



Universidade Federal do ABC

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

DÉBORA DOS SANTOS BUENO

**Processos Estocásticos no Ensino Médio:
Uma abordagem para o Ensino de
Probabilidade com Cadeias de Markov**

Santo André, 2025



Universidade Federal do ABC

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Débora dos Santos Bueno

**Processos Estocásticos no Ensino Médio: Uma
abordagem para o Ensino de Probabilidade com
Cadeias de Markov**

Orientador: Prof. Dr. Jerônimo Pellegrini

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO

DEFENDIDA PELA ALUNA DÉBORA DOS SANTOS BUENO,

E ORIENTADA PELO PROF. DR. JERÔNIMO PELLEGRINI.

Santo André, 2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Bueno, Debora dos Santos

Processos Estocásticos no Ensino Médio : Uma abordagem para o
Ensino de Probabilidade com Cadeias de Markov / Debora dos Santos
Bueno. — 2025.

110 fls. : il.

Orientação de: Jerônimo Pellegrini

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, São Paulo,
2025.

1. Probabilidade. 2. Processos Estocásticos. 3. Cadeias de Markov. 4.
Educação Matemática. I. Pellegrini, Jerônimo. II. Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2025. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única da autora e com a anuência do orientador.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP

CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado e Folha
de Assinaturas**

No dia 1 de Agosto de 2025 às 14:00, no local: <https://conferenciaweb.rnp.br/sala/jeronimo-6>, realizou-se a Defesa da Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado "Processos Estocásticos no Ensino Médio: Uma abordagem para o Ensino de Probabilidade com Cadeias de Markov " de autoria da candidata, DÉBORA DOS SANTOS BUENO, RA nº 22202110366, discente do Programa de Pós-Graduação em MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da UFABC, sob orientação do Profº JERONIMO PELLEGRINI. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi considerada APROVADA pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

Documento assinado digitalmente



JERONIMO PELLEGRINI

Data: 01/08/2025 16:02:48-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. JERONIMO PELLEGRINI, UFABC

Presidente - Interno ao Programa

Documento assinado digitalmente



DANIEL MIRANDA MACHADO

Data: 01/08/2025 16:24:55-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. DANIEL MIRANDA MACHADO, UFABC

Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

Documento assinado digitalmente



GLEICIANE DA SILVA ARAGAO

Data: 01/08/2025 16:31:45-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. GLEICIANE DA SILVA ARAGÃO, UNIFESP

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. RAFAEL DE MATTOS GRISI, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos que me acompanharam e apoiaram nesta jornada, aos que tive o prazer de conhecer nos espaços em que atuei, em especial àqueles que continuam acreditando na educação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder força e perseverança para concluir esta jornada.

À minha família, que faz com que, a cada dia, todo o esforço e dedicação façam sentido.

Aos amigos da vida, do trabalho e de tantos espaços, que me inspiraram e motivaram a persistir nessa caminhada.

Ao meu companheiro José, pela compreensão, apoio e incentivo, contribuindo para que eu mantivesse o foco e ajudando a desvendar os códigos do LaTeX.

Aos colegas e amigos do PROFMAT, que compartilharam angústias e anseios ao longo do curso, pelas conversas, trocas, companheirismo e motivação para que chegássemos até este momento.

Aos professores da UFABC e da UTFPR, que contribuíram de forma significativa para minha formação, compartilhando ensinamentos e inspirando minha atuação.

Aos professores Dr. Eduardo Gueron e Dr. Maurício Lima que, na posição de coordenação do programa, sempre nos incentivaram e atenderam prontamente às nossas solicitações.

Ao professor Dr. Daniel Miranda Machado da UFABC e à professora Gleiciane da Silva Aragão da UNIFESP, que aceitaram compor a banca de avaliação e deram contribuições muito importantes para a finalização dessa dissertação.

Em especial, ao meu orientador, Prof^o Dr. Jerônimo Pellegrini, pela dedicação, paciência, apoio e confiança, sem as quais este trabalho não seria possível.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste trabalho, o meu mais sincero agradecimento.

Se a educação não transforma sozinha a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda. Se a nossa opção é progressista, se estamos a favor da vida e não da morte, da equidade e não da injustiça, do direito e não do arbítrio, não temos outro caminho senão viver plenamente a nossa opção. Encarná-la, diminuindo assim a distância entre o que dizemos e o que fazemos.

— Paulo Freire

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta didática voltada ao desenvolvimento do conteúdo de probabilidade no Ensino Médio, proporcionando aos professores e demais interessados na área um instrumento para uma abordagem contextualizada da teoria das probabilidades, através da análise de processos estocásticos e da utilização de Cadeias de Markov como instrumento de modelagem e resolução de problemas. Partindo de uma retomada histórica da educação escolar no Brasil, seguida por uma reflexão acerca do currículo e das perspectivas de ensino da Matemática, com foco no ensino de probabilidade, a proposta metodológica apresentada baseia-se na aprendizagem baseada em problemas e na mobilização de conhecimentos a partir de situações reais, buscando promover uma experiência educacional efetiva, que estimule a reflexão da educação como forma de emancipação do indivíduo.

Palavras-chave: Probabilidade, Processos Estocásticos, Cadeias de Markov, Incerteza, Educação Matemática

ABSTRACT

This dissertation presents a didactic proposal for teaching probability in high school, offering teachers and others interested in the subject a contextualized approach to probability theory, through the analysis of stochastic processes and the use of Markov Chains as tool for modeling and problem-solving. The work begins with a historical overview of school education in Brazil and a reflection on the curriculum and current perspectives for mathematics education, with a special focus on the teaching of probability. The proposed methodology is grounded in problem-based learning and the application of knowledge to real-life situations, aiming to foster a meaningful educational experience that encourages critical thinking and promotes education as a path to individual empowerment.

Keywords: Probability, Stochastic Processes, Markov Chains, Uncertainty, Mathematics Education

LIST OF FIGURES

Figure 1	Grafo da matriz de probabilidade de transição entre quatro estados.	35
Figure 2	Grafo da matriz de probabilidade de transição entre três estados.	36
Figure 3	Grafo de transição entre diferentes tipos de estado	42
Figure 4	Grafo de transição entre três estados	44
Figure 5	Árvore de possibilidades para dois lançamentos consecutivos de uma moeda.	51
Figure 6	Árvore de possibilidades para três lançamentos consecutivos de uma moeda.	52
Figure 7	Árvore de possibilidades da probabilidade de chuva em três dias consecutivos.	59
Figure 8	Grafo de transição entre três estados.	63
Figure 9	Grafo da probabilidade de transição entre os estados de saúde de cafeeiros	65

LIST OF TABLES

Table 1	Quadro com elementos do conhecimento e disposicionais relacionados à probabilidade	15
Table 2	Tempo necessário para entrega de um pedido.	24
Table 3	Probabilidade de chuva na cidade Endor.	57

CONTENTS

Introdução	1
1 O contexto educacional brasileiro	3
1.1 Breve histórico da educação escolar no Brasil	3
1.2 Uma perspectiva social da educação	8
1.3 Etnomatemática e educação escolar	9
1.4 O ensino de probabilidade	12
2 Probabilidade	17
2.1 Conceitos básicos	18
2.2 Probabilidade condicional	20
2.3 Variáveis aleatórias	21
2.3.1 Variáveis aleatórias discretas	23
2.3.2 Variáveis aleatórias contínuas	23
2.4 Valor Esperado (Esperança)	23
2.5 Variância	26
3 Processos estocásticos	31
3.1 Cadeias de Markov	33
3.1.1 Classificação dos estados	42
3.1.2 Propriedades da Cadeia de Markov	43
4 Ensino de probabilidade utilizando de Cadeias de Markov	55
4.1 Atividade 1 - Análise probabilística de previsão do tempo	57
4.2 Atividade 2 - Probabilidade de utilização de diferentes meios de transporte	61

4.3	Atividade 3 - Resultados da utilização de um fertilizante no plantio de café	65
4.4	Atividade 4 - Análise de migração de tartarugas marinhas	70
4.5	Atividade 5 - Problema da ruína do jogador	76
	Bibliografia	88

INTRODUÇÃO

A incerteza, a aleatoriedade, o imprevisível são temas que despertam o interesse de muitas pessoas e a teoria da probabilidade surge a partir desse interesse em explicar e calcular as múltiplas possibilidades associadas à ocorrência de algum evento. Diante disso, a probabilidade se torna um conhecimento de extrema importância e aplicabilidade, desde os tempos remotos, com origem nos jogos de azar, até os dias atuais com a análise de inúmeros fenômenos determinados pelo acaso.

Durante sua vida, as pessoas irão se deparar com diversas situações que envolvem a análise de processos estocásticos, que orientam das escolhas mais simples, como levar ou não um guarda-chuva ao sair, até as mais complexas, como o melhor investimento financeiro que podem realizar. Logo, a educação escolar deve propiciar um ensino que as prepare para lidar com essas e outras situações em suas vidas pessoais e profissionais.

Embora a qualidade da educação probabilística proporcionada no ambiente escolar possa influenciar a vida dos estudantes e a sua atuação na sociedade, impactando-as diretamente, a abordagem nas escolas ainda fica muito restrita ao currículo da disciplina de Matemática, onde muitas vezes é trabalhada de forma mecanicista, restringindo-se à repetição de cálculos e fórmulas aplicados em exercícios superficiais, que não levam à reflexão nem estimulam a autonomia do educando no processo de ensino-aprendizagem.

Diante desse cenário, evidencia-se a necessidade de propor novas metodologias para abordar esse conteúdo em sala de aula, trabalhando situações mais próximas

da realidade, envolvendo diversas áreas do conhecimento, valorizando as habilidades individuais, o protagonismo e a interação entre os alunos.

Neste trabalho, pretende-se despertar uma reflexão sobre o papel da educação Matemática e apresentar uma proposta para trabalhar o conteúdo de Probabilidade no Ensino Médio através da aplicação de Cadeias de Markov na resolução de problemas de diferentes áreas do conhecimento, como forma de estimular o interesse e o engajamento do educando, tornando o aprendizado mais significativo.

Para isso, no primeiro capítulo foi realizado um estudo acerca do panorama histórico da educação sob uma perspectiva social e da importância da educação Matemática sob o olhar da Etnomatemática, além da análise da Base Nacional Comum Curricular e das abordagens que envolvem o ensino de probabilidade.

Nos capítulos seguintes, foram conceituados os princípios básicos envolvidos na definição e no cálculo de probabilidades, assim como aspectos aprofundados no estudo de processos estocásticos, como o cálculo da esperança e da variância, além das propriedades, classificação e aplicação das Cadeias de Markov, através da apresentação de exemplos e do desenvolvimento algébrico dos cálculos envolvidos.

A partir disso, no último capítulo foi elaborada uma proposta didática, com a apresentação e desenvolvimento de cinco situações-problema que abordam diferentes aspectos de um processo estocástico, aplicados em diversas áreas do conhecimento, que podem ser adaptadas de acordo com as necessidades do docente e da proposta pedagógica da escola.

1

O CONTEXTO EDUCACIONAL BRASILEIRO

A educação sempre existiu e todos estão sujeitos a ela, seja em casa, no trabalho, na cidade, no campo, nas aldeias ou em qualquer outro espaço. De modo individual ou coletivo, todos os indivíduos se enredam nos processos educativos "para aprender, para ensinar, para aprende-e-ensinar. Para saber, para fazer, para ser ou para conviver, todos os dias misturamos a vida com a educação." (*BRANDO, 1981, p.7*)

Restringir a discussão sobre a educação apenas ao ambiente escolar seria empobrecer o debate, no entanto, é importante conhecer o caminho que foi traçado para chegar ao modelo escolar que temos hoje, para assim entender a necessidade de transformar a concepção de educação, resgatando antigos valores que foram esquecidos ao longo desse processo.

1.1 BREVE HISTÓRICO DA EDUCAÇÃO ESCOLAR NO BRASIL

A educação brasileira no universo escolar tem início no período colonial com os jesuítas que, dentro do movimento de Contra-Reforma, em oposição à revolução protestante, colocaram a catequese e a educação como principais objetivos de sua Companhia. Quando os jesuítas chegaram ao Brasil, com o início do governo de Tomé

de Souza, em 1549, ocuparam-se logo de fundar escolas, diante da situação de abandono social da colônia e sufocamento das manifestações culturais que encontraram, uma vez que o governo português apenas se preocupava em explorar as riquezas naturais e procurava dificultar o desenvolvimento da civilização, principalmente no que se referia ao campo intelectual.

Em 1552, já havia três escolas de instrução básica, onde se estudava um pouco de latim e português. A figura principal da educação nesse período foi José de Anchieta, poeta e humanista, que aprendeu as línguas das populações indígenas e os ofícios de carpinteiro, sapateiro e alfaiate. Ele ministrava aulas de leitura, escrita, contas e música para os indígenas, para os filhos dos portugueses e para seus irmãos jesuítas.

Os colégios jesuítas espalharam-se pelo Brasil e, à medida que “catequizavam e ensinavam, os jesuítas iam expandindo a civilização. Seus colégios eram centros de irradiação social, econômica e espiritual.” (VALENTE, 2000, p.72)

Nesse século e no seguinte, os sistemas escolares jesuítas atingiram um alto grau de expansão e desenvolvimento ao longo do território brasileiro. Em 1759, com a expulsão e ordem de prisão dos jesuítas pelo Marquês de Pombal, começam a surgir escolas fundadas pelas ordens religiosas dos carmelitas, franciscanos, entre outras, mas essas não conseguiram alcançar a eficiência das escolas jesuítas. Cabe ressaltar que essa perseguição aos jesuítas ocorreu devido ao tipo de educação que era oferecida ao povo, baseada em um ideal humanista que impulsionava o crescimento e desenvolvimento cultural e intelectual.

No período monárquico, na época do reinado de D. João VI, o objetivo da educação escolar foi direcionado para a formação de profissionais que atendessem às necessidades do reino e à defesa militar da colônia. Foram criadas academias para a preparação de oficiais e engenheiros e cursos nas áreas de medicina, agricultura, economia e indústria e, posteriormente, a Real Academia de Desenho, Pintura, Escultura e Arquitetura Civil, mais tarde transformada na Escola Nacional de Belas Artes. Com

a obra educacional de D. João VI, a educação básica se manteve deficiente e, mesmo com a criação dos cursos superiores e das instituições culturais, não houve nenhum progresso em educação popular.

A partir da proclamação da Independência em 1822, a educação torna-se um dos temas centrais da Constituinte. O objetivo das escolas passa a ser a formação social e o desenvolvimento da nação e é assumido o compromisso, na Constituição de 1824, de assegurar a “instrução primária e gratuita a todos os cidadãos”; contudo, essa determinação não se concretizou. A realidade educacional que se delineava foi acentuando a distância entre as elites e as classes populares a cada dia.

Na década de 20, após a Primeira Guerra Mundial, com o panorama criado social, cultural, econômica e politicamente, a educação no país começa a ser repensada e tem início um movimento de renovação do setor educacional, com inúmeras reformas no ensino primário. Nesse cenário, surge a primeira grande geração de educadores, que liderou esse movimento de renovação e tentou implementar os conceitos da Escola Nova, baseados nos ideais de defesa da escola pública, universal e gratuita.

Muito do que é sonhado e debatido em termos de educação antes da Revolução de 30 é incorporado à Constituição promulgada em 1934, gerando avanços significativos nessa área. Entretanto, há um grande retrocesso com a instauração do Estado Novo em 1937, mas com a sua queda em 1945, muitos dos ideais são retomados e reunidos no Projeto de Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que tramitou no Congresso Nacional por 13 anos até sua aprovação em 1961.

No período que vai da queda do Estado Novo até o Golpe Militar de 1964, ocorrem mudanças significativas no sistema educacional brasileiro, como a instalação do Conselho Federal de Educação, as campanhas e movimentos de alfabetização de adultos e a expansão do ensino primário e superior. Após o regime militar, a Constituição de 1988 introduziu compromissos como a universalização do ensino fundamental e a erradicação do analfabetismo.

Ainda nos anos 80, em meio à grande ascensão do neoliberalismo, são dados os primeiros passos em direção à formulação da atual LDB, promulgada em 1996. O artigo 1º da LDB (lei 9394/96) estabelece que "a educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais" e no parágrafo 2º chama a atenção para o fato de que: "A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social". (BRASIL, 1996)

Nota-se que a LDB legitima aquilo que sempre existiu, a educação livre e desenvolvida por cada grupo social, que promove o desenvolvimento de cada indivíduo e fortalece as suas raízes socioculturais. Contudo, a educação escolar muitas vezes continua centrada em modelos excludentes e tecnicistas, de acordo com Brandão (1981, p.10) a educação oferecida nas escolas é controlada por um sistema centralizado de poder, que reforça as desigualdades sociais através do controle do saber.

Nos últimos anos, a educação escolar passou por mais mudanças, sendo marcada por transformações significativas relacionadas às políticas voltadas à universalização do acesso à educação básica, em consonância com os princípios estabelecidos na Constituição e reforçados pela LDB, especialmente com a ampliação da oferta de ensino fundamental a todas as crianças e adolescentes, o que posteriormente foi realizado também com o Ensino Médio.

Além da ampliação da oferta, foram implementados diversos programas, como o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e Valorização do Magistério (FUNDEF), criado em 1996 e substituído pelo Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e Valorização dos profissionais da educação (FUNDEB), em 2007. Essas políticas foram fundamentais no processo de reestruturação dos sistemas de ensino, com a municipalização do ensino fundamental e a melhoria da distribuição de recursos entre as redes, com vistas a ampliar o número de matrículas, reduzir as taxas de evasão e reprovação, promover a equidade de acesso e melhorar

as condições estruturais e pedagógicas das escolas públicas, buscando corrigir as desigualdades históricas de acesso e permanência na escola e garantir a educação para todos os cidadãos.

Outro ponto importante das reformas educacionais mais recentes foi a reestruturação curricular da educação básica, com o objetivo de tornar o ensino mais contextualizado, significativo e articulado com a realidade dos estudantes. Nesse sentido, na década de 90, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que estabeleceram referências para a organização do trabalho pedagógico nos sistemas de ensino e procuraram promover uma educação que considerasse a diversidade cultural, a interdisciplinaridade e a formação cidadã.

Essa tendência foi reafirmada com a formulação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2017 para a educação infantil e o ensino fundamental e para o Ensino Médio em 2018, que estabelece objetivos de aprendizagem, com foco no desenvolvimento de competências e habilidades que contemplem as exigências da sociedade contemporânea em diferentes áreas do conhecimento.

Tais mudanças refletem um movimento de transição de uma escola meramente transmissora de conteúdos para uma escola que busca desenvolver o protagonismo do aluno e sua inserção crítica na sociedade. No entanto, apesar dos avanços conquistados nas últimas décadas, a educação brasileira ainda enfrenta inúmeros desafios, como a melhoria da qualidade do ensino, a valorização dos profissionais da educação, a redução das desigualdades regionais e o fortalecimento de práticas pedagógicas que respeitem as identidades e contextos dos estudantes.

Assim, embora haja avanços legais e institucionais no que se refere ao acesso à educação, a história recente da educação escolar no Brasil revela uma trajetória de esforços a serem empreendidos para democratizar o acesso à educação e consolidar o direito à educação de qualidade, visto que a educação é permeada por limitações estruturais e disputas políticas em torno de diferentes ideais de sociedade.

1.2 UMA PERSPECTIVA SOCIAL DA EDUCAÇÃO

Mesmo com todos os avanços conquistados ao longo de mais de 500 anos de história do país, ainda hoje há uma visível distinção entre o tipo de educação oferecida para as diferentes classes sociais. Nesse sentido, a escola acaba tornando-se um instrumento de peneiramento social, baseado na ideologia neoliberal e subordinado às leis do mercado, oferecendo um tipo de educação conformadora e condicionante, onde o filho do patrão será sempre o patrão e o filho do operário, sempre o operário.

De acordo com Frigotto,

estamos vivendo a década perdida da educação brasileira. Pela primeira vez em nossa história, a pedagogia do Banco Mundial e da CNI (Confederação Nacional da Indústria) é a pedagogia oficial do Ministério da Educação. Trata-se de uma educação voltada para desenvolver competências específicas, tendo em vista criar pessoas empregáveis, segundo as necessidades do mercado (...) tudo se resume ao universo do indivíduo e da relação que ele consiga estabelecer com o mercado. (*FRIGOTTO, 1995, p.122*)

Sendo assim, é preciso arrancar a educação da influência das classes dominantes para que as pessoas não sejam transformadas em simples objetos de comércio ou instrumentos de trabalho. O sistema educacional reproduz mecanismos de exclusão, violando a dignidade e os valores culturais daqueles que vivem às margens da sociedade. Nas palavras de Paulo Freire,

quem melhor que os oprimidos se encontrará preparado para entender o significado terrível de uma sociedade opressora? Quem sentirá melhor que eles os efeitos da opressão? Quem, mais que eles, para ir compreendendo a necessidade da libertação? Libertação a que não chegarão pelo acaso, mas pela práxis de sua busca; pelo conhecimento e reconhecimento da necessidade de lutar por ela. (*FREIRE, 2013, p.43*)

Para Freire (1996, p.75), cabe ao educador “responder à ofensa à educação com a luta política consciente, crítica e organizada contra os ofensores”, dando um novo sentido à concepção de educação que está imposta, contribuindo para a formação de sujeitos críticos e autônomos, de acordo com os princípios de igualdade, liberdade e justiça. Acima de tudo, o professor deve acreditar na educação e no seu poder de intervenção na realidade; caso contrário, acabará apenas repetindo discursos vazios e sua ação será infundada.

Cada povo, cada grupo social em seu tempo e espaço possui saberes, valores, crenças e tradições que foram construídos ao longo da sua história, através de suas experiências e das influências que sofreram. É a partir de todo esse contexto sociocultural em que vivem e de suas necessidades gerais e específicas que deve iniciar o processo de educação. O estudante leva para o espaço escolar todo esse conhecimento, que adquiriu através da convivência em casa com os familiares, no trabalho, no espaço religioso que frequenta, nos grupos que convive, nos movimentos ou organizações de que participa e que não pode ser descartado ou considerado meramente como folclore. Se o professor deixar todo esse aprendizado para fora das paredes da sala, em que se fundamentará o seu ensino?

1.3 ETNOMATEMÁTICA E EDUCAÇÃO ESCOLAR

Atualmente, os currículos de Matemática no país consideram a educação a partir de um olhar conectado com a realidade dos educandos, valorizando suas vivências e as necessidades culturais da sociedade. Porém, muitos professores ainda se limitam a transferir conteúdos de forma mecânica em suas aulas, distantes da realidade na qual o estudante está inserido ou mesmo das suas necessidades sociais.

Situações assim podem ser observadas especialmente em aulas de Matemática, por ser considerada uma ciência lógica e imutável, onde seus conteúdos são apenas transmitidos para os alunos através de fórmulas, postulados, regras e algoritmos que são decorados através da aplicação em exercícios que são repetidos exaustivamente, sem possibilitar um aprendizado real e significativo. O professor, envolto em práticas de inclusão, mais que aceitar as diversidades, deve tratar o aluno como sujeito social, que tem história, que tem raça, sexo e cultura.

Essa é a proposta de diversas correntes educacionais da Matemática, que começaram a surgir na década de 70, depois do fracasso da Matemática Moderna, que tinham em comum a reação contra a existência de um currículo comum e contra a maneira imposta de apresentar a Matemática a partir de uma só visão, como um conhecimento universal, caracterizado por divulgar verdades absolutas e abordado de maneira tecnicista. Dentre essas correntes, surge a proposta da Etnomatemática, termo sugerido por Ubiratan D'Ambrosio para descrever as práticas matemáticas dos diversos grupos culturais, sejam eles uma classe trabalhadora, uma comunidade, um grupo de crianças, uma tribo indígena, um movimento social ou qualquer outro grupo específico.

A escolha da expressão "Etnomatemática" se deu através de uma aproximação etimológica utilizando as raízes tica, matema e etno, que lhe possibilitou dizer que

o homem tem seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer/es e de saber/es que lhe permite sobreviver e transcender por meio de maneiras, de modos, de técnicas ou mesmo de artes (techné ou tica) de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver (matema) com a realidade natural e sociocultural (etno) na qual ele, o homem, está inserido. (D'AMBROSIO, 1996, p.26)

Em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento, que é gerado pela necessidade de uma resposta a situações e problemas distintos, está subordinado a um contexto natural, social e cultural e "a Etnomatemática tenta estudar as ideias matemáticas e suas relações nesse contexto." (GERDES, 1989, p.2)

É importante ressaltar que não se deve considerar as diferentes formas de matematização produzidas como um conhecimento primitivo ou inferior por serem diferentes da forma de pensamento acadêmico ocidental, essa visão eurocentrista e preconceituosa apenas desvaloriza ainda mais a cultura de cada grupo sociocultural e aumenta as barreiras no aprendizado. Não se trata também de vangloriar os saberes populares, mas

no processo educativo as inter-relações entre os saberes populares e os acadêmicos serem favorecidos e qualificados, possibilitando que os alunos que dele participam, concomitantemente, compreendam de modo mais aprofundado sua própria cultura e tenham também acesso à produção científica e tecnológica contemporânea. (*KNIJNIK, 2003, p.106*)

Segundo Bill Barton,

a Etnomatemática pode ajudar na luta contra o racismo, colonialismo, imperialismo e marginalização de povos, sociedades e culturas. E sugere que a Educação Etnomatemática irá mostrar com igual valor, os conhecimentos de diferentes povos, assim como instituir o respeito mútuo e reduzir a tendência à exploração e discriminação de outras culturas. (*BARTON, 2002, p.7*)

Um dos princípios fundamentais da proposta de Educação Etnomatemática consiste em levar para o espaço escolar o conhecimento social e cultural do estudante e da sociedade, fazendo com que a Matemática tenha significado para o educando, tornando-o capaz de determinar qual é o problema e não apenas se restringir a aprender as resoluções para problemas pré-formulados.

O ensino de forma mecanizada acaba tornando o pensamento mecanizado, dificultando para o educando analisar, entender e organizar os fatores relevantes para a resolução de problemas do dia a dia, pois estes não se apresentam como nos enunciados dos problemas que são encontrados na maioria dos livros didáticos. Quando os estudantes trabalham com uma situação real e de relevância, há um envolvimento

maior, pois aquele cenário, direta ou indiretamente, interfere em sua vida. Esse tipo de contexto proporciona um novo sentido ao aprendizado, tornando-o mais efetivo.

Enfim, são inúmeras as possibilidades de conceituação da Matemática dentro da realidade em que vive o aluno e dos assuntos que são de seu interesse, basta olhar ao redor e poderemos enxergar uma situação em que a Matemática pode ser aplicada.

Embora a educação aconteça independente da escola, é a educação escolar que será considerada quando o indivíduo quiser se inserir dentro dos diversos contextos da sociedade. Se quisermos construir uma realidade inclusiva, longe de toda e qualquer forma de discriminação e opressão, é preciso redefinir a educação escolar, repensar a forma de trabalhar os programas e currículos nas aulas, vinculando a educação ao processo de formação humana, em detrimento dos processos de seleção e marginalização que a instituição escolar tem promovido.

Sendo assim, a partir do olhar na Etnomatemática, vejamos o que é previsto no currículo escolar para o ensino de probabilidade, uma vez que o pensamento probabilístico é de extrema importância para que o sujeito analise e interaja com a realidade de forma crítica, nas mais diversas situações, ainda considerando que o estudo da probabilidade apenas foi incluído formalmente no currículo escolar da educação básica a partir dos PCNs publicados em 1997.

1.4 O ENSINO DE PROBABILIDADE

A probabilidade está presente nos currículos de Matemática da educação básica, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, através do estudo do conceito de incerteza e aleatoriedade, passando pela caracterização de eventos e do espaço amostral, até o cálculo simples de probabilidade para eventos equiprováveis, de acordo com o

proposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Já nos anos finais do Ensino Fundamental, a base prevê um aprofundamento desses conceitos e um enfoque maior no cálculo de probabilidades para eventos dependentes e independentes, a partir de uma abordagem clássica.

No Ensino Médio, a proposta é extrapolar os conceitos básicos de cálculo de probabilidades, trabalhando o conteúdo de forma integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, preparando o educando para compreender, formular e resolver problemas, valendo-se dos diferentes conceitos e procedimentos próprios da área, alinhados com a perspectiva da Etnomatemática.

De acordo com a BNCC,

A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018)

Sendo assim, o ensino de probabilidade deve abarcar situações que permitam uma análise crítica da realidade, como as chances de sucesso de um determinado tratamento médico em relação a outro, os possíveis resultados e riscos de um investimento financeiro, a projeção da quantidade de ocorrências de um acidente de trânsito em determinadas situações climáticas, entre outros. Isso reforça a importância do estudo de forma contextualizada, em sintonia com as necessidades e desafios da sociedade contemporânea, indo além do aprendizado de apenas fórmulas, cálculos e algoritmos e simples exercícios de lançamento de dados e jogos de cartas, como muitas vezes é apresentado nos livros didáticos ou trabalhado em sala de aula.

Ainda, segundo a BNCC:

Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. (*BRASIL, 2018*)

Uma breve análise das coleções propostas para o objeto 2 do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2021, que refere-se à escolha de livros didáticos para cada área do conhecimento do Ensino Médio, possibilita observar que houve certo avanço nas propostas em relação às obras de anos anteriores, abordando algumas situações mais aplicadas, como discussões sobre genética e estudo de paradoxos, indo além da discussão de jogos de azar que, embora estejam relacionados aos primórdios dos estudos em probabilidade, não consistem no foco principal de estudo para a realidade de um estudante de Ensino Médio.

O trabalho de Caberlim e Coutinho (2013), que analisou o ensino da probabilidade de acordo com livros de PNLDs anteriores, aponta sobre os problemas desses materiais, afirmando:

Sobre os elementos de conhecimento e elementos disposicionais que Gal (2005) trabalha, é possível notar nas resenhas apresentadas que alguns livros parecem abordá-los, mas talvez por não se apresentarem em todas as séries do Ensino Médio, os conteúdos de probabilidade apresentam falhas, as quais as próprias resenhas destacam e ressaltam como imprecisões e excessos de problemas com a mesma abordagem. Além disso, a descontinuidade de abordagem (concentração em um único volume da coleção) também é um fator que contribui para a não construção do letramento probabilístico. (*CABERLIMu.a., 2013, p.11*)

Os elementos de conhecimento e elementos disposicionais citados, tratam dos elementos destacados no quadro a seguir, traduzido da obra de Gal (2005).

Elementos do Conhecimento	Elementos Disposicionais
1. Grandes ideias: Variação, Aleatoriedade, Independência, Previsibilidade/Incerteza.	1. Postura crítica
2. Calculando probabilidades: Caminhos para estimar a probabilidade de eventos.	2. Crenças e atitudes
3. Linguagem: Termos e métodos usados para comunicar sobre o acaso.	3. Sentimentos pessoais sobre incerteza e risco (ex.: aversão ao risco)
4. Contexto: Papel das mensagens probabilísticas em contextos diversos.	
5. Questões críticas: Reflexões ao lidar com probabilidades.	

Table 1: Quadro com elementos do conhecimento e disposicionais relacionados à probabilidade

Fonte:([GAL, 2005](#), p.51)

Mesmo que os materiais caminhem para uma melhoria na abordagem, o viés principal está relacionado à realização de cálculos e não à compreensão das noções envolvidas nos estudos de probabilidade. Além disso, os conceitos de probabilidade ainda são abordados desconectados de outros conhecimentos próprios da área da Matemática, como as matrizes e a teoria dos grafos, que poderiam ser empregados a partir do estudo de situações que podem ser modeladas por processos estocásticos que utilizem para a análise a Cadeia de Markov, interrelacionando os conteúdos de forma significativa.

É importante que o estudante desenvolva um pensamento probabilístico, em que mobilize seus conhecimentos não só para a resolução de problemas, mas para analisar, inferir e estabelecer conjecturas a partir dos resultados obtidos, através da proposição de situações concretas, que possam ser simuladas e experimentadas, a partir de recursos materiais ou virtuais.

Uma forma de aprofundar as discussões e promover uma aprendizagem colaborativa, que incentive os estudantes a formularem e testarem conjecturas sobre

conceitos de probabilidade, alinhada com as demandas atuais, com os parâmetros curriculares e com a própria BNCC, é a aprendizagem baseada em problemas, que possibilita a reflexão, análise e discussão sobre situações aplicadas a diversas áreas do conhecimento envolvendo a utilização de probabilidades, que conectam-se com os aspectos das competências específicas da área de Matemática no Ensino Médio. Essa relação evidencia-se através das seguintes habilidades da BNCC:

EM13MAT106 – Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.).

EM13MAT310 – Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

EM13MAT311 – Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312 – Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

EM13MAT511 – Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 2018)

A proposta apresentada neste trabalho parte da construção de situações-problema contextualizadas com a realidade, partindo dos princípios da Etnomatemática que reforçam a importância de propor atividades, reflexões e discussões que estejam intrinsecamente relacionadas à realidade dos estudantes e ao ambiente social no qual estão inseridos ou possam vir a estar, utilizando os procedimentos e a análise de processos estocásticos, que muitas vezes não são trabalhados de forma aprofundada no Ensino Médio. Contudo, antes é importante resgatar alguns conceitos e definições de probabilidade.

2 | PROBABILIDADE

Quando observamos a realidade ou realizamos experimentos, nos deparamos com dois tipos de situações, aquelas em que é possível determinar com precisão o que irá acontecer e aquelas que estão condicionadas ao aleatório.

Como exemplo, podemos considerar um experimento para analisar a posição de um móvel ao longo do tempo, conhecendo a sua velocidade inicial e a sua aceleração, o que permite determinar essa posição com exatidão. Em casos como esse, temos um processo determinístico, pois o resultado do experimento está relacionado apenas com o cálculo da relação entre as variáveis envolvidas.

No entanto, no caso de um experimento probabilístico, também conhecido como estocástico, não é possível prever o que acontece ao longo do tempo, como no lançamento de um dado. Pois, mesmo se em uma sequência de lançamentos determinado padrão de resultados se repetir, não há como garantir o que acontecerá no próximo lançamento, mas conseguimos calcular a probabilidade de que saia certo valor no lançamento. Então, no processo probabilístico, não temos como conhecer o evento futuro, mas podemos determinar a probabilidade de que ele ocorra de determinada forma.

Por mais que existam muitas situações possíveis de modelar por experimentos determinísticos, cenários que envolvem experimentos aleatórios são bem mais comuns na realidade. Esse tipo de experimento está relacionado com o estudo da incerteza e,

nesse tipo de análise, quantificar a incerteza nos permite conhecer as chances de sucesso ou erro em um experimento.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Para realizar o estudo de situações que envolvam probabilidade, alguns conceitos fundamentais são essenciais para a compreensão e análise de experimentos aleatórios e suas possibilidades, definiremos alguns desses conceitos iniciais, começando pelo experimento.

Definimos como experimento, uma determinada situação que pode ser repetida por várias vezes sob as mesmas condições ou em condições muito próximas da inicial. A partir disso, é possível construir um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento, esse conjunto é denominado como espaço amostral, que representaremos por S . Outro conceito importante é o de evento, que se refere a quaisquer subconjuntos de resultados conhecidos do espaço amostral, que representaremos por E .

Sheldon Ross (2010), em seu livro *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*, aponta que a melhor forma de definir o valor de uma probabilidade, considerando essa como medida de frequência de ocorrência de determinado evento, com a repetição do experimento, seria “supor um conjunto de axiomas simples autoevidentes para a probabilidade, assumindo que para cada evento E no espaço amostral S , existe um valor $P(E)$ chamado probabilidade de E .” (ROSS, 2009, p.44)

Essa abordagem axiomática segue a noção intuitiva de probabilidade e considera os seguintes axiomas:

Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Que afirma que a probabilidade de determinado evento E ocorrer será igual a algum valor entre 0 e 1.

Axioma 2: $P(S) = 1$

Que indica que a probabilidade de que o resultado de um experimento seja algum elemento do espaço amostral é igual a 1, ou seja, é uma possibilidade garantida.

Axioma 3: Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos E_1, E_2, \dots , temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Que demonstra que, para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de que pelo menos um desses eventos ocorra é igual à soma da probabilidade de cada evento.

Note que, em experimentos onde todos os resultados têm a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, com resultados equiprováveis no espaço amostral S , decorre dos axiomas 2 e 3 que a probabilidade de um evento $P(E)$ é igual à razão entre o número de resultados desse evento $n(E)$ e o número de resultados possíveis no espaço amostral $n(S)$. Dessa forma, para cada evento, temos:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Como as propriedades matemáticas não se alteram, considerando a probabilidade como a frequência de ocorrer um certo evento na repetição de um experimento ou mesmo baseada em uma perspectiva subjetiva do que se acredita que possa ocorrer em determinada situação, serão válidos esses axiomas da probabilidade.

2.2 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Há diversas situações no cotidiano em que temos por objetivo analisar a probabilidade de que um evento E ocorra, sabendo que um outro evento A já ocorreu. Por exemplo, na área de saúde, podemos estudar a probabilidade de que uma doença evolua para o surgimento de determinado sintoma E , dado que outro sintoma A já ocorreu, auxiliando na definição de tratamento, de acordo com as possibilidades de diagnósticos mais prováveis para essa doença. Nessa situação, é necessário que o resultado da análise faça parte do conjunto de doenças que têm o sintoma A , assim como das que apresentam o sintoma E , ou seja, o resultado deve fazer parte da intersecção dos dois eventos.

Então, partindo da afirmação que o evento A ocorreu, reduzimos o espaço amostral aos resultados em que essa condição está presente, essas situações são denominadas como probabilidade condicional.

Dessa forma, representando a probabilidade condicional de que o evento E ocorra, dado que o evento A ocorreu por $P(E | A)$, com $P(A) > 0$, então:

$$P(E | A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}$$

Decorre disso que a probabilidade da intersecção de dois eventos pode ser definida pelo produto da probabilidade de que o evento E ocorra dado que o evento A ocorreu pela probabilidade de que A ocorra, assim temos:

$$P(E \cap A) = P(E | A) \cdot P(A)$$

Quando a probabilidade condicional $P(E | A)$ é igual a $P(E)$, teremos uma situação em que os eventos são independentes, em outras palavras, a ocorrência ou

não do evento A não interfere na probabilidade de ocorrência do evento E . Nesse caso, podemos calcular a probabilidade de que os dois eventos ocorram pelo produto das probabilidades de A e E , logo $P(E \cap A) = P(E | A) \cdot P(A)$.

2.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Muitas vezes, ao realizar um experimento, o importante a ser analisado não são os resultados propriamente ditos, mas o total de possibilidades de resultados que atendem a determinada situação, ou seja, uma função do resultado.

Vejamos um exemplo simples para ilustrar essa situação.

Exemplo 2.3.1: No experimento do lançamento simultâneo de duas moedas, qual a probabilidade de sair ao menos uma cara?

Nesse caso, não nos interessa saber exatamente qual o resultado obtido, mas apenas se o resultado de algum dos lançamentos atende à condição analisada.

Então, podemos definir essas grandezas de interesse como funções reais definidas no espaço amostral, chamadas de variáveis aleatórias, que representaremos por X . Logo, o resultado do experimento irá determinar o valor da variável aleatória, possibilitando que imputemos probabilidades a esses possíveis valores.

Nesse exemplo, temos uma variável aleatória X_n que pode assumir os valores 0, 1 e 2, que correspondem à quantidade de caras obtidas nos lançamentos, com n indicando a moeda lançada, 1 e 2. Dessa forma, representando cara por K e coroa por C :

$$X \in \{0, 1, 2\}, \quad S = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$$

$$P(X = 0) = P(X_1 = C, X_2 = C) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(X_1 = C, X_2 = K) + P(X_1 = K, X_2 = C) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(X_1 = K, X_2 = K) = \frac{1}{4}$$

Note que,

$$\sum_{i=0}^2 P(X = i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$\sum_{i=0}^2 P(X = i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

O que atende aos axiomas apresentados anteriormente.

Consideremos um outro exemplo aplicado.

Exemplo 2.3.2: Suponha que uma empresa de logística precisa analisar o tempo necessário para entregar um pedido após a confirmação da compra, medido em quantidade de dias. Para isso, analisou o tempo das entregas dos últimos meses e observou que o tempo de entrega costuma variar entre 1 e 5 dias.

Nesse caso, podemos definir a variável aleatória X como o tempo entre o pedido ser efetuado e a entrega ser realizada, então:

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ainda, com base na observação realizada dos dados históricos de entregas dos últimos meses, seria possível estimar uma probabilidade de cada valor que a variável aleatória pode assumir, possibilitando estimar com mais precisão os prazos de entrega e auxiliando o planejamento de rotas e a alocação de recursos da empresa.

Nos exemplos 2.3.1 e 2.3.2, a variável assume uma quantidade enumerável e finita de valores, mas nem sempre é isso o que acontece. Devido a isso, classificamos as variáveis aleatórias em contínuas ou discretas.

2.3.1 Variáveis aleatórias discretas

Variáveis aleatórias discretas são aquelas que podem assumir uma quantidade enumerável, finita ou infinita, de valores, com sua função de probabilidade denotada por:

$$p_n(i) = P(X_n = i) = \begin{cases} \geq 0, & \text{se } n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{para os demais valores de } i \end{cases}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(X_n) = 1$$

2.3.2 Variáveis aleatórias contínuas

Variáveis aleatórias contínuas são aquelas que podem assumir uma quantidade de valores impossível de quantificar, definida para todo real $x \in (-\infty, +\infty)$ com sua função de probabilidade denotada por:

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

2.4 VALOR ESPERADO (ESPERANÇA)

Representamos por $E[X]$ a esperança, também denominada como o valor esperado para uma variável aleatória, que é calculada pela média ponderada dos

possíveis valores de X , de acordo com a probabilidade de cada um desses valores, desse modo:

$$E[X] = \sum_{i \in S} x(i) \cdot P(i)$$

$$E[X] = \sum x_i \cdot P(X = i)$$

Exemplo 2.4.1: Considere o experimento do lançamento de um dado honesto de seis faces, com a variável aleatória $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, como todos os valores têm a mesma probabilidade de sair, $P(i) = \frac{1}{6}$, então:

$$E[X] = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot P(i)$$

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E[X] = \frac{21}{6} = 3,5$$

Retomando o exemplo 2.3.2, sobre o tempo necessário para que uma empresa de logística entregue um pedido, suponha que a probabilidade estimada de acordo com o histórico de entregas anteriores foi a seguinte:

Dias (X)	Probabilidade P(X=i)
1	0,20
2	0,15
3	0,40
4	0,20
5	0,05

Table 2: Tempo necessário para entrega de um pedido.

Fonte: Dados fictícios

Nessa situação, o valor esperado nos fornecerá o tempo médio de entrega com base nas probabilidades estabelecidas, assim:

$$E[X] = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P(X = i)$$

$$E[X] = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,05 = 2,75$$

Portanto, o tempo médio esperado para a entrega é de 2,75 dias, ou seja, 2 dias e 18 horas.

O caso acima considera uma variável aleatória discreta, já para variáveis aleatórias contínuas, procedemos a definição da esperança $E[X]$ como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Continuemos com um exemplo similar ao anterior.

Exemplo 2.4.2: Considere que uma empresa de logística identificou que o tempo necessário para realizar a entrega de um pedido, em horas, em uma determinada região da cidade segue uma distribuição de probabilidade definida pela seguinte função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcular o valor esperado do tempo de entrega de um pedido.

Como a esperança é dada por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Então:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8}x dx = \frac{1}{8} \int_0^4 x^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{64}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67 \text{ horas} \end{aligned}$$

Logo, o tempo médio de entrega é de aproximadamente 2 h 40.

2.5 VARIÂNCIA

Embora a esperança nos permita conhecer a média ponderada dos valores da variável aleatória X , é importante ter uma medida para analisar a dispersão dos valores em torno dessa média, o que é possível através do cálculo da variância.

A variância, representada por $Var(X)$, permite calcular, em média, a variação dos valores de X em relação à sua média, que representaremos por μ . Assim, definimos a variância como o valor esperado para o quadrado da diferença entre o valor de x e a sua média.

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

De forma mais prática, a variância de uma variável aleatória X , com função de probabilidade $p(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= \sum_x (x - \mu)^2 p(x) \\ &= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) p(x) \\ &= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\ &= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E[X^2] - \mu^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Vejamos o cálculo da variância para o exemplo 2.4.1 que refere-se ao lançamento de um dado, onde calculamos que $E[X] = 3,5$.

Começamos calculando o valor de $E[X^2]$.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 91 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{91}{6} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} \\ &= \frac{35}{12} \approx 2,92 \end{aligned}$$

No exemplo 2.3.2, a dispersão em relação ao tempo médio de entrega, definido pela variância será:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,05 \\ &= 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,15 + 9 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,05 \\ &= 0,2 + 0,6 + 3,6 + 3,2 + 1,25 = 8,85 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= 8,85 - 2,75^2 \\ &= 8,85 - 7,5625 \\ &= 1,2875 \end{aligned}$$

O que indica que o tempo de entrega apresenta uma dispersão média de aproximadamente 1,29 dias em relação ao tempo médio de entrega.

A partir do valor da variância, podemos calcular o desvio padrão (DP), que consiste na raiz quadrada da variância, assim:

$$DP = \sqrt{1,2875} \approx 1,13$$

O que resulta em uma média de variação de aproximadamente 1 dia no tempo de entrega, em relação à média de 2,75 dias.

Para variáveis aleatórias contínuas, a variância é definida da mesma forma, porém lembrando que a esperança é definida por uma integral no lugar da soma e por uma função densidade de probabilidade.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

Seguindo com o cálculo da variância para o exemplo 2.4.2, vamos calcular inicialmente o valor de $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{8}x dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^4 x^3 dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{256}{4} = \frac{1}{8} \cdot 64 = 8 \end{aligned}$$

Calculando a variância:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \\ &= 8 - \frac{64}{9} = \frac{72}{9} - \frac{64}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,89 \end{aligned}$$

Logo, a média da dispersão do tempo de entrega em relação ao valor esperado é 0,89 horas.

Calculando o desvio padrão:

$$DP = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,94$$

Portanto, o tempo de entrega varia, em média, aproximadamente 1h em relação ao valor esperado.

3

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

No estudo da probabilidade, definimos processo estocástico como um conjunto de variáveis aleatórias (X_n) indexadas por algum parâmetro, como o tempo. Em outros termos, um processo estocástico pode ser considerado como um sistema no qual o estado muda ao longo do tempo, de uma forma não previsível, mas essas mudanças estão associadas a distribuições de probabilidade.

Chamaremos de espaço de parâmetros, o conjunto dos parâmetros relacionados a determinado experimento. Quando o espaço de parâmetros é enumerável, ele é definido como tempo discreto. Por exemplo, no lançamento de um dado de seis faces, temos:

$$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

Nesse caso, os valores de n se referem aos lançamentos do dado.

Quando o espaço de parâmetros consiste em um intervalo real, ele é definido como tempo contínuo.

Podemos ilustrar através de um eletrocardiograma, onde os dados são coletados continuamente durante um período de tempo. Aqui podemos considerar uma variável aleatória contínua que representa algum aspecto do sinal, como o tempo entre dois picos de amplitude do sinal elétrico do coração, onde a variável pode assumir todos os valores reais dentro de um determinado intervalo, assim:

$$\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$$

Podemos também considerar como exemplo uma variável aleatória contínua $X(t)$, que representa a amplitude do sinal do ECG ao longo do tempo t , medida em milivolts (mV), com o sinal oscilando entre -1 mV e $1,5$ mV, nessa situação:

$$X \in [-1; 1,5]$$

Existem diversos métodos de análise de processos estocásticos que podem ser aplicados em diversas áreas do conhecimento, como os métodos de simulação, a teoria da filtragem, as equações diferenciais estocásticas, a função de distribuição de probabilidade, utilizando as cadeias de Markov ou a transformada de Fourier, entre outros.

Prosseguiremos neste trabalho com o estudo das Cadeias de Markov, que possibilitará a análise de situações aplicadas, inter-relacionando diferentes conteúdos da área de Matemática, uma vez que nesse processo são utilizadas matrizes e grafos como ferramenta de cálculo e análise.

Segundo Pérez,

Andrei Markov obteve os primeiros resultados para processos estocásticos discretos finitos em 1906. Uma generalização para espaços de estados infinitos enumeráveis foi dada por Kolmogorov em 1936. A definição dessa propriedade, também chamada de memória Markoviana é que os estados anteriores são irrelevantes para predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. ([PEREZ, 2021, p.2](#))

É importante ressaltar que a utilização de matrizes no cálculo de probabilidades possibilita uma representação objetiva e estruturada de transições entre diferentes estados de um sistema, viabilizando análises mais efetivas, principalmente quando as situações envolvem modelos de evolução ao longo do tempo. Ainda, a utilização de grafos, proporciona uma visualização clara e de fácil compreensão de como os diferentes estados se relacionam, assim como das probabilidades de transição entre eles.

3.1 CADEIAS DE MARKOV

A Cadeia de Markov é um processo estocástico com o tempo discreto e o espaço de estados enumerável, que nos permite representar o comportamento das variáveis de acordo com as possíveis conexões a serem estabelecidas entre elas, utilizando grafos e matrizes. Uma de suas principais características é se tratar de um processo estocástico que não tem memória, ou seja, o estado futuro depende apenas do estado atual, independente do passado.

Logo, um processo estocástico $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ é uma cadeia de Markov se

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$

para todos os estados $i, j, i_0, \dots, i_{n-1}$.

Note que, como o processo Markoviano só depende do estado anterior, então:

$$\begin{aligned} &P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}) \\ &\cdot \dots \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot P(X_0 = i_0) \end{aligned}$$

Uma das formas de representar as probabilidades de transição entre os estados é através de uma matriz quadrada P , cujas entradas P_{ij} são definidas para todos os estados i e j , em que i representa o estado atual (n) e j o estado futuro ($n + 1$), assim:

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0k} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k0} & P_{k1} & \cdots & P_{kk} \end{pmatrix}$$

Nessa matriz, cada elemento representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j e cada linha representa todas as transições possíveis. Sendo assim, a soma dos elementos de cada linha deve ser igual a 1, pois esse conjunto de elementos corresponde a todas as possibilidades de transição possíveis, seja a permanência no estado atual ou mudança para um novo estado, portanto a soma das probabilidades será sempre igual a 1.

Então, uma matriz de probabilidades será uma matriz Markoviana se:

I) Para todo $i \in S$, temos $0 \leq P_{ij} \leq 1$, onde S é o conjunto de estados.

II) $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1$, para todo $i \in S$.

Um processo de Markov é totalmente definido pela sua matriz de probabilidade de transição e a distribuição de probabilidade de X_0 .

Exemplo 3.1.1: Considere que em um conjunto de quatro sites, A , B , C e D , existam links que direcionam o visitante entre eles e que a probabilidade de, estando na página de um desses sites, a pessoa clicar em um dos links e ir para outro site seja conhecida. Então poderíamos ter uma matriz de transição da seguinte forma:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, podemos observar que a probabilidade da pessoa que está no site A permanecer na mesma página é de 20%, de ir para o site B é de 30% e de ir para o site C de 50% e nenhuma probabilidade de ir para o site D . Já a partir do site B , a probabilidade de permanecer no mesmo é de 80%, a de ir para o site D é de 20% e de ir para os sites A ou C é nula. Seguimos a mesma lógica para a análise das outras duas

linhas. Observe que, conforme a definição, a soma dos valores de cada linha é igual a um e todos os estados se relacionam como entrada e saída.

Uma outra forma de representação das transições entre os estados é através de grafos, em que os nós representam os estados e os arcos de conexão se referem às transições entre cada estado.

A mesma matriz de transição acima poderia ser representada como um grafo da seguinte forma:

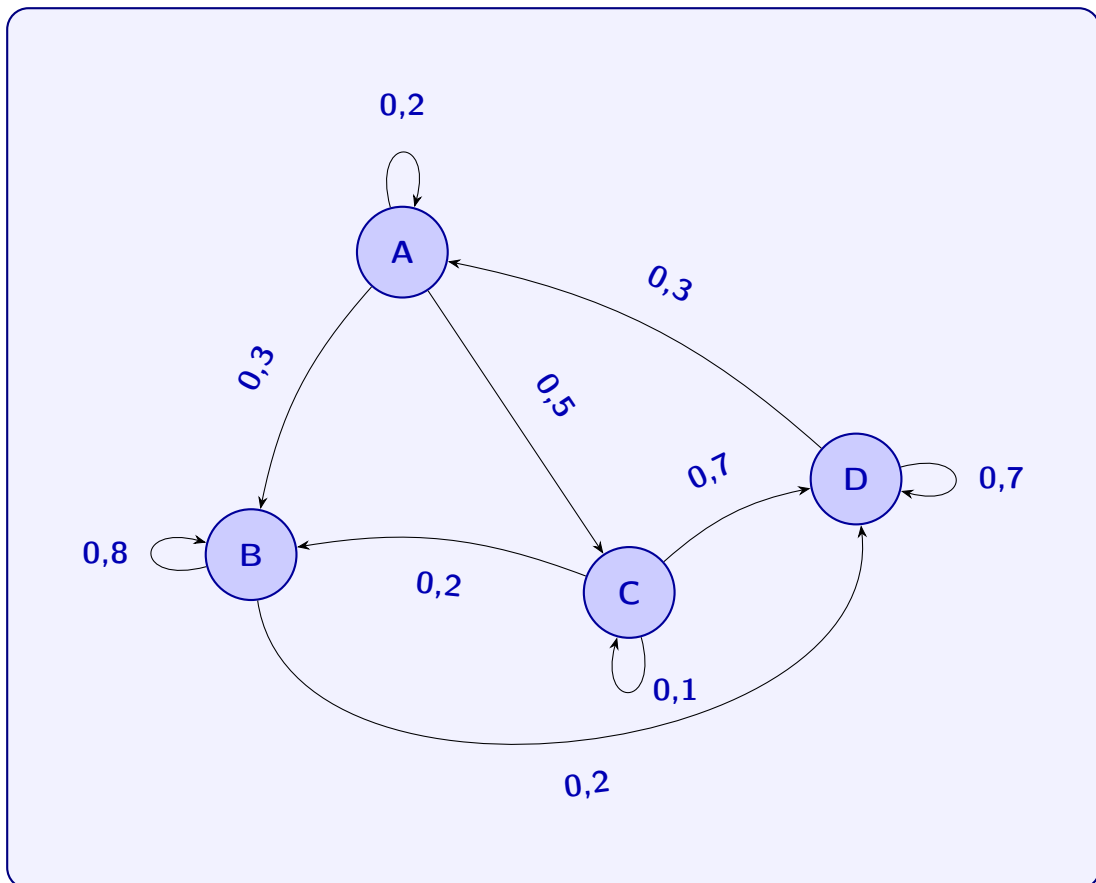


Figure 1: Grafo da matriz de probabilidade de transição entre quatro estados.

Fonte: Autoria própria

Onde as setas indicam os sentidos das transições e os valores de rótulo em cada seta indicam as probabilidades de transição.

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 3.1.2: Considere uma Cadeia de Markov X_0, X_1, \dots, X_n nos estados 0, 1 e 2, que representa a evolução de sintomas em pacientes diagnosticados com uma infecção respiratória, onde os estados representam os sintomas da seguinte forma:

$X_n = 0$ para sintomas leves, $X_n = 1$ para sintomas moderados e $X_n = 2$ para sintomas graves.

Com a seguinte matriz de probabilidade de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$$

E distribuição inicial de probabilidade:

$$P(X_0 = 0) = 0,2, P(X_1 = 1) = 0,5 \text{ e } P(X_2 = 2) = 0,3$$

Para facilitar a visualização das transições, podemos representar a matriz de transição na forma de grafo:

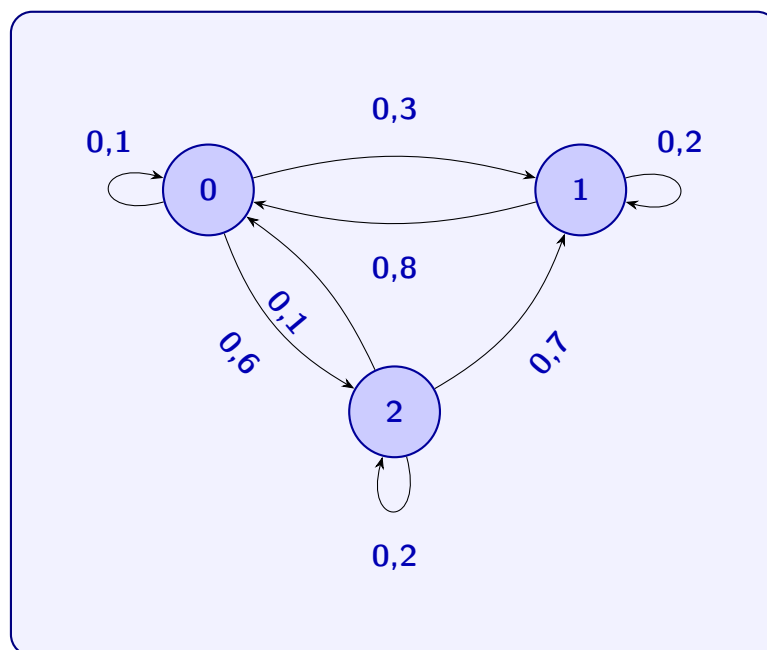


Figure 2: Grafo da matriz de probabilidade de transição entre três estados.

Fonte: Autoria própria

a) Determine $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0)$

Nessa situação, queremos saber a probabilidade de, estando com sintomas leves (estado 0), os sintomas evoluírem para sintomas moderados (estado 1) no dia seguinte, apresentar melhora para leve (estado 0) no dia posterior, evoluir para grave (estado 2) e depois melhorar para leve (estado 0) no último dia considerado.

Para determinar essa probabilidade, basta verificar a probabilidade inicial de $X_0 = 0$ e observar na matriz P as probabilidades de cada transição de estado indicada. Desta forma:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0) \\ &= P(X_0 = 0) \cdot P_{01} \cdot P_{10} \cdot P_{02} \cdot P_{20} \\ &= 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,1 = 0,00288 \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade é menor que 1%.

b) Determine $P(X_1 = 1, X_2 = 0 \mid X_0 = 0)$

Então, dado que o paciente está com sintomas leves (estado 0) no primeiro dia, queremos calcular a probabilidade de apresentar sintomas moderados (estado 1) no dia seguinte e apresentar melhora para sintomas leves (estado 0) no próximo dia. Nesse caso, como o estado inicial já está definido, precisamos apenas considerar as probabilidades das duas transições, de acordo com a matriz P . Então:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 0 \mid X_0 = 0) \\ &= P_{01} \cdot P_{10} \\ &= 0,3 \cdot 0,8 = 0,24 \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade é igual a 24%.

c) Determine $P(X_2 = 2, X_3 = 0 \mid X_1 = 0)$

Ou seja, dado que o paciente está com sintomas leves (estado 0) em determinado dia, queremos determinar a probabilidade de apresentar sintomas graves (estado 2) e melhorar apresentando sintomas leves (estado 0) no dia seguinte.

Nessa situação, o estado inicial X_0 não é conhecido, mas como na Cadeia de Markov o estado futuro só depende do atual, então não é necessário saber esse estado. Então, teremos duas probabilidades de transição para considerar, da mesma forma que no item anterior.

$$P(X_2 = 2, X_3 = 0, \mid X_1 = 0) = P_{02} \cdot P_{20} = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06$$

Logo, a probabilidade é igual a 6%.

Há ainda casos em que se faz necessário calcular diversas transições. Aqui, novamente será de grande importância a utilização de matrizes de probabilidade, permitindo determinar e analisar as probabilidades futuras de um sistema, ou seja, prever a probabilidade do processo estar em determinado estado após n passos através da potenciação da matriz P .

Em uma Cadeia de Markov, a probabilidade de transição do enésimo passo satisfaz a seguinte relação:

Teorema 3.1. *Equações de Chapman-Kolmogorov*

$$P_{i,j}^n = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k} P_{k,j}^{n-1}$$

Onde,

$$P_{ij}^0 = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Esse teorema permite realizar o cálculo da probabilidade para qualquer número de transições que ocorrerem.

Note que, nessa situação, o importante será a distância, ou seja, a diferença entre os índices, logo temos que $(m+n) - m = n$ passos. Ainda, temos que $P_{ik}P_{kj}^{n-1}$ corresponde ao produto entre a probabilidade da transição do estado i para o estado k e a probabilidade de transição do estado k para o estado j com $n - 1$ passos.

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{n+m} &= P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}^n P_{k,j}^m \end{aligned}$$

Utilizamos

$$P(A, B \mid C) = \frac{P(A, B, C)}{P(C)} = \frac{P(A \mid B, C) P(B, C)}{P(C)} = P(A \mid B, C) \cdot P(B \mid C)$$

Exemplo 3.1.3: Considere uma Cadeia de Markov X_0, X_1, \dots, X_n nos estados 0, 1 e 2 com a seguinte matriz de probabilidade de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Calcule:

- a) $P(X_3 = 1 \mid X_1 = 0)$
- b) $P(X_4 = 1 \mid X_2 = 1)$
- c) $P(X_2 = 0 \mid X_0 = 2)$

De forma simples, basta multiplicar a matriz de transição por ela mesma n vezes.

Logo,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,43 & 0,12 & 0,45 \\ 0,46 & 0,14 & 0,40 \\ 0,26 & 0,22 & 0,52 \end{pmatrix}$$

Então:

a) $P(X_3 = 1 \mid X_1 = 0) = 0,12$

b) $P(X_4 = 1 \mid X_2 = 1) = 0,14$

b) $P(X_2 = 0 \mid X_0 = 2) = 0,26$

Exemplo 3.1.4: Uma urna contém duas bolas, uma azul e outra vermelha e, a cada estágio, uma bola é retirada aleatoriamente e substituída por uma nova bola, a qual tem probabilidade igual a 0,8 de ser da mesma cor. Se inicialmente ambas as bolas são vermelhas, qual é a probabilidade de que a quinta bola seja vermelha?

Iremos considerar a variável aleatória X_n , como o número de bolas vermelhas na urna após a n ésima retirada, logo temos uma cadeia de Markov X_0, X_1, \dots, X_n nos estados 0, 1 e 2, que correspondem ao total de bolas vermelhas na urna, com a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Note que $X_4 = 0$, $X_4 = 1$ e $X_4 = 2$ correspondem à possibilidade de tirar uma bola vermelha, contendo respectivamente nenhuma, uma ou duas bolas vermelhas na urna. Sendo assim, partindo da condição inicial de as duas bolas serem vermelhas e utilizando os conceitos de probabilidade condicional, temos:

$$\begin{aligned}
 P(A \mid X_0 = 2) &= \sum_{k=0}^2 P(A, X_4 = k \mid X_0 = 2) \\
 &= \sum_{k=0}^2 P(A \mid X_4 = k, X_0 = 2) \cdot P(X_4 = k \mid X_0 = 2)
 \end{aligned}$$

Calculando a matriz P^4 :

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,487 & 0,435 & 0,077 \\ 0,217 & 0,564 & 0,217 \\ 0,077 & 0,435 & 0,487 \end{pmatrix}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 P(A \mid X_0 = 2) &= P(A \mid X_4 = 0) \cdot P(X_4 = 0 \mid X_0 = 2) + P(A \mid X_4 = 1) \cdot P(X_4 = 1 \mid X_0 = 2) \\
 &\quad + P(A \mid X_4 = 2) \cdot P(X_4 = 2 \mid X_0 = 2) \\
 &= 0 \cdot P(X_4 = 0 \mid X_0 = 2) + \frac{1}{2} \cdot P(X_4 = 1 \mid X_0 = 2) + 1 \cdot P(X_4 = 2 \mid X_0 = 2) \\
 &= 0 \cdot 0,077 + 0,5 \cdot 0,435 + 1 \cdot 0,487 = 0,7045
 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de a quinta bola retirada ser vermelha será, nessas condições, aproximadamente 70%.

Verificamos até aqui que, conhecendo a matriz de transição, ou seja, as probabilidades de estados iniciais e a estrutura da cadeia, podemos caracterizar totalmente o processo markoviano.

A cadeia serve para gerar um processo estocástico e esse pode ser caracterizado como uma sequência de estados resultante dessa cadeia, o que pode ser interpretado como uma sequência temporal. Esse tipo de processo pode ser utilizado, por exemplo,

para gerar textos com inteligência artificial, a partir da análise de como as palavras se articulam em um texto e estimando-se a probabilidade de que uma palavra apareça seguida de outra no texto. Podemos considerar as frases como as transições de um estado para outro, possibilitando a construção de textos diversos a partir de um tema.

3.1.1 Classificação dos estados

Podemos classificar os estados em uma cadeia de Markov como transientes, recorrentes ou absorventes. Observe o grafo a seguir:

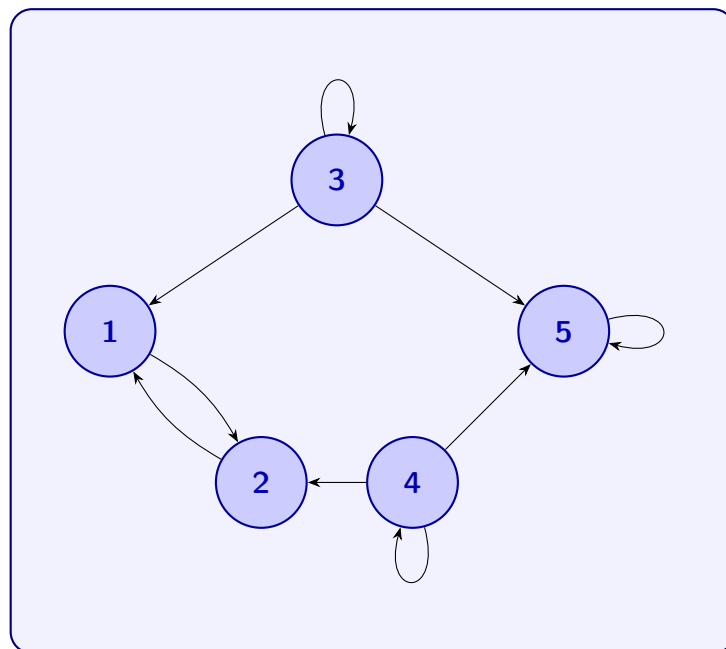


Figure 3: Grafo de transição entre diferentes tipos de estado

Fonte: Autoria própria

Classificamos um estado como transiente quando o visitamos por um tempo e depois não há a possibilidade de retornar para esse estado, é o que acontece nos estados 3 e 4 no grafo acima. Já no estado recorrente, ficamos restritos a um ciclo de repetição de estados de onde não é possível sair, seja transicionando entre uma sequência de

estados ou se mantendo em um único, o que pode ser observado nas transições entre os estados 1, 2 e 5. Por fim, chamamos um estado de absorvente quando, uma vez nesse estado, não é possível passar para nenhum outro, que no grafo é apresentado no estado 5, um exemplo prático que pode ilustrar esse último tipo de transição é uma falha em um sistema computacional que não permita restauração.

3.1.2 Propriedades da Cadeia de Markov

A partir da lei da probabilidade total e da probabilidade condicional, é possível calcular algumas características da Cadeia de Markov, que podemos definir a partir de três propriedades importantes a analisar, a probabilidade de absorção, o tempo médio de absorção e o número médio de visitas a um determinado estado.

De forma geral, dizemos que a probabilidade de absorção considera a possibilidade de chegar a um determinado estado a partir de outro, o tempo médio para absorção verifica quantas transições são necessárias, em média, para chegar a um estado absorvente pela primeira vez e, por fim, o número médio de visitas consiste em calcular quantas vezes se passa por um determinado estado antes de se chegar a um estado absorvente.

Vejamos como realizar o cálculo de cada uma dessas propriedades, começando pela probabilidade de absorção, para isso, é importante saber que chamamos de tempo de absorção, o tempo que se leva para, saindo de um estado não absorvente, se chegar em um estado que seja absorvente.

Exemplo 3.1.5: Considere uma cadeia de três estados, 0, 1 e 2, sendo 0 e 2 absorventes, com uma variável aleatória T definida como o tempo mínimo para se chegar a um desses dois estados, dessa forma:

$$T = \min\{n \geq 0; X_n = 0 \text{ ou } X_n = 2\}$$

Podemos visualizar melhor as possibilidades de uma situação como essa através do seguinte grafo.

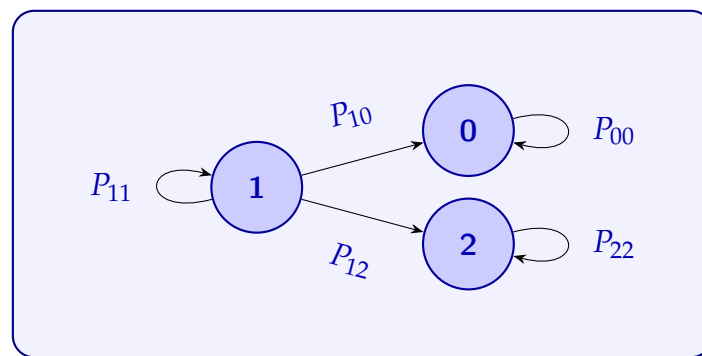


Figure 4: Grafo de transição entre três estados

Fonte: Autoria própria

Vamos determinar inicialmente a probabilidade de chegar no estado 0 dessa cadeia, dado que iniciamos no estado 1 como $P(X_T = 0 \mid X_0 = 1) = u$, logo a probabilidade de chegar no estado 2, dado que iniciamos no estado 1 será $P(X_T = 2 \mid X_0 = 1) = 1 - u$.

Utilizando a lei da probabilidade total (análise do primeiro passo), ou seja, verificando a probabilidade de chegar no estado 0, dado que iniciei no estado 1 e fui para o estado 0, vezes a probabilidade de chegar no estado 0, dado que estava no estado 1, temos:

$$\begin{aligned}
u &= P(X_T = 0 \mid X_0 = 1) \\
&= \sum_{k=0}^2 P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = k) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = 1) \\
&= P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) \\
&\quad + P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\
&\quad + P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = 2) \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
&= 1 \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + u \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) + 0 \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
&= P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + u \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\
&\quad - u \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) \\
&= \frac{P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)}{1 - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)}
\end{aligned}$$

Lembrando que $P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) = 1$, pois essas probabilidades contemplam todas as transições possíveis a partir do estado 1, então $1 - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)$, logo:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)}{P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)} \\
u &= \frac{1}{1 + \frac{P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)}{1 - P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)}}
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de absorção depende apenas da probabilidade de passar do estado 1 para o estado 0 ou para o estado 2.

Para determinar a probabilidade de chegar no estado 2, partindo do estado 1, temos:

$$\begin{aligned}
 1 - u &= P(X_T = 2 \mid X_0 = 1) \\
 1 - u &= \sum_{k=0}^2 P(X_T = 2 \mid X_0 = 1, X_1 = k) \\
 1 - u &= P(X_T = 2 \mid X_0 = 1, X_1 = 2) \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
 &\quad + P(X_T = 2 \mid X_0 = 1, X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\
 &\quad + P(X_T = 2 \mid X_0 = 1, X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) \\
 1 - u &= 1 \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) + (1 - u) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\
 &\quad + 0 \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) \\
 1 - u &= P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) + (1 - u) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\
 1 - u - (1 - u) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) &= P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
 (1 - u)(1 - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)) &= P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
 1 - u &= \frac{P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)}{1 - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)}
 \end{aligned}$$

Como $P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) = 1$, então $P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) = 1 - P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)$.

Logo:

$$\begin{aligned}
 1 - u &= \frac{1 - P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)}{1 - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)} \\
 1 - u &= 1 - \frac{P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)}{1 - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)}
 \end{aligned}$$

Agora, para encontrar o tempo médio de absorção, iremos calcular a esperança da variável aleatória T , que define o tempo de absorção a partir de um estado inicial, nesse caso, o estado 1. Utilizando a lei da esperança total:

$$E[T \mid X_0 = 1] = v$$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=0}^2 E[T \mid X_0 = 1, X_1 = k] \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = 1) \\ v &= E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 0] \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) \\ &\quad + E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 1] \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\ &\quad + E[T \mid X_0 = 1, X_1 = 2] \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\ v &= 1 \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + (1 + v) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\ &\quad + 1 \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\ v &= P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\ &\quad + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) + v \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\ v &= 1 + v \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\ v - v \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) &= 1 \\ v &= \frac{1}{1 - P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)} \end{aligned}$$

Portanto, o tempo de absorção no estado 0 ou no estado 2 será inversamente proporcional à probabilidade de ficar no mesmo estado após a transição.

Exemplo 3.1.6: Considere a Cadeia de Markov com a seguinte matriz de probabilidade de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular a probabilidade de absorção no estado 0, partindo do estado 1 e a esperança do tempo médio de absorção.

$$\begin{aligned}
 u &= P(X_T = 0 \mid X_0 = 1) \\
 u &= \sum_{k=0}^2 P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = k) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = 1) \\
 u &= P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) \\
 &\quad + P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\
 &\quad + P(X_T = 0 \mid X_0 = 1, X_1 = 2) \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
 u &= 1 \cdot 0,1 + u \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,3 \\
 u &= 0,1 + 0,6u \\
 u - 0,6u &= 0,1 \\
 0,4u &= 0,1 \\
 u &= \frac{0,1}{0,4} = 0,25 = 25\%
 \end{aligned}$$

Podemos generalizar o cálculo para uma quantidade n de estados, sendo assim, suponha um conjunto de estados transientes, formado pelos estados $0, 1, \dots, r-1$, e um conjunto de estados absorventes, formado pelos estados $r, r+1, \dots, n$, de forma ordenada para facilitar os cálculos. Então, teremos uma matriz dividida em blocos que vão definir as probabilidades de transição entre esses estados.

	trans.	absorv.
	$0, 1, \dots, r-1$	r, \dots, n
trans.	$\left(\begin{array}{c c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$	
$0, 1, \dots, r-1$		
absorv.		
r, \dots, n		

Nessa matriz, o bloco Q representa as transições entre estados transientes. O bloco R representa as transições de estados transientes para absorventes. O bloco 0 representa as transições de estados absorventes para transientes, porém sabemos que um estado absorvente apenas recebe conexões e, uma vez nesse estado, não haverá transições para nenhum outro, logo todas as probabilidades serão nulas. O bloco I representa as transições entre estados absorventes, observe que um estado absorvente só terá conexões com ele mesmo, logo a probabilidade será igual a 1 nas transições entre o mesmo estado, formando uma matriz identidade nesse bloco.

Portanto, com essa ordenação teremos uma matriz com forma bem definida e que possibilitará calcular a probabilidade P_{ij} de sair de um estado i e ser absorvido em um estado j ou o tempo que leva para que essa absorção aconteça.

Começemos pela análise do primeiro passo, pela lei da probabilidade total, a probabilidade de absorção em um estado k dado que o processo iniciou no estado i será dada por $u_{ik} = P(X_T = k \mid X_0 = i)$, $T = \min\{n \geq 0 \mid X_n \geq r\}$, sendo k um estado absorvente e T uma variável aleatória que representa o tempo até a absorção. Logo,

$$u_{ik} = \sum_{j=0}^n P(X_T = k \mid X_0 = i, X_1 = j) \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

$$\begin{aligned} u_{ik} &= P(X_T = k \mid X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = i) + P(X_T = k \mid X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = i) + \dots \\ &+ P(X_T = k \mid X_1 = r - 1) \cdot P(X_1 = r - 1 \mid X_0 = i) \\ &+ P(X_T = k \mid X_1 = r) \cdot P(X_1 = r \mid X_0 = i) + \dots \\ &+ P(X_T = k \mid X_1 = k) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i) + \dots \\ &+ P(X_T = k \mid X_1 = n) \cdot P(X_1 = n \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

Observe que, do termo $P(X_T = k \mid X_1 = r)$ em diante, as transições partem de estados absorventes, logo a probabilidade é igual a zero, então:

$$u_{ik} = u_{0k} + u_{1k} + \cdots + u_{(r-1)k} + \cdots + 0 + \cdots + 1 + \cdots + 0$$

Portanto:

$$u_{ik} = P_{ik} + \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij}u_{jk}$$

$$u_{ik} = P_{ik} + \sum_{j \in \text{transientes}}^{r-1} P_{ij}u_{jk}$$

Enfim, essa relação pode ser utilizada para calcular qualquer tipo de Cadeia de Markov que contenha algum estado absorvente.

Para definir o tempo médio de absorção, dado que o processo iniciou no estado i :

$$\begin{aligned} v_i &= E[T \mid X_0 = i], \quad i = 0, 1, \dots, n \\ &= \sum_{j=0}^n E[T \mid X_0 = i, X_1 = j] \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= E[T \mid X_1 = 0] \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = i) + E[T \mid X_1 = 1] \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = i) + \cdots \\ &\quad + E[T \mid X_1 = r-1] \cdot P(X_1 = r-1 \mid X_0 = i) + E[T \mid X_1 = r] \cdot P(X_1 = r \mid X_0 = i) \\ &\quad + \cdots + E[T \mid X_1 = n] \cdot P(X_1 = n \mid X_0 = i) \\ &= (1 + v_0) + (1 + v_1) + \cdots + (1 + v_{r-1}) + 1 + \cdots + 1 \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} (1 + v_j)P_{ij} + \sum_{j=r}^n P_{ij} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij} + \sum_{j=0}^{r-1} v_j P_{ij} + \sum_{j=r}^n P_{ij} \\ &= \sum_{j=0}^n P_{ij} + \sum_{j=r}^{r-1} v_j P_{ij} \\ &= 1 + \sum_{j \in \text{transientes}} v_j P_{ij} \end{aligned}$$

Determinando assim uma equação para calcular o tempo médio até a absorção.

Veja essa relação aplicada à situação ilustrada no grafo da figura 5:

$$E[T \mid X_0 = 1] = v$$

$$v = 1 + P_{11} \cdot v_1$$

$$v_1 - v_1 \cdot P_{11} = 1$$

$$v_1(1 - P_{11}) = 1$$

$$v = \frac{1}{1 - P_{11}}$$

Exemplo 3.1.7: Uma moeda é lançada sucessivamente até que duas caras apareçam em sequência. Escreva a matriz de probabilidade de transição e determine o número médio de lançamentos necessários.

Primeiro, iremos estabelecer os estados possíveis, considerando K como cara e C como coroa, para dois lançamentos teríamos a seguinte árvore de possibilidades.

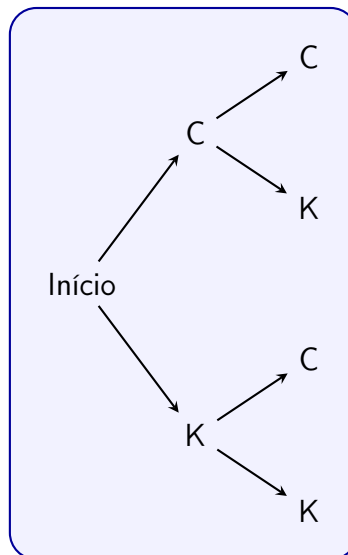


Figure 5: Árvore de possibilidades para dois lançamentos consecutivos de uma moeda.

Fonte: Autoria própria

Observe que, se o primeiro lançamento sair cara, no segundo já teríamos duas caras ou, se sair coroa, voltaríamos para o estado inicial.

É possível expandir essa ideia considerando o lançamento onde obtemos a primeira cara como n e o lançamento seguinte como $n + 1$.

Façamos a análise para três lançamentos. Nessa situação, há três estados para considerar, obter duas coroas, obter uma coroa e uma cara, ou obter duas caras. Para a análise, há duas perguntas a serem respondidas: quantas caras foram obtidas até o lançamento atual e quantas caras serão obtidas no lançamento seguinte.

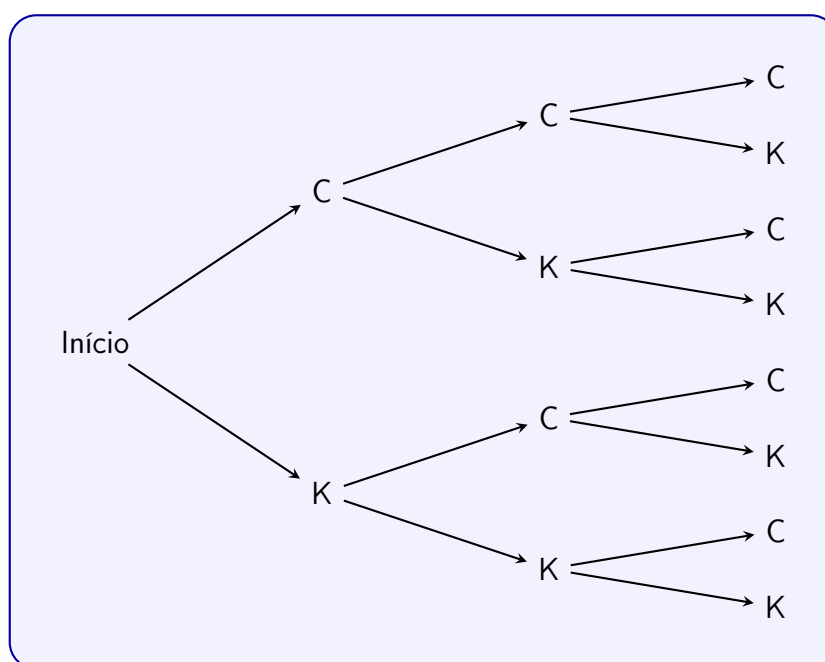


Figure 6: Árvore de possibilidades para três lançamentos consecutivos de uma moeda.

Fonte: Autoria própria

Logo a matriz de transição terá três estados, sendo a variável aleatória $X_n = \{0, 1, 2\}$ que representa o número de caras em sequência até o lançamento, como segue:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que as linhas representam o número de caras até o lançamento n e as colunas, o número de caras no lançamento $n + 1$, observe ainda que o estado 2 é um estado absorvente, pois encerra o jogo.

Calculando o tempo médio, temos:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= E[T \mid X_0 = 0] \\
 v_0 &= \sum_{k=0}^2 E[T \mid X_0 = 0, X_1 = k] \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = 0) \\
 v_0 &= E[T \mid X_1 = 0] \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) + E[T \mid X_1 = 1] \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) \\
 &\quad + E[T \mid X_1 = 2] \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
 v_0 &= (1 + v_0) \cdot \frac{1}{2} + (1 + v_1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \\
 v_0 &= \frac{1}{2} + \frac{v_0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{v_1}{2} \\
 v_0 &= 1 + \frac{v_0 + v_1}{2}
 \end{aligned}$$

Para v_1 :

$$\begin{aligned}
 v_1 &= E[T \mid X_0 = 1] \\
 v_1 &= \sum_{k=0}^2 E[T \mid X_0 = 1, X_1 = k] \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = 1) \\
 v_1 &= E[T \mid X_1 = 0] \cdot P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) + E[T \mid X_1 = 1] \cdot P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) \\
 &\quad + E[T \mid X_1 = 2] \cdot P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\
 v_1 &= (1 + v_0) \cdot \frac{1}{2} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} \\
 v_1 &= \frac{1}{2} + \frac{v_0}{2} + \frac{1}{2} \\
 v_1 &= 1 + \frac{v_0}{2}
 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}v_0 &= 1 + \frac{v_0 + 1 + \frac{v_0}{2}}{2} \\v_0 &= 1 + \frac{v_0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{v_0}{4} \\v_0 - \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{4} &= \frac{4v_0 - 2v_0 - v_0}{4} = \frac{v_0}{4} = \frac{3}{2} \\v_0 &= \frac{12}{2} = 6\end{aligned}$$

Portanto, lançando várias vezes uma moeda, obtemos uma sequência de caras e coroas, que chamaremos de X_i , até sair cara, então contamos quantos lançamentos foram realizados, logo o valor estimado para $v_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

4

ENSINO DE PROBABILIDADE UTILIZANDO DE CADEIAS DE MARKOV

Como dito anteriormente, o estudo de probabilidade na educação básica é essencial para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a análise e intervenção na realidade em diversos contextos. Contudo, mesmo que esteja prevista a abordagem desse tema desde a primeira etapa da educação escolar, muitas vezes a proposta de ensino se torna superficial por não considerar as múltiplas possibilidades de integração com demais conteúdos estudados na área de Matemática e o contexto interdisciplinar de aplicação dos conceitos de probabilidade.

Nessa perspectiva, as Cadeias de Markov constituem um instrumento com grande potencial para o trabalho com a modelagem matemática de fenômenos reais em sala de aula, através da análise crítica de dados e do desenvolvimento do raciocínio probabilístico, articulado a outras áreas do conhecimento.

Este capítulo apresenta cinco propostas de situações-problema baseadas na análise de sistemas estocásticos com memória limitada, como uma alternativa para o aprimoramento dos conhecimentos de probabilidade no Ensino Médio, indo além dos conceitos básicos que geralmente são abordados. As atividades propostas estão alinhadas com as competências e as habilidades da BNCC e consideram que os alunos já tenham consolidado conhecimentos prévios sobre definição, propriedades e cálculo de probabilidade, que serão aplicados em situações mais complexas do que as comumente presentes nos livros didáticos.

A primeira proposta apresenta um modelo simples de análise para duas possibilidades de estados relacionados à previsão do tempo, entre chuvoso ou não chuvoso. Esse processo consiste em uma aplicação de fácil compreensão para iniciar o estudo de modelagem de situações por meio de conceitos das Cadeias de Markov, uma vez que todos os dias nos preocupamos em conhecer a condição climática através de questões como se irá chover ou não, se fará calor ou frio, o que nos orienta a tomar decisões cotidianas, como a escolha da roupa adequada ou do meio de transporte para ir ao trabalho ou à escola. Diante disso, conhecer como essa previsão é realizada será uma reflexão importante para iniciar a discussão sobre esse modelo de probabilidade em sala de aula.

A segunda situação trata de um processo que envolve a escolha dos meios de transporte utilizados pelos estudantes, dessa vez trabalhando com três estados, de forma a possibilitar uma ampliação dos conceitos abordados no primeiro problema, integrando o estudo de probabilidade com o estudo de matrizes e de grafos.

No terceiro problema apresentado, propõe-se a discussão e cálculo de probabilidade a partir de um contexto de análise agrícola, introduzindo os conceitos de esperança, variância e desvio padrão, que não foram abordados nas propostas anteriores, aprofundando a proposta reflexiva do emprego de probabilidades na modelagem de situações aplicadas a contextos reais.

Na quarta proposta, foi abordada uma aplicação na área biológica, com o estudo da migração de tartarugas marinhas. Nessa situação-problema, aprofunda-se o estudo sobre variáveis aleatórias, uma vez que o problema foi construído com o emprego de duas variáveis de diferentes tipos, com certa relação de dependência, reforçando os conhecimentos trabalhados nos problemas anteriores, que vão se somando à nova análise introduzida.

A última situação-problema foi elaborada a partir da adaptação do problema da ruína do jogador, apresentado e discutido por Sheldon Ross (2014, p.220) como uma

aplicação importante das Cadeias de Markov. Nessa situação, procurou-se trabalhar com o emprego de variáveis aleatórias contínuas e cálculo de probabilidades para análise de riscos. Embora parte dos conhecimentos prévios necessários para alguns cálculos relacionados não esteja prevista no currículo do Ensino Médio, a proposta foi apresentada com os cálculos de forma simplificada, a partir de fórmulas apresentadas previamente para que não seja necessário utilizar integrais.

Cabe destacar que todas as propostas foram elaboradas considerando um caráter interdisciplinar e cenários contextualizados dentro de uma realidade que seja significativa para os estudantes.

4.1 ATIVIDADE 1 - ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE PREVISÃO DO TEMPO

Situação-problema: Na cidade Endor, um instituto de meteorologia analisou o tempo durante certo período e observou que, se em determinado dia está chovendo, a probabilidade de chover no dia seguinte é de 60%, mas se não está chovendo nesse dia, a probabilidade de chover no dia seguinte é de 30%.

Os dados obtidos foram organizados na seguinte tabela:

Estado Atual \ Próximo	Chuva (C)	Sem Chuva (S)
Chuva (C)	0,6	0,4
Sem Chuva (S)	0,3	0,7

Table 3: Probabilidade de chuva na cidade Endor.

Com base nessas informações:

- a) Construa uma matriz de transição P que represente esse processo.
- b) Construa a árvore de possibilidades que ilustra esse processo.
- c) Supondo que hoje está chovendo, qual a probabilidade de chover amanhã?
- d) Dado que hoje está chovendo, qual a probabilidade de não chover no 10º dia, sabendo que no dia anterior choveu?
- e) Supondo que não está chovendo hoje, determine a probabilidade de chover nos próximos dois dias, consecutivamente?
- f) Determine a probabilidade de que o clima siga a seguinte sequência:
 - 1º dia - sem chuva
 - 2º dia - chuvoso
 - 3º dia - chuvoso
 - 4º dia - sem chuva
 - 5º dia - chuvoso

A partir da situação acima, o professor pode propor que os alunos discutam sobre o significado das probabilidades apresentadas no enunciado e a importância de representar esses dados de forma estruturada, através de tabelas e matrizes. Além disso, pode estimular que elaborem outras questões e reflitam sobre quais fatores poderiam influenciar a variação de probabilidade de cada situação.

Espera-se que o estudante, ao realizar essa atividade, consiga:

- I. Utilizar matrizes para representar dados probabilísticos;
- II. Representar probabilidades através de árvores de possibilidades;
- III. Aplicar noções de cálculo de probabilidade condicional;

IV. Analisar o comportamento de um processo estocástico ao longo do tempo;

V. Compreender e aplicar conceitos básicos da Cadeia de Markov.

A resolução de cada item segue abaixo:

a) Considerando a variável aleatória X representando as condições de chuva, nos estados 0 e 1, com as linhas da matriz representando o estado atual e as colunas o estado futuro, temos $X_n = 0$ para "chove" e $X_n = 1$ para "não chove"

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

b) A situação pode ser representada através da seguinte árvore de possibilidades, em que C representa "chove" e N representa "não chove":

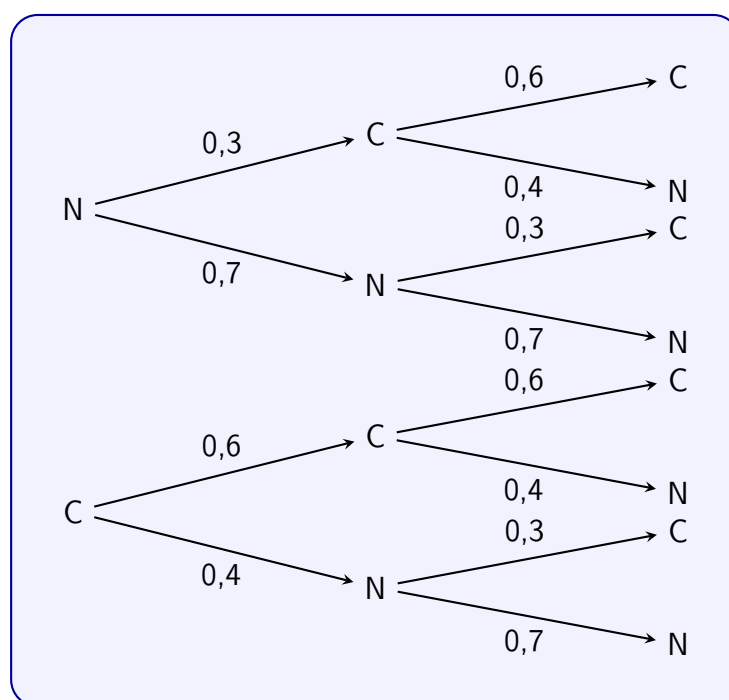


Figure 7: Árvore de possibilidades da probabilidade de chuva em três dias consecutivos.

Fonte: Autoria própria

c) Basta observar o valor na matriz de transição.

$$P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = P_{00} = 0,6$$

Logo, a probabilidade é de 60%.

d) Como o estado futuro depende apenas do estado atual, basta observar na matriz de transição a probabilidade de não chover no dia seguinte, considerando que no dia atual choveu.

$$P(X_{10} = 1 \mid X_9 = 0) = P_{01} = 0,4$$

Logo, a probabilidade é de 40%.

e) Nesse caso, podemos visualizar de forma clara na árvore de possibilidades, identificando a sequência que satisfaz o solicitado na questão.

$$P(X_2 = 0, X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$$

$$P_{10} \cdot P_{00} = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

Logo, a probabilidade é de 18%.

f) Como no caso anterior, identificamos a probabilidade de cada transição e realizamos o cálculo através do produto das probabilidades.

$$P(X_4 = 0, X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$$

$$P_{10} \cdot P_{00} \cdot P_{01} \cdot P_{10} = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,0216$$

Logo, a probabilidade é de 2,16%.

4.2 ATIVIDADE 2 - PROBABILIDADE DE UTILIZAÇÃO DE DIFERENTES MEIOS DE TRANSPORTE

Situação-problema: Em uma pesquisa sobre hábitos de modalidade realizada com os alunos da escola Pequeno Padawan, verificou-se que os principais meios de transporte utilizados por eles para ir à escola são carro, bicicleta e ônibus. Constatou-se também que o meio utilizado por cada estudante varia devido a fatores como o clima e o tempo de deslocamento. Analisando as variações do tipo de transporte utilizado ao longo de um determinado período, foi possível estabelecer a probabilidade de transição entre os diferentes meios utilizados durante a semana. Os dados obtidos estão dispostos na matriz a seguir, onde cada linha representa o meio utilizado no dia atual e cada coluna o meio utilizado no dia seguinte.

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- Defina a variável aleatória relacionada a essa situação.
- Represente a matriz de transição através de um grafo.
- Determine a probabilidade de um aluno que foi de bicicleta dois dias seguidos ir de carro no terceiro dia.
- Supondo que um aluno foi à escola de ônibus hoje, qual a probabilidade de ele ir de bicicleta daqui a dois dias?
- Qual a probabilidade de um aluno ir de carro para escola na sexta-feira, sabendo que na quarta ele foi de bicicleta?

- f) Considere que em certo dia 20% dos alunos foram à escola de carro, 30% de bicicleta e 50% de ônibus, calcule a probabilidade referente a utilização de cada meio de transporte no dia seguinte.

Essa situação-problema possibilita a discussão em sala de aula de temas como mobilidade urbana e políticas de transporte. No estudo da probabilidade, os estudantes podem refletir sobre os conceitos de transição entre estados, aprofundar os conhecimentos sobre aplicação de Cadeias de Markov na modelagem de fenômenos e aprimorar as habilidades de interpretação de resultados. Ainda, a situação pode ser ampliada com dados obtidos a partir de pesquisas realizadas pelos estudantes sobre os meios de transporte que utilizam ou acrescentando mais modalidades de transporte no estudo.

Os objetivos de aprendizado esperados com essa atividade são:

- I. Compreender conceitos de definição de variáveis aleatórias e estados de um processo estocástico;
- II. Representar transições de estados através de grafos;
- III. Aplicar conhecimentos de operações entre matrizes no cálculo de probabilidades;
- IV. Compreender e aplicar o cálculo de probabilidade condicional em processos markovianos;

A resolução de cada item segue abaixo:

- a) A variável aleatória X representa o meio de transporte utilizado pelos alunos a cada dia, nos estados 0, 1 e 2, assim $X_n \in \{0, 1, 2\}$, em que:

$X_n = 0$ para carro.

$X_n = 1$ para bicicleta.

$X_n = 2$ para ônibus.

b) A representação da matriz de transição através de um grafo pode ser realizada assim:

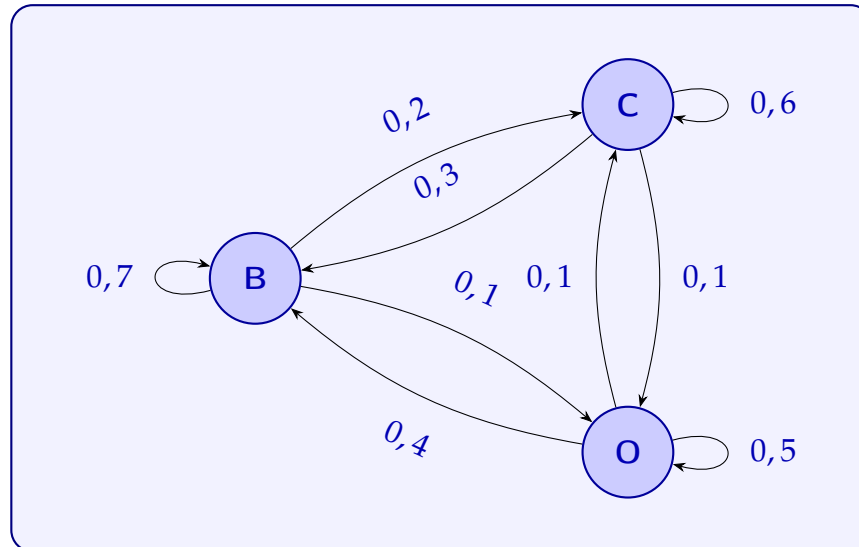


Figure 8: Grafo de transição entre três estados.

Fonte: Autoria própria

c) Identificamos a probabilidade de cada transição e fazemos o produto das probabilidades.

$$P(X_2 = 0, X_1 = 1 \mid X_0 = 1)$$

$$P_{11} \cdot P_{10} = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$$

Logo, a probabilidade é de 14%.

d) Nesse caso, como queremos calcular a probabilidade de duas transições, primeiro faremos P^2 .

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,36 + 0,06 + 0,01 & 0,18 + 0,21 + 0,04 & 0,06 + 0,03 + 0,05 \\ 0,12 + 0,14 + 0,01 & 0,06 + 0,49 + 0,04 & 0,02 + 0,07 + 0,05 \\ 0,06 + 0,08 + 0,05 & 0,03 + 0,28 + 0,20 & 0,01 + 0,04 + 0,25 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,43 & 0,43 & 0,14 \\ 0,27 & 0,59 & 0,14 \\ 0,19 & 0,51 & 0,30 \end{pmatrix}$$

Então, a partir da matriz P^2 :

$$P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = 0,51$$

Logo, a probabilidade é de 51%.

e) Procedemos da mesma forma que no item anterior, a partir da matriz P^2 .

$$P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = 0,27$$

Logo, a probabilidade é de 27%.

f) Temos a seguinte distribuição inicial de probabilidade $A = (0,2 \ 0,3 \ 0,5)$.

Portanto:

$$A \cdot P = (0,2 \ 0,3 \ 0,5) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot P = (0,12 + 0,06 + 0,05 \quad 0,06 + 0,21 + 0,20 \quad 0,02 + 0,03 + 0,25)$$

$$A \cdot P = (0,23 \quad 0,47 \quad 0,30)$$

Logo, a probabilidade de um estudante ir de carro será de 23%, de bicicleta será de 47% e de ônibus será de 30%.

4.3 ATIVIDADE 3 - RESULTADOS DA UTILIZAÇÃO DE UM FERTILIZANTE NO PLANTIO DE CAFÉ

Situação-problema: Em um curso de engenharia agrônoma, deu-se início ao estudo dos efeitos da utilização de um novo fertilizante no plantio de café. Após a aplicação do fertilizante na terra, o desenvolvimento das plantas foi acompanhado por um tempo e observou-se ao longo dos dias que cada uma delas poderia ser encontrada em um dos seguintes estados, enfraquecida E , saudável S ou florescendo F .

Definindo a variável aleatória X_n como a quantidade de plantas florescendo em determinado dia, com $X_n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e considerando que as transições estão representadas no grafo a seguir, obtido através da observação de uma amostra de 1000 cafeeiros durante certo período.

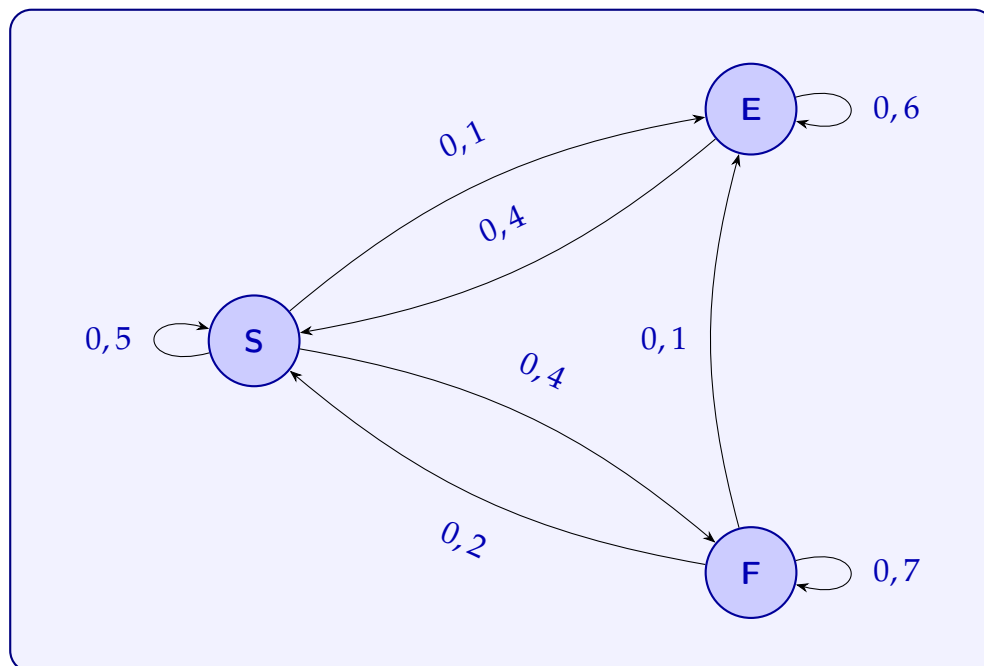


Figure 9: Grafo da probabilidade de transição entre os estados de saúde de cafeeiros

Fonte: Autoria própria

Analise e responda às seguintes questões.

- a) Quantos cafeeiros estarão em cada estado no dia seguinte da aplicação, considerando que inicialmente todas inicialmente estavam enfraquecidas?
- b) Represente o processo através de uma matriz de transição de probabilidades.
- c) Se no dia da aplicação do fertilizante há 500 plantas enfraquecidas, 300 saudáveis e 200 florescendo, quantas estarão florescendo no segundo dia?
- d) Determine a probabilidade de um cafeeiro florescer dois dias após a aplicação do fertilizante, considerando que inicialmente ele estava enfraquecido.
- e) Considerando que inicialmente a amostra apresenta uma distribuição uniforme, calcular a esperança de florescimento para a variável aleatória X .
- f) Calcule a variância e o desvio padrão considerando a distribuição inicial uniforme.

A situação acima procura mobilizar o conhecimento de construção e operação entre matrizes na modelagem de situações contextualizadas que envolvem processos estocásticos. Essa proposta pode ser aprofundada através da reflexão dos significados dos valores encontrados para o valor esperado, a esperança e o desvio-padrão, inclusive estimulando os alunos a calcularem essas medidas considerando outras situações iniciais de distribuição ou mesmo da expansão da análise de probabilidade para períodos maiores do que o sugerido de dois dias.

Ao propor esse problema, pretende-se que os alunos desenvolvam as seguintes habilidades:

- I. Compreender o conceito de variável aleatória e sua aplicação;
- II. Compreender a representação e os resultados de produtos entre matrizes aplicados ao cálculo de probabilidades.
- III. Analisar representações de probabilidades através de grafos.

IV. Calcular e analisar os valores relacionados à esperança, à variância e ao desvio padrão de distribuições de probabilidade

V. Utilizar Cadeias de Markov na modelagem de problemas aplicados em diversas áreas.

A resolução de cada item segue abaixo:

a) Considerando que todos os cafeeiros da amostra estavam enfraquecidos inicialmente, basta aplicar o percentual de probabilidade no total de elementos da amostra.

$$1000 \cdot 0,6 = 600$$

$$1000 \cdot 0,4 = 400$$

Como a probabilidade de algum estar florescendo é igual a zero, então serão 600 enfraquecidos, 400 saudáveis e nenhum florescendo.

b) A partir dos dados do grafo, a matriz de transição será:

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

c) Novamente, basta proceder com o cálculo do percentual de probabilidade sobre cada valor e verificar o total.

$$500 \cdot 0 = 0$$

$$300 \cdot 0,4 = 120$$

$$200 \cdot 0,7 = 140$$

$$0 + 120 + 140 = 260$$

Logo, há um total de 260 plantas florescendo.

d) Consideramos para o cálculo as possibilidades de transição.

$$\begin{aligned}
 &P(X_2 = 2, X_1 = 0 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 2, X_1 = 1 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 2, X_1 = 2 \mid X_0 = 0) \\
 &= P_{00} \cdot P_{02} + P_{01} \cdot P_{12} + P_{02} \cdot P_{22} \\
 &= 0,6 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,7 \\
 &= 0 + 0,16 + 0 = 0,16
 \end{aligned}$$

O que também poderia ser feito pelo produto entre matrizes, fazendo P^2 , mas só precisamos conhecer o valor do produto da primeira linha, que representa o estado atual E , pela terceira coluna, que representa o estado futuro F .

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

Logo, a probabilidade é de 16%.

e) Iniciemos calculando a probabilidade do segundo passo.

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \\
 P^2 &= \begin{pmatrix} 0,36 + 0,04 + 0 & 0,24 + 0,20 + 0 & 0 + 0,16 + 0 \\ 0,06 + 0,05 + 0,04 & 0,04 + 0,25 + 0,08 & 0 + 0,20 + 0,28 \\ 0,06 + 0,02 + 0,07 & 0,04 + 0,10 + 0,14 & 0 + 0,08 + 0,49 \end{pmatrix} \\
 P^2 &= \begin{pmatrix} 0,40 & 0,44 & 0,16 \\ 0,15 & 0,37 & 0,48 \\ 0,15 & 0,28 & 0,57 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Calculando a esperança, considerando a amostra inicial.

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum x_i \cdot P(X = i) \\
 E[X] &= \left(\frac{1}{3} \cdot 0,16 + \frac{1}{3} \cdot 0,48 + \frac{1}{3} \cdot 0,57 \right) \cdot 1000 \\
 E[X] &= (0,16 + 0,48 + 0,57) \cdot \frac{1000}{3} \\
 E[X] &= 1,21 \cdot \frac{1000}{3} \\
 E[X] &\approx 403,33
 \end{aligned}$$

Logo, o valor esperado será de aproximadamente 403 cafeeiros florescendo após 2 dias da aplicação do fertilizante.

f) Começamos calculando $E[X^2]$.

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \left(\frac{1}{3} \cdot 0,16^2 + \frac{1}{3} \cdot 0,48^2 + \frac{1}{3} \cdot 0,57^2 \right) \cdot 1.000^2 \\
 E[X^2] &= (0,0256 + 0,2304 + 0,3249) \cdot \frac{1.000.000}{3} \\
 E[X^2] &= 0,5809 \cdot \frac{1.000.000}{3} \\
 E[X^2] &\approx 193.633,33
 \end{aligned}$$

Em seguida, fazemos a variância.

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
 Var(X) &= 193.633 - 403^2 \\
 Var(X) &= 193.633 - 162.409 \\
 Var(X) &= 31.224
 \end{aligned}$$

Logo, a variância será de 31.224, o que representa uma grande dispersão em torno do valor médio.

Calculando o desvio padrão.

$$DP = \sqrt{31.224} \approx 176,7$$

Portanto, o desvio padrão será de aproximadamente 177 cafeeiros, em relação ao valor esperado.

4.4 ATIVIDADE 4 - ANÁLISE DE MIGRAÇÃO DE TARTARUGAS MARINHAS

Situação-problema: Um instituto de proteção ambiental estudou o deslocamento de tartarugas marinhas entre três regiões do litoral brasileiro, classificando-as da seguinte forma:

$A \rightarrow$ área de alimentação;

$D \rightarrow$ área de descanso;

$R \rightarrow$ área de reprodução.

Para analisar a migração das tartarugas entre essas regiões, foi realizado um acompanhamento por sinal de GPS ao longo de vários dias, onde constatou-se que, em um intervalo de 24 horas, uma tartaruga pode permanecer na mesma região ou se deslocar para outra. As probabilidades de migração observadas estão organizadas na

seguinte matriz, onde cada linha representa a região atual da tartaruga e cada coluna a região em que ela estará no dia seguinte.

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Além disso, observou-se que cada região apresenta um custo energético diário relacionado ao esforço realizado pela tartaruga ao se locomover, se alimentar e proteger o ninho, sendo esse gasto associado a cada área da seguinte forma:

A: 3 unidades;

D: 1 unidade;

R: 4 unidades.

Considere que uma tartaruga está inicialmente na área de alimentação.

- a) Defina quais as variáveis aleatórias envolvidas nessa situação e determine os seus valores.
- b) Calcule a probabilidade da tartaruga estar na área de descanso após dois dias?
- c) Determine o valor esperado do custo energético no segundo dia.
- d) Calcule a variância do custo energético no segundo dia.
- e) Determine o local esperado que a tartaruga esteja após 5 dias.

Um problema como esse permite fomentar discussões conectadas à área de biologia e consciência ambiental, onde os alunos podem refletir sobre quais outras variáveis poderiam ser consideradas em situações como essa e a variabilidade de dados

envolvidos, a partir da aplicação de cálculos de probabilidades e interpretação de resultados. Os estudantes também podem simular variações de rotas de migração e verificar o comportamento mais provável, com o objetivo de planejar ações de proteção da vida dessa espécie de tartarugas-marinhas e de preservação ambiental dessas regiões de acordo com as épocas prováveis de presença das tartarugas nesses locais.

Com essa situação-problema, pretende-se que os alunos consigam:

- I. Identificar e relacionar variáveis aleatórias em um processo probabilístico;
- II. Realizar cálculo de probabilidades, diferenciando eventos dependentes e independentes;
- III. Aplicar conhecimentos de operações entre matrizes no cálculo de probabilidades;
- IV. Compreender e aplicar o conceito da Cadeia de Markov em contextos reais;
- V. Determinar e interpretar o valor da esperança e da variância de variáveis aleatórias dependentes do estado de um sistema markoviano.

A resolução de cada item segue abaixo:

a) Estão envolvidas nesse processo duas variáveis aleatórias. A variável aleatória X , que corresponde à localização da tartaruga no tempo t e a variável aleatória Y , que corresponde ao custo energético da tartaruga no tempo t .

$X_t \in \{0, 1, 2\}$, em que:

$X_t = 0$, para a área de alimentação (A);

$X_t = 1$, para a área de descanso (D);

$X_t = 2$, para a área de reprodução (R).

$Y_t \in \{1, 3, 4\}$, em que:

$Y_t = 1$, se $X_t = 1$;

$Y_t = 3$, se $X_t = 0$;

$Y_t = 4$, se $X_t = 2$.

Note que a variável Y depende diretamente de X , ou seja, o valor de Y_t é determinado de acordo com o valor de X_t .

b) Para que a tartaruga, partindo da região de alimentação, esteja na região de descanso após dois dias, temos as seguintes possibilidades:

$A \rightarrow A \rightarrow D$

$A \rightarrow D \rightarrow D$

$A \rightarrow R \rightarrow D$

Podemos calcular a probabilidade dessas situações, multiplicando a linha da matriz que representa as probabilidades de transição para os três possíveis estados a partir de A , pela segunda coluna, que representa as probabilidades de transição de cada estado para o estado 1, ou seja, a região de descanso.

$$(0,5 \quad 0,3 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} & P(X_2 = 1, X_1 = 0 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 1, X_1 = 1 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 1, X_1 = 2 \mid X_0 = 0) \\ &= P_{00} \cdot P_{01} + P_{01} \cdot P_{11} + P_{02} \cdot P_{21} \\ &= 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,2 \\ &= 0,15 + 0,18 + 0,04 = 0,37 \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade é de 37%.

c) Já conhecemos a probabilidade de a tartaruga estar na área de descanso no segundo dia. De forma análoga, calculamos a probabilidade para as outras duas áreas.

Para estar na área de alimentação após dois dias, temos:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & P(X_2 = 0, X_1 = 0 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 2 \mid X_0 = 0) \\ &= P_{00} \cdot P_{00} + P_{01} \cdot P_{10} + P_{02} \cdot P_{20} \\ &= 0,5 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,1 \\ &= 0,25 + 0,06 + 0,02 = 0,33 \end{aligned}$$

Para estar na área de repouso após dois dias, temos:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & P(X_2 = 2, X_1 = 0 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 2, X_1 = 1 \mid X_0 = 0) + P(X_2 = 2, X_1 = 2 \mid X_0 = 0) \\ &= P_{00} \cdot P_{02} + P_{01} \cdot P_{12} + P_{02} \cdot P_{22} \\ &= 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 \\ &= 0,10 + 0,06 + 0,14 = 0,30 \end{aligned}$$

Calculando a esperança:

$$E[X] = \sum x_i \cdot P(X = i)$$

$$E[X] = 3 \cdot 0,33 + 1 \cdot 0,37 + 4 \cdot 0,30$$

$$E[X] = 0,99 + 0,37 + 1,20 = 2,56$$

Logo, o valor esperado será de 2,56 unidades.

d) Como já conhecemos o valor de $E[X]$, começamos calculando o valor de $E[X^2]$.

$$E[X^2] = 3^2 \cdot 0,33 + 1^2 \cdot 0,37 + 4^2 \cdot 0,30$$

$$E[X^2] = 9 \cdot 0,33 + 1 \cdot 0,37 + 16 \cdot 0,30$$

$$E[X^2] = 2,97 + 0,37 + 4,80$$

$$E[X^2] = 8,14$$

Calculando a variância:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\text{Var}(X) = 8,14 - 2,56^2$$

$$\text{Var}(X) = 8,14 - 6,5536$$

$$\text{Var}(X) = 1,5864$$

Logo, a variância será de 1,5864 unidades².

e) Observe que nesse item é solicitado o local esperado, que consiste no local mais provável de encontrar a tartaruga nesse dia. Para isso, basta calcular a probabilidade de realizar as cinco transições, pela potência da matriz P e verificar qual a maior probabilidade que atende às condições colocadas.

Calculando P^5 , temos:

$$P^5 = P \cdot P \cdot P \cdot P \cdot P$$

$$P^5 \approx \begin{pmatrix} 0,2910 & 0,3790 & 0,3300 \\ 0,2882 & 0,3827 & 0,3291 \\ 0,2871 & 0,3824 & 0,3295 \end{pmatrix}$$

Logo, verificando a matriz, temos que o local mais provável de encontrar essa tartaruga após 5 dias será na região de descanso, com probabilidade de aproximadamente 38%, o maior valor encontrado na matriz partindo da região A .

4.5 ATIVIDADE 5 - PROBLEMA DA RUÍNA DO JOGADOR

Situação-problema: Nos finais de semana, sempre acontecem diversas competições de eSports. Em uma dessas competições, Léia participou de partidas ranqueadas apostando pontos virtuais. Em cada rodada do jogo, ela pode ganhar um ponto com probabilidade de 40% ou perder um ponto com probabilidade de 60%. O jogo termina quando ela atinge a vitória ao acumular cinco pontos ou a ruína, quando ela fica com os pontos zerados.

O saldo de pontos nessa competição pode ser modelado por uma Cadeia de Markov com seis estados, em que o estado 0 corresponde à ruína, os estados 1 a 4 correspondem ao jogo em andamento e o estado 5 corresponde à vitória. Note que os estados 0 e 5 implicam no fim do jogo.

Considere que o tempo de cada partida, em minutos, seja uma variável aleatória contínua $X \in [5, 15]$ com distribuição uniforme, ou seja, a duração de cada partida varia de 5 a 15 minutos, com a mesma probabilidade.

Aplicando a fórmula da probabilidade para o problema da ruína do jogador, com $p \neq q$.

$$P_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, \text{ com } i = \text{fortuna inicial e } N = \text{meta}$$

E para os cálculos de valor esperado e de esperança:

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Onde a e b são os limites do intervalo.

- a) Defina os tipos de estados envolvidos nessa situação e construa uma matriz de transição para representá-la.
- b) Se em determinado momento da competição Léia estiver com 3 pontos, qual a probabilidade de ela ser arruinada?
- c) Calcule a probabilidade de vitória, caso Léia esteja com 4 pontos em certo momento.
- d) Considerando que Léia esteja com 3 pontos, determine o número médio de rodadas para que o jogo termine.
- e) A partir da resposta do item anterior, calcule o valor esperado para o tempo total do jogo.
- f) Considerando que a variável aleatória X representa o tempo de uma única rodada, determine a variância e o desvio padrão.

Essa situação-problema foi construída baseada em um problema clássico da área da probabilidade, chamado de problema da ruína do jogador. Nessa atividade, o estudante poderá ampliar seus conhecimentos sobre a aplicação das Cadeias de Markov na resolução de problemas que envolvem probabilidade, utilizando variáveis contínuas, que não foram utilizadas nas atividades propostas anteriormente. Ainda, pode servir

de base para discussões de análise de riscos que podem servir de base para orientar decisões ao longo de toda a vida do estudante.

Os objetivos de aprendizagem para essa proposta são:

- I. Identificar e diferenciar estados de uma Cadeia de Markov;
- II. Aplicar conceitos de probabilidade condicional na resolução de problemas contextualizados;
- III. Compreender e realizar cálculos de probabilidade aplicados a processos estocásticos envolvendo variáveis aleatórias contínuas;
- IV. Calcular e interpretar o valor esperado, a variância e o desvio padrão para variáveis aleatórias contínuas.

A resolução de cada item segue abaixo:

a) Na situação apresentada, os estados possíveis podem ser classificados como:

Estados absorventes: 0 (ruína) e 5 (vitória)

Estados transientes: 1, 2, 3 e 4 (jogo em andamento)

Representados pela matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nessa matriz, cada linha representa a pontuação atual e cada coluna a pontuação futura.

b) Utilizando a fórmula apresentada no problema.

$$P_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} = \frac{\left(\frac{0,6}{0,4}\right)^3 - 1}{\left(\frac{0,6}{0,4}\right)^5 - 1}$$

$$P_3 = \frac{1,5^3 - 1}{1,5^5 - 1} = \frac{3,375 - 1}{7,59375 - 1} = \frac{2,375}{6,59375} \approx 0,36$$

Logo, a probabilidade de atingir a ruína e encerrar o jogo será próxima de 36%.

c) Utilizando a fórmula apresentada no problema.

$$P_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} = \frac{\left(\frac{0,6}{0,4}\right)^4 - 1}{\left(\frac{0,6}{0,4}\right)^5 - 1}$$

$$P_4 = \frac{1,5^4 - 1}{1,5^5 - 1} = \frac{5,0625 - 1}{7,59375 - 1} = \frac{4,0625}{6,59375} \approx 0,62$$

Logo, a probabilidade de ruína será de aproximadamente 62%.

Como

$$P_{vitoria} = 1 - P_{ruina}$$

$$P = 1 - 0,62 = 0,38$$

Então, a probabilidade de vitória será de aproximadamente 38%.

d) Seja x_i o número esperado de rodadas realizadas até a absorção no estado i . Como os estados 0 e 5 são absorventes, então $x_0 = 0$ e $x_5 = 0$.

Para os demais estados, temos:

$$x_i = 1 + p \cdot x_{i+1} + q \cdot x_{i-1}$$

$$x_1 = 1 + 0,4x_2 + 0,6x_0 = 1 + 0,4x_2$$

$$x_2 = 1 + 0,4x_3 + 0,6x_1$$

$$x_3 = 1 + 0,4x_4 + 0,6x_2$$

$$x_4 = 1 + 0,4x_5 + 0,6x_3 = 1 + 0,6x_3$$

Substituindo x_4 em x_3 :

$$x_3 = 1 + 0,4x_4 + 0,6x_2$$

$$x_3 = 1 + 0,4(1 + 0,6x_3) + 0,6x_2$$

$$x_3 = 1 + 0,4 + 0,24x_3 + 0,6x_2$$

$$x_3 - 0,24x_3 = 1,4 + 0,6x_2$$

$$0,76x_3 = 1,4 + 0,6x_2$$

Substituindo x_1 em x_2 :

$$x_2 = 1 + 0,4x_3 + 0,6x_1$$

$$x_2 = 1 + 0,4x_3 + 0,6(1 + 0,4x_2)$$

$$x_2 = 1 + 0,4x_3 + 0,6 + 0,24x_2$$

$$x_2 - 0,24x_2 = 1,6 + 0,4x_3$$

$$0,76x_2 = 1,6 + 0,4x_3$$

$$x_2 = \frac{1,6 + 0,4x_3}{0,76}$$

Resolvendo o sistema:

$$0,76x_3 = 1,4 + 0,6 \left(\frac{1,6 + 0,4x_3}{0,76} \right)$$

$$0,76x_3 = 1,4 + \frac{0,96 + 0,24x_3}{0,76}$$

$$0,76x_3 = \frac{1,064 + 0,96 + 0,24x_3}{0,76}$$

$$0,5776x_3 = 2,024 + 0,24x_3$$

$$0,5776x_3 - 0,24x_3 = 2,024$$

$$0,3376x_3 = 2,024$$

$$x_3 = \frac{2,024}{0,3376} \approx 5,99$$

Logo, estima-se que haverá em média 6 rodadas até que o jogo termine.

e) Como a distribuição é uniforme no intervalo $[5, 15]$, podemos calcular o tempo de uma rodada a partir do ponto médio do intervalo, pois todos os valores dentro do intervalo são equiprováveis.

$$E[X] = \frac{5 + 15}{2} = 10$$

Logo, o tempo médio de duração de um jogo é de 10 minutos. Sendo assim, o tempo médio considerando o total de rodadas para que o jogo termine nessas condições será de 60 minutos.

f) Para o cálculo da variância, primeiro determinamos $E[X]$ e $E[X^2]$, que nesse caso serão dadas por:

$$E(X) = \frac{b + a}{2}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{b - a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Onde a e b são os limites do intervalo.

Como a variância é definida por

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

então:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\ \text{Var}(X) &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} \\ \text{Var}(X) &= \frac{4(b-a)(b+a)^2 - 3(b-a)(b+a)^2}{12(b-a)} \\ \text{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\text{Var}(X) = \frac{(15-5)^2}{12} = \frac{10^2}{12} = \frac{100}{12} \approx 8,3$$

Calculando o desvio-padrão:

$$DP = \sqrt{8,3} \approx 2,9$$

Logo, a média da dispersão do tempo de uma rodada em relação à média será de aproximadamente 8 minutos, sendo o desvio dos valores em relação à média de aproximadamente 3 minutos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação escolar é um fator de grande importância para inserir o indivíduo em diversos contextos da sociedade, porém muitas vezes as aulas são limitadas à transmissão de conteúdos prontos, distantes da realidade na qual o educando está inserido, isso acontece especialmente com a Matemática, já que esta é considerada uma ciência lógica e imutável, e seus conteúdos são apenas passados para os estudantes através de fórmulas, postulados, regras e algoritmos que são decorados através de exercícios que são repetidos exaustivamente, sem que haja um aprendizado real e significativo.

Dentro dos assuntos estudados na disciplina, a probabilidade é um dos conteúdos de mais evidente aplicação prática, pois todos os dias precisamos lidar com situações que envolvem escolhas, imprevisibilidade e incerteza, além de estar presente no currículo desde os primeiros anos do Ensino Fundamental até o final do Ensino Médio. Sendo assim, uma ótima oportunidade para o professor iniciar um trabalho mais conectado com a realidade, ultrapassando os limites do conteúdo e abordando questões históricas, sociais e culturais.

O caminho traçado historicamente no campo educacional nos conduziu através de mudanças no currículo e nas metodologias de ensino, que propõem a utilização de ferramentas que possibilitem a mobilização de diversos conhecimentos e permitam que os estudantes sejam desafiados e coloquem em prática seus conhecimentos, além de possibilitar o protagonismo e a cooperação entre os envolvidos. Cabe aos sistemas de ensino e aos educadores repensar antigos formatos e escolher o que guiará a sua prática.

No estudo de probabilidade houve muitos avanços, visto que esta área da Matemática foi incluída nos currículos escolares há menos de 30 anos, a partir da publicação dos PCNs em 1997 e expandida em todos os níveis de ensino com a implementação da BNCC a partir de 2018. Porém, apenas as orientações curriculares não são suficientes para que haja mudanças no ensino, os conceitos e aplicações da probabilidade ainda são vistos muitas vezes de forma superficial e isolada de outros conhecimentos, mesmo se observarmos os planos de ensino de Matemática, diferentes conteúdos são trabalhados de forma desconectada, no Ensino Médio essa condição pode ser agravada pela ideia equivocada empregada em algumas escolas de que nessa etapa de ensino o foco principal deva ser a preparação para o vestibular.

Isso evidencia a importância de pesquisas nessa área, que possam subsidiar a ação docente, que foi o objetivo deste trabalho, apresentar uma outra perspectiva no ensino de probabilidade, que integre os conhecimentos de matrizes, sistemas lineares e teoria dos grafos aos estudos de probabilidade, além de extrapolar as situações simples e os conceitos básicos que comumente são abordadas nas aulas.

Diante disso, propusemos o estudo de processos estocásticos através de problemas modelados pelas Cadeias de Markov, que não costumam fazer parte do que é proposto de se trabalhar nas aulas, mas que permitem aprofundar os estudos de probabilidade, fomentando a discussão sobre diferentes modelos probabilísticos e possibilitando que os estudantes mobilizem os diferentes conhecimentos da área de Matemática citados anteriormente e que tenham contato com aplicações mais avançadas e contextualizadas em diferentes áreas do conhecimento, garantindo uma abordagem interdisciplinar, baseada na resolução de problemas e dentro de um contexto real.

Para além de novas propostas isoladas, é fundamental repensar a abordagem da probabilidade nos livros didáticos e na formação de professores, para que o ensino de probabilidade sobre outra perspectiva possa alcançar todos os espaços educacionais.

A mudança se faz necessária e, sendo essa a nossa escolha, mais que um mero discurso social, essa opção deve ser efetiva, a promoção do indivíduo e os ideais de formação humana, crítica e cidadã deve ser fazer presente em todos os momentos dentro das salas de aula para que a educação escolar de fato contribua na construção de uma nova sociedade.

BIBLIOGRAPHY

GERDES, P.(1989): *Sobre o conceito de Etnomatemática*.

BARTON, B.(2002): *Ethnomathematics and indigenous people's education*1-12.

KNIJNIK, G.(2003): *Currículo, etnomatemática e educação popular: um estudo em um assentamento do movimento sem terra*, 1: 96-110.

GAL, I.(2005): *Towards "Probability Literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas*39-63.

CABERLIM, C. / COUTINHO, C(2013): *O ensino atual de Probabilidade na escola básica: um estudo do guia do PNLD 2012*.

BRANDÃO, C. R. (1981): *O que é educação.* , São Paulo: Brasiliense.

BRASIL (1824): *Constituição Política do Império do Brasil. Carta de Lei de 25 de Março de 1824*

Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao24.htm.

BRASIL (1996): *Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*

Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm.

BRASIL, Ministério da Educação (2018): *Base Nacional Comum Curricular, homologada em 14 de dezembro de 2018*.

Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

- D'AMBROSIO, U. (1996): *Educação Matemática: da teoria à prática.* , Campinas: Papyrus Editora.
- FREIRE, P. (1996): *Pedagogia da autonomia.* , São Paulo: Paz e Terra.
- FREIRE, P. (2013): *Pedagogia do oprimido.* , São Paulo: Paz e Terra.
- FRIGOTTO, G. (1995): *Educação e a crise do capitalismo real.* , São Paulo: Cortez.
- PEREZ, F. L. (2021): *Notas de aula da disciplina CE064 - Tópicos Especiais de Estatística IV (Modelos Markovianos) da UFPR*
Disponível em: <http://leg.ufpr.br/~lucambio/>.
- ROSS, S. M. (2009): *Probabilidade: um curso moderno com aplicações.* , Bookman Editora.
- ROSS, S. M. (2014): *Introduction to probability models.* , Academic press.
- VALENTE, N. (2000): *Sistemas de ensino e legislação educacional: estrutura e funcionamento da educação básica e superior.* , São Paulo: Panorama.