Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências Ciências Exatas
Departamento de Matemática - IGCE - Rio Claro

Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional

Construindo Isometrias no Plano com o auxílio do aplicativo Geogebra.

Produto Educacional

Carlos Alberto Sato
Orientador: Jamil Viana Pereira

Agosto de 2024

Sato, Carlos Alberto
S253c Construindo isometrias no plano com o auxílio do aplicativo Geogebra [recurso eletrônico] / Carlos Alberto Sato ; orientador: Jamil Viana Pereira. - Rio Claro, 2024
7 p. : il.

Produto educacional que acompanha a dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Estadual Paulista (Unesp) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Jamil Viana Pereira

1. Geometria. 2. Geometria analítica. 3. Geometria euclidiana. 4. Geometria não euclidiana. 5. Isometrias. I. Pereira, Jamil Viana. II. Título

516

Ficha catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP – Ana Paula Santulo Custódio de Medeiros – CRB: 8/7336

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP,campus Rio Claro,SP . Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 29/08/2024.

Autores

Carlos Alberto Sato: Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP (2002), e Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP,campus Rio Claro,SP (2024). Atualmente é professor efetivo no Instituto Federal de Ecucação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, campus Campinas.

Jamil Viana Pereira: Professor Assistente Doutor da UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Possui Pós-doutorado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos - UFSCar (2011), Doutorado em Matemática pela UFSCar (2009), Mestrado em Matemática pela UFSCar (2005) e Bacharelado em Matemática, com ênfase em Matemática Pura, pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - IBILCE-UNESP (2002).

Sumário

Esse material apresentado como produto educacional é fruto da pesquisa de Dissertação de Mestrado intitulada **Isometrias em Geometrias Euclidianas e não Euclidianas sob o ponto de vista da Geometria Analítica**, desenvlvida no Programa de Mestrado Profissinal em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, campus Rio Claro, SP, sob orientação do Prof. Dr. Jamil Viana Pereira.

Na dissertação, investigamos as isometrias inicialmente no plano Euclidiano, posteriormente na esfera unitária, e por último no plano hiperbólico, sempre analisando as mesmas pelo ponto de vista da Geometria Analítica. Importante destacar que, em todo esse percurso, procuramos utilizar um tratamento vetorial à Geometria Analítica.

E é exatamente nesse ponto que buscamos desenvolver tal atividade. Uma que buscasse construir as isometrias no plano cartesiano utilizando esse ferramental que desenvolvemos na dissertação. Aliada a essa preocupação, utilizamos o aplicativo Geogebra, em sua versão *online*, para desenvolvermos a mesma. Partimos de uma primeira e básica transformação, a reflexão por uma reta. A atividade em si consistia de, dado um triângulo, em que as coordenadas dos vértices eram conhecidas, obtínhamos a imagem do mesmo pela reflexão. Dispondo então das ferramentas próprias do Geogebra mostravamos que eram congruentes o triângulo dado como sua respectiva imagem pela transformaç ao.

Em seguida, dadas duas reflexões por retas paralelas resultava em uma translação pela reta perpendicular comum às retas paralelas. Além disso, foi possí vel discutir se tais transformações eram, ou não comutativas. Mas o importante, novamente, era que quando um triângulo era submetido a tais transformações, o resultado ainda era um triângulo congruente ao dado.

Agora uma composição de duas reflexões por retas concorrentes mostrou que obtínhamos uma rotação ao redor de um ponto, exatamente o ponto de concorrência das retas. E por último a reflexão com deslizamento.

Cabe ressaltar que, pela própria estrutura curricular do ensino médio no estado de São Paulo, tal atividade destina-se a alunos do terceiro ano do ensino médio, etapa que contempla em seus conteúdos a Geometria Analítica.

1 Introdução

A Geometria Analítica no ensino médio geralmente é abordada no terceiro ano desse ciclo da educação básica. Por exemplo, no livro didático *Matemática: Contexot e aplicações*, de autoria de Luis Roberto Dante (Editora Ática, São Paulo, 2013) a Geometria Analítica é apresentada no volume 3 da coleção.

Nessa apresentação, é escolhida pelo autor uma forma muito comum em tais livros didáticos em que, a partir de um sistema de coordenadas cartesianas, e consequentemente, das coordenadas de um ponto, são deduzidas várias expressões algébricas que permitem, por exmeplo, calcular distância entre pontos, condição de alinhamento de três pontos, equação de um areta, entre outros aspectos da Geometria Analítica.

Nesse trabalho optou-se por uma outra aobrdagem. Uma que toma por base um tratamento vetorial para a Geometria Analítica. Em particular, est

vamos interessados em isometrias no plano, e, em como, a partir desse tratamento vetorial, obtermos transformações no plano que nos permitissem vizualizar tais isometrias.

Assim, consideramos inicialmente, a reflexão por uma reta. A partir da composição adequada de reflexões por retas, foi possí vel obtermos as translações, rotações e as reflexões com deslizamento.

Para desenvolver todas as atividades, utiliza-se plataforma *online* Geogebra (*geogebra.org/classic*).

Dividimos a atividade toda em cinco partes distintas. A primeira tem por objetivo ambientar o aluno com a plataforma *Geogebra*, por exemplo, constuindo vetores e realizando operações com o mesmo. Na segunda, abordou-se a reflexão por uma reta, utilizando uam expressão vetorial para a mesma. Em seguida, abordamos as translações, para posteriormente obtermos as rotações ao redor de um ponto. Finalmente, realizamos a atividade relativa às reflexões com deslizamento.

Cabe aqui dizer que, a plataforma *Geogebra*, contêm em suas bibliotecas todas essas operações. Entretanto nosso objetivo era analisar, do ponto de vista vetorial tais operações.

2 Transformações no plano

A primeira aula foi utilizada para ambientar os alunos com a plataforma Geogebra. Assim, desenvolvemos a sintaxe própria da plataforma para,

a) definirmos um vetor a partir de dois pontos dados, e calcularmos sua norma;

b) realizarmos operações com vetores, como soma, diferença, produto por escalar e produto escalar de dois vetores, além de determinarmos o ângulo entre vetores;

c) escrevermos equações de reta, e consequentemente, obtermos tanto o vetor diretor da reta, bem como um vetor unitário normal à reta dada;

d) utilizarmos ferramentas próprias da plataforma Geogebra para medirmos segmentos de retas e ângulos;

e) construírmos figuras geométricas no plano, em particular, triângulos;

f) e, finalmente, para definirmos e operarmos com transformações no plano.

Ainda observamos que, em todas as atividades subsequentes, sempre tomávamos como ponto de partida um triângulo retângulo adequadamente construído, para então aplicarmos as respectivas transformações, e posteriormente, compararmos as figuras anters de após as transformações.

3 Reflexão por uma reta

Diante de todo o ferramental discutido na aula anterior, definimos, nessa segunda aula, a reflexão por uma reta. Iniciamos, na realidade, com a construção geométrica da reflexão por uma reta. Ou seja, dada uma reta qualquer, r, e um ponto, A fora dessa reta,

i) traçamos a reta, s, perpendicular à reta dada passando pelo ponto A,

ii) em seguida determinamos o ponto, Q de intersecção das retas r e s,

iii) finalmente, determinamos o ponto A' da reta s que está a mesma distância do ponto Q que o ponto A está de Q.

Essa construção da refelxão do ponto A pela reta r remonta à construção com régua e compasso, realizada, nesse caos, na plataforma *Geogebra*. Aqui fixamos os pontos $A(3, 1)$, $B(7, 1)$ e $C = (7, 4)$, os quais determinavam um triângulo retângulo, e a reta r tinha pro equação, $y = m_r \cdot x$, onde $m_r = \tan 60°$, como podemos ver na Figura 1

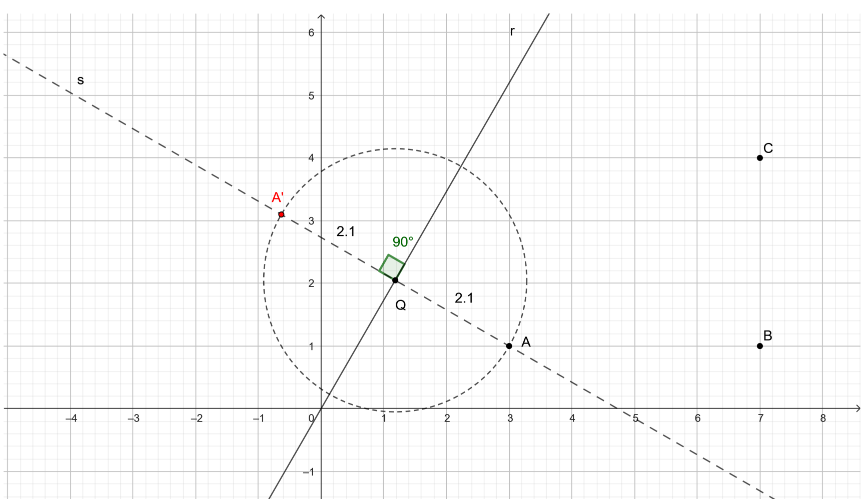

Figura 1: Determinação geométrica da reflexão de um ponto por uma reta.

Mas tal procedimento, apesar de tornar possível visualizar todas as construções concretamente, era um tanto quanto demorado e tortuoso. Assim, fizemos uso das definições e propriedades estudadas no corpo do trabalho para determinar a reflexão por uma reta por meio da expressão:

$$\Omega_r X = X - 2\langle X - P, N\rangle N, \tag{1}$$

onde X é o ponto em questão, P é um ponto da reta, que nesse caso, adotamos como sendo a origem, e N um vetor unitário normal á reta. Aqui consideramos os pontos A, B e C, e, como afirmamos anteriormente, $P = (0,0)$. Para calcularmos o produto escalar $\langle X, N\rangle$, bem como as coordenadas do ponto $\Omega_r X$ utilizamos as ferramentas do próprio Geogebra. Entretanto, caso se queira dar enfâse ao produto escalar, devemos lembrar que, dados dois vetores no plano, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, o produto escalar de u e v será dado por $\langle u, v\rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$. O resultado de tal operação, pode ser visto na Figura 2.

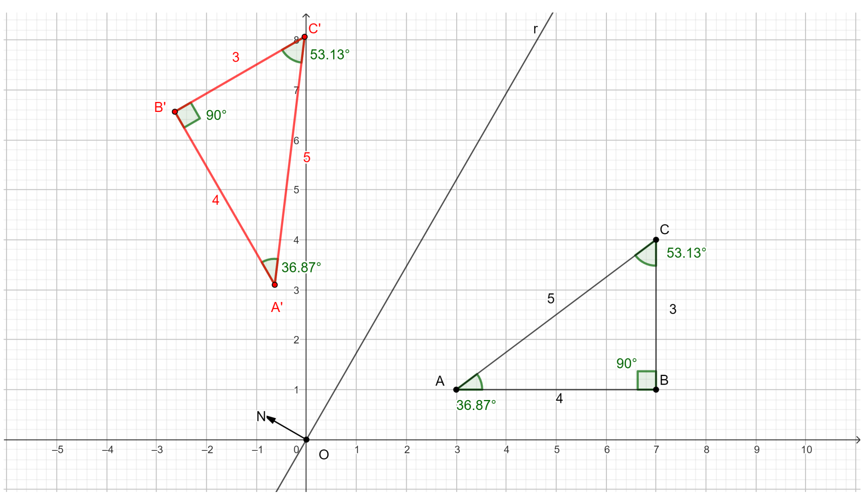

Figura 2: Reflexão aplicada ao triângulo ABC

Comparamos, então, os triângulos ABC e $A'B'C'$ a partir de ferramentas do Geogebra, determinando medidas de lados e âgulos correspondentes para determinarmos que os triângulos em questão são congruentes. Ou seja, essa transformação preserva tanto distâncias como medidas de ângulos.

4 Translação

Na terceira aula da sequência, abordamos a translação. Tomamos os pontos $A(-1,0)$, $B(-5,0)$ e $C(-1,-3)$, também determinando um triângulo retângulo. Também consideramos a reta t, de equação $y = x$. Mas agora, tomamos as retas s e r, de equações $y = -x$ e $y = -x + 2$, respectivamente, de modo que $s \perp t$ e $r \perp t$.

Aplicamos primeiro a reflexão pela reta s, e em seguinda, a reflexão pela reta r, como mostra a Figura 3.

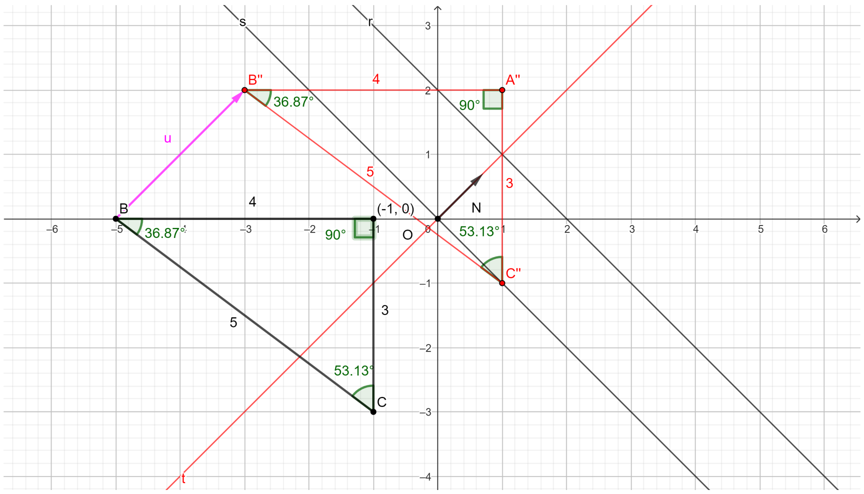

Figura 3: Translação, $\Omega_r\Omega_s$ ao longo da reta t.

As retas s e r tem a reta t como perpendicular comum a reta t, e, portanto, são paralelas. Logo o vetor N é um vetor unitário normal, comum a ambas as retas, r e s. Como observamos da Figura 3, o vetor u, o qual tem origem no ponto B e extremidade no ponto B', é paralelo ao vetor N. Tanto para o ponto A e sua imagem A', como para o ponto C e sua imagem C', o mesmo acontece. Dessa maneira o triângulo $A'B'C'$ é congruente ao triângulo ABC, e, fica determinado pelo deslocamento do triângulo original por esse vetor u.

Mas aqui surgiu uma outra questão levantada pelos própriios alunos. E se considerássemos a transformação composta $\Omega_s\Omega_r$? OU seja, se aplicássemos primeiro a reflexão pela reta r, e posteriormente pela reta s? O resultado seria diferente?

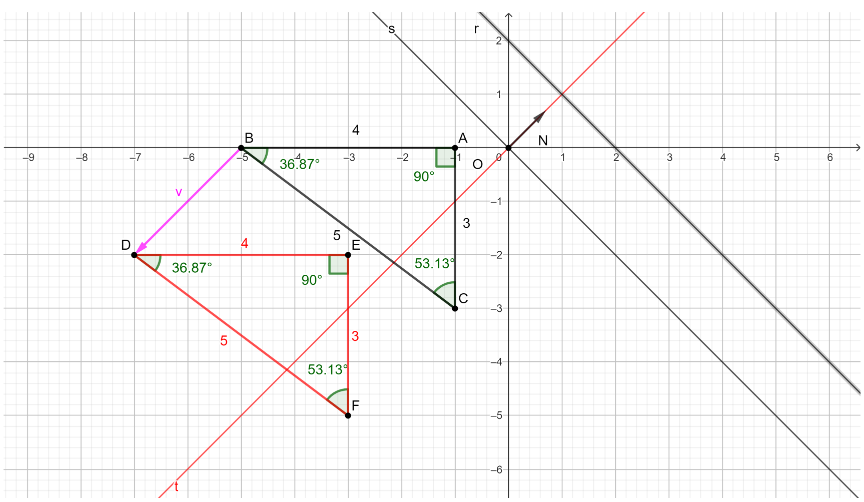

Figura 4: Translação, $\Omega_s\Omega_r$ ao longo da reta t.

Da figura 4 vemos que o resultado é diferente, mas apenas o sentido de deslocamento do triângulo DEF, o qual é imagem, pela translação $\Omega_s\Omega_r$ do triângulo ABC. Mas, ainda assim tais triângulos são congruentes.

5 Rotação

Para tratarmos a rotação, consideramos a retas r e s, de equações $y = \tan(30°)$ e $y = \tan(75°)$, respectivamente. Além disso, tomamos os pontos $A(3, 0)$, $B(7, 0)$ e $C(7, -3)$, os quais determinavam, mais uma vez, um triângulo retângulo.

Consideramos inicialmente a reflexão pela reta s, e em seguida aplicamos a reflexão pela reta r, para cada um dos pontos A, B e C, como mostrado na figura 5

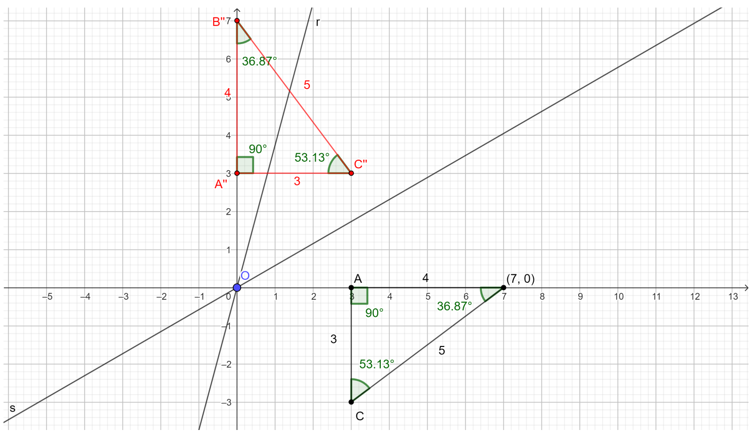

Figura 5: Rotação ao redor da origem no sentido anti-horário.

Mais uma vez, o triângulo obtido, $A''B''C''$ é congruente ao triângulo ABC, mas apresenta-se rotacionado, no sentido anti-horário de um ângulo de medida dada por $2 \cdot (75° - 30°) = 90°$. Como no caso da translação, as reflexões foram aplicadas em ordem inversa, ou seja, primeiro a refelxão pela reta r, para em seguida a reflexão pela reta s. Obtivemos, agora, um triângulo, DEF, congruente ao triângulo dado, ABC, mas agora rotacionado de 90° no sentido horário, como mostrado na figura 6.

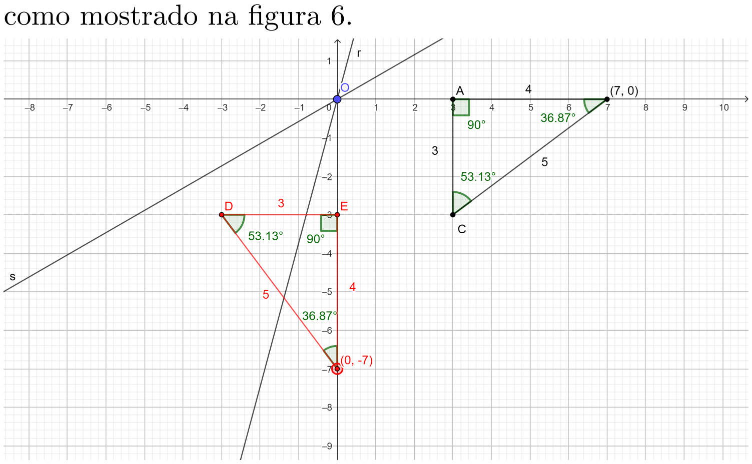

Figura 6: Rotação ao redor da origem no sentido horário.

6 Reflexão com deslizamento

Finalmente a última transformação, a reflexão com deslizamento. Para essa transformação, consideramos mais uma vez as retas t, r e s, cujas equações são dadas por $y = x$, $y = -x + 2$ e $y = -x$, respectivamente. Além disso, consideramos o triângulo retângulo ABC, de vértices $A(-4, -2)$, $B(-4, 1)$ e $C(-8, -2)$.

Para essa transformação, devemos primeiro considerar a reflexão pela reta t, e, em seguida aplicarmos a translação dada pela composição $\Omega_s\Omega_r$. Como nos casos anteriores, o triângulo, $A'''B'''C'''$, obtido após essas operações, é congruente ao triângulo ABC, como mostrado na figura 7. Dessa mesma figura, além de observarmos a congruência dos triângulos, observamos que $A'''B'''C'''$ encontra-se refletido pela reta t e deslocado pelo vetor u, paralelo ao vetor unitário normal às retas r e s.

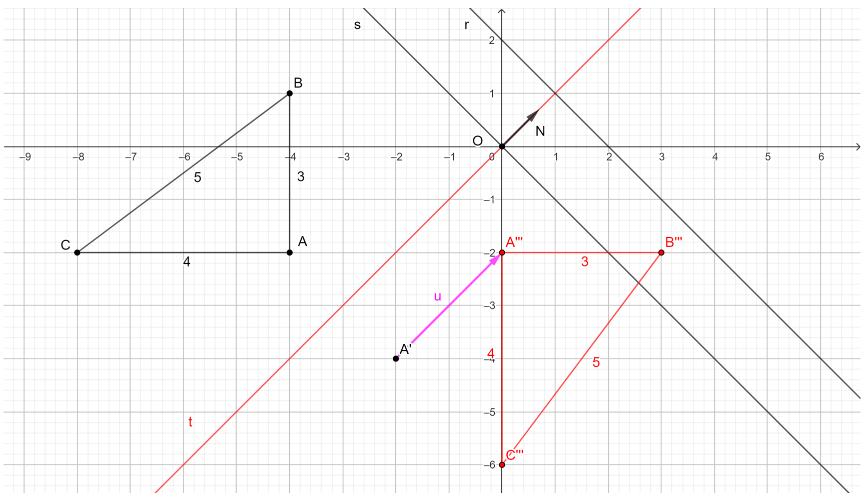

Figura 7: Reflexão com deslizamento.

7 Comentários

Em todas essas atividades, partimos de um triângulo base, e efetuamos as transformações indicadas, obtendo ao final, um triângulo congruente ao dado. Nada impede, obviamente de se trabalhar com outras figuras planas, ou mesmo um conjunto qualquer de pontos no plano. O importante aqui é verificar que todas essas transformações, a saber, refelxão por uma reta, translação ao longo de uma reta, rotação ao redor de um ponto e refelxão com deslizamento, são isometrias. Ou seja, distâncias e ângulos serão sempre preservados.

Também deve ser pontuado o caráter não comutativo desssa operações como mostrado nas atividades.

Referências

1 Banchoff, T., Wermer, J., *Linear Algebra Through Geometry*, 2nd edition, Springer-Verlag New York, 1992.

2 Boldrini, J., Costa, S., Figueiredo, V., Wetzler, H., *Álgebra Linear*, 3ª edição, Harbra, São Paulo, 1980.

3 Boulos P., Camargo I., *Geometria Analítica, um tratamento vetorial*, 2ª edição, McGraw Hill, São Paulo, 1987.

4 Gomez, J.J.D., Frensel, K.R., Crissaff, L.S., *Geometria Analítica - Coleção PROFMAT*, 2ª edição, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

5 Lima, E.L., *Isometrias*, SBM, Rio de Janeiro, 1996.

6 Ryan, P.J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometry, An Analytic Approach*, Cambridge University Press, Meulbourne, 1986.

7 Sato, C.A., *Isometrias em Geometrias Euclidianas e n ao Euclidianas sob o ponto de vista da Geometria Analítica*, Orientador: Prof. Dr. Jamil Viana Pereira, 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(UNESP), Rio Claro, SP, 2024. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstreams/b00e74e8-4abe-4c9b-8d2b-a735156ca1d6/download. Acesso em 26 de fevereiro de 2025.