



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

JULIANA BRUNA GUIMARÃES FRANCO CORRÊA

**SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: POSSÍVEIS APLICAÇÕES  
NO ENSINO MÉDIO**

Santo André, 2025

**JULIANA BRUNA GUIMARÃES FRANCO CORRÊA**

**SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: POSSÍVEIS APLICAÇÕES  
NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição da Universidade Federal do ABC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima

Santo André, 2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Corrêa, Juliana Bruna Guimarães Franco  
Sistemas dinâmicos discretos : possíveis aplicações no ensino  
médio / Juliana Bruna Guimarães Franco Corrêa. — 2025.

106 fls. : il.

Orientação de: Maurício Firmino Silva Lima

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo  
André, 2025.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Mapa logístico. 3. Planos de aula. 4.  
Geogebra. I. Lima, Maurício Firmino Silva. II. Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2025. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única da autora e com a anuência do orientador.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado e Folha  
de Assinaturas**

No dia 15 de Agosto de 2025 às 14:00, no local: Remota SA, realizou-se a Defesa da Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado "SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: POSSÍVEIS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO" de autoria da candidata, JULIANA BRUNA GUIMARÃES FRANCO CORRÊA, RA nº 22202110358, discente do Programa de Pós-Graduação em MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da UFABC, sob orientação do Profº MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi considerada APROVADA pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

Documento assinado digitalmente



MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA  
Data: 18/08/2025 10:58:57-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Dr. MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA, UFABC**

Presidente - Interno ao Programa

Documento assinado digitalmente



RAFAEL DE MATTOS GRISI  
Data: 18/08/2025 13:42:15-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Dr. RAFAEL DE MATTOS GRISI, UFABC**

Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

Documento assinado digitalmente



ALEXANDRE LYMBERPOULOS  
Data: 18/08/2025 08:43:03-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Dr. ALEXANDRE LYMBERPOULOS, USP**

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

---

**Dr. JEFERSON CASSIANO, UFABC**

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

---

**Dr. MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS, UFAM**

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Dedico este trabalho a Deus, que me sustentou e fortaleceu até aqui.

*"Bem sei eu que tudo podes, e que nenhum dos  
teus propósitos pode ser impedido." (Jó 42:2)*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me capacitar e me fortalecer durante esta jornada, principalmente nos dias de exaustão em que eu duvidei da minha capacidade de concluir este trabalho.

Ao meu colega de trabalho, Professor Antônio Uzan, pelo incentivo constante e pelas cobranças em relação à minha dedicação. As suas palavras ressoaram diversas vezes na minha mente.

Ao Prof. Dr. Rafael Grisi, que foi o responsável por eu não desistir do curso no primeiro ano. Sua humildade ao se atentar a uma aluna como eu, que teve uma formação tão rasa, me incentivaram a não parar de buscar o conhecimento.

Ao Anderson, pelo apoio no último ano que antecedeu a conclusão deste trabalho. Por me acalmar e me amparar nos momentos de crise e choro, insistindo em dizer que eu conseguiria concluir.

Ao Prof. Dr. Maurício Firmino, pela paciência, pela orientação diante da minha falta de preparo, pelos diversos encontros e por compartilhar o seu profundo conhecimento comigo. De fato, esse tempo sob a sua orientação foi um divisor de águas na minha formação.

Aos meus pais, Natanael e Carla, ao meu irmão Felipe, e à minha tia Tânia pelo apoio moral.

À CAPES, pela bolsa que me possibilitou reduzir a jornada de trabalho durante os dois primeiros anos do curso.

Ao meu querido diretor Prof. Luiz Cruz e à minha coordenadora Prof<sup>a</sup> Roseli Dias, pela compreensão e incentivo diante da minha dificuldade de conciliar estudo e trabalho. Serei eternamente grata.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT 2021, por compartilharem os seus conhecimentos, por dividirem os momentos de angústia, pelo apoio e pelas palavras de incentivo.

Aos professores do PROFMAT que nos ensinaram e nos conduziram à aprovação no ENQ.

Obrigada!

## RESUMO

Os sistemas dinâmicos discretos são utilizados em análises de comportamento e evolução dos fenômenos ao longo do tempo, a partir de uma regra determinística. Estudos de populações, circuitos eletrônicos, sistemas econômicos e processos biológicos, podem ser modelados como sistemas dinâmicos discretos.

Neste trabalho foram abordados conceitos relacionados ao funcionamento e o comportamento dos sistemas dinâmicos discretos. Através de ferramentas matemáticas os conceitos foram apresentados e, com exemplos verificamos a aplicabilidade desses conceitos. A motivação da escolha deste tema foi a facilidade em conectá-lo a outros componentes curriculares, como biologia, física, economia, etc.

Além disso, foram elaborados planos de aula de acordo com as habilidades que constam na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Na elaboração destes planos, buscamos inserir recursos tecnológicos para demonstrar teoria e prática de maneira mais atrativa, a fim de gerar uma aprendizagem significativa para os estudantes.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos; Mapa logístico; Planos de aula; Geogebra.

# ABSTRACT

Discrete dynamical systems are used to analyze the behavior and evolution of phenomena over time based on deterministic rules. Studies involving populations, electronic circuits, economic systems, and biological processes can be modeled as discrete dynamical systems.

This dissertation explores concepts related to the functioning and behavior of discrete dynamical systems. Using mathematical tools, the theoretical foundations are demonstrated, and examples are provided to illustrate their applicability. The choice of this topic was motivated by its potential to connect with other curricular components, such as biology, physics, economics, and more.

Additionally, lesson plans were developed in alignment with the competencies outlined in the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC). These plans incorporate technological resources to present theory and practice in a more engaging way, aiming to foster meaningful learning experiences for students.

Keywords: Discrete dynamical systems; Logistic map; Lesson plans; GeoGebra.

# Lista de ilustrações

Figura 1	–	Representação gráfica do Teorema de Rolle. . . . .	7
Figura 2	–	Representação gráfica do Teorema do Valor Médio. . . . .	7
Figura 3	–	Primeiro passo para a construção do Diagrama Cobweb. O gráfico da função $f(x) = ax + b$ está em vermelho, e o gráfico da função identidade $h(x) = x$ está em azul. . . . .	14
Figura 4	–	Segundo passo para a construção do Diagrama Cobweb. . . . .	15
Figura 5	–	Terceiro passo para a construção do Diagrama Cobweb. . . . .	15
Figura 6	–	Quarto passo para a construção do Diagrama Cobweb. Repetição do passo 2. . . . .	16
Figura 7	–	Representação gráfica do Diagrama Cobweb de uma função afim. . . . .	16
Figura 8	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = x_n + 1$ , com $x_0 = 0,3$ e $n < 14$ . . . . .	19
Figura 9	–	Órbita de $x_0 = 0,3$ sobre $x_{n+1} = x_n + 1$ com $n < 5$ . . . . .	19
Figura 10	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = x_n - 1$ , com $x_0 = 0,3$ e $0 \leq n \leq 10$ . . . . .	20
Figura 11	–	Órbita de $x_0 = 0,3$ sobre $x_{n+1} = x_n - 1$ . . . . .	20
Figura 12	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = x_n$ , com $x_0 = 0,5$ e $0 \leq n < 12$ . . . . .	21
Figura 13	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = -x_n + 3$ , com $x_0 = 0,5$ e $0 \leq n < 12$ . . . . .	22
Figura 14	–	Órbita de $x_0 = 0,5$ sobre $x_{n+1} = -x_n + 3$ . . . . .	22
Figura 15	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = 2x_n + 1$ , com $x_0 = 0$ e $0 \leq n \leq 10$ . . . . .	23
Figura 16	–	Órbita de $x_0 = 0$ sobre $x_{n+1} = 2x_n + 1$ . . . . .	23
Figura 17	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = 2x_n + 1$ , com $x_0 = -2$ e $0 \leq n \leq 10$ . . . . .	24
Figura 18	–	Órbita de $x_0 = -2$ sobre $x_{n+1} = 2x_n + 1$ . . . . .	24
Figura 19	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = -2x_n + 1$ , com $x_0 = 0,5$ e $0 \leq n \leq 10$ . . . . .	25
Figura 20	–	Órbita de $x_0 = 0,5$ sobre $x_{n+1} = -2x_n + 1$ . . . . .	26
Figura 21	–	Evolução do mapa $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$ , com $x_0 = 0,5$ e $0 \leq n \leq 30$ . . . . .	27
Figura 22	–	Órbita de $x_0 = 0,5$ sobre $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$ . . . . .	27
Figura 23	–	Exemplo de crescimento populacional utilizando os modelos de Malthus e Verhulst. . . . .	31
Figura 24	–	Representação gráfica do mapa logístico com $r = 4$ . . . . .	32
Figura 25	–	Diagrama Cobweb de $x_0 = 0,1$ sobre $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ . . . . .	34
Figura 26	–	Diagrama Cobweb de $x_0 = 0,6$ sobre $x_{n+1} = 0,9x_n(1 - x_n)$ . . . . .	34
Figura 27	–	órbita de $x_0 = 0,6$ sobre $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ . . . . .	36
Figura 28	–	Órbita de $x_0 = 0,2$ sobre $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ . . . . .	37
Figura 29	–	Órbita de $x_0 = 0,5$ sobre $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ . . . . .	38

Figura 30	–	Órbita de $x_0 = 0,1$ sobre $x_{n+1} = 3,5x_n(1 - x_n)$ . . . . .	38
Figura 31	–	Órbita de $x_0 = 0,5$ sobre $x_{n+1} = 3,5x_n(1 - x_n)$ . . . . .	39
Figura 32	–	Órbita de $x_0 = 0,5$ sobre $x_{n+1} = 3,56x_n(1 - x_n)$ . . . . .	39
Figura 33	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = 3,6x_n(1 - x_n)$ com $x_0 = 0,5$ . . . . .	40
Figura 34	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ , com $x_0 = 0,7$ . . . . .	41
Figura 35	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ , com $x_0 = 0,1$ . . . . .	41
Figura 36	–	Diagrama de bifurcações. . . . .	43
Figura 37	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ , com $x_0 = 0,5$ e $\bar{x}_0 = 1,2$ . . . . .	46
Figura 38	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = -x_n^2 + 3x_n - 1$ , com $x_0 = 0,5$ e $\bar{x}_0 = 1,5$ . . . . .	48
Figura 39	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = x_n^3 + x_n$ , com $x_0 = 0,25$ e $\bar{x}_0 = -0,3$ . . . . .	49
Figura 40	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = -x_n^3 + x_n$ , com $x_0 = 0,4$ e $\bar{x}_0 = -0,4$ . . . . .	50
Figura 41	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = \frac{x}{2} + x^2 + \frac{xe^x}{2}$ , com $x_0 = 0,5$ e $\bar{x}_0 = -0,5$ . . . . .	55
Figura 42	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = -x_n^3 - x_n$ , com $x_0 = 0,2$ . . . . .	56
Figura 43	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = -\text{sen}x$ com $x_0 = 0,5$ e $n \leq 20$ . . . . .	57
Figura 44	–	Diagrama Cobweb de $x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n)$ , com $x_0 = 0,8$ . . . . .	59
Figura 45	–	Gráfico das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ . . . . .	72
Figura 46	–	Gráfico das funções $f(x) = x$ e $h(x) = 2x$ . . . . .	73
Figura 47	–	Gráfico das funções $f(x) = x$ e $m(x) = x^3$ . . . . .	74
Figura 48	–	Gráfico das funções $f(x) = x$ e $n(x) = x^2 + 1$ . . . . .	74
Figura 49	–	Gráfico das funções $f(x) = x$ e $q(x) = -x^2 - 1$ . . . . .	75
Figura 50	–	Pontos fixos de $g(x) = x^2$ , com $x_0 = 1,5$ e $\bar{x}_0 = -0,5$ . . . . .	77
Figura 51	–	Evolução dos pontos de $h(x) = 2x$ , com $x_0 = 0,25$ e $\bar{x} = -0,25$ . . . . .	79
Figura 52	–	Evolução dos pontos de $q(x) = \frac{x}{2}$ , com $x_0 = 1,6$ e $\bar{x}_0 = -1,6$ . . . . .	80
Figura 53	–	Resolução da atividade 01 - Grupo 01. . . . .	82
Figura 54	–	Resolução da atividade 01 - Grupo 02. . . . .	83
Figura 55	–	Resolução da atividade 02 - Grupo 01. . . . .	84
Figura 56	–	Resolução da atividade 02 - Grupo 02. . . . .	85
Figura 57	–	Chromebooks utilizados para plotagem dos gráficos. . . . .	86
Figura 58	–	Resolução da atividade 03 - Dupla 01. . . . .	87
Figura 59	–	Resolução da atividade 03 - Dupla 02. . . . .	88
Figura 60	–	Resolução da atividade 04 - Grupo 01. . . . .	89
Figura 61	–	Resolução da atividade 04 - Grupo 02. . . . .	90
Figura 62	–	Demonstração de exemplos de interseção entre as funções quadrática e identidade. . . . .	91
Figura 63	–	Resolução da atividade 05 - Dupla 01. . . . .	92
Figura 64	–	Resolução da atividade 05 - Dupla 02. . . . .	93

# Sumário

Lista de ilustrações . . . . .	1
<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1 CONCEITOS PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1 Derivada de uma função . . . . .	6
1.2 Teorema do Valor Médio . . . . .	6
1.3 Teorema de Taylor . . . . .	8
<b>2 SISTEMAS DINÂMICOS . . . . .</b>	<b>10</b>
2.1 Mapas e pontos fixos . . . . .	10
2.2 Pontos fixos atratores e pontos fixos repulsores . . . . .	11
2.3 Representação gráfica de órbitas . . . . .	14
<b>3 MAPA UNIDIMENSIONAL DE 1º GRAU . . . . .</b>	<b>17</b>
3.1 Pontos fixos do mapa unidimensional de 1º grau . . . . .	17
3.2 Termo geral e evolução da órbita do mapa unidimensional de 1º grau . . . . .	17
<b>4 MAPA LOGÍSTICO . . . . .</b>	<b>28</b>
4.1 O modelos logístico de Verhulst . . . . .	28
4.2 Pontos fixos do mapa logístico . . . . .	32
4.3 Pontos fixos atratores e pontos fixos repulsores do mapa logístico . . . . .	33
4.4 Alguns casos particulares do mapa logístico . . . . .	37
4.5 Diagrama de bifurcações . . . . .	42
<b>5 ESTABILIDADE DE PONTOS FIXOS NÃO HIPERBÓLICOS . . . . .</b>	<b>44</b>
5.1 Pontos fixos não hiperbólicos que satisfazem $f'(p) = 1$ . . . . .	44
5.2 Pontos fixos não hiperbólicos que satisfazem $f'(p) = -1$ . . . . .	55
<b>6 POSSÍVEIS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>94</b>

# INTRODUÇÃO

O estudo dos sistemas dinâmicos tem seus primeiros registros a partir do século XVI nas obras de Johannes Kepler (1571 - 1628) e Isaac Newton (1643 - 1727), que formalizaram a mecânica clássica e contribuíram para o desenvolvimento da modelagem matemática, modelando fenômenos físicos, que serviram de base para que Lagrange (1736 - 1813) e Hamilton (1805 - 1865) interpretassem, num contexto matemático, a teoria da Mecânica Clássica.

No final do século XIX, Henri Poincaré (1854 - 1912) propôs um estudo sobre o movimento dos planetas, no qual ele questionava o que aconteceria se fosse acrescentado um corpo com massa gravitacional a um sistema com dois corpos. Esse problema, que consiste em determinar o movimento de três corpos com massa, considerando que eles interagem gravitacionalmente entre si, conhecidas as suas posições e velocidades iniciais, ficou conhecido como o Problema Restrito dos Três Corpos. Poincaré é considerado um dos precursores da teoria dos sistemas dinâmicos e, a sua obra *Les Méthodes Nouvelles de La Mécanique Céleste*, publicada entre 1892 e 1899, contribuiu significativamente para os avanços nos estudos da dinâmica caótica.

O primeiro livro na área de sistemas dinâmicos, *Dynamical Systems*, foi publicado em 1927 e escrito pelo matemático americano George Birkhoff (1884-1944).

Nas décadas de 1960 e 1970 o estudo dos sistemas dinâmicos teve ênfase com o avanço do desenvolvimento dos computadores. Em 1961, Edward Lorenz observou que seu computador fazia cálculos com seis casas decimais, mas apresentava resultados com apenas três e, partindo desse fato, descobriu que pequenas alterações nos números geravam resultados muito diferentes. Essa sensibilidade às condições iniciais ficou conhecida posteriormente como Efeito Borboleta e seus estudos contribuíram para o que, futuramente, seria conhecido como a teoria do Caos.

Com o desenvolvimento dos computadores e o avanço acelerado da tecnologia, o ensino da matemática tem exigido cada vez mais criatividade e inovação por parte dos professores. Em um tempo onde a informação está disponível a qualquer momento, é necessário que a metodologia de ensino seja atrativa e desperte o interesse do estudante em aprender os componentes curriculares a fim de assegurar o desenvolvimento das competências, “habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.” (Brasil, 2018)

Neste trabalho sobre “Sistemas Dinâmicos”, discutiremos algumas possibilidades de abordagem do tema, focando no desenvolvimento das seguintes competências gerais propostas pela Base Nacional Comum Curricular:

“Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.”

“Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conheci-

mentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo."

"Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva." (Brasil, 2018)

A escolha do tema deve-se também à facilidade de interação com outros componentes curriculares, o que possibilita ao estudante visualizar possíveis aplicações do que está sendo estudado em sala de aula. De modo semelhante, pretende-se contribuir para a desmistificação da dificuldade em aprender matemática, pois este componente curricular tem gerado receio e preconceito por parte dos estudantes, que o consideram de difícil aprendizagem. De acordo com Jo Boaler:

"Um dos mitos matemáticos mais prejudiciais, propagados nos lares e salas de aula, é que a matemática é um dom, que algumas pessoas são naturalmente boas em matemática e outras não. Essa ideia é estranhamente acalentada no mundo ocidental, mas praticamente ausente em países orientais, como a China e o Japão, que são líderes mundiais em desempenho matemático." (Boaler, 2019)

Neste trabalho definiremos alguns conceitos como Sistemas Dinâmicos Discretos, mapas e suas representações, órbitas, pontos fixos atratores, pontos fixos repulsores, dentre outros.

# 1 CONCEITOS PRELIMINARES

As conclusões a respeito das propriedades dos sistemas dinâmicos, que constam neste trabalho, foram demonstradas através dos teoremas apresentados nesta seção.

## 1.1 Derivada de uma função

**Definição 1.1.1.** *Seja a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I \subset \mathbb{R}$ , sendo  $I$  um intervalo aberto. Dizemos que  $f$  é derivável em um ponto  $x_0 \in I$ , se existe o limite definido por*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geometricamente, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente à função em determinado ponto. Ou seja, a derivada é a inclinação da reta tangente à curva da função  $f(x)$  no ponto  $P = (x_0, f(x_0))$  e pode ser denotada por  $f'(x_0)$ . Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (1)$$

**Definição 1.1.2.** *Seja a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I \subset \mathbb{R}$ , sendo  $I$  um intervalo aberto. A reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P = (x_0, f(x_0))$  tem coeficiente angular igual a  $f'(x_0)$ . Dessa forma, a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $P$  é dada por*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

## 1.2 Teorema do Valor Médio

Para demonstrarmos o Teorema do Valor Médio - TVM, utilizaremos o teorema de Rolle.

**Teorema 1.2.1.** *(Teorema de Rolle) Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ , derivável em  $(a, b)$ , com  $f(a) = f(b)$ . Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

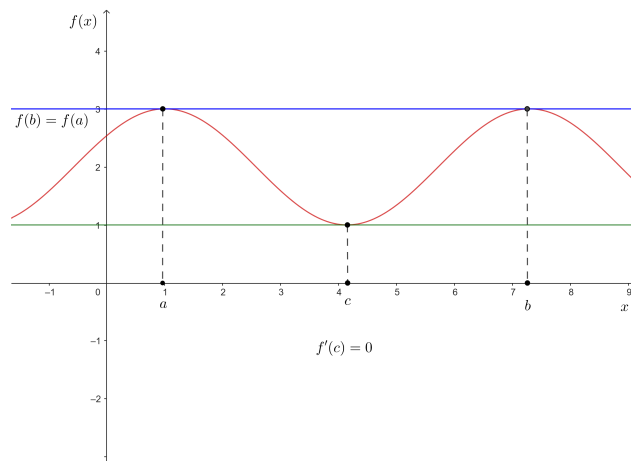


Figura 1 – Representação gráfica do Teorema de Rolle.

**Teorema 1.2.2.** (Teorema do Valor Médio) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $I = [a, b]$ , derivável em  $(a, b)$ , tal que  $f(a) \neq f(b)$ . Então existe  $c \in (a, b)$ , tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3)$$

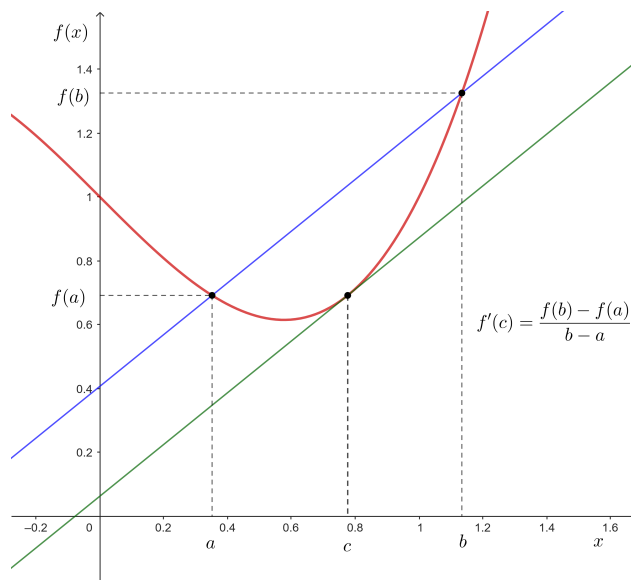


Figura 2 – Representação gráfica do Teorema do Valor Médio.

**Demonstração:** Seja  $g$  uma função contínua no intervalo  $I = [a, b]$ , derivável em  $(a, b)$ , com  $I \subset \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = (b - a)f(x) - (x - a)(f(b) - f(a)) + f(a)$ . Ou seja,  $g$  é a reta que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  subtraída da função  $f$ .

Para  $x = b$ , temos

$$g(b) = (b - a)f(b) - (b - a)(f(b) - f(a)) + f(a) = (b - a)f(a) + f(a)$$

Para  $x = a$ , temos

$$g(a) = (b-a)f(a) - (a-a)(f(b) - f(a)) + f(a) = (b-a)f(a) + f(a).$$

Note que  $g'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a))$ . Como  $g(a) = g(b)$ , segue do Teorema de Rölle que  $\exists c \in (a, b)$ , tal que  $g'(c) = 0$ . Então,

$$0 = g'(c) = (b-a)f'(c) - (f(b) - f(a)) \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \blacksquare$$

### 1.3 Teorema de Taylor

O Teorema de Taylor é utilizado para aproximar o valor de uma função em vizinhança de determinado ponto. Enquanto a derivada fornece o ângulo de inclinação da reta tangente ao gráfico da função em determinado ponto, o Teorema de Taylor fornece aproximação de  $f$  numa vizinhança de  $a \in I$  por funções polinomiais.

**Teorema 1.3.1.** (Teorema de Taylor) *Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n+1$  vezes derivável em  $a \in I$ . Dado  $b \in I$ , supondo que  $f$  seja  $n+1$  vezes derivável no intervalo aberto e contínua no intervalo fechado entre  $a$  e  $b$ , então existe  $c$  entre  $a$  e  $b$  tal que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad (4)$$

O termo

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

é o erro entre  $f(x)$  e o polinômio de Taylor de grau  $n$  que melhora a precisão dessa aproximação.

**Demonstração:** Suponha  $b > a$  (o caso  $b < a$  é análogo). Seja a função  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \dots - \frac{f^n(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{M}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

em que  $M \in \mathbb{R}$  é escolhida de forma que  $g(a) = 0$ .

Temos que  $g(x)$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Além disso,  $g(a) = 0$  (pela escolha de  $M$ ) e, substituindo  $x = b$  em  $g$ , vemos que  $g(b) = 0$ . Portanto, podemos aplicar o Teorema de Rolle e concluir que existe um  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ .

Mas a derivada de  $g(x)$  é

$$g'(x) = -f'(x) - (f''(x)(b-x) - f'(x)) - \left( \frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 - f''(x)(b-x) \right)$$

$$- \dots - \left( \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} \right) + \frac{M}{n!} (b-x)^n = \frac{M - f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n$$

Como  $g'(c) = 0$  então  $M = f^{(n+1)}(c)$ . Substituindo  $x$  por  $a$  em  $g$  e lembrando que  $g(a) = 0$ , temos

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1},$$

que é a fórmula que queríamos demonstrar. ■

## 2 SISTEMAS DINÂMICOS

Um sistema é um conjunto de elementos que, organizados e interligados, interagem entre si de modo dependente para o funcionamento do todo. Os sistemas dinâmicos modelam o comportamento de determinados fenômenos e, preveem a evolução dos mesmos de acordo com o tempo e com a regra determinística.

A evolução de um sistema dinâmico depende da variável *tempo*, que pode ser discreta ou contínua. Em sistemas dinâmicos contínuos, apesar de a variável *tempo* ser contínua, as equações que formam esses sistemas podem ser estudadas numericamente, o que acaba gerando uma discretização do estudo. Neste trabalho, estudaremos os sistemas dinâmicos discretos (cuja variável *tempo* é discreta). Sendo a variável temporal, que comumente descreve os sistemas dinâmicos discretos, denotada por  $n$ , esta assume valores inteiros e  $x_n$  determina o estado do sistema neste instante.

### 2.1 Mapas e pontos fixos

Na maioria dos sistemas, o que se tem disponível é o estado no instante atual e no imediatamente anterior, sendo necessário, nos casos unidimensionais que serão tratados neste trabalho, descrevê-los como uma recorrência de ordem  $k$  com  $k \geq 1$ , onde  $x_n$  é um número real. No caso particular de recorrências de primeira ordem, que descrevem sistemas dinâmicos unidimensionais, estas recebem o nome de *mapa*.

**Definição 2.1.1.** "A função  $f : I \rightarrow I$ , com  $I \subset \mathbb{R}$  será chamada de mapa. Seja  $x$  um ponto e seja  $f$  um mapa, a órbita de  $x$  sobre  $f$  é o conjunto de pontos  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ . O primeiro valor de  $x$  da órbita é chamado de valor inicial da órbita. Um ponto  $p$  é um ponto fixo do mapa se  $f(p) = p$ ."

Dado o mapa, é possível determinar  $x_n$  em função de  $x_0$  para o instante  $n$ , iterando essa função  $n$  vezes. Ao iterar essa função, obtemos um novo valor denominado  $x_{n+1}$ , como se pode perceber abaixo considerando  $x_0$  como o estágio inicial:

$$x_0$$

$$x_1 = f(x_0),$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0),$$

$$x_3 = f(x_2) = f(f^2(x_0)) = f^3(x_0),$$

.

.

.

$$x_n = f^n(x_0),$$

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0).$$

Dessa maneira,  $f^n$  corresponde à função iterada  $n$  vezes e, quando iteramos um ponto fixo  $p$ , o valor não se altera sendo  $f(p) = p$ .

Para melhor compreensão, abordaremos um exemplo simples a seguir.

**Exemplo 2.1.1:** Seja 4000 a população inicial de uma colônia de bactérias que duplica a cada dia. O mapa que descreve esse crescimento é definido por  $f(x) = 2x$ , de modo que  $x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n$  onde  $n$  representa a quantidade de dias que passaram e  $x_0$  o instante inicial.

$$x_0 = 4000$$

$$x_1 = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot 4000 = 8000$$

$$x_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 8000 = 16000$$

$$x_3 = 2 \cdot x_2 = 2 \cdot 16000 = 32000$$

.

.

.

$$x_{n+1} = 2 \cdot x_n$$

Neste caso, o único ponto fixo é  $p = 0$ . De fato,  $f(x) = x \iff 2x = x \iff x = 0$ . Além disso, a órbita de  $x_0 = 4000$  é dada por  $\{4.000, 8.000, 16.000, \dots\}$ .

## 2.2 Pontos fixos atratores e pontos fixos repulsores

Como vimos na Definição 2.1.1, dado um ponto fixo  $p$ , ou seja, um ponto que satisfaz  $f(p) = p$ , quando aplicamos o mapa iterativamente sobre  $p$ , o valor dele não se altera, sendo a sua órbita formada apenas por  $p$ . Porém, se aplicarmos o mapa iterativamente sobre pontos próximos ao ponto fixo, situações diferentes podem ocorrer: dentre elas, os iterados podem ser atraídos pelo ponto fixo, ou seja, a órbita desse ponto se aproximará do valor de  $p$ , ou ainda a órbita desse ponto poderá se afastar cada vez mais de  $p$ .

**Definição 2.2.1.** De acordo com Alligood, Sauer e Yorke (1996): "Seja  $f$  um Mapa em  $\mathbb{R}$  e seja  $p$  um número real tal que  $f(p) = p$ . Se todos os pontos suficientemente próximos de  $p$  são atraídos por  $p$ , então  $p$  é chamado de **Ponto Fixo Atrator**. Mais precisamente, se existe um  $\epsilon > 0$  para o qual qualquer  $x$  na vizinhança  $\epsilon$ -sobre  $N_\epsilon(p)$ , satisfaz  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$ , então  $p$  é um atrator. Se todos os pontos suficientemente próximos de  $p$  são repelidos por  $p$ , então  $p$  é chamado **Ponto Fixo Repulsor**. Mais precisamente, se existe uma vizinhança  $N_\epsilon(p)$  tal que cada  $x$  em  $N_\epsilon(p)$ , exceto o próprio  $p$ , repele os pontos para fora de  $N_\epsilon(p)$ , então  $p$  é um repulsor."

**Definição 2.2.2.** Um ponto fixo  $p$  é estável se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \epsilon$  tal que  $|x_0 - p| < \delta \implies |f^n(x_0) - p| < \epsilon$  para todo  $n > 0$ . Se  $p$  não é estável, então ele é denominado instável.

De acordo com a Definição 2.2.1, é necessário estudar vizinhanças de pontos fixos para classificá-los como atratores ou repulsores. No entanto, o teorema a seguir garante que, para alguns tipos de mapas, o comportamento de  $f$  no ponto fixo é suficiente para defini-lo.

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $f$  um mapa em  $\mathbb{R}$ , tal que a sua primeira derivada existe e é contínua. Seja  $p$  um Ponto Fixo de  $f$ .*

1. Se  $|f'(p)| < 1$ , então  $p$  é um atrator.
2. Se  $|f'(p)| > 1$ , então  $p$  é um repulsor.

**Demonstração:** Seja  $f : I \rightarrow I$  uma função contínua e derivável, com  $I \in \mathbb{R}$  e  $p \in I$  ponto fixo de  $f$ , satisfazendo  $|f'(p)| < 1$ . Existe  $\epsilon > 0$ , tal que para todo  $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$  tem-se  $|f'(x)| < a < 1$ .

Segue do TVM (Teorema do Valor Médio) que existe  $c \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$  satisfazendo

$$f(x) - f(p) = f'(c) \cdot (x - p).$$

Daí,

$$|f(x) - p| = |f'(c)| \cdot |x - p| < a|x - p|. \quad (5)$$

Queremos mostrar que  $|f^k(x) - p| < a^k|x - p|$  vale para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Segue de (5) que a desigualdade é verdadeira para  $k = 1$ .

Suponha verdadeira para  $k \in \mathbb{N}$ .

Para  $k + 1$ , temos

$$|f^{k+1}(x) - p| = |f(f^k(x)) - p| < a|f^k(x) - p| < a \cdot a^k|x - p| = a^{k+1}|x - p|.$$

Como  $0 < a < 1$ , temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x) - p| = 0,$$

portanto, quanto mais vezes iterarmos a função, mais os pontos da órbita se aproximam de  $p$ . Assim, podemos concluir que  $p$  é, por definição, um ponto fixo atrator.

Analogamente, seja  $f : I \rightarrow I$  uma função contínua e derivável, com  $I \in \mathbb{R}$  e  $p \in I$  ponto fixo de  $f$ , satisfazendo  $|f'(p)| > 1$ . Existe  $\epsilon > 0$ , tal que para todo  $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$  tem-se  $1 < a < |f'(x)|$ .

Segue do TVM (Teorema do Valor Médio) que existe  $c \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$  satisfazendo

$$f(x) - f(p) = f'(c) \cdot (x - p).$$

Daí,

$$|f(x) - p| = |f'(c)| \cdot |x - p| > a|x - p|. \quad (6)$$

Segue de (6) que se  $x, f(x), \dots, f^k(x) \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ , então  $|f^k(x) - p| > a^k|x - p|$ . Porventura, se  $\exists k_0$  tal que  $f^{k_0}(x) \notin (p - \epsilon, p + \epsilon)$ , de maneira que os iterados saem da vizinhança, então, neste caso,  $p$  é ponto fixo repulsor. ■

**Definição 2.2.3.** Seja  $f : I \rightarrow I$  um mapa com  $I \in \mathbb{R}$  e  $x \in I$  tal que  $f(x) \neq x$  e  $f^n(x) = x$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $n \geq 1$ . Dizemos que  $x$  é um ponto periódico de  $f$ . O menor inteiro positivo  $n$  tal que  $f^n(x) = x$  é chamado de período de  $x$ . Denotamos por  $Per_n(f)$  o conjunto dos pontos periódicos de período  $n$  de  $f$ , isto é,

$$Per_n(f) = \left\{ x \in I : f^i(x) \neq x \forall i = 1, \dots, n-1 \text{ e } f^n(x) = x \right\}.$$

Note que, se  $x$  é um ponto  $n$ -periódico de  $f$ , então  $x$  é ponto fixo de  $g = f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ , sendo  $g$  a composta de  $f$   $n$  vezes.

Desta forma, se  $|g'(x)| \neq 1$  podemos aplicar o Teorema 2.2.1 de maneira a estudar a estabilidade do ponto fixo  $x$  de  $g$ , que fornecerá informações sobre a estabilidade da órbita periódica de  $f$ . Observe ainda que, se  $x_1 = f(x), x_2 = f^2(x), \dots, x_n = f^n(x)$ , tem-se  $g'(x_i) = g'(x_j)$ , para qualquer  $i \neq j$ .

**Exemplo 2.2.1:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = -x$ . Note que, neste caso, o único ponto fixo é a origem, mas, todos os outros pontos são periódicos de período 2, já que se  $x \neq 0$ , tem-se  $f(x) = -x \neq x$  e  $f^2(x) = x$ .

**Exemplo 2.2.2:** Seja  $f : I \rightarrow I$  um mapa com  $I \in \mathbb{R}$ ,  $g$  a função composta definida por:  $g = f^2 = f \circ f$ , sendo  $x_1$  e  $x_2$  pontos periódicos de período 2 de  $f$  e,  $x_1 \neq x_2$ . Temos que:

$$g(x_1) = f(f(x_1)) = f(x_2) = x_1$$

$$g(x_2) = f(f(x_2)) = f(x_1) = x_2$$

Note que os pontos periódicos de  $f$  estão diretamente relacionados aos pontos fixos da função  $g$ , especificamente em relação aos períodos desses pontos, visto que  $f^2(x) = x$  e  $g = f^2$ .

Ao derivarmos a função  $g$  temos que:

$$g'(x_1) = f'(f(x_1)) \cdot f'(x_1) = f'(x_2) \cdot f'(x_1)$$

$$g'(x_2) = f'(f(x_2)) \cdot f'(x_2) = f'(x_1) \cdot f'(x_2)$$

E então podemos verificar que  $g'(x_1) = g'(x_2)$ .

## 2.3 Representação gráfica de órbitas

Para representar a órbita dos pontos de mapas unidimensionais, utilizaremos o Diagrama Cobweb (teia de aranha), que consiste em traçar no mesmo plano o gráfico da função identidade  $h(x) = x$  e o gráfico da função  $f$ . Esse diagrama é nomeado dessa forma, devido à semelhança com a maneira que as aranhas constroem as suas teias, mas também é conhecido como Diagrama da Escada. Para ilustrar essa construção considere o mapa  $f(x) = ax + b$ , tal que  $0 < a < 1$  e  $b > 0$ .

O primeiro passo para a construção do Diagrama Cobweb é traçar os gráficos de  $h(x) = x$  e de  $f(x) = ax + b$ , no mesmo plano, conforme a Figura 3.

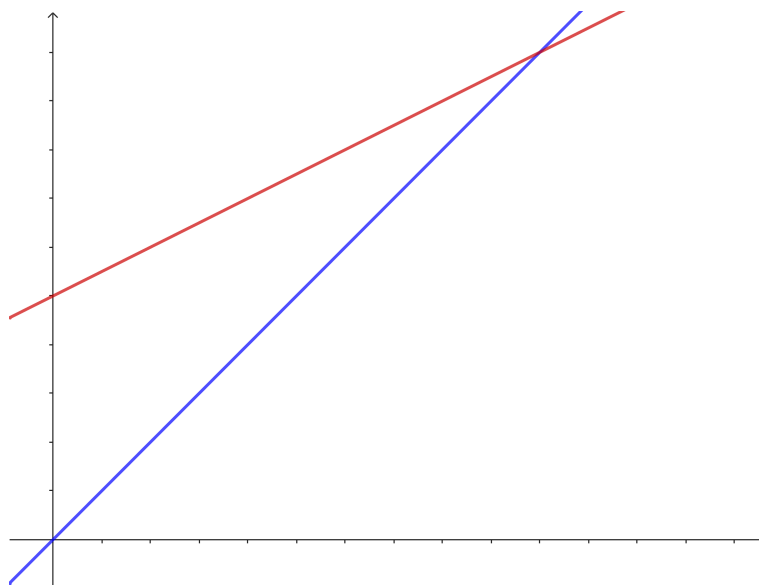


Figura 3 – Primeiro passo para a construção do Diagrama Cobweb. O gráfico da função  $f(x) = ax + b$  está em vermelho, e o gráfico da função identidade  $h(x) = x$  está em azul.

O segundo passo é marcar o ponto  $A = (x_0, 0)$  e seguir na linha vertical até chegar em  $f$ , determinando o ponto  $B = (x_0, x_1)$ , conforme mostra a Figura 4.

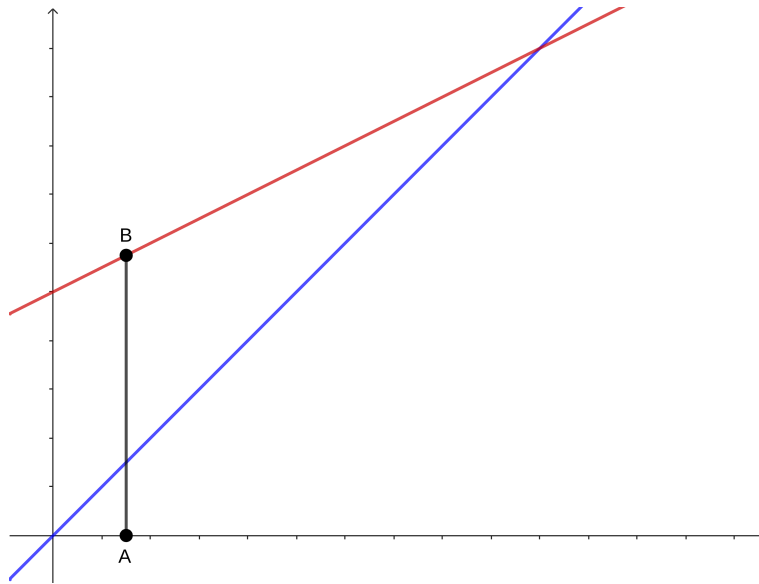


Figura 4 – Segundo passo para a construção do Diagrama Cobweb.

No terceiro passo, partiremos do ponto  $B = (x_0, x_1)$  na horizontal até encontrar o gráfico da função identidade, determinando o ponto  $C = (x_1, x_1)$ , conforme a Figura 5.

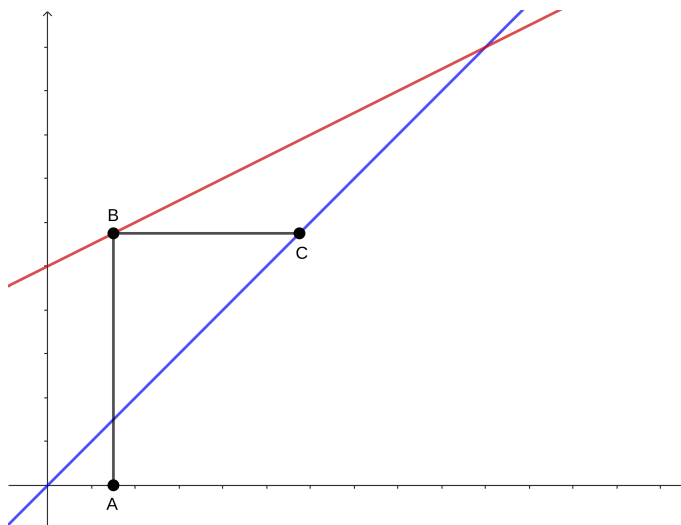


Figura 5 – Terceiro passo para a construção do Diagrama Cobweb.

No quarto passo, partindo do ponto  $C = (x_1, x_1)$ , seguiremos na vertical até encontrar o gráfico de  $f$ , determinando o ponto  $D = (x_1, x_2)$ , conforme a Figura 6.

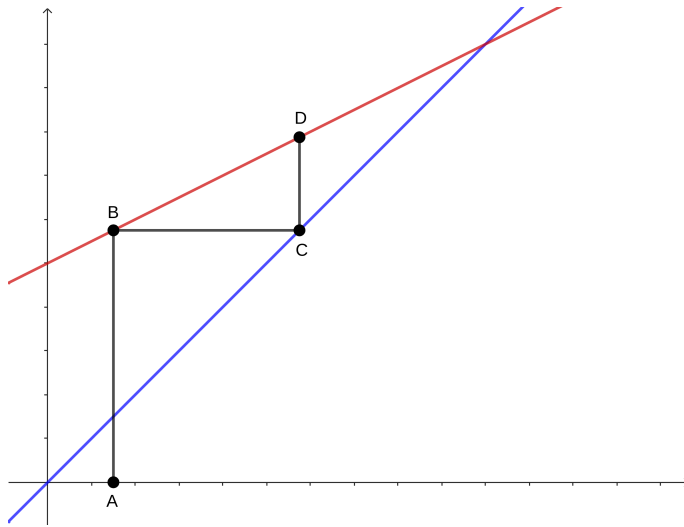


Figura 6 – Quarto passo para a construção do Diagrama Cobweb. Repetição do passo 2.

Daí em diante basta repetir o segundo e o terceiro passos reiteradamente, chegando por fim, a uma figura semelhante a apresentada na Figura 7.

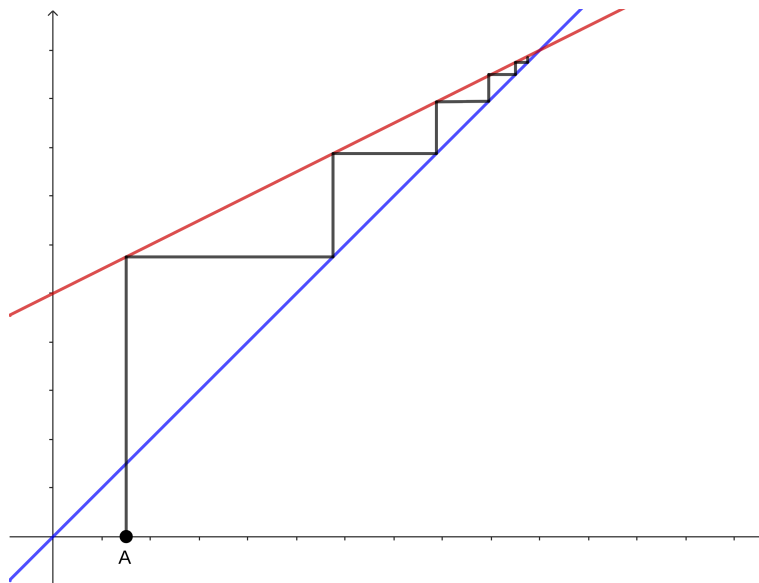


Figura 7 – Representação gráfica do Diagrama Cobweb de uma função afim.

### 3 MAPA UNIDIMENSIONAL DE 1º GRAU

Nesta seção, analisaremos os elementos do mapa unidimensional de 1º grau, que é representado algebricamente por  $x_{n+1} = ax_n + b$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

#### 3.1 Pontos fixos do mapa unidimensional de 1º grau

Pontos fixos, de acordo a Definição 2.1.1, são aqueles que satisfazem  $f(p) = p$ . Nos casos de mapas unidimensionais de primeiro grau, encontrar os pontos fixos de  $f$  é equivalente a encontrar  $p$  satisfazendo  $f(p) = ap + b = p$ , sendo  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

Assim, para  $a \neq 1$ , temos que:

$$p = ap + b \iff p - ap = b \iff p(1 - a) = b \iff p = \frac{b}{1 - a} \quad (7)$$

Por outro lado, para  $a = 1$ , temos:

$$p = p + b \quad (8)$$

Portando, quando  $a = 1$  há pontos fixos apenas quando  $b = 0$  e, nesse caso, todo ponto é fixo. De fato, neste caso particular,  $f(x) = ax + b = x$ .

Em resumo,  $f(x) = ax + b$  admite:

- Único ponto fixo quando  $a \neq 1$  dado por  $p = \frac{b}{1-a}$ ;
- Nenhum ponto fixo quando  $a = 1$  e  $b \neq 0$ ;
- Infinitos pontos fixos quando  $a = 1$  e  $b = 0$  (Neste caso, todo ponto é fixo).

#### 3.2 Termo geral e evolução da órbita do mapa unidimensional de 1º grau

Considerando o mapa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$  que possui ponto fixo  $p = \frac{b}{1-a}$  e tomando  $x_0 \in \mathbb{R}$ , queremos mostrar que o termo geral da órbita é dado por  $x_{n+1} = a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a}$ , para  $a \neq 1$ :

$$x_1 = f(x_0) = ax_0 + b$$

$$x_2 = f(x_1) = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b = a^2x_0 + b(a + 1)$$

$$x_3 = f(x_2) = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b = a^3x_0 + b(a^2 + a + 1)$$

·  
·  
·

$$x_n = f(x_{n-1}) = a(a^{n-1}x_0 + b(a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a + 1)) + b = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = a(a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)) + b = a^{n+1} x_0 + b(a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

Note que o fator  $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n$ , é a soma dos  $n + 1$  termos de uma Progressão Geométrica, cujo termo inicial é 1 e a razão é  $a$ . Considerando  $a \neq 1$ , temos que a soma dos termos dessa Progressão Geométrica é dada por:

$$S_{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Substituindo o fator  $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n$  pela expressão  $S_{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ , temos então que:

$$x_{n+1} = a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

No caso em que  $a = 1$ , a soma da Progressão Geométrica é dada apenas por  $n + 1$ .

Assim, o termo geral da órbita por  $x_0$  é dado pela expressão:

$$x_{n+1} = \begin{cases} a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a} & \text{se } a \neq 1, \\ x_0 + (n+1)b & \text{se } a = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Observe que, no caso  $a \neq 1$  temos que  $f'(x) = a$  e, portanto,  $|f'(p)| = |a| \neq 1$ . Segue, portanto do Teorema 2.1.1 que  $p$  é atrator se  $|a| < 1$ , e se  $|a| > 1$ ,  $p$  é repulsor.

Na verdade, utilizando a expressão (9), é possível dizer mais a respeito das órbitas por pontos  $x_0 \in \mathbb{R}$  com  $x_0 \neq p$ .

Como  $x_n = a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a}$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1-a} = p, \quad (10)$$

quando  $|a| < 1$ . Ou seja,  $p = \frac{b}{1-a}$  é um atrator global para a dinâmica de  $f$ .

Uma análise similar pode ser feita quando  $|a| > 1$ , para concluir que  $p = \frac{b}{1-a}$  é repulsor global.

Para ilustrar graficamente o caso em que  $a = 1$  e  $b > 0$ , utilizaremos como exemplo o mapa  $x_{n+1} = x_n + 1$ . Note que este caso representa uma progressão aritmética crescente.

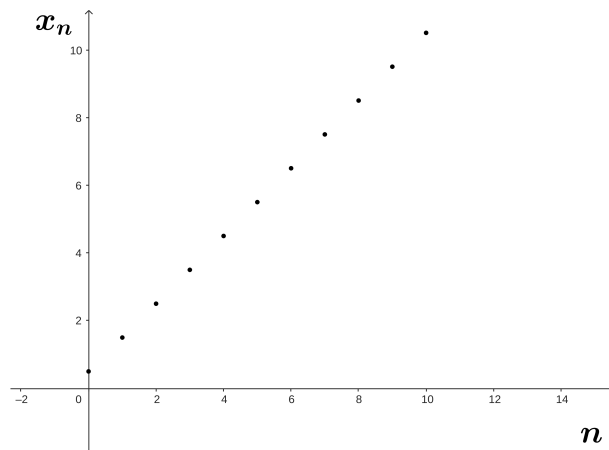


Figura 8 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = x_n + 1$ , com  $x_0 = 0,3$  e  $n < 14$ .

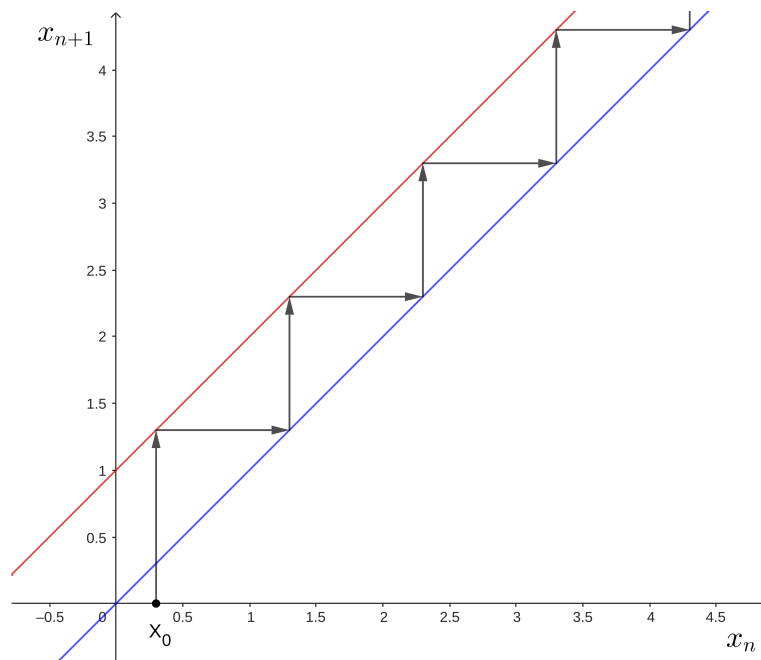


Figura 9 – Órbita de  $x_0 = 0,3$  sobre  $x_{n+1} = x_n + 1$  com  $n < 5$ .

Para  $a = 1$  e  $b < 0$ , representaremos graficamente o mapa  $x_{n+1} = x_n - 1$  nas Figuras 10 e 11. Note que este caso representa uma progressão aritmética decrescente.

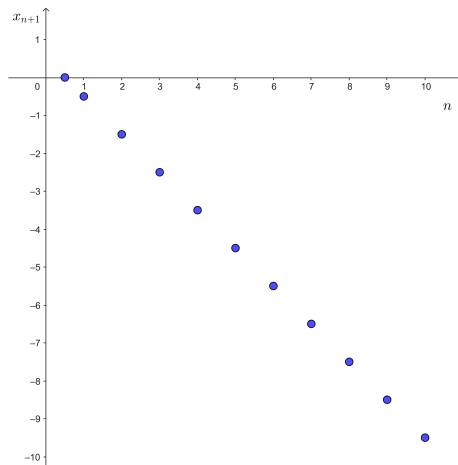


Figura 10 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = x_n - 1$ , com  $x_0 = 0,3$  e  $0 \leq n \leq 10$ .

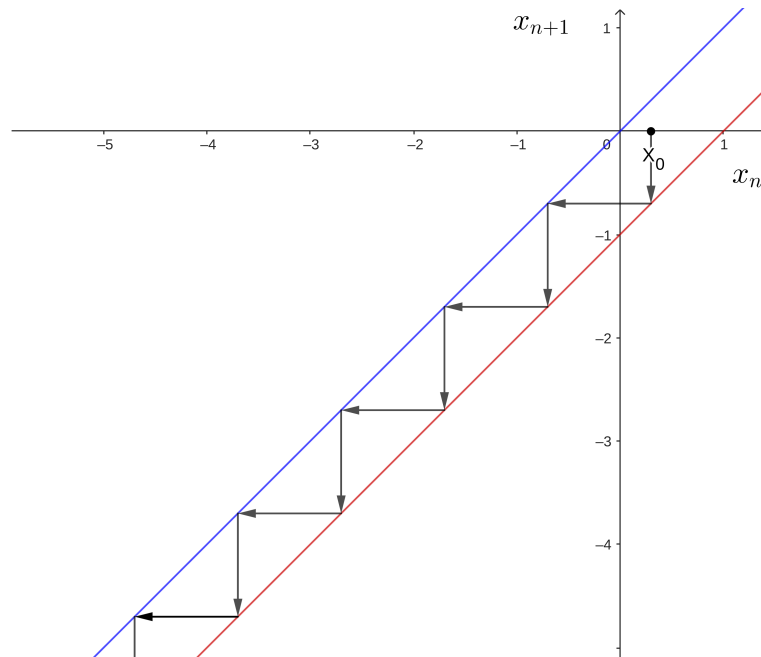


Figura 11 – Órbita de  $x_0 = 0,3$  sobre  $x_{n+1} = x_n - 1$ .

A Figura 12 exibe a evolução do mapa  $x_{n+1} = x_n$ , concluindo os possíveis casos em que  $a = 1$ . Note que este caso representa uma progressão aritmética constante.

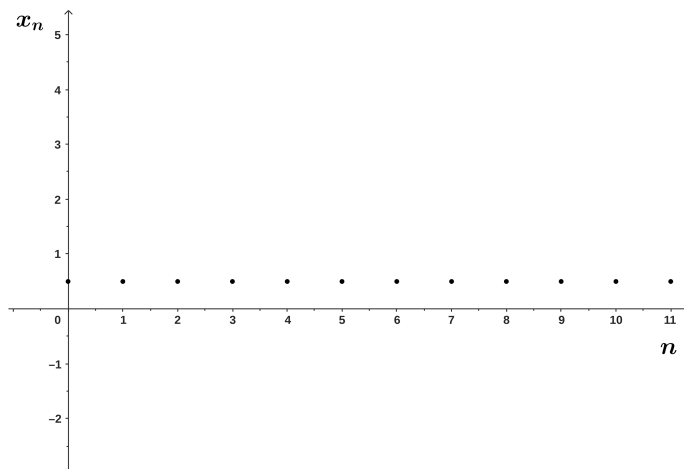


Figura 12 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = x_n$ , com  $x_0 = 0,5$  e  $0 \leq n < 12$ .

Tomando,  $a = -1$ , temos:

$$x_{n+1} = a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a} \implies (-1)^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{-2} \right) + \frac{b}{2} \quad (11)$$

Logo, nos casos em que  $n$  é par, temos  $n + 1$  ímpar e,

$$x_{n+1} = -x_0 + b. \quad (12)$$

Analogamente, nos casos em que  $n$  for ímpar, teremos  $n + 1$  par, e,

$$x_{n+1} = x_0 \quad (13)$$

Portanto, nos casos em que  $a = -1$ , a órbita oscilará entre dois valores, e sendo assim, não haverá limite para essa sequência, conforme as figuras abaixo.

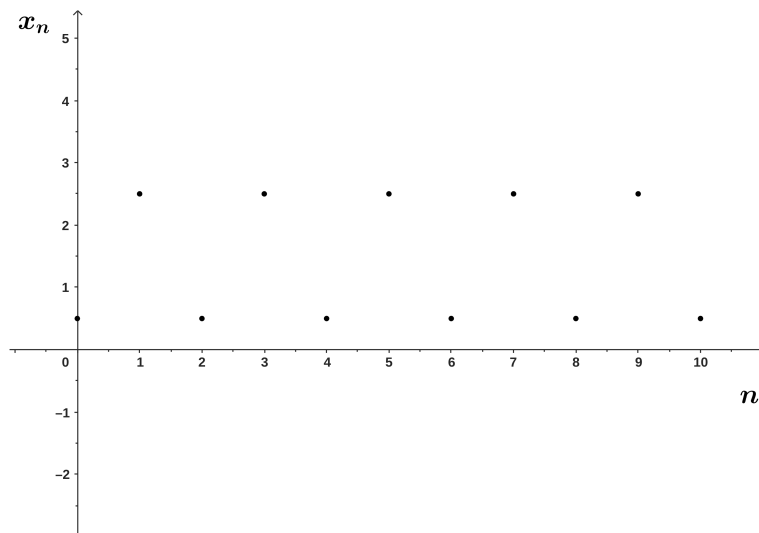


Figura 13 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = -x_n + 3$ , com  $x_0 = 0,5$  e  $0 \leq n < 12$ .

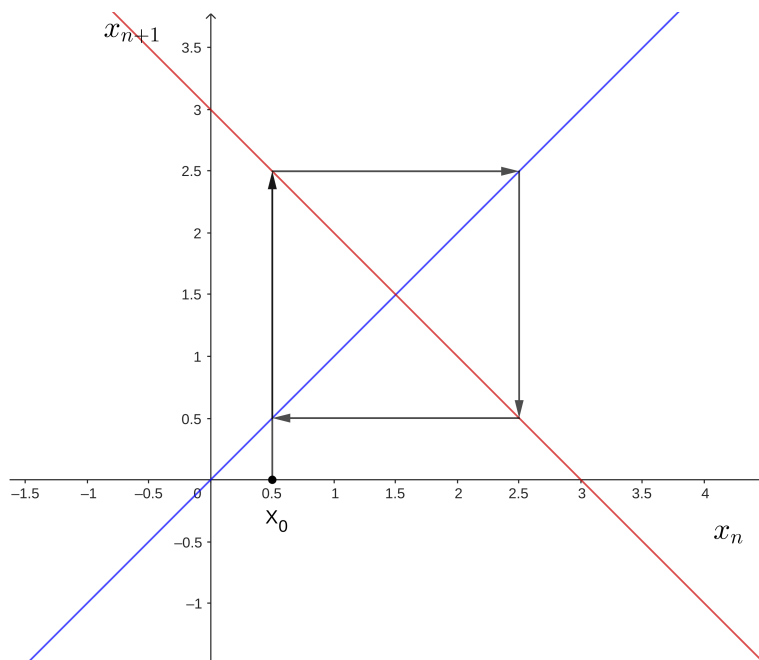


Figura 14 – Órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = -x_n + 3$ .

Para os casos em que  $a > 1$ , se  $x_0 > \frac{b}{(1-a)}$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a} = \infty \quad (14)$$

E, se  $x_0 < \frac{b}{(1-a)}$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a} = -\infty \quad (15)$$

Assim, os termos da sequência crescem ou decrescem de acordo com o sinal de  $x_0 + \frac{b}{(a-1)}$  e se  $x_0 = \frac{b}{(1-a)}$ , os termos da sequência serão constantes e determinados por  $x_n = \frac{b}{(1-a)}$ .

Para o caso em que  $x_0 > \frac{b}{1-a}$ , tomaremos como exemplo a função  $x_{n+1} = 2x_n + 1$  conforme as Figuras 15 e 16.

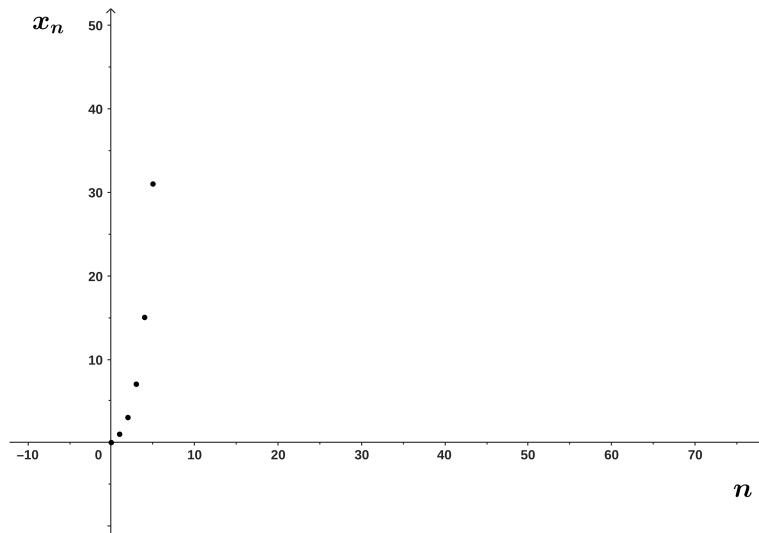


Figura 15 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ , com  $x_0 = 0$  e  $0 \leq n \leq 10$ .

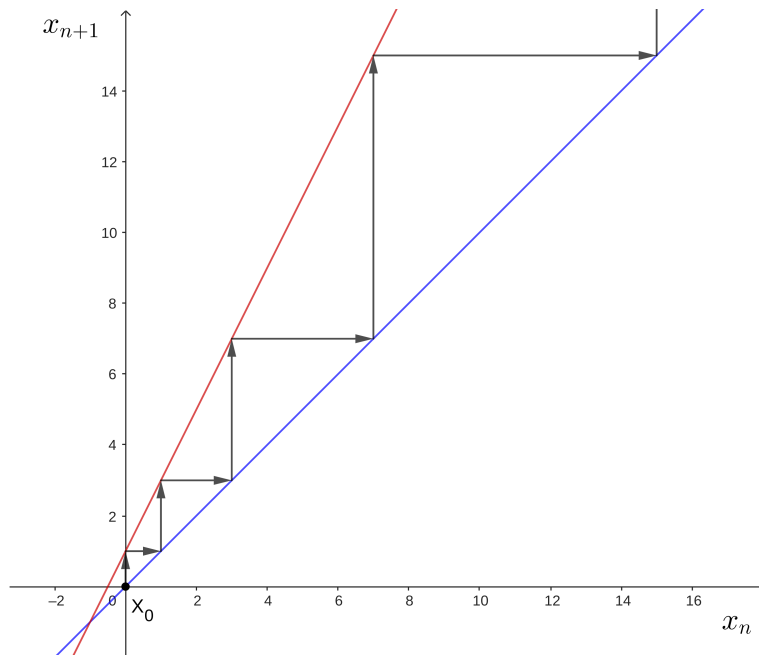


Figura 16 – Órbita de  $x_0 = 0$  sobre  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ .

Portanto, quando  $x_0 > \frac{b}{1-a}$ , essa função tende ao infinito positivo.

Analogamente ao caso anterior, é possível analisar o comportamento da órbita de um mapa em que  $x_0 < \frac{b}{1-a}$  conforme as Figuras 15 e 16, onde tomaremos como exemplo a função  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ .

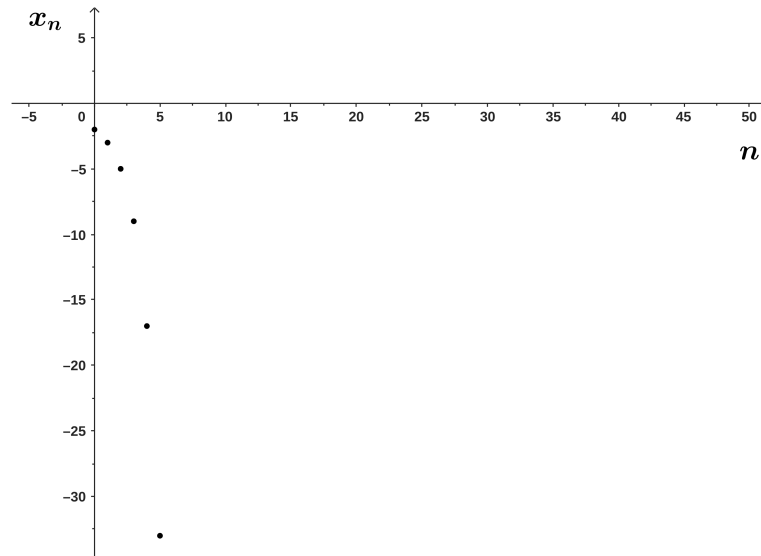


Figura 17 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ , com  $x_0 = -2$  e  $0 \leq n \leq 10$ .

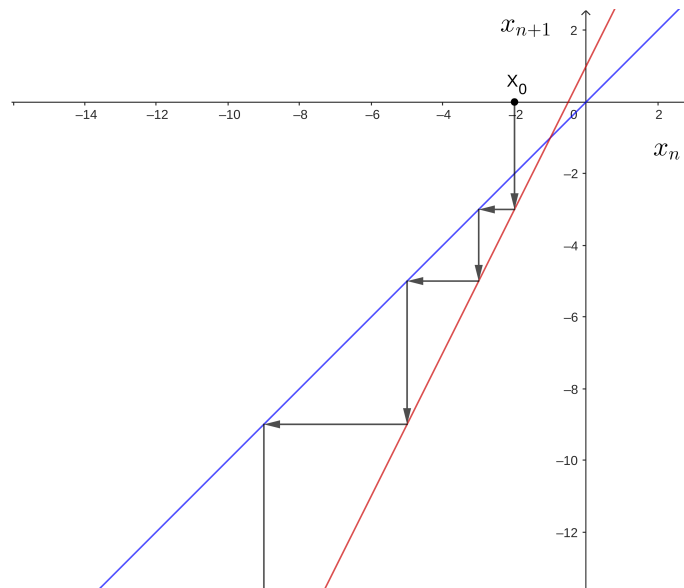


Figura 18 – Órbita de  $x_0 = -2$  sobre  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ .

Para o caso em que  $a < -1$ , o estudo do comportamento da órbita será dividido em duas situações:  $n$  par e  $n$  ímpar. Quando  $n$  é par, temos:

$$x_{n+1} = -|a|^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a}. \quad (16)$$

Quando  $n$  é ímpar, temos:

$$x_{n+1} = |a|^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a} \quad (17)$$

Portanto, sempre que  $a < -1$  e  $x_0 \neq \frac{b}{1-a}$  a órbita oscilará entre valores positivos e negativos, conforme as Figuras 19 e 20.

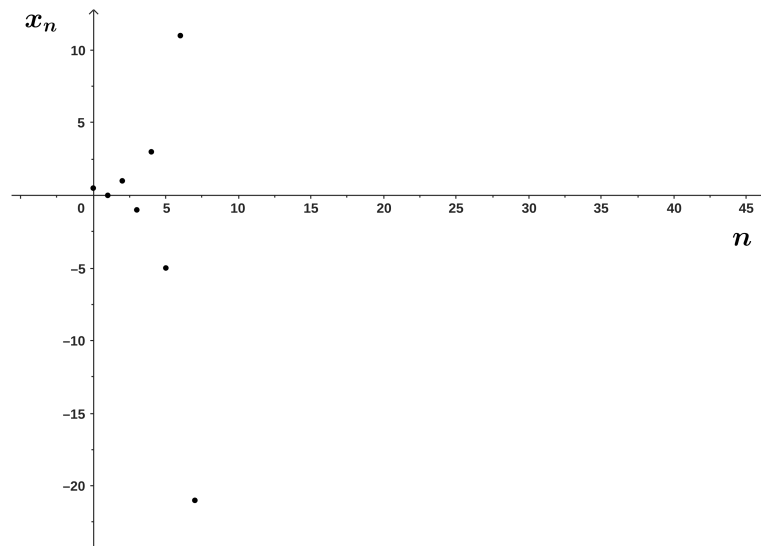


Figura 19 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = -2x_n + 1$ , com  $x_0 = 0,5$  e  $0 \leq n \leq 10$ .

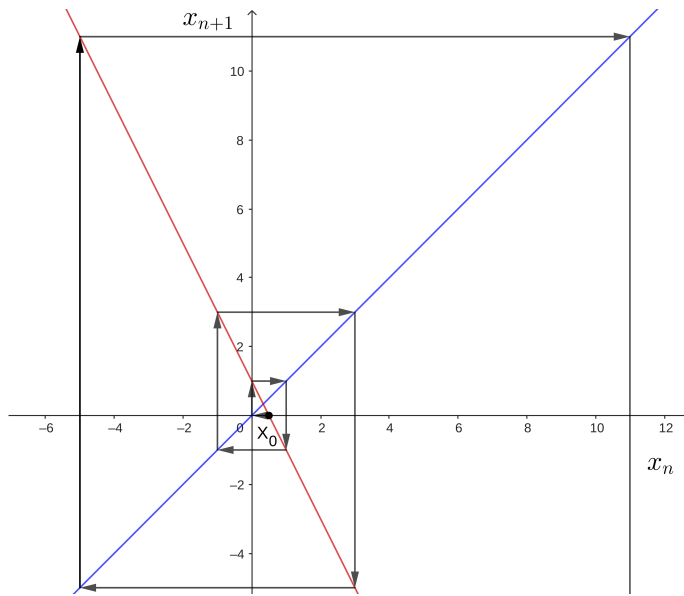


Figura 20 – Órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = -2x_n + 1$ .

Se  $|a| < 1$ , temos que  $0 \leq |a| < 1$ . Portanto, é válido que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$$

e assim, o limite da sequência será dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} \left( x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a} \quad (18)$$

As Figuras 21 e 22 ilustram o comportamento da órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre o mapa  $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$ , encerrando a análise dos mapas unidimensionais de 1º grau.

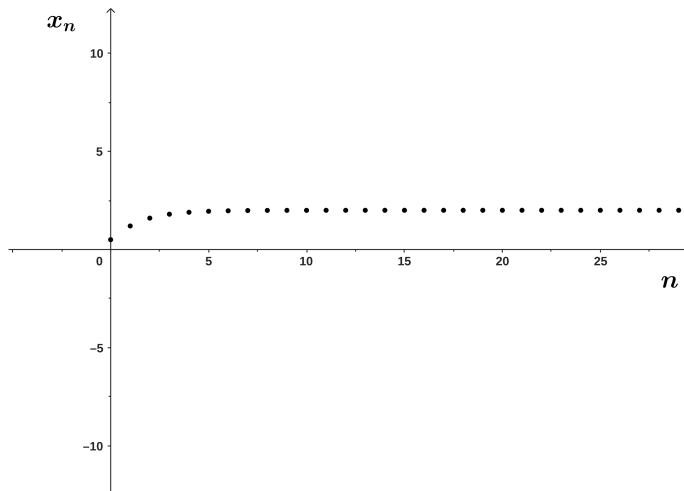


Figura 21 – Evolução do mapa  $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$ , com  $x_0 = 0,5$  e  $0 \leq n \leq 30$ .

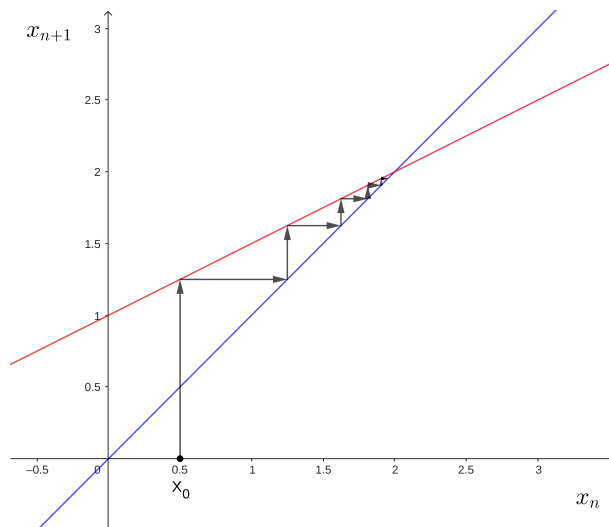


Figura 22 – Órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 0,5x_n + 1$ .

## 4 MAPA LOGÍSTICO

Este capítulo é destinado à análise particular do Mapa Logístico, expresso por  $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$  e, comumente utilizado em estudos de crescimento populacional, o que permite fácil contextualização em componentes curriculares da educação básica. Os Mapas Logísticos também são frequentemente utilizados na introdução à teoria do caos, devido ao fato de que, apesar da sua simplicidade, para certos valores do parâmetro  $r$ , as soluções podem apresentar comportamentos caóticos ou apresentar uma quantidade limitada de soluções.

### 4.1 O modelo logístico de Verhulst

O modelo de Verhulst, conhecido também como Mapa Logístico, foi criado pelo matemático e doutor em teoria dos números Pierre François Verhulst (1804-1849). O desenvolvimento deste modelo se deu a partir do modelo criado por T. R. Malthus, no qual para determinar o estágio de uma população era necessário apenas multiplicar a taxa de crescimento da população pela população anterior. O modelo criado por Malthus é limitado ao caso em que  $|a| < 1$ , de maneira que nos casos em que  $|a| > 1$ , o crescimento acontece de maneira exponencial, tornando-se inaplicável em determinado momento, e quando  $a < -1$  não é possível aplicá-lo devido ao resultado negativo. De acordo com Ruelle:

"Se uma quantidade cresce de tal modo que dobra ao cabo de certo tempo, e depois dobra de novo depois do mesmo intervalo de tempo, e assim por diante, dizemos que essa quantidade *cresce exponencialmente*. Como acabamos de ver, ela logo será enorme (...). Este tipo de crescimento é bastante natural e comumente se observa no mundo que nos cerca (...) mas nunca dura muito tempo". (RUELLE, 1993)

Enquanto o modelo de Malthus levava em consideração apenas a taxa de crescimento populacional, Verhulst observou que os ambientes possuem capacidade de carga, ou seja, enquanto a população não atingir essa capacidade ela continuará crescendo. Porém, quando a população se aproxima da capacidade máxima, os recursos não são suficientes para mantê-la, e então o crescimento desacelera. Gleick exemplifica essa situação enquanto descreve o crescimento de uma população de peixes:

"No cenário malthusiano de crescimento ilimitado, a função linear de crescimento sobe sempre. Num cenário mais realista, o ecologista precisa de uma equação com um termo extra que detenha o crescimento quando a população se tornar grande. A função mais natural ao ser escolhida se elevará acentuadamente quando a população for pequena, reduzirá o crescimento a quase zero nos valores intermediários, e cairá rapidamente quando a população for muito grande. Repetindo o processo, o ecologista pode observar a consolidação de um comportamento a longo prazo por uma população chegando, presumivelmente, a um regime estacionário. Uma incursão bem sucedida na matemática pelo ecologista o levaria a dizer alguma coisa como: Eis uma equação; eis uma variável que representa a taxa de mortalidade natural; eis uma variável que representa a taxa de mortalidade adicional provocada pela fome ou predação; portanto, a população crescerá com esta velocidade até chegar àquele nível de equilíbrio." (GLEICK, 1990)

Essa "capacidade de carga" ou "capacidade de suporte" proposta por Verhulst é o limitador que tornou este modelo aplicável à realidade. Em 1838, Pierre François Verhulst propôs este modelo e a partir de 1975, o ecólogo austríaco Robert May passou a desenvolvê-lo. De acordo com BASSANESI (2002), o modelo de Verhulst pode ser formulado através da seguinte equação de diferenças:

$$y_{n+1} - y_n = ay_n - by_n^2, \quad (19)$$

onde  $y_n$  representa a população no instante  $n$ ,  $a$  representa a taxa de nascimentos e  $b$  a taxa de mortalidade. CIPOLLI (2012) observa a respeito dos indivíduos que, "Como os recursos naturais são limitados, haverá uma competição entre eles, que é proporcional ao número de encontros entre os membros da espécie, e isto é dado por  $y_n^2$ ."

A equação (19) pode ser reorganizada da seguinte maneira:

$$y_{n+1} = (a + 1)y_n \left(1 - \frac{by_n}{a + 1}\right)$$

Sendo  $\frac{by_n}{a+1}$  um termo que relaciona a taxa de nascimento, taxa de mortalidade e capacidade da população, é possível defini-lo como a variável:

$$x_n = \frac{by_n}{a + 1},$$

bem como tomar  $r = a + 1$  e então substituir os termos em (19) obtendo a expressão do Mapa Logístico:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (20)$$

Essa expressão representa o modelo populacional de Verhulst de maneira discreta. O termo  $(1 - x_n)$  é o limitador para manter a população em equilíbrio. Quando  $x_n$  está próximo de zero, o termo  $(1 - x_n)$  se aproxima de 1, mantendo o crescimento da população. No entanto, quando o termo  $x_n$  se aproxima de 1, o termo  $(1 - x_n)$  se aproxima de zero, o que faz com que o crescimento da população desacelere de maneira a não ultrapassar a capacidade de suporte do ambiente. Neste modelo temos  $0 \leq x_n \leq 1$ , representando em porcentagem a quantidade de população atingida em relação à população máxima, sendo 0 a extinção da população e 1 o limite da população para determinado ambiente.

**Exemplo 4.1.1:** A seguir, faremos uma comparação entre o modelo de Malthus e o modelo de Verhulst, analisando o crescimento de uma colônia de bactérias que duplica a cada dia, cuja população inicial é dada por  $x_0 = 1000$ . Utilizando o modelo de Malthus, a população nos primeiros instantes é dada por:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1000 \\
x_1 &= 2 \cdot x_0 = 1.1000 = 2000 \\
x_2 &= 2 \cdot x_1 = 2.2000 = 4000 \\
x_3 &= 2 \cdot x_2 = 2.4000 = 8000 \\
x_4 &= 2 \cdot x_3 = 2.8000 = 16000 \\
x_5 &= 2 \cdot x_4 = 2.16000 = 32000 \\
x_6 &= 2 \cdot x_5 = 2.32000 = 64000 \\
x_7 &= 2 \cdot x_6 = 2.64000 = 128000 \\
x_8 &= 2 \cdot x_7 = 2.128000 = 256000 \\
x_9 &= 2 \cdot x_8 = 2.256000 = 512000 \\
x_{10} &= 2 \cdot x_9 = 2.512000 = 1024000
\end{aligned}$$

Para utilizarmos o modelo proposto por Verhulst, é necessário que seja definida uma capacidade de carga do ambiente, e para este exemplo usaremos o limite de 100.000 bactérias. Utilizando a mesma taxa de crescimento utilizada para o modelo de Malthus e, por conta da parametrização, a condição inicial equivalente a  $x_0 = 1000$  é  $x_0 = 0,01$ , que representa 1% da capacidade de carga do ambiente. Assim, teremos a população nos primeiros instantes dada por:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0,01 \\
x_1 &= 2 \cdot x_0 \cdot (1 - x_0) = 2 \cdot 0,01 \cdot (1 - 0,01) = 0,0198 \\
x_2 &= 2 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1) = 2 \cdot 0,0198 \cdot (1 - 0,0198) = 0,0388 \\
x_3 &= 2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_2) = 2 \cdot 0,0388 \cdot (1 - 0,0388) = 0,0746 \\
x_4 &= 2 \cdot x_3 \cdot (1 - x_3) = 2 \cdot 0,0746 \cdot (1 - 0,0746) = 0,13807 \\
x_5 &= 2 \cdot x_4 \cdot (1 - x_4) = 2 \cdot 0,13807 \cdot (1 - 0,13807) = 0,2380 \\
x_6 &= 2 \cdot x_5 \cdot (1 - x_5) = 2 \cdot 0,2380 \cdot (1 - 0,2380) = 0,3627 \\
x_7 &= 2 \cdot x_6 \cdot (1 - x_6) = 2 \cdot 0,3627 \cdot (1 - 0,3627) = 0,4623 \\
x_8 &= 2 \cdot x_7 \cdot (1 - x_7) = 2 \cdot 0,4623 \cdot (1 - 0,4623) = 0,4971 \\
x_9 &= 2 \cdot x_8 \cdot (1 - x_8) = 2 \cdot 0,4971 \cdot (1 - 0,4971) = 0,4999 \\
x_{10} &= 2 \cdot x_9 \cdot (1 - x_9) = 2 \cdot 0,4999 \cdot (1 - 0,4999) = 0,5001
\end{aligned}$$

A Figura 21 ilustra o exemplo mencionado acima e, pode-se perceber o crescimento exponencial da população quando o modelo de Malthus é utilizado, enquanto no modelo de Verhulst a população tem um crescimento menos acelerado, que é controlado pelo termo limitador.

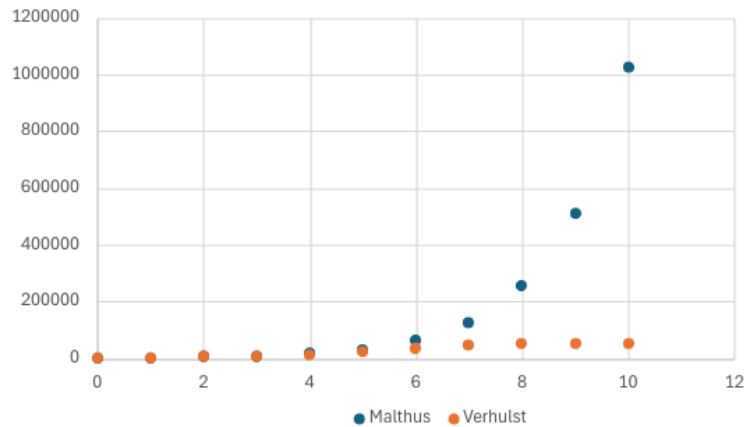


Figura 23 – Exemplo de crescimento populacional utilizando os modelos de Malthus e Verhulst.

A representação gráfica do Mapa Logístico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, e as suas raízes são  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ . Assim, para  $x_1 = 0$  temos

$$x_{n+1} = r \cdot 0(1 - 0) = 0$$

e para  $x_2 = 1$  temos

$$x_{n+1} = r \cdot 1(1 - 1) = 0.$$

Tendo como eixo de simetria  $x_n = \frac{1}{2}$ , essa parábola terá seu valor máximo em

$$x_{n+1} = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}.$$

Como os valores de  $x_{n+1}$  que são relevantes neste trabalho não podem ser maiores que 1, o que representaria uma população acima da capacidade de suporte do ambiente, podemos escrever que:

$$x_{n+1} = \frac{r}{4} \leq 1.$$

Logo,

$$r \leq 4,$$

conforme a Figura 22.

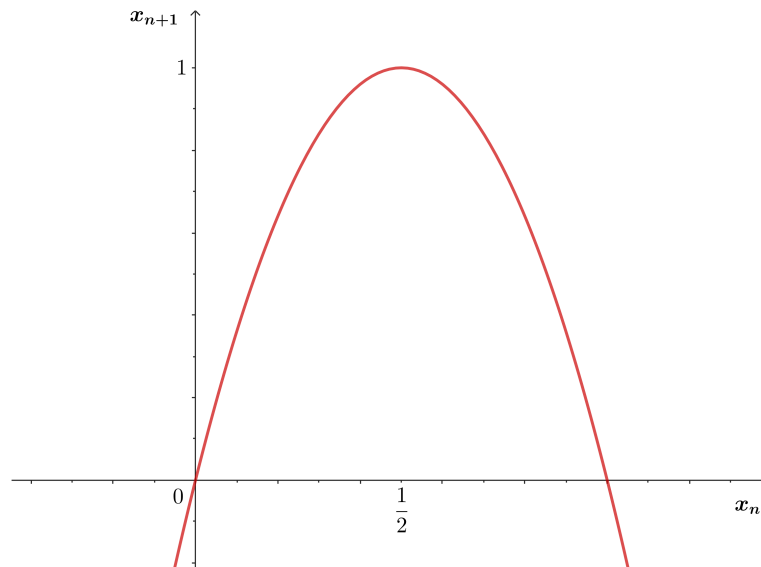


Figura 24 – Representação gráfica do mapa logístico com  $r = 4$ .

Note que nos casos em que  $x < 0$  e  $x > 1$ , a função tende para o infinito negativo e, devido a isso, não se aplica nos casos de estudos de populações.

Mesmo com a sua aparente simplicidade, o Mapa Logístico pode comportar-se de maneira caótica, pois as oscilações entre os valores de  $r$  podem gerar comportamentos cada vez mais complexos.

## 4.2 Pontos fixos do mapa logístico

Segue da Definição 2.1.1, que os pontos fixos satisfazem  $f(p) = rp(1-p) = p$ . Imediatamente é possível perceber que essa função possui no máximo duas soluções distintas, por ser uma equação de grau 2, bem como que o ponto  $p = 0$  é uma das soluções e que esta representa a extinção da população. A solução não nula é dada ao rearranjarmos os termos da função da seguinte maneira:

$$rp^2 - rp + p = rp^2 - p(r-1) = 0.$$

Como buscamos a solução em que  $p \neq 0$ , temos que:

$$p = \frac{r-1}{r}. \quad (21)$$

Portanto, os pontos fixos dessa função são  $p_1 = 0$  e  $p_2 = \frac{r-1}{r}$ . Note que  $p_2 = \frac{r-1}{r} > 0 \implies r > 1$ .

### 4.3 Pontos fixos atratores e pontos fixos repulsores do mapa logístico

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o mapa logístico definido por  $x_{n+1} = -rx_n^2 + rx_n$ , temos que  $f'(x) = -2rx + r$ .

Note que  $|f'(0)| = |-2r \cdot 0 + r| = |r|$ . Portanto, pelo Teorema 2.1.1, quando  $|r| < 1$ ,  $p_1 = 0$  será ponto fixo atrator e quando  $|r| > 1$ ,  $p_1 = 0$  será ponto fixo repulsor.

Para  $p_2 = \frac{r-1}{r}$ , temos que:

$$\left| f' \left( \frac{r-1}{r} \right) \right| = \left| -2r \cdot \left( \frac{r-1}{r} \right) + r \right| = |-r + 2|.$$

Portanto, pelo Teorema 2.1.1, quando  $|-r + 2| < 1$ ,  $p_2 = \frac{r-1}{r}$  será ponto fixo atrator, e quando  $|-r + 2| > 1$ ,  $p_2 = \frac{r-1}{r}$  será ponto fixo repulsor.

Note que, sendo o ponto  $p_2 = \frac{r-1}{r}$  atrator, tem-se

$$-r + 2 < 1 \implies -r < -1 \implies r > 1$$

e

$$-r + 2 > -1 \implies -r > -3 \implies r < 3.$$

Portanto, se  $r \in (1, 3)$ , temos  $|-r + 2| < 1$  e  $p_2 = \frac{r-1}{r}$  atrator.

**Exemplo 4.3.1** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ , seus pontos fixos são  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,5$ . Além disso,  $|f'(0)| = |r| = 2$ , e  $|f'(0,5)| = |-r + 2| = |-2 + 2| = 0$ .

Portanto temos que  $p_1 = 0$  é ponto fixo repulsor, e que  $p_2 = 0,5$  é ponto fixo atrator.

Na tabela a seguir é possível observar que, independente dos valores atribuídos a  $x_0$ , as órbitas se aproximam de  $p_2 = 0,5$ .

$n$	$x_n$	$x_n$	$x_n$	$x_n$	$x_n$
0	0,01	0,1	0,05	0,85	0,99
1	0,0198	0,18	0,095	0,255	0,0198
2	0,03881592	0,2952	0,17195	0,37995	0,03881592
3	0,074618489	0,41611392	0,284766395	0,471175995	0,074618489
4	0,13810114	0,485926251	0,407348991	0,498338353	0,13810114
5	0,23805843	0,499603859	0,482831581	0,499994478	0,23805843
6	0,362773228	0,49999686	0,499410491	0,5	0,362773228
7	0,462337626	0,5	0,49999305	0,5	0,462337626
8	0,497163091	0,5	0,5	0,5	0,497163091
9	0,499983904	0,5	0,5	0,5	0,499983904
10	0,499999999	0,5	0,5	0,5	0,499999999
11	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
12	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
13	...	...	...	...	...

Tabela 1 – Análise do comportamento de órbitas de diferentes valores de  $x_0$  sobre  $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ .

O diagrama abaixo mostra a órbita de  $x_0 = 0,1$  sobre  $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ .

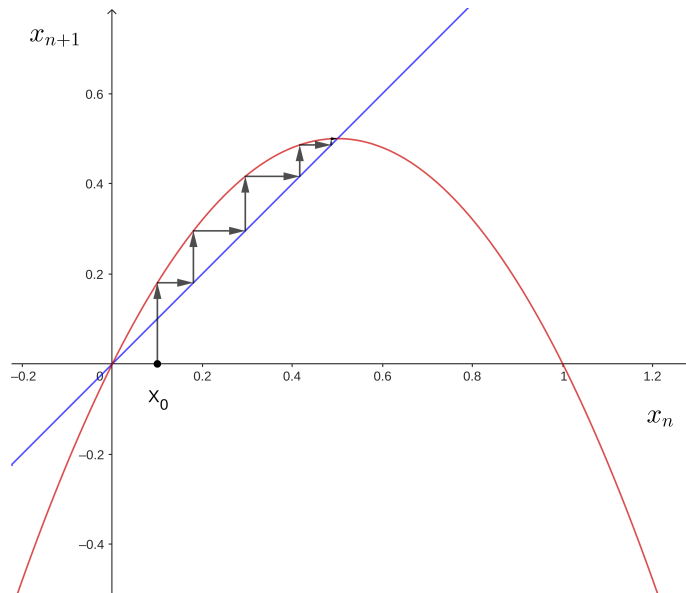


Figura 25 – Diagrama Cobweb de  $x_0 = 0,1$  sobre  $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ .

**Exemplo 4.3.2** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $x_{n+1} = 0,9x_n(1 - x_n)$ , com único ponto fixo em  $p = 0$ . Além disso,  $|f'(0)| = |r| = 0,9$ .

Portanto temos que  $p = 0$  é ponto fixo atrator.

O diagrama abaixo mostra a órbita de  $x_0 = 0,6$  sobre  $x_{n+1} = 0,9x_n(1 - x_n)$ .

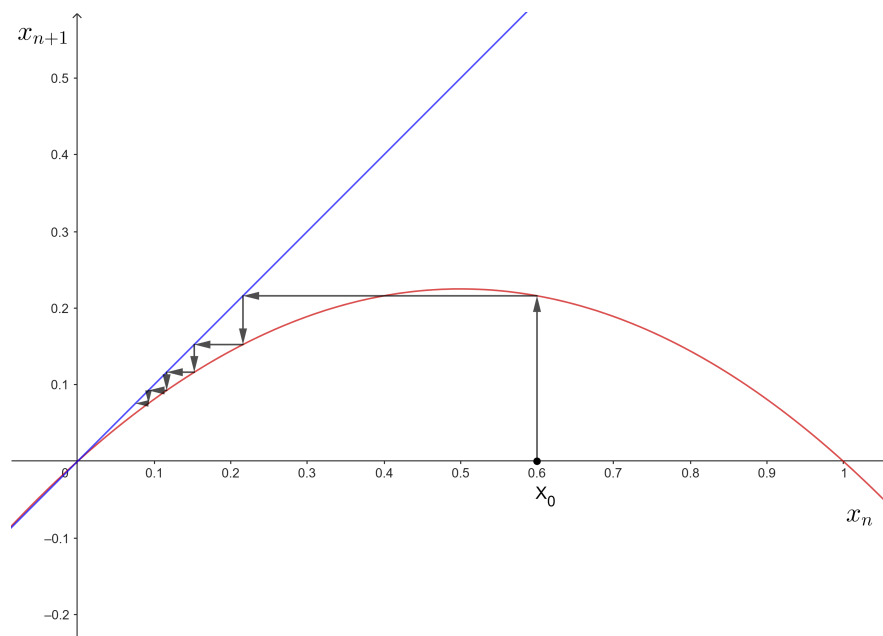


Figura 26 – Diagrama Cobweb de  $x_0 = 0,6$  sobre  $x_{n+1} = 0,9x_n(1 - x_n)$

No caso em que  $r = 1$ , a função  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$  terá um único ponto fixo em  $p = \frac{1-1}{1} = 0$ . Além disso,  $|f'(0)| = |r| = 1$ . Note que quando  $r = 1$  o ponto fixo  $p = 0$  é não hiperbólico. No entanto, dado  $x_0 \in (0, 1)$  temos

$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < (1 - x_0) < 1 \implies 0 < x_0(1 - x_0) < x_0 \implies 0 < x_1 < x_0$$

e, portanto,  $p = 0$  é atrator.

O quadro a seguir expõe órbitas de diferentes pontos sobre  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ .

n	$x_n$	$x_n$	$x_n$	$x_n$	$x_n$
0	0,01	0,05	0,1	0,5	0,6
1	0,0099	0,0475	0,09	0,5	0,24
2	0,00980199	0,04524375	0,0819	0,5	0,1824
3	0,009705911	0,043196753	0,07519239	0,5	0,14913024
4	0,009611706	0,041330794	0,069538494	0,5	0,126890412
5	0,009519321	0,039622559	0,064702892	0,5	0,110789235
6	0,009428704	0,038052612	0,060516428	0,5	0,09851498
7	0,009339803	0,036604611	0,05685419	0,5	0,088809779
8	0,009252572	0,035264713	0,053621791	0,5	0,080922602
9	0,009166961	0,034021113	0,050746495	0,5	0,074374135
10	0,009082928	0,032863677	0,048171288	0,5	0,068842623
11	0,009000429	0,031783656	0,045850815	0,5	0,064103316
12	0,008919421	0,030773455	0,043748518	0,5	0,059994081
13	0,008839865	0,029826449	0,041834585	0,5	0,056394791

Tabela 2 – Análise de diferentes órbitas sobre  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ .

No diagrama abaixo podemos observar a órbita de  $x_0 = 0,6$  sobre  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ .

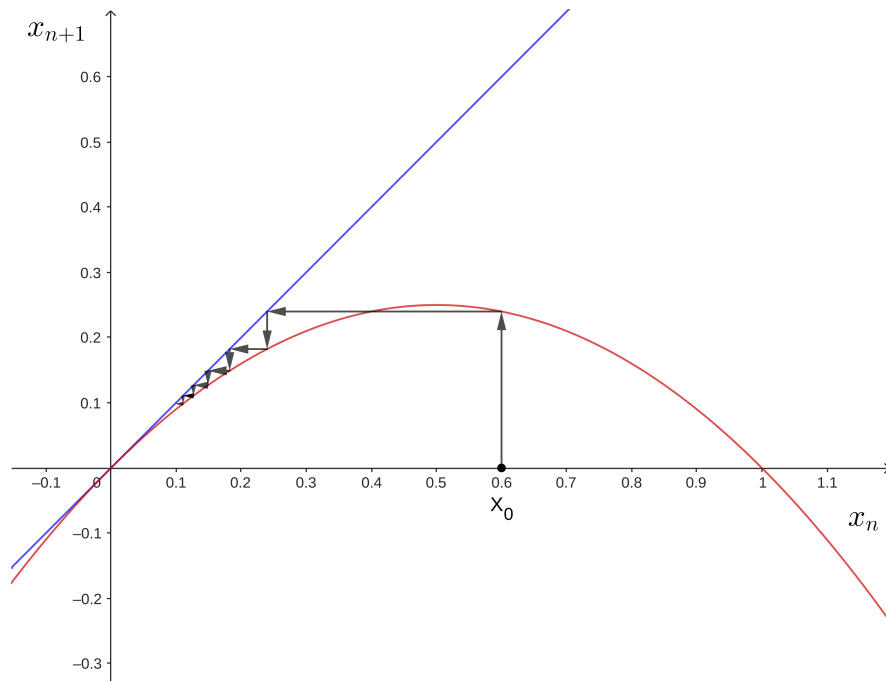


Figura 27 – órbita de  $x_0 = 0,6$  sobre  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ .

## 4.4 Alguns casos particulares do mapa logístico

Nesta seção observaremos alguns casos do mapa logístico quando  $r > 3$ .

**Exemplo 4.4.1:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ . Seus pontos fixos são  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,6875$ . Além disso,  $|f'(0)| = |3,2| = 3,2$  e  $|f'(0,6875)| = |-3,2 + 2| = 1,2$ .

Como  $|f'(0)| > 1$  e  $|f'(0,6875)| > 1$ , segue do Teorema 2.2.1, que  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,6875$  são pontos fixos repulsores, ou seja, a órbita de  $x_0$  se afasta de  $p_1 = 0$  e de  $p_2 = 0,6875$ . Porém, ao atribuirmos diferentes valores a  $x_0$  e iterarmos a função  $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ , podemos observar que em determinado momento, a órbita passará a oscilar entre dois pontos.

As Figuras 28 e 29 ilustram o comportamento da órbita de  $x_0 = 0,2$  e de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ .

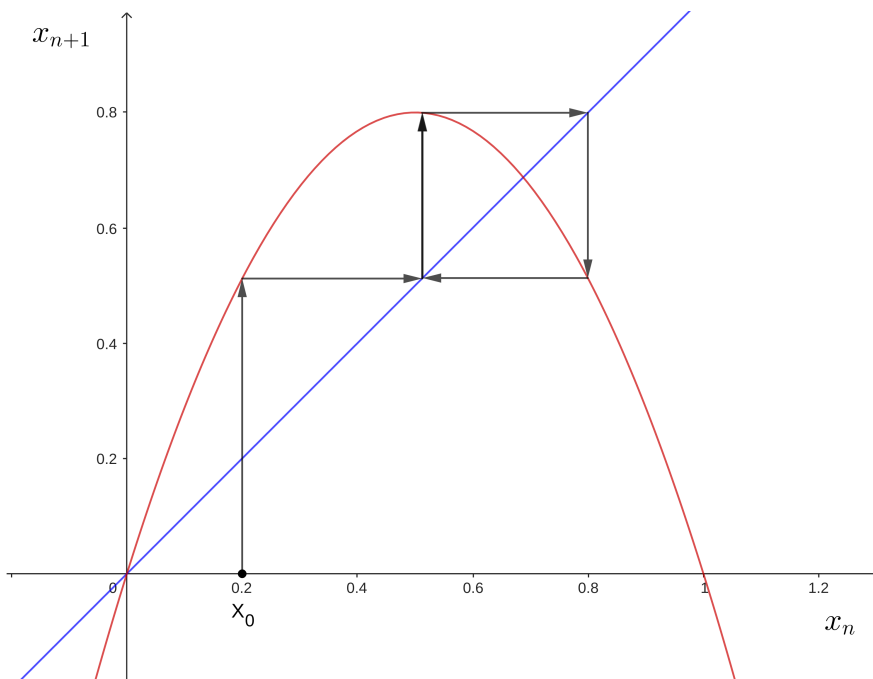


Figura 28 – Órbita de  $x_0 = 0,2$  sobre  $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ .

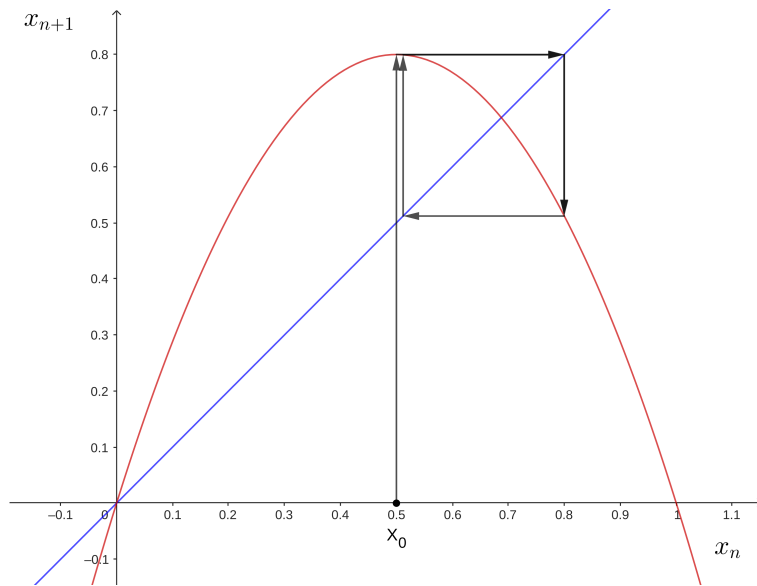


Figura 29 – Órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ .

**Exemplo 4.4.2:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $x_{n+1} = 3,5x_n(1 - x_n)$ . Seus pontos fixos são  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,7143$ . Além disso,  $|f'(0)| = |3,5| = 3,5$  e  $|f'(0,7143)| = |-3,5 + 2| = 1,5$ .

Como  $|f'(0)| > 1$  e  $|f'(0,7143)| > 1$ , segue do Teorema 2.2.1 que  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,7143$  são pontos fixos repulsores, ou seja, a órbita de  $x_0$  se afasta de  $p_1 = 0$  e de  $p_2 = 0,7143$ . Porém, ao atribuirmos diferentes valores a  $x_0$  e iterarmos a função  $x_{n+1} = 3,5x_n(1 - x_n)$  algumas vezes, podemos observar que em determinado momento, a órbita passará a oscilar entre quatro pontos.

As Figuras 30 e 31 ilustram o comportamento da órbita de  $x_0 = 0,1$  e da órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 3,5x_n(1 - x_n)$ .

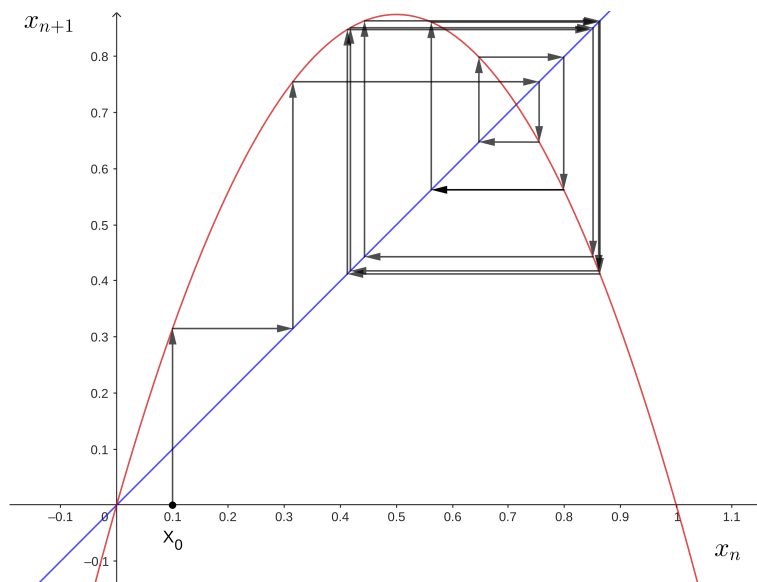


Figura 30 – Órbita de  $x_0 = 0,1$  sobre  $x_{n+1} = 3,5x_n(1 - x_n)$ .

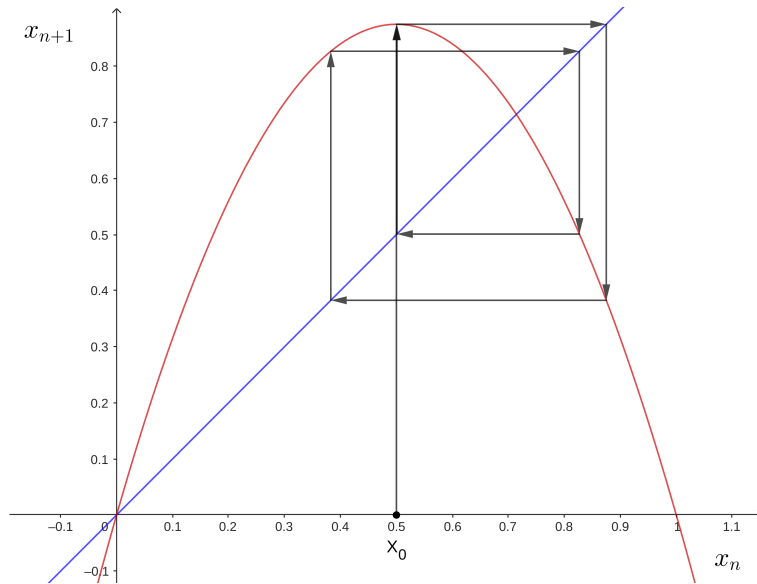


Figura 31 – Órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 3,5x_n(1 - x_n)$ .

**Exemplo 4.4.3:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $x_{n+1} = 3,56x_n(1 - x_n)$ . Seus pontos fixos são  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,7191$ . Além disso,  $|f'(0)| = |3,5| = 3,5$  e  $|f'(0,7191)| = |-3,56 + 2| = 1,56$ .

Como  $|f'(0)| > 1$  e  $|f'(0,7191)| > 1$ , segue do Teorema 2.2.1 que  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,7191$  são pontos fixos repulsores, ou seja, a órbita de  $x_0$  se afasta de  $p_1 = 0$  e de  $p_2 = 0,7191$ . Porém, ao atribuímos diferentes valores a  $x_0$  e iterarmos a função  $x_{n+1} = 3,56x_n(1 - x_n)$  algumas vezes, podemos observar que em determinado momento, a órbita passará a oscilar entre oito pontos.

A Figura abaixo ilustra a órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 3,56x_n(1 - x_n)$ .

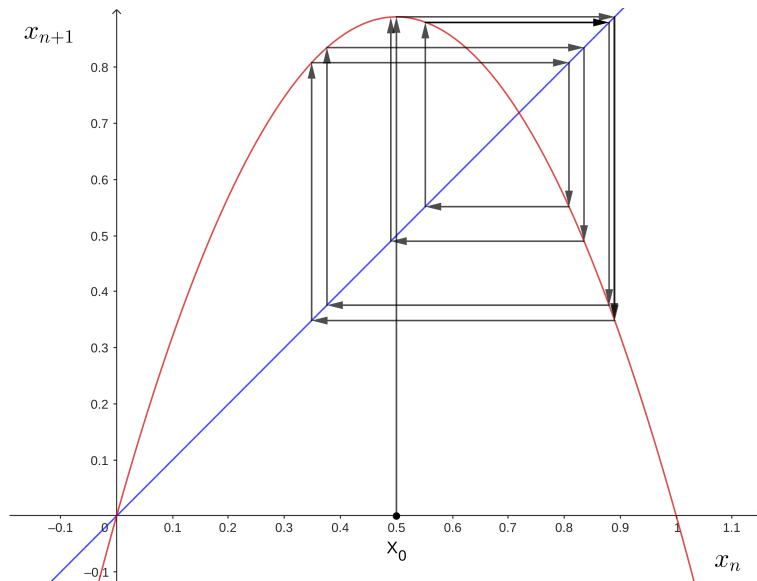


Figura 32 – Órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 3,56x_n(1 - x_n)$ .

Nos casos em que  $r > 3,56$ , o comportamento da órbita tende a se tornar caótico, pois pequenas mudanças nos valores de  $x_0$  geram resultados significativamente diferentes, como nos casos a seguir.

**Exemplo 4.4.4:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $x_{n+1} = 3,6x_n(1 - x_n)$ . Seus pontos fixos são  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,7\bar{2}$ . Além disso,  $|f'(0)| = |3,6| = 3,6$  e  $|f'(0,7\bar{2})| = |-3,6 + 2| = 1,6$ .

Como  $|f'(0)| > 1$  e  $|f'(0,7\bar{2})| > 1$ , segue do Teorema 2.2.1 que  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,7\bar{2}$  são pontos fixos repulsores, ou seja, a órbita de  $x_0$  se afasta de  $p_1 = 0$  e de  $p_2 = 0,7\bar{2}$ . Ao atribuímos diferentes valores a  $x_0$  e iterarmos a função  $x_{n+1} = 3,6x_n(1 - x_n)$  algumas vezes, podemos observar que não há regularidade no comportamento da órbita.

Na Figura a seguir, é possível analisar o comportamento da órbita de  $x_0 = 0,5$  sobre  $x_{n+1} = 3,6x_n(1 - x_n)$ .

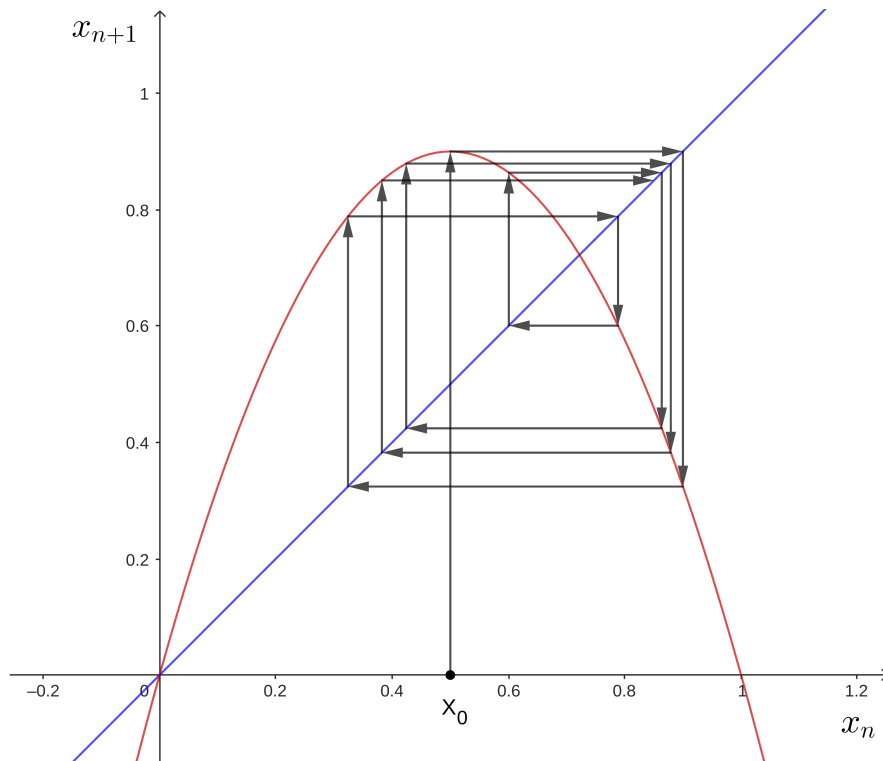


Figura 33 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = 3,6x_n(1 - x_n)$  com  $x_0 = 0,5$ .

**Exemplo 4.4.5** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ . Seus pontos fixos são  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,75$ . Além disso,  $|f'(0)| = |4| = 4$  e  $|f'(0,75)| = |-4 + 2| = 2$ .

Como  $|f'(0)| > 1$  e  $|f'(0,75)| > 1$ , segue do Teorema 2.2.1, que  $p_1 = 0$  e  $p_2 = 0,75$  são pontos fixos repulsores, ou seja, a órbita de  $x_0$  se afasta de  $p_1 = 0$  e de  $p_2 = 0,75$ . Ao atribuímos diferentes valores a  $x_0$  e iterarmos a função  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$  algumas vezes, podemos observar que não há regularidade no comportamento da órbita.

As Figuras 34 e 35 expõem diferentes diagramas após 10 iterações. É possível perceber que, independente dos valores atribuídos a  $x_0$ , as órbitas apresentam pontos dispersos e comportamento ao qual denominaremos caótico.

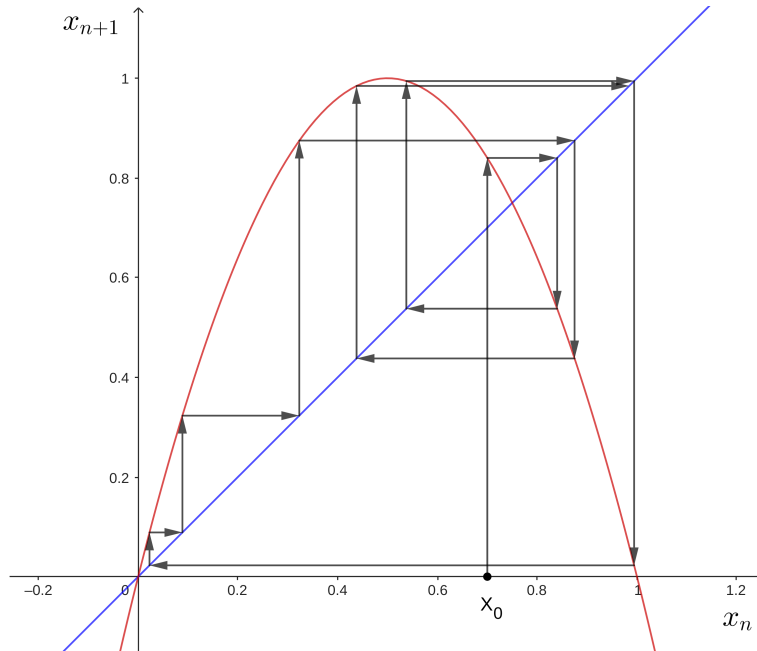


Figura 34 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ , com  $x_0 = 0,7$ .

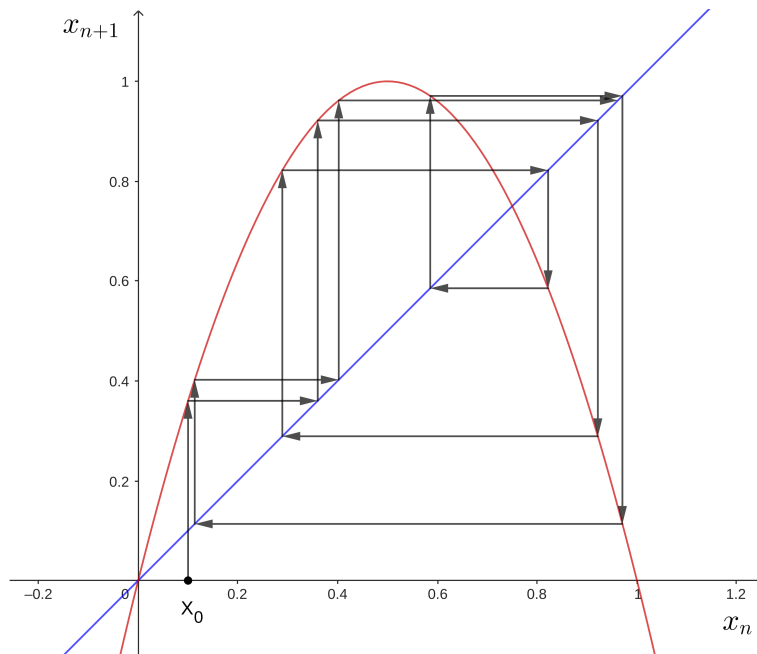


Figura 35 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ , com  $x_0 = 0,1$ .

## 4.5 Diagrama de bifurcações

Note que associada ao mapa logístico temos uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola de concavidade para baixo.

Desta forma, não se espera mais do que dois pontos fixos na dinâmica. De fato, como vimos, temos:

- Único ponto fixo em  $p = 0$ , para  $0 < r < 1$ ;
- Dois pontos fixos, sendo um em  $p_1 = 0$  e o outro em  $p_2 = \frac{r-1}{r}$ , para  $1 < r \leq 4$ .

Além disso, o ponto fixo  $p_2 = \frac{r-1}{r}$  surge exatamente quando  $r > 1$  e  $p_1 = 0$  muda de estabilidade (de estável para instável).

Por outro lado, em  $r = 3$ ,  $p_2$  também muda de estabilidade (de estável para instável). Os exemplos anteriores sugerem o surgimento de novos objetos, a saber, pontos periódicos e de fato, é isso que ocorre a partir de  $r = 3$  como veremos no resultado a seguir.

**Proposição:** Para  $r > 3$  o mapa logístico  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  admite solução 2-periódica. Além disso, essa solução é estável para  $3 < r \approx 3,45$  e instável para  $r > 3,45$ .

**Demonstração:** Para buscar os pontos periódicos de período 2 vamos estudar os pontos fixos de

$$g(x) = f(f(x)) = r^2x(1 - x - rx + 2rx^2 - rx^3).$$

Assim,

$$g(x) \Leftrightarrow x[r^2(1 - x - rx + 2rx^2 - rx^3) - 1] = 0,$$

cujas soluções são  $x = 0$ ,  $x = \frac{r-1}{r}$  e, sendo  $x = \frac{r-1}{r}$ , temos

$$x_- = \frac{r + r^2 - r\sqrt{-3 - 2r + r^2}}{2r^2}$$

e

$$x_+ = \frac{r + r^2 + r\sqrt{-3 - 2r + r^2}}{2r^2}.$$

Observe que os pontos fixos  $x = 0$  e  $x = \frac{r-1}{r}$  já eram pontos fixos de  $f$  e, portanto, não estão associados a órbitas 2-periódicas.

Por outro lado, os pontos  $x_+$  e  $x_-$  existem e são distintos quando  $r^2 - 2r - 3 > 0$  ( $\Leftrightarrow r > 3$ ).

Portanto, para  $r > 3$  o mapa logístico admite órbita 2-periódica.

Além disso, como  $g'(x_-) = g'(x_+) = 4 - (r-2)r = -r^2 + 2r + 4$ , segue que a órbita 2-periódica é estável para  $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$  e instável para  $r > 1 + \sqrt{6}$ . ■

Conforme observado nas seções anteriores, existe um ponto fixo  $p = 0$  quando  $r < 1$  e, dois pontos fixos sendo  $p_1 = 0$  e  $p_2 = \frac{r-1}{r}$  quando  $r \leq 3$ . Para valores em que  $r > 3$ , surgem pontos periódicos, e quando  $r > 3,56$  a quantidade de pontos periódicos aumenta tornando a dinâmica caótica. Os estudos do matemático Mitchell Feigenbaum verificaram que a variação do parâmetro  $r$  leva à duplicação dos pontos periódicos do mapa logístico e, esses estudos deram origem a imagem a seguir que ilustra o fenômeno conhecido por duplicação de período.

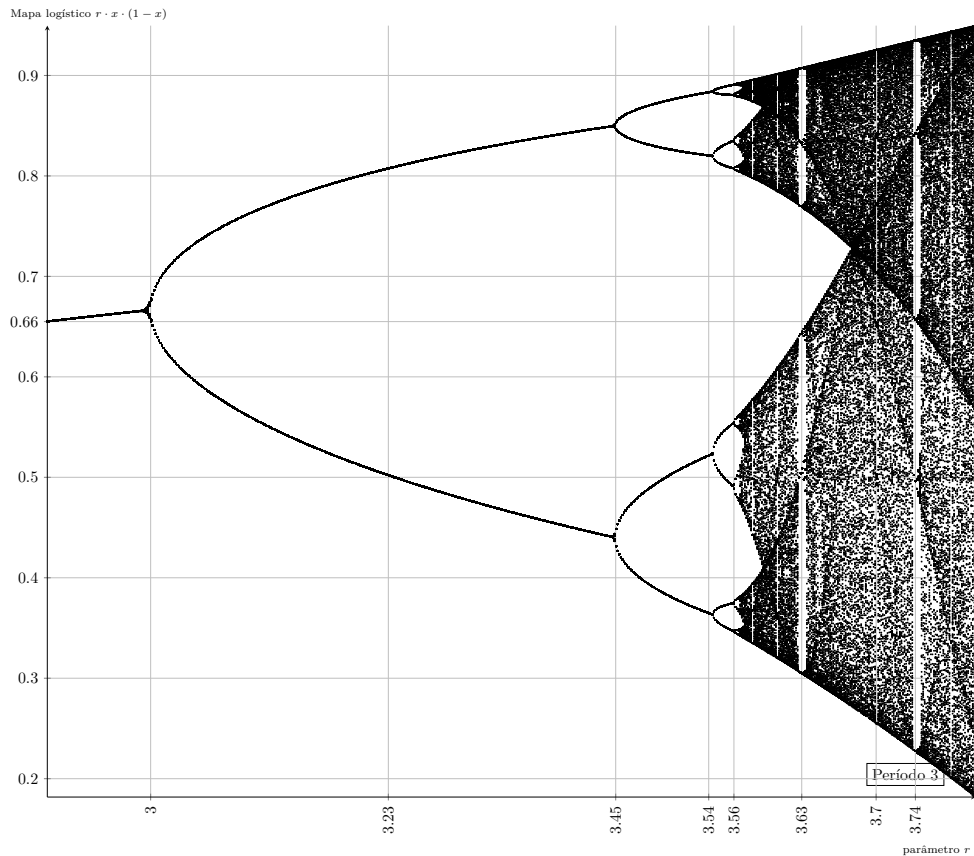


Figura 36 – Diagrama de bifurcações.

## 5 ESTABILIDADE DE PONTOS FIXOS NÃO HIPERBÓLICOS

Nesta seção faremos um estudo detalhado da dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$ , sendo  $f : I \rightarrow I$  com  $I \subset \mathbb{R}$ , em uma vizinhança de pontos fixos não hiperbólicos, isto é, pontos  $p \in I$  satisfazendo  $f(p) = p$  e  $|f'(p)| = 1$ . Veremos que a dinâmica em torno de tais pontos pode ter diferentes comportamentos conforme os exemplos a seguir.

### 5.1 Pontos fixos não hiperbólicos que satisfazem $f'(p) = 1$

**Exemplo 5.1.1:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes continuamente diferenciável, definida por  $f(x) = x^2 - x + 1$ , então  $f$  admite único ponto fixo em  $p = 1$ . Além disso,  $f'(p) = 1$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p$  é semiestável à esquerda.

**Solução:** Para encontrar os pontos fixos de  $f$ , resolvemos:

$$f(x) = x \iff x^2 - x + 1 = x \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

Note que, considerando  $g(x) = f(x) - x$ , para  $x \neq 1$  e  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$g(x) = f(x) - x = (x-1)^2 \implies f(x) > x$$

e que  $f'(x) = 2x - 1 \implies f'(1) = 1$ . Portanto,  $p = 1$  é não hiperbólico.

Note ainda que  $f''(x) = 2$ . Daí,  $f''(1) = 2 > 0$ .

Para estudar a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p = 1$  vamos dividir nos casos a seguir:

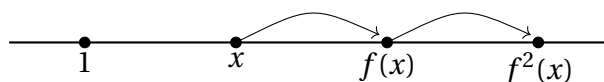
i)  $x > 1$ .

Neste caso temos  $f(x) = x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1 > 1$ . Além disso,

$$|f(x) - 1| = |x^2 - x| = |x| \cdot |x - 1| > |x - 1|,$$

o que indica que  $p = 1$  é repulsor à direita.

Assim, temos a seguinte configuração.

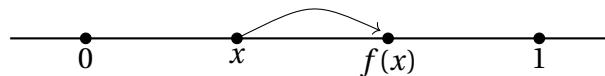


ii)  $0 < x < 1$ .

Neste caso temos  $f(x) = x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$ , o que implica  $0 < f(x) < 1$  e

$$|f(x) - 1| = |x^2 - x| = |x| \cdot |x - 1| < |x - 1|.$$

Assim, temos a seguinte configuração:



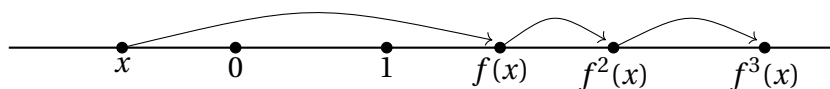
ou seja,  $p = 1$  é localmente atrator à esquerda.

Utilizando o Teorema de Taylor, temos que se  $0 < x < p$ :

$$|f(x) - p| = \left| (x - p) + \frac{f''(s)}{2!} (x - p)^2 \right| < |x - p|.$$

iii)  $x < 0$ .

Neste caso temos  $f(x) = x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1 > 1$ . Assim, aplicando o caso (i), temos a figura abaixo.



A Figura 37 ilustra a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Note que o ponto  $p = 1$  é instável com semiestabilidade à esquerda.

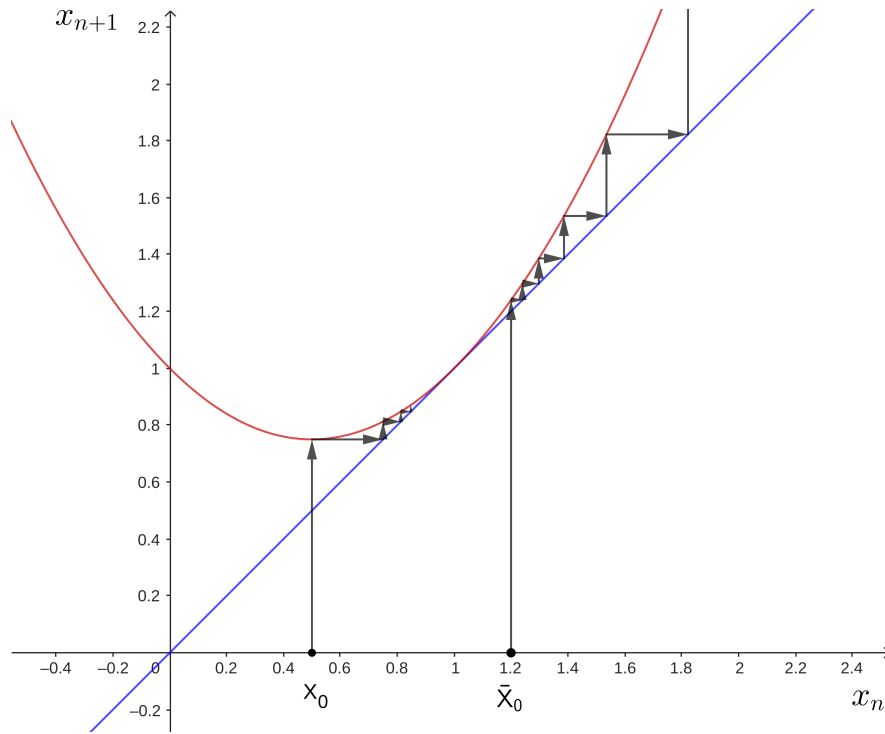


Figura 37 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ , com  $x_0 = 0,5$  e  $\bar{x}_0 = 1,2$ .

**Exemplo 5.1.2:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e derivável definida por  $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ , então  $f$  admite um único ponto fixo em  $p = 1$ . Além disso,  $f'(p) = 1$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p$  é semiestável à direita.

**Solução:** Para encontrar os pontos fixos de  $f$  resolvemos

$$-x^2 + 3x - 1 = x \iff -x^2 + 2x - 1 = 0 \iff -(x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

Note que para  $x \neq 1$  tem-se

$$g(x) = f(x) - x = -(x-1)^2 \implies f(x) < x,$$

e que  $f'(x) = -2x + 3 \implies f'(1) = 1$ . Portanto,  $p$  é não hiperbólico.

Note ainda que  $f''(x) = -2$ . Daí,  $f''(1) = -2 < 0$ .

Para estudar a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p = 1$  vamos dividir nos casos a seguir:

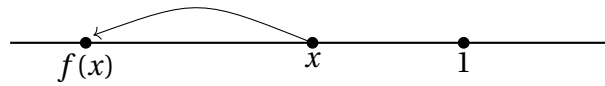
i)  $x < 1$ .

Neste caso, temos  $f(x) = -x^2 + 3x - 1 < x < 1$ . Além disso,

$$|f(x) - 1| = |-x^2 + 3x - 2| = |-x + 2| \cdot |x - 1| > |x - 1|,$$

o que implica que  $p = 1$  é repulsor à esquerda.

Assim, temos a seguinte configuração:

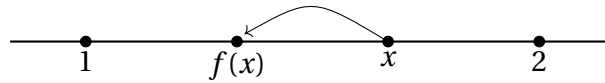


ii)  $1 < x < 2$ .

Neste caso, temos  $f(x) = -x^2 + 3x - 1 < x < 2$  e

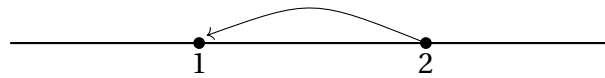
$$|f(x) - 1| = |-x^2 + 3x - 2| = |-x + 2| \cdot |x - 1| < |x - 1|,$$

ou seja,  $p = 1$  é localmente atrator à direita e temos a seguinte configuração:



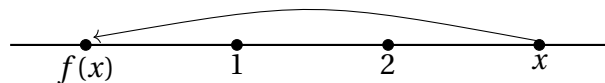
iii)  $x = 2$ .

Neste caso, temos  $f(2) = 1$ . Assim, temos a seguinte configuração:



iv)  $x > 2$ .

Neste caso, note que  $f(x) = -x^2 + 3x - 1 < 1$  e portanto a dinâmica, a partir daí, é dada pelo caso (i).



A Figura 38 ilustra a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Note que o ponto  $p = 1$  é instável com semiestabilidade à direita.

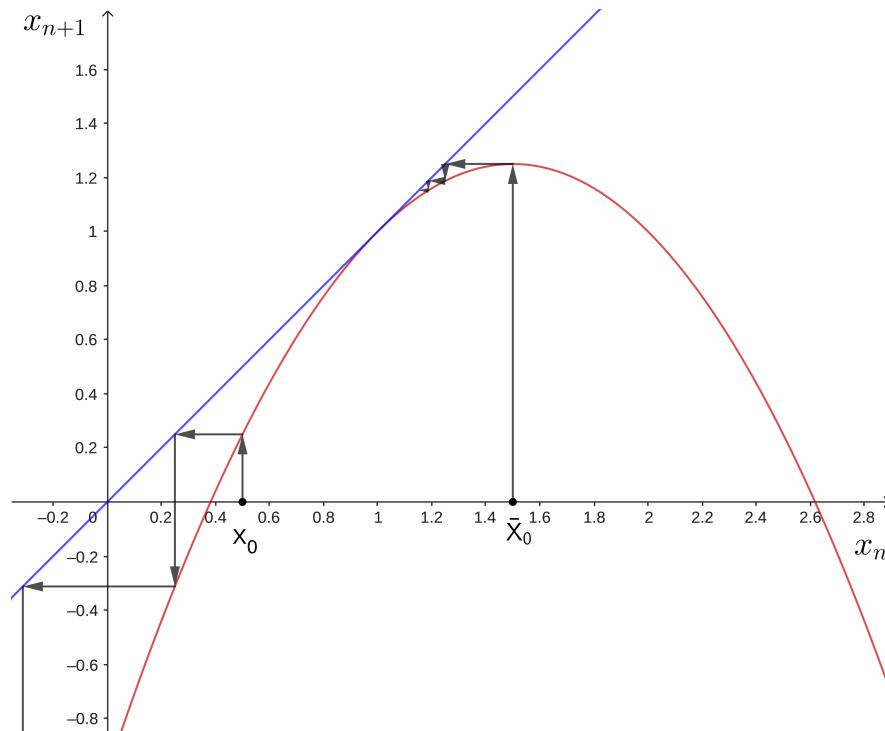


Figura 38 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = -x_n^2 + 3x_n - 1$ , com  $x_0 = 0,5$  e  $\bar{x}_0 = 1,5$ .

**Exemplo 5.1.3:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e derivável definida por  $f(x) = x^3 + x$ , então  $f$  admite um único ponto fixo em  $p = 0$ . Além disso,  $f'(p) = 1$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p$  é instável.

**Solução:** Para encontrar os pontos fixos de  $f$  resolvemos

$$x^3 + x = x \iff x^3 = 0 \iff x = 0.$$

Note que para  $x > 0$  temos

$$f(x) = x^3 + x = x(x^2 + 1) > x$$

e para  $x < 0$  temos

$$f(x) = x^3 + x = x(x^2 + 1) < x.$$

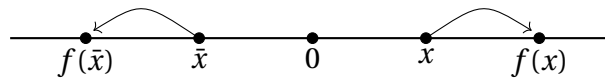
Note ainda que  $f'(x) = 3x^2 + 1 \implies f'(0) = 1$ . Portanto,  $p$  é não hiperbólico.

Note também que  $f''(x) = 6x$ . Daí,  $f''(0) = 0$ . Além disso,  $f'''(x) = 6 > 0$ .

Para estudar a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  em uma vizinhança de  $p = 0$ , vamos analisar o caso em que  $x \neq 0$ . Neste caso temos

$$|f(x) - 0| = |x^3 + x| = |x| \cdot |x^2 + 1| > |x|.$$

Como para  $x > 0$  temos  $f(x) > x$ , para  $x < 0$  temos  $f(x) < x$  e,  $|f(x) - p| > |x|$ , temos a seguinte configuração.



A Figura 39 ilustra a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Note que o ponto  $p = 0$  é instável.

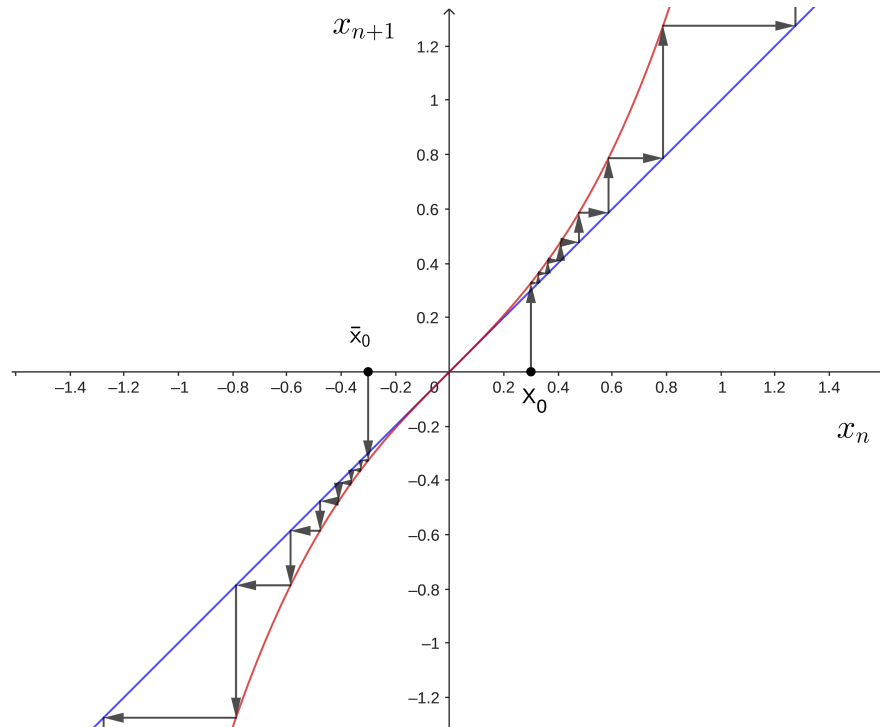


Figura 39 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = x_n^3 + x_n$ , com  $x_0 = 0,25$  e  $\bar{x}_0 = -0,3$ .

**Exemplo 5.1.4:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = -x^3 + x$ , então  $f$  admite um único ponto fixo em  $p = 0$ . Além disso,  $f'(p) = 1$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p$  é estável.

**Solução:** Para encontrar os pontos fixos de  $f$  resolvemos

$$-x^3 + x = x \iff -x^3 = 0 \iff x = 0.$$

Para  $0 < x < 1$  temos

$$f(x) = -x^3 + x = x(1 - x^2) \implies 0 < f(x) < x$$

e para  $-1 < x < 0$  temos

$$f(x) = -x^3 + x = x(1 - x^2) \implies x < f(x) < 0.$$

Note que  $f'(x) = -3x^2 + 1 \implies f'(0) = 1$ . Portanto,  $p$  é não hiperbólico.

Note também que  $f''(x) = -6x \implies f''(0) = 0$ . Além disso,  $f'''(x) = -6 < 0$ .

Para estudar a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  em uma vizinhança de  $p = 0$ , vamos analisar os casos a seguir:

i)  $0 < x < 1$ .

Neste caso temos

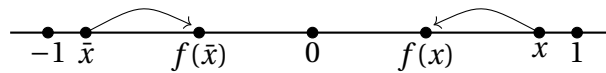
$$|f(x) - 0| = |-x^3 + x| = |x| \cdot |-x^2 + 1| < |x|.$$

ii)  $-1 < x < 0$ .

Neste caso temos

$$|f(x) - 0| = |-x^3 + x| = |x| \cdot |-x^2 + 1| < |x|.$$

Assim, temos a seguinte configuração.



A Figura 40 ilustra a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Note que o ponto  $p = 0$  é estável.

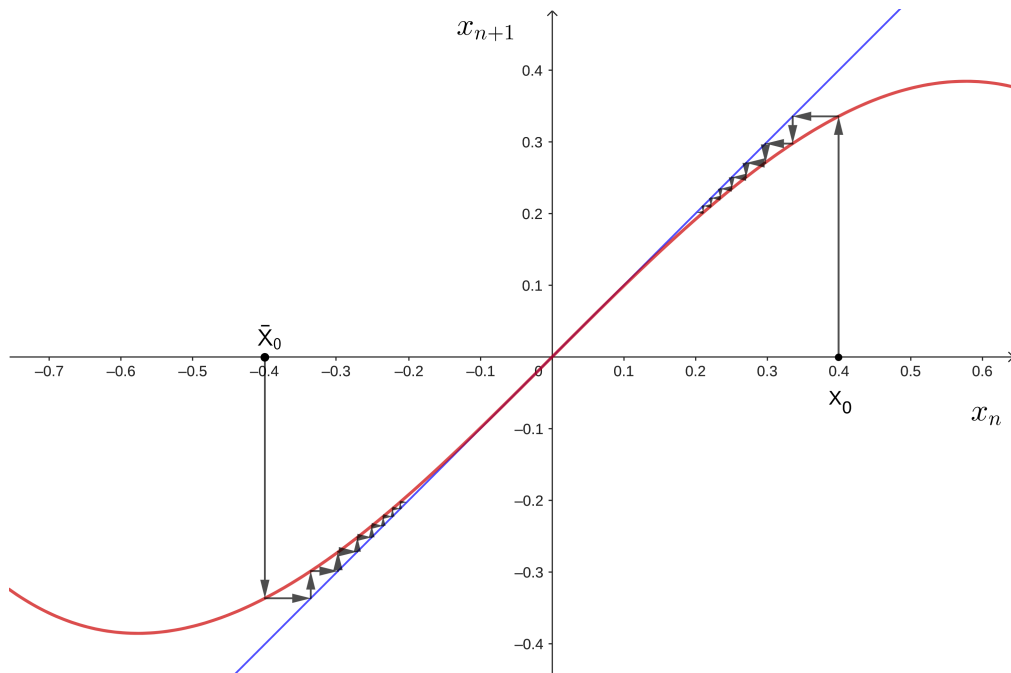


Figura 40 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = -x_n^3 + x_n$ , com  $x_0 = 0,4$  e  $\bar{x}_0 = -0,4$ .

O próximo resultado caracteriza a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  em vizinhança de pontos fixos não hiperbólicos que satisfazem  $f'(p) = 1$ .

**Teorema 5.1.1.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma função três vezes continuamente diferenciável em  $I \subset \mathbb{R}$  e  $p \in I$  ponto fixo de  $f$  com  $f'(p) = 1$ .*

*a) Se  $f''(p) \neq 0$ , então  $p$  é instável, sendo semiestável à esquerda (respectivamente à direita) se  $f''(p) > 0$  (respectivamente  $f''(p) < 0$ ).*

*b) Se  $f''(p) = 0$  e  $f'''(p) > 0$ , então  $p$  é instável.*

*c) Se  $f''(p) = 0$  e  $f'''(p) < 0$ , então  $p$  é estável.*

**Demonstração:**

a) Suponha  $f(p) = p$ ,  $f'(p) = 1$  e  $f''(p) > 0$ .

Considere  $g(x) = f(x) - x$ . Temos:

$$g(p) = f(p) - p = 0$$

$$g'(p) = f'(p) - 1 = 0$$

$$g''(p) = f''(p) > 0.$$

Da última desigualdade, segue que  $g'(x)$  é crescente em vizinhança de  $p$ . Como  $g'(p) = 0$ , então segue que em vizinhança de  $p$  temos  $g'(x) > 0$  para  $x > p$  e  $g'(x) < 0$  para  $x < p$ .

Além disso, como  $g(p) = 0$ ,  $g$  é crescente para  $x > p$ ,  $g$  é decrescente para  $x < p$  e temos  $g(x) > 0, \forall x \sim p$ , com  $x \neq p$ . Ou seja  $f(x) > x, \forall x \sim p$ , com  $x \neq p$ .

Como, por hipótese,  $f''$  é contínua, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ .

Assim, dado  $x = p + \delta$  com  $0 < \delta < \epsilon$ , segue do teorema de Taylor que:

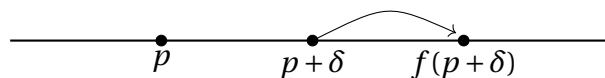
$$f(p + \delta) = f(p) + f'(p)\delta + \frac{f''(s)}{2!}\delta^2, \tag{22}$$

com  $s \in (p, p + \epsilon)$ .

Assim,

$$f(p + \delta) = p + \delta + \frac{f''(s)}{2!}\delta^2 > p + \delta,$$

e como  $f''(s) > 0$  temos a figura abaixo.



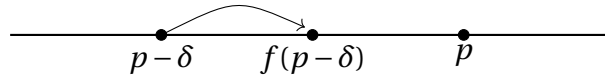
O que implica que  $p$  é localmente repulsor à direita.

Por outro lado, se  $x = p - \delta$ , com  $0 < \delta < \epsilon$ , temos:

$$f(p - \delta) = f(p) - f'(p)\delta + \frac{f''(s)}{2!}\delta^2 = p - \delta + \frac{f''(s)}{2!}\delta^2 > p - \delta,$$

com  $s \in (p - \epsilon, p)$ .

Como  $f''(s) > 0$  temos a figura abaixo.



O que implica que  $p$  é localmente atrator à esquerda.

Portanto,  $p$  é semiestável à esquerda.

De modo análogo ao apresentado anteriormente, se  $f(p) = p$ ,  $f'(p) = 1$ ,  $f''(p) < 0$  então, considerando ainda  $g(x) = f(x) - x$ , temos que  $g''(p) = f''(p) < 0$ .

Da última desigualdade, segue que  $g'(x)$  é decrescente em vizinhança de  $p$ . Como  $g'(p) = 0$ , segue que, em vizinhança de  $p$  temos  $g'(x) < 0$  para  $x > p$  e  $g'(x) > 0$  para  $x < p$ .

Além disso, como  $g(p) = 0$ ,  $g$  é decrescente para  $x > p$ ,  $g$  é crescente para  $x < p$  e, temos que  $g(x) < 0, \forall x \sim p$ , com  $x \neq p$ , ou seja  $f(x) < x, \forall x \sim p$ , com  $x \neq p$ .

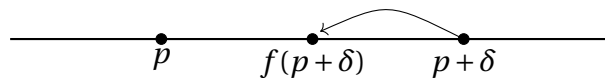
Como, por hipótese,  $f''$  é contínua existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ .

Assim, dado  $x = p + \delta$  com  $0 < \delta < \epsilon$  segue de (22) que:

$$f(p + \delta) = f(p) + f'(p)\delta - \frac{f''(s)}{2!}\delta^2 = p + \delta - \frac{f''(s)}{2!}\delta^2 < p + \delta,$$

com  $s \in (p, p + \epsilon)$ .

Como  $f''(s) < 0$  temos a figura abaixo.



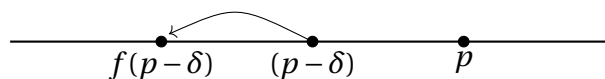
O que implica que  $p$  é localmente atrator à direita. Portanto,  $p$  é semiestável à direita.

Por outro lado, se  $x = p - \delta$ , com  $0 < \delta < \epsilon$ , temos:

$$f(p - \delta) = f(p) - f'(p)\delta - \frac{f''(s)}{2!}\delta^2 = p - \delta - \frac{f''(s)}{2!}\delta^2 < p - \delta,$$

com  $s \in (p - \epsilon, p)$ .

Como  $f''(s) < 0$  temos a figura abaixo.



O que implica que  $p$  é localmente repulsor à esquerda.

b) Suponha  $f(p) = p$ ,  $f'(p) = 1$ ,  $f''(p) = 0$  e  $f'''(p) > 0$

Considere  $g(x) = f(x) - x$ . Temos:

$$g(p) = f(p) - p = 0$$

$$g'(p) = f'(p) - 1 = 0$$

$$g''(p) = f''(p) = 0$$

$$g'''(p) = f'''(p) > 0.$$

Da última desigualdade, segue que  $g''(x)$  é crescente em vizinhança de  $p$ . Como  $g''(p) = 0$ , temos  $g''(x) > 0$  se  $x > p$  e  $g''(x) < 0$  se  $x < p$ . De modo similar, como  $g'(p) = 0$ ,  $g'$  é crescente para  $x > p$  e  $g'$  é decrescente para  $x < p$ , temos  $g'(x) > 0 \forall x \sim p$ . Ou seja,  $g(x)$  é crescente em vizinhança de  $p$ .

Além disso, como  $g(p) = 0$  temos que  $g(x) > 0$  para  $x > p$ , e  $g(x) < 0$  para  $x < p$ . Consequentemente,  $f(x) < x$  para  $x < p$  e  $f(x) > x$  para  $x > p$  em vizinhança de  $p$ .

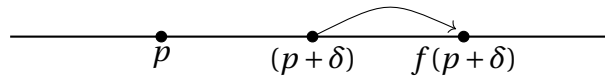
Como, por hipótese,  $f'''$  é contínua e  $f'''(p) > 0$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f'''(x) > 0$  para todo  $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ .

Assim, dado  $x = p + \delta$  com  $0 < \delta < \epsilon$  segue do Teorema de Taylor que:

$$f(p + \delta) = f(p) + f'(p)\delta + \frac{f''(p)}{2!}\delta^2 + \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 = p + \delta + \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 > p + \delta,$$

onde  $s \in (p, p + \epsilon)$ .

Como  $f'''(s) > 0$  temos a figura abaixo.



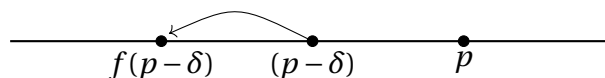
O que implica que  $p$  é localmente repulsor à direita.

Por outro lado, se  $x = p - \delta$ , com  $0 < \delta < \epsilon$ , temos:

$$f(p - \delta) = f(p) - f'(p)\delta + \frac{f''(p)}{2!}\delta^2 - \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 = p - \delta - \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 < p - \delta,$$

com  $s \in (p - \delta, p)$ .

Como  $f'''(s) > 0$  e  $\delta^3 < 0$  temos a figura abaixo.



O que implica que  $p$  é localmente repulsor à esquerda. Portanto,  $p$  é instável.

c) De modo análogo ao apresentado no item (b), se  $f(p) = p$ ,  $f'(p) = 1$ ,  $f''(p) = 0$ ,  $f'''(p) < 0$  e  $g(x) = f(x) - x$ , então  $g'''(p) = f'''(p) < 0$ .

Da última desigualdade, segue que  $g''(x)$  é decrescente em vizinhança de  $p$ . Como  $g''(p) = 0$ , temos  $g''(x) < 0$  se  $x > p$  e  $g''(x) > 0$  se  $x < p$ . De modo similar, como  $g'(p) = 0$ ,  $g'$  é decrescente para  $x > p$  e  $g'$  é crescente para  $x < p$ , temos  $g'(x) < 0 \forall x \sim p$ . Ou seja,  $g(x)$  é decrescente em vizinhança de  $p$ .

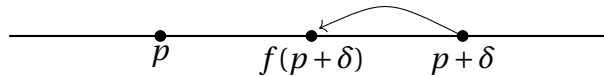
Além disso, como  $g(p) = 0$  temos que  $g(x) < 0$  para  $x > p$ , e  $g(x) > 0$  para  $x < p$ . Consequentemente,  $f(x) > x$  para  $x < p$  e  $f(x) < x$  para  $x > p$  em vizinhança de  $p$ .

Como, por hipótese,  $f'''$  é contínua existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f'''(x) < 0$  para todo  $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ . Assim, dado  $x = p + \delta$  com  $0 < \delta < \epsilon$  segue de (22) que:

$$f(p + \delta) = f(p) + f'(p)\delta + \frac{f''(p)}{2!}\delta^2 - \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 = p + \delta - \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 < p + \delta,$$

com  $s \in (p, p + \epsilon)$ .

Como  $f'''(s) < 0$  temos a figura abaixo.



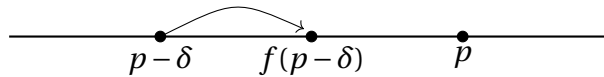
O que implica que  $p$  é localmente atrator à direita.

Por outro lado, se  $x = p - \delta$ , com  $0 < \delta < \epsilon$ , temos:

$$f(p - \delta) = f(p) - f'(p)\delta + \frac{f''(p)}{2!}\delta^2 + \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 = p - \delta + \frac{f'''(s)}{3!}\delta^3 > p - \delta,$$

com  $s \in (p - \epsilon, p)$ .

Como  $f'''(s) < 0$  temos a figura abaixo.



O que implica que  $p$  é localmente atrator à esquerda. Portanto,  $p$  é estável. ■

**Exemplo 5.1.5:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 + \frac{xe^x}{2}$ , então  $f$  admite um único ponto fixo em  $p = 0$ . Além disso,  $f'(p) = 1$ ,  $f''(p) = 1 > 0$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p$ , pelo Teorema 5.1.1, é semiestável à esquerda conforme a imagem a seguir.

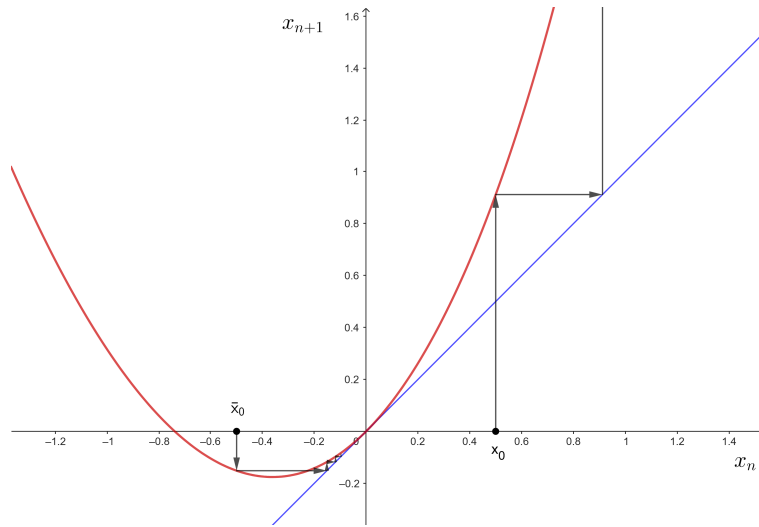


Figura 41 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = \frac{x}{2} + x^2 + \frac{x e^x}{2}$ , com  $x_0 = 0,5$  e  $\bar{x}_0 = -0,5$ .

## 5.2 Pontos fixos não hiperbólicos que satisfazem $f'(p) = -1$

No que se segue estudaremos a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$ , sendo  $f : I \rightarrow I$  com  $I \subset \mathbb{R}$ , em uma vizinhança de pontos  $p \in I$  que satisfazem  $f(p) = p$  e  $f'(p) = -1$ .

**Exemplo 5.2.1** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = -x^3 - x$ , então  $f$  admite um único ponto fixo em  $p = 0$ . Além disso,  $f'(0) = -1$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p = 0$  é instável.

**Solução:** Para encontrar os pontos fixos de  $f$  resolvemos

$$-x^3 - x = x \iff -x^3 - 2x = 0 \iff x(-x^2 - 2) = 0 \iff x = 0.$$

Note que para  $x > 0$  temos  $f(x) = -x^3 - x = -x(x^2 + 1) < 0$  e para  $x < 0$  temos  $f(x) = -x(x^2 + 1) > 0$ . Note ainda que  $f'(x) = -3x^2 - 1 \implies f'(0) = -1$ . Portanto,  $p$  é não hiperbólico.

Note também que  $f''(x) = -6x \implies f''(0) = 0$ . Além disso,  $f'''(x) = -6 \implies f'''(0) = -6 < 0$ .

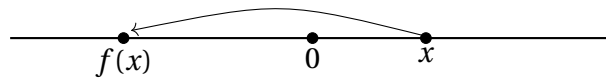
Para estudar a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  em uma vizinhança de  $p = 0$ , vamos analisar os casos a seguir:

i)  $x > 0$ .

Neste caso temos

$$|f(x) - 0| = |-x^3 - x| = |x| \cdot |-x^2 - 1| > |x|.$$

Como  $|f(x) - 0| > |x - 0|$  temos a figura abaixo.

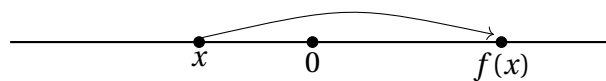


ii)  $x < 0$ .

Neste caso temos

$$|f(x) - 0| = |-x^3 - x| = |x| \cdot |-x^2 - 1| > |x|.$$

Como  $|f(x) - 0| > |x - 0|$  temos a figura abaixo.



A Figura 42 ilustra a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Note que o ponto fixo  $p = 0$  é instável.

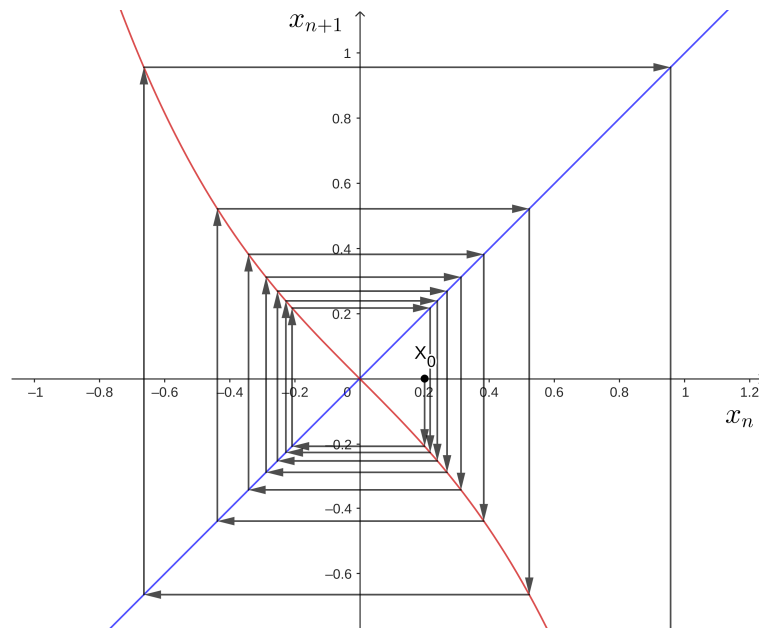


Figura 42 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = -x_n^3 - x_n$ , com  $x_0 = 0.2$ .

**Exemplo 5.2.2** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = -\text{sen}x$ , então  $f$  admite um único ponto fixo em  $p = 0$ . Além disso,  $f'(0) = -1$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p$  é estável.

**Solução:** Para encontrar os pontos fixos de  $f$  resolvemos

$$-\text{sen}x = x \iff -\text{sen}x - x = 0 \iff x = 0.$$

Note que para  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  temos  $f(x) = -\text{sen}x < 0$  e para  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  temos  $f(x) = -\text{sen}x > 0$ . Além disso,  $f'(x) = -\text{cos}x \implies f'(0) = -1$ . Portanto,  $p$  é não hiperbólico.

Note também que  $f''(x) = \text{sen}x \implies f''(0) = 0$  e que  $f'''(x) = \text{cos}x \implies f'''(0) = 1$ .

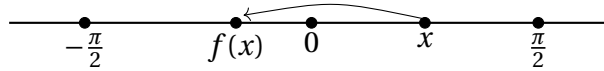
Para estudar a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  em uma vizinhança de  $p$ , vamos analisar os casos a seguir:

i)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

Neste caso temos

$$|f(x) - 0| = |-\text{sen}x - 0| = |-\text{sen}x| < |x - 0|.$$

Como  $|f(x) - 0| < |x - 0|$  e  $f(x) < 0$ , temos a figura a seguir.

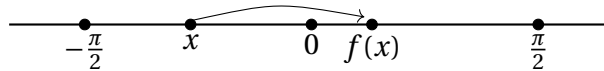


ii)  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ .

Neste caso temos

$$|f(x) - 0| = |-\text{sen}x - 0| = |-\text{sen}x| < |x - 0|.$$

Como  $|f(x) - 0| < |x - 0|$  e  $f(x) > 0$ , temos a figura a seguir.



A Figura 43 ilustra a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  com  $x_0 > 0$ . O caso em que  $x_0 < 0$  é análogo.

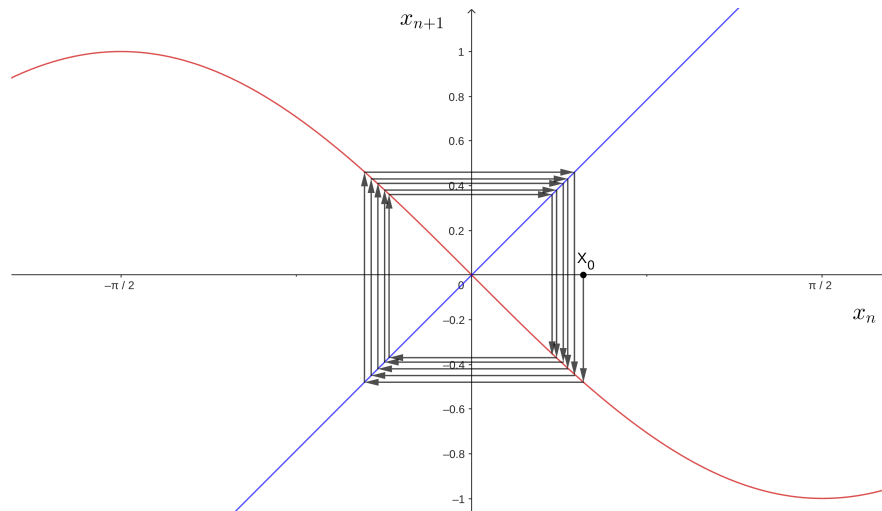


Figura 43 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = -\text{sen}x$  com  $x_0 = 0.5$  e  $n \leq 20$ .

O próximo resultado caracteriza a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  e a vizinhança de pontos fixos não hiperbólicos que satisfazem  $f'(p) = -1$ .

**Teorema 5.2.1.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma função três vezes continuamente diferenciável, com  $I \subset \mathbb{R}$  e,  $p \in I$  ponto fixo de  $f$  com  $f'(p) = -1$ . A derivada Schwarziana de  $f$  em torno de  $x$  é definida como*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Se  $Sf(p) < 0$  (respectivamente  $Sf(p) > 0$ ), então  $p$  é estável (respectivamente  $p$  é instável).

**Demonstração:** Seja  $g : I \rightarrow I$  definida por  $g(x) = f^2(x)$ . Conforme a Definição 2.2.2, se  $p$  é ponto fixo de  $f$ , então  $p$  é ponto fixo de  $g$ . Além disso, se  $p$  é instável em relação a  $f$  (respectivamente estável), então  $p$  também é instável em relação a  $g$  (respectivamente estável).

Considere a derivada Schwarziana

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2. \quad (23)$$

Como  $f'(p) = -1$ , segue de (23) que

$$Sf(p) = -f'''(p) - \frac{3}{2}(f''(p))^2.$$

Como  $g(x) = f^2(x) = f(f(x))$ , então temos

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \implies g'(p) = (f'(p))^2 = 1.$$

Como  $g'(p) = 1$ , segue do Teorema 5.1.1, que devemos analisar o sinal de  $g''(p)$  a fim de estudar a estabilidade de  $p$ . Assim,

$$g''(x) = f''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x) \implies g''(p) = f''(p) - f''(p) = 0.$$

Daí, segue do Teorema 5.1.1, que a estabilidade de  $p$  depende do sinal de  $g'''(p)$ . Temos

$$g'''(x) = -2f'''(x) - 3(f''(x))^2 \implies g'''(p) = -2f'''(p) - 3(f''(p))^2$$

Assim, segue do Teorema 5.1.1 que se  $Sf(p) < 0$  (equivalentemente a  $g'''(p) < 0$ ), então  $p$  é estável e, se  $Sf(p) > 0$  (equivalentemente a  $g'''(p) > 0$ ), então  $p$  é instável. ■

**Exemplo 5.2.3:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = -3x^2 + 3x$ , então  $f$  admite dois pontos fixos sendo  $p_1 = 0$  e  $p_2 = \frac{2}{3}$ . Note que  $f'(p_1) = 3$  e  $f'(p_2) = -1$ , portanto  $p_2$ , que é o nosso

ponto de interesse, é não hiperbólico. Além disso,  $Sf(p_2) = -54 < 0$  e a dinâmica de  $x_{n+1} = f(x_n)$  numa vizinhança de  $p_2$ , pelo Teorema 5.2.1, é estável conforme a imagem a seguir.

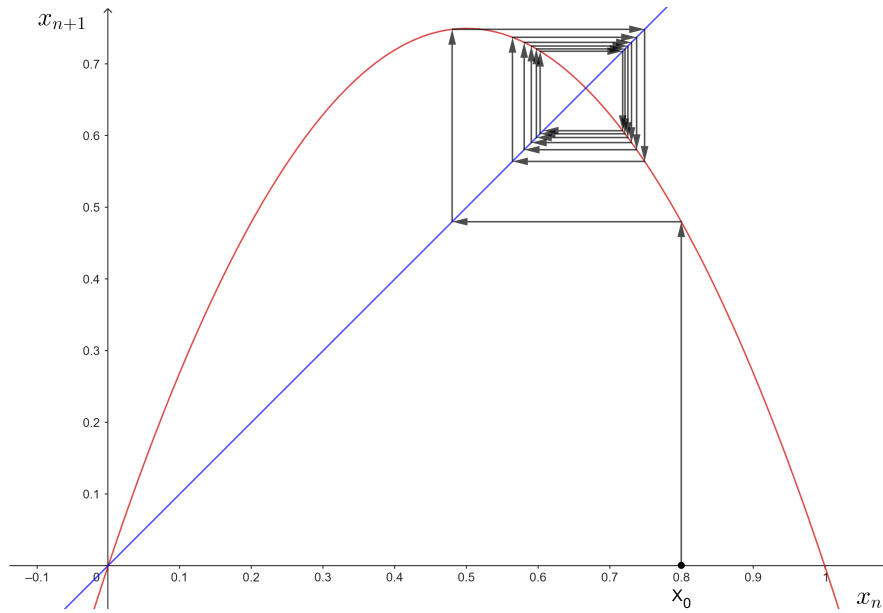


Figura 44 – Diagrama Cobweb de  $x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n)$ , com  $x_0 = 0,8$ .

## 6 POSSÍVEIS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Um dos maiores desafios enfrentados pelos profissionais da educação no Brasil é o desinteresse dos estudantes pelo que se aprende na educação básica, com destaque para alunos do ensino médio. Muitos deles questionam em quais situações da vida cotidiana poderão utilizar os conhecimentos adquiridos em sala de aula e, apesar do esforço constante dos professores, muitos deles continuam desmotivados, o que gera uma superficialidade no aprendizado durante as aulas.

O PISA (Programa Internacional de Avaliação de estudantes), tem como objetivo avaliar a maneira que os estudantes na faixa etária dos 15 anos resolvem problemas complexos, se pensam de maneira crítica e se comunicam assertivamente. Essa avaliação faz um panorama de como os sistemas educacionais têm preparado os estudantes para a vida. Na avaliação realizada em 2022, o Brasil ficou entre os 10 piores países dentre os 57 que realizaram a avaliação.

Ainda de acordo com o PISA 2022, apenas:

"... 27% dos estudantes atingiram pelo menos o Nível 2 de proficiência em matemática, significativamente menor do que a média dos estudantes entre os países da OCDE (média da OCDE: 69%). No mínimo, esses estudantes podem interpretar e reconhecer, sem instruções diretas, como uma situação simples pode ser representada matematicamente (por exemplo, comparar a distância total de duas rotas alternativas ou converter preços em uma moeda diferente)."

Daí, pode-se notar o percentual significativo de estudantes que não são capazes de interpretar e representar matematicamente situações simples.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) é o documento orientador que contém as diretrizes que devem ser seguidas e as competências a serem desenvolvidas na educação básica. Dentre as competências, que são divididas em gerais e específicas, podemos destacar a competência geral: fundamentaram a elaboração das atividades que serão apresentadas nesta seção. Dentre elas podemos destacar a competência geral:

"Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas."

As competências da BNCC fundamentaram a elaboração das atividades que serão apresentadas nesta seção. Essas atividades foram pensadas para serem realizadas em sala de aula com turmas do ensino médio e, foram elaboradas com o objetivo de contextualizar o objeto de estudo desta pesquisa em situações que despertem a curiosidade dos estudantes, possibilitando a interdisciplinaridade conectando diferentes componentes curriculares.

## **Atividade 01: Entendendo conceitos iniciais intuitivamente**

### **Introdução**

Sugere-se que o professor divida a turma em grupos de três ou quatro estudantes para que respondam às questões propostas. Enquanto os estudantes dialogam entre si e respondem, é pertinente que o professor interfira minimamente, deixando-os chegarem em suas próprias conclusões.

Após a conclusão das respostas de todos os grupos, o professor deve solicitar aos estudantes que apresentem os seus resultados e, nesta etapa, fazer interferências, correções e explicações direcionadas ao entendimento do que são iterações de funções e de como um sistema dinâmico funciona.

### **Objetivos**

- Introduzir a ideia de iteração de funções;
- Introduzir a ideia de sistemas dinâmicos discretos;
- Identificar padrões;
- Estimular as capacidades de observação e investigação;
- Representar funções algebricamente.

**Duração:** 2 horas/aula.

**Conteúdo:** Função exponencial.

### **Habilidades da BNCC**

- EF09MA06: Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
- EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

### **Descrição da atividade**

Em condições ideais, as bactérias se reproduzem exponencialmente, o que significa dizer que elas se reproduzem de maneira muito rápida. Ou seja, a quantidade de bactérias aumenta de maneira significativa em pouco tempo.

Suponha que uma determinada colônia de bactérias duplica a cada 24 horas e faça o que se pede a seguir.

1) Sem saber a quantidade inicial de bactérias, preencha a tabela abaixo da maneira que você acha que pode representar esse cálculo. Considere cada tempo  $t$  como a passagem de um dia ( $t = 1$ , um dia;  $t = 2$ , dois dias; etc...), e o número de bactérias ( $n$ ) como a quantidade existente de bactérias a cada dia.

Tabela 3 – Reprodução de uma colônia de bactérias que duplica a cada dia

Tempo ( $t$ )	Número de bactérias ( $n$ )
0	$n_0$
1	$n_1 =$
2	$n_2 =$
3	$n_3 =$
...	...
10	$n_{10} =$
...	...
$t$	$n_t =$

2) Se a quantidade inicial de bactérias fosse  $n_0 = 1.000$ , quantas bactérias existiriam após um dia?

3) E depois de 2 dias?

4) E depois de 3 dias?

5) E depois de 20 dias?

6) Escreva uma função que represente o crescimento dessa colônia de bactérias. Lembre-se de relacionar as grandezas tempo ( $t$ ) e número de bactérias ( $n$ ).

### Considerações a respeito da correção

1) Ao corrigir a tabela que consta no item 1, considere destacar o que é iteração de funções, relacionando o instante ( $t$ ) com o número ( $n$ ) de bactérias anterior e também ao  $n_0$ .

Reprodução de uma colônia de bactérias que duplica a cada dia

Tempo ( $t$ )	Número de bactérias ( $n$ )
0	$n_0$
1	$n_1 = 2 \cdot n_0$
2	$n_2 = 2 \cdot n_1 = 2 \cdot 2 \cdot n_0 = 2^2 n_0$
3	$n_3 = 2 \cdot n_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot n_0 = 2^3 n_0$
...	...
10	$n_{10} = 2 \cdot n_9 = 2^{10} n_0$
...	...
$t$	$n_t = 2 \cdot n_{t-1} = 2^t n_0$

2) Neste item, considere utilizar a mesma notação que consta na correção da tabela.

Assumindo  $n_0 = 1.000$ , após um dia teremos  $n_1 = 2 \cdot n_0 = 2 \cdot 1.000 = 2.000$ .

3) De modo análogo ao item anterior, temos  $n_2 = 2 \cdot n_1 = 2^2 n_0 = 2 \cdot 2 \cdot 1.000 = 4.000$ .

4) De modo análogo ao item anterior, temos  $n_3 = 2 \cdot n_2 = 2^3 n_0 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1.000 = 8.000$ .

5) Ao corrigir este item, pode-se destacar a relação entre o expoente e a quantidade de iterações, e utilizar a calculadora para encontrar a resposta. Assim, temos  $n_{20} = 2^{20} \cdot 1.000 = 1.048.576.000$ .

6) Ao corrigir este item, considere relembrar o conceito de função e que é necessário definir o domínio e contradomínio desta.

Assim, temos a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(n) = 2 \cdot n$ . Ao iterarmos essa função, considerando cada iteração como o instante  $t$ , temos  $f^t(n) = 2^t n$ .

Após a correção, sugere-se que a explicação sobre o que é e como funciona um sistema dinâmico discreto seja feita. Os sistemas dinâmicos funcionam como um conjunto de elementos que, organizados e interligados, interagem para o funcionamento do todo, e as suas características permitem prever o comportamento e a evolução de determinado fenômeno. A evolução de um sistema dinâmico depende da variável tempo ( $t$ ), e essa pode ser contínua ou discreta. Quando analisamos o tempo numericamente, a variável  $t$  assume valores inteiros, e por isso pode-se dizer que o sistema dinâmico nesse caso é discreto. Além disso, é necessário conhecer a regra determinística, ou seja, a função que modela o comportamento desse sistema.

Nesta atividade é possível perceber que o número de bactérias do dia atual está diretamente relacionado ao número de bactérias do dia anterior. Também é relevante fazer uma reflexão sobre algumas questões como as que se seguem:

- Poderíamos aplicar este mesmo modelo em um estudo sobre o crescimento da população de uma cidade?
- A população cresce infinitamente? Não há nada que atrapalhe o crescimento da população de determinado lugar?
- O que vocês acham que falta neste modelo?

Questões como as citadas acima, servirão para relacionar o conteúdo trabalho nesta aula com o conteúdo que será trabalhado na próxima aula.

## **Atividade 02: Funções exponenciais e o modelo logístico de Malthus**

### **Introdução**

A ideia intuitiva sobre a iteração de funções abre caminho para o aprofundamento no seu conceito. Após a modelagem da composição de funções feita intuitivamente na aula anterior, espera-se que os estudantes compreendam o conceito de iteração de funções e possam aplicá-lo em qualquer situação.

Nesta aula, exploraremos o conceito de iteração tendo como base o modelo logístico de Malthus.

### **Objetivos**

- Explorar o conceito de iteração com base na função exponencial que representa o crescimento da colônia de bactérias mencionado na atividade anterior;
- Estimular a capacidade de identificar padrões;
- Representar funções exponenciais algebricamente.

**Duração:** 2 horas/aula.

### **Conteúdos**

- Função exponencial;
- Modelo populacional de Malthus.

### **Habilidades da BNCC**

- EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais, nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- EM13MAT403: Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica, expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

### **Desenvolvimento da aula**

Sugere-se que o professor inicie essa atividade retomando o que foi tratado na aula anterior. Iniciando com as questões repondidas intuitivamente, o conceito de iteração de funções pode ser exposto.

Ao relembrar as questões da aula anterior, considere explorar a representação algébrica de uma função e da iteração de uma função. Neste momento de retomada, considere responder às questões a seguir no quadro, junto com os estudantes, destacando a maneira que a representação algébrica deve ser feita.

Considerando que uma colônia de bactérias duplica a cada instante e que  $t$  é a variável que representa o tempo, represente algebricamente as situações a seguir.

1) A quantidade de bactérias após 2 instantes.

Ao corrigir este item, considere denotar a quantidade inicial de bactérias por  $x_0$ . Dessa forma, os estudantes terão maior clareza para compreender os próximos itens. Como a situação se refere a 2 instantes depois, é necessário demonstrar o primeiro instante. Assim, temos a quantidade de bactérias após 1 instante definida por  $f(x_0) = 2 \cdot x_0$  e a quantidade de bactérias após 2 instantes definida por  $f(f(x_0)) = 2 \cdot 2 \cdot x_0 = 2^2 \cdot x_0$ .

2) A quantidade de bactérias após 3 instantes.

Neste item, por ser o instante seguinte ao solicitado no item anterior, podemos definir a quantidade de bactérias após 3 instantes por  $f(f(f(x_0))) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x_0 = 2^3 \cdot x_0$ .

3) A quantidade de bactérias após  $t$  instantes.

Considerando que os estudantes compreenderam a relação entre o expoente do coeficiente 2 e a quantidade de instantes passados, podemos definir a quantidade de bactérias após  $t$  instantes como  $f^t(x_0) = 2^t \cdot x_0$ .

Caso seja necessário, antes de definir a função para o instante  $t$ , faça a definição para os instantes subsequentes ao terceiro, a fim de conduzi-los a melhor compreensão da definição da função no instante  $t$ .

Note que ao final da explanação dessas situações, é pertinente destacar que foram feitas iterações em cada item, e que essas iterações são composições da função  $f$ , que define a quantidade de bactérias após  $t$  instantes, e podem ser representadas por  $f \circ f \circ \dots \circ f \circ f$ .

Para contextualizar o conceito de iteração de funções, sugere-se a utilização do modelo de crescimento populacional proposto por Thomas Malthus.

Em 1798, Thomas Malthus publicou um trabalho chamado "An Essay on the Principle of Population", cuja tradução é "Um ensaio sobre o princípio da população". Nesse trabalho, Malthus apresentou a sua teoria sobre crescimento populacional, na qual ele argumentava que as populações humanas tendiam a crescer de forma exponencial, ou seja, na ausência de limites, a população cresceria rapidamente. Porém, segundo Malthus, os recursos alimentares cresciam de forma linear, o que significa dizer que o crescimento da população é mais acelerado do

que a produção de alimentos. Portanto, essa disparidade levaria a uma escassez de alimentos, resultando em crises como fome, doenças e guerras que reduziriam a população.

A função discreta para esse modelo é

$$P_{t+1} = P_t \cdot (1 + r), \quad (24)$$

onde:

- $P_t$  é a população no instante atual;
- $P_{t+1}$  é a população no instante seguinte;
- $r$  é a taxa de crescimento da população.

### **Verificação da aprendizagem**

Após a contextualização, divida os alunos em grupos e forneça diferentes valores para a população atual e taxa de crescimento. Os estudantes devem calcular a população nos cinco instantes seguintes ( $t = 1$ ,  $t = 2$ ,  $t = 3$ ,  $t = 4$  e  $t = 5$ ). Cada grupo deverá construir o gráfico da sua função, mostrando a evolução da população, no software GeoGebra e, em seguida, apresentar o seu gráfico compartilhando o que puderam observar em relação ao comportamento da função.

## **Atividade 03: Iterações na Matemática Financeira**

### **Introdução**

O conceito de iteração de funções é frequentemente utilizado em matemática financeira para modelar problemas relacionados ao crescimento ou ao valor do dinheiro ao longo do tempo, como no cálculo de juros compostos que exploraremos nesta atividade. Utilizar este exemplo torna a aprendizagem mais atrativa, permitindo que o estudante associe a teoria com a prática aplicada à sua realidade.

### **Objetivos**

- Explorar o conceito de iteração com base na função exponencial que representa o crescimento do dinheiro ao longo do tempo;
- Estimular a capacidade de identificar padrões;
- Representar funções exponenciais algebricamente;
- Estimular a capacidade de leitura e interpretação de gráficos.

**Duração:** 2 horas/aula.

### **Conteúdos**

- Função exponencial;
- Juros compostos.

### **Habilidades da BNCC**

- EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais, nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- EM13MAT403: Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica, expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

### **Desenvolvimento da aula**

Ao iniciar essa aula, retome o conceito de iteração de funções, destacando que os cálculos são feitos à partir do valor referente ao instante atual de acordo com a função definida.

Considere a seguinte situação: Ana Júlia aplicou R\$1.000,00 a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Os juros compostos são cobrados sobre o valor inicial e sobre os juros acumulados ao longo do tempo, e isso significa que a cada mês os juros são calculados sobre todo o montante acumulado desde o tempo inicial.

Diante disso, preencha a tabela a seguir com os valores que representam o montante de Ana Júlia, mês a mês.

Mês ( $t$ )	Operação realizada	Montante
0	-	R\$1.000,00
1		$M_1 =$
2		$M_2 =$
3		$M_3 =$
...		...
10		$M_{10} =$
...		...
$t$		$M_t =$

Tabela 4 – Rendimento mensal da aplicação de Ana Júlia.

Neste momento, sugerimos que o professor interfira minimamente, para que os estudantes calculem da maneira que acharem conveniente.

Ao corrigir esta atividade, sugere-se que o professor faça uma projeção na lousa ou na tv, para que o preenchimento da tabela seja feito detalhadamente.

Mês ( $t$ )	Operação realizada	Montante
0	-	R\$1.000,00
1	$M_1 = 1000 \cdot 1,05$	$M_1 = R\$1.050,00$
2	$M_2 = M_1 \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05^2$	$M_2 = R\$1.102,50$
3	$M_3 = M_2 \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05^3$	$M_3 = R\$1.157,62$
...	...	...
10	$M_{10} = M_9 \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05^{10}$	$M_{10} = R\$1.628,89$
...	...	...
$t$	$M_t = M_{t-1} \cdot 1,05 = 1.000 \cdot 1,05^t$	$M_t = 1000 \cdot 1,05^t$

Tabela 5 – Rendimento mensal da aplicação de Ana Júlia.

### Verificação da aprendizagem

Após o preenchimento da tabela, reforce aos estudantes o conceito de iteração de funções e solicite que eles respondam às questões a seguir.

1) Foi possível perceber que o valor do montante no instante  $t$  depende do montante no instante anterior  $t - 1$ ?

Resposta esperada: Espera-se que os estudantes percebam que para calcular o valor atual do montante, é necessário saber qual foi o montante anterior.

2) Se substituirmos o capital inicial por  $C$ , qual seria a função que modelaria a aplicação de 5% ao mês para qualquer valor?

Resposta esperada: Espera-se que os estudantes substituam o valor de R\$1.000,00 por  $C$ , obtendo  $M = C \cdot 1,05^t$ . Neste momento, pode-se explorar o conceito de juros simples, destacando que o valor da taxa é variável.

3) Foi possível perceber uma relação entre o método utilizado para calcular a população e o método para calcular os juros compostos?

Resposta esperada: Espera-se que os estudantes notem que a composição de funções está presente nas duas situações.

Ao corrigir estas questões, considere sanar dúvidas existentes em relação ao que é iteração e como os sistemas dinâmicos estão presentes em nosso cotidiano, em várias áreas do conhecimento. Vale destacar que os sistemas dinâmicos modelam situações nas quais uma grandeza evolui ao longo do tempo, dependente de uma regra determinística.

## **Atividade 04: Introduzindo o conceito de ponto fixo**

### **Introdução**

Nesta aula, faremos uma introdução ao conceito de ponto fixo utilizando o software GeoGebra, partindo da representação geométrica das funções identidade e quadrática.

Essa abordagem tem o objetivo de tornar a aprendizagem significativa, consolidando conceitos através da memória visual.

### **Objetivos**

- Explorar o conceito de ponto fixo;
- Explorar a criatividade e o protagonismo;
- Estimular a capacidade de identificar padrões;
- Representar funções geometricamente;
- Conceituar ponto fixo através da intersecção dos gráficos das funções identidade e quadrática.

**Duração:** 2 horas/aula.

### **Conteúdos**

- Função identidade;
- Função quadrática;
- Função polinomial.

### **Habilidades da BNCC**

- EF09MA06: Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações problemas que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
- EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

### **Desenvolvimento da aula**

A proposta desta aula é iniciá-la com a apresentação da imagem a seguir.

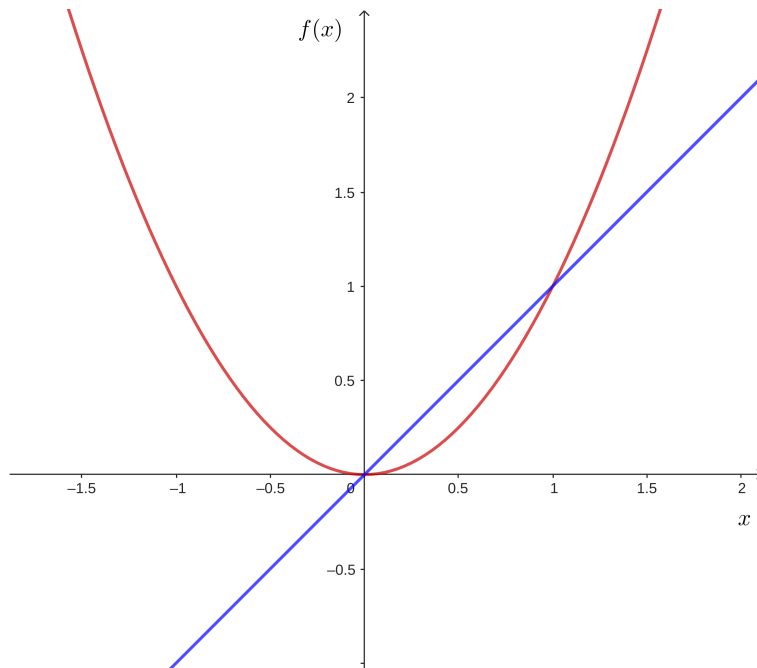


Figura 45 – Gráfico das funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$ .

Em seguida, explicar aos estudantes que a função identidade, representada pela reta, é tal que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e definida por  $f(x) = x$ . Sendo assim, os pontos dessa reta são formados por abscissas e ordenadas de mesmo valor, como por exemplo  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,2)$ , etc. Além disso, deve-se explicar aos estudantes que a parábola representa a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que é definida por  $g(x) = x^2$ . Após essa introdução, solicite que os estudantes respondam as questões a seguir:

- 1) O que vocês acham que esses pontos, em que as funções se cruzam, representam?
- 2) Se a função identidade só possui pontos nos quais os valores das abscissas e das ordenadas são iguais, quais seriam esses pontos em que as funções se encontram?

Ao comentar sobre essas questões, induza os alunos a encontrarem os pontos de interseção entre os dois gráficos e destaque que eles possuem valores de abscissas e ordenadas iguais, ou seja, quando iteramos as funções nesses pontos, encontramos os valores que satisfazem  $f(p) = p$ , sendo  $p$  ponto fixo de  $g$ . Além disso, apresente a definição de ponto fixo.

### **Verificação da aprendizagem**

Solicite aos estudantes que construam as funções a seguir no GeoGebra e em seguida selecionem o comando "Interseção de dois objetos", clicando nos gráficos e registrando os pontos de interseção entre eles. Após a conclusão dessa etapa, oriente os estudantes a iterarem as funções, que não são identidade, a fim de verificarem que quando iteramos uma função no ponto fixo, o valor dela não se altera.

1)  $f(x) = x$  e  $h(x) = 2x$ . Resposta esperada: Espera-se que os estudantes encontrem o ponto de interseção em  $x = 0$ , sendo  $h(x) = 2 \cdot x = 2 \cdot 0 = 0$  e, portanto  $p = 0$ .

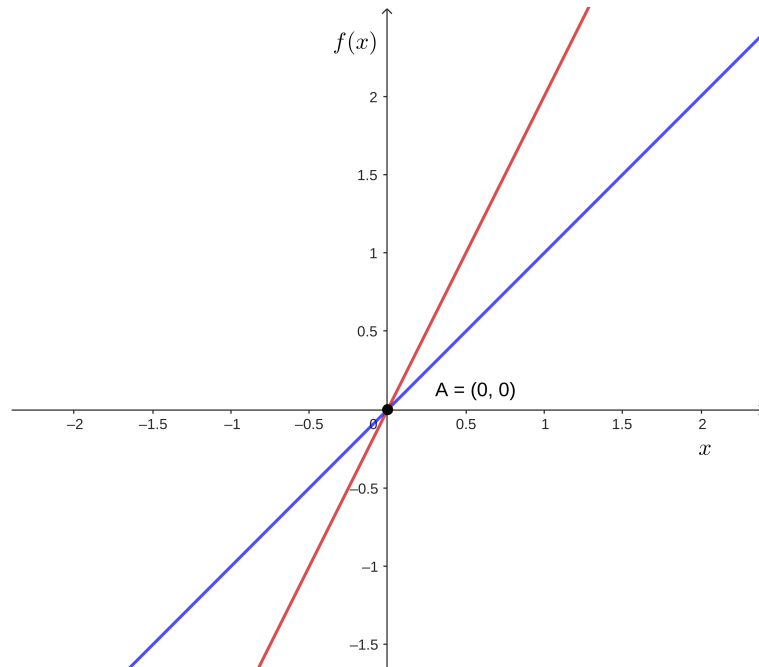


Figura 46 – Gráfico das funções  $f(x) = x$  e  $h(x) = 2x$ .

2)  $f(x) = x$  e  $m(x) = x^3$ .

Resposta esperada: Espera-se que os estudantes encontrem os pontos de interseção em  $x = -1$ ,  $x = 0$  e  $x = 1$ , sendo  $m(x) = x^3 = (-1)^3 = -1$ ,  $m(x) = x^3 = 0^3 = 0$  e  $m(x) = x^3 = 1^3 = 1$ . Portanto,  $m$  possui três pontos fixos.

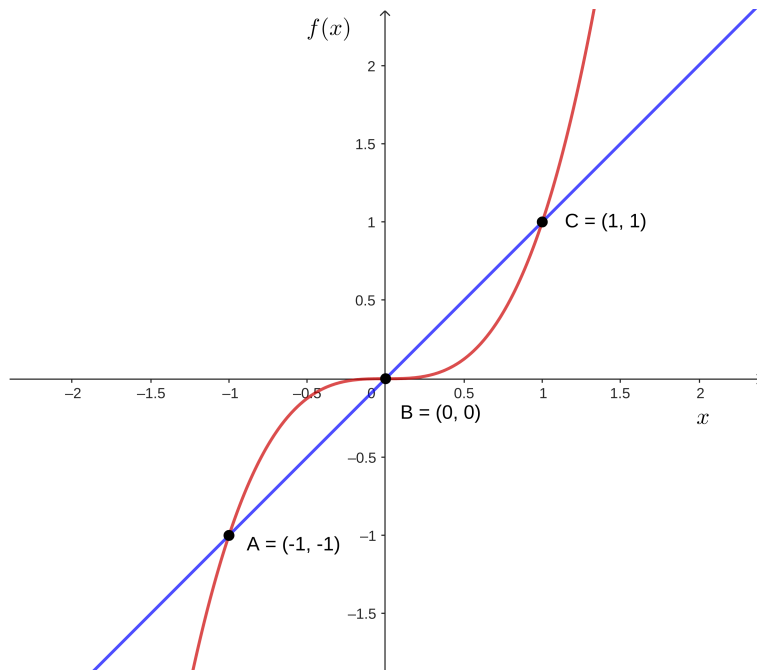


Figura 47 – Gráfico das funções  $f(x) = x$  e  $m(x) = x^3$ .

3)  $f(x) = x$  e  $n(x) = x^2 - 1$ .

Resposta esperada: Espera-se que os estudantes encontrem os pontos de interseção em  $x = -0,62$  e  $x = 1,62$  sendo  $n(x) = x^2 - 1 = 1,62^2 - 1 = 1,62$  e  $n(x) = x^2 - 1 = (-0,62)^2 - 1 = -0,62$ . Portanto,  $n$  possui dois pontos fixos.

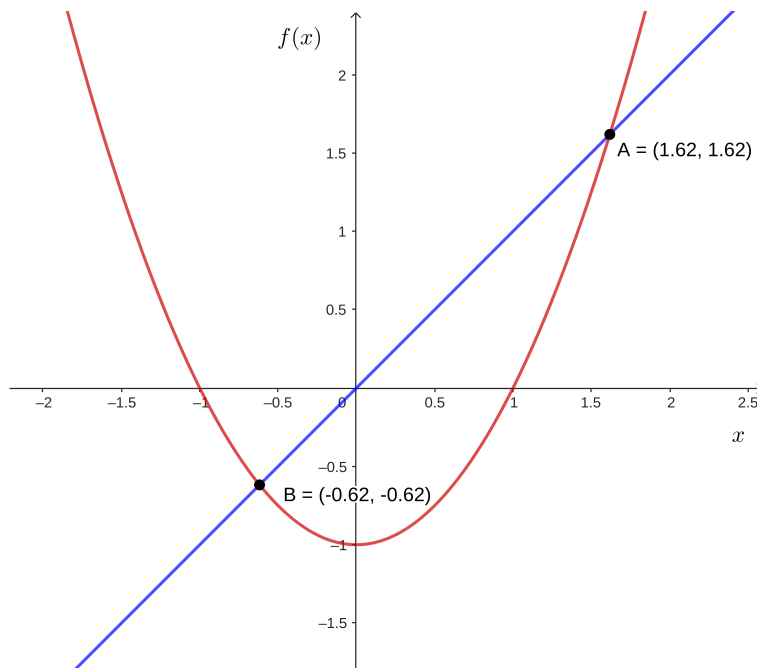


Figura 48 – Gráfico das funções  $f(x) = x$  e  $n(x) = x^2 + 1$ .

4)  $f(x) = x$  e  $g(x) = -x^2 + 1$ .

Resposta esperada: Espera-se que os estudantes encontrem os pontos de interseção em  $x = -1,62$  e  $x = 0,62$ , sendo  $q(x) = -x^2 + 1 = -(0,62)^2 + 1 = 0,62$  e  $q(x) = -x^2 + 1 = -(-1,62)^2 + 1 = -1,62$ . Portanto,  $q$  possui dois pontos fixos.

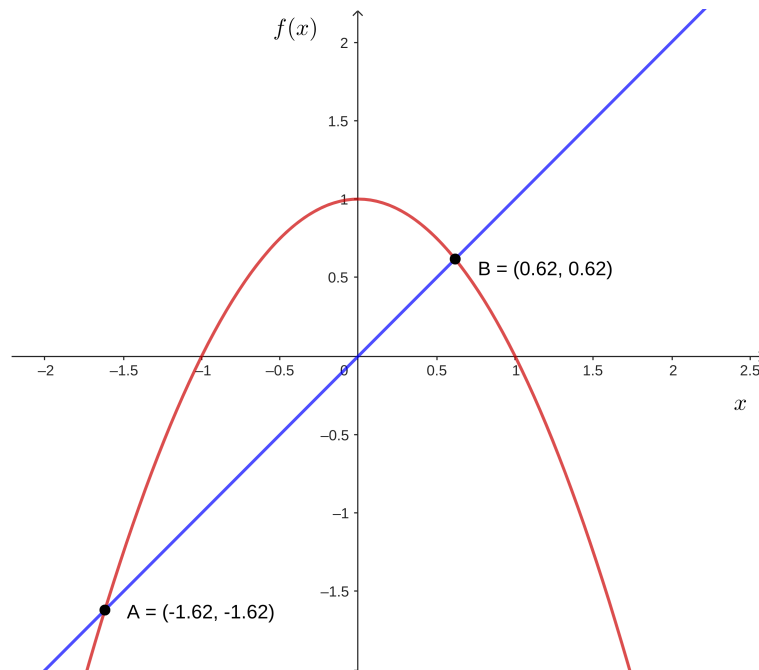


Figura 49 – Gráfico das funções  $f(x) = x$  e  $q(x) = -x^2 - 1$ .

## **Atividade 05: Pontos fixos atratores e pontos fixos repulsores**

### **Introdução**

Nesta aula, continuaremos com a estratégia de conduzir os estudantes a assimilarem algumas características relacionadas aos sistemas dinâmicos através de atividades práticas. O uso do GeoGebra enriquece a aula, permitindo que o estudante veja a representação geométrica do que lhe é ensinado algebricamente.

Em sequência à aula anterior, conceituaremos o que são pontos fixos atratores e pontos fixos repulsores.

### **Objetivos**

- Explorar o conceito de ponto fixo;
- Explorar o conceito de ponto fixo atrator/repulsor;
- Estimular a capacidade de identificar padrões;
- Estimular a criatividade e o protagonismo.

**Duração:** 2 horas/aula.

### **Conteúdos**

- Função identidade;
- Função quadrática.

### **Habilidades e competências da BNCC**

- EF09MA06: Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações problemas que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
- EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Competência geral 2: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e inventar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

### Desenvolvimento da aula

Sugerimos que essa aula seja iniciada solicitando aos estudantes que façam 10 iterações da função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = x^2$ . Oriente os estudantes para que escolham um valor maior que os pontos fixos encontrados na aula anterior e façam 5 iterações (analogamente, escolham um valor menor que os pontos fixos e façam 5 iterações). Em seguida, solicite que os estudantes construam, no software GeoGebra, os gráficos das funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$  e marquem os pontos resultantes das iterações.

Possível resposta:

Para  $x_0 = 1,5$ , temos

$$x_1 = 1,5^2 = 2,25$$

$$x_2 = 2,25^2 = 5,0625$$

$$x_3 = 5,0625^2 = 25,6289$$

$$x_4 = 25,6289^2 = 656,8408$$

$$x_5 = 656,8408^2 = 431.439,8833.$$

Para  $\bar{x}_0 = -0,5$ , temos

$$\bar{x}_1 = (-0,5)^2 = 0,25$$

$$\bar{x}_2 = 0,25^2 = 0,0625$$

$$\bar{x}_3 = 0,0625^2 = 0,003906$$

$$\bar{x}_4 = 0,003906^2 = 0,000015258$$

$$\bar{x}_5 = 0,000015258^2 = 0,0000000002328.$$

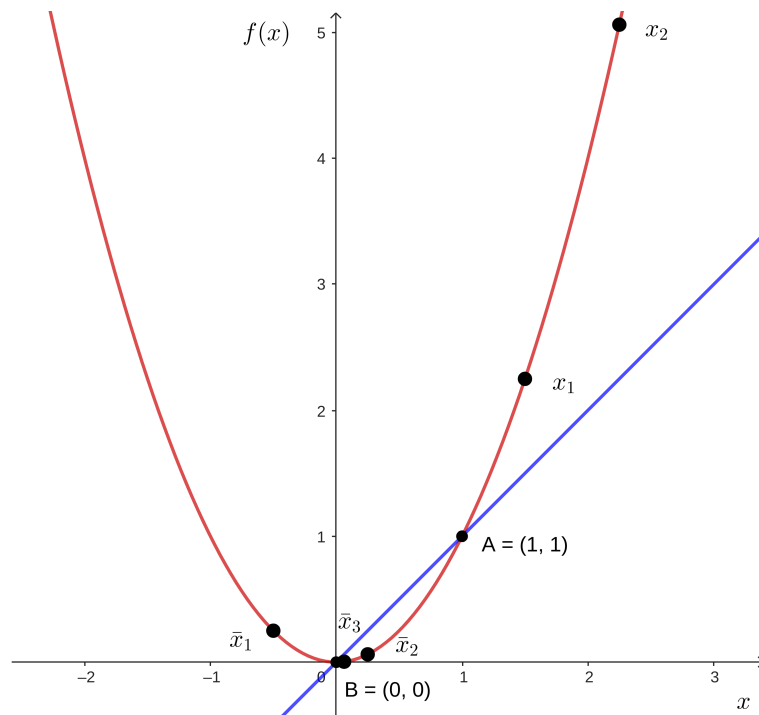


Figura 50 – Pontos fixos de  $g(x) = x^2$ , com  $x_0 = 1,5$  e  $\bar{x}_0 = -0,5$ .

Em seguida, faça as seguintes perguntas aos estudantes:

- 1) O que vocês perceberam sobre os resultados das iterações que começaram com um valor maior que os dos pontos fixos?

A resposta esperada é que os valores dos resultados vão aumentando, ou seja, quanto mais iterações são feitas, mais esse valor se distancia do valor inicial. Considere nesse momento, introduzir o conceito de ponto fixo repulsor. Vale ressaltar que o ponto fixo é repulsor quando iteramos a função tomando um  $x_0$  próximo ao ponto fixo, e essas iterações resultam em valores cada vez mais distantes do valor inicial.

- 2) O que vocês perceberam sobre os resultados das iterações que começaram com um valor menor que os dos pontos fixos?

A resposta esperada é que os valores dos resultados vão diminuindo, ou seja, quanto mais iterações são feitas, mais esse valor se aproxima do valor inicial. Considere nesse momento, introduzir o conceito de ponto fixo atrator. Vale ressaltar que o ponto fixo é atrator quando iteramos a função tomando um  $x_0$  próximo ao ponto fixo, e essas iterações resultam em valores cada vez mais próximos do valor inicial.

### **Verificação da aprendizagem**

Solicite aos estudantes que repitam o processo de iteração e de construção dos gráficos no GeoGebra para cada uma das funções a seguir.

- 1)  $f(x) = x$  e  $h(x) = 2x$ .

Resposta esperada:

Para  $x_0 = 0,25$ , temos

$$x_1 = h(x_0) = 2 \cdot 0,25 = 0,5$$

$$x_2 = h(x_1) = 2 \cdot 0,5 = 1$$

$$x_3 = h(x_2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$x_4 = h(x_3) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$x_5 = h(x_4) = 2 \cdot 4 = 8.$$

Para  $\bar{x}_0 = -0,25$ , temos

$$\bar{x}_1 = h(\bar{x}_0) = 2 \cdot (-0,25) = -0,5$$

$$\bar{x}_2 = h(\bar{x}_1) = 2 \cdot (-0,5) = -1$$

$$\bar{x}_3 = h(\bar{x}_2) = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$\bar{x}_4 = h(\bar{x}_3) = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$\bar{x}_5 = h(\bar{x}_4) = 2 \cdot (-4) = -8.$$

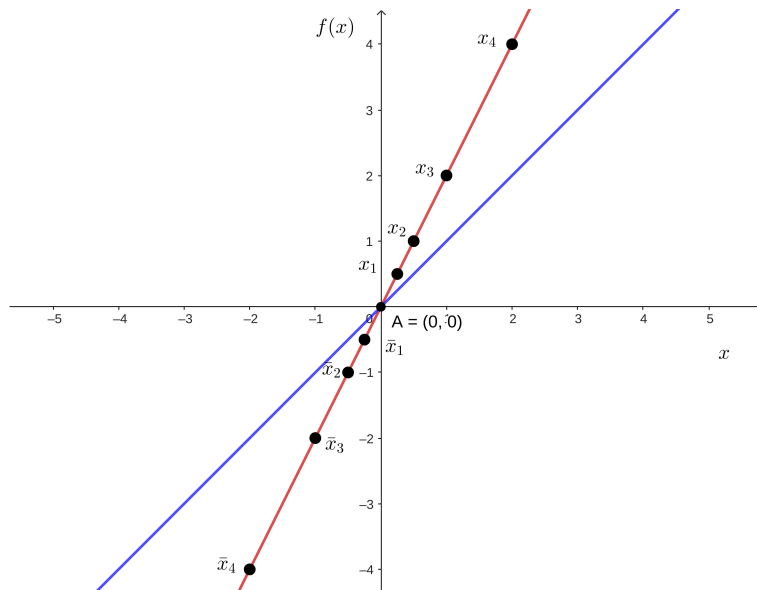


Figura 51 – Evolução dos pontos de  $h(x) = 2x$ , com  $x_0 = 0,25$  e  $\bar{x} = -0,25$ .

2)  $f(x) = x$  e  $q(x) = \frac{x}{2}$ .

Resposta esperada:

Para  $x_0 = 1,6$ , temos

$$x_1 = q(x_0) = \frac{1,6}{2} = 0,8$$

$$x_2 = q(x_1) = \frac{0,8}{2} = 0,4$$

$$x_3 = q(x_2) = \frac{0,4}{2} = 0,2$$

$$x_4 = q(x_3) = \frac{0,2}{2} = 0,1$$

$$x_5 = q(x_4) = \frac{0,1}{2} = 0,05.$$

Para  $\bar{x}_0 = -1,6$ , temos

$$\bar{x}_1 = q(\bar{x}_0) = \frac{-1,6}{2} = -0,8$$

$$\bar{x}_2 = q(\bar{x}_1) = \frac{-0,8}{2} = -0,4$$

$$\bar{x}_3 = q(\bar{x}_2) = \frac{-0,4}{2} = -0,2$$

$$\bar{x}_4 = q(\bar{x}_3) = \frac{-0,2}{2} = -0,1$$

$$\bar{x}_5 = q(\bar{x}_4) = \frac{-0,1}{2} = -0,05.$$

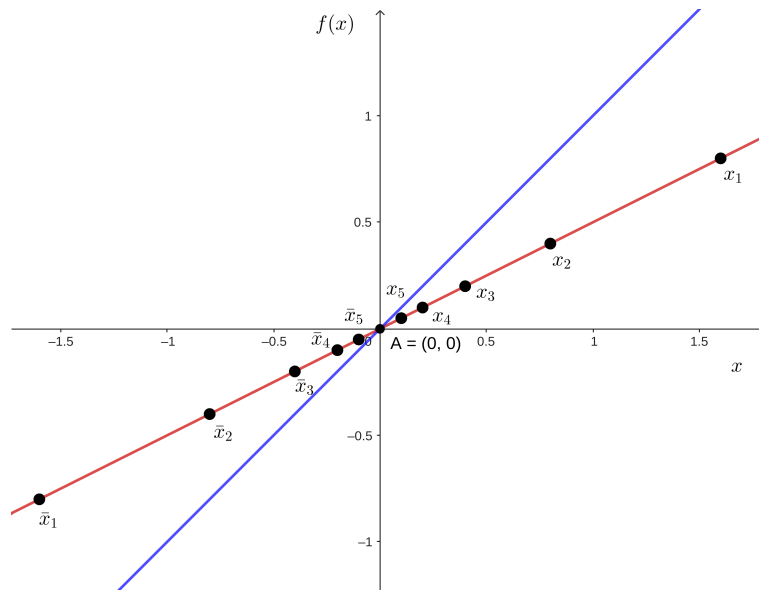


Figura 52 – Evolução dos pontos de  $q(x) = \frac{x}{2}$ , com  $x_0 = 1,6$  e  $\bar{x}_0 = -1,6$ .

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento deste trabalho, as seções que o compõem foram revisitadas diversas vezes, pois a cada novo tópico lido, a cada exercício, a cada vídeo assistido, bibliografia consultada e a cada encontro com o orientador, algum ajuste se fazia necessário. Ainda assim, após a finalização da parte escrita e da aplicação dos planos de aula, este assunto não foi abordado em sua totalidade, dada a riqueza de detalhes que são inerentes aos sistemas dinâmicos e, portanto, seria utópico pensar que todos eles caberiam nesta pesquisa.

A aplicação dos planos de aula se deu em uma unidade escolar da rede pública do estado de São Paulo, com alunos matriculados na 2ª série do ensino médio, cujos objetos de estudo constam nas diretrizes curriculares sugeridas para o 2º bimestre do ano letivo, com exceção do conceito de "Pontos fixos".

Na preparação da turma para o início das atividades, o principal desafio foi a logística relacionada aos chromebooks necessários para utilização do software Geogebra. Durante o período de aplicação dos planos de aula, não havia um profissional responsável pelos aparelhos tecnológicos e, portanto, era necessário buscá-los, ligá-los e conectá-los para que então pudessemos iniciar as atividades. De fato, essa preparação consumiu muito tempo das aulas, o que diminuiu o tempo de exploração das situações de aprendizagem.

Os estudantes demonstraram interesse na realização das atividades, principalmente no uso do software GeoGebra e, foi possível observar a curiosidade despertada ao plotarem os gráficos. A contextualização com assuntos de fácil assimilação permitiu a conexão entre a técnica e a aplicabilidade desta, de modo que ao responder as questões, os estudantes respondiam pensando no concreto, no que de fato representava o resultado. A utilização de tecnologias enriqueceu a aula e proporcionou aos estudantes o desenvolvimento da criatividade, partindo da curiosidade que os temas despertaram neles.

Em tempo, é relevante mencionar a defasagem em relação aos anos anteriores no que diz respeito às competências e habilidades em matemática, dada a necessidade de revisar propriedades simples antes do início da aplicação das atividades, corroborando com os dados divulgados pelas avaliações externas nacionais e internacionais. Os estudantes não possuem domínio da linguagem matemática aplicada a situações simples, como por exemplo, para descobrir os pontos fixos da função  $f(x) = 2x$ , utilizamos  $2x = x$  e eles não entendem de imediato que  $x$  representa o mesmo número nos dois termos da igualdade.

A aplicação da atividade 01 ocorreu de maneira tranquila e as orientações foram seguidas conforme a descrição na introdução desta. O assunto "Reprodução de uma colônia de bactérias" foi de fácil assimilação pelo fato de já ter sido estudado em outros componentes curriculares e, pelo fato de que as bactérias estão presentes no cotidiano. Porém, no encerramento da atividade, onde os estudantes deveriam escrever a função que representa o crescimento das bactérias, a

intervenção do professor foi necessária pois nenhum deles conseguiu concluir sozinho.

As Figuras a seguir apresentam a resolução da atividade de alguns estudantes, as quais foram realizadas em grupos.

#### VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Em condições ideais, as bactérias se reproduzem exponencialmente, o que significa dizer que elas se reproduzem de maneira muito rápida. Ou seja, a quantidade de bactérias aumenta de maneira significativa em pouco tempo.

Suponha que uma determinada colônia de bactérias duplica a cada 24 horas e faça o que se pede a seguir.

1) Sem saber a quantidade inicial de bactérias, preencha a tabela abaixo da maneira que você acha que pode representar esse cálculo. Considere cada tempo  $t$  como a passagem de um dia ( $t=1$ , um dia;  $t=2$ , dois dias; etc...), e o número de bactérias ( $n$ ) como a quantidade existente de bactérias a cada dia.

Reprodução de uma colônia de bactérias que duplica a cada dia:

TEMPO (t)	NÚMERO DE BACTÉRIAS (n)
0	$n_0 = (x)$
1	$n_1 = 2(x) = 2 \cdot x$
2	$n_2 = 2 \cdot (2 \cdot x) = 2^2 \cdot x$
3	$n_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x = 2^3 \cdot x$
...	
10	$n_{10} = 2^{10} \cdot x = 2^{10} \cdot x$
...	
t	$n_T = 2^T \cdot x =$

2) Se a quantidade inicial de bactérias fosse  $n_0 = 1.000$ , quantas bactérias existiriam após um dia?

3) E depois de 2 dias?  $n_2 = 2^2 \cdot 1000 = 2.000$

4) E depois de 3 dias?  $n_3 = 2^3 \cdot 1000 = 8.000$

5) E depois de 20 dias?  $n_{20} = 2^{20} \cdot 1000 = 1.048.576.000$

6) Escreva uma função que represente o crescimento dessa colônia de bactérias. Lembre-se de relacionar as grandezas tempo ( $t$ ) e número de bactérias ( $n$ ).

$$f(t) = 2^t \cdot 1000$$

$$n_T = 2^T \cdot 1000$$

Figura 53 – Resolução da atividade 01 - Grupo 01.

### VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Em condições ideais, as bactérias se reproduzem exponencialmente, o que significa dizer que elas se reproduzem de maneira muito rápida. Ou seja, a quantidade de bactérias aumenta de maneira significativa em pouco tempo.

Suponha que uma determinada colônia de bactérias duplica a cada 24 horas e faça o que se pede a seguir.

1) Sem saber a quantidade inicial de bactérias, preencha a tabela abaixo da maneira que você acha que pode representar esse cálculo. Considere cada tempo  $t$  como a passagem de um dia ( $t=1$ , um dia;  $t=2$ , dois dias; etc...), e o número de bactérias ( $n$ ) como a quantidade existente de bactérias a cada dia.

Reprodução de uma colônia de bactérias que duplica a cada dia:

TEMPO (t)	NÚMERO DE BACTÉRIAS (n)
0	$n_0 = (x)$
1	$n_1 = 2 \cdot (x)$
2	$n_2 = 2 \cdot (2 \cdot x)$
3	$n_3 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot x)$
...	
10	$n_{10} = 2^{10} \cdot (x)$
...	
t	$n_t = 2^t \cdot (x)$

2) Se a quantidade inicial de bactérias fosse  $n_0 = 1.000$ , quantas bactérias existiriam após um dia?

$$n_1 = 2^1 \cdot 1000 = 2.000$$

3) E depois de 2 dias?

$$n_2 = 2^2 \cdot 1000 = 4000$$

4) E depois de 3 dias?

$$n_3 = 2^3 \cdot 1000 = 8000$$

5) E depois de 20 dias?

$$n_{20} = 2^{20} \cdot 1000 = 1.048.576.000$$

6) Escreva uma função que represente o crescimento dessa colônia de bactérias. Lembre-se de relacionar as grandezas tempo ( $t$ ) e número de bactérias ( $n$ ).

$$f(t) = 2^t \cdot 1000$$

$$n_t = 2^t \cdot 1000$$

Figura 54 – Resolução da atividade 01 - Grupo 02.

Antes da aplicação da segunda atividade, foi feita a retomada do conceito de iteração de funções, o qual foi introduzido na aula anterior e, na sequência foi feita uma breve introdução sobre o modelo logístico de Malthus, a fim de contextualizar a atividade. Os alunos foram divididos em duplas ou trios e o professor distribuiu taxas de crescimento e populações iniciais diferentes para que eles calculassem os cinco primeiros termos dessa evolução. Os estudantes desenvolveram a atividade com tranquilidade baseados nos exemplos expostos pelo professor e com o auxílio de calculadora. Após o cálculo, os estudantes inseriram a função no software GeoGebra para analisar a evolução da população e o comportamento da função. Todos observaram a rápida evolução da população e como a função cresce de maneira acelerada.

As Figuras a seguir apresentam a resolução de dois grupos distintos e o momento em que

realizaram a plotagem dos gráficos.

#### VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Em 1798, Thomas Malthus publicou um trabalho chamado "An Essay on the Principle of Population", cuja tradução é "Um ensaio sobre o princípio da população". Nesse trabalho, Malthus apresentou a sua teoria sobre crescimento populacional, na qual ele argumentava que as populações humanas tendiam a crescer de forma exponencial, ou seja, na ausência de limites, a população cresceria rapidamente. Porém, segundo Malthus, os recursos alimentares crescem de forma linear, o que significa dizer que o crescimento da população é mais acelerado do que a produção de alimentos. Portanto, essa disparidade levaria a uma escassez de alimentos, resultando em crises como fome, doenças e guerras que reduziriam a população.

A função discreta para esse modelo é  $P_{t+1} = P_t \cdot (1 + r)$  onde:

- $P_t$  é a população no instante atual;
- $P_{t+1}$  é a população no instante seguinte;
- $r$  é a taxa de crescimento da população.

De acordo com os valores fornecidos pela professora ( $P_0$  e  $r$ ), calculem  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ . Em seguida, construam o gráfico da função mostrando a evolução da população, no software GeoGebra e, apresentem-o compartilhando o que puderam observar em relação ao comportamento da função.

$$f(x) = 1000 \cdot 1,02^x$$
$$P_1 = P_0 (1,02)$$
$$P_1 = 1000 \cdot 1,02$$
$$P_1 = 1020$$
$$P_2 = 1020 \cdot 1,02$$
$$P_2 = 1.040,4$$
$$P_3 = 1.040,4 \cdot 1,02$$
$$P_3 = 1.061,208$$
$$P_4 = 1.061,208 \cdot 1,02$$
$$P_4 = 1.082,43$$
$$P_5 = 1.082,43 \cdot 1,02$$
$$P_5 = 1.104,07$$

$1000 \times 1,02$

Figura 55 – Resolução da atividade 02 - Grupo 01.

### VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Em 1798, Thomas Malthus publicou um trabalho chamado "An Essay on the Principle of Population", cuja tradução é "Um ensaio sobre o princípio da população". Nesse trabalho, Malthus apresentou a sua teoria sobre crescimento populacional, na qual ele argumentava que as populações humanas tendiam a crescer de forma exponencial, ou seja, na ausência de limites, a população cresceria rapidamente. Porém, segundo Malthus, os recursos alimentares cresciam de forma linear, o que significa dizer que o crescimento da população é mais acelerado do que a produção de alimentos. Portanto, essa disparidade levaria a uma escassez de alimentos, resultando em crises como fome, doenças e guerras que reduziriam a população.

A função discreta para esse modelo é  $P_{t+1} = P_t \cdot (1 + r)$  onde:

- $P_t$  é a população no instante atual;
- $P_{t+1}$  é a população no instante seguinte;
- $r$  é a taxa de crescimento da população.

De acordo com os valores fornecidos pela professora ( $P_0$  e  $r$ ), calculem  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ . Em seguida, construam o gráfico da função mostrando a evolução da população, no software GeoGebra e, apresentem-o compartilhando o que puderam observar em relação ao comportamento da função.

$$r = 0,05$$
$$P_1 = P_0 \cdot (1 + r) = 5000 \cdot 1,05 = 5.250$$
$$P_2 = P_1 \cdot (1 + r) = 5250 \cdot 1,05 = 5.512,5$$
$$P_3 = P_2 \cdot (1 + r) = 5512,5 \cdot 1,05 = 5.788,125$$
$$P_4 = P_3 \cdot (1 + r) = 5788,125 \cdot 1,05 = 6.077,53125$$
$$P_5 = P_4 \cdot (1 + r) = 6.077,53125 \cdot 1,05 = 6.381,4078125$$
  
$$F(x) = 5000 \cdot 1,05^x$$

Figura 56 – Resolução da atividade 02 - Grupo 02.

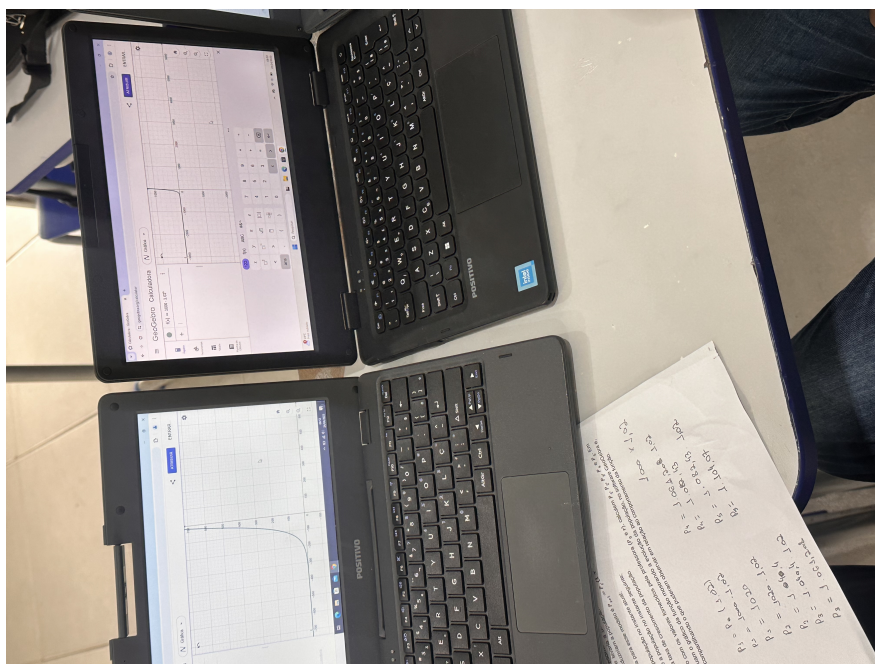


Figura 57 – Chromebooks utilizados para plotagem dos gráficos.

Ao realizarem a atividade 03 os estudantes demonstraram compreensão em relação ao conceito de iteração de funções, concluindo que o montante no instante atual depende do montante no instante anterior.

As Figuras a seguir apresentam algumas das resoluções feitas pelos estudantes.

### VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Considere a seguinte situação: Ana Júlia aplicou R\$ 1.000,00 a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Os juros compostos são cobrados sobre o valor inicial e sobre os juros acumulados ao longo do tempo, e isso significa que a cada mês os juros são calculados sobre todo o montante acumulado desde o tempo inicial.

Diante disso, preencha a tabela a seguir com os valores que representam o montante de Ana Júlia, mês a mês.

MÊS (t)	OPERAÇÃO REALIZADA	MONTANTE (M)
0		$M_0 = 1.000,00$
1	$M_1 = 1000 \cdot 1,05$	$M_1 = 1.050,00$
2	$M_2 = 1000 \cdot 1,05^2$	$M_2 = 1.102,50$
3	$M_3 = 1000 \cdot 1,05^3$	$M_3 = 1.157,63$
...		
10	$M_{10} = 1000 \cdot 1,05^{10}$	$M_{10} = 1.628,89$
...		
t	$M_t = M_{t-1} \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05^t$	

1. Foi possível perceber que o valor do montante no instante t depende do montante no instante anterior t-1? *Sim, É POSSÍVEL PERCEBER QUE O VALOR DO MONTANTE NO INSTANTE DEPENDE DIRETAMENTE DO VALOR DO MONTANTE NO INSTANTE ANTERIOR.*
2. Se substituirmos o capital inicial por C, qual seria a função que modelaria a aplicação de 5% ao mês para qualquer valor?  $M(t) = C \cdot (1,05)^t$
3. Foi possível perceber uma relação entre o método utilizado para calcular a população e o método para calcular os juros compostos? *Sim, PORQUE USAMOS O MESMO MÉTODO DE CÁLCULO DA POPULAÇÃO.*

Figura 58 – Resolução da atividade 03 - Dupla 01.

**VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM**

Considere a seguinte situação: Ana Júlia aplicou R\$ 1.000,00 a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Os juros compostos são cobrados sobre o valor inicial e sobre os juros acumulados ao longo do tempo, e isso significa que a cada mês os juros são calculados sobre todo o montante acumulado desde o tempo inicial.

Diante disso, preencha a tabela a seguir com os valores que representam o montante de Ana Júlia, mês a mês.

MÊS (t)	OPERAÇÃO REALIZADA	MONTANTE (M)
0	$M_0 = 1000$	
1	$M_1 = 1000 \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05^1$	$M_1 = 1050$
2	$M_2 = 1000 = 1000 \cdot 1,05^2$	$M_2 = 1.102,50$
3	$M_3 = 1000 = 1000 \cdot 1,05^3$	$M_3 = 1.157,62$
...		
10	$M_{10} = 1000 = 1000 \cdot 1,05^{10}$	$M_{10} = 1628,89$
...		
t	$M_t = M_{t-1} \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05^t$	

1. Foi possível perceber que o valor do montante no instante  $t$  depende do montante no instante anterior  $t-1$ ?

*Sim, pois o montante aumenta 5% em relação ao valor do mês anterior*

2. Se substituirmos o capital inicial por  $C$ , qual seria a função que modelaria a aplicação de 5% ao mês para qualquer valor?

*a função geral das juros compostos é:  $M(t) = C \cdot (1,05)^t$*

3. Foi possível perceber uma relação entre o método utilizado para calcular a população e o método para calcular os juros compostos?

*Sim. Ambos os métodos seguem um padrão de crescimento exponencial*

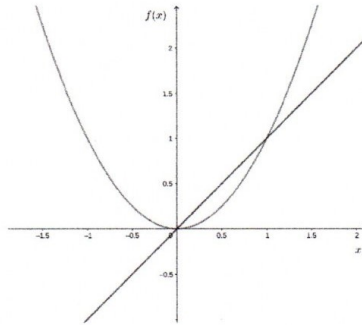
Figura 59 – Resolução da atividade 03 - Dupla 02.

A atividade 04 exigiu mais intervenções do professor, o que era previsto porque os estudantes não tinham domínio do software GeoGebra e não sabiam o que é uma função identidade. Mas, após algumas explicações e a demonstração de exemplos na TV, os estudantes conseguiram desenvolver a atividade com pouca dificuldade.

As Figuras a seguir apresentam algumas resoluções e alguns registros dos momentos em sala de aula.

**VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM**

Na figura a seguir, a função identidade, representada pela reta, é tal que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e definida por  $f(x) = x$ . Sendo assim, os pontos dessa reta são formados por abscissas e ordenadas de mesmo valor, como por exemplo  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,2)$ , etc. Além disso, a parábola representa a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que é definida por  $g(x) = x^2$ .



Após analisar a figura, responda às questões a seguir:

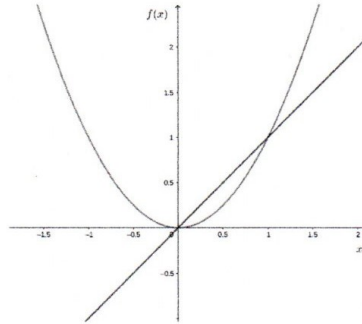
1. O que vocês acham que esses pontos, em que as funções se cruzam, representam?  
*REPRESENTAM OS MESMOS VALORES DE X E Y.*
2. Se a função identidade só possui pontos nos quais os valores das abscissas e das ordenadas são iguais, quais seriam esses pontos em que as funções se encontram?  
*A = (0,0) B = (1,1)*
3. Quando iteramos as funções nesses pontos, encontramos os valores que satisfazem  $f(p) = p$ , sendo  $p$  ponto fixo de  $g$ . *ITERAR AS FUNÇÕES NOS PONTOS FIXOS.*  
 *$g(0) = 0^2 = 0$   $g(1) = 1^2 = 1$*
4. Construa as funções a seguir no GeoGebra e em seguida selecione o comando "Interseção de dois objetos", clicando nos gráficos e registrando os pontos de interseção entre eles. Em seguida, faça a iteração da função no ponto fixo e registre o que você observou em relação ao resultado.

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a. <math>f(x) = x</math> e <math>h(x) = 2x</math>. <math>(0,0)</math> <math>h(0) = 2 \cdot 0 = 0</math></p> <p>b. <math>f(x) = x</math> e <math>m(x) = x^3</math>.</p> <p><math>(-1,-1)</math> <math>m(-1) = -1^3 = -1</math></p> <p><math>(0,0)</math> <math>m(0) = 0^3 = 0</math></p> <p><math>(1,1)</math> <math>m(1) = 1^3 = 1</math></p> | <p>c. <math>f(x) = x</math> e <math>n(x) = x^2 - 1</math>. <math>(1,62, 1,62)</math> <math>(-0,62, -0,62)</math></p> <p><math>n(1,62) = 1,62^2 - 1 = 1,6244</math></p> <p><math>n(-0,62) = -0,62^2 - 1 = -1,3844</math></p> <p>d. <math>f(x) = x</math> e <math>g(x) = x^2 + 1</math>.</p> <p><i>SEM INTERSEÇÃO</i></p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Figura 60 – Resolução da atividade 04 - Grupo 01.

**VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM**

Na figura a seguir, a função identidade, representada pela reta, é tal que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e definida por  $f(x) = x$ . Sendo assim, os pontos dessa reta são formados por abscissas e ordenadas de mesmo valor, como por exemplo  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,2)$ , etc. Além disso, a parábola representa a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que é definida por  $g(x) = x^2$ .



Após analisar a figura, responda às questões a seguir:

- O que vocês acham que esses pontos, em que as funções se cruzam, representam? *Representam o mesmo valor de x e y.*
- Se a função identidade só possui pontos nos quais os valores das abscissas e das ordenadas são iguais, quais seriam esses pontos em que as funções se encontram?  
*A = (0, 0) B = (1, 1)*
- Quando iteramos as funções nesses pontos, encontramos os valores que satisfazem  $f(p) = p$ , sendo  $p$  ponto fixo de  $g$ . *Itere as funções nos pontos fixos.*  
 *$g(x) = x^2$   $g(0) = 0^2 = 0$   $g(1) = 1^2 = 1$*
- Construa as funções a seguir no GeoGebra e em seguida selecione o comando "Interseção de dois objetos", clicando nos gráficos e registrando os pontos de interseção entre eles. Em seguida, faça a iteração da função no ponto fixo e registre o que você observou em relação ao resultado.

a.  $f(x) = x$  e  $h(x) = 2x$ .  $I(0, 0)$   
 $h(0) = 2 \cdot 0 = 0$   
 b.  $f(x) = x$  e  $m(x) = x^3$ .  $I(1, 1)$   
 $M(1) = 1^3 = 1$   $I(0, 0)$   
 $M(0) = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$   $I(-1, -1)$   
 $M(-1) = -1 \cdot -1 \cdot -1 = -1$

c.  $f(x) = x$  e  $n(x) = x^2 - 1$ .  $I = (-0,62, -0,62)$   
 $I = (1,62, 1,62)$   
 d.  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2 + 1$ .  
*Não se cruzam*

Figura 61 – Resolução da atividade 04 - Grupo 02.

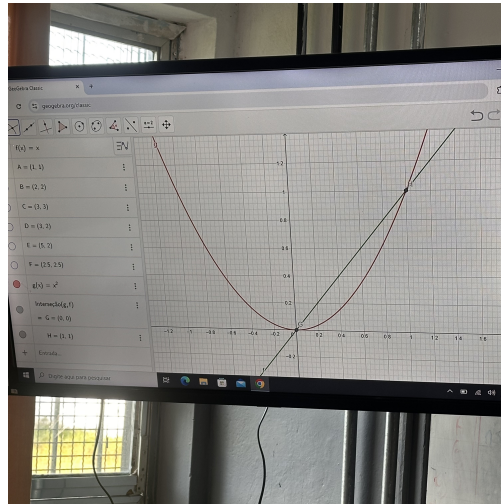


Figura 62 – Demonstração de exemplos de interseção entre as funções quadrática e identidade.

Antes de iniciar a atividade 05 foi proposto um exemplo de função e seu ponto fixo foi calculado pelo professor. Em seguida, foi solicitado que os estudantes escolhessem algum  $x_0$  próximo ao ponto fixo para realizarem iterações e, após cinco iterações, foram questionados se os valores estavam se aproximando ou se afastando do ponto fixo. Daí, ficou claro o que é um ponto fixo atrator e um ponto fixo repulsor. Os estudantes resolveram a atividade com o auxílio do GeoGebra, baseados na aula anterior, encontrando os pontos de interseção entre as funções, calculando cinco iterações com  $x_0 < p$  e, cinco iterações com  $x_0 > p$ .

As Figuras a seguir apresentam algumas resoluções feitas pelos estudantes que estavam organizados em duplas.

### VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Os pontos fixos são aqueles que satisfazem  $f(p) = p$ , ou seja, quando iteramos a função neste ponto, o valor dela não se altera. Alguns pontos fixos podem ser atratores ou repulsores, conforme foi possível verificar na introdução da aula.

Construa os gráficos das funções abaixo, encontre os seus pontos fixos e, em seguida faça 5 iterações com um valor maior que o ponto fixo e cinco iterações com um valor menor que o ponto fixo. Após as iterações, classifique os pontos fixos em atratores ou repulsores.

1.  $f(x) = x$  e  $h(x) = 2x$

$H(0) = 2 \cdot 0 = 0$	$P(0,0)$
$x_0 = 0,3$	$x_0 = 0,1$
$x_1 = 2 \cdot 0,3 = 0,6$	$x_1 = 2 \cdot 0,1 = 0,2$
$x_2 = 2 \cdot 0,6 = 1,2$	$x_2 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$
$x_3 = 2 \cdot 1,2 = 2,4$	$x_3 = 2 \cdot 0,4 = 0,8$
$x_4 = 2 \cdot 2,4 = 4,8$	$x_4 = 2 \cdot 0,8 = 1,6$
$x_5 = 2 \cdot 4,8 = 9,6$	$x_5 = 2 \cdot 1,6 = 3,2$
	PONTO FIXO REPULSOR

2.  $f(x) = x$  e  $g(x) = \frac{x}{2}$

$P(0,0)$	$x_0 = -0,2$
$x_0 = 0,6$	$x_1 = -0,2 : 2 = 0,1$
$x_1 = 0,6 : 2 = 0,3$	$x_2 = -0,1 : 2 = 0,05$
$x_2 = 0,3 : 2 = 0,15$	$x_3 = 0,05 : 2 = 0,025$
$x_3 = 0,15 : 2 = 0,075$	$x_4 = -0,025 : 2 = -0,0125$
$x_4 = 0,075 : 2 = 0,0375$	$x_5 = 0,0125 : 2 = 0,00625$
$x_5 = 0,0375 : 2 = 0,01875$	
	PONTO FIXO ATRATOR

3.  $f(x) = x$  e  $m(x) = 1,05^x \cdot 5$

$P(7,05 \cdot 7,05)$	$x_0 = 7$
$x_0 = 7,575$	$x_1 = 1,05^{7,5} \cdot 5 = 7,03$
$x_1 = 1,05^{7,575} \cdot 5 = 7,21$	$x_2 = 1,05^{7,03} \cdot 5 = 7,04$
$x_2 = 1,05^{7,21} \cdot 5 = 7,11$	$x_3 = 1,05^{7,04} \cdot 5 = 7,05$
$x_3 = 1,05^{7,11} \cdot 5 = 7,07$	$x_4 = 1,05^{7,05} \cdot 5 = 7,052$
$x_4 = 1,05^{7,07} \cdot 5 = 7,06$	$x_5 = 1,05^{7,052} \cdot 5 = 7,053$
$x_5 = 1,05^{7,06} \cdot 5 = 7,05$	
	PONTO FIXO ATRATOR

Figura 63 – Resolução da atividade 05 - Dupla 01.

### VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Os pontos fixos são aqueles que satisfazem  $f(p) = p$ , ou seja, quando iteramos a função neste ponto, o valor dela não se altera. Alguns pontos fixos podem ser atratores ou repulsores, conforme foi possível verificar na introdução da aula.

Construa os gráficos das funções abaixo, encontre os seus pontos fixos e, em seguida faça 5 iterações com um valor maior que o ponto fixo e cinco iterações com um valor menor que o ponto fixo. Após as iterações, classifique os pontos fixos em atratores ou repulsores.

1.  $f(x) = x$  e  $h(x) = 2x$

$P(0,0)$

$x_0 = 0,3$	$x_0 = -0,1$	
$x_1 = 2 \cdot 0,3 = 0,6$	$x_1 = 2 \cdot -0,1 = -0,2$	
$x_2 = 2 \cdot 0,6 = 1,2$	$x_2 = 2 \cdot -0,2 = -0,4$	→ REPULSOR
$x_3 = 2 \cdot 1,2 = 2,4$	$x_3 = 2 \cdot -0,4 = -0,8$	
$x_4 = 2 \cdot 2,4 = 4,8$	$x_4 = 2 \cdot -0,8 = -1,6$	
$x_5 = 2 \cdot 4,8 = 9,6$	$x_5 = 2 \cdot -1,6 = -3,2$	

2.  $f(x) = x$  e  $q(x) = \frac{x}{2}$

$P(0,0)$

$x_0 = 0,4$	$x_0 = -0,2$	
$x_1 = 0,4 \div 2 = 0,2$	$x_1 = -0,2 \div 2 = -0,1$	→ ATRATOR
$x_2 = 0,2 \div 2 = 0,1$	$x_2 = -0,1 \div 2 = -0,05$	
$x_3 = 0,1 \div 2 = 0,05$	$x_3 = -0,05 \div 2 = -0,025$	
$x_4 = 0,05 \div 2 = 0,025$	$x_4 = -0,025 \div 2 = -0,0125$	
$x_5 = 0,025 \div 2 = 0,0125$	$x_5 = -0,0125 \div 2 = -0,00625$	

3.  $f(x) = x$  e  $m(x) = 1,05^x \cdot 5$

$P(7,05)$

$x_0 = 7,8$	$x_0 = 7$	
$x_1 = 1,05^{7,8} \cdot 5 = 7,31$	$x_1 = 1,05^7 \cdot 5 = 7,03$	→ ATRATOR
$x_2 = 1,05^{7,31} \cdot 5 = 7,14$	$x_2 = 1,05^{7,03} \cdot 5 = 7,04$	
$x_3 = 1,05^{7,14} \cdot 5 = 7,08$	$x_3 = 1,05^{7,04} \cdot 5 = 7,049$	
$x_4 = 1,05^{7,08} \cdot 5 = 7,06$	$x_4 = 1,05^{7,049} \cdot 5 = 7,05$	
$x_5 = 1,05^{7,06} \cdot 5 = 7,05$	$x_5 = 1,05^{7,05} \cdot 5 = 7,052$	

Figura 64 – Resolução da atividade 05 - Dupla 02.

Assim, encerramos este trabalho certos de que a formação contínua do professor contribui significativamente para a melhoria da qualidade das aulas na educação básica, tendo em vista a revisão de conteúdos, a atualização de metodologias e o compartilhamento de experiências com outros profissionais. Ressaltamos ainda, que este trabalho avivou o desejo de continuar pesquisando e aperfeiçoando práticas para contribuir efetivamente para uma educação de qualidade.

# Referências

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: An introduction to dynamical systems*. Nova Iorque: Springer, 1996.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Campinas: Editora Contexto, 2002.

BOALER, J. *O que a Matemática tem a ver com isso?: Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso*. Porto Alegre: Penso, 2019.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. *Notas sobre o Brasil no Pisa 2022*. Brasília: Inep, 2023.

CARDOSO, L. C. L. A. *Uma Introdução ao Estudo de Sistemas Dinâmicos no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Feira de Santana-Bahia, 2022.

CIPOLLI, V. G. *Sistemas dinâmicos discretos: análise de estabilidade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2012.

ELAYDI, S. *An introduction to difference equations*. Texas: Springer, 2005.

GLEICK, J. *Caos: a criação de uma nova ciência*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1990.

MELLO, C. K. C. d. et al. *Sistemas dinâmicos e caos: análise de mapas discretos e possibilidades de aplicação no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.

NETO, A. C. M. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2022.

RUELLE, D. *Acaso e caos*. São Paulo: UNESP, 1993.