma abordagem qualitativa com características exploratórias e aplicadas. Posteriormente será destinado um capítulo para discorrer detalhadamente acerca dos aspectos metodológicos desta pesquisa.

Para a constituição da base teórica, tomou-se como referência estudos de autores que fornecem subsídios fundamentais para a apreciação da temática e alcance dos objetivos estabelecidos. Esta pesquisa referenciou-se, dentre outros, em autores como: Farias e Laurencel (2007), Ross (2010), Hazzan (2013), Morgado et al. (2016), Vasconcelos e Rocha (2019), Domingues (2023), Soares (2024), Rodrigues Neto (2024); para apresentar os conceitos e definições que abrangem os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade; Grando (1995), Huizinga (2000), Borin (2004), Miranda (2013), Lapa (2017) na abordagem sobre a aprendizagem matemática por meio de jogos; Fraga (2013), Barbosa (2014), Correa (2016), Andrade (2017) na perspectiva histórica e teórica dos jogos de loteria no Brasil; Stoica (2015), Borba, Silva e Gadani (2018), Amâncio e Sanzovo (2020), Martins et al. (2020), Fernandes (2022) na discussão sobre tecnologias digitais no ensino de matemática; Gomes e Melo (2013), Elias et al. (2018), Oliveira, Pereira e Teixeira (2021) discorrendo acerca da utilização da plataforma *MIT App Inventor*; e Gil (2010), Prodanov e Freitas (2013) para a constituição do delineamento metodológico.

Diante do exposto, apresenta-se, a seguir, a estruturação dos capítulos que compõem este trabalho.

O primeiro capítulo aborda as definições, teoremas e propriedades fundamentais relacionadas à Análise Combinatória, oferecendo uma base sólida para a compreensão do tema.

Já o segundo capítulo discute a relevância da Probabilidade no cotidiano, apresentando seu arcabouço teórico-matemático por meio de definições, teoremas e exemplos de situações-problema.

O terceiro capítulo aborda a utilização dos jogos como recurso pedagógico para o ensino de matemática.

No quarto capítulo, há a história dos jogos de loteria no Brasil, com ênfase na Mega Sena, abordando seu surgimento, evolução e regulamentação, além de apresentar os cálculos probabilísticos associados às apostas na Mega Sena.

No quinto capítulo contextualizamos o uso de tecnologias no ensino de matemática, apresentando uma linha do tempo sobre sua inserção no ambiente educacional e discutindo como essas ferramentas podem dinamizar e potencializar o aprendizado, especialmente em matemática.

O sexto capítulo tem a finalidade de apresentar a estrutura metodológica deste estudo, mostrando a abordagem metodológica utilizada e as etapas de execução da pesquisa.

No sétimo capítulo exploramos a plataforma *MIT App Inventor*, detalhando sua história, evolução, estrutura e aplicabilidade. Esse capítulo apresenta a plataforma como uma ferramenta prática e acessível para educadores e alunos, incluindo um tutorial detalhado sobre o processo de criação do aplicativo sorteador de números. O objetivo é oferecer um guia prático que permita a outros professores replicarem o desenvolvimento do aplicativo com seus alunos, promovendo a integração entre programação e ensino de matemática.

O oitavo capítulo propõe sequências didáticas que podem ser utilizadas por professores do ensino médio para ensinar Análise Combinatória e Probabilidade. Essas propostas são estruturadas a partir da temática dos jogos de loteria, com foco especial na Mega Sena, buscando conectar os conceitos matemáticos ao contexto real dos estudantes. Uma das atividades inclui a utilização do aplicativo sorteador desenvolvido no estudo, evidenciando sua aplicação prática no processo de ensino-aprendizagem.

Finalmente, o nono capítulo apresenta as considerações finais, sintetizando os principais resultados e reflexões do estudo. Nesse capítulo, também são feitas recomendações para pesquisas futuras, com o intuito de incentivar novas abordagens e investigações que ampliem e aprofundem o uso de jogos e tecnologias digitais no ensino de matemática.

1 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo será abordada a Análise Combinatória, destacando suas definições, propriedades e aplicações, além de sua importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos estudantes.

A contagem é algo que faz parte do dia a dia. Por exemplo, as pessoas costumam contar os dias da semana, os meses do ano, as estações do ano, quantos dias faltam para as férias, etc. Mas existem outros tipos de contagens que as vezes não são tão simples assim. Por exemplo, com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantas senhas diferentes de cinco dígitos podemos criar? No lançamento de dois dados não viciados numerados de 1 a 6, de quantas formas podemos observar o resultado? De quantas maneiras diferentes podemos fazer uma aposta simples no jogo da Mega Sena? Há estes e outros problemas parecidos onde precisamos recorrer a uma ferramenta matemática, chamada de Análise Combinatória.

Segundo Anselmo e Baroni (2024), os estudos relacionados à Análise Combinatória, especialmente em sua forma mais estruturada, têm suas origens no século XVII, motivados, em grande parte, pelo interesse em compreender os jogos de azar. Nessa época, destacaram-se Pascal (1623-1662) e Fermat (1607-1665), que são amplamente reconhecidos como precursores dessa área da Matemática.

Mas afinal, o que é mesmo Análise Combinatória? Alguns autores apresentam definições para esse termo, umas mais formais, outras menos formais com o intuito de serem definições mais didáticas. A seguir apresentamos algumas destas definições.

Morgado et al. (2016, p. 1) apresenta a seguinte definição:

De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:

- 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
- 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (Morgado et al., 2001, p. 1).

De acordo com Vasconcelos e Rocha (2019, p. 5), “a Análise Combinatória tem suas raízes em desafios ligados aos quadrados mágicos. Seu desenvolvimento ocorreu a partir da expansão de métodos que possibilitam determinar, de maneira direta ou indireta, a quantidade de elementos de um conjunto específico, organizados conforme certas condições.

Anselmo e Baroni (2024, p. 7) no estudo sobre pensamento combinatório na BNCC, apresentam a seguinte definição para o termo Combinatória:

Presente nos livros escolares como “Análise Combinatória”, as definições são diversificadas. Às vezes surge como “técnicas de Análise Combinatória”, sem uso de uma definição explícita para o tema, apenas apresentando a estratégia de enumeração associada àquela técnica. A Análise Combinatória está relacionada com muitas ideias, algumas realmente muito simples, ligadas à enumeração individual de possibilidades. Conforme se avança nos estudos, vão sendo apresentadas técnicas mais elaboradas, cujo propósito, de forma geral, é contar sem ter que explicitar todas as situações uma por uma. O auge da Combinatória no âmbito escolar acontece no Ensino Médio. Alguns conceitos são formalizados, uma porção de exercícios é proposta e, em seguida, tudo aquilo poderá constar como ferramenta disponível para o estudo de Probabilidade (Anselmo; Baroni, 2024, p. 7).

Para este trabalho, adotar-se-á uma definição mais didática com a finalidade de facilitar o entendimento do leitor. Sendo assim, a Análise Combinatória consiste basicamente em permitir a escolha e a contagem dos elementos de um determinado conjunto, sem que seja necessário listar todos eles. Para isso existem estratégias diversas que permitem realizar essa contagem.

Um dos objetivos deste trabalho é explorar didaticamente a probabilidade de uma pessoa ganhar em alguns jogos de loteria, sobretudo na Mega Sena. Portanto, este tópico não tem a intenção de ser exaustivo acerca dos assuntos que compõem a Análise Combinatória, sendo assim, será abordada, adiante, apenas a parte necessária para embasar e justificar o desenvolvimento dos cálculos inerentes às questões relacionadas aos objetivos deste estudo.

1.1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Imagine a situação em que você irá fazer uma viagem da cidade “Amanhecer” para a cidade “Pôr do Sol”, tendo que passar obrigatoriamente pela cidade “Meio Dia”, todas cidades hipotéticas. Para ir da cidade Amanhecer até a cidade Meio Dia existem 3 caminhos diferentes e da cidade Meio Dia para a cidade Pôr do Sol existem 4 rotas distintas. Então, qual é o número total de trajetos diferentes que você poderá fazer da cidade Amanhecer até a cidade Por do Sol, passando pela cidade Meio Dia?

Este problema é um caso de Análise Combinatória, mais precisamente do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Para resolvê-lo vamos recorrer a uma definição bem didática apresentada por Lima et al. (1998) onde os autores afirmam que para o PFC há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada essa decisão D_1 , há y modos de tomar uma decisão D_2 . Então o número de maneiras diferentes de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$. Portanto, para solucionar este problema basta observar que escolher um trajeto equivale a tomar as decisões adiante:

- D_1 : Escolher um caminho da cidade Amanhecer até a cidade Meio Dia (3 modos).
- D_2 : Escolher um caminho da cidade Meio Dia até a cidade Por do Sol (4 modos).

Logo, de acordo com a definição do Princípio Fundamental da Contagem apresentada anteriormente, temos $3 \cdot 4 = 12$ trajetos distintos que você poderá fazer da cidade Amanhecer até a cidade Pôr do Sol, passando pela cidade Meio Dia.

De maneira análoga temos outras duas situações onde são necessárias tomar decisões:

Um restaurante oferece 2 opções de entrada, 3 opções de prato principal e 2 opções de sobremesa. Qual o total de combinações de refeições que um cliente pode montar?

Para ativar seu cartão de crédito, Luana precisa criar uma senha de 4 dígitos (onde cada dígito pode ser qualquer número de 0 a 9), o total de combinações possíveis de senhas que Luana poderá criar é?

Observe que estas duas situações acima são casos do Princípio Fundamental da Contagem. No entanto, na definição apresentada por Lima et al. (1998) os autores fazem referência apenas a duas decisões (D_1 e D_2) que precisam ser tomadas e, nos casos apresentados acima é necessário tomar três e quatro decisões, respectivamente. Então, como podemos resolver esses problemas?

Para isso, vamos recorrer à generalização da ideia apresentada por Lima et al. (1998), onde podemos resolver problemas onde são necessários tomar r decisões. Essa generalização é apresentada por Ross (2010, p. 17),

Se r experimentos são tais que o primeiro experimento pode levar a qualquer um de n_1 resultados possíveis; e se, para cada um desses n_1 resultados houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento; e se, para cada um dos possíveis resultados dos dois primeiros experimentos houver n_3 resultados possíveis para o terceiro experimento; e se ..., então haverá um total de $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ resultados possíveis para os r experimentos (Ross, 2010, p. 17).

Note que, com essa generalização podemos resolver os problemas enunciados anteriormente, pois para tomar r decisões (experimentos) sucessivamente, basta realizar o produto dos n modos de tomar cada uma das decisões. Então haverá $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ resultados possíveis de tomar essas decisões de forma simultânea.

Assim, temos que no caso do restaurante serão necessárias tomar três decisões: escolher a entrada, o prato principal e a sobremesa. Essas decisões podem ser tomadas de 2 modos, 3 modos e 2 modos, respectivamente. Portanto, um cliente poderá montar $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ combinações de refeições distintas.

Já no caso da senha do cartão de crédito, Luana terá que tomar 4 decisões, uma decisão para cada dígito da senha. Como ela terá 10 modos diferentes de tomar cada decisão (pois cada dígito da senha pode ser um algarismo de 0 a 9), o total de senhas diferentes que Luana poderá criar é: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000$ senhas.

1.2 FATORIAL

A operação “fatorial” é fundamental na Análise Combinatória. Sua notação e propriedades simplificam cálculos grandes e ajudam a resolver problemas de maneira mais prática e fácil.

De acordo com Hazzan (2013, p. 19),

Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$). Definimos fatorial de m (e indicamos por $m!$) por meio da relação:

$$m! = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } m \geq 2$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1.$$

Em outros termos, podemos dizer que o fatorial de um número é o produto deste número por todos os seus antecessores maiores que zero, com exceção do fatorial de 0 e de 1 que são definidos separadamente. Observe os exemplos abaixo do cálculo do fatorial de um número.

Exemplo 1.1:

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

Segundo Oliveira (2023) as operações básicas adição, subtração, multiplicação e divisão não estão bem definidas na notação fatorial, sendo necessário desenvolver o fatorial do número para depois realizar a operação, visto que a operação fatorial possui prioridade em relação às operações básicas. Por exemplo:

- **Exemplo 1.2:** Adição.

$$3! + 4! = (3 \cdot 2 \cdot 1) + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 6 + 24 = 30.$$

Observe que $3! + 4! \neq 7!$, pois como a operação fatorial possui prioridade nos cálculos, primeiramente é necessário calcular o fatorial do número para depois realizar a adição.

- **Exemplo 1.3:** Subtração.

$$5! - 4! = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) - (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 120 - 24 = 96.$$

Novamente, observe que $5! - 4! \neq 1!$, pois como a operação fatorial possui prioridade nos cálculos, é necessário calcular o fatorial antes do número para depois realizar a subtração.

- **Exemplo 1.4:** Multiplicação.

$$3! \cdot 2! = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) = 6 \cdot 2 = 12.$$

Note que $3! \cdot 2! \neq 6!$, pois como a operação fatorial possui prioridade, primeiramente calculamos o fatorial do número para depois realizar a multiplicação.

- **Exemplo 1.5:** Divisão.

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{24}{2} = 12.$$

Assim, note que $\frac{4!}{2!} \neq 2!$, pois como a operação fatorial possui prioridade, é necessário calcular antes o fatorial do número para depois realizar a divisão.

Analogamente à adição, subtração e multiplicação, na divisão entre fatoriais não podemos simplesmente fazer a divisão entre os números e preservar o fatorial. No entanto, na divisão entre fatoriais podemos utilizar um recurso chamado de “simplificação de fatorial”. A simplificação é um processo que consiste em “eliminar” termos iguais no numerador e denominador de uma fração, para isso é necessário expandir o fatorial até que haja no numerador e denominador termos iguais que possam ser eliminados. Observe um exemplo a seguir:

Exemplo 1.6:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Temos ainda um importante teorema que será imprescindível na discussão adiante sobre arranjos simples. Veja adiante:

Teorema 1.1: Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$ e $p < n$, temos que o fatorial de n é dado por:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)! = n!$$

Demonstração: Observando o lado esquerdo da igualdade, a expressão

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!$$

representa o produto dos primeiros p fatores descendentes de n , seguidos do fatorial de $(n - p)$.

Observe que o fatorial $(n - p)!$ é dado por:

$$(n - p)! = (n - p) \cdot (n - p - 1) \cdot (n - p - 2) \cdot \dots \cdot 1.$$

Substituindo a equação acima na equação imediatamente anterior, obtemos:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p) \cdot (n - p - 1) \cdot (n - p - 2) \cdot \dots \cdot 1.$$

Isto é, o lado esquerdo da expressão corresponde ao produto de todos os números de n até 1, ou seja, $n!$.

Portanto, fica demonstrado que

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)! = n! \blacksquare$$

1.3 PERMUTAÇÃO SIMPLES

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \dots, a_n$ de quantos modos é possível ordená-los?

Conforme Júnior (2024, p. 51) “dado um conjunto M com n elementos todos distintos, as permutações simples dos elementos de M são todos os agrupamentos ordenados que podemos fazer com os n elementos de M ”.

Por exemplo, considerando um conjunto com três elementos (A, B, C), é possível organizá-los de seis maneiras diferentes: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. De forma geral, há n opções para selecionar o primeiro elemento, $(n - 1)$ para o segundo, $(n - 2)$ para o terceiro e assim por diante, até restar apenas uma única escolha para a última posição. Dessa forma, a quantidade total de maneiras de dispor n objetos distintos é:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Cada disposição diferente dos n objetos é denominada Permutação Simples desses objetos. A quantidade total de Permutações Simples para n elementos (objetos) distintos é indicada por P_n . Assim, temos que $P_n = n!$. Como $0! = 1! = 1$, define-se $P_0 = P_1 = 1$.

Exemplo 1.7:

- a) $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- b) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- c) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Um exemplo bem usual quando se fala de Permutação são os anagramas. Um anagrama é uma palavra formada a partir da reorganização das letras de uma outra palavra, sem acrescentar ou retirar letras. A nova palavra não precisa ser uma palavra do nosso dicionário para ser considerada um anagrama.

Como nesta seção estamos abordando apenas as permutações simples, iremos considerar somente os anagramas de palavras que não possuem repetição de letras. No caso de palavras que possuem letras repetidas, a quantidade de anagramas é calculada utilizando permutação com repetição, que não é o objetivo desta seção.

Exemplo 1.8: AMOR é um anagrama da palavra ROMA, assim como AORM, pois ambas foram obtidas através da reorganização da ordem de disposição das letras na palavra, sem acrescentar ou retirar letras.

Sendo assim, a quantidade de anagramas de uma palavra que não há letras repetidas é dada pela permutação da quantidade de letras da palavra, visto que, pela definição, as permutação simples são os agrupamentos ordenados dos n elementos de um conjunto M . Logo, basta considerar os elementos como sendo as letras que formam a palavra. Dessa forma, a quantidade de anagramas de uma palavra que possui n letras distintas é dada pela permutação destas n letras, isto é, $P_n = n!$.

Usando o Exemplo 1.8, quantos são os anagramas da palavra ROMA? Observe que esta palavra possui 4 letras distintas, logo a quantidade de anagramas será dada por:

$$P_4 = 4! = 24 \text{ anagramas.}$$

De igual modo, quantos são os anagramas da palavra PROFMAT? Como todas as letras são distintas e temos um total de 7 letras, a quantidade de anagramas é:

$$P_7 = 7! = 5.040 \text{ anagramas.}$$

Portanto, permutando a ordem das letras das palavras ROMA e PROFMAT obtemos 24 e 5.040 novas palavras, respectivamente.

1.4 ARRANJO SIMPLES

Segundo Vasconcelos e Rocha (2019, p. 32) “dados os números inteiros positivos n e p , com $1 \leq p \leq n$, um arranjo simples dos n objetos distintos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tomados p a p é qualquer ordenação de p objetos diferentes escolhidos dentre esses objetos”.

É importante notar que dois arranjos simples distintos se diferenciam tanto pela disposição dos elementos quanto pela própria natureza dos componentes que os formam.

Exemplo 1.9:

- a) $(a, b, c) \neq (b, c, a)$, pois diferem pela ordem dos elementos.
- b) $(a, b, c) \neq (a, b, d)$, pois diferem pela natureza dos elementos.

Em relação ao cálculo do número de arranjos simples de n elementos distintos tomados em p agrupamentos, pensemos na seguinte situação:

Em uma corrida de carros, temos 6 pilotos disputando 3 lugares no pódio: primeiro, segundo e terceiro lugar. De quantas maneiras este pódio poderá ser formado?

Observe que para ocupar a primeira posição teremos 6 possibilidades, pois qualquer um dos pilotos pode ser o vencedor da corrida, para a segunda posição temos $6 - 1 = 5$ possibilidades, pois qualquer piloto pode ser o segundo colocado da corrida, com exceção do que já foi o vencedor e, por último, para a terceira posição, teremos $6 - 2 = 4$ possibilidades, visto que dois pilotos já ocupam as duas primeiras posições, restando agora quatro pilotos que podem ocupar a terceira posição. Sendo assim teremos $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneiras diferentes formar o pódio.

Agora, vamos generalizar esta situação para n pilotos, onde o pódio será formado por uma sequência de p pilotos distintos (neste caso a ordem dos elementos importa). Calcularemos então a quantidade de maneiras diferentes do pódio ser formado. Observe:

Número de possibilidades para a 1ª posição: n

Número de possibilidades para a 2ª posição: $n - 1$

Número de possibilidades para a 3ª posição: $n - 2$

Número de possibilidades para a 4ª posição: $n - 3$

⋮

Número de possibilidades para a $(p - 1)^{\text{a}}$ posição: $n - (p - 1 - 1) = n - p + 2$

Número de possibilidades para a p^{a} posição: $n - p + 1$.

Com isso, pelo Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, o número total de arranjos simples desses p elementos, que representaremos por $A_{n,p}$ é dado por:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1).$$

Ao multiplicarmos e dividirmos o segundo membro desta igualdade por $(n - p)!$, teremos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!}.$$

Sendo assim,

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{(n - p)!}.$$

Logo, pela definição de fatorial e pelo Teorema 1.1, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

Com isso, podemos concluir que dados n elementos distintos, o número de arranjos simples desses elementos tomados em p agrupamentos, sendo $n \geq p$, é determinado pela relação acima.

Exemplo 1.10:

$$\text{a) } A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20.$$

$$\text{b) } A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1.680.$$

1.5 COMBINAÇÃO SIMPLES

Veremos agora, um dos focos principais do trabalho, que é a Combinação Simples. A combinação simples é um tipo de agrupamento, que consiste em contar todos os subconjuntos

de um conjunto maior, com um número específico de elementos. A principal característica de uma combinação simples é que a ordem dos elementos não importa, é esta característica que diferencia uma combinação simples de um arranjo simples.

Segundo Rodrigues Neto (2024, p. 25):

Seja X um conjunto com n elementos distintos, define-se como combinações simples dos n elementos, tomados p a p , $p \leq n$, cada um dos agrupamentos formados por p elementos, distintos entre si, do conjunto X , ou como o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos (Rodrigues Neto, 2024, p. 25).

Vejamos um exemplo para ficar mais claro:

Exemplo 1.11: Dado um conjunto $A = \{a, b, c\}$, formemos todos os subconjuntos de A com 2 elementos. São eles: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Esses subconjuntos são conhecidos como combinações simples dos três elementos de A , tomados dois a dois. Nota-se que qualquer par dessas combinações simples se distingue apenas pelos elementos que as compõem, sem levar em conta a ordem em que são apresentados. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 1.12:

- a) $\{a, b\} \neq \{a, c\}$, pois diferem pela natureza dos elementos.
- b) $\{b, c\} = \{c, b\}$, pois a ordem dos elementos não altera o conjunto.

No que tange ao cálculo da quantidade de combinações simples de n elementos distintos tomados p a p , voltemos ao Exemplo 1.11, onde vamos relacionar a quantidade de combinações simples com a quantidade de arranjos simples de n elementos tomados p a p .

As combinações simples dos elementos de $A = \{a, b, c\}$ tomados dois a dois são $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$. Indicando por $C_{3,2}$ o número de combinações simples de três elementos tomados dois a dois, temos que $C_{3,2} = 3$. Cada uma dessas combinações gera $2!$ arranjos simples dos três elementos (a, b, c) tomados dois a dois.

Vejamos abaixo todos os arranjos gerados pela combinação $\{a, b\}$:

$$\underbrace{\{a, b\}}_{\text{combinação}} \rightarrow \underbrace{(a, b) \text{ e } (b, a)}_{2! \text{ arranjos}}$$

Assim, multiplicando $C_{3,2}$ por $2!$, obtém-se o número de $A_{3,2}$, isto é:

$$C_{3,2} \cdot 2! = A_{3,2}.$$

Agora, generalizando esse raciocínio para os números naturais n e p , com $p \leq n$, obtém-se a fórmula para o cálculo de $C_{n,p}$. Observe:

$$C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}.$$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Exemplo 1.13:

$$\text{a) } C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6}} = 20.$$

$$\text{b) } C_{10,6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

Um exemplo bem prático de combinação simples está na formação de comissões onde não existem cargos definidos. Observe.

Exemplo 1.14: Uma turma do curso de matemática tem 20 alunos formandos e, destes alunos, serão selecionados 3 para compor a comissão de formatura. De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

Observe que a ordem de seleção dos alunos que comporão essa comissão não importa, se um aluno é o primeiro selecionado ou o último selecionado ele fará parte da comissão do mesmo jeito. Logo, este é um caso de combinação simples. Sendo assim, teremos que calcular a combinação simples de 20 alunos tomados 3 a 3 para determinar a quantidade de comissões distintas que poderão ser formadas.

$$C_{20,3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{17!}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1.140.$$

Portanto, poderão ser formadas 1.140 comissões distintas com os alunos dessa turma.

2 PROBABILIDADE

Neste capítulo será discutido a Probabilidade, enfatizando como seu estudo possibilita a compreensão de acontecimentos aleatórios e apoia a tomada de decisões em cenários de incerteza, além de seu arcabouço teórico-matemático por meio de definições, teoremas, propriedades e exemplos de situações-problema.

Segundo Lopes (2018), o termo probabilidade tem origem no latim “*probare*”, que significa testar ou comprovar. De maneira informal, a palavra “provável” é empregada para descrever eventos incertos ou desconhecidos e pode ser substituída, dependendo do contexto, por termos como “sorte”, “risco”, “azar”, “chance” ou “incerteza”.

De acordo com Ross (2010), a teoria da probabilidade, em essência, representa a formalização do senso comum por meio do cálculo. Ela permite quantificar com precisão aquilo que muitas mentes intuitivas captam instintivamente, frequentemente sem perceber.

Iezzi et al., (2016, p. 253) discorrem acerca do surgimento da teoria da probabilidade, datada de meados do século XVI com Girolamo Cardano e meados do século XVII com Blaise Pascal e Pierre de Fermat, segundo eles:

Os primeiros registros ligados à teoria da probabilidade aparecem na obra do italiano Girolamo Cardano (1501-1576) sobre jogos de azar. Cerca de cem anos depois, Blaise Pascal deu novo impulso ao desenvolvimento da teoria da probabilidade, por meio das cartas que trocou com Pierre de Fermat (1601-1665), em que discutiam problemas ligados a jogos. Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade (Iezzi, et al., 2016, p. 253).

Conforme Rocco (2020), alguns anos depois, matemáticos começaram a se interessar por questões relacionadas à probabilidade. Entre eles, destacam-se Christiaan Huygens (1629-1695), autor da obra *De Ratiotiniis in Ludo Aleae* (O Raciocínio no Jogo de Azar), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), que escreveu *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica da Probabilidade), e Carl Friedrich Gauss (1777-1855), responsável pelo desenvolvimento do método de distribuição de probabilidades.

Laplace contribuiu bastante para o desenvolvimento da teoria da probabilidade, tendo suas obras sobre esse tema reconhecidas como a Teoria Clássica da Probabilidade, conforme destaca Rotunno (2007, p. 21):

Laplace foi o primeiro a aproveitar esses conhecimentos já existentes sobre probabilidade. Suas obras “Teoria Analítica de Probabilidade” de 1812 e “Ensaio Filosófico sobre Probabilidade” de 1825 colocaram a Probabilidade, definitivamente, no quadro matemático. São obras reconhecidas como a Teoria Clássica da Probabilidade, conceitos básicos, desenvolvidos de forma precisa, em dez princípios fundamentais (Rotunno, 2007, p. 21).

De acordo com Paulo (2013), em meados do século XX, o responsável por proporcionar mais notoriedade à teoria da probabilidade foi Andrei Kolmogorov (1903-1987). Ele formalizou essa teoria, sistematizando todas as pesquisas feitas anteriormente em torno desse tema, garantindo, assim, melhor compreensão desse tema tão importante da matemática.

Segundo Rotunno (2007), foi Kolmogorov que em 1933 apresentou a primeira formulação axiomática a respeito da teoria da probabilidade, que será apresentada mais adiante neste trabalho.

De forma bem elementar, Morgado et al. (2016, p. 112) define a probabilidade como “o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios”.

Partindo disso, temos a seguir, alguns conceitos básicos de probabilidade e algumas propriedades que servirão de suporte para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Os experimentos podem ser classificados em dois tipos, os aleatórios e os determinísticos.

Os **experimentos aleatórios**, são aqueles que quando repetidos inúmeras vezes em processos semelhantes, possuem resultados imprevisíveis (Farias; Laurencel, 2007). Exemplos de experimentos aleatórios:

Exemplo 2.1:

- a) No lançamento de uma moeda, qual face ficou voltada para cima?
- b) No lançamento de um dado não viciado, que número saiu?
- c) Uma carta foi retirada aleatoriamente de um baralho. De qual naipe é essa carta?

Já os **experimentos determinísticos** são experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, conduzem a resultados idênticos (Morgado et al., 2016). Veja os exemplos adiante.

Exemplo 2.2:

- a) A que temperatura a água entra em ebulição?
- b) Se largamos uma bola de certa altura, com que velocidade ela atinge o solo?

Para este estudo daremos foco aos experimentos aleatórios.

Um conceito fundamental no estudo de probabilidade é o de **espaço amostral**. Em conformidade com Farias e Laurencel (2007, p. 2), “o espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento”.

Em teoria das probabilidades, o espaço amostral ou espaço amostral universal, geralmente denotado por S , E , Ω ou U (de “universo”), de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório. Neste trabalho será utilizado a letra grega Ω (ômega) para denotar o espaço amostral de um experimento aleatório.

Exemplo 2.3:

- a) No lançamento de uma moeda: $\Omega = \{cara, coroa\}$;
- b) No lançamento de um dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Outro conceito essencial no estudo da probabilidade é o conceito de **evento**. Segundo Ross (2010, p. 40), “qualquer subconjunto E do espaço amostral é conhecido como um evento”. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.4: Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Observe que o espaço amostral é: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Agora observe alguns eventos que serão retirados desse espaço amostral:

- a) O número é primo: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$;
- b) O número é múltiplo de 3: $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$;
- c) O número é múltiplo de 5: $C = \{5, 10, 15\}$.

Segundo Domingues (2023, p. 27), “dizemos que dois eventos são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles implica a não ocorrência do outro”. Isto é, se A e B são dois eventos mutuamente exclusivos, então A e B são conjuntos disjuntos, $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 2.5: No lançamento de um dado não viciado, se o evento A for “o número da face voltada para cima é par” e o evento B for “o número da face voltada para cima é ímpar”, temos que $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Observe que os elementos de A são todos distintos dos elementos de B , sendo assim A e B são conjuntos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$ e dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

2.2 DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

De acordo com Soares (2024), o conceito de probabilidade é definido de forma básica por Kolmogorov utilizando três princípios fundamentais (axiomas). Esses axiomas garantem a

rigorosidade e coesão do conceito, bem como possibilitam que os teoremas relacionados à probabilidade sejam formalizados e demonstrados de maneira mais correta.

Ainda segundo Soares (2024, p. 31), a definição de probabilidade é dada por Kolmogorov da seguinte forma:

Considere um experimento aleatório com espaço amostral Ω . Uma função P definida para todos os eventos de Ω é chamada uma probabilidade se:

- I. Axioma da não-negatividade: $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$;
- II. Axioma da normalização: $P(\Omega) = 1$;
- III. Axioma da aditividade: Se A e B são eventos mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Qualquer sequência contável de conjuntos disjuntos, $A_1, A_2, A_3, \dots$ satisfaz $P(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$.

Os três axiomas acima determinam quais funções podem ser chamadas de probabilidade.

Em outros termos, o Axioma I exclui da probabilidade os números negativos. O Axioma II estabelece que a probabilidade de o espaço amostral ocorrer como um evento é sempre igual a um, ou seja, sua ocorrência é garantida. Já o Axioma III indica que, quando se trata da união de eventos mutuamente exclusivos em um espaço amostral, sua probabilidade total corresponde à soma das probabilidades individuais de cada um desses eventos

Kolmogorov é tão importante para a teoria da probabilidade que Soares (2024, p. 30) afirma que “Kolmogorov axiomatizou a teoria da probabilidade da mesma forma que a Geometria foi axiomatizada por Euclides nos Elementos”.

Desse modo, a partir desses axiomas, é possível provar diversos teoremas de grande relevância no campo da probabilidade.

2.3 ALGUNS TEOREMAS DA PROBABILIDADE

Neste tópico será feita a demonstração de alguns teoremas relacionados à teoria da probabilidade, partir-se-á do pressuposto que o leitor já possua familiaridade com a teoria dos conjuntos.

- **Teorema 2.1:** $P(\emptyset) = 0$.

Demonstração: Note que $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, ou seja, Ω e $\emptyset$ são eventos mutuamente exclusivos. Assim, pelo Axioma III de Kolmogorov, tem-se:

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset).$$

Agora observe que $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, sendo assim

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset).$$

Portanto, $P(\emptyset) = 0$. ■

- **Teorema 2.2:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, onde $\bar{A}$ é o complementar do evento A .

Demonstração: Observe que $A \cap \bar{A} = \emptyset$, logo, A e $\bar{A}$ são eventos mutuamente exclusivos. Então, pelo Axioma III de Kolmogorov:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Temos ainda que o espaço amostral $\Omega = A \cup \bar{A}$, então

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Pelo Axioma II de Kolmogorov, temos que $P(\Omega) = 1$, sendo assim,

$$1 = P(A) + P(\bar{A}).$$

$$\therefore P(\bar{A}) = 1 - P(A). \blacksquare$$

- **Teorema 2.3:** $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Demonstração: Note que $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, isto é, são conjuntos disjuntos. Logo, pelo Axioma III de Kolmogorov

$$P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Usando a relação $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ e substituindo na expressão acima, obtemos

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A - B) = P(A) - P(A \cap B). \blacksquare$$

- **Teorema 2.4:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração: Perceba que $(A - B) \cap (A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$, isso significa que são eventos mutuamente exclusivos, assim, pelo Axioma III de Kolmogorov, temos:

$$P[(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A).$$

Usando a relação: $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$, na identidade acima, obtemos

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A).$$

Agora, utilizando o resultado provado no Teorema 2.3 e substituindo-o na relação acima, ganhamos que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A).$$

Levando em conta que $A \cap B = B \cap A$, a expressão acima pode ser escrita como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \blacksquare$$

- **Teorema 2.5:** $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Demonstração: Note que se $A \subset B$, então $B = A \cup (B - A)$. Perceba que $A \cap (B - A) = \emptyset$, logo, A e $(B - A)$ são mutuamente exclusivos e pelo Axioma III de Kolmogorov, temos que

$$P[A \cup (B - A)] = P(A) + P(B - A).$$

Aplicando o fato de que $B = A \cup (B - A)$, na expressão acima, obtemos

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

Daí, pelo Axioma I de Kolmogorov, $P(B - A) \geq 0$, então

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A).$$

Portanto, $P(A) \leq P(B)$. $\blacksquare$

- **Teorema 2.6:** $P(A) \leq 1$.

Demonstração: Necessariamente $A \subset \Omega$. Assim, pelo Teorema 2.5, $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega)$. Logo, pelo Axioma II de Kolmogorov, temos que $P(A) \leq 1$. $\blacksquare$

- **Teorema 2.7:** $0 \leq P(A) \leq 1$.

Demonstração: Pelo Axioma I de Kolmogorov e pelo Teorema 2.6, demonstrado anteriormente, temos:

$$0 \leq P(A) \text{ e } P(A) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1. \blacksquare$$

2.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Segundo Soares (2024) sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω , tal que, quando $P(B) > 0$, a probabilidade da ocorrência do evento A , dado que o evento B ocorreu, é denotada por $P(A/B)$, e é dada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que, se os eventos A e B forem mutuamente exclusivos, então $n(A \cap B) = 0$ e, consequentemente, $P(A/B) = 0$.

2.5 PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

Segundo Soares (2024), dois eventos de um mesmo espaço amostral Ω , são ditos independentes, se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

De fato, seja Ω um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio. Sejam A e B dois eventos de Ω . Da definição de probabilidade condicional, vimos que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Utilizando o Princípio Fundamental das Proporções, isto é, o produto dos meios pelo produto dos extremos, obtemos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Se A e B forem eventos independentes, então $P(A/B) = P(A)$. Substituindo essa expressão na relação acima, obtém-se:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

2.6 PROBABILIDADE COM ESPAÇO AMOSTRAL DISCRETO FINITO E COM EVENTOS ELEMENTARES EQUIPROVÁVEIS

Segundo Torres (2023, p. 29),

Dado um espaço amostral Ω , não vazio, onde todos os seus eventos elementares são equiprováveis, isto é, têm a mesma chance de ocorrer, e seja E um evento contido em Ω , definimos a probabilidade de ocorrência de E , simbolizada por $P(E)$, como a seguinte razão:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

onde $n(E)$ e $n(\Omega)$ representam, respectivamente, o número de elementos do conjunto E e do espaço amostral (Ω) .

Conforme Morgado et al. (2016), a primeira definição formal de probabilidade foi estabelecida como a razão entre o número de “casos favoráveis” e o total de possibilidades. Essa concepção foi apresentada de maneira clara pela primeira vez na obra “*Liber de Ludo Aleae*”, de Girolamo Cardano (1501-1576).

Esta definição de probabilidade é um caso particular daquela definida por Kolmogorov e aparece quando usamos um tipo de espaço amostral bem específico: **espaço amostral discreto finito com eventos elementares equiprováveis**. Um espaço amostral com $n(\Omega)$ elementos, pode ser escrito como:

$$\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_{n(\Omega)}\}.$$

Cada evento elementar E_i não pode ser escrito como a união dos demais eventos, ou seja, os eventos elementares são mutuamente exclusivos.

As probabilidades de cada evento E_i ocorrer são iguais, isto é:

$$P(E_i) = \frac{1}{n(\Omega)}.$$

Seja E a união de vários eventos elementares:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_i,$$

pelo Axioma III de Kolmogorov e usando o fato de que os eventos são mutuamente exclusivos, a relação acima implica em:

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_i) = \frac{1}{n(\Omega)} + \frac{1}{n(\Omega)} + \dots + \frac{1}{n(\Omega)}.$$

Daí, como E é a união dos eventos E_i , a quantidade de elementos de E será a soma do número de elementos $n(E_i)$ dos eventos E_i . Dessa forma obtemos:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}. \quad (1)$$

Chegamos então à definição clássica de probabilidade como um caso particular daquela de Kolmogorov. Como já usamos o Axioma III para chegar na definição clássica de probabilidade, precisamos provar que essa expressão também satisfaz os Axiomas I e II.

- i) Sabendo que $\emptyset \subset E \Rightarrow n(\emptyset) \leq n(E)$. Como o conjunto vazio não tem elementos, então $n(\emptyset) = 0$. Logo, $0 \leq n(E)$. Dividindo tudo por $n(\Omega)$, teremos: $\frac{0}{n(\Omega)} \leq \frac{n(E)}{n(\Omega)}$.

Portanto, $0 \leq P(E)$, que é o Axioma I de Kolmogorov.

- ii) Sendo $P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$, que é o Axioma II de Kolmogorov.

Sendo assim fica demonstrado que a definição clássica de probabilidade ou definição de probabilidade como um quociente é válida, pois satisfaz os três axiomas de Kolmogorov.

Os cálculos que serão apresentados neste trabalho se limitarão apenas a esta definição clássica de probabilidade, tendo em vista que os espaços amostrais estudados serão sempre finitos. Pois, de acordo com Franco (2020, p. 195), “para conjuntos infinitos a definição de probabilidade como ‘casos favoráveis dividido pelo total de casos’ não faz sentido”.

Posto isto, em consonância com a proposta do presente trabalho, que tem como um de seus objetivos apresentar estratégias diferenciadas de ensino sobre o tema, Cunha et al. (2022, p. 8) afirma que:

Devemos propiciar aos alunos um contato com o conceito de probabilidade por meio de diferentes estratégias e abordagens significativas, a fim de proporcioná-las experiências com situações aleatórias do cotidiano e relacionar a probabilidade com situações que costumam acontecer e não são percebidos o uso de tal recurso da matemática, para assim ser inserido com maior facilidade, desmistificando tal área de conhecimento e suas variadas linguagens com os outros temas matemáticos e outras disciplinas (Cunha et al., 2022, p. 8).

Desse modo, observe adiante alguns exemplos de aplicação da probabilidade com situações aleatórias do cotidiano, utilizando a definição apresentada.

Exemplo 2.6: Você irá participar de um sorteio onde, numa urna, terão 20 bolas numeradas de 1 a 20. Para ser vencedor, ao retirar aleatoriamente uma bola dessa urna, ela deverá conter um número múltiplo de 3. Dessa forma, qual a probabilidade de você ser vencedor nesse sorteio?

Resolução:

Primeiramente vamos escrever o espaço amostral para este experimento aleatório.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Observe que o espaço amostral contém 20 elementos, logo, $n(\Omega) = 20$.

Agora, vamos separar o evento E com as bolas cujo os números são múltiplos de 3. $E = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Observe que o evento E contém 6 elementos, logo, $n(E) = 6$.

Agora, pela definição foi apresentada em (1), temos que a probabilidade de ocorrer o evento E é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ ou } 30\%.$$

Portanto, você terá 0,3 ou 30% de chance de ser vencedor nesse sorteio.

Exemplo 2.7: Antes de iniciar uma partida de futebol, o árbitro faz o tradicional sorteio de “cara ou coroa” para determinar qual equipe iniciará com a bola. Se você está participando desse sorteio e escolhe a opção “cara”, ao lançar a moeda, qual é a probabilidade de você ser o vencedor e sua equipe iniciar com a bola?

Resolução:

Observe que o espaço amostral deste experimento é $\Omega = \{cara, coroa\}$ e que $n(\Omega) = 2$. Queremos que ocorra o evento $E = \{cara\}$, em que $n(E) = 1$. Com isso, por definição, temos:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%.$$

Portanto, você terá 0,5 ou 50% de chance de ser o vencedor e sua equipe iniciar com a bola.

Exemplo 2.8: Você irá participar novamente de um sorteio onde, numa urna, terão 20 bolas numeradas de 1 a 20. No entanto, para ser vencedor dessa vez, ao retirar aleatoriamente uma bola dessa urna, ela deverá conter um número par ou um número múltiplo de 3. Dessa forma, qual a probabilidade de você ser vencedor nesse sorteio?

Resolução:

Primeiramente vamos escrever o espaço amostral para este experimento aleatório.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Observe que o espaço amostral contém 20 elementos, logo $n(\Omega) = 20$.

Agora, observe que o evento E , neste problema, consiste em “ser par ou múltiplo de 3”, então, para facilitar o raciocínio e os cálculos, vamos dividir o evento E em dois eventos E_1 e E_2 , onde o evento E_1 consistirá nos casos em que as bolas sorteadas são números pares e o evento E_2 consistirá nos casos em que as bolas sorteadas são números múltiplos de 3.

Sendo assim, temos que $E_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, ou seja, o evento E_1 contém 10 elementos, logo $n(E_1) = 10$. Temos ainda que $E_2 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, isto é, o evento E_2 contém 6 elementos, logo $n(E_2) = 6$.

Note que os elementos E_1 e E_2 não são mutuamente exclusivos, pois existem elementos na sua interseção. Deste modo, o evento $E_1 \cap E_2$ com as bolas cujos números são pares e múltiplos de 3 ao mesmo tempo é dado por $E_1 \cap E_2 = \{6, 12, 18\}$. Note que o evento $E_1 \cap E_2$ contém 3 elementos, logo $n(E_1 \cap E_2) = 3$.

Perceba que queremos determinar a probabilidade de ocorrência do evento $E = E_1 \cup E_2$. Para isso, vamos utilizar o Teorema 2.4, apresentado na Seção 2.3, assim, temos que a probabilidade procurada é dada por:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Como já vimos em (1), temos:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)}, P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(\Omega)} \text{ e } P(E_1 \cap E_2) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(\Omega)}.$$

Sendo assim, substituindo essas expressões na equação imediatamente acima, teremos:

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0,65 = 65\%.$$

Portanto, ao sortear uma bola de forma aleatória de uma urna que contém bolas numeradas de 1 a 20, a probabilidade de a bola sorteada ser um número par ou múltiplo de 3 e, você ser o vencedor, é de 0,65 ou 65%.

Exemplo 2.9: Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 até 15. Retira-se uma dessas bolas da urna e observa-se o seu número. Sabendo que a bola retirada contém um número primo, qual é a probabilidade de que esse número seja o 5?

Resolução:

Observe que, nessa situação, teremos os seguintes eventos: evento A , que consiste em a bola retirada ser a de número 5, e evento B que consiste em a bola retirada ser um número primo.

Esse problema é um caso de probabilidade condicional, pois queremos determinar a probabilidade do evento A , dado que o evento B já aconteceu. Então, em termos matemáticos queremos determinar:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}\right)}{\left(\frac{n(B)}{n(\Omega)}\right)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Sendo assim, precisamos determinar a quantidade de elementos presentes na interseção dos dois eventos, $n(A \cap B)$, e a quantidade de elementos presentes no evento B , $n(B)$.

Observe que a interseção dos dois eventos contém apenas um elemento, $A \cap B = \{5\}$, logo $n(A \cap B) = 1$. Já o evento B consiste em todos os números primos de 1 a 15, ou seja, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Assim, $n(B) = 6$.

Substituindo essas informações na expressão que determina a probabilidade condicional, obtemos:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{6} = 0,1666 \dots \text{ ou } 16,6\%.$$

Portanto, ao saber que a bola retirada é um número primo, a probabilidade de ela ser a bola de número 5 é 0,1666 ... ou 16,6%.

3 APRENDIZAGEM MATEMÁTICA POR MEIO DE JOGOS

A utilização de jogos como recurso pedagógico no ensino de matemática tem ganhado destaque como uma estratégia capaz de promover a motivação e o engajamento dos estudantes (Silva, 2024a). Desde os primórdios, o ser humano apresenta uma forte atração por jogos e competições, sendo essa uma prática recorrente nas civilizações antigas, como aponta Fraga (2013), que ressalta que as primeiras apostas conhecidas ocorriam em forma de sorteios, realizadas por povos como egípcios, romanos e gregos. Os jogos, mesmo com objetivos de lazer ou lucro, podem ser integrados ao ensino, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e sociais (Brasil, 1998).

No contexto educacional, a matemática frequentemente é percebida como uma disciplina difícil e abstrata, o que gera resistência e desmotivação por parte dos estudantes (Barbosa, 2014). Como observado por Ponte (1994), muitos alunos consideram a matemática inacessível e não conseguem compreender sua aplicação prática. De acordo com Barbosa (2014) essa dificuldade pode ser atribuída, em parte, à forma tradicional de ensino, que muitas vezes não valoriza as conexões com o cotidiano ou não utiliza metodologias que tornem o aprendizado significativo.

Para superar essas barreiras, o uso de atividades lúdicas tem se mostrado uma solução eficaz. Lapa (2017) enfatiza que os jogos possuem a capacidade de desenvolver habilidades como observação, reflexão e raciocínio lógico, elementos essenciais para a aprendizagem matemática. Ademais, o autor também afirma que os jogos promovem o trabalho em grupo, fortalecendo a argumentação e a confiança dos alunos, o que impacta positivamente sua autoestima e autoconfiança.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também destacam os benefícios das atividades matemáticas que envolvem jogos, apontando que, além de desenvolver o raciocínio lógico, essas práticas auxiliam na compreensão e utilização de regras e convenções sociais, favorecendo a formação de cidadãos autônomos e críticos. Ainda de acordo com os PCN a participação em jogos de grupo, por exemplo, proporciona conquistas cognitivas, emocionais, morais e sociais, estimulando o desenvolvimento integral do estudante (Brasil, 1998).

No ensino de matemática, os jogos tornam-se ainda mais relevantes, pois criam um ambiente competitivo e desafiador que estimula a criatividade e o pensamento abstrato. Segundo Grando (1995), o jogo oferece um espaço favorável para o desenvolvimento do pensamento matemático, além de possibilitar a integração de competição, criatividade e

estratégias de resolução de problemas. Durante o jogo, o aluno torna-se protagonista de seu aprendizado, participando ativamente da construção do conhecimento (Borin, 2004).

Ao abordar jogos no contexto da matemática, é importante reconhecer suas diferentes classificações e funções. Grando (1995) propõe uma tipologia que inclui jogos de azar, quebra-cabeças, jogos de estratégia, jogos de fixação de conceitos, jogos pedagógicos e jogos computacionais. Cada categoria apresenta potencialidades específicas para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, desde a resolução de problemas até a fixação de conceitos já trabalhados em sala de aula.

Dentre as diversas categorias de jogos, os pedagógicos ganham destaque por englobarem todas as outras classificações, oferecendo uma abordagem abrangente e contextualizada para o ensino (Grando, 1995). Esses jogos são especialmente úteis quando utilizados como ferramenta para a resolução de problemas matemáticos (Soukeff, 2014). Conforme Lima et al. (2006), é essencial que os alunos sejam incentivados a explorar situações-problema e a formular hipóteses sem limitações impostas por definições rígidas, permitindo uma compreensão mais ampla dos conteúdos trabalhados.

A influência dos jogos no desenvolvimento do raciocínio matemático também pode ser comparada às atividades investigativas realizadas por cientistas. Como destaca Borin (2004), tanto o jogador quanto o cientista seguem um processo de formulação, experimentação e revisão de hipóteses, até alcançarem uma solução satisfatória. Essa analogia evidencia o potencial dos jogos para tornar os alunos protagonistas de seu aprendizado, ao mesmo tempo em que desenvolvem competências como criatividade, concentração e resolução de problemas.

Outro aspecto importante é a capacidade dos jogos de reduzir bloqueios emocionais associados ao aprendizado da matemática. Borin (2004) ressalta que a dinâmica lúdica dos jogos cria um ambiente mais leve e motivador, onde os alunos sentem-se mais confiantes para explorar conceitos matemáticos e superar dificuldades. Ainda segundo a referida autora, essa abordagem também favorece a construção de uma relação mais positiva com a disciplina.

Historicamente, o elemento do acaso sempre despertou interesse tanto no âmbito cultural quanto científico. Huizinga (2000) descreve o jogo como uma atividade inerente à cultura humana, regida por regras e limites, mas dotada de um fim em si mesma. Essa caracterização destaca o papel do jogo como uma prática universal que transcende as diferenças culturais e sociais, conectando-se às experiências humanas mais fundamentais.

No caso dos jogos de loteria, como aponta Miranda (2013), essa prática tem origem em civilizações antigas, como egípcios, chineses e romanos, e evoluiu ao longo dos séculos até tornar-se uma forma popular de lazer e geração de receita para governos. A história dos jogos

de loteria reflete não apenas o fascínio humano pela sorte, mas também a possibilidade de os utilizar como recurso pedagógico, aproximando os alunos de conceitos matemáticos como Probabilidade e Análise Combinatória (Oliveira, 2014).

Conforme destacado pelos PCN, a matemática deve ser ensinada de forma que os alunos consigam aplicá-la em situações reais, como forma de compreender o mundo ao seu redor (Brasil, 2006). Os jogos oferecem uma oportunidade única para conectar os conteúdos matemáticos ao cotidiano, proporcionando uma experiência significativa e prazerosa no processo de ensino-aprendizagem (Grando, 1995; Borin, 2004).

Portanto, integrar jogos ao ensino de matemática não apenas enriquece a experiência dos alunos, mas também potencializa o desenvolvimento de habilidades essenciais, como raciocínio lógico, criatividade, resolução de problemas e trabalho em equipe (Grando, 1995; Borin, 2004). Ao promover uma abordagem lúdica e contextualizada, os professores podem transformar o ensino de matemática em uma experiência mais motivadora e eficaz, contribuindo para a formação de cidadãos mais críticos e autônomos.

4 PANORAMA HISTÓRICO E TEÓRICO DOS JOGOS DE LOTERIA NO BRASIL

A história dos jogos de loteria no Brasil remonta ao final do século XVIII, com a realização da primeira loteria registrada em 1784, na cidade de Vila Rica, hoje conhecida como Ouro Preto – MG (Fraga, 2013). Inicialmente utilizada para arrecadar fundos destinados à construção de obras públicas, como a Casa de Câmara e Cadeia, as loterias passaram a ser uma forma popular de captação de recursos ao longo dos séculos seguintes (Correa, 2016; Andrade, 2017).

Sendo assim, neste tópico abordar-se-á os aspectos históricos e teóricos dos jogos de loteria no Brasil, destacando sua evolução legislativa, impacto sociocultural e as especificidades dos principais jogos da Loteria Federal: Mega Sena, Quina, Lotofácil, Lotomania e Dupla Sena.

4.1 ORIGEM E EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS JOGOS DE LOTERIA NO BRASIL

A história das loterias no Brasil está intrinsecamente ligada ao financiamento de obras públicas e à assistência social. Como mencionado anteriormente, o primeiro registro oficial remonta a 1784, na cidade de Vila Rica, quando foi organizada uma loteria com o objetivo de arrecadar fundos para a construção da Casa de Câmara e Cadeia. A iniciativa representava uma forma de mobilizar recursos financeiros em uma época de limitações orçamentárias, estabelecendo um precedente para o uso das loterias como instrumento de apoio às políticas públicas (Correa, 2016; Andrade, 2017).

Segundo Barbosa (2014) no século XIX, durante o reinado de Dom Pedro II, as loterias passaram a ser regulamentadas de forma mais sistemática, por meio do Decreto nº 357 de 1844. Esse marco legal estabeleceu regras para a realização de sorteios, priorizando concessões para instituições beneficentes, como Santas Casas, hospitais e orfanatos. O intuito era garantir que os recursos fossem utilizados para finalidades sociais, reduzindo o risco de práticas fraudulentas e abusivas (Aparecida, 2012).

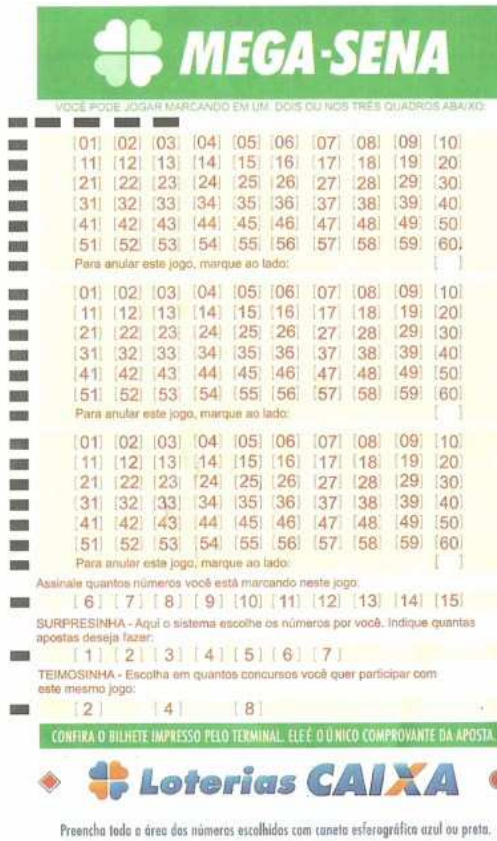
De acordo com Torres (2023) o século XX trouxe mudanças significativas para o setor, com a centralização da administração das loterias pela Caixa Econômica Federal (CEF) em 1962, conforme determinado pelo Decreto nº 50.954 de 1961. A medida visava profissionalizar a gestão dos jogos e assegurar que parte dos lucros fosse destinada a programas sociais e educacionais (Silva, 2018). Sob a administração da Caixa, as loterias expandiram suas modalidades e modernizaram seus sistemas, tornando-se mais acessíveis ao público e confiáveis em termos de transparência e segurança (Miranda, 2013).

Ao longo das décadas, a popularidade das loterias cresceu exponencialmente, impulsionada pela introdução de novas modalidades, pelo aumento da arrecadação e pela destinação de recursos a áreas estratégicas, como educação, cultura, esporte e saúde (Eves, 2004). Atualmente, as loterias brasileiras representam um dos principais instrumentos de financiamento público, demonstrando seu impacto social e econômico (Silva, 2018).

4.2 MEGA SENA

De acordo com Fraga (2013) a Mega Sena, lançada em 1996, rapidamente se consolidou como a principal modalidade de loteria no Brasil, atraindo milhões de apostadores semanalmente. Seu apelo reside nas altas premiações, frequentemente acumuladas, e na simplicidade de sua mecânica (Silva, 2024b). Para participar, os jogadores devem selecionar de 6 a 20 números dentre 60 disponíveis em um volante (Ver Figura 1). Os sorteios consistem na extração de 6 números, e as premiações são distribuídas em três faixas principais: Sena (6 acertos), Quina (5 acertos) e Quadra (4 acertos) (Caixa, 2024).

Figura 1 – Cartão de aposta da Mega Sena



The image shows a Mega-Sena lottery ticket form. At the top, there is a green header with the Mega-Sena logo and the text "MEGA-SENA". Below the header, there is a section titled "VOCÊ PODE JOGAR MARCANDO EM UM, DOIS OU NOS TRÊS QUADROS ABAIXO:" (You can play by marking in one, two, or in the three boxes below:). This section contains three identical grids of numbers from 01 to 60, arranged in 6 rows and 10 columns. Each grid has a "Para anular este jogo, marque ao lado:" (To cancel this game, mark next to:) label. Below the grids, there is a section titled "Assinale quantos números você está marcando neste jogo:" (Mark how many numbers you are marking in this game:). This section contains a row of numbers from 6 to 15, each with a checkbox. Below this, there is a section titled "SURPRESINHA - Aqui o sistema escolhe os números por você. Indique quantas apostas deseja fazer:" (SURPRISE - Here the system chooses the numbers for you. Indicate how many bets you want to make:). This section contains a row of numbers from 1 to 7, each with a checkbox. Below this, there is a section titled "TEIMOSINHA - Escolha em quantos concursos você quer participar com este mesmo jogo:" (TEIMOSINHA - Choose in how many draws you want to participate with this same game:). This section contains a row of numbers from 2 to 8, each with a checkbox. At the bottom, there is a green bar with the text "CONFIRA O BILHETE IMPRESSO PELO TERMINAL. ELE É O ÚNICO COMPROVANTE DA APOSTA." (Check the printed ticket at the terminal. It is the only proof of the bet.). Below this, there is the Caixa logo and the text "Loterias CAIXA". At the very bottom, there is a small text: "Preencha todo o área dos números escolhidos com caneta esferográfica azul ou preta." (Fill the entire area of the chosen numbers with blue or black ballpoint pen.).

Fonte: Arquivo do autor (2024).

Para a Mega Sena são realizados três sorteios semanais, às terças-feiras, quintas-feiras e aos sábados. O custo da aposta varia de acordo com a quantidade de números selecionados, com valores progressivamente mais altos para apostas que aumentam as chances de vitória, conforme detalhamento explícito no Quadro 1 (Caixa, 2024).

Quadro 1 – Valor da aposta na Mega Sena conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Valor da aposta (em R\$)
6	5,00
7	35,00
8	140,00
9	420,00
10	1.050,00
11	2.310,00
12	4.620,00
13	8.580,00
14	15.015,00
15	25.025,00
16	40.040,00
17	61.880,00
18	92.820,00
19	135.660,00
20	193.800,00

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

Do total arrecadado, 43,79% compõem o prêmio bruto, que é dividido entre as faixas de premiação, enquanto o restante é destinado a programas sociais, como educação e saúde, evidenciando o impacto positivo das loterias no financiamento de políticas públicas (Caixa, 2024). Adiante temos o Quadro 2 que mostra o detalhamento de distribuição do valor arrecadado.

Quadro 2 – Distribuição do valor arrecadado nos jogos de Loteria

Prognósticos numéricos	Percentual
Prêmio Bruto	43,79%
Seguridade Social	17,32%
Fundo Nacional da Cultura – FNC	2,91%
Fundo Penitenciário Nacional – FUNPEN	3,00%
Fundo Nacional da Segurança Pública – FNSP	6,80%
Ministério do Esporte	2,49%
Fenaclubes	0,01%
Secretarias de esporte, ou órgãos equivalentes, dos Estados e do Distrito Federal	1,00%
Comitê Brasileiro de Clubes – CBC	0,46%
Comitê Brasileiro de Clubes Paralímpicos – CBCP	0,07%
Confederação Brasileira do Desporto Escolar – CBDE	0,22%
Confederação Brasileira do Desporto Universitário – CBDU	0,11%
Comitê Olímpico do Brasil – COB	1,73%
Comitê Paralímpico Brasileiro – CPB	0,96%
Despesas de custeio e manutenção: Comissão dos lotéricos * - 8,61% Custeio de despesas operacionais - 9,57% Fundo de Desenvolvimento de Loterias - FDL - 0,95%	19,13%
Total	100%

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

Um dos maiores atrativos da Mega Sena é o concurso especial “Mega da Virada”, realizado anualmente no dia 31 de dezembro. Introduzido em 2009, esse sorteio possui

características únicas: seu prêmio não acumula, sendo integralmente distribuído entre os vencedores das faixas principais (Caixa, 2024). A Mega da Virada mobiliza milhões de apostadores em todo o país, alcançando arrecadações recordes e consolidando-se como um evento de grande relevância cultural e econômica.

O maior prêmio já pago pela Mega Sena foi registrado na edição especial da Mega da Virada em 2024, com o concurso de número 2810, que distribuiu um total de R\$ 635.486.165,38 entre oito apostas vencedoras. Os números sorteados foram 01, 17, 19, 29, 50 e 57 (Caixa, 2024). Das oito apostas vencedoras, três eram apostas individuais e cinco, bolões. Cada uma das apostas ganhadoras recebeu aproximadamente R\$ 79,4 milhões. As apostas premiadas vieram de diferentes cidades brasileiras, incluindo Brasília (DF), Nova Lima (MG), Curitiba (PR), Pinhais (PR), Osasco (SP) e Tupã (SP). Ao todo, foram vendidos mais de 485 milhões de bilhetes, gerando uma arrecadação de R\$ 2,42 bilhões, o maior valor na história da Mega Sena (Caixa, 2024).

Em sorteios regulares, o maior prêmio foi pago em 1º de outubro de 2022, totalizando R\$ 317.853.788,54, entregue a um único apostador, na ocasião, os números sorteados foram 4, 13, 21, 26, 47 e 51 (Caixa, 2024). Esses números refletem o potencial atrativo da Mega Sena, que não só distribui altos valores como também desempenha um papel significativo no financiamento de políticas públicas, uma vez que parte da arrecadação é destinada a programas sociais, conforme detalha o Quadro 2.

De acordo com dados oficiais da Caixa Econômica Federal, o prêmio bruto corresponde a 43,79% da arrecadação total (Caixa, 2024). A divisão do valor correspondente a este percentual segue o seguinte formato:

- 35% para os acertadores da Sena;
- 19% para os acertadores da Quina;
- 19% para os acertadores da Quadra;
- 22% acumulados para os concursos de final 0 ou 5;
- 5% acumulados para a Mega da Virada.

Caso haja mais de um ganhador em qualquer faixa de premiação, o prêmio é dividido igualmente entre eles. Se nenhuma aposta for vencedora em uma faixa de premiação, o valor acumula para o próximo concurso correspondente. Contudo, os prêmios têm validade de 90 dias após a data do sorteio. Caso não sejam resgatados dentro desse prazo, os valores são transferidos ao Tesouro Nacional e destinados ao FIES, reforçando o papel social do jogo (Caixa, 2024).

O funcionamento da Mega Sena é organizado em concursos, cada um consistindo na extração de um conjunto de seis números. Desde seu lançamento, em 1996, já foram realizados mais de 2.800 concursos (Caixa, 2024). Um exemplo hipotético pode ilustrar como funciona o sistema de premiação: se um jogador apostasse nos números 10, 20, 30, 40, 50 e 60 e o resultado oficial do concurso fosse 10, 30, 50, 60, 18 e 43, o apostador teria acertado quatro números (10, 30, 50 e 60) e, assim, garantiria a premiação da Quadra.

A Mega Sena oferece algumas opções de aposta para facilitar a participação. Na modalidade “Surpresinha”, o sistema seleciona aleatoriamente os números para o jogador. Já na modalidade “Teimosinha”, o apostador pode repetir os mesmos números em concursos consecutivos, pagando proporcionalmente pelo número de sorteios escolhidos (Caixa, 2024). Essa flexibilidade torna o jogo mais acessível e diversificado, ampliando as chances de participação.

Além das apostas presenciais nas casas lotéricas, a Mega Sena também pode ser jogada online pelo site da Caixa ou pelo aplicativo Loterias Caixa. Outra opção popular é a formação de bolões, que permite a divisão de custos e o aumento das chances de ganho por meio de apostas conjuntas (Caixa, 2024).

Fraga (2013) destaca que a Mega Sena, por oferecer o maior prêmio entre as loterias brasileiras, atrai grande parte dos apostadores, movidos pela esperança de conquistar a tão sonhada fortuna. A Mega Sena é, portanto, não apenas uma forma de entretenimento, mas também uma ferramenta relevante para arrecadação de recursos e financiamento de projetos sociais no Brasil.

Além disso, a Mega Sena apresenta uma dinâmica que combina sorte e estratégia, tornando-a um objeto de estudo interessante para a aplicação de conceitos matemáticos, como Probabilidade e Análise Combinatória. A chance de acertar os 6 números, por exemplo, é de 1 em 50.063.860 para uma aposta simples, o que ilustra a complexidade e os desafios envolvidos no cálculo das probabilidades desse jogo. Posteriormente dedicaremos um tópico deste trabalho a detalhar os cálculos de probabilidade de acerto nas três faixas de premiação da Mega Sena, a saber: sena, quina e quadra.

A Mega Sena também serve como ferramenta pedagógica em projetos educacionais que exploram sua estrutura matemática (Fraga, 2013). Por meio do estudo de suas regras e probabilidades, professores podem incentivar os alunos a desenvolverem habilidades de cálculo, raciocínio lógico e tomada de decisão, conectando a teoria à prática de forma envolvente e contextualizada.

4.2.1 As chances de ganhar na Mega Sena

Neste tópico serão apresentados os cálculos de probabilidade que medirão as chances de um apostador ganhar algum prêmio na Mega Sena, baseado na quantidade números que ele deseja marcar no cartão de aposta.

As informações contidas no Quadro 3, adiante, estão disponíveis no site da Caixa Econômica Federal (Caixa, 2024) e mostram a probabilidade de um apostador ganhar na Mega Sena, em todas as faixas de premiação: Sena, Quina e Quadra, de acordo com a quantidade de números selecionados no cartão de aposta.

Quadro 3 – Probabilidade de ganhar na Mega Sena conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Probabilidade de acertar (1 em...)		
	Sena	Quina	Quadra
6	50.063.860	154.518	2.332
7	7.151.980	44.981	1.038
8	1.787.995	17.192	539
9	595.998	7.791	312
10	238.399	3.973	195
11	108.363	2.211	129
12	54.182	1.317	90
13	29.175	828	65
14	16.671	544	48
15	10.003	370	37
16	6.252	260	29
17	4.045	188	23
18	2.697	139	19
19	1.845	105	16
20	1.292	81	13

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

Apesar de disponibilizar essas informações em seu site oficial, a CEF não mostra como são feitos os cálculos. Sendo assim, iremos agora calcular todas essas probabilidades, a fim de

verificar se, de fato, estão sendo informadas corretamente, bem como mostrar ao leitor como é feito para determinar essas probabilidades.

Abaixo temos uma expressão geral que pode ser utilizada para calcular as chances de ganhar na Mega Sena de acordo com a quantidade de números selecionados no cartão de aposta:

$$P(x, y, n, t) = \frac{C_{n,y} \cdot C_{(t-n),(x-y)}}{C_{t,x}} \quad (2)$$

Onde,

$x \rightarrow$ quantidade de números que o apostador marcou no cartão de aposta;

$y \rightarrow$ quantidade de números que o apostador acertará no sorteio;

$n \rightarrow$ quantidade de números sorteados;

$t \rightarrow$ quantidade de números disponíveis no cartão de aposta;

$C_{m,p} \rightarrow$ quantidade de combinações de m elementos tomados p a p (Veja Seção 1.5).

Observe que, com essa expressão, é possível determinar as probabilidades de êxito em outros jogos de loteria, no entanto, como o foco principal deste trabalho é a Mega Sena, vamos calcular apenas as probabilidades referente a este jogo, para isso teremos $n = 6$ e $t = 60$ na equação (2).

Sendo assim, para a Mega Sena, teremos inicialmente a seguinte expressão:

$$P(x, y, 6, 60) = \frac{C_{6,y} \cdot C_{54,(x-y)}}{C_{60,x}} \quad (3)$$

Note que, na Mega Sena, um apostador pode marcar de 6 a 20 números no cartão de aposta, portanto, 6 e 20 são, respectivamente, o valor mínimo e máximo de x .

Para simplificar a notação, como estamos tratando apenas do jogo da Mega Sena, vamos substituir a equação (3) por a seguinte expressão:

$$P(x, y) = \frac{C_{6,y} \cdot C_{54,(x-y)}}{C_{60,x}} \quad (4)$$

Dessa forma, temos adiante os cálculos de probabilidade a partir da utilização da equação (4), conforme o desejo do apostador em selecionar de 6 a 20 números e acertar a sena, a quina ou quadra.

Para um apostador que marcou apenas 6 números (aposta simples) no cartão da Mega Sena, ele terá as seguintes chances de ganhar:

a) Acertando os seis números marcados (Sena):

$$P(6, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,0}}{C_{60,6}} = \frac{1 \cdot 1}{50.063.860} = \frac{1}{50.063.860} = 0,000002\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os seis marcados (Quina):

$$P(6, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,1}}{C_{60,6}} = \frac{6 \cdot 54}{50.063.860} = \frac{324}{50.063.860} = \frac{1}{154.518} = 0,00066\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os seis marcados (Quadra):

$$P(6, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,2}}{C_{60,6}} = \frac{15 \cdot 1.431}{50.063.860} = \frac{21.465}{50.063.860} = \frac{1}{2.332} = 0,043\%.$$

Para um apostador que marcou 7 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar os seguintes percentuais:

a) Acertando seis números entre os sete números marcados (Sena):

$$P(7, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,1}}{C_{60,7}} = \frac{1 \cdot 54}{386.206.920} = \frac{54}{386.206.920} = \frac{1}{7.151.980} = 0,000014\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os sete números marcados (Quina):

$$P(7, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,2}}{C_{60,7}} = \frac{6 \cdot 1.431}{386.206.920} = \frac{8.586}{386.206.920} = \frac{1}{44.981} = 0,0022\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os sete números marcados (Quadra):

$$P(7, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,3}}{C_{60,7}} = \frac{15 \cdot 24.804}{386.206.920} = \frac{372.060}{386.206.920} = \frac{1}{1.038} = 0,096\%.$$

Para um apostador que marcou 8 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os oito números marcados (Sena):

$$P(8, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,2}}{C_{60,8}} = \frac{1 \cdot 1.431}{2.558.620.845} = \frac{1.431}{2.558.620.845} = \frac{1}{1.787.995} = 0,000056\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os oito números marcados (Quina):

$$P(8, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,3}}{C_{60,8}} = \frac{6 \cdot 24.804}{2.558.620.845} = \frac{148.824}{2.558.620.845} = \frac{1}{17.192} = 0,0058\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os oito números marcados (Quadra):

$$P(8, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,4}}{C_{60,8}} = \frac{15 \cdot 316.251}{2.558.620.845} = \frac{4.743.765}{2.558.620.845} = \frac{1}{539} = 0,185\%.$$

Para um apostador que marcou 9 números no cartão da Mega Sena, terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os nove números marcados (Sena):

$$P(9, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,3}}{C_{60,9}} = \frac{1 \cdot 24.804}{14.783.142.660} = \frac{24.804}{14.783.142.660} = \frac{1}{595.998} = 0,00017\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os nove números marcados (Quina):

$$P(9, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,4}}{C_{60,9}} = \frac{6 \cdot 316.251}{14.783.142.660} = \frac{1.897.506}{14.783.142.660} = \frac{1}{7.791} = 0,013\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os nove números marcados (Quadra):

$$P(9, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,5}}{C_{60,9}} = \frac{15 \cdot 3.162.510}{14.783.142.660} = \frac{47.437.650}{14.783.142.660} = \frac{1}{312} = 0,32\%.$$

Para um apostador que marcou 10 números no cartão da Mega Sena, a chance de ele ganhar:

a) Acertando seis números entre os dez números marcados (Sena):

$$P(10, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,4}}{C_{60,10}} = \frac{1 \cdot 316.251}{75.394.027.566} = \frac{316.251}{75.394.027.566} = \frac{1}{238.399} = 0,00042\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os dez números marcados (Quina):

$$P(10, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,5}}{C_{60,10}} = \frac{6 \cdot 3.162.510}{75.394.027.566} = \frac{18.975.060}{75.394.027.566} = \frac{1}{3.973} = 0,025\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os dez números marcados (Quadra):

$$P(10, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,6}}{C_{60,10}} = \frac{15 \cdot 25.827.165}{75.394.027.566} = \frac{387.407.475}{75.394.027.566} = \frac{1}{195} = 0,5\%.$$

Para um apostador que marcou 11 números no cartão da Mega Sena, a chance de ele ganhar são as seguintes:

a) Acertando seis números entre os onze números marcados (Sena):

$$P(11, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,5}}{C_{60,11}} = \frac{1 \cdot 3.162.510}{342.700.125.300} = \frac{3.162.510}{342.700.125.300} = \frac{1}{108.363} = 0,00092\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os onze números marcados (Quina):

$$P(11, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,6}}{C_{60,11}} = \frac{6 \cdot 25.827.165}{342.700.125.300} = \frac{154.962.990}{342.700.125.300} = \frac{1}{2.211} = 0,045\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os onze números marcados (Quadra):

$$P(11, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,7}}{C_{60,11}} = \frac{15 \cdot 177.100.560}{342.700.125.300} = \frac{2.656.508.400}{342.700.125.300} = \frac{1}{129} = 0,77\%.$$

Para um apostador que marcou 12 números no cartão da Mega Sena, terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os doze números marcados (Sena):

$$P(12, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,6}}{C_{60,12}} = \frac{1 \cdot 25.827.165}{1.399.358.844.975} = \frac{25.827.165}{1.399.358.844.975} = \frac{1}{54.182} = 0,0018\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os doze números marcados (Quina):

$$P(12, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,7}}{C_{60,12}} = \frac{6 \cdot 177.100.560}{1.399.358.844.975} = \frac{1.062.603.360}{1.399.358.844.975} = \frac{1}{1.317} = 0,076\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os doze números marcados (Quadra):

$$P(12, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,8}}{C_{60,12}} = \frac{15 \cdot 1.040.465.790}{1.399.358.844.975} = \frac{15.606.986.850}{1.399.358.844.975} = \frac{1}{90} = 1,1\%.$$

Para um apostador que marcou 13 números no cartão da Mega Sena, terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os treze números marcados (Sena):

$$P(13, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,7}}{C_{60,13}} = \frac{1 \cdot 177.100.560}{5.166.863.427.600} = \frac{177.100.560}{5.166.863.427.600} = \frac{1}{29.175} = 0,0034\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os treze números marcados (Quina):

$$P(13, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,8}}{C_{60,13}} = \frac{6 \cdot 1.040.465.790}{5.166.863.427.600} = \frac{6.242.794.740}{5.166.863.427.600} = \frac{1}{828} = 0,121\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os treze números marcados (Sexta):

$$P(13, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,9}}{C_{60,13}} = \frac{15 \cdot 5.317.936.260}{5.166.863.427.600} = \frac{79.769.043.900}{5.166.863.427.600} = \frac{1}{65} = 1,54\%.$$

Para um apostador que marcou 14 números no cartão da Mega Sena, sua chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os catorze números marcados (Sena):

$$P(14, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,8}}{C_{60,14}} = \frac{1 \cdot 1.040.465.790}{17.345.898.649.800} = \frac{1.040.465.790}{17.345.898.649.800} = \frac{1}{16.671} = 0,006\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os catorze números marcados (Quina):

$$P(14, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,9}}{C_{60,14}} = \frac{6 \cdot 5.317.936.260}{17.345.898.649.800} = \frac{31.907.617.560}{17.345.898.649.800} = \frac{1}{544} = 0,182\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os catorze números marcados (Quadra):

$$P(14, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,10}}{C_{60,14}} = \frac{15 \cdot 23.930.713.170}{17.345.898.649.800} = \frac{358.960.697.550}{17.345.898.649.800} = \frac{1}{48} = 2,08\%.$$

Para um apostador que marcou 15 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os quinze números marcados (Sena):

$$P(15, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,9}}{C_{60,15}} = \frac{1 \cdot 5.317.936.260}{53.194.089.192.720} = \frac{5.317.936.260}{53.194.089.192.720} = \frac{1}{10.003} = 0,001\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os quinze números marcados (Quina):

$$P(15, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,10}}{C_{60,15}} = \frac{6 \cdot 23.930.713.170}{53.194.089.192.720} = \frac{143.584.279.020}{53.194.089.192.720} = \frac{1}{370} = 0,27\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os quinze números marcados (Quadra):

$$P(15, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,11}}{C_{60,15}} = \frac{15 \cdot 95.722.852.680}{53.194.089.192.720} = \frac{1.435.842.790.200}{53.194.089.192.720} = \frac{1}{37} = 2,70\%.$$

Para um apostador que marcou 16 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os dezesseis números marcados (Sena):

$$P(16, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,10}}{C_{60,16}} = \frac{1 \cdot 23.930.713.170}{149.608.375.854.525} = \frac{23.930.713.170}{149.608.375.854.525} = \frac{1}{6.252} = 0,016\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os dezesseis números marcados (Quina):

$$P(16, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,11}}{C_{60,16}} = \frac{6 \cdot 95.722.852.608}{149.608.375.854.525} = \frac{574.337.115.648}{149.608.375.854.525} = \frac{1}{260} = 0,38\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os dezesseis números marcados (Quadra):

$$P(16, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,12}}{C_{60,16}} = \frac{15 \cdot 343.006.888.770}{149.608.375.854.525} = \frac{5.145.103.331.550}{149.608.375.854.525} = \frac{1}{29} = 3,44\%.$$

Para um apostador que marcou 17 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os dezessete números marcados (Sena):

$$P(17, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,11}}{C_{60,17}} = \frac{1 \cdot 95.722.852.608}{387.221.678.682.300} = \frac{95.722.852.608}{387.221.678.682.300} = \frac{1}{4.045} = 0,025\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os dezessete números marcados (Quina):

$$P(17, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,12}}{C_{60,17}} = \frac{6 \cdot 343.006.888.770}{387.221.678.682.300} = \frac{2.058.041.332.620}{387.221.678.682.300} = \frac{1}{188} = 0,53\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os dezessete números marcados (Quadra):

$$P(17, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,13}}{C_{60,17}} = \frac{15 \cdot 1.108.176.102.180}{387.221.678.682.300} = \frac{16.622.641.532.700}{387.221.678.682.300} = \frac{1}{23} = 4,3\%.$$

Para um apostador que marcou 18 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os dezoito números marcados (Sena):

$$P(18, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,12}}{C_{60,18}} = \frac{1 \cdot 343.006.888.770}{925.029.565.741.050} = \frac{343.006.888.770}{925.029.565.741.050} = \frac{1}{2.697} = 0,04\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os dezoito números marcados (Quina):

$$P(18, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,13}}{C_{60,18}} = \frac{6 \cdot 1.108.176.102.180}{925.029.565.741.050} = \frac{6.649.056.613.080}{925.029.565.741.050} = \frac{1}{139} = 0,70\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os dezoito números marcados (Quadra):

$$P(18, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,14}}{C_{60,18}} = \frac{15 \cdot 3.245.372.870.670}{955.029.565.741.050} = \frac{48.680.593.060.050}{955.029.565.741.050} = \frac{1}{19} = 5,10\%.$$

Para um apostador que marcou 19 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os dezenove números marcados (Sena):

$$P(19, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,13}}{C_{60,19}} = \frac{1 \cdot 1.108.176.102.180}{2.044.802.197.953.900} = \frac{1.108.176.102.180}{2.044.802.197.953.900} = \frac{1}{1.845} = 0,05\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os dezenove números marcados (Quina):

$$P(19, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,14}}{C_{60,19}} = \frac{6 \cdot 3.245.372.870.670}{2.044.802.197.953.900} = \frac{19.472.237.224.020}{2.044.802.197.953.900} = \frac{1}{105} = 0,95\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os dezenove números marcados (Quadra):

$$P(19, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,15}}{C_{60,19}} = \frac{15 \cdot 8.654.327.655.120}{2.044.802.197.953.900} = \frac{129.814.914.826.800}{2.044.802.197.953.900} = \frac{1}{16} = 6,3\%.$$

Por fim, para um apostador que marcou 20 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

a) Acertando seis números entre os vinte números marcados (Sena):

$$P(20, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,14}}{C_{60,20}} = \frac{1 \cdot 3.245.372.870.670}{4.191.844.505.805.495} = \frac{3.245.372.870.670}{4.191.844.505.805.495} = \frac{1}{1.292} = 0,08\%.$$

b) Acertando apenas cinco números entre os vinte números marcados (Quina):

$$P(20, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,15}}{C_{60,20}} = \frac{6 \cdot 8.654.327.655.120}{4.191.844.505.805.495} = \frac{51.925.965.930.720}{4.191.844.505.805.495} = \frac{1}{81} = 1,23\%.$$

c) Acertando apenas quatro números entre os vinte números marcados (Quadra):

$$P(20, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,16}}{C_{60,20}} = \frac{15 \cdot 21.094.923.659.355}{4.191.844.505.805.495} = \frac{316.423.854.890.325}{4.191.844.505.805.495} = \frac{1}{13} = 7,55\%.$$

Com base nos cálculos apresentados acima, vemos que as probabilidades apresentadas no site oficial da CEF (Caixa, 2024) estão corretas. Assim como no Quadro 3, nos cálculos feitos acima foram utilizadas algumas aproximações, com a finalidade de trabalhar apenas com números inteiros, que facilita a compreensão do leitor.

Como é possível perceber, à medida que o apostador aumenta a quantidade de números marcados no cartão da Mega Sena, aumentam também as suas chances de receber o grande prêmio, apesar de que a maior probabilidade de acertar a Sena não chega a um décimo percentual.

De qualquer forma, como aumentam as chances de ganhar algum prêmio, o mais natural é fazer uma aposta onde seja possível marcar mais números, no entanto, não é tão simples assim, pois à medida que se aumenta a quantidade de números marcados aumenta também o valor a ser pago pela aposta. Daí surge o questionamento: É mais vantajoso fazer apostas simples (6 números escolhidos) ou apostas com a opção de marcar mais números?

A resposta a esse questionamento é que não existe vantagem, pois o custo de cada aposta é baseado na quantidade de combinações possíveis de seis números entre os números marcados no cartão de aposta. Observe alguns exemplos abaixo.

- i. Aposta simples com 6 dezenas: Se forem escolhidas apenas 6 dezenas, há apenas uma combinação possível. $C_{6,6} = 1$, ao custo atual de R\$ 5,00.
- ii. Aposta com 7 dezenas: neste caso, há $C_{7,6} = 7$ combinações possíveis, ao custo atual de R\$ 35,00 ($7 \times R\$ 5,00 = R\$ 35,00$).
- iii. Aposta com 8 dezenas: há $C_{8,6} = 28$ combinações possíveis, ao custo atual de R\$ 140,00 ($28 \times R\$ 5,00 = R\$ 140,00$).

E assim segue-se, analogamente, até a aposta máxima que atualmente é para 20 dezenas marcadas no cartão da Mega Sena, ao custo atual de R\$193.800,00. Conforme explicitado no Quadro 1.

Uma informação bem interessante, que talvez poucos apostadores tenham conhecimento, é que dependendo da quantidade de números marcados no cartão da Mega Sena há uma variação da quantidade de prêmios que o apostador receberá, isso mesmo, uma aposta pode ser contemplada com mais de um prêmio, a depender da quantidade de números marcados e, obviamente, da quantidade de números que o apostador acertou.

Por exemplo, para uma aposta com 10 dezenas marcadas no cartão de jogo, caso o jogador acerte as 6 dezenas sorteadas, ele receberá o prêmio máximo (supondo que ele acerte sozinho, caso contrário o prêmio será dividido entre todos os acertadores). Além disso, ele receberá também 24 vezes o valor da Quina e 90 vezes o valor da Quadra, totalizando assim 115 prêmios. O que também poderá acontecer, é caso ele acerte apenas 5 dezenas entre as 6 dezenas sorteadas, receberá 55 premiações, 5 referentes a Quina e 50 referentes a Quadra ou ainda, caso acerte somente 4 dezenas dentre as 6 dezenas sorteadas, receberá 15 vezes o valor da premiação da Quadra.

Isso acontece, pois uma aposta com 10 dezenas marcadas gera $C_{10,6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$ combinações de seis números, ou seja, fazer uma única aposta com 10 dezenas marcadas equivale a fazer 210 apostas simples (com 6 dezenas marcadas). Então, se um apostador fez sua aposta marcando 10 dezenas e, dentre elas, estavam as 6 dezenas sorteadas, isso significa que das 210 combinações possíveis, uma será a combinação que terá as 6 dezenas sorteadas e, assim, receberá o prêmio principal, 24 combinações terão 5 dezenas das sorteadas e, portanto, receberão o prêmio da Quina cada uma, e 90 combinações terão 4 dezenas das sorteadas, sendo assim, cada uma receberá o prêmio da Quadra, conforme mostra o Quadro 4.

Quadro 4 – Quantidade de prêmios a receber em uma aposta com 10 dezenas marcadas

Apostas \ Acertos	6 números			5 números		4 números
Quantidade de n° jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
10	1	24	90	5	50	15

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

Partindo do exemplo acima, como poderemos determinar a quantidade de premiações que o apostador receberá de acordo com a quantidade de números marcados no cartão de aposta e a quantidade de acertos dentre os números marcados?

A expressão geral que define a quantidade de combinações que geram jogos vencedores em cada faixa de premiação está expressa abaixo. Ela é determinada pelo produto entre a combinação da quantidade de acertos e a combinação da quantidade de erros necessários para se enquadrar em cada faixa de premiação. Por exemplo, para uma aposta ser vencedora da Sena ela deve ter 6 acertos e 0 erros, para ser vencedora da Quina deve ter 5 acertos e 1 erro e para ser vencedora da Quadra deve ter 4 acertos e 2 erros. Sendo assim, segue a expressão que permite calcular a quantidade de premiações:

$$\underbrace{C_{x,y}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(n-x),z}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}}$$

Onde,

$n \rightarrow$ quantidade de números marcados no cartão de aposta ($n \in \mathbb{N}$; $6 \leq n \leq 20$);

$x \rightarrow$ quantidade de acertos na aposta ($x \in \mathbb{N}$; $4 \leq x \leq 6$);

$y \rightarrow$ quantidade de acertos em cada faixa de premiação: sena ($y = 6$),

quina ($y = 5$), quadra ($y = 4$);

$z \rightarrow$ quantidade de erros em cada faixa de premiação: sena ($z = 0$),

quina ($z = 1$), quadra ($z = 2$);

$C_{m,p} \rightarrow$ quantidade de combinações de m elementos tomados p a p (Veja Seção 1.5).

Utilizando a situação descrita anteriormente para exemplificar, vamos confirmar que as quantidades de premiações informadas são, de fato, verdadeiras. Observe, se um apostador marca 10 dezenas ($n = 10$) e acerta 6 dezenas ($x = 6$), consequentemente terá errado 4 dezenas ($n - x = 10 - 6 = 4$). Então a quantidade de premiações que esse apostador receberá na Sena ($y = 6$ e $z = 0$) será:

$$\underbrace{C_{6,6}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(10-6),0}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \times \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1 \times 1 = 1 \text{ premiação.}$$

Esse mesmo apostador, nas mesmas condições, terá a seguinte quantidade de premiações na Quina ($y = 5$ e $z = 1$):

$$\underbrace{C_{6,5}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(10-6),1}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} \times \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 6 \times 4 = 24 \text{ premiações.}$$

Esse mesmo apostador, nas mesmas condições, terá a seguinte quantidade de premiações na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$):

$$\underbrace{C_{6,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(10-6),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \times \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 15 \times 6 = 90 \text{ premiações.}$$

No caso de o apostador ter marcado 10 dezenas ($n = 10$) e acertado apenas 5 dezenas ($x = 5$), consequentemente terá errado 5 dezenas ($n - x = 10 - 5 = 5$). Então a quantidade de premiações que esse apostador receberá na Quina ($y = 5$ e $z = 1$) será:

$$\underbrace{C_{5,5}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(10-5),1}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} \times \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 1 \times 5 = 5 \text{ premiações.}$$

Já a quantidade de premiações que o apostador receberá na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$), nas mesmas condições da situação anterior, será:

$$\underbrace{C_{5,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(10-5),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \times \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5 \times 10 = 50 \text{ premiações.}$$

Agora, se esse apostador marcou 10 dezenas ($n = 10$) e acertou somente 4 dezenas ($x = 4$), consequentemente terá errado 6 dezenas ($n - x = 10 - 4 = 6$). Então a quantidade de premiações que ele receberá na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$) será:

$$\underbrace{C_{4,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(10-4),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \times \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 1 \times 15 = 15 \text{ premiações.}$$

Note que a quantidade de premiações confere com a quantidade exposta no Quadro 4, logo são verídicas as informações expressas nesse quadro.

A título de exemplo, vamos verificar agora a quantidade de premiações para um apostador que marcou 15 números no cartão de aposta.

Se o apostador marca 15 dezenas ($n = 15$) e acerta 6 dezenas ($x = 6$), consequentemente terá errado 9 dezenas ($n - x = 15 - 6 = 9$). Então a quantidade de premiações que esse apostador receberá na Sena ($y = 6$ e $z = 0$) será:

$$\underbrace{C_{6,6}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(15-6),0}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \times \frac{9!}{0! \cdot 9!} = 1 \times 1 = 1 \text{ premiação.}$$

Esse mesmo apostador, nas mesmas condições, terá a seguinte quantidade de premiações na Quina ($y = 5$ e $z = 1$):

$$\underbrace{C_{6,5}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(15-6),1}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} \times \frac{9!}{1! \cdot 8!} = 6 \times 9 = 54 \text{ premiações.}$$

Esse mesmo apostador, nas mesmas condições, terá a seguinte quantidade de premiações na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$):

$$\underbrace{C_{6,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(15-6),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \times \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 15 \times 36 = 540 \text{ premiações.}$$

No caso de o apostador ter marcado 15 dezenas ($n = 15$) e acertado apenas 5 dezenas ($x = 5$), consequentemente terá errado 10 dezenas ($n - x = 15 - 5 = 10$). Então a quantidade de premiações que esse apostador receberá na Quina ($y = 5$ e $z = 1$) será:

$$\underbrace{C_{5,5}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(15-5),1}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} \times \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 1 \times 10 = 10 \text{ premiações.}$$

Já a quantidade de premiações que o apostador receberá na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$), nas mesmas condições da situação anterior, será:

$$\underbrace{C_{5,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(15-5),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \times \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 5 \times 45 = 225 \text{ premiações.}$$

Agora, se esse apostador marcou 15 dezenas ($n = 15$) e acertou somente 4 dezenas ($x = 4$), consequentemente terá errado 11 dezenas ($n - x = 15 - 4 = 11$). Então a quantidade de premiações que ele receberá na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$) será:

$$\underbrace{C_{4,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(15-4),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \times \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 1 \times 55 = 55 \text{ premiações.}$$

Realizando esse processo de modo análogo para as demais quantidades de números marcados em uma aposta, obteremos a quantidade de premiações que o apostador receberá em cada uma das situações possíveis. Como o processo é análogo, não serão realizados os cálculos para cada situação, com o objetivo de não tornar este estudo desnecessariamente extenso, sendo assim, será apresentado adiante, no Quadro 5, a quantidade de prêmios que o apostador receberá em cada uma das situações possíveis:

Quadro 5 – Quantidade de prêmios a receber em relação à quantidade de números marcados e acertados

Apostas \ Acertos	6 números			5 números		4 números
Quantidade de nº jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	1	0	0	1	0	1
7	1	6	0	2	5	3
8	1	12	15	3	15	6
9	1	18	45	4	30	10
10	1	24	90	5	50	15
11	1	30	150	6	75	21
12	1	36	225	7	105	28
13	1	42	315	8	140	36
14	1	48	420	9	180	45
15	1	54	540	10	225	55
16	1	60	675	11	275	66

17	1	66	825	12	330	78
18	1	72	990	13	390	91
19	1	78	1170	14	455	105
20	1	84	1365	15	525	120

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

A título de exemplo, vamos verificar o caso de um apostador que marcou no cartão de apostas oito dezenas e foi premiado na sena (acertando 6 dezenas), ou na quina (acertando 5 dezenas) ou na quadra (acertando 4 dezenas), respectivamente.

Em uma aposta com 8 dezenas na Mega Sena, o apostador concorre com 28 combinações de 6 dezenas, pois $C_{8,6} = 28$.

Digamos que ele tenha marcado exatamente os seguintes números no cartão de aposta (1, 2, 6, 15, 25, 40, 51, 57). Supondo que as dezenas sorteadas tenham sido (2, 15, 25, 40, 51, 57). Vejamos os seguintes casos:

Supondo que o apostador tenha feito a **SENA**, acertando os números (2, 15, 25, 40, 51, 57). Com isso, ele deverá receber um total de **28 premiações**, sendo 1 sena, 12 quinas e 15 quadras, conforme detalha o Quadro 6.

Quadro 6 – Quantidade de premiações para uma aposta feita com 8 dezenas e acertando a Sena

Todas as Combinações Possíveis	Quantidade de Dezenas Certas	Quantidade de Premiações
(2, 15, 25, 40, 51, 57)	6 acertos (sena)	1 Sena
(1, 2, 15, 25, 40, 51)	5 acertos (quina)	12 quinas
(1, 2, 15, 25, 40, 57)		
(1, 2, 15, 25, 51, 57)		
(1, 2, 15, 40, 51, 57)		
(1, 2, 25, 40, 51, 57)		
(1, 15, 25, 40, 51, 57)		
(2, 6, 15, 25, 40, 51)		
(2, 6, 15, 25, 40, 57)		
(2, 6, 15, 25, 51, 57)		
(2, 6, 15, 40, 51, 57)		

(2, 6, 25, 40, 51, 57)		
(6, 15, 25, 40, 51, 57)		
(1, 2, 6, 15, 25, 40)	4 acertos (quadra)	15 quadras
(1, 2, 6, 15, 25, 51)		
(1, 2, 6, 15, 25, 57)		
(1, 2, 6, 15, 40, 51)		
(1, 2, 6, 15, 40, 57)		
(1, 2, 6, 15, 51, 57)		
(1, 2, 6, 25, 40, 51)		
(1, 2, 6, 25, 40, 57)		
(1, 2, 6, 25, 51, 57)		
(1, 2, 6, 40, 51, 57)		
(1, 6, 15, 25, 40, 51)		
(1, 6, 15, 25, 40, 57)		
(1, 6, 15, 25, 51, 57)		
(1, 6, 15, 40, 51, 57)		
(1, 6, 25, 40, 51, 57)		
Total de Premiações		28 premiações

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Supondo que o apostador fez apenas a **QUINA**, tendo acertado apenas os números (15, 25, 40, 51, 57), por exemplo, ele deverá receber **18 premiações** referentes a 3 quinas e 15 quadras, conforme detalha o Quadro 7.

Quadro 7 – Quantidade de premiações para uma aposta feita com 8 dezenas e acertando a Quina

Todas as Combinações Possíveis	Quantidade de Dezenas Certas	Quantidade de Premiações
(1, 15, 25, 40, 51, 57)	5 acertos (quina)	3 quinas
(2, 15, 25, 40, 51, 57)		
(6, 15, 25, 40, 51, 57)		
(1, 2, 15, 25, 40, 51)	4 acertos (quadra)	15 quadras
(1, 2, 15, 25, 40, 57)		
(1, 2, 15, 25, 51, 57)		
(1, 2, 15, 40, 51, 57)		

(1, 2, 25, 40, 51, 57)		
(1, 6, 15, 25, 40, 51)		
(1, 6, 15, 25, 40, 57)		
(1, 6, 15, 25, 51, 57)		
(1, 6, 15, 40, 51, 57)		
(1, 6, 25, 40, 51, 57)		
(2, 6, 15, 25, 40, 51)		
(2, 6, 15, 25, 40, 57)		
(2, 6, 15, 25, 51, 57)		
(2, 6, 15, 40, 51, 57)		
(2, 6, 25, 40, 51, 57)		
(1, 2, 6, 15, 25, 40)	3 acertos	Sem premiações
(1, 2, 6, 15, 25, 51)		
(1, 2, 6, 15, 25, 57)		
(1, 2, 6, 15, 40, 51)		
(1, 2, 6, 15, 40, 57)		
(1, 2, 6, 15, 51, 57)		
(1, 2, 6, 25, 40, 51)		
(1, 2, 6, 25, 40, 57)		
(1, 2, 6, 25, 51, 57)		
(1, 2, 6, 40, 51, 57)		
Total de Premiações		18 premiações

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Por fim, supondo que o apostador fez apenas a **QUADRA**, tendo acertado apenas os números (15, 25, 40, 51), por exemplo, ele deverá receber **6 premiações** referentes a quadra, conforme detalha o Quadro 5.

Quadro 8 – Quantidade de premiações para uma aposta feita com 8 dezenas e acertando a Quadra

Todas as Combinações Possíveis	Quantidade de Dezenas Certas	Quantidade de Premiações
(1, 2, 15, 25, 40, 51)	4 acertos (quadra)	6 quadras
(1, 6, 15, 25, 40, 51)		
(1, 15, 25, 40, 51, 57)		

(2, 6, 15, 25, 40, 51)		
(2, 15, 25, 40, 51, 57)		
(6, 15, 25, 40, 51, 57)		
(1, 2, 6, 15, 25, 40)	3 acertos	Sem premiações
(1, 2, 6, 15, 25, 51)		
(1, 2, 6, 15, 40, 51)		
(1, 2, 6, 25, 40, 51)		
(1, 2, 15, 25, 40, 57)		
(1, 2, 15, 25, 51, 57)		
(1, 2, 15, 40, 51, 57)		
(1, 2, 25, 40, 51, 57)		
(1, 6, 15, 25, 40, 57)		
(1, 6, 15, 25, 51, 57)		
(1, 6, 15, 40, 51, 57)		
(1, 6, 25, 40, 51, 57)		
(2, 6, 15, 25, 40, 57)		
(2, 6, 15, 25, 51, 57)		
(2, 6, 15, 40, 51, 57)		
(2, 6, 25, 40, 51, 57)		
(1, 2, 6, 15, 25, 57)	2 acertos	Sem premiações
(1, 2, 6, 15, 40, 57)		
(1, 2, 6, 15, 51, 57)		
(1, 2, 6, 25, 40, 57)		
(1, 2, 6, 25, 51, 57)		
(1, 2, 6, 40, 51, 57)		
Total de Premiações		6 premiações

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dessa forma fica exemplificado uma situação em que o apostador marcou 8 dezenas e acertou a Sena ou a Quina ou a Quadra e suas respectivas quantidades de premiações, confirmando, assim, os dados apresentados no Quadro 5.

4.3 QUINA

Lançada em 1994, a Quina se destaca por ter sorteios frequentes, ocorrendo seis vezes por semana. Os participantes podem selecionar de 5 a 15 números entre os 80 disponíveis (ver Figura 2). As categorias de premiação são distribuídas da seguinte forma: Duque para 2 acertos, Terno para 3, Quadra para 4 e Quina para 5 acertos. A probabilidade de vencer varia conforme o número de apostas realizadas, e o prêmio bruto também segue a distribuição proporcional da arrecadação total (Caixa, 2024).

Figura 2 – Cartão de aposta da Quina



Fonte: Arquivo do autor (2024).

São realizados seis sorteios semanais para a Quina, de segunda-feira a sábado. Desde quando foi criada, a Quina já realizou mais de 6.600 sorteios. Assim como na Mega Sena, na Quina o custo da aposta varia de acordo com a quantidade de números selecionados, com valores progressivamente mais altos para apostas que aumentam as chances de vitória, conforme mostra o Quadro 9 (Caixa, 2024).

Quadro 9 – Valor da aposta na Quina de conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Valor da aposta (em R\$)
5	2,50
6	15,00
7	52,50
8	140,00
9	315,00
10	630,00
11	1.155,00
12	1.980,00
13	3.217,50
14	5.005,00
15	7.507,50

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

De acordo com a Caixa (2024), o prêmio bruto de cada sorteio da Quina corresponde a 43,79% da arrecadação. O restante do valor arrecadado é repassado ao Governo Federal para que retorne à sociedade na forma de benefícios sociais. A divisão de todo o valor arrecadado segue o mesmo modelo da Mega Sena e está detalhado no Quadro 2. Do valor destinado ao prêmio bruto é feita uma nova distribuição, conforme discriminado a seguir:

- 35% entre os acertadores de 5 números;
- 15% entre os acertadores de 4 números;
- 10% entre os acertadores de 3 números;
- 10% entre os acertadores de 2 números;
- 15% acumulam para os acertadores dos 5 números da Quina de São João;
- 15% acumulam para a 1ª faixa dos concursos da quina de final 5 e do concurso especial de junho de cada ano.

Não havendo acertador em qualquer faixa de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, nas respectivas faixas. Caso haja ganhador, mas o prêmio não seja resgatado dentro do prazo de 90 dias, os valores são transferidos ao Tesouro Nacional e destinados ao FIES (Caixa, 2024).

No Quadro 10 temos de forma detalhada a probabilidade de ganhar na Quina de acordo com a quantidade de números marcados.

Quadro 10 – Probabilidade de ganhar na Quina conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Probabilidade de acertar (1 em...)			
	Quina	Quadra	Terna	Duque
5	24.040.016	64.106	866	36
6	4.006.669	21.658	445	25
7	1.144.763	9.409	261	18
8	429.286	4.770	168	14
9	190.794	2.687	115	12
10	95.396	1.635	82	9
11	52.035	1.056	62	8
12	30.354	714	48	7
13	18.679	502	38	6
14	12.008	364	31	5,8
15	8.005	271	25	5,2

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

4.4 LOTOFÁCIL

Lançada em 2003, a Lotofácil se destaca pela simplicidade das apostas e pela maior chance de premiação em relação à Mega-Sena e à Quina. Os apostadores podem selecionar de 15 a 20 números entre os 25 disponíveis, sendo contemplados aqueles que acertarem de 11 a 15 números (Ver Figura 3).

Figura 3 – Cartão de aposta da Lotofácil

LOTOFÁCIL

Assinale quantos números você está marcando neste jogo:
☐ 15 ☐ 16 ☐ 17 ☐ 18

SURPRESINHA - Escolha quantos jogos você quer fazer:
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

TEMOSINHA - Escolha em quantos concursos você quer participar com este mesmo jogo:
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12

Aposte em 15, 16, 17 ou 18 números e ganhe com 11, 12, 13, 14 e 15 acertos.

CONFIRA O BILHETE IMPRESSO PELO TERMINAL. ELE É O ÚNICO COMPROVANTE DA APOSTA.

Loterias CAIXA

Preencha toda a área dos números escolhidos com caneta esferográfica azul ou preta.

Fonte: Arquivo do autor (2024).

Seu sorteio é realizado três vezes por semana (às segundas, quartas e sextas), e a aposta mínima tem um custo acessível de R\$ 3,00, atraindo uma grande quantidade de apostadores. Desde que foi instituída, a Lotofácil já realizou mais de 3.300 sorteios (Caixa, 2024).

Assim como na Mega Sena e na Quina, o custo da aposta varia de acordo com a quantidade de números selecionados, com valores progressivamente mais altos para apostas que aumentam as chances de vitória, conforme mostra o Quadro 11 (Caixa, 2024).

Quadro 11 – Valor da aposta na Lotofácil conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Valor da aposta (em R\$)
15	3,00
16	48,00
17	408,00
18	2.448,00
19	11.628,00

20	46.512,00
----	-----------

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

Segundo a Caixa (2024), o prêmio bruto de cada sorteio da Lotofácil corresponde a 43,79% da arrecadação. O restante do valor arrecadado é repassado ao Governo Federal para ser revertido à sociedade em forma de benefícios nas áreas da saúde, segurança, cultura e esporte. A distribuição do valor arrecadado segue o mesmo modelo da Mega Sena e Quina e está detalhado no Quadro 2. Ainda segundo a Caixa (2024), do valor destinado ao prêmio bruto será deduzido o pagamento dos prêmios com valores fixos, a saber:

- R\$ 6,00 para as apostas com 11 números certos entre os 15 sorteados;
- R\$ 12,00 para as apostas com 12 números certos entre os 15 sorteados;
- R\$ 30,00 para as apostas com 13 números certos entre os 15 sorteados.

Após a apuração dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, o valor restante do total destinado à premiação será distribuído para as demais faixas de prêmios nos seguintes percentuais:

- 62% entre os acertadores de 15 números;
- 13% entre os acertadores de 14 números;
- 10% ficam acumulados e são distribuídos aos acertadores dos 15 números nos concursos de final 0;
- 15% ficam acumulados para a primeira faixa (15 acertos) do concurso especial realizado em setembro de cada ano.

Já nos concursos de final 0, após o cômputo dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, o valor restante da premiação é distribuído da seguinte forma:

- 72% entre os acertadores de 15 números;
- 13% entre os acertadores de 14 números;
- 15% ficam acumulados para a primeira faixa (15 acertos) do concurso especial realizado em setembro de cada ano.

Não havendo acertador em qualquer faixa de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, na faixa de prêmio com 15 acertos. Caso haja ganhador, mas o prêmio não seja resgatado dentro do prazo máximo de 90 dias após o sorteio, o prêmio prescreve e os valores são repassados ao Tesouro Nacional para serem aplicados no FIES (Caixa, 2024).

No Quadro 12 temos de forma detalhada a probabilidade de ganhar na Lotofácil de acordo com a quantidade de números marcados.

Quadro 12 – Probabilidade de ganhar na Lotofácil conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Probabilidade de acertar (1 em...)				
	15 acertos	14 acertos	13 acertos	12 acertos	11 acertos
15	3.268.760	21.792	692	60	11
16	204.298	3.027	162	21	6
17	24.035	601	49	9	4
18	4.006	153	18	5	3
19	843	47	8	3,2	2,9
20	211	17	4,2	2,6	3,9

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

4.5 LOTOMANIA

Criada em 1999, a Lotomania é caracterizada pela aposta de 50 números em um universo de 100 disponíveis (Caixa, 2024), conforme Figura 4 a seguir.

Figura 4 – Cartão de aposta da Lotomania

LOTOMANIA

Marque quantos números quiser até o máximo de 50. Marcando menos de 50, o sistema completará sua aposta.

Ganhe acertando 15, 16, 17, 18, 19, 20 ou nenhum dos 20 números sorteados.

01 02 03 04 05 06 07 08 09 10
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
 91 92 93 94 95 96 97 98 99 00

APOSTA ESPELHO
 É a aposta em que o sistema gera nova aposta, escolhendo os outros 50 números não registrados na aposta original. A aposta espelho considerará todas as Teimosinhas e/ou Surpresinhas solicitadas.

SURPRESINHA – Aqui, o sistema escolhe os 50 números por você. Indique quantas apostas deseja fazer.

1 2

TEIMOSINHA – Escolha em quantos concursos você quer participar com este mesmo jogo:

2 4 8

APOSTA ESPELHO

CONFIRA O BILHETE IMPRESSO PELO TERMINAL. ELE É O ÚNICO COMPROVANTE DA APOSTA.

Loterias CAIXA

Preencha toda a área dos números escolhidos com caneta esferográfica azul ou preta.

Fonte: Arquivo do autor (2024).

Os sorteios acontecem três vezes por semana (às segundas, quartas e sextas) e as premiações são destinadas aos apostadores que acertarem 20, 19, 18, 17, 16, 15 ou nenhum número. A opção “Aposta-Espelho” é um diferencial desse jogo, permitindo que o jogador concorra com os 50 números que não foram escolhidos inicialmente. Desde sua criação, já foram realizados mais de 2.700 concursos da Lotomania (Caixa, 2024).

Diferentemente da Mega Sena, Quina e Lotofácil, onde o custo da aposta varia de acordo com a quantidade de números selecionados, na Lotomania o preço da aposta é único e custa R\$ 3,00, não havendo a possibilidade de marcar mais números e pagar a mais por isso. Assim, o Quadro 13 mostra a opção de quantidade de números a serem escolhidos e o respectivo valor da aposta (Caixa, 2024).

Quadro 13 – Valor da aposta única na Lotomania

Quantidade de números marcados	Valor da aposta (em R\$)
50	3,00

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

Consoante a Caixa (2024), o prêmio bruto de cada sorteio da Lotomania corresponde a 43,79% da arrecadação. O restante do valor arrecadado é repassado para fundos de programas sociais do Governo Federal. A distribuição do valor arrecadado segue o mesmo modelo da Mega Sena, Quina e Lotofácil e está discriminado no Quadro 2. Ainda conforme a Caixa (2024), do valor destinado ao prêmio bruto será feita uma nova divisão, mediante o exposto a seguir:

- 45% destinados aos apostadores que acertarem todos os 20 números sorteados – 1ª faixa;
- 16% distribuídos entre aqueles que acertarem 19 dos 20 números sorteados – 2ª faixa;
- 10% para os que acertarem 18 dos 20 números sorteados – 3ª faixa;
- 7% entre os que obtiverem 17 acertos nos 20 números sorteados – 4ª faixa;
- 7% concedidos aos que acertarem 16 dos 20 números sorteados – 5ª faixa;
- 7% para os que acertarem 15 dos 20 números sorteados – 6ª faixa;
- 8% destinados aos que não acertarem nenhum dos 20 números sorteados – 7ª faixa.

Se não houver ganhadores na 7ª faixa de premiação (zero acertos nos 20 números sorteados), o valor correspondente é transferido para o concurso seguinte na 1ª faixa (20

acertos). Já nas demais faixas, o prêmio acumula dentro da própria categoria de premiação (Caixa, 2024).

No Quadro 14 temos de forma detalhada a probabilidade de ganhar na Lotomania de acordo com a quantidade de números acertados.

Quadro 14 – Probabilidade de ganhar na Lotomania conforme a quantidade de acertos por faixa

Faixas	Probabilidade (1 em...)
1ª Faixa - 20 acertos	11.372.635
2ª Faixa - 19 acertos	352.551
3ª Faixa - 18 acertos	24.235
4ª faixa - 17 acertos	2.776.00
5ª faixa - 16 acertos	472
6ª faixa - 15 acertos	112
7ª faixa - 0 acertos	11.372.635

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

4.6 DUPLA SENA

A Dupla Sena, lançada em 2001, oferece aos apostadores a possibilidade de participar de dois sorteios com a mesma aposta. Com 50 números disponíveis no volante (Figura 5), os jogadores podem selecionar de 6 a 15 números (Caixa, 2014).

Figura 5 – Cartão de aposta da Dupla Sena

Fonte: Arquivo do autor (2024).

Os sorteios da Dupla Sena acontecem três vezes por semana (às segundas, quartas e sextas) e as premiações são destinadas aos apostadores que acertarem 6, 5, 4 ou 3 números em um dos dois sorteios de cada dia. Desde sua criação, já foram realizados mais de 2.700 concursos da Dupla Sena (Caixa, 2024).

Tal qual a Mega Sena, a Quina e a Lotofácil, o custo da aposta da Dupla Sena varia de acordo com a quantidade de números selecionados, com valores progressivamente mais altos para apostas que aumentam as chances de vitória, conforme mostra o Quadro 15 (Caixa, 2024).

Quadro 15 – Valor da aposta na Dupla Sena conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Valor da aposta (em R\$)
6	2,50
7	17,50
8	70,00
9	210,00
10	525,00
11	1.155,00

12	2.310,00
13	4.290,50
14	7.507,50
15	12.512,50

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

De acordo com a Caixa (2024), o prêmio bruto de cada sorteio da Dupla Sena corresponde a 43,79% da arrecadação. O restante do valor arrecadado é repassado ao Governo Federal para que sejam feitas melhorias nas áreas da saúde, segurança, cultura e esporte. A distribuição do valor arrecadado segue o mesmo modelo dos demais jogos e está detalhado no Quadro 2. Ainda segundo a Caixa (2024), do valor destinado ao prêmio bruto são distribuídos para o primeiro sorteio:

- 30% para os apostadores que acertarem 6 números;
- 10% para aqueles que acertarem 5 números;
- 8% para os que acertarem 4 números;
- 4% para os acertadores de 3 números.

No segundo sorteio, os prêmios são distribuídos da seguinte maneira:

- 11% para quem acertar 6 números;
- 9% para os que acertarem 5 números;
- 8% para aqueles que acertarem 4 números;
- 4% para os que obtiverem 3 acertos.

Caso não haja vencedores em alguma faixa de premiação, os valores são acumulados para o concurso seguinte, sendo destinados à faixa de 6 acertos do primeiro sorteio (Caixa, 2024).

No Quadro 16 temos o detalhamento da probabilidade de ganhar na Dupla Sena de acordo com a quantidade de números marcados.

Quadro 16 – Probabilidade de ganhar na Dupla Sena conforme a quantidade de números marcados

Quantidade de números marcados	Probabilidade de acertar (1 em...)			
	Sena	Quina	Quadra	Terno
6	15.890.700	60.192	1.120	60
7	2.270.100	17.597	502	37

8	567.525	6.756	263	25
9	189.175	3.076	153	18
10	75.670	1.576	97	13
11	34.395	881	64	11
12	17.197	528	45	9
13	9.260	333	33	7
14	5.291	220	25	6
15	3.174	151	19	5

Fonte: Adaptado de Caixa (2024).

5 TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Será explorado neste capítulo o papel das Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática, discutindo sua evolução e como essas ferramentas têm transformado as práticas pedagógicas, oferecendo aos professores meios para tornar o aprendizado mais dinâmico, interativo e significativo.

De acordo com Amancio e Sanzovo (2020), uma significativa parcela dos alunos da Educação Básica no Brasil apresenta uma aversão cultural à matemática. Desde cedo, muitos desenvolvem uma predisposição negativa em relação à disciplina, influenciados por frases como: “matemática é muito difícil”, “isso não entra na minha cabeça” e “não sei para que estudar isso, nunca vou precisar disso para nada”. Essas ideias, propagadas por familiares, amigos e colegas, acabam criando um bloqueio nos estudantes. Como resultado, ao se depararem com a matemática na sala de aula, esses alunos frequentemente estão desmotivados e acreditam ser incapazes de aprender.

Silva (2024a) explica que essa resistência à matemática tende a se intensificar quando o professor utiliza exclusivamente métodos tradicionais de ensino, que tornam os estudantes receptores passivos de informações e que o uso de uma abordagem que apresenta a matemática de forma abstrata e desconectada da realidade contribui para o desinteresse dos alunos. Nesse contexto, Stoica (2015) aponta que a dificuldade dos estudantes em compreender conceitos matemáticos está frequentemente relacionada à organização inadequada das aulas.

[...] em classes tradicionais de Matemática os estudantes são ensinados pela primeira vez a teoria e, em seguida, eles são convidados a resolver alguns exercícios e problemas que têm mais ou menos soluções algorítmicas usando mais ou menos o mesmo raciocínio e que raramente são conectados com as atividades do mundo real (Stoica, 2015, p. 702).

Como resultado, muitos alunos passam a decorar algoritmos e fórmulas apenas para resolverem exercícios que muitas vezes são desconexos da realidade, essa prática se mostrou ineficaz, pois não desenvolve um aprendizado significativo ou prático para os estudantes (Paiva; Oliveira; Malusá, 2020). Dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), realizado em 2022, revelam que o Brasil ocupa posições entre a 62ª e a 69ª no ranking de 81 países participantes, além disso, 73% dos estudantes brasileiros apresentaram desempenho insuficiente em matemática, evidenciando os desafios enfrentados nessa área (Brasil, 2023).

Para reverter esse cenário, Amancio e Sanzovo (2020) defendem a necessidade de transformações na prática pedagógica, buscando torná-la mais inovadora e eficaz.

Há muito tempo vivencia-se um sistema de ensino estruturado verticalmente, em que o professor é o transmissor do conhecimento e o aluno, o receptor. Todavia, percebe-se, por meio de estudos recentes, o início de uma estruturação horizontal do ensino e a busca por aplicação de práticas inovadoras com vistas a uma aprendizagem significativa (Amancio; Sanzovo, 2020, p. 1).

Nessa perspectiva, o professor deve assumir o papel de agente transformador, adotando novas metodologias e ferramentas que tornem o ensino de matemática mais dinâmico e motivador. As tecnologias digitais emergem como aliadas nesse processo, promovendo uma abordagem mais interativa e significativa para os alunos.

Historicamente, a utilização de tecnologias no ensino passou por diversas fases. Desde ferramentas primitivas, como a fala e a escrita, até a invenção de instrumentos como o ábaco, o giz e o quadro negro, cada inovação trouxe avanços significativos à educação. Contudo, com o advento do computador, o conceito de tecnologia educacional passou a englobar uma gama de possibilidades, oferecendo acesso rápido a informações e novos recursos de ensino (Fernandes, 2022).

De acordo com Borba, Silva e Gadani (2018), especificamente no ensino de matemática, destacam-se quatro fases da integração de tecnologias digitais. A primeira, na década de 1980, foi marcada pelo uso do software LOGO, que relacionava a programação ao pensamento matemático. A segunda fase, na década de 1990, marcou-se pela disseminação dos computadores pessoais e pelo advento de programas educativos. A terceira fase, a partir de 1999, foi impulsionada pela introdução da internet nas escolas, possibilitando maior acesso à informação e à comunicação. Por fim, a quarta fase, iniciada em 2004 e ainda em curso, foi fortalecida pelo avanço da internet de alta velocidade, consolidando o uso das Tecnologias Digitais.

Segundo o entendimento de Silva (2024a), apesar dos avanços, um dos grandes desafios para as escolas brasileiras é acompanhar o ritmo das inovações tecnológicas, especialmente no ensino de matemática. O autor enfatiza que não se trata apenas de utilizar equipamentos como projetores ou programas de computador, apesar do uso ser bastante válido, mas de promover uma compreensão mais profunda e criativa das tecnologias. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca, em sua competência geral 5, que os estudantes devem:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p. 9).

As tecnologias digitais, portanto, devem ser ferramentas para engajar os alunos e construir o conhecimento matemático. Elas possibilitam o acesso aos conteúdos mesmo fora da escola, criando novas oportunidades de aprendizado. Contudo, conforme Fernandes (2022), o uso dessas ferramentas deve ser inteligente e integrado a práticas pedagógicas eficazes, pois, sozinhas, não garantem resultados positivos.

De acordo com Fernandes (2022), o uso de plataformas online, por exemplo, tem permitido a adoção de metodologias ativas, promovendo interação entre professores e alunos e fornecendo relatórios que auxiliam no acompanhamento do desempenho estudantil. Entretanto, como destacam Amancio e Sanzovo (2020):

[...] não é somente um recurso tecnológico que vai fazer com que um aluno aprenda determinados conceitos matemáticos, afinal a atividade deve ser organizada pelo professor no sentido de desenvolver um raciocínio em que possa criar conjecturas, abstrair suas ideias tornando-as conhecimentos formais com ajuda do computador. Como pesquisador constante de sua própria prática, o professor precisa buscar novos significados dos conteúdos a serem desenvolvidos, tendo como base o desenvolvimento tecnológico e as aplicações desses conteúdos no contexto atual (Amancio; Sanzovo, 2020, p. 1).

Nesse cenário, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) trouxeram transformações profundas nas dinâmicas de interação e processamento de informações. Essas transformações exigem que o professor esteja preparado para incorporar as inovações, desenvolvendo continuamente metodologias de ensino adequadas e integrando as TICs em sua formação inicial e continuada (Pocinho; Gaspar, 2012; Martins et al., 2020).

Por fim, é importante destacar que essa discussão não tem como finalidade afirmar que a inserção das tecnologias no ensino de matemática deve substituir os métodos tradicionais de ensino ou o papel do professor. Ao contrário, as tecnologias devem ser vistas como ferramentas complementares que tornam as aulas mais atrativas e criativas. Dessa forma, o professor deve assumir a função de mediador, incentivando os alunos a construir seu próprio conhecimento e promovendo um aprendizado mais significativo.

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Um método pode ser compreendido como um processo ou algoritmo utilizado para atingir um objetivo específico, enquanto a ciência se dedica à produção e investigação do conhecimento. Nesse contexto, os métodos científicos são definidos como “um conjunto de procedimentos adotados com o propósito de atingir o conhecimento” (Prodanov; Freitas, 2013, p. 24).

De acordo com Trujillo Ferrari (1974), os métodos científicos são elementos centrais da ciência, funcionando como uma ferramenta indispensável para organizar o pensamento sistêmico e direcionar as etapas que os cientistas devem seguir para alcançar um objetivo específico. Esses métodos são responsáveis por estabelecer os processos lógicos necessários à condução de uma investigação científica.

Com base nesses fundamentos, este capítulo apresenta o arcabouço metodológico que orienta esta pesquisa, cujo objetivo geral é propor estratégias inovadoras para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade no ensino médio. Para isso, são explorados jogos de loteria, especialmente a Mega Sena, aliados a ferramentas tecnológicas, como recursos pedagógicos. A pesquisa é de caráter teórico e aplicado, centrada no desenvolvimento de sequências didáticas externas para apoiar os professores em suas práticas pedagógicas.

6.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa com características exploratórias e aplicadas. A pesquisa qualitativa

considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Esta não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas (Prodanov; Freitas, 2013, p. 70).

Nesta pesquisa, a abordagem qualitativa é adequada por envolver uma análise profunda das potencialidades pedagógicas dos jogos de loteria e das ferramentas tecnológicas no ensino de matemática.

O caráter exploratório permite investigar as possibilidades de integração desses elementos ao ensino. De acordo com Gil (2010), as pesquisas exploratórias têm como objetivo principal proporcionar uma compreensão mais aprofundada do problema, buscando torná-lo

mais claro e possibilitar a formulação de situações. O autor destaca que esse tipo de pesquisa visa ao desenvolvimento de ideias e à geração de conhecimento. Por essa razão, seu planejamento apresenta um alto grau de flexibilidade, permitindo a consideração de diversos aspectos relacionados ao interesse investigado.

A perspectiva aplicada visa desenvolver soluções práticas para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade. A pesquisa aplicada “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais” (Prodanov; Freitas, 2013, p. 51). Classifica-se da seguinte forma, pois esta pesquisa procura produzir conhecimento voltado à prática do ensino de matemática na educação básica, valendo-se da utilização de tecnologia com o uso de técnicas de programação e situações do cotidiano dos alunos, buscando facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

6.2 ETAPAS DA PESQUISA

A pesquisa foi conduzida em quatro etapas principais, descritas a seguir:

I. Revisão de Literatura

Nesta etapa, realizou-se uma revisão bibliográfica abrangente com o objetivo de embasar teoricamente as propostas didáticas. A revisão incluiu os seguintes tópicos:

- A história e as implicações culturais e matemáticas dos jogos de loteria no Brasil;
- Os fundamentos teóricos do ensino de Análise Combinatória e Probabilidade na educação básica;
- As potencialidades das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) no ensino de matemática;
- Estudos prévios sobre a utilização de aplicativos educacionais como ferramentas de apoio ao ensino.

II. Planejamento e Desenvolvimento do Aplicativo

Com base nos referenciais teóricos levantados, foi desenvolvido um protótipo de aplicativo educacional que simula sorteios da Mega Sena e permite o cálculo de probabilidades associadas. Esta etapa compreendeu:

- **Definição das funcionalidades:** O aplicativo incluiu recursos como a simulação de sorteios, o cálculo de combinações e probabilidades e a visualização de resultados;

- **Estudo da plataforma:** O desenvolvimento foi realizado utilizando uma ferramenta de criação de aplicativos baseadas em blocos, a saber: *MIT App Inventor*;
- **Validação técnica:** Testes iniciais foram feitos para assegurar que o aplicativo está funcional e intuitivo para os usuários.

III. Elaboração de Sequências Didáticas

Foram elaboradas sequências didáticas baseadas no uso do aplicativo desenvolvido e em situações-problema relacionadas aos jogos de loteria. As sequências didáticas incluem:

- **Atividades introdutórias:** Explicações teóricas sobre Análise Combinatória e Probabilidade;
- **Atividades práticas:** Exercícios que integrem o uso do aplicativo para resolver problemas reais relacionados à Mega Sena;
- **Atividades de reflexão:** Momentos de discussão para que os alunos analisem os resultados obtidos e compreendam os conceitos matemáticos envolvidos.

As sequências didáticas foram detalhadas de forma a possibilitar sua reprodução por outros professores em diferentes contextos escolares.

IV. Sistematização e Redação Final

A última etapa da pesquisa consistiu na organização dos materiais produzidos e na redação final da dissertação. Esta etapa incluiu:

- Sistematização das sequências didáticas, apresentando objetivos, procedimentos, recursos necessários e avaliação;
- Análise crítica das propostas elaboradas, destacando suas contribuições para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade;
- Discussão das limitações e das possibilidades de aplicação das propostas em contextos educacionais diversos.

Seguindo estas etapas, espera-se contribuir significativamente para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, oferecendo recursos pedagógicos inovadores que conectam os conteúdos matemáticos ao cotidiano dos estudantes e exploram as possibilidades das tecnologias educacionais.

7 A PLATAFORMA *MIT APP INVENTOR* COMO RECURSO PEDAGÓGICO

Este capítulo é dedicado à análise da plataforma *Mit App Inventor*, explorando seu potencial como ferramenta pedagógica no ensino de matemática. Inicialmente, será apresentada uma contextualização histórica sobre o desenvolvimento e a evolução do *Mit App Inventor*, destacando suas características principais e sua acessibilidade como recurso de programação para educadores e alunos.

Além disso, o capítulo oferecerá uma visão prática sobre como utilizar a plataforma, detalhando as etapas envolvidas na criação de um aplicativo móvel. Nesse sentido, será apresentado o desenvolvimento do aplicativo sorteador de números para a Mega Sena, uma ferramenta prática que permite a integração de conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade no contexto escolar.

O objetivo deste capítulo é demonstrar como o *MIT App Inventor* pode ser utilizado para aproximar os estudantes dos conteúdos matemáticos de forma prática, criativa e motivadora, ao mesmo tempo em que promove a familiaridade com o universo da programação. Dessa forma, este capítulo complementa os fundamentos teóricos apresentados no capítulo anterior, oferecendo uma abordagem prática e inovadora para o ensino de matemática.

7.1 CONHECENDO O *MIT APP INVENTOR*

No contexto da tecnologia educacional e da difusão do conhecimento por meio dela, pode-se afirmar, com base nas discussões do Capítulo 5, que os recursos tecnológicos desempenham um papel de apoio no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, diversas plataformas digitais foram criadas, entre as quais se destaca o *MIT App Inventor*.

De acordo com Ferreira (2024), o *MIT App Inventor*, inicialmente chamado de *App Inventor for Android*, é uma plataforma criada pelo *Google* em 2009 com o objetivo de facilitar o desenvolvimento de aplicativos para o sistema *Android*. Em 2011, a gestão do projeto foi transferida para o *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), que atualmente lidera o desenvolvimento e manutenção da ferramenta. Este software permite a criação de aplicativos utilizando um navegador da *web* em conjunto com dispositivos móveis, como *smartphones* e *tablets*, proporcionando uma experiência acessível e intuitiva.

Uma das principais características do *MIT App Inventor* é sua interface visual baseada em blocos de programação. Semelhante à linguagem *Scratch*, essa abordagem permite que mesmo iniciantes sem experiência em programação consigam desenvolver aplicativos

funcionais (Gomes; Melo, 2013). A interface, organizada de forma clara e com cores vibrantes, inclui um tutorial integrado que auxilia os usuários nos primeiros passos, garantindo uma curva de aprendizado amigável.

De acordo com Oliveira, Pereira e Teixeira (2021, p. 3),

é possível criar aplicativos apenas ligando alguns poucos componentes com mínima interação algorítmica entre eles. Vários exemplos estão disponíveis e podem ser localizados em diversos repositórios nos quais os conceitos e conteúdo de algoritmos são minimamente abordados (Oliveira; Pereira; Teixeira, 2021, p. 3).

Essa simplicidade torna o *App Inventor* uma ferramenta poderosa tanto para iniciantes quanto para educadores interessados em introduzir conceitos de programação em sala de aula.

Elias et al. (2018) também enfatizam a relevância do *MIT App Inventor* no ambiente educacional, ressaltando que a possibilidade de desenvolver aplicativos com propósitos informativos e educativos reforça a viabilidade de sua integração no contexto escolar, juntamente com as Tecnologias Móveis, que já estão presentes na rotina dos alunos fora da escola. Eles argumentam que o uso da plataforma pode estimular a criatividade dos professores, contribuir para o desenvolvimento profissional e aproximá-los de seus alunos.

A evolução do *App Inventor* é notável. Lá do seu lançamento em julho de 2010, com divulgação pública em dezembro do mesmo ano, até a criação do *MIT App Inventor 2* em 2013, a plataforma passou por diversas melhorias. Desenvolvida pelos professores Hal Abelson e Mark Friedman, a ferramenta foi concebida para tornar a programação mais acessível e atrativa, sendo amplamente utilizada por estudantes, professores e outros profissionais criativos (Ferreira, 2024).

Como apontado por Gomes e Melo (2013), o *MIT App Inventor* oferece suporte à criação de aplicativos que envolvem tecnologias como geolocalização, sensores, redes sociais, leitura de códigos de barras e até reconhecimento de fala. Essas funcionalidades tornam a plataforma uma opção atrativa para o desenvolvimento de soluções tecnológicas que atendam a diversas áreas, incluindo educação, saúde e empreendedorismo.

Conforme Gomes e Melo (2013), o professor Abelson afirma que a plataforma foi desenvolvida com a intenção de tornar o ensino dos princípios da computação mais envolvente. O objetivo é transformar a experiência de aprendizagem, priorizando as interações humanas e o impacto no mundo real, em contraste com ambientes onde alunos desmotivados escrevem programas em laboratórios sem uma aplicação prática. Esse enfoque mais dinâmico e interativo é um dos principais diferenciais da plataforma.

Diversos exemplos práticos, expostos no site da plataforma, ilustram os impactos significativos do *MIT App Inventor* no meio educacional. Estudantes no *Texas*, Estados Unidos, desenvolveram um aplicativo para ajudar um colega cego a andar pela escola. Em Lagos, Nigéria, adolescentes criaram um app para auxiliar a polícia na aplicação de leis de trânsito. Na Moldávia, jovens criaram uma solução para localizar fontes seguras de água potável, combatendo a Hepatite A (Mit, 2025).

A plataforma também permite que indivíduos jovens, como um estudante da décima série na Índia, desenvolvam soluções inovadoras, como um aplicativo para monitorar horários de ônibus escolares e outro para reduzir custos em transportes públicos (Mit, 2025). Esses exemplos demonstram como a plataforma não apenas promove a aprendizagem, mas também estimula soluções criativas para problemas reais.

Até o momento, mais de 100 milhões de aplicativos foram criados por mais de 21 milhões de usuários espalhados por 195 países. Esses números mostram o impacto global do *MIT App Inventor*, tanto na educação quanto na democratização do acesso à programação (Mit, 2025).

Em relação à sua utilização no âmbito educacional, o *MIT App Inventor* apresenta uma ampla gama de potencialidades, especialmente quando utilizado como recurso pedagógico na Educação Básica. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância de desenvolver competências gerais nos estudantes (Brasil, 2018), e o uso dessa plataforma facilita a construção de habilidades fundamentais para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Pensamento Científico Crítico e Criativo: O *MIT App Inventor* incentiva os estudantes a identificar problemas cotidianos e a desenvolver soluções tecnológicas inovadoras por meio da criação de aplicativos. Essa abordagem prática fomenta a capacidade de analisar situações, formular hipóteses e testar alternativas, promovendo um ciclo contínuo de pensamento crítico e criatividade. Ao transformar ideias em aplicativos funcionais, os alunos experimentam um processo dinâmico de resolução de problemas, um princípio central da BNCC (Brasil, 2018).

Comunicação e Cooperação: O desenvolvimento de aplicativos com o *MIT App Inventor* não precisa ser uma atividade solitária. Pelo contrário, o processo incentiva a troca de ideias, discussões sobre funcionalidades e apresentações de projetos finais. Os alunos aprendem a trabalhar em equipe, negociar soluções e apresentar seus aplicativos para colegas, professores e comunidades escolares, fortalecendo suas competências comunicativas e colaborativas (Brasil, 2018).

Cultura Digital: A plataforma permite que os estudantes compreendam e interajam de forma significativa com as tecnologias digitais. Desde a criação de interfaces até a programação por blocos, o *MIT App Inventor* promove uma alfabetização digital crítica, onde os alunos deixam de ser meros consumidores passivos de tecnologia para se tornarem criadores ativos. Essa competência, prevista na BNCC, prepara os estudantes para navegar com autonomia e ética no mundo digital (Brasil, 2018).

Trabalho e Projeto de Vida: A proposta pedagógica do *MIT App Inventor* se alinha ao projeto de vida dos estudantes, valorizando o protagonismo juvenil e incentivando o desenvolvimento de soluções tecnológicas relevantes para a sociedade contemporânea. Ao criar aplicativos com potencial de impacto social, os alunos percebem que suas ideias podem contribuir para a melhoria do contexto em que vivem (Brasil, 2018).

Responsabilidade e Cidadania: A plataforma também pode contribuir para o fortalecimento da consciência social e ambiental, uma vez que os alunos são incentivados a desenvolver aplicativos que solucionem problemas relevantes, como questões ambientais, inclusão digital e segurança pública (Brasil, 2018). Essas atividades não apenas reforçam competências previstas na BNCC, mas também formam cidadãos críticos e engajados.

A autonomia é outra característica fortemente estimulada pela plataforma. Os estudantes são desafiados a tomar decisões sobre o design e a funcionalidade dos aplicativos que criam, desenvolvendo um senso de responsabilidade sobre suas escolhas. Essa autonomia, aliada ao estímulo à criatividade, possibilita que os alunos se tornem sujeitos ativos no processo de construção do conhecimento.

O ambiente visual e intuitivo do *MIT App Inventor* ainda permite a participação de estudantes com diferentes níveis de familiaridade com a tecnologia, democratizando o acesso ao conhecimento sobre programação. Esse aspecto inclusivo potencializa a formação integral dos alunos, respeitando suas individualidades e ritmos de aprendizagem.

Ao incorporar o *MIT App Inventor* no currículo escolar, os professores também passam a desempenhar um papel fundamental como mediadores do conhecimento e facilitadores do desenvolvimento das competências gerais da BNCC. Por meio de estratégias pedagógicas inovadoras, como desafios de programação e projetos colaborativos, os educadores podem potencializar o engajamento dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo.

O *MIT App Inventor* se destaca por sua aplicabilidade prática no ensino de matemática e outras áreas do conhecimento, possibilitando aos alunos vivenciarem situações reais de aprendizagem por meio do desenvolvimento de aplicativos. A partir da minha experiência com

a plataforma, foram desenvolvidos alguns projetos juntamente com os alunos, estes projetos podem ilustrar o potencial educacional da plataforma:

1. **Calculadora de Juros Compostos:** Este aplicativo auxilia os estudantes na compreensão e prática de cálculos relacionados à matemática financeira, tornando conceitos abstratos mais acessíveis e interativos.
2. **Calculadora de IMC:** A ferramenta permite calcular o Índice de Massa Corporal e oferece informações relevantes com base no índice obtido, proporcionando uma abordagem interdisciplinar que integra matemática e ciências da natureza.
3. **App para Sorteios de Números Aleatórios:** Este aplicativo permite realizar sorteios de números dentro de uma lista definida, sendo útil para atividades pedagógicas que envolvam combinatória e probabilidade.

Além desses exemplos, a flexibilidade do *MIT App Inventor* permite sua integração com conteúdos de outras áreas, como ciências da natureza, linguagens e ciências humanas. Essa característica amplia suas possibilidades pedagógicas, tornando-o um recurso versátil para projetos interdisciplinares que valorizam o protagonismo e a criatividade dos estudantes.

No entanto, embora extremamente poderoso e acessível, o *MIT App Inventor* apresenta algumas limitações que devem ser consideradas pelos educadores:

1. **Design Básico:** As opções de personalização da interface são limitadas quando comparadas a ferramentas profissionais de desenvolvimento de aplicativos.
2. **Dependência da Internet:** O uso da plataforma requer conexão à internet, o que pode ser uma barreira em regiões com acesso limitado.
3. **Desempenho Limitado:** Para projetos complexos, com múltiplas telas e funcionalidades avançadas, o desempenho pode ser comprometido.
4. **Capacidade de Armazenamento:** A plataforma possui um limite de armazenamento de 10 MB por projeto, o que restringe o desenvolvimento de aplicativos mais robustos.

Entretanto, mesmo com essas limitações, o *MIT App Inventor* se apresenta como uma ferramenta potente e acessível para promover inovação na educação básica. Sua versatilidade permite a criação de projetos significativos em diversas áreas, alinhando-se às diretrizes da BNCC e contribuindo para o desenvolvimento integral dos estudantes. Ao explorar essa plataforma, os educadores têm a oportunidade de transformar suas práticas pedagógicas e preparar os alunos para os desafios de um mundo cada vez mais digital.

Para conhecer o site do *MIT App Inventor* basta acessar o endereço eletrônico “<https://appinventor.mit.edu>” e, em seguida, caso deseje, o usuário pode traduzir a página para

o português do Brasil e já começar criar os aplicativos clicando no botão “Crie Aplicativos!”, conforme mostra a Figura 6.

Figura 6 – Iniciando o acesso na plataforma *MIT App Inventor*



Fonte: Adaptado de Mit (2025).

Na página inicial o usuário também pode acessar a seção “sobre nós” que discorre sobre a plataforma, a equipe, os termos de serviço e apresenta respostas para perguntas frequentes. Na seção “Para educadores” a plataforma aborda formas de utilizar o *MIT App Inventor* para ensinar os alunos, bem como apresenta tutoriais para iniciantes e mostra alguns recursos para utilizar nos aplicativos, como inteligência artificial e sensores, por exemplo. Na seção “Notícias e Eventos” são abordadas as principais notícias veiculadas no mundo que tratam do *MIT App Inventor*, desde aplicativos desenvolvidos, a atualizações sobre a equipe desenvolvedora, eventos realizados e o reconhecimento do aplicativo do mês nas categorias adulto e infantil. Na seção “Envolve-se” é possível acessar o suporte e a comunidade de apoio, assim como verificar informações de código aberto. Por fim, na seção “Recursos” é possível acessar informação sobre a fundação *App Inventor*, os requisitos do sistema, documentação dos *softwares* desenvolvidos e livros sobre a plataforma (Mit, 2025).

Ao clicar no botão “Crie Aplicativos!” na tela inicial, o usuário é direcionado para uma página onde deve realizar o login com sua conta do *Google* (conforme Figura 7). Caso o usuário ainda não possua uma conta *Google*, na mesma página é possível criar uma conta, somente com uma conta *Google* é possível prosseguir o acesso para a página de criação de aplicativos.

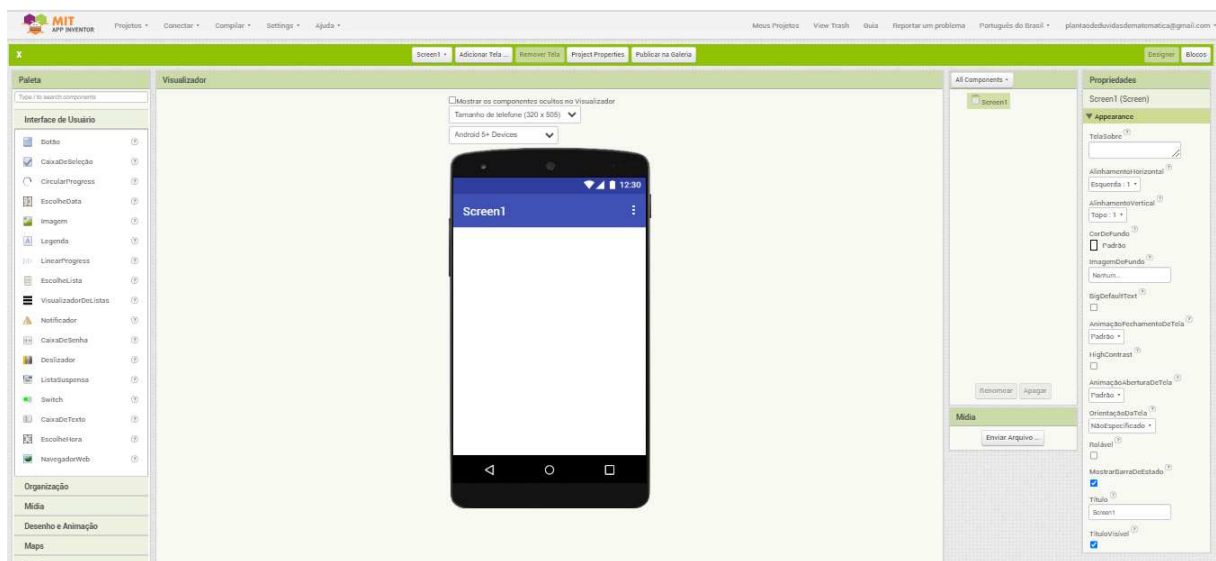
Figura 7 – Tela de login com a conta *google*



Fonte: Mit (2025).

A interface intuitiva da plataforma é uma vantagem significativa do *MIT App Inventor*. Na Figura 8, é possível observar a tela principal que compõem o editor do *App Inventor 2*, além da interface, onde estão localizados detalhes para navegação e configurações. Essas características tornam o ambiente de criação de aplicativos ainda mais acessível para usuários de diferentes níveis de habilidade.

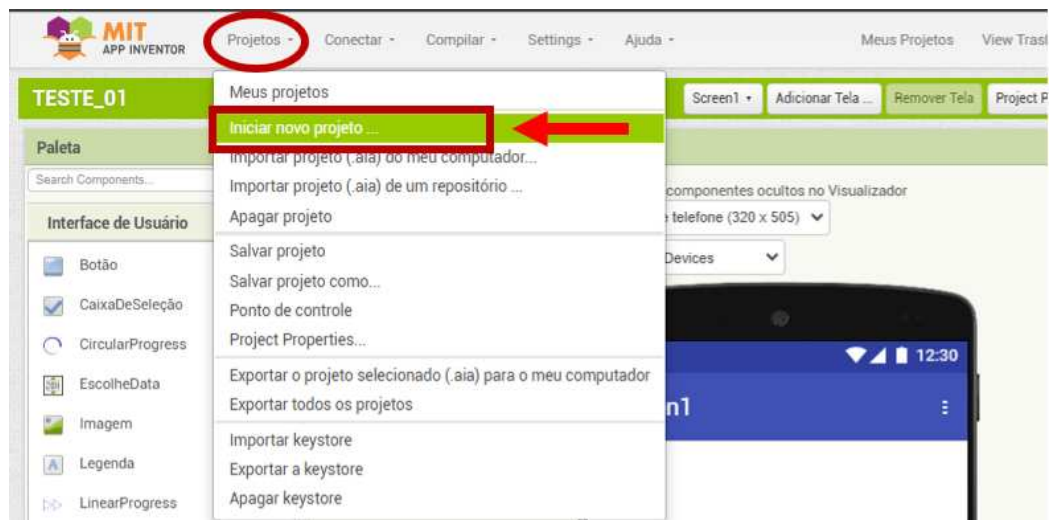
Figura 8 – Interface de criação de aplicativos do *MIT App Inventor*



Fonte: Mit (2025).

Após ter realizado o login com a conta *Google*, para iniciar um projeto, basta o usuário clicar em “projetos” no canto superior esquerdo e depois em “Iniciar um novo projeto” (ver Figura 9).

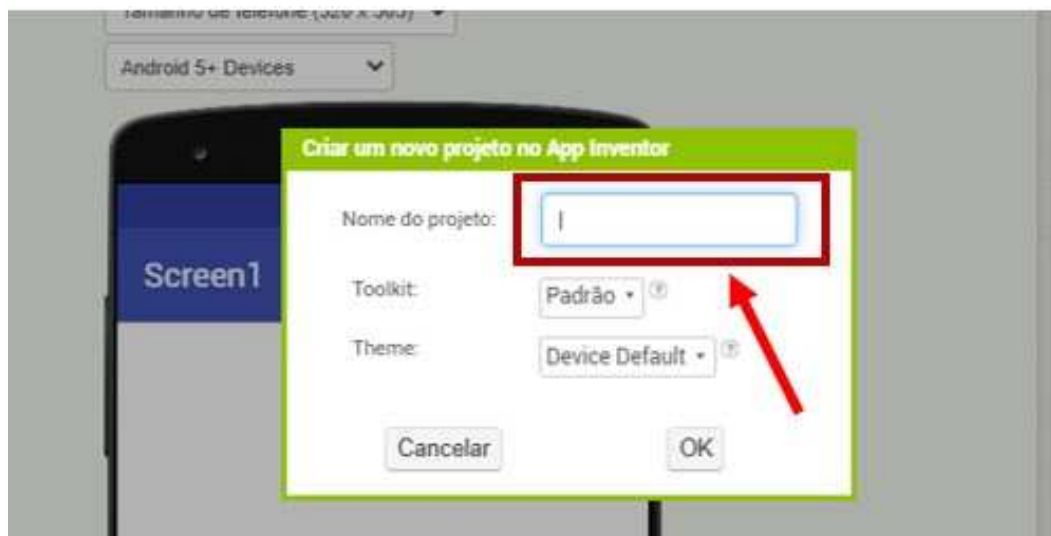
Figura 9 – Iniciando um novo projeto no MIT App Inventor



Fonte: Adaptado de Mit (2025).

Feito isso, uma nova janela se abrirá, conforme a Figura 10, daí, é só digitar um nome para o projeto e, logo após, iniciar os trabalhos de criação.

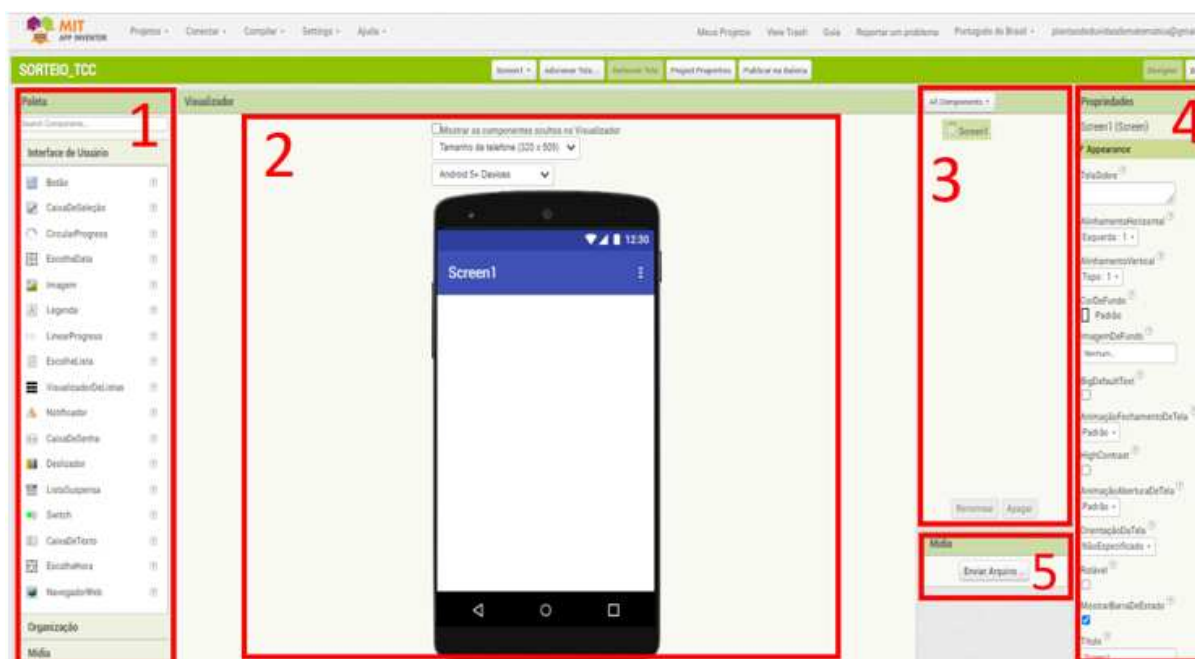
Figura 10 – Nomeando um projeto



Fonte: Adaptado de Mit (2025).

Apresenta-se, a seguir, o detalhamento sobre as funcionalidades presentes na interface da área de criação do aplicativo (Ver Figura 11). Esse ambiente é chamado de *Designer*, é o local onde será desenvolvida toda a parte gráfica do projeto.

Figura 11 – Funcionalidades da interface de criação de aplicativos no ambiente Designer



Fonte: Adaptado de Mit (2025).

Segue, adiante, uma descrição das funcionalidades da tela de criação de aplicativos, segundo a divisão feita na Figura 11.

1. Paleta de ferramentas: local onde estão reunidas todas as ferramentas necessárias para a criação do aplicativo;
2. Visualizador: local onde é possível ir verificando como está ficando o aplicativo (projeto) desenvolvido;
3. Aba de componentes: local onde é possível verificar todos os componentes que já foram adicionados ao projeto, nesta aba é possível renomear estes componentes;
4. Aba de propriedades: local onde é possível editar os componentes (ferramentas) que estão sendo utilizados no projeto;
5. Aba de mídias: local onde é possível fazer o *upload* de uma imagem para dentro do seu projeto.

Agora, serão apresentadas as funcionalidades do ambiente de Blocos, que é o ambiente onde é feita a programação do aplicativo, conforme detalha a Figura 12.

Figura 12 – Funcionalidades da interface de criação de aplicativos no ambiente de Blocos



Fonte: Adaptado de Mit (2025).

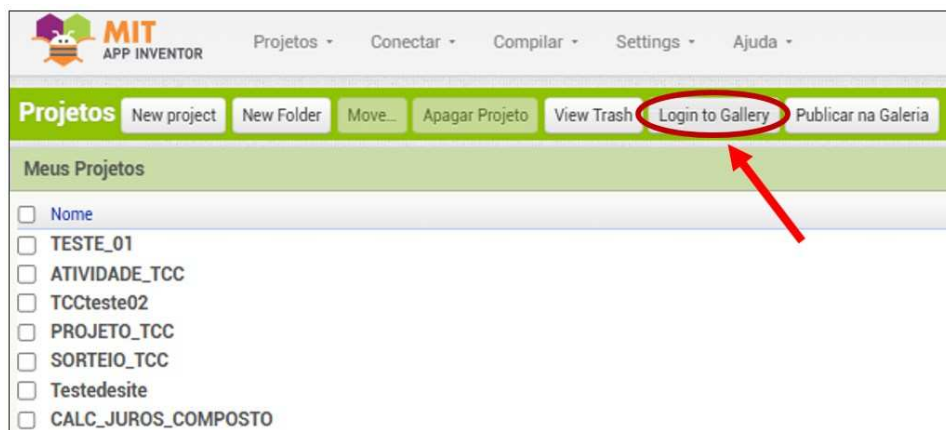
De acordo com a divisão da Figura 12, temos as seguintes funcionalidades do ambiente de programação em Blocos:

6. Blocos: local onde deverá ser clicado para acessar os blocos de programação;
7. Aba de blocos: local onde se encontram os mais variados tipos de blocos de programação, que poderão ser utilizados durante a criação do aplicativo, de acordo com o projeto que está sendo desenvolvido;
8. Visualizador: local onde é exibido a programação que está sendo feita, neste local é possível fazer os encaixes dos blocos, conforme a programação do projeto;
9. Mostrar avisos: local onde serão exibidos os possíveis erros que a programação venha a apresentar;
10. Mochila: local onde é possível transportar uma programação, ou parte dela, de um projeto para outro;
11. Lixeira: local onde poderá ser descartado os blocos que não serão mais utilizados no projeto.

A plataforma *Mit App Inventor* conta com uma galeria que contém diversos aplicativos, dos mais variados temas, que foram desenvolvidos pelos usuários da plataforma, e para se ter acesso a essa galeria, é necessário possuir a conta no *Mit App Inventor*, e uma vez que o usuário esteja conectado com a sua conta, ele deverá clicar na opção “Projetos”, localizada

na barra de tarefas (parte superior da tela) e, logo depois, na opção “*Login to Gallery*”, na parte superior direita da tela (Ver Figura 13).

Figura 13 – Acessando a galeria da plataforma do *Mit App Inventor*



Fonte: Adaptado de Mit (2025).

Feito isso, o usuário será direcionado para a galeria, como mostra a Figura 14. Depois de acessar a galeria, o usuário poderá pesquisar por diversos projetos, mediante o tema de sua preferência e poderá, inclusive, utilizar as ideias como base para desenvolver seu próprio projeto. Caso seja do interesse do usuário, é possível também postar o seu projeto desenvolvido na galeria para que outras pessoas também tenham acesso.

Figura 14 – Pesquisando por projetos dentro da galeria do *Mit App Inventor*



Fonte: Adaptado de Mit (2025).

Vale destacar que este capítulo não tem a intenção de ser um guia abrangente da plataforma, mas sim fornecer a base necessária para a criação do aplicativo proposto neste estudo. Sendo assim, para o leitor que desejar acessar um manual completo de utilização da plataforma deve acessar o site e clicar na janela “Experimente um tutorial”, fazendo isso será

direcionado para uma nova página com diversas opções de tutoriais, onde será possível se familiarizar com a plataforma antes de iniciar o primeiro projeto.

7.2 CRIANDO O APLICATIVO SORTEADOR COM O *MIT APP INVENTOR*

Nessa seção, veremos como foi feita toda a construção do aplicativo sorteador a partir do *Mit App Inventor*. Desde a criação do designer, da programação e o teste final para verificar a funcionalidade dele.

Conforme foi mencionado na seção anterior, inicialmente o usuário deverá se conectar na plataforma *Mit App Inventor* por meio de sua conta *Google* e, em seguida, deverá iniciar um novo projeto. Abaixo, temos uma imagem de como o aplicativo deverá ficar após o final do processo de criação e quais ferramentas foram utilizadas.

Figura 15 – Ferramentas utilizadas no processo de criação do aplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Iniciando o processo de criação, após o usuário ter dado início a um novo projeto, o próximo passo é selecionar todas as ferramentas que serão utilizadas na construção do aplicativo, conforme está sendo mostrado na Figura 16.

O usuário deverá ir até a paleta de ferramentas do lado esquerdo da tela e selecionar as ferramentas na mesma ordem em que irão aparecer na tela do aplicativo. Para este projeto foram utilizadas as seguintes ferramentas:

- 1 imagem;
- 1 organizador horizontal;

- 6 legendas que serão adicionadas dentro do organizador horizontal;
- 1 botão “gerador”;
- 6 legendas;
- 1 botão “limpar”;
- 1 imagem.

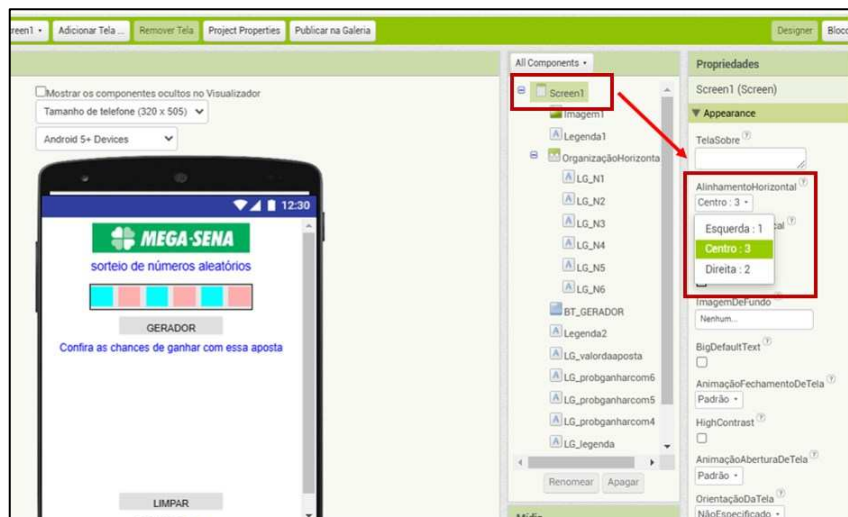
Figura 16 – Selecionando as ferramentas



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Caso o usuário deseje, poderá deixar todas as ferramentas alinhadas ao centro na tela do celular. Basta clicar em “Screen1” na aba de componentes e, em seguida, clicar em “alinhamento horizontal” e selecionar a opção “centro 3” na aba de propriedades, conforme mostra a Figura 17.

Figura 17 – Alinhando as ferramentas na tela do celular



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O próximo passo é renomear e alterar as propriedades de cada ferramenta que foi adicionada. A Figura 18 mostra como alterar as propriedades da ferramenta “Imagem” e como o usuário poderá fazer o upload de uma imagem para ser utilizada no projeto. Neste projeto foram adicionadas duas ferramentas para trabalhar com imagens e o processo de alteração das propriedades de ambas é exatamente igual.

Lembrando que, em alguns casos, quando tiver ferramentas com as mesmas propriedades, o usuário poderá alterar as propriedades de uma e depois copiar e colar a mesma ferramenta abaixo e alterar apenas o seu nome na aba de componentes.

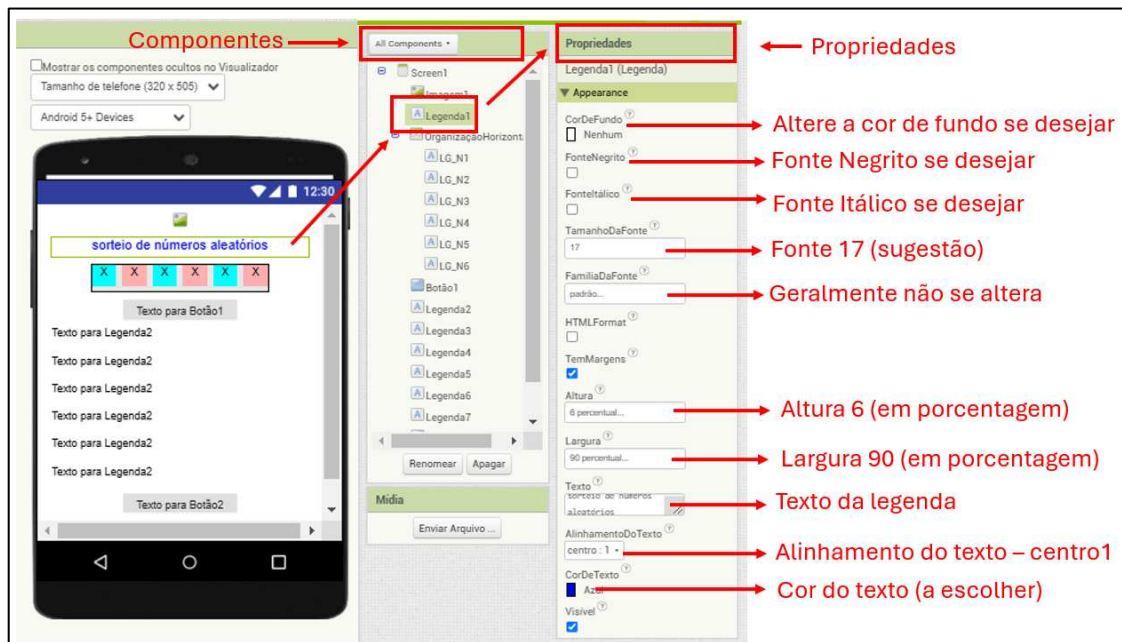
Figura 18 – Alterando as propriedades da ferramenta imagem



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Posteriormente, o usuário aprenderá como alterar as propriedades da ferramenta “Legenda” e, logo perceberá que para as demais legendas apresentadas no projeto é só seguir os mesmos passos que estão sendo apresentados na Figura 19.

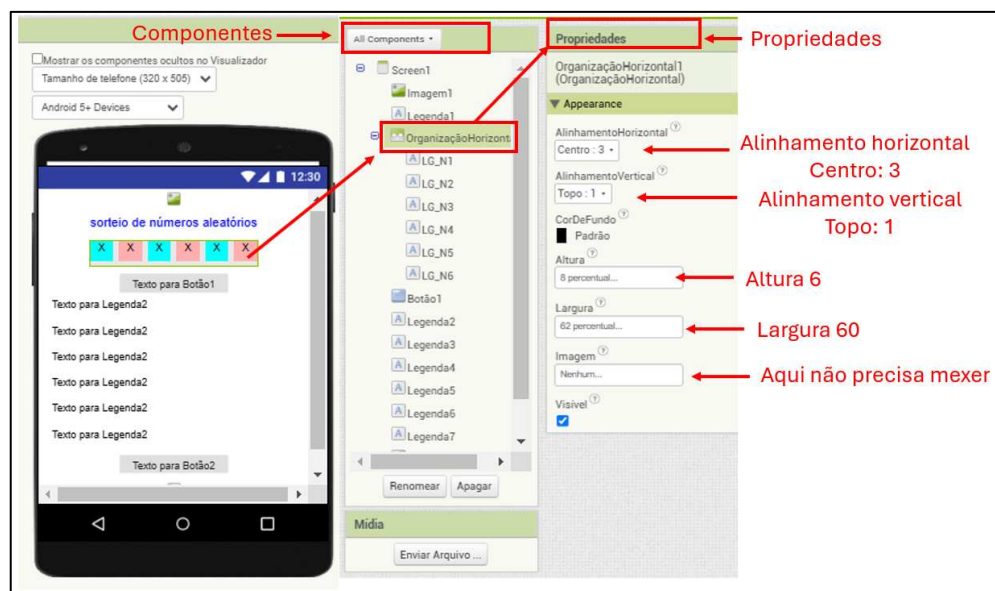
Figura 19 – Alterando as propriedades de uma legenda



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Seguindo, para alterar as propriedades da ferramenta “Organizador Horizontal” basta que o usuário siga corretamente os passos descritos na Figura 20.

Figura 20 – Alterando as propriedades do organizador horizontal



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Conforme já foi mostrado na Figura 19, alterar as propriedades das legendas é um processo bem simples e para alterar as propriedades das legendas que estão dentro do

organizador horizontal o processo é análogo. Veja o passo a passo da realização desse processo para cada uma das legendas descritos na Figura 21.

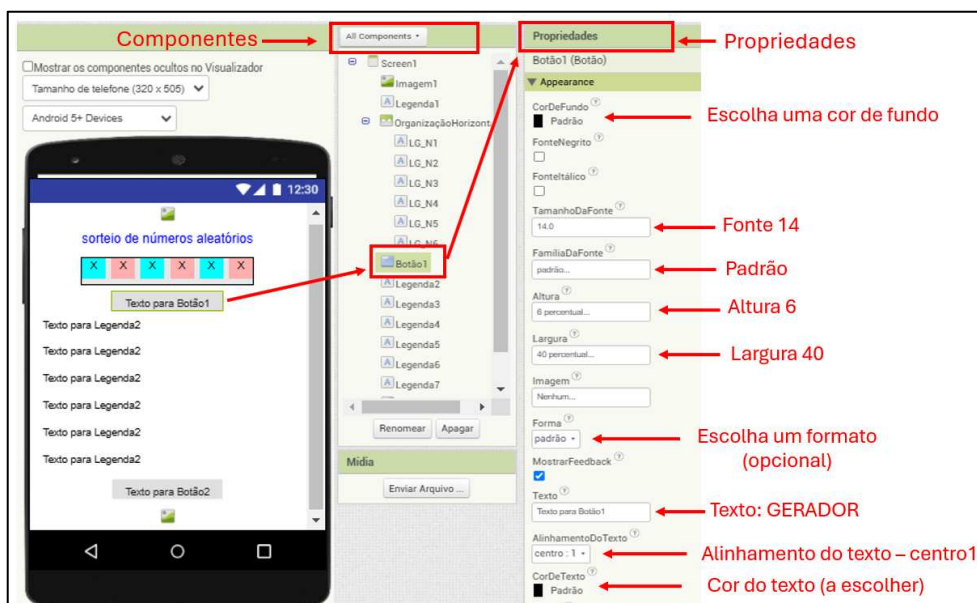
Figura 21 – Alterando as propriedades das legendas dentro do organizador horizontal



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Os passos que devem ser seguidos para alterar as propriedades do botão gerador estão descritos na Figura 21. É neste botão que o usuário do aplicativo poderá clicar para que seja feita a escolha aleatória das dezenas que poderão ser utilizadas na aposta da Mega Sena.

Figura 22 – Alterando as propriedades do botão gerador

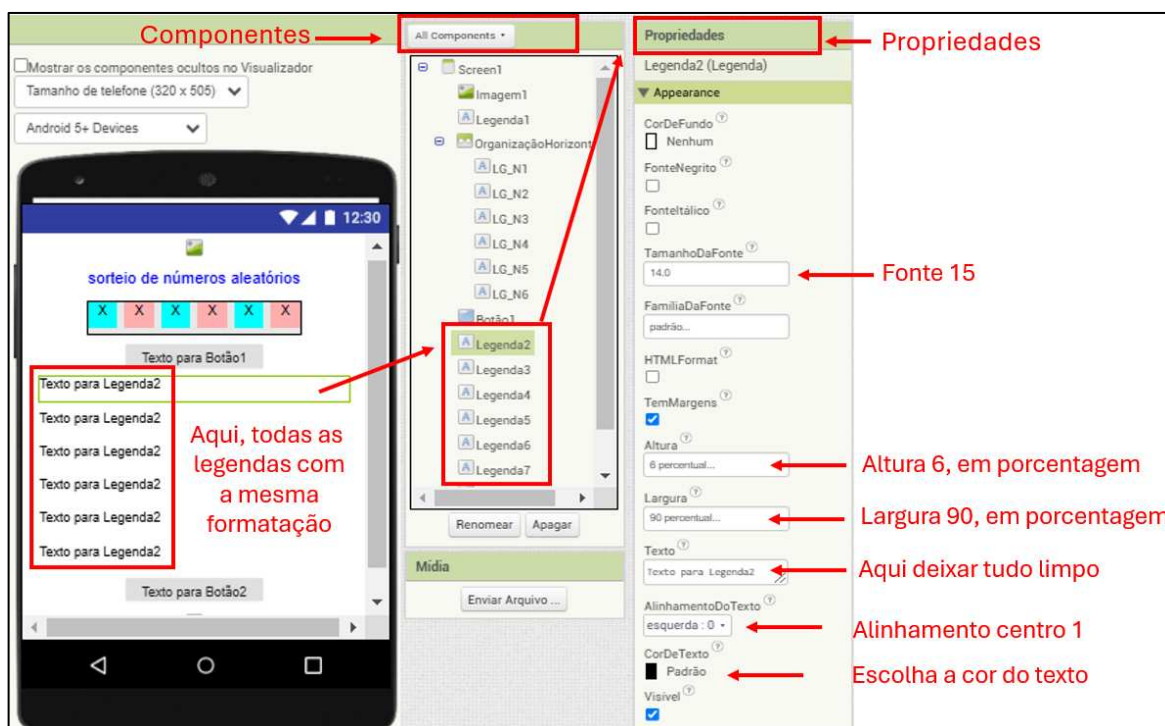


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Feito isso, agora serão alteradas as propriedades das legendas que irão mostrar as seguintes informações: valor da aposta, probabilidade de ganhar marcando seis dezenas e acertando as seis dezenas, probabilidade de ganhar marcando seis dezenas e acertando apenas cinco dezenas, e probabilidade de ganhar marcando seis dezenas e acertando somente quatro dezenas, além de uma legenda explicativa.

Novamente, basta que o usuário siga corretamente os passos descritos na Figura 23 para todas as legendas. Lembrando, conforme mencionado anteriormente no texto, caso o usuário deseje, poderá alterar as propriedades da primeira legenda e depois copiar e colar abaixo e alterar apenas o nome na aba componentes, dessa forma o usuário ganha tempo.

Figura 23 – Alterando as propriedades das legendas abaixo do botão gerador



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para alterar as propriedades do botão “Limpar” que terá a função de limpar os textos exibidos nas legendas, basta que o usuário siga as instruções descritas na Figura 24.

Figura 24 – Alterando as propriedades do botão limpar



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para finalizar o design do aplicativo, antes de iniciar a programação, é necessário alterar as propriedades da ferramenta “Imagem” que está na parte inferior da tela do celular (Ver Figura 25).

Figura 25 – Alterando as propriedades da última imagem

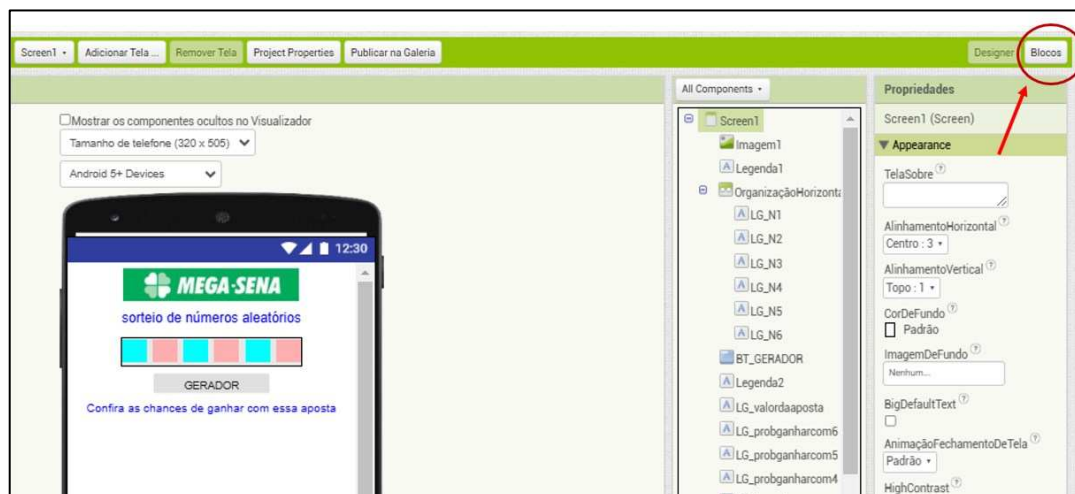


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Após a realização de todos esses procedimentos está finalizada a primeira etapa da construção do aplicativo sorteador de números aleatórios. A próxima etapa será a programação.

Para cada ferramenta adicionada, aparecerá algumas opções de blocos de programação na aba blocos. Então, agora, basta o usuário clicar em blocos no canto superior direito para ser direcionado para a tela de programação (Ver Figura 26).

Figura 26 – Acessando a tela de programação do aplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O próximo passo é a realização da programação de todos estes blocos, para que, assim, o aplicativo possa funcionar corretamente. O processo de programação deste aplicativo será dividido em quatro etapas, que serão detalhadas ao longo do texto.

Figura 27 – Primeira etapa da programação: criação de variáveis



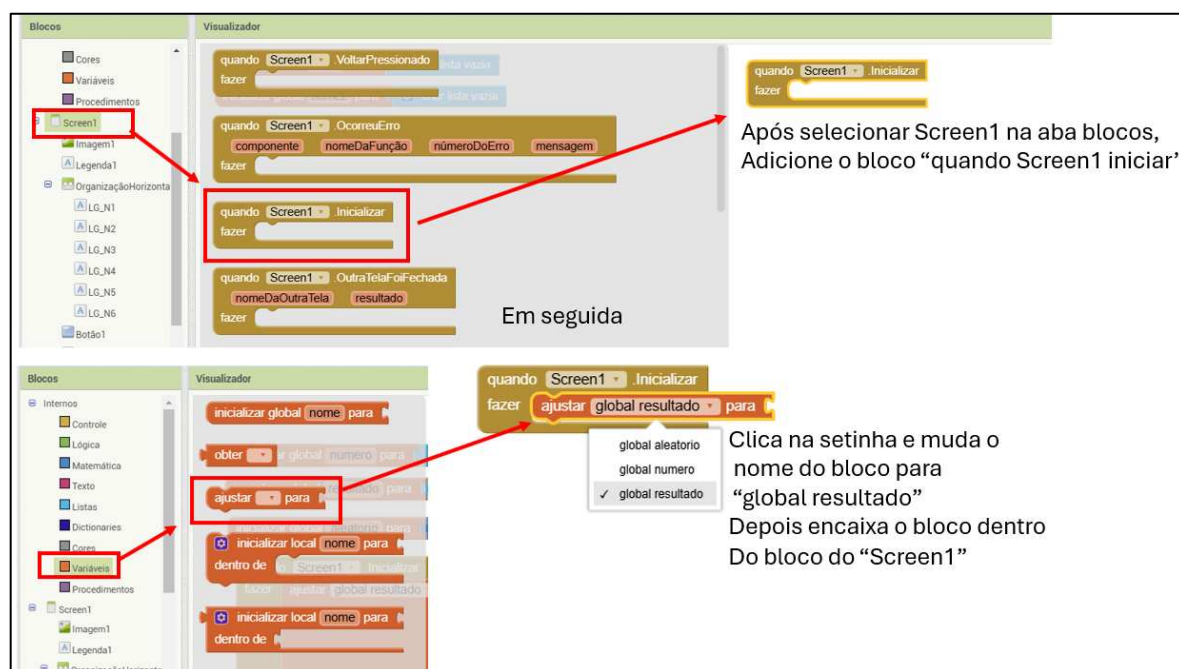
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A primeira etapa é a criação das variáveis que serão utilizadas na programação. Então, primeiro, na aba blocos, deve-se clicar em “variáveis” [1] e adicionar três blocos “inicializar global nome para”, logo após, renomear cada um deles para “número”, “resultado” e “aleatório”, conforme mostra a Figura 27.

Na sequência, clicar em “listas” [2] e adicionar dois blocos “criar lista vazia” e ligar com os blocos “inicializar global número” e “inicializar global resultado” respectivamente. Por fim, clicar em “matemática” [3] e adicionar o primeiro Bloco que consta o número (0) zero e ligar com o bloco “inicializar global aleatório” (Ver Figura 27).

Na segunda etapa, conforme mostra a Figura 28, o usuário deverá adicionar o bloco referente a tela inicial (Screen1). Basta ir até a aba blocos, clicar em “Screen1” e adicionar o bloco “quando Screen1 inicializar, fazer”, depois clicar em “variável” e adicionar o bloco “ajustar para”, em seguida, clicar na setinha, selecionar a opção “global resultados” e encaixar dentro do bloco “quando Screen1 inicializar, fazer”.

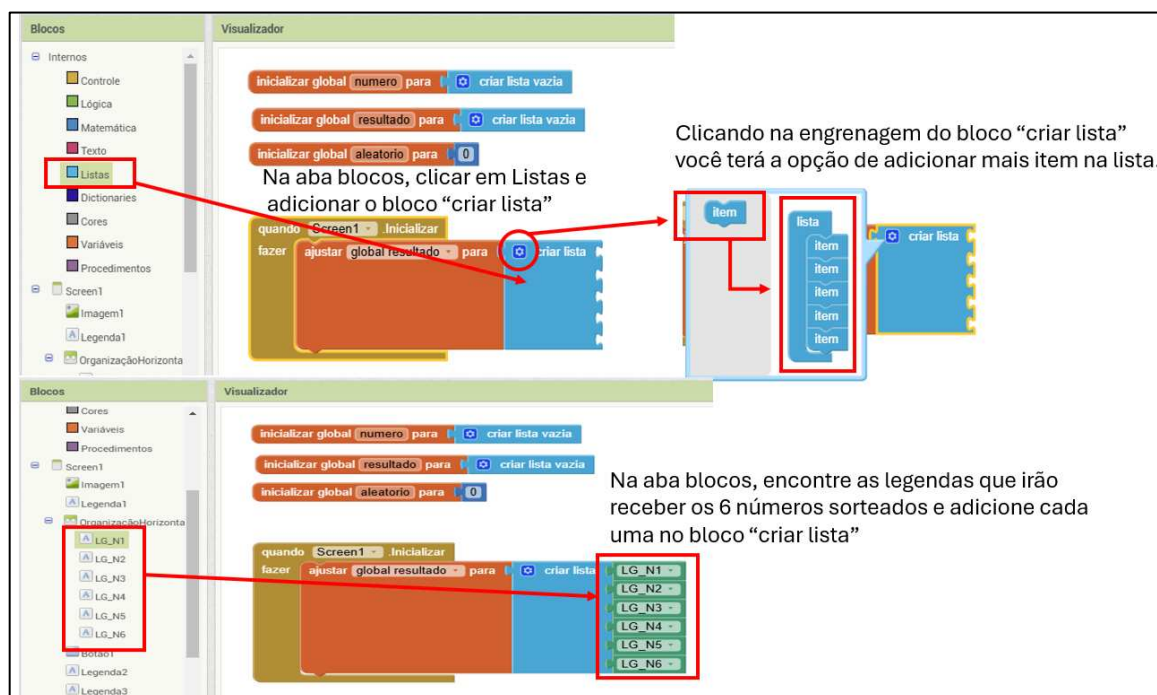
Figura 28 – Segunda etapa da programação (parte 1)



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Ainda na aba blocos, clicar em “listas” e adicionar o bloco “criar lista”, em seguida, adicione mais itens na lista para poder comportar as seis legendas que serão adicionadas na sequência. Esse bloco “criar lista” deve ser encaixado no bloco “ajustar global resultado para”. Continuando, clique na aba blocos, localize as legendas referentes aos seis números que irão aparecer dentro do organizador horizontal e adicione o bloco, em seguida, encaixe essas legendas no bloco “criar listas”, conforme está sendo mostrado na Figura 29.

Figura 29 – Segunda etapa da programação (parte 2)

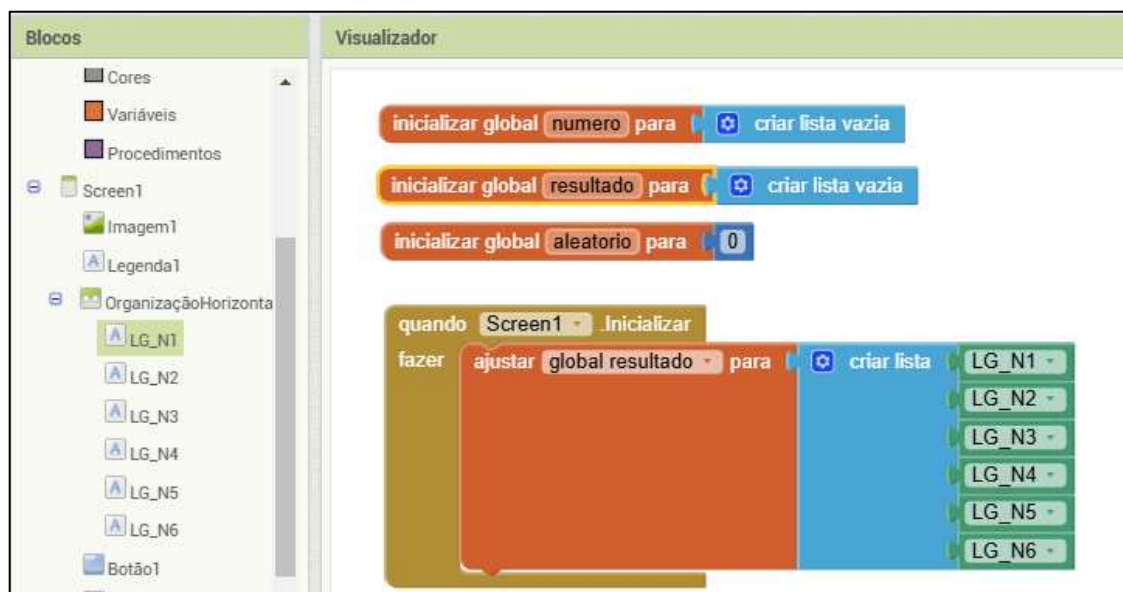


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A programação da segunda etapa serve para que, ao iniciar o aplicativo, o “Screen1” já possa ajustar a variável “global resultado” para receber os números sorteados que deverão aparecer dentro das legendas que foram adicionadas dentro do organizador horizontal.

Com a finalização da segunda etapa, confira abaixo, na Figura 30, como estão ficando os blocos de programação do aplicativo sorteador de números até o momento.

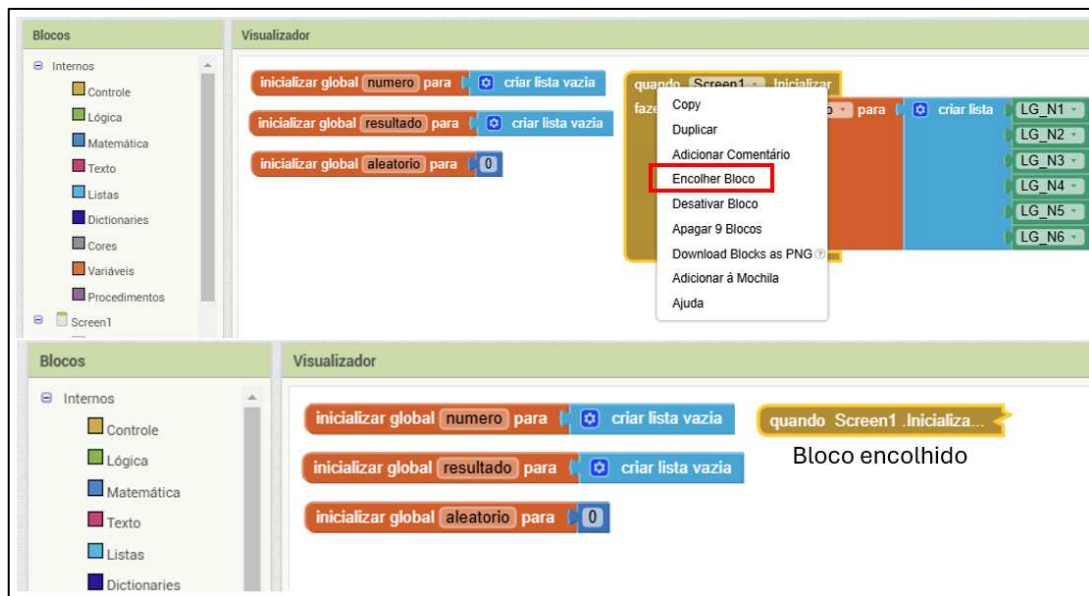
Figura 30 – Blocos de programação após o final da segunda etapa



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Uma informação importante que poderá ajudar o usuário a deixar a área de programação mais organizada é a utilização da opção “encolher bloco”. Basta clicar com o botão direito de mouse em cima do bloco que deseja encolher e selecionar a opção “encolher bloco”, conforme mostra a Figura 31.

Figura 31 – Encolhendo um bloco após finalizar a programação



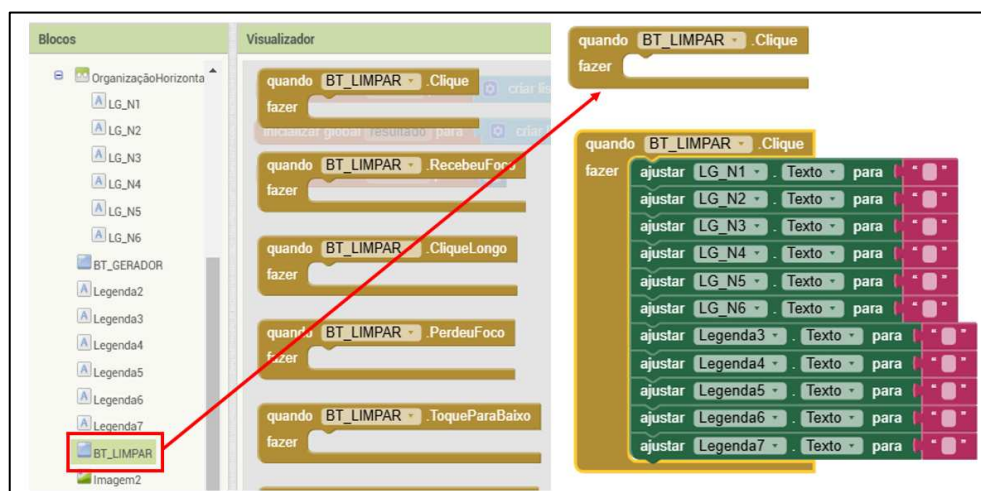
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Prosseguindo com a programação, agora será detalhado a realização da terceira etapa. Nesta etapa, será feita a programação do botão que terá a função de limpar as informações contidas em algumas legendas.

Inicialmente deve-se ir até a aba blocos e clicar no botão desejado, em seguida adicionar o bloco “quando (nome do botão). Clique, fazer”, fazendo isso você estará determinando o que deve ser feito quando o botão “BT_LIMPAR” for clicado. Neste caso, queremos que ele limpe todas as informações contidas nas legendas que estão dentro dele (Ver Figura 32).

Feito isso, agora é só adicionar os blocos referentes a cada legenda que deseja limpar as informações e, logo após, conectar em cada uma delas um bloco de texto vazio, localizado na aba bloco dentro de textos (Ver Figura 32).

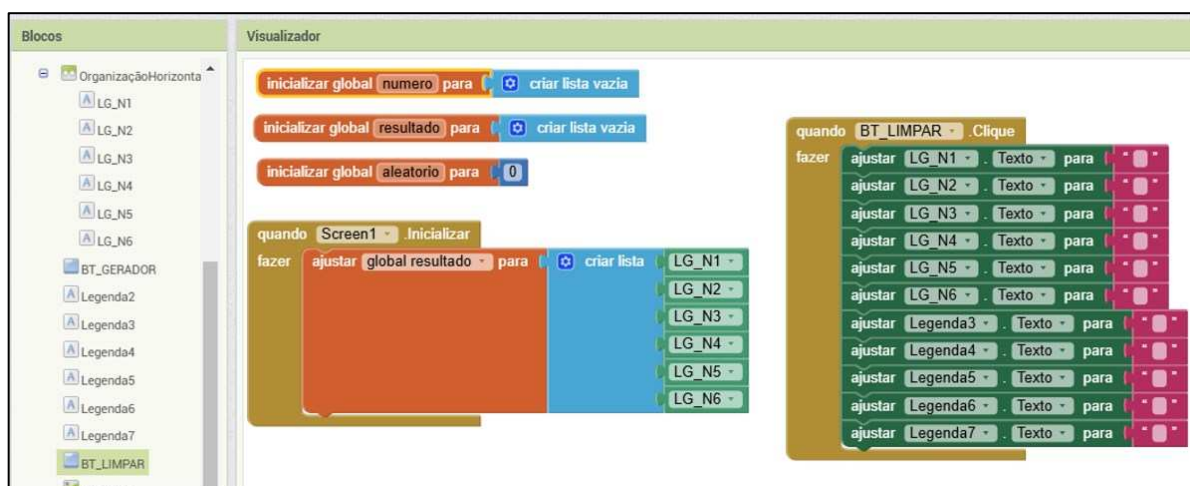
Figura 32 – Programando o botão com a função limpar



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Com isso a terceira etapa estará finalizada. Sendo assim, já podemos ver como estão ficando os blocos de programação após a conclusão das três primeiras etapas. Veja na Figura 33 a seguir.

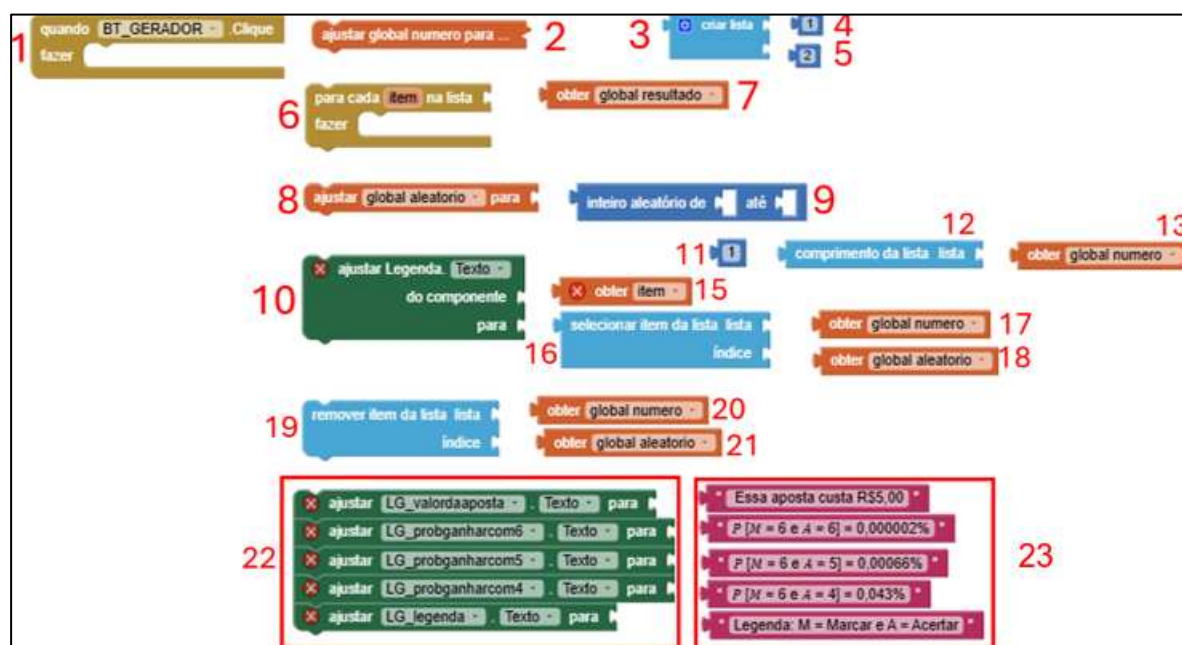
Figura 33 – Blocos de programação após o final da terceira etapa



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Iniciaremos a quarta etapa mostrando todos os blocos que serão utilizados para finalizar a programação do aplicativo, assim, o usuário conseguirá identificar cada um deles e onde encontrá-los, tornando esta etapa menos complexa.

Figura 34 – Todos os blocos utilizados na quarta etapa da programação



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 34 acima, estão destacados todos os blocos que serão utilizados na programação para finalizar a construção do aplicativo. Abaixo será detalhado cada um dos blocos desta figura com a finalidade de melhorar a compreensão do usuário acerca dos blocos utilizados. Na Figura 34, os blocos já estão praticamente na posição de encaixe com os demais blocos, mas apenas na Figura 35 serão mostrados todos os blocos já devidamente encaixados.

Confira, então, o detalhamento das partições feitas na Figura 34, lembrando que todos os blocos são adicionados por meio da “aba blocos”.

- Para adicionar os blocos 1 e 6 basta clicar em “CONTROLE” na aba blocos e adicioná-los. O bloco que representa o botão gerador irá receber dentro de si todos os outros blocos.
- Os blocos 2, 7, 8, 13, 15, 17, 18, 20 e 21 são da família das variáveis e para adicioná-los basta ir na aba blocos e clicar em “VARIÁVEIS”. Ao adicionar cada um desses blocos o usuário deverá os renomear, do mesmo modo que já foi explicado anteriormente.
- Os blocos 3, 12, 16 e 19 são da família das listas e para adicioná-los basta ir na aba blocos e clicar em “LISTAS”. Não esquecendo que no bloco 3 deverá ser adicionado mais itens na lista até completar os 60 números que serão utilizados para fazer a escolha aleatória das 6 dezenas da aposta.

- iv. Para adicionar os blocos 4, 5, 9 e 11 basta ir até a aba blocos e clicar em “MATEMÁTICA”. Contudo, apenas no bloco 3, onde deverá ser criada uma lista, deverão ser adicionados 60 blocos iguais ao bloco 4, onde cada um desses bloquinhos irá receber um número da lista.
- v. Para adicionar o bloco 10 basta ir na aba blocos até o final e clicar na opção “qualquer componente”, este bloco estará lá dentro.
- vi. O conjunto de blocos 22 são as legendas que serão utilizadas para mostrar as informações de texto e os valores de probabilidades na tela do aplicativo. Organize todos os blocos de legenda, da forma como está sendo exibido na Figura 34, depois é só encaixá-los no lugar correto.
- vii. Por fim, temos o conjunto de blocos 23, que são os blocos de texto, também localizados na aba blocos. Esses blocos serão utilizados para mostrar os textos que serão apresentados nas legendas do bloco 22. Esses blocos serão encaixados um a um nas respectivas legendas que correspondem a seu texto.

Feita a descrição de todos os blocos da programação, na Figura 35, adiante, será mostrado todos esses blocos encaixados, deste modo, está finalizada a quarta etapa da programação.

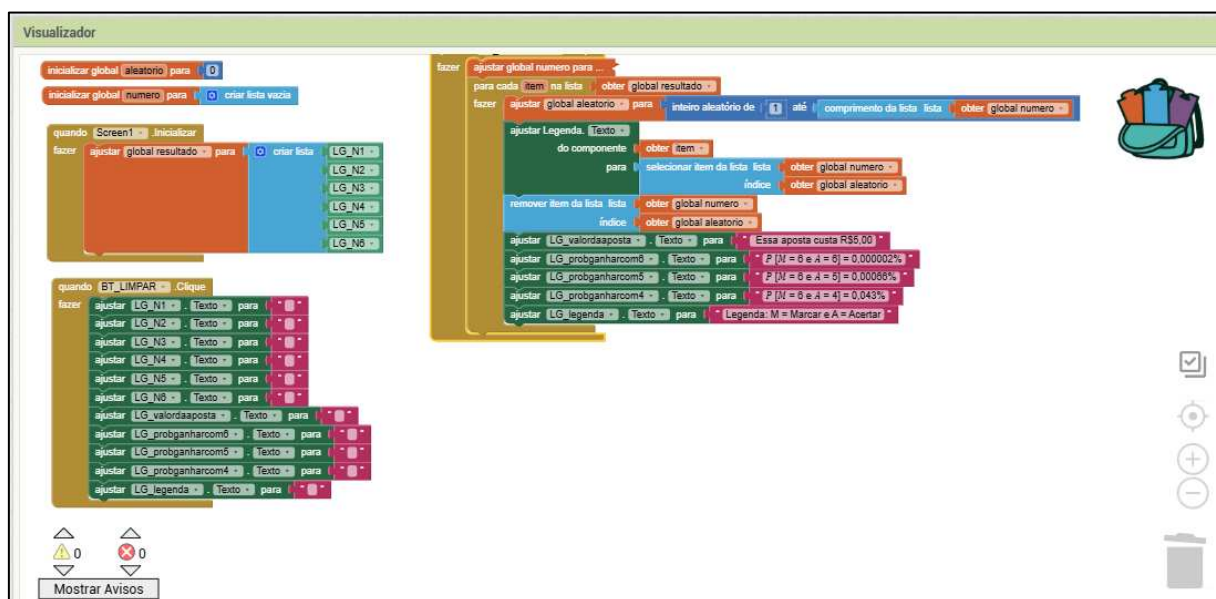
Figura 35 – Blocos de programação da quarta etapa



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 36, a seguir, será apresentada a compilação de todos os blocos utilizados nas quatro etapas de desenvolvimento do aplicativo sorteador de número aleatórios.

Figura 36 – Compilação de todos os blocos utilizados nas etapas de desenvolvimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O usuário poderá realizar testes no aplicativo desenvolvido antes de baixá-lo em seu celular ou *tablet*. Para isso é necessário fazer o *download* do aplicativo “MIT AI2 Companion” na loja de aplicativos de seu *smartphone* ou *tablet*. Feito isso, clique em “Conectar” e depois em “Assistente AI”, ambos no canto superior esquerdo da tela, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Acessando o assistente AI



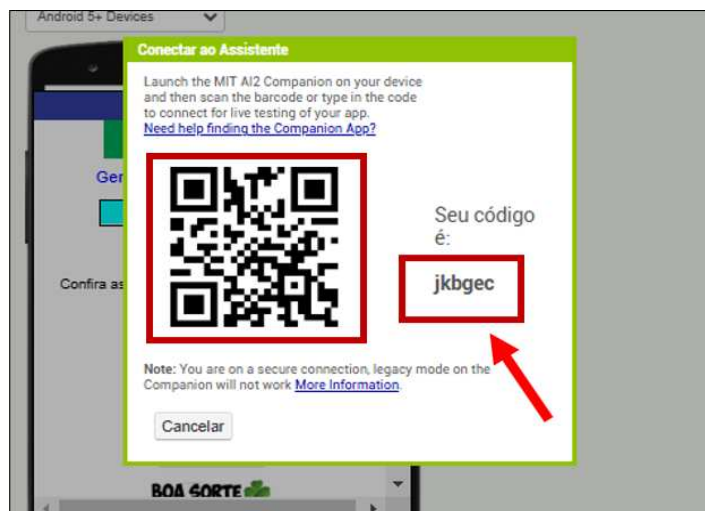
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Logo após, uma janela com um *QR Code* e um código alfanumérico irá aparecer (Ver Figura 38). Faça a leitura do *QR Code* ou digite o código alfanumérico no aplicativo “MIT AI2

Companion” que foi instalado anteriormente no seu celular ou *tablet*. Depois disso é só aguardar aparecer na tela o aplicativo que foi desenvolvido e realizar os testes necessários.

Caso seja necessário realizar alguma alteração no aplicativo, o usuário poderá acompanhá-las em tempo real na tela do seu celular. No entanto, o computador e o celular deverão estar conectados na mesma rede de internet para que seja possível realizar os testes.

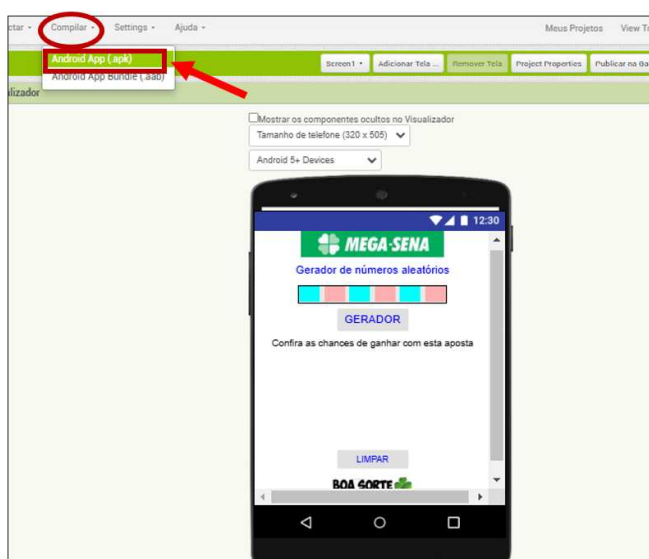
Figura 38 – Códigos para visualizar o aplicativo desenvolvido e realizar testes



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Após a realização dos testes, estando tudo conforme planejado, o usuário pode fazer o *download* do aplicativo clicando em “Compilar” e, em seguida, em “Android app (.apk)” (Ver Figura 39). Feito isso, o arquivo gerado pode ser enviado para quem desejar utilizá-lo.

Figura 39 – Fazendo o *download* do aplicativo desenvolvido



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Confira adiante o *design* do aplicativo após ser finalizado (Figura 40). Lembrando que o *layout* e o *design* do aplicativo podem ser modificados de acordo com a preferência do desenvolvedor.

Figura 40 – Design do aplicativo após finalizar todo o processo de criação



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Portanto, foi apresentado nesta seção todo o processo de criação do aplicativo sorteador de números e suas telas após o processo de criação ter sido finalizado. Para quem desejar acessar o aplicativo desenvolvido basta acessar o link (<https://bit.ly/40ZnNps>), fazer o download do arquivo e, em seguida, instalar o aplicativo no seu *smartphone* ou *tablet*.

É importante ressaltar também que o aplicativo criado não calcula as probabilidades de acerto na Mega Sena, ele apenas exibe essas probabilidades que foram calculadas previamente e adicionadas no aplicativo como legendas. Isso ressalta a importância da utilização do *MIT App Inventor* como recurso pedagógico para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, pois os alunos que irão replicar a construção deste aplicativo precisarão, inicialmente, dominar estes dois conteúdos para realizarem os cálculos que serão posteriormente informados como legenda no aplicativo.

Sendo assim, a utilização da programação em sala de aula, sobretudo com o *MIT App Inventor*, pode ser um aspecto motivador para que os alunos aprendam os conceitos matemáticos que serão necessários para a construção do aplicativo.

8 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Neste capítulo, serão apresentadas propostas de sequências didáticas para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, utilizando como recurso pedagógico os jogos de loteria, com destaque para a Mega Sena. A escolha desse contexto busca aproximar os conteúdos matemáticos da realidade dos estudantes, mostrando como conceitos aparentemente abstratos se aplicam a situações cotidianas, despertando o interesse e a curiosidade dos alunos. Ao explorar as possibilidades combinatórias e os cálculos probabilísticos presentes nos sorteios, os alunos terão a oportunidade de desenvolver um raciocínio crítico e aprofundado sobre os fenômenos aleatórios.

Para tornar as atividades mais dinâmicas e interativas, será utilizado um aplicativo sorteador de números da Mega Sena, desenvolvido no *MIT App Inventor*. Esse aplicativo permitirá simular sorteios e realizar análises práticas dos resultados, fomentando discussões sobre a teoria das probabilidades e suas aplicações. A abordagem proposta busca integrar tecnologia e educação de maneira criativa, oferecendo aos professores ferramentas concretas para inovar suas práticas pedagógicas e engajar os estudantes em aprendizagens significativas.

8.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1

Título: Análise Combinatória e Probabilidade com Jogos de Loteria

Público-alvo: 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 5 aulas de 50 minutos cada

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade por meio de atividades práticas com jogos de loteria, especialmente a Mega Sena, contextualizando o aprendizado com situações do cotidiano.

Objetivos Específicos:

- Compreender o conceito de Combinação Simples, diferenciando suas aplicações práticas em problemas matemáticos;
- Identificar e calcular a quantidade total de combinações possíveis em jogos de loteria, especialmente na Mega Sena;

- Apresentar os conceitos básicos e a definição de probabilidade como um quociente;
- Determinar a probabilidade de ganhar em jogos de loteria, analisando a relação entre eventos possíveis e favoráveis;
- Utilizar o aplicativo sorteador de combinações para explorar a geração aleatória de apostas e suas probabilidades, registrando e analisando dados;
- Refletir sobre a utilidade da matemática na interpretação de fenômenos aleatórios, como os jogos de loteria.

Habilidades da BNCC:

- (EM13MAT310)
- (EM13MAT311)
- (EM13MAT106)

Conteúdo Programático:

- Combinação Simples;
- Probabilidade em experimentos aleatórios;
- Análise crítica de jogos de loteria.

Materiais Necessários:

- Quadro branco e marcadores;
- Calculadoras;
- Celulares com acesso ao aplicativo sorteador de combinações da Mega Sena;
- Cartelas impressas com tabelas para registro de combinações;
- Projetor multimídia.

Etapas da Sequência:

✓ Aula 1: Introdução ao Tema (50 minutos)

- **Discussão inicial:** Apresentar uma matéria jornalística sobre alguma pessoa que foi vencedora no jogo da Mega Sena.

A apresentação dessa matéria jornalística tem o objetivo de contextualizar o assunto que será apresentado posteriormente, despertando, assim, a curiosidade dos alunos e promovendo um maior engajamento.

- **Pergunta norteadora:** Apresentar um questionamento que será o ponto de partida para introdução do conteúdo.

Um exemplo de pergunta norteadora para esse caso pode ser: “Quais as chances reais de ganhar na Mega Sena?”. Deve-se fazer a pergunta e esperar os alunos formularem suas respostas e apresentá-las, o professor deve mediar a discussão apresentando questionamentos complementares com o objetivo de desenvolver o raciocínio dos alunos e a capacidade de argumentação.

- **Apresentação sobre a Mega Sena:** funcionamento e regras.

Muitos alunos, apesar de saberem da existência dos jogos de loteria, não conhecem as regras e como funcionam esses jogos, sobretudo a Mega Sena. Então, o professor deve apresentá-las a fim de esclarecer dúvidas que possam existir.

- **Conteúdos programáticos:** Apresentar os conteúdos programáticos que serão estudados durante essa sequência de aulas.

Informar aos alunos que serão estudados os conteúdos combinação simples, pertencente à Análise Combinatória e Probabilidade de eventos aleatórios, destacando o que os alunos aprenderão durante a sequência das aulas.

✓ **Aula 2: Análise Combinatória (50 minutos)**

- **Relembrando conceitos básicos:** PFC, Permutação e Arranjo.

Esta sequência didática parte da ideia que o aluno já tenha estudado anteriormente os conceitos iniciais de Análise Combinatória, sendo assim, nesta aula será necessário apenas uma retomada desses conceitos, com o objetivo de relembrá-los.

- **Atividade diagnóstica:** identificar situações cotidianas que envolvam os conceitos básicos de Análise Combinatória.

Perguntar aos alunos situações práticas do seu dia a dia onde a Análise Combinatória está presente, a fim de verificar se os conceitos apresentados foram compreendidos corretamente.

- **Definição de Combinação Simples:** Apresentar o conceito e a fórmula matemática.

Apresentar a Combinação de forma contextualizada, com um exemplo prático, diferenciando-a de Arranjo pelo fato de a ordem dos seus elementos não importar para construção das combinações. Um exemplo que pode ser utilizado é o de formação de comissões, onde, quando houver definição de cargos na comissão é um caso de Arranjo e quando não houver é um caso de Combinação.

- **Exemplo prático:** cálculo do número total de combinações possíveis na Mega Sena.

Relembrar a pergunta norteadora, afirmando que para determinar as chances de ganhar na Mega Sena primeiro é necessário saber quantos jogos são possíveis uma pessoa fazer. Permitir que os alunos calculem sozinhos essa quantidade, com a ajuda de calculadoras, se necessário, e o professor acompanha e fornece suporte aos alunos com dificuldade.

- **Atividade prática:** cálculo manual de algumas combinações com 6 dezenas.

Pedir aos alunos que escrevam possíveis combinações de 6 dezenas dentre os números 1 a 60. Essas combinações são exemplos de jogos da Mega Sena. Aqui o professor pode argumentar que listar todos os casos é praticamente impossível, por se tratar de mais de 50 milhões de combinações, então a Análise Combinatória tem como objetivo determinar a quantidade de casos relacionados a determinada situação sem que seja necessário listá-los.

✓ **Aula 3: Probabilidade (50 minutos)**

- **Conceitos básicos:** Experimentos, eventos, espaço amostral.

Apresentar aos alunos os conceitos básicos relacionados à definição de probabilidade. Definir o que são experimentos, diferenciar os experimentos aleatórios dos experimentos determinísticos e explicar que serão estudados os experimentos aleatórios. Apresentar as definições de evento e espaço amostral, enfatizando que o espaço amostral é um conjunto universo e que o evento é um subconjunto do espaço amostral.

- **Definição de probabilidade:** Apresentar a definição clássica de probabilidade.

O objetivo é ensinar aos alunos que a probabilidade de um evento ocorrer pode ser entendida como a relação entre o número de elementos desse evento e o total de elementos no espaço amostral, ou seja, a probabilidade é a razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis.

- **Aplicação prática:** cálculo da probabilidade de ganhar na Mega Sena.

Retomar novamente a pergunta norteadora e, com base no cálculo feito na Aula 2, determinar a probabilidade de uma pessoa ganhar na Mega Sena utilizando apenas um jogo simples.

✓ **Aula 4: Atividade Prática (50 minutos)**

- **Descrição da atividade:** Apresentar como será desenvolvida a atividade e suas etapas.

Essa atividade consiste na realização de situação prática onde os alunos verificarão as chances de ganhar na Mega Sena. Serão feitas simulações de sorteios da Mega Sena utilizando

o aplicativo sorteador, que foi desenvolvido neste trabalho, os alunos anotarão os resultados e, posteriormente, verificarão as frequências de ocorrências e as probabilidades de ganhar.

Inicialmente cada aluno deve registrar o seu jogo, isto é, anotar no topo da cartela disponibilizada as 6 dezenas que acredita que serão sorteadas. Logo após, o professor realizará os sorteios, cada aluno deve registrar os números sorteados no local apropriado na tabela e, em seguida, anotar na tabela quantas dezenas acertou em cada jogo, conforme mostra o Quadro 17.

Quadro 17 – Exemplo de registro de um aluno

Sua aposta: 07, 22, 29, 38, 51, 57		
Sorteio	Números Sorteados	Quantidade de Acertos
1º	03, 15, 19, 38, 44, 50	1
2º	17, 22, 33, 35, 42, 57	2
3º	10, 14, 29, 30, 53, 60	1
4º	04, 11, 25, 37, 46, 49	0
...	...	...

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- **Aplicativo sorteador:** Utilizar o aplicativo sorteador desenvolvido a partir do *MIT App Inventor*.

Caso o professor deseje estimular ainda mais o desenvolvimento integral dos alunos, poderá replicar a construção deste aplicativo, conforme detalhado no Capítulo 7 deste trabalho, juntamente com os alunos, para isso seriam necessários mais aulas e outros materiais. Caso não opte por fazer assim, o professor poderá utilizar o aplicativo que já foi desenvolvido. De posse do aplicativo, deverão ser realizados 20 sorteios, os alunos deverão anotar os resultados de cada um desses sorteios em uma planilha (manual ou eletrônica), para posteriormente analisar os resultados.

- **Atividade em grupo:** Análise dos resultados obtidos.

Divida a sala em grupos de até 5 alunos e peça que os alunos somem a quantidade de acertos em todos os sorteios para encontrar a frequência absoluta de cada quantidade de acertos (Ver Quadro 18). Para facilitar o entendimento, peça que eles façam as anotações respondendo as seguintes perguntas: “Quantas vezes acertei 0 números? Quantas vezes acertei 1 número?” e assim por diante. Depois peça que transformem a frequência absoluta em frequência relativa,

fazendo a divisão da frequência absoluta pela quantidade de sorteios (20). Mesmo esta etapa sendo feita em grupo, cada aluno deve produzir os seus registros individualmente.

Quadro 18 – Tabela de frequências: exemplo de um aluno

Aluno: Pedro Gabriel Martins (fictício)		
Quantidade de Acertos	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
0	12	60%
1	5	25%
2	3	15%
3	0	0%
4	0	0%
5	0	0%
6	0	0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- **Comparação com a probabilidade teórica:** Apresentar a fórmula de cálculo da probabilidade teórica em cada caso e calcular juntamente com os alunos.

O professor deve auxiliar os alunos no cálculo de todas as situações, por exemplo, probabilidade de acertar 6 números, probabilidade de acertar 1 número, probabilidade de acertar 2 números e assim por diante. Feito isso, os alunos deverão comparar os resultados obtidos na simulação com as probabilidades teóricas calculadas.

✓ **Aula 5: Discussão Final (50 minutos)**

- **Apresentação dos resultados:** Cada grupo deverá apresentar os resultados obtidos.

Essa apresentação pode ser por meio das tabelas construídas ou o grupo pode construir um gráfico de barras para ilustrar suas frequências relacionadas.

- **Discussão final:** Inferir conclusões com base nos resultados observados.

Estimular os alunos a tirarem suas próprias conclusões acerca do experimento realizado. Esse estímulo pode ser por meio da pergunta “Você acha que vale a pena apostar? Por quê?”, a partir das respostas o professor conduz a discussão, permitindo que os alunos argumentem sobre suas conclusões. A ideia é fazer com que os alunos reflitam sobre a discrepância entre a frequência relativa obtida e a probabilidade teórica calculada, entendendo que, mesmo em várias simulações (20), a chance de ganhar é mínima.

- **Reflexão:** Apresentar uma reflexão sobre a atividade.

O professor deve fazer uma reflexão sobre o papel da matemática na tomada de decisões em situações de incerteza. Situações que vão além de que jogos de loteria e que estão presentes no nosso dia a dia.

Avaliação:

A avaliação dos alunos deve ser realizada durante toda a realização da sequência didática, o professor pode avaliar os seguintes pontos:

- Participação nas discussões críticas;
- Registro das combinações geradas e cálculos de probabilidade;
- Participação na atividade prática;
- Relatório individual refletindo sobre a experiência com a atividade prática e a compreensão dos conteúdos trabalhados.

8.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2

Título: Mega Sena: sorte, azar ou matemática?

Público-alvo: 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 4 aulas de 50 minutos cada

Objetivo Geral:

Desenvolver competências matemáticas por meio da aplicação prática de conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade, com foco na resolução de situações-problemas, análise crítica das chances de ganho em apostas e reflexão sobre o impacto social dos jogos de azar, promovendo uma tomada de decisões fundamentada em dados probabilísticos.

Objetivos Específicos:

- Aplicar o raciocínio matemático para resolver situações-problema que envolvam Análise Combinatória e Probabilidade;
- Aplicar a definição de Combinação Simples para auxiliar nos cálculos da probabilidade de ganhar na Mega Sena em diferentes situações;
- Analisar e comparar as probabilidades de ganhar em apostas diferentes;
- Relacionar conceitos matemáticos com situações do cotidiano, estimulando a tomada de decisões conscientes com base em dados probabilísticos;

- Estimular o uso de tecnologias na resolução de problemas;
- Desenvolver uma postura crítica em relação aos jogos de azar, analisando suas probabilidades e impacto social.

Habilidades da BNCC:

- (EM13MAT310)
- (EM13MAT311)
- (EM13MAT106)

Conteúdo Programático:

- Combinação Simples;
- Probabilidade em experimentos aleatórios;
- Análise crítica de jogos de loteria.

Materiais Necessários:

- Quadro branco e marcadores;
- Calculadoras;
- Cartões com dezenas numeradas para a atividade “Mega Sorte”;
- Projetor multimídia;
- Tabelas para registro de resultados.

Etapas da Sequência:

Essa sequência didática é destinada a turmas que já estudaram a teoria sobre Análise Combinatória e Probabilidade. O objetivo é avaliar a compreensão dos alunos sobre os conteúdos teóricos e aprofundar esse entendimento por meio de atividades práticas que consolidem o conhecimento.

✓ Aula 1: Introdução ao Tema (50 minutos)

- Apresentar a proposta da sequência didática, destacando os conceitos matemáticos que serão abordados.
- Discutir brevemente o que são jogos de azar e seu impacto social.

- Expor dados estatísticos sobre a Mega Sena, ressaltando a probabilidade de ganhar com uma aposta simples.
- Revisar os conceitos de Combinação Simples e Probabilidade.

✓ **Aula 2: Atividade Prática “Mega Sorte” (50 minutos)**

- **Descrição:** Apresente um cartão com 10 dezenas numeradas de 1 a 10 (Figura 41). Os estudantes devem marcar 3 dezenas por um valor de R\$ 3,00. Ganha quem acertar 3 ou 2 dezenas.

Figura 41 – Cartão para a atividade Mega Sorte



Cartão 01

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Cartão 02

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Você pode apostar marcando 3, 4 ou 5 números em cada cartão.
Ganha acertando 3 ou 2 números.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- **Variantes:** Permitir apostas com 4 ou 5 dezenas. Os estudantes devem calcular o valor proporcional da aposta.
- **Questionamentos:** O professor poderá fazer os seguintes questionamentos aos estudantes no momento da realização da atividade.
 1. De quantas maneiras distintas a escolha das três dezenas poderá ser feita?
 2. Qual deve ser o valor cobrado na aposta de 4 e 5 dezenas?
 3. Preencher uma tabela (Quadro 19) com os cálculos de probabilidade conforme a quantidade de números marcados no cartão de aposta.

Quadro 19 – Tabela para a atividade prática Mega Sorte

Quantidade de números jogados	Probabilidade de acerto	
	Terno (3)	Duque (2)
3		
4		
5		

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- **Discussão:** Analisar como o aumento da quantidade de dezenas influencia a probabilidade de acerto e o valor da aposta.
- **Soluções para os questionamentos:** Abaixo serão apresentadas as soluções para os três questionamentos apresentados.

Questionamento 1: De quantas maneiras distintas a escolha das três dezenas poderá ser feita?

Solução:

Aqui, basta calcular a combinação simples de 10 tomados 3 a 3.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = \frac{720}{6} = 120.$$

Logo, há 120 maneiras distintas de escolher 3 dezenas entre as 10 disponíveis no cartão de aposta.

Questionamento 2: Qual dever ser o valor cobrado na aposta de 4 e 5 dezenas?

Solução:

a) Para a aposta de 4 dezenas, basta verificar quantas combinações simples de 4 elementos tomados 3 a 3 teremos. Ou seja:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Agora basta multiplicar o 4 pelo valor pago na aposta simples. $4 \times 3 = 12$.

Portanto o valor da aposta para 4 dezenas é de R\$12,00.

b) De forma análoga ao item a, faremos para a aposta com 5 dezenas:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Fazendo $10 \times 3 = 30$, logo a aposta com 5 dezenas custará R\$ 30,00.

Questionamento 3: Preencha a tabela abaixo com os cálculos de probabilidade conforme a quantidade de números marcados no cartão de aposta.

Solução:

Quadro 20 – Solução do questionamento 3 da atividade prática Mega Sorte

Quantidade de números jogados	Probabilidade de acerto	
	Terno (3)	Duque (2)
3	0,83%	17,5%
4	3,33%	30%
5	8,33%	41,66%

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Calculando a probabilidade de marcar 3 dezenas e acertar as 3 dezenas:

$$P[M = 3, A = 3] = \frac{C_{3,3} \cdot C_{7,0}}{C_{10,3}} = \frac{1 \cdot 1}{120} = \frac{1}{120} = 0,83\%.$$

Calculando a probabilidade de marcar 3 dezenas e acertar 2 dezenas:

$$P[M = 3, A = 2] = \frac{C_{3,2} \cdot C_{7,1}}{C_{10,3}} = \frac{3 \cdot 7}{120} = \frac{21}{120} = 17,5\%.$$

Calculando a probabilidade de marcar 4 dezenas e acertar 3 dezenas:

$$P[M = 4, A = 3] = \frac{C_{3,3} \cdot C_{7,1}}{C_{10,4}} = \frac{1 \cdot 7}{210} = \frac{7}{210} = 3,33\%.$$

Calculando a probabilidade de marcar 4 dezenas e acertar 2 dezenas:

$$P[M = 4, A = 2] = \frac{C_{3,2} \cdot C_{7,2}}{C_{10,4}} = \frac{3 \cdot 21}{210} = \frac{63}{210} = 30\%.$$

Calculando a probabilidade de marcar 5 dezenas e acertar 3 dezenas:

$$P[M = 5, A = 3] = \frac{C_{3,3} \cdot C_{7,2}}{C_{10,5}} = \frac{1 \cdot 21}{252} = \frac{21}{252} = 8,33\%.$$

Calculando a probabilidade de marcar 5 dezenas e acertar 2 dezenas:

$$P[M = 5, A = 2] = \frac{C_{3,2} \cdot C_{7,3}}{C_{10,5}} = \frac{3 \cdot 35}{252} = \frac{105}{252} = 41,66\%.$$

✓ Aula 3: Comparando modelos de aposta (50 minutos)

- **Descrição:** Apresentar a seguinte situação-problema: Um apostador tem R\$ 193.800,00 e deseja maximizar suas chances de ganhar na Mega Sena. Ele tem duas opções de apostas:
 1. Fazer uma única aposta com 20 dezenas.
 2. Dividir a quantia em apostas simples com 6 dezenas (cada aposta simples custa R\$ 5,00).
- **Perguntas:** a) Se o apostador optar pela opção 2, quantas apostas simples ele conseguirá realizar com esta quantia? b) Determine a probabilidade de ganhar em cada caso e diga qual das opções é mais vantajosa.
- **Discussão:** Analisar a relação custo-benefício das apostas e a ilusão de aumento significativo nas chances de ganho.
- **Soluções para as perguntas:** Abaixo serão apresentadas as soluções para as duas perguntas apresentadas.

Pergunta a): Se o apostador optar pela opção 2, quantas apostas simples ele conseguirá realizar com esta quantia?

Solução:

Aqui, basta fazer $193.800 \div 5 = 38.760$. Este é o total de apostas com apenas 6 dezenas que o apostador conseguirá realizar com a quantia de R\$193.800,00.

Pergunta b): Determine a probabilidade de ganhar em cada caso e diga qual das opções é a mais vantajosa.

A probabilidade de ele ganhar na opção 2 é dada por:

$$P(\text{ganhar na opção 2}) = \frac{38.760}{C_{60,6}} = \frac{38.760}{50.063.860} = 0,08\%.$$

Na opção 1, temos que, ao fazer uma aposta única com 20 dezenas, o apostador concorrerá com um total de apostas dada pela seguinte combinação:

$$C_{20,6} = \frac{20!}{6! \cdot (20-6)!} = \frac{20!}{6! \cdot 14!} = 38.760.$$

Observe que, nesta opção, o apostador concorrerá com um total de 38.760 combinações de jogos com 6 dezenas, igualmente na opção 2. Sendo assim:

$$P(\text{ganhar na opção 1}) = \frac{38.760}{C_{60,6}} = \frac{38.760}{50.063.860} = 0,08\%.$$

Pensando na opção de que o apostador terá feito apenas a sena, as probabilidades nas duas opções são iguais. Logo, tanto faz ele optar pela opção 1 ou pela opção 2, pois ambas apresentam a mesma chance de ganhar.

Agora, analisando mais a fundo essas chances, podemos observar o seguinte:

Na opção 1, se o apostador marcou 20 números no cartão da Mega Sena, ele terá como chance de ganhar:

- Acertando seis números entre os vinte números marcados (Sena):

$$P(20, 6) = \frac{C_{6,6} \cdot C_{54,14}}{C_{60,20}} = \frac{1 \cdot 3.245.372.870.670}{4.191.844.505.805.495} = \frac{3.245.372.870.670}{4.191.844.505.805.495} = \frac{1}{1.292} = 0,08\%.$$

- Acertando apenas cinco números entre os vinte números marcados (Quina):

$$P(20, 5) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,15}}{C_{60,20}} = \frac{6 \cdot 8.654.327.655.120}{4.191.844.505.805.495} = \frac{51.925.965.930.720}{4.191.844.505.805.495} = \frac{1}{81} = 1,23\%.$$

- Acertando apenas quatro números entre os vinte números marcados (Quadra):

$$P(20, 4) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{54,16}}{C_{60,20}} = \frac{15 \cdot 21.094.923.659.355}{4.191.844.505.805.495} = \frac{316.423.854.890.325}{4.191.844.505.805.495} = \frac{1}{13} = 7,55\%.$$

Agora, observe, que se o apostador marcar 20 dezenas ($n = 20$) e acerta 6 dezenas ($x = 6$), consequentemente terá errado 4 dezenas ($n - x = 20 - 6 = 14$). Então a quantidade

de premiações que esse apostador receberá na Sena ($y = 6$ e $z = 0$) será dado pelo produto abaixo.

$$\underbrace{C_{x,y}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(n-x),z}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \times \frac{14!}{0! \cdot 4!} = 1 \times 1 = 1 \text{ premiação.}$$

Esse mesmo apostador, nas mesmas condições, terá a seguinte quantidade de premiações na Quina ($y = 5$ e $z = 1$):

$$\underbrace{C_{6,5}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(20-6),1}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} \times \frac{14!}{1! \cdot 13!} = 6 \times 14 = 84 \text{ premiações.}$$

Esse mesmo apostador, nas mesmas condições, terá a seguinte quantidade de premiações na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$):

$$\underbrace{C_{6,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(20-6),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \times \frac{14!}{2! \cdot 12!} = 15 \times 91 = 1.365 \text{ premiações.}$$

No caso de o apostador ter marcado 20 dezenas ($n = 20$) e acertado apenas 5 dezenas ($x = 5$), conseqüentemente terá errado 5 dezenas ($n - x = 20 - 5 = 15$). Então a quantidade de premiações que esse apostador receberá na Quina ($y = 5$ e $z = 1$) será:

$$\underbrace{C_{5,5}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(20-5),1}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} \times \frac{15!}{1! \cdot 14!} = 1 \times 15 = 15 \text{ premiações.}$$

Já a quantidade de premiações que o apostador receberá na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$), nas mesmas condições da situação anterior, será:

$$\underbrace{C_{5,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(20-5),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \times \frac{15!}{2! \cdot 13!} = 5 \times 105 = 525 \text{ premiações.}$$

Agora, se esse apostador marcou 20 dezenas ($n = 20$) e acertou somente 4 dezenas ($x = 4$), consequentemente terá errado 6 dezenas ($n - x = 20 - 4 = 16$). Então a quantidade de premiações que ele receberá na Quadra ($y = 4$ e $z = 2$) será:

$$\underbrace{C_{4,4}}_{\text{Combinações possíveis entre os acertos}} \times \underbrace{C_{(20-4),2}}_{\text{Combinações possíveis entre os erros}} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \times \frac{16!}{2! \cdot 4!} = 1 \times 120 = 120 \text{ premiações.}$$

Diante tudo isso, pode-se concluir que a melhor opção para o apostar será a opção 1.

✓ Aula 4: Reflexão e sistematização (50 minutos)

- **Atividade:** Conduzir uma discussão sobre os aprendizados das atividades.
- **Perguntas Norteadoras:**
 1. Como a matemática pode ajudar a tomar decisões mais conscientes sobre apostas?
 2. Você considera justo o modelo de funcionamento das loterias?
 3. Quais outros exemplos do cotidiano envolvem o uso de probabilidade?
- Sistematização dos principais conceitos abordados durante a sequência.
- Registro das conclusões no caderno.

Avaliação:

A avaliação dos alunos deve ser realizada durante toda a realização da sequência didática, o professor pode avaliar os seguinte pontos:

- **Participação nas atividades:** Observação da capacidade dos estudantes em aplicar conceitos matemáticos para resolver problemas.
- **Registros escritos:** Análise dos cálculos realizados nas atividades e respostas apresentadas.
- **Discussão oral:** Avaliação da argumentação e da capacidade crítica ao discutir as probabilidades e implicações sociais dos jogos de azar.
- **Autoavaliação:** Os estudantes podem registrar, ao final, como entenderam a relação entre matemática e tomada de decisões conscientes.

9 CONCLUSÕES

Este estudo buscou responder à questão de como a utilização de jogos de loteria, em especial a Mega Sena, associada a ferramentas tecnológicas, pode contribuir para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade no ensino médio. Ao longo do trabalho, foram exploradas possibilidades pedagógicas inovadoras que integram conceitos matemáticos complexos a situações práticas e próximas à realidade dos estudantes.

A pesquisa aponta os jogos de loteria como recursos didáticos valiosos para despertar o interesse dos alunos e possibilitar a contextualização de conceitos abstratos de maneira acessível e engajante. Além disso, a integração com tecnologias digitais, especialmente por meio do aplicativo desenvolvido na plataforma *MIT App Inventor*, potencializa a interatividade e promove uma experiência de aprendizagem prática e dinâmica.

O desenvolvimento do aplicativo sorteador de números permite não apenas a simulação de sorteios e o cálculo das probabilidades, mas também a introdução de elementos de programação no ensino de matemática. Essa abordagem interdisciplinar pode ser bastante eficaz para aproximar os estudantes de um cenário tecnológico cada vez mais presente em suas vidas, ao mesmo tempo em que fortalece o ensino dos conteúdos matemáticos.

A proposta de sequências didáticas elaboradas a partir deste estudo traz possibilidades de transformar o aprendizado de Análise Combinatória e Probabilidade em uma experiência significativa e desafiadora. A utilização do aplicativo em sala de aula é uma estratégia para fomentar a participação ativa dos alunos e promover a construção colaborativa do conhecimento.

Além disso, a pesquisa reforça a importância de fornecer aos professores recursos práticos e metodologias inovadoras que possam ser replicadas e adaptadas conforme suas realidades escolares. O guia prático para a criação do aplicativo sorteador busca contribuir diretamente para essa formação docente, incentivando uma abordagem mais criativa e tecnológica no ensino de matemática.

Recomenda-se que estudos futuros aprofundem a investigação sobre a eficácia dessa metodologia em diferentes contextos escolares, avaliando o impacto no desempenho dos alunos e a receptividade dos professores a essas novas abordagens. Sugere-se também a expansão das funcionalidades do aplicativo, incluindo análises estatísticas adicionais e a integração com outras plataformas educacionais.

Conclui-se que a utilização dos jogos de loteria, aliada a ferramentas tecnológicas, pode ser uma estratégia pedagógica poderosa para transformar o ensino tradicional em uma

experiência dinâmica, prática e contextualizada. Espera-se que este trabalho inspire novas pesquisas e iniciativas que contribuam para a inovação no ensino de matemática e para a formação de cidadãos críticos e preparados para os desafios do mundo contemporâneo.

REFERÊNCIAS

- AMANCIO, Daniel de Traglia; SANZOVO, Daniel Trevisan. Ensino de Matemática por meio das tecnologias digitais. **Revista Educação Pública**, v. 20, nº 47, 8 de dezembro de 2020. Disponível em: <<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/47/ensino-de-matematica-por-meio-das-tecnologias-digitais>>. Acesso em: 03 jan. 2025.
- ANDRADE, R. T. B. **A probabilidade aplicada aos jogos de azar**. 2017. 69f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Paraíba/CCEN, João Pessoa, 2017. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=3127&id2=150210331>. Acesso em: 05 jan. 2025.
- ANSELMO, C. A. de F.; BARONI, A. K. C. Mapeando o pensamento combinatório na BNCC: conexões explícitas e implícitas. **Revista Ciência em Evidência**, [S. l.], v. 5, 2024. Disponível em: <<https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/cienciaevidencia/article/view/2572>>. Acesso em: 20 jan. 2025.
- APARECIDA, Regiane. **História das loterias no Brasil**. Info Escola, 2012. Disponível em: <www.infoescola.com/historia/historia-das-loterias-no-brasil/>. Acesso em: 08 jan. 2025.
- BARBOSA, Andreza Kaline. **Jogos de loteria esportiva: fonte de motivação para o ensino de combinação e probabilidade**. Monografia (Licenciatura em Matemática à Distância) – Universidade Federal da Paraíba, Itabaiana, 2014.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 2. Ed.; 2. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018.
- BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: CAEM-IME, USP, 2004. 100 p.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Notas sobre o Brasil no Pisa 2022**. Brasília, DF: Inep, 2023.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **PCNs+ (Ensino Médio)**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2024.
- CAIXA. **Loteria**. 2024. Disponível em: <<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias>>. Acesso em: 09 jan. 2025.

CORREA, V. B. **Ensino-aprendizagem de probabilidade no ensino médio: uma experiência usando jogos de loteria**. 2016. 71f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão – Mestrado Profissional em Matemática, São Luís, 2016. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=2486&id2=92788>. Acesso em: 04 jan. 2025.

CUNHA, W. S. N.; MATOS, R. M.; SILVA, R. B. O. da; SILVA, A. N. da. Probabilidade e cotidiano: a importância do estudo desde os anos iniciais da educação básica. **Anais do VII Congresso Nacional de Educação**. Campina Grande: Realize Editora, 2021. Disponível em: <<https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/80490>>. Acesso em: 16 jan. 2025.

DOMINGUES, Rodrigo. **Probabilidade no ensino básico: possibilidades para uma abordagem axiomática**. 2023. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2023. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=7369&id2=171057686>. Acesso em: 16 jan. 2025.

ELIAS, A. P. A. J.; ROCHA, F. S. M.; MOTTA, M. S.; KALINKE, M. A. Construindo aplicativos para o ensino de matemática utilizando o software de programação app Inventor. Vitória. **Revista Eletrônica DECT**, v. 8, n 2 pp 41 – 65, 2018.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

FARIAS, Ana Maria Lima de; LAURENCEL, Luiz da Costa. **Probabilidade**. Niterói: [s. n.], 2007. 117 p.

FERNANDES, Helder Cruz. **A gamificação aliada à tecnologia no ensino brasileiro de matemática**. 2022. 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2022. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=6705&id2=171053981>. Acesso em: 07 jan. 2025.

FERREIRA, Luciano da Silva. **Utilização de jogos de cassino e do app inventor como ferramentas de ensino e aprendizagem matemática**. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2024. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=7633&id2=171057568>. Acesso em: 10 jan. 2025.

FRAGA, Rodrigo Rodrigues. **O estudo das loterias: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio**. 2013. 66f. Dissertação (Mestrado em matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=135&id2=39544>. Acesso em: 04 jan. 2025.

FRANCO, Tertuliano. **Princípios de Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. Ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOMES, E. K. A.; NASCIMENTO, L. C. E. D.; RODRIGUES, M. V. T.; STEFANELLI, M. F. C. Análise combinatória e probabilidade na loteria: uma aprendizagem prazerosa para o ensino médio. **Anais do V Seminário Interdisciplinar de Ensino, Extensão e Pesquisa**: Caetité, 2019. Disponível em: <<http://revistas.uneb.br/index.php/apafirma/sieep>>. Acesso em: 20 jan. 2025.

GOMES, T. C. S.; MELO, J. C. B. App inventor for android: Uma nova possibilidade para o ensino de lógica de programação. **Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação**, 2013.

GRANDO, R. C. **O Jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**. 1995. 159 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar**: combinatória, probabilidade. v. 5. São Paulo, SP: Atual, 2013.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens**. O jogo como elemento da cultura. Perspectiva: São Paulo. 2000.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática**: ciências e aplicações: ensino médio – volume 2. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

JÚNIOR, C. M. B. **“Oxe, e é isso mesmo?”**: o ensino de probabilidade através de problemas contraintuitivos. 2024. 51f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2024. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7701&id2=171057691>. Acesso em: 20 jan. 2025.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeiras e a educação**. 4ª Ed. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

LAPA, Luis Dionísio Paz. **A ludicidade como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Passeando por Brasília e aprendendo geometria. Experiências numa escola da periferia do Distrito Federal**. 2017. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/jspui/bitstream/10482/25220/1/2017_Lu%c3%adsDion%c3%adsioPazLapa.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2025.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. v.2 – 6. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Coleção do Professor de Matemática. v. 2 5º ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LOPES, Adriana. **Probabilidade**. Educa+Brasil, 2018. Disponível em: <<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/probabilidade>>. Acesso em: 17 jan. 2025.

MARTINS, A. L. da C. F.; FERREIRA, A. M. da C.; VERAS, V. de C. dos S.; OLIVEIRA, J. F.; SOUZA, J. B. de; FERREIRA, A. P. da C. O professor e as TICs: da formação inicial à

continuada. **Revista Psicologia & Saberes**, [S. l.], v. 9, n. 17, p. 201–216, 2020. Disponível em: <<https://revistas.cesmac.edu.br/psicologia/article/view/1218>>. Acesso em: 07 jan. 2025.

MIRANDA, Juliana. **A história das Loterias**. Site de Curiosidades, 2013. Disponível em: <<http://www.sitedecuriosidades.com/curiosidade/a-historia-das-loterias.html>>. Acesso em 02 jan. 2025.

MIT App Inventor. **Home**. 2025. Disponível em: <<https://appinventor.mit.edu/>>. Acesso em: 12 jan. 2025.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**, Coleção Professor de Matemática. 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OLIVEIRA, Paulo Roberto de. **Modelos de Urnas e Loterias**. 2014. 107f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2014. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1525&id2=1239>. Acesso em: 15 jan. 2025.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Fatorial**. Mundo Educação, 2023. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/fatorial.htm>>. Acesso em: 02 jan. 2025.

OLIVEIRA, Sérgio de; PEREIRA, Marconi de Arruda; TEIXEIRA, Fernando A. MIT App Inventor como Ambiente de Ensino de Algoritmos e Programação. In: **WORKSHOP SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO (WEI)**, 29. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2021. p. 61- 70. ISSN 2595-6175. Disponível em: <<https://doi.org/10.5753/wei.2021.15897>>. Acesso em: 07 jan. 2025.

PAIVA, A. B. de; OLIVEIRA, G. S. de.; MALUSÁ, S. Algumas reflexões sobre surdez e o ensino-aprendizagem de matemática. In: OLIVEIRA, G. S. (Org.). **Metodologia do Ensino de Matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental**. Uberlândia, MG: Fucamp, 2016. p. 41-88.

PAULO, F. F. de. **Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para o ensino**. 2013. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, 2013. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/135rofmat_tcc.php?id1=788&id2=38467>. Acesso em: 18 jan 2025.

POCINHO, R. F. S.; GASPAR, J. P. M. O uso das TIC e as alterações no espaço educativo. Exedra: **Revista Científica**, nº 6, p. 143-154, 2012. Disponível em: <<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3936744>>. Acesso em: 05 jan. 2025.

PONTE, J. P. **Matemática**: uma disciplina condenada ao insucesso. **NOESIS**, n. 32, p. 24-26, 1994.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. Ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

ROCCO, L. R. O. de. **História da Teoria das Probabilidades**. GPET Física Unicentro, 2020. Disponível em: <<https://www3.unicentro.br/petfisica/2020/04/02/historia-da-teoria-das-probabilidades/>>. Acesso em: 17 jan. 2025.

RODRIGUES NETO, Gustavo Vilarinho. **Análise Combinatória: a dedução de fórmulas na resolução de problemas do ENEM**. 2024. 47f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí. Teresina, 2024. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=7717&id2=171057973>. Acesso em: 13 jan. 2025.

ROSS, Sheldon. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ROTUNNO, Sandra Aparecida Martins. **Estatística e Probabilidade: Um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007.

SILVA, Angélica Pereira da. **Jogos de loteria: uma aplicação de probabilidade**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=4524&id2=170480202>. Acesso em: 13 jan. 2025.

SILVA, C. E. **Khan Academy como ferramenta de ensino de matemática: investigação sobre o uso da gamificação na motivação e desempenho dos alunos**. 2024. 152f. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Piauí – *Campus* Floriano, Floriano, 2024a. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=7743&id2=171057275>. Acesso em: 05 jan. 2025.

SILVA, Davyd Coutinho. **Análise de Probabilidades e Padrões Lotéricos na Mega-Sena: simulando estratégias e apresentando alternativas financeiras**. 2024. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí – Centro de Ciências da Natureza, Teresina, 2024b. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=7804&id2=171057510>. Acesso em: 05 jan. 2025.

SOARES, Elton José. **Probabilidade, erros intuitivos e falácias: uma abordagem para o ensino médio**. 2024. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2024. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=7678&id2=171058140>. Acesso em: 26 dez. 2024.

SOUKEFF, F. E. B. **Jogo Mega-Duque: uma proposta para o ensino de probabilidade**. 2014. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Ilha Solteira, 2014. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=1355&id2=613>. Acesso em: 15 jan. 2025.

STOICA, A. **Using math projects in teaching and learning**. Procedia – Social and Behavioral Sciences, v. 180, p. 702-708, 2015. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/277935118_Using_Math_Projects_in_Teaching_and_Learning>. Acesso em: 05 jan. 2025.

TORRES, Antônio Fábio do Nascimento. **Probabilidade e Esperança Matemática em jogos de loteria: mobilizando conhecimentos e criatividade dos estudantes**. 2023. Dissertação

(Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2023. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=7125&id2=171057030>. Acesso em: 08 jan. 2025.

TRUJILLO FERRARI, A. **Metodologia da ciência**. 3. Ed. Rio de Janeiro: Kennedy, 1974.

VASCONCELOS, C. B.; ROCHA, M. A. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 3ª ed. Fortaleza: EdUECE, 2019.