

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUIZ CARLOS FERREIRA DA SILVA JUNIOR

INVERSÃO NO ELIPSOIDE

SANTO ANDRÉ/SP

2025

LUIZ CARLOS FERREIRA DA SILVA JUNIOR

INVERSÃO NO ELIPSOIDE

Dissertação de mestrado apresentada na
Universidade Federal do ABC (UFABC) ao Programa
de Mestrado Profissional em Matemática em rede
Nacional (PROFMAT)

Orientador: Dr. Marcio Fabiano da Silva

Santo André/SP

2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Ferreira da silva Junior, Luiz Carlos
Inversão no Elipsoide / Luiz Carlos Ferreira da silva Junior.
— 2025.

43 fls. : il.

Orientação de: Marcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, Santo André, 2025.

1. Geometria Analítica. 2. Inversão esférica. I. da Silva,
Marcio Fabiano. II. Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT, 2025. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO


Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 - Fone: (11) 4996-0017

**Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado e Folha
de Assinaturas**


No dia 25 de Julho de 2025 às 16:00, no local: <https://conferenciaweb.rnp.br/sala/marcio-23>, realizou-se a Defesa da Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado "INVERSÃO NA ELIPSOIDE" de autoria do candidato, LUIZ CARLOS FERREIRA DA SILVA JUNIOR, RA nº 22202110359, discente do Programa de Pós-Graduação em MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da UFABC, sob orientação do Profº MARCIO FABIANO DA SILVA. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado Aprovado pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

Documento assinado digitalmente
 **MARCIO FABIANO DA SILVA**
Data: 29/07/2025 00:26:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Dr. MARCIO FABIANO DA SILVA, UFABC

Presidente - Interno ao Programa

Documento assinado digitalmente
 **MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA**
Data: 29/07/2025 19:57:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA, UFABC

Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

Documento assinado digitalmente
 **ALEXANDRE LYMBEROPOULOS**
Data: 29/07/2025 17:37:12-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS, USP

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. EDUARDO GUERON, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP

CEP 09210-580 • Fone: (11) 4996-0017

Dr. ARMANDO TRALDI JUNIOR, IFSP

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP

CEP 09210-580 - Fone: (11) 4996-0017

Folha de Ressalvas

(não incluir esta Folha de Ressalvas na versão final da Dissertação)

Ressalvas e sugestões da Banca examinadora:

A banca examinadora apresentou sugestões e correções textuais, as quais serão devidamente incorporadas à versão final da dissertação.

Os membros que participaram de modo remoto foram:

Dr. Maurício Firmino Silva Lima, UFABC
Dr. Alexandre Lymberopoulos, USP

Por sugestão da banca examinadora, o **novo título** passa a ser (em letra de forma e legível):

Indique o **idioma** da dissertação/tese: Português Inglês Outro: _____

a) Novo Título em **Português** (se a dissertação/tese é em português):

Inversão no Elipsoide

b) Novo Título em **Inglês** (preenchimento obrigatório para dissertação/tese em qualquer idioma):

Inversion in an ellipsoid

c) Novo Título em **outro idioma**, conforme o idioma indicado acima, se houver:

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”

Dedico este trabalho a Ana Paula e Kauê

AGRADECIMENTOS

A concretização desta dissertação é o resultado de um percurso de aprendizado, dedicação e, acima de tudo, do apoio inestimável de muitas pessoas e instituições. A elas, expresse minha mais profunda gratidão.

Em primeiro lugar, sou imensamente grato ao meu orientador, Professor Dr. Marcio Fabiano da Silva, por sua orientação precisa, sua paciência inabalável e por compartilhar seu vasto conhecimento. Suas valiosas sugestões, o encorajamento constante e a confiança depositada em meu trabalho foram essenciais para superar os desafios e alcançar os objetivos propostos. Agradeço, em especial, a liberdade para explorar ideias e a clareza com que me guiou em cada etapa deste projeto.

À Banca Examinadora, agradeço imensamente por aceitar o convite para avaliar este trabalho. Suas contribuições e questionamentos, sem dúvida, enriquecerão esta dissertação e meu desenvolvimento acadêmico.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), e a todas as instituições envolvidas, agradeço pela oportunidade de aprofundar meus conhecimentos e pelo impacto significativo em minha formação profissional e pessoal. O programa tem sido um divisor de águas, abrindo novos horizontes para a minha prática docente.

Aos professores do PROFMAT, por suas aulas instigantes e por todo o conhecimento transmitido. Cada disciplina contribuiu, direta ou indiretamente, para a construção deste trabalho.

Aos meus colegas de mestrado, pela parceria, pelas discussões produtivas e pela camaradagem que tornou a jornada mais leve e prazerosa. Compartilhar essa experiência com vocês foi um privilégio.

À minha família, em especial a minha esposa e filho, por serem o meu porto seguro. O amor, o apoio incondicional, a compreensão nos momentos de ausência e a força que sempre me deram foram a base para que eu pudesse me dedicar a este projeto.

Aos meus amigos, que sempre estiveram presentes, oferecendo apoio, distração e momentos de leveza quando mais precisei.

Por fim, agradeço a Deus, pela força, sabedoria e por guiar meus passos em cada desafio e conquista.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, meu muito obrigado.

“All we have to decide is what to do with the time that is given us.”

(J.R.R. Tolkien, *The Fellowship of the Ring*)

RESUMO

Esta dissertação investiga a generalização do conceito de inversão geométrica para o elipsoide, expandindo a teoria da inversão esférica clássica. O trabalho inicia com uma revisão da inversão em relação a uma esfera, delineando suas definições, propriedades fundamentais e formulações geométricas e algébricas. Em seguida, a pesquisa aprofunda-se na inversão no elipsoide, baseando-se na abordagem proposta no artigo "A generalization of the spherical inversion" de Ramírez Rubiano [9], que estende a noção de inversão utilizando princípios de reciprocidade polar. Naquele trabalho, são apresentadas as definições formais dessa transformação, suas propriedades específicas, como a preservação de ângulos (conformidade) e a transformação de superfícies, e são desenvolvidas as demonstrações geométricas e algébricas que validam esses resultados. Nesta dissertação explora-se também a possibilidade didática de introduzir esses conceitos no ensino médio por meio de atividades que utilizam a inversão plana e esférica, com o intuito de desenvolver a visualização espacial, bem como o papel das transformações sob o ponto de vista geométrico e algébrico. A discussão da inversão no elipsoide proporciona aos alunos o entendimento do processo de generalização de conceitos matemáticos. Conclui-se que a inversão no elipsoide tem um importante papel no estudo das transformações geométricas, além de um potencial pedagógico significativo para enriquecer o ensino de geometria no espaço.

Palavras-chave: Inversão Geométrica. Elipsoide. Geometria. Transformações

ABSTRACT

This dissertation investigates the generalization of the concept of geometric inversion to the ellipsoid, expanding the theory of classical spherical inversion. The work begins with a review of inversion with respect to a sphere, outlining its definitions, fundamental properties, and both geometric and algebraic formulations.

Subsequently, the research delves into inversion in the ellipsoid, based on the approach proposed in the article “A Generalization of the Spherical Inversion” by Ramirez and Rubiano, which extends the notion of inversion using principles of polar reciprocity. That work presents the formal definitions of this transformation, its specific properties—such as angle preservation (conformality) and surface transformation—and develops geometric and algebraic proofs that validate these results.

This dissertation also explores the didactic potential of introducing these concepts in high school through activities involving planar and spherical inversion, aiming to enhance spatial visualization as well as the understanding of transformations from both geometric and algebraic perspectives. The discussion of inversion in the ellipsoid offers students insight into the process of generalizing mathematical concepts.

It is concluded that inversion in the ellipsoid plays an important role in the study of geometric transformations and also holds significant pedagogical potential for enriching the teaching of geometry in space.

Keywords: Geometric Inversion. Ellipsoid. Geometry. Transformations.

CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.1.1	Objetivo Geral	2
1.1.2	Objetivos Específicos	2
1.2	Justificativa	3
1.3	Organização da Dissertação	3
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: A INVERSÃO ESFÉRICA	5
2.1	Definição de Inversão Esférica	5
2.2	Propriedades Fundamentais da Inversão Esférica	6
2.2.1	Transformação de Pontos	6
2.2.2	Transformação de Retas e Planos	6
2.2.3	Preservação de Ângulos (Propriedade Conforme)	7
2.3	Formulações Algébricas da Inversão Esférica	7
3	A INVERSÃO NO ELIPSOIDE: GENERALIZANDO A INVERSÃO ESFÉRICA	9
3.1	Conceitos Preliminares sobre Elipsoides	9
3.2	Análise e Adaptação do Artigo de Referência	10
3.2.1	Definição Formal da Inversão no Elipsoide	11
3.2.2	Propriedades da Inversão no Elipsoide	11
3.3	Propriedades geométricas da Inversão no Elipsoide	12
3.4	Demonstrações Algébricas da Inversão no Elipsoide	14
3.4.1	Transformação de Superfícies de Segunda Ordem	14
4	APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO	17
4.1	Conexões com o Currículo do Ensino Médio	17
4.2	Atividades Didáticas Propostas	18
4.2.1	Atividade 1: Inversão no Plano - Construções e Propriedades Fundamentais	18
4.2.2	Atividade 2: Inversão Esférica - Visualização em 3D	19
4.2.3	Atividade 3: A Inversão no Elipsoide - Uma Abordagem Conceitual	21
4.3	Potencial Pedagógico da Inversão no Ensino Médio	22
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	23

5.1 Conclusão	23
5.2 Contribuições da Dissertação	24
5.3 Limitações	24
5.4 Sugestões para Trabalhos Futuros	25
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	27
BIBLIOGRAFIA	27

INTRODUÇÃO

A geometria é uma das mais antigas e fundamentais áreas da matemática, oferecendo ferramentas para compreender as formas e as relações espaciais do universo. Desde os trabalhos clássicos de Euclides, a geometria tem evoluído, incorporando novas perspectivas e métodos [6]. No estudo das transformações geométricas, a inversão geométrica se destaca como um conceito de notável beleza e utilidade [4]. Em sua formulação clássica, a inversão é definida em relação a um círculo no plano ou a uma esfera no espaço euclidiano, sendo a inversão esférica particularmente relevante para a geometria tridimensional [7]. Esta transformação possui propriedades fascinantes, como a de mapear esferas e planos para esferas e planos. Essas propriedades conferem à inversão esférica um vasto campo de aplicações, desde problemas de ótica e cartografia até desafios clássicos da geometria euclidiana e não euclidiana.

No entanto, a curiosidade matemática e a busca por generalizações são motores do avanço do conhecimento. Assim, surge a questão central deste trabalho: é possível estender o conceito de inversão para outras superfícies além da esfera, como o elipsoide? O elipsoide, uma superfície quádrlica que descreve a forma de muitos objetos naturais e artificiais (como planetas e corpos celestes), apresenta uma assimetria inerente que torna a generalização da inversão um desafio matematicamente estimulante. A investigação de tal generalização não só expande o repertório teórico da geometria, mas também oferece um terreno fértil para o aprimoramento do raciocínio espacial e da compreensão de transformações não-lineares. Este trabalho baseia-se na abordagem proposta por Ramirez e Rubiano [?] para a inversão no elipsoide, buscando aprofundar suas definições, explorar suas propriedades e desenvolver as demonstrações geométricas e algébricas que fundamentam essa transformação.

Além da pesquisa teórica, esta dissertação tem um foco particular na aplicabilidade didática dos conceitos explorados. A inversão geométrica, mesmo em suas formas mais

básicas (plana e esférica), já se mostra uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do raciocínio espacial, da visualização e da compreensão das transformações matemáticas entre os estudantes [8]. Propor a exploração, ainda que conceitual ou através de exemplos simplificados, da ideia de inversão em superfícies como o elipsoide no contexto do ensino médio, representa uma oportunidade de transcender a matemática meramente algorítmica. Ao conectar conceitos avançados de geometria com o currículo da educação básica, buscamos inspirar professores e alunos, demonstrando a beleza, a generalidade e a dinâmica da matemática e como ela pode ser utilizada para descrever e transformar nosso mundo tridimensional.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 *Objetivo Geral*

Investigar a teoria da inversão no elipsoide e suas propriedades, explorando suas demonstrações geométricas e algébricas, e propor caminhos para sua aplicação e contextualização no ensino médio.

1.1.2 *Objetivos Específicos*

1. Apresentar as definições e propriedades fundamentais da inversão em relação a uma esfera, servindo como base para a generalização.
2. Analisar e adaptar a definição de inversão no elipsoide conforme proposto no artigo de Ramirez e Rubiano [?], detalhando suas características.
3. Desenvolver e apresentar demonstrações geométricas e algébricas claras das propriedades da inversão no elipsoide.
4. Propor e discutir atividades didáticas e aplicações da inversão geométrica (com foco na inversão esférica e em aspectos conceituais da inversão no elipsoide) para o ensino médio, conectando com conceitos já abordados no currículo.

1.2 JUSTIFICATIVA

A relevância desta dissertação é significativa para o campo da geometria e para o ensino de matemática. Ela aprofunda um tópico que expande a compreensão das transformações geométricas e suas aplicações. Para o profissional da educação matemática, compreender a inversão no elipsoide representa uma oportunidade de expandir sua visão sobre a geometria e suas ferramentas analíticas.

Adicionalmente, a pesquisa visa aprimorar a prática pedagógica. Ao explorar a inversão e suas generalizações, o professor é incentivado a conceber como conceitos matemáticos complexos podem ser simplificados, visualizados e contextualizados para alunos do ensino médio. A capacidade de abordar problemas e visualizá-los sob diferentes perspectivas é crucial na resolução de problemas matemáticos, e a inversão é uma ferramenta potente nesse aspecto. A dissertação busca, assim, fornecer recursos e ideias que podem ser incorporados em sala de aula, estimulando o desenvolvimento do raciocínio espacial, a criatividade e a capacidade de abstração dos estudantes.

Finalmente, este trabalho contribui para a literatura educacional em matemática ao fornecer um estudo detalhado sobre um tema específico da geometria que possui potencial para ser explorado didaticamente, preenchendo uma lacuna na abordagem de transformações mais avançadas no contexto da educação básica.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos, incluindo esta introdução. No Capítulo 2, será apresentada a fundamentação teórica da inversão esférica, detalhando suas definições, propriedades e as respectivas demonstrações geométricas e algébricas. O Capítulo 3 será dedicado à inversão no elipsoide, onde o artigo de referência será analisado e adaptado, e as definições, propriedades e demonstrações (geométricas e algébricas) dessa generalização serão desenvolvidas. O Capítulo 4 explorará as aplicações da inversão no contexto do ensino médio, propondo atividades didáticas e discutindo o potencial pedagógico desse tema. Finalmente, o Capítulo 5 apresentará as considerações finais, resumindo as principais conclusões do trabalho, suas contribuições, limitações e sugestões para futuras pesquisas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: A INVERSÃO ESFÉRICA

Este capítulo estabelece os conceitos fundamentais da inversão geométrica em relação a uma esfera. A inversão esférica não só é um tópico de grande interesse por si só, mas também serve como a base conceitual e analítica para a generalização que será explorada no próximo capítulo. Aqui, revisaremos suas definições, suas propriedades essenciais e apresentaremos as formulações geométricas e algébricas que a descrevem.

2.1 DEFINIÇÃO DE INVERSÃO ESFÉRICA

A inversão esférica é uma transformação geométrica que reflete pontos do espaço (exceto um ponto central) com base em uma esfera de referência.

Definição 2.1. Sejam O um ponto fixo no espaço, denominado centro de inversão, e R um número real positivo, denominado raio de inversão. A inversão esférica \mathcal{I} em relação à esfera Σ de centro O e raio R é a transformação que associa a cada ponto $P \neq O$ um ponto P' tal que:

1. P' está na semirreta \overrightarrow{OP} .
2. A distância de O a P' é inversamente proporcional à distância de O a P , ou seja, $|OP| \cdot |OP'| = R^2$.

O ponto P' é chamado de simétrico (ou inverso) de P pela inversão esférica. [4].

Observação 2.1.1. *Uma consequência imediata da Definição 2.1 é que se P estiver no interior da esfera de inversão ($|OP| < R$), então P' estará no exterior ($|OP'| > R$). Analogamente, se P estiver no exterior, P' estará no interior. Se P estiver sobre a superfície da esfera de inversão ($|OP| = R$), então P' coincidirá com P .*

Observação 2.1.2. *Outra consequência é que a inversão esférica é uma involução, isto é, $\mathcal{I}(\mathcal{I}(P)) = P$, para todo ponto $P \neq O$. Segue disto que a inversão \mathcal{I} é uma aplicação sobrejetora.*

2.2 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DA INVERSÃO ESFÉRICA

A inversão esférica, embora não seja uma isometria (pois não preserva distâncias), possui propriedades geométricas notáveis que a tornam uma ferramenta poderosa.

2.2.1 Transformação de Pontos

- O centro de inversão O não tem imagem definida.
- Pontos na esfera de inversão são fixos.
- Um ponto P e sua imagem P' estão alinhados com o centro O .

2.2.2 Transformação de Retas e Planos

As transformações de retas e planos são particularmente interessantes, como vemos nos dois resultados a seguir.

Teorema 2.2. *[Inversão esférica de uma reta] A inversão esférica de uma reta que não passa pelo centro de inversão é um círculo que passa pelo centro de inversão. Reciprocamente, a inversão de um círculo que passa pelo centro de inversão é uma reta que não passa pelo centro.*

Teorema 2.3 (Inversão esférica de um plano). *A inversão esférica de um plano que não passa pelo centro de inversão é uma esfera que passa pelo centro de inversão. Reciprocamente, a inversão esférica de uma esfera que passa pelo centro de inversão (e não pela origem) é um plano que não passa pelo centro.*

Observação 2.2.1. *São invariantes pela inversão esférica retas e planos que passam pelo centro de inversão.*

2.2.3 Preservação de Ângulos (Propriedade Conforme)

A inversão esférica é uma transformação conforme, isto é, são iguais as medidas dos ângulos formados por dois objetos (duas retas, dois planos, uma reta e um plano) e pelas suas imagens pela reflexão esférica. Lembrando que a medida do ângulo entre duas curvas que se cruzam num ponto T é a medida do ângulo entre as tangentes às curvas em T , temos a seguinte formulação mais geral para a conformidade da inversão.

Teorema 2.4. *A Inversão esférica preserva o ângulo entre curvas que se interceptam.*

2.3 FORMULAÇÕES ALGÉBRICAS DA INVERSÃO ESFÉRICA

Uma maneira mais prática de provar os resultados anteriores é obter uma formulação algébrica para a inversão esférica.

Proposição 2.5. *Dado um sistema de coordenadas cartesianas para o espaço \mathbb{R}^3 , com origem $(0, 0, 0)$, sejam R um número real positivo qualquer e I a inversão em relação à esfera de centro $O = (0, 0, 0)$ e raio R . Um ponto $P = (x, y, z) \neq O$ é mapeado para um ponto $P' = (x', y', z')$ sob a inversão \mathcal{I} de acordo com as seguintes equações*

$$\begin{aligned}x' &= \frac{R^2 x}{d^2} \\y' &= \frac{R^2 y}{d^2} \\z' &= \frac{R^2 z}{d^2},\end{aligned}$$

onde $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ é o quadrado da distância de P ao centro de inversão O .

Demonstração. De acordo com a Definição 2.1, tem-se que P' está na semirreta \overrightarrow{OP} e $|OP| \cdot |OP'| = R^2$. Na forma paramétrica, a semirreta \overrightarrow{OP} é o conjunto dos pontos $\{(X, Y, Z)\}$ tais que $(X, Y, Z) = t \cdot (x, y, z)$, com $t > 0$. Daí,

$$(x', y', z') = (tx, ty, tz),$$

para algum $t > 0$. Deste modo,

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = t^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$$

Da condição $|OP| \cdot |OP'| = R^2$, obtemos que

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot t \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R^2,$$

de modo que

$$t = \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\text{Portanto, } P' = (x', y', z') = \left(\frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

Sendo d a distância de P ao ponto O , temos que $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

□

Observação 2.3.1. Em geral, sendo $O = (x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ o centro da inversão, a expressão algébrica para a inversão \mathcal{I} de um ponto $P \neq O$ de coordenadas $P = (x, y, z)$ em relação à esfera de centro O e raio $R > 0$ pode ser obtida com as seguintes transformações:

- translação da origem $(0, 0, 0)$ para $O = (x_0, y_0, z_0)$. Neste novo sistema de coordenadas, o ponto $P = (x, y, z)$ tem coordenadas $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$;
- inversão aplicada ao ponto $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, obtendo

$$\frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

- translação de volta ao sistema original, obtendo

$$\frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) + (x_0, y_0, z_0)$$

Com isto, fica provada a seguinte

Proposição 2.6. Dado um sistema de coordenadas cartesianas para o espaço \mathbb{R}^3 , com origem $(0, 0, 0)$, sejam R um número real positivo qualquer e \mathcal{I} a inversão em relação à esfera de centro $O = (x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ e raio R . A imagem de um ponto $P = (x, y, z) \neq O$ pela inversão \mathcal{I} é o ponto $P' = (x', y', z')$ dado por

$$P' = (x', y', z') = (x_0, y_0, z_0) + \frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Este capítulo forneceu uma base para a compreensão da inversão esférica, que será expandida e generalizada no próximo capítulo para o estudo da inversão no elipsoide.

A INVERSÃO NO ELIPSOIDE: GENERALIZANDO A INVERSÃO ESFÉRICA

Este capítulo explora a extensão do conceito de inversão geométrica para o elipsoide, uma superfície quádrlica com propriedades distintas da esfera. Nosso objetivo é apresentar e analisar a definição de inversão no elipsoide, conforme proposto no artigo de Ramirez e Rubiano [9], e desenvolver as demonstrações geométricas e algébricas de suas propriedades. Esta generalização não só aprofunda nossa compreensão das transformações geométricas, mas também abre portas para novas perspectivas em aplicações e visualização.

3.1 CONCEITOS PRELIMINARES SOBRE ELIPSOIDES

Para compreender a inversão no elipsoide, é fundamental revisar sua definição e propriedades básicas. Um elipsoide é uma superfície quádrlica descrita por uma equação quadrática no espaço tridimensional. No contexto deste trabalho, focaremos em elipsoides centradas na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

A equação canônica de um elipsoide centrado na origem $(0, 0, 0)$ e com eixos alinhados com os eixos coordenados é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde a , b , e c são as medidas dos semieixos ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente. O elipsoide pode ser pensado como uma generalização de uma esfera de raio R , tomando-se $a = b = c = R$. O fato de existir um "raio" para cada eixo coordenado introduz uma anisotropia crucial para a definição de inversão.

Além dos semieixos, é importante considerar a noção de polo e plano polar em relação a uma quádrlica. Dado um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ (o polo) e um elipsoide \mathcal{E} de equação $F(x, y, z) = 0$, o plano polar de P em relação a \mathcal{E} é o plano cuja equação é obtida pela forma bilinearizada (processo de linearização local de uma estrutura geométrica não-linear, onde uma forma bilinear é usada para aproximar o comportamento da estrutura nas proximidades de um ponto) da equação do elipsoide. Para o elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, a equação do plano polar de $P = (x_0, y_0, z_0)$ é:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Este conceito é fundamental para muitas generalizações da inversão, incluindo a que será abordada, pois estabelece uma correspondência entre pontos e planos no espaço em relação à superfície [2].

3.2 ANÁLISE E ADAPTAÇÃO DO ARTIGO DE REFERÊNCIA

O artigo "A generalization of the spherical inversion" de Ramirez e Rubiano propõe uma metodologia inovadora para estender o conceito de inversão geométrica da esfera para o elipsoide. Diferentemente da abordagem clássica, que se baseia na simetria radial da esfera e em uma constante de inversão, a generalização para o elipsoide exige uma reformulação que leve em conta a assimetria intrínseca dessa superfície. Os autores introduzem a ideia de uma inversão elipsoidal que se alinha com o conceito de reciprocidade polar (transformação geométrica que estabelece uma relação recíproca única entre pontos e linhas (ou, em 3D, pontos e planos) em relação a uma figura de referência, como uma cônica como círculo, elipse ou uma esfera) em relação ao elipsoide. Esta abordagem generaliza a inversão esférica tradicional (que pode ser vista como um caso especial de reciprocidade polar onde o polo é a origem e o plano polar é o plano no infinito que definimos como o próprio plano, estendendo-se infinitamente).

A essência da proposta é que, para cada ponto P no espaço, seu ponto inverso P' em relação ao elipsoide \mathcal{E} é a intersecção da linha que conecta o centro do elipsoide a P com o plano polar de P em relação a \mathcal{E} , após uma escala ou ajuste que garante a característica de "inversão". Mais especificamente, a transformação é definida de tal forma que se P está no exterior do elipsoide, P' estará no interior, e vice-versa, com os pontos na superfície do elipsoide permanecendo fixos.

3.2.1 Definição Formal da Inversão no Elipsoide

Seja \mathcal{E} o elipsoide centrado na origem de \mathbb{R}^3 com semieixos de medidas a, b, c , cuja equação é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. A seguir, será definida a inversão em relação ao elipsoide.

Definição 3.1. A inversão $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ em relação ao elipsoide \mathcal{E} de um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ é um ponto $P' = (x', y', z')$ tal que

$$x' = \frac{x}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad (3.1)$$

$$y' = \frac{y}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad (3.2)$$

$$z' = \frac{z}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad (3.3)$$

A origem $(0, 0, 0)$ é chamada de centro da inversão $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$.

A lógica por trás desta definição reside em generalizar o fator $R^2/(x^2 + y^2 + z^2)$ da inversão esférica. Para o elipsoide, o "raio" efetivo de inversão varia com a direção. O termo no denominador, $Q(P) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, pode ser interpretado como uma "distância quadrática normalizada" do ponto P ao elipsoide. No caso de P estar na superfície do elipsoide, $Q(P) = 1$, então $P' = P$, ou seja, o elipsoide é uma superfície de pontos fixos sob essa inversão.

O ponto $(0, 0, 0)$ (origem) não tem imagem definida sob esta transformação, sendo mapeado para o "ponto no infinito".

3.2.2 Propriedades da Inversão no Elipsoide

A inversão elipsoidal, definida conforme acima, exibe propriedades que são generalizações das características da inversão esférica:

1. Alinhamento: Um ponto P , seu inverso P' , e o centro do elipsoide (origem) são colineares. Isso é evidente pelas equações, onde (x', y', z') é um múltiplo escalar de (x, y, z) .

2. Invariância do Elipsoide: O elipsoide \mathcal{E} é uma superfície de pontos fixos sob a inversão, conforme observado na definição.
3. Transformação de Retas: Uma reta que passa pela origem é mapeada para si mesma (pontos sobre a reta são invertidos ao longo da própria reta). Uma reta que não passa pela origem é transformada em uma curva de segunda ordem, ou mais precisamente, em uma elipse ou hipérbole no plano, dependendo de sua posição em relação ao elipsoide.
4. Transformação de Planos: Um plano que passa pela origem é mapeado para si mesmo. Um plano que não passa pela origem é transformado em um elipsoide (ou uma superfície elipsoidal, possivelmente degenerada) que passa pela origem.

3.3 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA INVERSÃO NO ELIPSOIDE

As demonstrações geométricas para a inversão no elipsoide são visualmente mais complexas do que para a esfera, devido à assimetria do elipsoide. No entanto, é possível ilustrar as propriedades por meio de projeções e seções específicas.

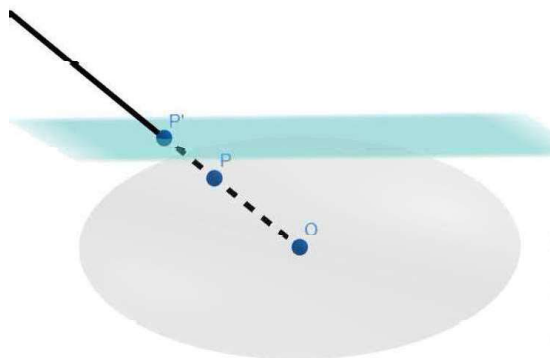


Figura 3.1: Ilustração esquemática da inversão de um ponto P para um ponto P' em relação a um elipsóide centrado na origem. O ponto P' é obtido pela interseção da semirreta OP com o plano polar de P em relação a uma esfera auxiliar e posterior escalonamento, ou diretamente pela fórmula.

O resultado seguinte é uma alternativa geométrica à Definição 3.1.

Teorema 3.2 (Transformação de Pontos). *Para qualquer ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, seu inverso $P' = (x', y', z')$ em relação ao elipsoide \mathcal{E} é tal que P, P' e a origem O são*

colineares e $|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2$, onde Q é o ponto de intersecção da semirreta \overrightarrow{OP} com o elipsoide \mathcal{E} .

Demonstração. A colinearidade é evidente das equações (3.1)-(3.3), uma vez que P' é um múltiplo escalar de P . Para a relação de distância, tem-se $|OP|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, donde obtemo-se que

$$|OP'|^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2} = \frac{|OP|^2}{Q(P)^2},$$

onde $Q(P) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Ou seja, $|OP'| = \frac{|OP|}{Q(P)}$. Multiplicando esta igualdade por $|OP|$, obtemos $|OP| \cdot |OP'| = \frac{|OP|^2}{Q(P)}$.

Por construção, $Q = (\beta x, \beta y, \beta z)$, para algum $\beta > 0$. Como o ponto Q pertence ao elipsoide \mathcal{E} , então

$$\frac{(\beta x)^2}{a^2} + \frac{(\beta y)^2}{b^2} + \frac{(\beta z)^2}{c^2} = 1,$$

donde obtém-se que

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$$

e que

$$Q = \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}, \frac{y}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}, \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} \right)$$

Deste modo,

$$|OP| \cdot |OP'| = \frac{|OP|^2}{Q(P)} = |OQ|^2.$$

□

Uma propriedade análoga à propriedade $|OP| \cdot |OP'| = R^2$ para a inversão esférica é dada a seguir.

Observação 3.3.1. *Uma propriedade chave da inversão elipsoidal é que*

$$Q(P) \cdot Q(P') = 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned} Q(P') &= \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = \frac{x^2/Q(P)^2}{a^2} + \frac{y^2/Q(P)^2}{b^2} + \frac{z^2/Q(P)^2}{c^2} \\ &= \frac{1}{Q(P)^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = \frac{1}{Q(P)^2} \cdot Q(P) = \frac{1}{Q(P)} \end{aligned}$$

Consequentemente, tem-se que

- Se P está no interior do elipsoide, $Q(P) < 1$, então $QP' > 1$, mapeando P para o exterior.
- Se P está no exterior do elipsoide, $Q(P) > 1$, então $QP' < 1$, mapeando P para o interior.

Proposição 3.3 (Inversão de um Plano). *A inversão de um plano Π que não passa pela origem é um elipsoide que passa pela origem.*

Demonstração. Considere um plano Π dado pela equação $Ax + By + Cz = D$, onde $D \neq 0$. Substituindo x, y, z pelas expressões inversas $x = x'/Q(P')$, $y = y'/Q(P')$, $z = z'/Q(P')$, onde $Q(P') = \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2}$.

$$A \frac{x'}{Q(P')} + B \frac{y'}{Q(P')} + C \frac{z'}{Q(P')} = D$$

$$Ax' + By' + Cz' = D \left(\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} \right)$$

Rearranjando os termos, obtemos a equação de uma superfície quádrlica que, com uma análise mais profunda das constantes, revela-se ser um elipsoide (possivelmente degenerada em alguns casos, como um ponto ou um elipsoide de revolução (superfície tridimensional obtida pela rotação de uma elipse em torno de um de seus dois eixos principais. É um caso especial de elipsoide, no qual pelo menos dois de seus três eixos são iguais)). que sempre passa pela origem, pois $x' = y' = z' = 0$ satisfaz a equação. Esta é uma generalização do fato que planos invertem para esferas que passam pela origem na inversão esférica. \square

3.4 DEMONSTRAÇÕES ALGÉBRICAS DA INVERSÃO NO ELIPSOIDE

Esta seção aprofunda as propriedades da inversão no elipsoide através de demonstrações algébricas rigorosas, validando as relações observadas.

3.4.1 Transformação de Superfícies de Segunda Ordem

Vamos explorar como a inversão no elipsoide transforma uma superfície quádrlica geral, $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$. Substituindo x, y, z

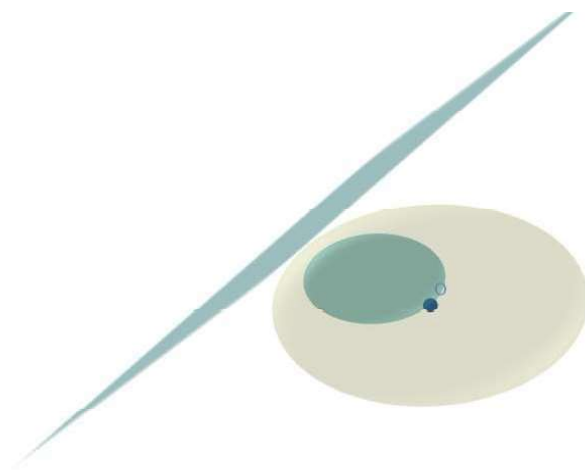


Figura 3.2: Representação conceitual da inversão de um plano para um elipsoide que passa pela origem. Para simplificação visual, pode-se ilustrar a transformação de uma linha em uma elipse em uma seção plana.

pelas suas expressões inversas $x = x'/Q(P')$, $y = y'/Q(P')$, $z = z'/Q(P')$, onde $Q(P') = \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2}$.

A equação transformada será:

$$A \left(\frac{x'}{Q(P')} \right)^2 + B \left(\frac{y'}{Q(P')} \right)^2 + C \left(\frac{z'}{Q(P')} \right)^2 + \dots + J = 0$$

Multiplicando por $Q(P')^2$:

$$A(x')^2 + B(y')^2 + C(z')^2 + Dx'y' + \dots + JQ(P')^2 = 0$$

O termo $JQ(P')^2$ introduzirá termos de quarta ordem nas coordenadas x', y', z' se $J \neq 0$. Isso significa que a inversão de uma quádrlica não é, em geral, outra quádrlica, mas sim uma superfície de grau superior. Este resultado difere da inversão esférica, onde esferas são mapeadas para esferas (ou planos), revelando a complexidade e as peculiaridades da inversão elipsoidal.

Observação 3.4.1. *A análise completa da transformação de quádrlicas pela inversão elipsoidal é complexa e pode envolver a classificação das superfícies resultantes com base nos coeficientes do elipsoide de inversão e da superfície original. Para fins desta dissertação, demonstra-se a natureza da transformação e a complexidade aumentada em relação ao caso esférico.*

Este capítulo explorou a fundo a teoria da inversão no elipsoide, suas definições, propriedades e as demonstrações que a fundamentam. No próximo capítulo, voltaremos nossa atenção para a aplicabilidade desses conceitos no contexto do ensino médio.

APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Este capítulo explora como os conceitos de inversão geométrica, abordados nos capítulos anteriores, podem ser transpostos e aplicados no contexto do ensino médio. O objetivo não é aprofundar nas complexidades algébricas da inversão no elipsoide, mas sim utilizar as ideias subjacentes à inversão (seja ela plana, esférica ou a generalização elipsoidal em um nível mais conceitual) como ferramentas para desenvolver o raciocínio espacial, a capacidade de visualização e a compreensão das transformações geométricas, conectando-as com o currículo vigente [3].

4.1 CONEXÕES COM O CURRÍCULO DO ENSINO MÉDIO

A inversão geométrica, em suas diversas formas, pode ser integrada a vários tópicos do currículo do ensino médio, enriquecendo a abordagem de conceitos já existentes e introduzindo novas perspectivas [1]:

- Geometria Plana: A inversão em relação a um círculo é um ponto de partida natural. Ela pode ser usada para resolver problemas de construção com régua e compasso, explorar a transformação de retas e círculos (incluindo casos especiais de colinearidade e tangência), e aprofundar o conceito de semelhança de triângulos e proporcionalidade.
- Geometria Espacial: A inversão esférica é uma extensão direta da inversão plana. Ela permite visualizar transformações em três dimensões, como a inversão de planos em esferas e vice-versa, e reforça a compreensão de coordenadas cartesianas no espaço.

- **Funções e Transformações:** A inversão é um exemplo de transformação não-linear. Sua discussão pode ser ligada ao estudo de funções, suas propriedades (como injetividade e sobrejetividade), e como diferentes transformações afetam o domínio e a imagem.
- **Conceitos de Limite e Infinito:** A inversão mapeia o centro de inversão para o "infinito" e pontos "no infinito" para o centro. Essa característica oferece uma excelente oportunidade para discutir intuitivamente o conceito de limite e a ideia de ponto no infinito em um contexto geométrico.
- **Aplicações Reais:** A inversão e conceitos relacionados aparecem em diversas áreas, como em lentes e espelhos (ótica), projeções cartográficas (como a projeção estereográfica, que é uma inversão esférica), e até em design gráfico e computação.

A introdução de conceitos como a inversão no elipsoide, mesmo que de forma qualitativa, pode instigar a curiosidade dos alunos sobre a generalização matemática e a beleza da geometria além das formas euclidianas básicas.

4.2 ATIVIDADES DIDÁTICAS PROPOSTAS

As atividades a seguir são propostas para serem desenvolvidas em sala de aula, utilizando uma abordagem visual e investigativa, com o auxílio de softwares de geometria dinâmica para facilitar a compreensão de conceitos tridimensionais.

4.2.1 *Atividade 1: Inversão no Plano - Construções e Propriedades Fundamentais*

Objetivos:

- Construir o inverso de um ponto, reta e círculo em relação a um círculo de inversão no plano.
- Investigar as propriedades de transformação de figuras e a preservação de ângulos.

Materiais:

Régua, compasso, papel, ou software como GeoGebra (versão 2D).

Procedimento:

1. Definir um círculo de inversão C (centro O , raio R).
2. Dada uma reta r que não passa por O : Construir o inverso r' de r . Orientar os alunos a perceber que r' é um círculo que passa por O .
3. Dado um círculo c que não passa por O : Construir o inverso c' de c . Observar que c' é outro círculo.
4. Discutir a preservação de ângulos: Desenhar duas retas (ou círculos) que se interceptam e seus inversos. Medir os ângulos entre eles para verificar a conformidade.

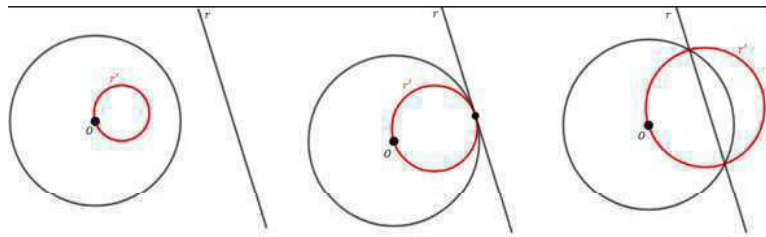


Figura 4.1: Exemplo de inversão de uma reta e um círculo no plano utilizando GeoGebra.

4.2.2 Atividade 2: Inversão Esférica - Visualização em 3D

Objetivos:

- Visualizar a inversão de pontos, retas e planos em relação a uma esfera no espaço.
- Compreender como a inversão afeta a forma e a orientação de objetos em 3D.

Materiais:

Software de geometria dinâmica 3D (ex: GeoGebra 3D).

Procedimento:

1. Configurar uma esfera de inversão com centro na origem.

2. Inserir pontos em diferentes posições (dentro, fora, na superfície da esfera) e observar seus inversos e verificar se seus inversos estão no mesmo plano
3. Desenhar uma reta que não passa pela origem e aplicar a inversão. Observar que a imagem é um círculo que passa pela origem.
4. Desenhar um plano que não passa pela origem e aplicar a inversão. Observar que a imagem é uma esfera que passa pela origem.
5. Discutir a ideia de "ponto no infinito" ao aproximar o centro de inversão.

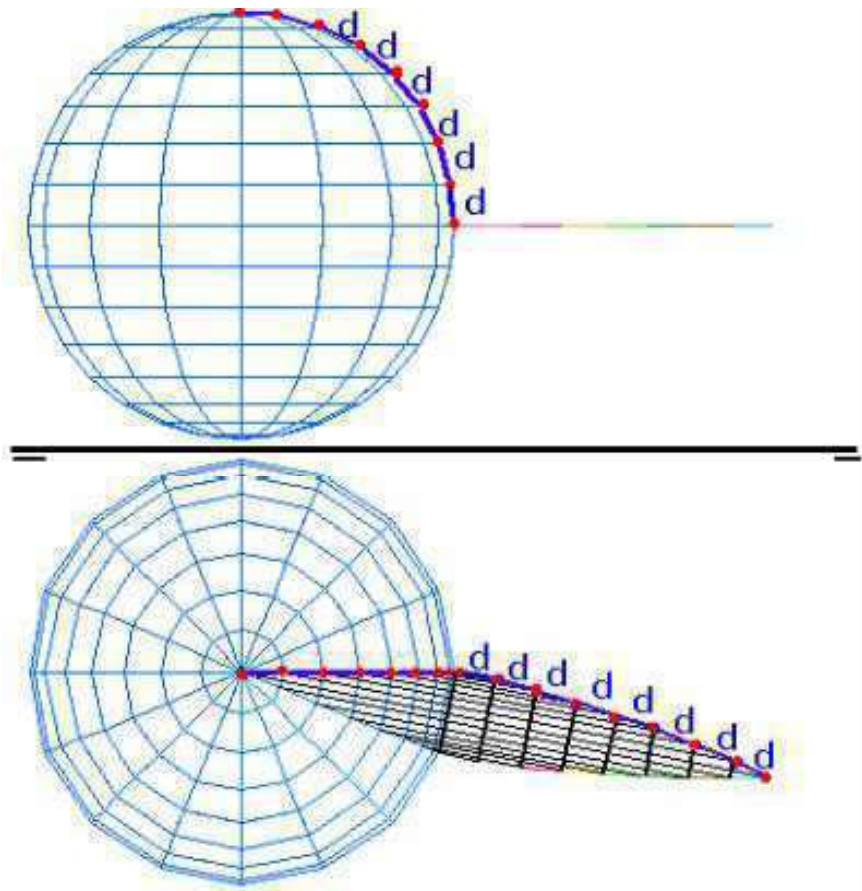


Figura 4.2: Visualização da inversão esférica de um plano.

4.2.3 Atividade 3: A Inversão no Elipsoide - Uma Abordagem Conceitual

Objetivos:

- Introduzir a ideia de generalização de uma transformação para superfícies mais complexas.
- Discutir qualitativamente as implicações da assimetria na inversão.

Materiais:

Imagens do elipsoide, softwares de visualização 3D, discussão em sala de aula.

Procedimento:

1. Relembrar a inversão esférica e a simetria da esfera.
2. Apresentar o elipsoide e sua equação, destacando a diferença dos semieixos.
3. Discutir: "Se a inversão esférica mapeia esferas em esferas (ou planos), o que esperaríamos de uma inversão em relação a um elipsoide?" Levantar hipóteses sobre a forma das figuras inversas.
4. Embora a inversão seja complexa, pode-se usar o GeoGebra 3D para ilustrar uma inversão mais "simples" em relação a uma superfície (mesmo que não seja a inversão exata do elipsoide definida no Capítulo 3), apenas para dar a ideia de que a "forma" da superfície de inversão influencia a imagem.
5. Focar na ideia de que generalizações alteram e preservam propriedades. A inversão no elipsoide ainda é conforme, mas as imagens de figuras simples podem ser mais complexas.

Esta atividade busca estimular o pensamento abstrato e a capacidade de fazer conjecturas sobre transformações em geometrias mais complexas, sem exigir a manipulação algébrica aprofundada.

4.3 POTENCIAL PEDAGÓGICO DA INVERSÃO NO ENSINO MÉDIO

A inclusão da inversão geométrica no ensino médio, mesmo em um nível introdutório e conceitual para o elipsoide, oferece um potencial pedagógico significativo [10]:

- **Desenvolvimento do Raciocínio Espacial:** A inversão induz os alunos a pensar em 3D e a visualizar como objetos se transformam sob uma operação não-rígida. Isso é crucial para o desenvolvimento da intuição geométrica.
- **Conexão Álgebra-Geometria:** As formulações algébricas da inversão, mesmo que as mais simples, reforçam a conexão intrínseca entre equações e formas geométricas, mostrando como a álgebra pode descrever e analisar transformações espaciais.
- **Estímulo à Curiosidade e Investigação:** O caráter "mágico" da inversão (e.g., retas virando círculos) e a ideia de generalização podem despertar o interesse dos alunos pela matemática, incentivando-os a investigar e descobrir propriedades por si mesmos.
- **Preparação para Tópicos Mais Avançados:** Embora a inversão no elipsoide seja avançada, a familiarização com a ideia de generalização e transformações complexas prepara o terreno para futuros estudos em geometria diferencial, topologia ou outras áreas da matemática e da física.
- **Formação Crítica do Professor:** Para o professor, a exploração desses tópicos desenvolve a capacidade de adaptar conteúdos complexos para diferentes níveis de ensino, além de aprimorar seu próprio conhecimento matemático e didático.

A inversão geométrica é uma ferramenta rica que pode revitalizar o ensino da geometria, transformando-o de um conjunto de fórmulas estáticas para um campo dinâmico e investigativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo principal investigar a teoria da inversão no elipsoide, explorando suas demonstrações geométricas e algébricas, e propor caminhos para sua aplicação e contextualização no ensino médio. Ao longo dos capítulos, revisitamos a inversão esférica como um alicerce fundamental, mergulhamos na complexidade da generalização para o elipsoide com base no trabalho de Ramirez e Rubiano, e refletimos sobre o potencial didático desses conceitos para a educação básica [5].

5.1 CONCLUSÃO

Os objetivos propostos na Introdução foram amplamente alcançados. Primeiramente, as definições e propriedades da inversão esférica foram apresentadas, servindo como uma sólida fundamentação teórica para o trabalho. Esta revisão permitiu não apenas um entendimento aprofundado da transformação clássica, mas também destacou a importância da simetria esférica que simplifica suas propriedades.

Em seguida, a análise do artigo de Ramirez e Rubiano possibilitou a adaptação e formalização da definição de inversão no elipsoide. Observou-se que a assimetria do elipsoide exige uma formulação mais elaborada para a inversão, que se manifesta em equações mais complexas e em um comportamento diferenciado em relação à inversão esférica. Apesar da complexidade, a propriedade de conformidade foi mantida, o que é um resultado significativo que preserva a estrutura angular local da transformação. As demonstrações geométricas e algébricas foram desenvolvidas para ilustrar as propriedades-chave, como a colinearidade de pontos inversos e a transformação de planos em elipsoides que passam pela origem, reforçando a natureza única dessa generalização.

Por fim, as aplicações didáticas no ensino médio foram minuciosamente exploradas. Propôs-se que a inversão geométrica (começando pela inversão plana e esférica) é uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento do raciocínio espacial e da capacidade de visualização dos alunos. A ideia de estender essa transformação para o elipsoide, mesmo que em um nível mais conceitual para o ensino médio, foi discutida como um meio de inspirar a curiosidade sobre generalizações matemáticas e aprofundar a conexão entre álgebra e geometria, mostrando a dinâmica da matemática aplicada a superfícies complexas.

5.2 CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação oferece diversas contribuições relevantes para o campo da geometria e para o ensino de matemática. Do ponto de vista teórico, ela sistematiza e aprofunda o estudo da inversão no elipsoide, oferecendo uma análise detalhada das definições e propriedades presentes na literatura, com foco em demonstrações que elucidam a natureza dessa transformação. Ao construir as demonstrações geométricas e algébricas de forma explícita, o trabalho serve como um recurso valioso para pesquisadores e estudantes interessados em transformações geométricas avançadas.

No âmbito pedagógico, a principal contribuição reside na proposição de um arcabouço para a introdução da inversão geométrica no ensino médio. As atividades didáticas detalhadas buscam transcender a memorização de fórmulas, incentivando uma abordagem investigativa e visual que fortalece o raciocínio espacial e a compreensão de conceitos abstratos. O trabalho destaca como a inversão pode ser uma ponte entre a geometria básica e ideias mais complexas, preparando os alunos para um pensamento matemático mais sofisticado e para a apreciação da beleza intrínseca da geometria.

5.3 LIMITAÇÕES

Apesar das contribuições, este trabalho possui algumas limitações. A complexidade das equações e demonstrações da inversão no elipsoide restringiu a profundidade das aplicações detalhadas para o ensino médio. Embora a abordagem conceitual seja válida, a plena exploração das transformações elipsoidais em um contexto escolar exigiria ferramentas computacionais avançadas e uma adaptação curricular significativa. A pesquisa se baseou predominantemente em um único artigo de referência para a

definição da inversão no elipsoide, o que, embora proporcione foco, pode não abranger todas as possíveis generalizações ou abordagens teóricas existentes.

5.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base nas conclusões e limitações deste trabalho, diversas direções para futuras pesquisas podem ser consideradas:

1. Desenvolvimento de Materiais Didáticos: Criar materiais didáticos mais elaborados, incluindo roteiros para oficinas e vídeos explicativos, que auxiliem professores do ensino médio a introduzir a inversão geométrica de forma prática e cativante.
2. Estudo Experimental da Aplicação: Realizar um estudo piloto em escolas de ensino médio para avaliar o impacto das atividades propostas no desenvolvimento do raciocínio espacial e na motivação dos alunos.
3. Generalizações para Outras Quádricas: Estender a análise da inversão para outras superfícies quádricas (como hiperboloides ou paraboloides), investigando suas propriedades e potenciais aplicações.
4. Desenvolvimento de Softwares Interativos: Criar ferramentas de software específicas que permitam a visualização interativa da inversão elipsoidal, facilitando o estudo e a compreensão tanto para acadêmicos quanto para educadores.
5. Conexões com outras Áreas da Matemática Aplicada: Explorar mais a fundo as aplicações da inversão em áreas como a computação gráfica, processamento de imagens e física (e.g., eletrostática, teoria potencial) para desenvolver problemas contextualizados para o ensino.

A inversão geométrica, em sua elegância e capacidade de generalização, continua sendo um campo rico para a pesquisa e um tópico inspirador para o ensino da matemática.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Silvia Lucia Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*, Contexto.
- [2] Marcel Berger, *Geometry II*, Springer-Verlag.
- [3] Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática*, Ministério da Educação.
- [4] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons.
- [5] Ubiratan D'Ambrosio, *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*, Autêntica.
- [6] Euclides, *Os Elementos*, Editora Sugerida.
- [7] David Hilbert e S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company.
- [8] Elon Lages Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
- [9] José L Ramírez e Gustavo N Rubiano, *A generalization of the spherical inversion.*, *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology* **48** (2017), nº 1, 132–149.
- [10] David Tall, *How Humans Learn to Think Mathematically*, Cambridge University Press.