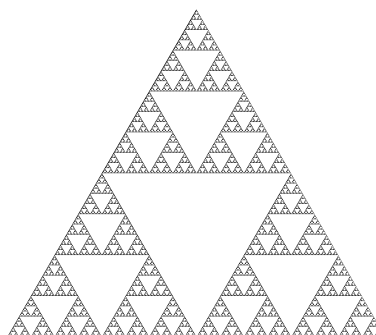


Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001 - Santa Terezinha - Santo André - SP - Brasil - CEP 09210-580
Tel/Fax: +55 11 4996-0001 - www.ufabc.edu.br





PROFMAT



Universidade Federal do ABC

Alexandre de Medeiros Lemos

Santo André - SP, 29 de dezembro de 2025

Santo André - SP, 29 de dezembro de 2025



Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Programa de Pós-Graduação em Matemática pelo Profmat

**Introdução à modelagem matemática por
equações de diferença. Sistemas dinâmicos e
aplicações na educação básica**

Alexandre de Medeiros Lemos

Santo André - SP, 29 de dezembro de 2025

Alexandre de Medeiros Lemos

**Introdução à modelagem matemática por equações de
diferença. Sistemas dinâmicos e aplicações na
educação básica**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado *Stricto Sensu* pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre pelo programa.

Universidade Federal do ABC – UFABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Programa de Pós-Graduação Profmat - Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional

Orientador: **Prof. Dr. Maurício Firmino da Silva Lima**

Santo André - SP

29 de dezembro de 2025

SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Elaborada pelo sistema de geração de ficha catalográfica da UFABC com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

FICHA CATALOGRÁFICA

Alexandre de Medeiros Lemos

Introdução à modelagem matemática por equações de diferença. Sistemas dinâmicos e aplicações na educação básica / Lemos, Alexandre de M. – Santo André - SP, 29 de dezembro de 2025-

- ☞ 272 fls. (algumas coloridas).
- ☞ Orientador: **Prof. Dr. Maurício Firmino da Silva Lima**
- ☞ Universidade Federal do ABC - **UFABC**.
- ☞ Centro de Matemática, Computação e Cognição.
- ☞ Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - **PROFMAT**.
 - ☞ Sistemas dinâmicos discretos.
 - ☞ Equações a diferenças.
 - ☞ Estabilidade, instabilidade, pontos fixos ou pontos estacionários.
 - ☞ Modelos matemáticos, função logística, função tenda, função linear.
 - ☞ Crescimento populacional de coelhos - um estudo de Fibonacci.
 - ☞ Dinâmica matemática em sistemas financeiros.
 - ☞ Aplicações de sistemas dinâmicos na educação básica, ensino fundamental e médio.

CDU 02:141:005.7(CÓDIGO A SER FORNECIDO PELA BIBLIOTECA)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UFABC - Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, nº 5.001 - Bairro Santa Terezinha

Santo André - SP

CEP 09210-580. Telefone (11) 4996-0017

Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado e Folha de Assinaturas

No dia 21 de Outubro de 2025 às 14:00, no local: Remota SA, realizou-se a Defesa da Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado “Introdução a modelagem matemática por equações de diferença. Sistemas dinâmicos e aplicações na educação básica” de autoria do candidato, ALEXANDRE DE MEDEIROS LEMOS, RA n. 22202110350, discente do Programa de Pós-Graduação em MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da UFABC, sob orientação do Prof. MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado APROVADO pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

Prof. Dr. Maurício Firmino da Silva Lima

Presidente - Interno ao Programa

Dr. JEFERSON CASSIANO, UFABC

Membro Titular - Examinador Interno ao Programa

Dr. MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS, UFAM

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. EDUARDO GUERON, UFABC

Membro Suplente - Examinador Interno ao Programa

Dr. CLAUDIO GOMES PESSOA, UNESP
Membro Suplente - Examinador(a)
Externo à Instituição

Santo André - SP, 29 de dezembro de 2025

*Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura.

DEDICATÓRIA

Dedico esta obra à minha esposa Patricia Lino da Silva Lemos, ao meu mentor Maurício Firmino Silva Lima e ao meu querido professor Aguinaldo Prandini Ricieri, do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), IEAC - Departamento de Propulsão, M.E.A Mecânica e Engenharia Aeronáutica, que em minha juventude aguçou minhas vontades pela área de exatas, fez-me buscar um propósito.

<<https://www.prandiano.com.br>> acesso em dezembro de 2023.

Cursei aulas que ocorriam no cursinho preparatório pré-vestibular, Anglo, Rua Tamandaré, 596, São Paulo.

A lista de nomes é muito extensa que gostaria de mencionar, sendo assim, deixarei omissos todos que ajudaram ao desenvolvimento desse trabalho de conclusão de mestrado. Não poderia deixar de incluir, meus alunos da educação básica, que em todo o momento da escrita, pensava da forma mais didática possível de apresentação dos conteúdos, contextualizando e problematizando os conceitos técnicos. Muitas vezes usamos vocábulos complexos às crianças e adolescentes, o que torna limitador e inacessível textos acadêmicos como este para o público da educação básica.

Aos meus amigos, colegas e professores do PROF-MAT da UFABC. Dedico especialmente aos meus pais (in memoriam), pelo dom da vida, e pela educação que me ofereceram em todas as fases de desenvolvimento.

AGRADECIMENTOS

Santo André - São Paulo, 29 de dezembro de 2025

Agradeço primeiramente Deus, que está presente em nossas vidas, pelo seu amor incondicional e que nos têm guiado pelos caminhos da sabedoria, dando-nos os dons necessários por vossas graças. Dessas graças destaco a minha capacitação, dedicação e superação pela obtenção do título de mestre.

Ao meu orientador, professor Maurício Firmino da Silva Lima, agradeço também aos professores desta conceituada universidade, Ufabc, em especial ao Eduardo Guéron, Rafael de Mattos Grisi, André Ricardo Oliveira da Fonseca dentre outros que foram muito especiais, que passaram em meu percurso formativo. Aos estudantes do profmat da minha turma de ingresso: em segundo plano da foto 1 na página 8, da esquerda para a direita, Cinthia Kelly da Silva, Juliana Bruna Guimarães Franco Corrêa, Mônica Cristina do Nascimento Rossetto, Marcelo Rodrigues da Costa, Neide Antônia Pessoa dos Santos, Vanessa Aparecida de Rezende Possebon e Luiz Carlos Ferreira da Silva Junior. Em primeiro plano da esquerda para a direita, Douglas Takasu Bomfim de Oliveira, Tiago Gonçalves de Lima, o autor e Hammhwygem Tadach Araújo de Oliveira. Ainda não apareceram na imagem, mas fazem parte da turma a Débora dos Santos Bueno, Henrique do Nascimento da Silva e José Wilton dos Santos dentre outros que infelizmente desistiram pelo caminho do curso.

Em especial aos que participavam do café coletivo, ajudando na compra das cápsulas de café doce gusto, pães recheados, carolinas da doce doce, mortadela e pão francês. Momentos inesquecíveis como estes, e pela diversão que o Marcelo nos proporcionava, trazendo mais produtos de Minas Gerais em suas viagens para a Universidade ufabc, as cachaças artesanais, queijos, os melhores pés de moleques de Piranguinho-MG. A Neide pelos doces artesanais que sua família mesmo produzia.

Nesta página, podemos visualizar os estudantes ativos do programa e os egressos e suas devidas defesas. [Link](#)



Figura 1: Turma da Ufabc no dia do exame nacional de qualificação - **ENQ 2022**

Um agradecimento especial para toda esta turma que eternizou o momento tão tenso que foi o exame ENQ, por todos os momentos que estudamos juntos, e através do diálogo muitas excelentes discussões foram construídas no nosso percurso formativo.

[...] Enquanto ensino continuo buscando, re-procurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade.

(Paulo Freire, Pedagogia da Autonomia, 1997)

RESUMO

À medida que o mundo se torna mais avançado tecnologicamente, a importância da matemática na educação nunca foi tão grande. Uma área que está ganhando cada vez mais atenção é o estudo de sistemas dinâmicos discretos e equações de diferença, que oferecem ferramentas poderosas para modelagem matemática. Desde a previsão do crescimento populacional até a compreensão da disseminação de doenças infecciosas, esses conceitos têm aplicações de longo alcance em vários campos. No ensino básico, o aprendizado desses modelos pode aprimorar as habilidades de resolução de problemas e de pensamento crítico dos alunos, preparando-os para empreendimentos científicos futuros. Este artigo explora a importância dos sistemas dinâmicos discretos e das equações de diferença na educação básica, destacando como contribuem para uma educação completa e fornecendo percepções valiosas e aplicações práticas.

Palavras-chaves: Sistemas dinâmicos, matemática discreta, equações de diferenças, órbitas, trajetórias, comportamentos dinâmicos sistêmicos, modelagem matemática, estabilidade.

ABSTRACT

As the world becomes more technologically advanced, the importance of mathematics education has never been greater. One area gaining attention is the study of discrete dynamic systems and difference equations, offering powerful tools for mathematical modeling. From predicting population growth to understanding the spread of infectious diseases, these concepts have far-reaching applications. Teaching discrete dynamic systems and difference equations in Elementary ou Primary School and Higher Education can enhance students' problem-solving and critical thinking skills, preparing them for future scientific endeavors. This article explores the importance of discrete dynamic systems and difference equations in basic education, uncovering key concepts, explaining their role in problem-solving, and providing valuable insights and practical applications. Join us on this mathematical journey to discover the wonders of discrete dynamic systems and difference equations and their potential to revolutionize problem-solving in basic education.

Keywords: Dynamic systems, discrete mathematics difference equations, orbits, trajectories, systemic dynamic behaviors, mathematical modeling, stability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Turma da Ufabc no dia do exame nacional de qualificação - ENQ 2022	8
Figura 2 – Meu Sistema Solar	7
Figura 3 – Régua de Cálculo - lado da frente <Fonte do autor>	8
Figura 4 – Régua de Cálculo - lado de trás <Fonte do autor>	8
Figura 5 – Elaydi, Saber - 2005 - An introduction to difference equations (Undergraduate texts in mathematics), 3rd edition - Springer	9
Figura 6 – Todas as órbitas possíveis são cônicas	12
Figura 7 – Elipse de Kepler	13
Figura 8 – Fibonacci em plantas (Fonte: (SETZER, 2020))	21
Figura 9 – Fibonacci em coelhos (Fonte: (SETZER, 2020))	21
Figura 10 – Sequência de movimentos da bola.	23
Figura 11 – Efeito borboleta de Lorenz. Fonte: < https://extendednews.com/attractors-the-platform-for-creating-new-futures-in-chaotic-systems/ >	29
Figura 12 – Diagrama de fase mostrando como os iterados de $x_0 \neq 0$ se afastam de x^* quando $ a > 1$ (instabilidade).	35
Figura 13 – Diagrama de fase mostrando como os iterados de $x_0 \neq 0$ se afastam de x^* quando $ a < 1$ (estabilidade).	36
Figura 14 – Iterados da cúbica	41
Figura 15 – Cobweb $x_0 = 0,9$ para 5 iterações. Função cúbica e seus pontos fixos	42
Figura 16 – Cobweb $x_0 = 1,001$ para 6 iterações. Função cúbica e seus pontos fixos	43
Figura 17 – Cobweb $x_0 = -1,001$ para 6 iterações. Função cúbica e seus pontos fixos	43
Figura 18 – Cobweb $x_0 = 0,9$ para 5 iterações. Gráfico das funções $g(x) = 4,8 \cdot x^2 \cdot (1 - x)$ e $f(x) = x$	44
Figura 19 – Cobweb $x_0 = 0,23$ para 6 iterações. Gráfico das funções $g(x) = 4,8 \cdot x^2 \cdot (1 - x)$ e $f(x) = x$	45
Figura 20 – Cobweb $x_0 = -0,25$ para 6 iterações. Gráfico das funções $g(x) = 4,8 \cdot x^2 \cdot (1 - x)$ e $f(x) = x$	45
Figura 21 – Cobweb $x_0 = 1,5$ para 5 iterações. Estável pela direita.	49
Figura 22 – Cobweb $x_0 = -0,5$ para 5 iterações. Instável pela esquerda.	49
Figura 23 – Cobweb para $x_0 = 0,2$ com 6 iterações	51
Figura 24 – Cobweb da $\sqrt{3}$	52
Figura 25 – Cobweb da $-\sqrt{3}$	52
Figura 26 – Método de Newton para encontrar zeros de funções	53
Figura 27 – Método de Newton para encontrar zeros de funções por <i>Cobweb</i> . 4 iterações - ponto fixo repulsor.	54

Figura 28 – Gráfico representando a órbita das soluções da equação de Fibonacci, mostrando o comportamento da sequência para n de 0 a 10.	73
Figura 29 – Primeiras 16 interações	97
Figura 30 – 32 interações	98
Figura 31 – 32 interações cobweb	98
Figura 32 – programa escrito na linguagem de programação Java	99
Figura 33 – Diagrama de cobweb para $x_0 = 0.2$ e $f(x) = 3 \cdot x$ se $0 < x \leq 3$, $f(x) = 9$ se $x > 3$	101
Figura 34 – Diagrama com n pagamentos iguais a p ao longo de cada período. .	107
Figura 35 – Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,51$ com 36 iterações.	119
Figura 36 – Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,9$ com 12 iterações.	119
Figura 37 – Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,25$ com 12 iterações. Ponto Fixo Eventual.	120
Figura 38 – Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,75$ com 12 iterações. Ponto fixo Eventual.	120
Figura 39 – Mapas da Tenda com diversos parâmetros λ	122
Figura 40 – Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda com $x_0 = 0,111$, $\lambda = 2$ para 18 iterações. .	126
Figura 41 – Cobweb $x_0 = 0,0500$ para $\lambda = 2,5000$ - Modelo Logístico - 10 iterações	135
Figura 42 – Cobweb para $x_0 = 0,9999$ e $\lambda = 3,2000$ do Modelo Logístico com 60 iterações.	135
Figura 43 – Cobweb para $x_0 = 0,001$ e $\lambda = 4,0$ do Modelo Logístico com 60 iterações.	136
Figura 44 – Cobweb para $x_0 = 0,01$ e $\lambda = 3,45$ do Modelo Logístico com 50 iterações.	137
Figura 45 – Cobweb para $x_0 = 0,01$ e $\lambda = 3$ do Modelo Logístico com 50 iterações.	137
Figura 46 – Diagrama de bifurcações da equação de diferenças logística	138
Figura 47 – Gráfico com os dados da tabela 11 da página 141.	142
Figura 48 – Diagrama cobweb na função f^2 , com $x_0 = 0,65$, durante 12 iterações. Mapas iterados da função logística.	143
Figura 49 – Ciclos periódicos da função logística para diferentes valores de λ . .	146
Figura 50 – Quadrática côncava para cima $Q'' > 0 \Leftrightarrow a > 0$	149
Figura 51 – Quadrática côncava para baixo $Q'' < 0 \Leftrightarrow a < 0$	149
Figura 52 – $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) > 0$	156
Figura 53 – $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) > 0$	156
Figura 54 – $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) \neq 0$	157
Figura 55 – $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$	159
Figura 56 – $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$	159
Figura 57 – $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$	160
Figura 58 – $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$	161

Figura 59 – Cobweb para $f(x) = -x + \frac{3}{10} \cdot x^3$ ilustrando a estabilidade do ponto fixo $x^* = 0$ com $f'(0) = -1$	166
Figura 60 – Cobweb para $g(x) = f^2$ ilustrando a estabilidade mais regular do ponto fixo $x^* = 0$ com $f'(0) = -1$	167
Figura 61 – Gráfico das funções com <i>Schwarziano</i> nulo, para diferentes valores de α, β, δ e ϵ	174
Figura 62 – Gráfico das funções com <i>Schwarziano</i> nulo, para diferentes valores de α, β, δ e ϵ	174
Figura 63 – Semi-estabilidade: $f'(0) = 1, f''(0) < 0$ e $f'''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = 0,99$ para 12 iterações.	179
Figura 64 – Semi-estabilidade: $f'(0) = 1, f''(0) < 0$ e $f'''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = -0,125$ para 12 iterações.	179
Figura 65 – Semi-estabilidade: instável pela direita e estável pela esquerda. $f'(0) = 1$ e $f''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = 0,09$ para 12 iterações.	181
Figura 66 – Semi-estabilidade: instável pela direita e estável pela esquerda. $f'(0) = 1$ e $f''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = -0,9$ para 12 iterações.	181
Figura 67 – Instável pelos dois lados (lado direito) Cobweb $x_0 = 1$ para 6 iterações.	183
Figura 68 – Instável pelos dois lados (lado esquerdo) Cobweb $x_0 = -1$ para 6 iterações.	183
Figura 69 – Comportamento assintótico da órbita com valor inicial $x_0 = 5$ após 12 iterações.	185
Figura 70 – Comportamento assintótico da órbita com valor inicial $x_0 = -5$ após 12 iterações.	185
Figura 71 – Cobweb para $f(x) = -x + x^3$ ilustrando a estabilidade do ponto fixo $x^* = 0$ com $f'(0) = -1$	187
Figura 72 – Tendência ou trajetória da sequência orbital x_n	204
Figura 73 – Gráfico discreto dos pontos e suas variações simples.	205
Figura 74 – Gráfico da função quadrática $Q(x)$	208
Figura 75 – Gráfico da função quadrática e tangentes.	213
Figura 76 – Gráfico da quadrática $Q(x)$ com a função identidade e pontos fixos marcados.	214
Figura 77 – Gráfico discreto dos pontos e sua sobreposição com a função quadrática $Q(x)$	214
Figura 78 – Curva da poupança do orçamento familiar	223
Figura 79 – Curva da poupança do orçamento familiar com taxa de interesse maior	224
Figura 80 – Representação geométrica da soma infinita de quadrados inscritos no quadrado unitário.	234
Figura 81 – Planilha do Google para diagrama de bifurcações	248
Figura 82 – Dia e Noite	259
Figura 83 – Anjos e Demônios	260
Figura 84 – Esponja de Menger passo base de indução $n = 0$	260
Figura 85 – Esponja de Menger passo base de indução $n = 1$	260
Figura 86 – Esponja de Menger passo base de indução $n = 2$	261

Figura 87 – Fractais de Koch passo base de indução do $n = 0$ até o estágio $n = 6$	262
Figura 88 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 0$	263
Figura 89 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 1$	263
Figura 90 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 2$	263
Figura 91 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 3$	264
Figura 92 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 4$	264
Figura 93 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 5$	264
Figura 94 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 6$	264
Figura 95 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 7$	264
Figura 96 – Triângulo de Sierpinski estágio $n = 8$	264

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Letras Gregas Maiúsculas e Descrições	23
Tabela 2 – Letras Gregas Minúsculas e Descrições	24
Tabela 3 – Setas e Flechas em LaTeX	25
Tabela 4 – Operadores Matemáticos em LaTeX	26
Tabela 5 – Relações Lógicas e Operações com Conjuntos em LaTeX	27
Tabela 6 – Miscelâneas	28
Tabela 7 – Outros diversos	29
Tabela 8 – Tabela da bola largada de 10 metros de altura - recursões	24
Tabela 9 – Tabela da bola largada de 10 metros de altura - tempo computado .	24
Tabela 10 – Amortização de um empréstimo de R\$12.000 a 1% de juros ao mês	109
Tabela 11 – Modelo logístico de May - Cobweb iterativo para 3 parâmetros r diferentes	141
Tabela 12 – Tabela de ciclos de período primo do mapa logístico	146
Tabela 13 – Plano de Aula $N^0 1$	199
Tabela 14 – Tabela de valores de (n, x_n)	203
Tabela 15 – Tabela dos pontos e suas variações simples.	204
Tabela 16 – Algoritmo de Euclides para MDC entre 513.300 e 216.330 (Parte 1)	206
Tabela 17 – Algoritmo de Euclides para MDC entre 513.300 e 216.330 (Parte 2)	206
Tabela 18 – Algoritmo de Euclides para MDC entre 513.300 e 216.330 (Parte 3)	207
Tabela 19 – Tabela iterativa do orçamento familiar	217
Tabela 20 – Orçamento familiar da proposta numérica	221

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENQ	Exame Nacional de Qualificação do programa do mestrado em rede nacional - profmat
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
abnTeX	Normas para TeX
UFABC	Universidade Federal do ABC (Santo André, São Bernardo do Campo, São Caetano do Sul, Diadema, Mauá, Ribeirão Pires e Rio Grande da Serra)
\LaTeX	(pronunciada "lay-tek" ou "lah-tek") representa "Lamport TeX". O LaTeX é um sistema de preparação de documentos de alta qualidade, amplamente usado para criar documentos técnicos, acadêmicos, científicos e outros tipos de textos que exigem formatação complexa e consistente. O LaTeX foi desenvolvido por Leslie Lamport na década de 1980 como uma extensão do sistema de tipografia TeX, criado por Donald Knuth. O nome "LaTeX" é uma combinação do sobrenome "Lamport" e do termo "TeX". Ao contrário de muitos processadores de texto convencionais, o \LaTeX é baseado em marcação, o que significa que você fornece instruções de formatação usando comandos especiais em vez de formatar diretamente o texto no documento. Isso permite uma separação clara entre o conteúdo e a formatação, tornando mais fácil criar documentos consistentes e bem estruturados. O LaTeX é especialmente valorizado em ambientes acadêmicos e científicos devido à sua capacidade de lidar com equações matemáticas complexas, referências cruzadas, bibliografias e outros elementos típicos desses tipos de documentos.
REC	Recorrências (Sequências Recorrentes). Recurssividade.
ED	Equação Diferencial.
DE	Differential Equation (Equação Diferencial, em inglês)
EDO	Equação Diferencial Ordinária.
ODE	Ordinary Differential Equation (Equação Diferencial Ordinária, em inglês)
PVI	Problema de Valor Inicial.

BC	Boundary Condition (Condição de Contorno, em inglês)
EDP	Equação Diferencial Parcial.
PDE	Partial Differential Equation (Equação Diferencial Parcial, em inglês)
CI	Condição Inicial.
IC	Initial Condition (Condição Inicial, em inglês)
Atrator	ponto atrator em português
Bifurcation	Bifurcação (trecho com duas ou mais ramificações)
Stability	Estabilidade para verificar o comportamento de um sistema dinâmico.

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS

Tabela 1: Letras Gregas Maiúsculas e Descrições

Símbolo	Letra	Descrição
A	Alpha	Usado em matemática para denotar um ângulo ou lado.
B	Beta	Usado em matemática para denotar um ângulo ou lado.
Γ	Gamma	Geralmente usado para representar a função gama.
Δ	Delta	Usado em matemática para denotar variação, diferenças.
E	Epsilon	Usado em matemática e física.
Z	Zeta	Usado em matemática e física.
H	Eta	Usado em matemática e física.
Θ	Theta	Usado para representar ângulos e funções trigonométricas.
I	Iota	Usado em matemática e física.
K	Kappa	Usado em matemática e física.
Λ	Lambda	Usado em matemática e ciência da computação.
M	Mu	Usado em matemática e física.
N	Nu	Usado em matemática e física.
Ξ	Xi	Usado em matemática e física.
O	Ômicron	Usado em matemática e física.
Π	Pi	Usado para representar operação de produtórios em matemática.
P	Rho	Usado em matemática e física.
Σ	Sigma	Usado em matemática para somatórios e integrais.
T	Tau	Usado em matemática e física.
Υ	Upsilon	Usado em matemática para representar valores especiais.
Φ	Phi	Usado para representar funções trigonométricas.
X	Chi	Usado em matemática e física.
Ψ	Psi	Usado em matemática, física e psicologia.
Ω	Omega	Última letra do alfabeto grego. (usado para indicar espaço amostral, resistência ôhmica e etc.)

Tabela 2: Letras Gregas Minúsculas e Descrições

Símbolo	Letra	Descrição
α	Alpha	Primeira letra do alfabeto grego.
β	Beta	Segunda letra do alfabeto grego.
γ	Gamma	Usado em matemática e física para representar a razão entre a carga e a massa de um elétron.
δ	Delta	Usado para representar uma pequena variação.
ϵ ou ε	Epsilon	Usado em matemática para representar quantidades muito pequenas.
ζ	Zeta	Usado em matemática para representar uma variável.
η	Eta	Sétima letra do alfabeto grego.
θ ou ϑ	Theta	Usado para representar ângulos e ângulos complexos.
ι	Iota	Nona letra do alfabeto grego.
κ	Kappa	Décima letra do alfabeto grego.
λ	Lambda	Usado em matemática e física para representar constantes.
μ	Mu	Décima segunda letra do alfabeto grego.
ν	Nu	Décima terceira letra do alfabeto grego.
ξ	Xi	Usado em matemática e física para representar uma variável.
\omicron	Omicron	Décima quinta letra do alfabeto grego.
π	Pi	Usado para representar a constante matemática $\approx 3,14$.
ρ	Rho	Décima sétima letra do alfabeto grego.
σ ou ς	Sigma	Usado em matemática para representar somatórios.
τ	Tau	Vigésima letra do alfabeto grego.
υ	Upsilon	Usado em matemática para representar uma variável.
ϕ	Phi	Usado em matemática para representar ângulos e constantes.
χ	Chi	Vigésima segunda letra do alfabeto grego.
ψ	Psi	Usado em matemática, física e psicologia.
ω	Omega	Última letra do alfabeto grego, usada em matemática e física.

Tabela 3: Setas e Flechas em LaTeX

Símbolo	Uso	Descrição
\rightarrow	$a \rightarrow b$	Seta simples para indicar uma relação, direção ou transformação de a para b .
\leftarrow	$b \leftarrow a$	Seta simples reversa, indicando uma relação ou direção oposta.
\Rightarrow	$A \Rightarrow B$	Seta dupla, denotando uma implicação lógica de A para B .
\Leftarrow	$B \Leftarrow A$	Seta dupla reversa, implicação lógica oposta.
\leftrightarrow	$x \leftrightarrow y$	Seta dupla bidirecional, indicando uma relação ou equivalência entre x e y .
\Leftrightarrow	$X \Leftrightarrow Y$	Seta dupla bidirecional de implicações lógicas, equivalência, verdadeiro para a ida e a volta.
\mapsto	$x \mapsto f(x)$	Seta que mapeia x para $f(x)$.
\hookrightarrow	$x \hookrightarrow f(x)$	Seta de gancho, indicando uma injeção ou inclusão.
\rightsquigarrow	$x \rightsquigarrow y$	Seta de avanço, indicando um passo de cálculo ou transformação.
\uparrow	\uparrow	Seta para cima, usada para indicar aumento, crescimento ou incremento.
\downarrow	\downarrow	Seta para baixo, usada para indicar diminuição ou decréscimo.
\updownarrow	\updownarrow	Seta bidirecional, indicando aumento e diminuição alternados.
\nearrow	\nearrow	Seta noroeste, indicando movimento diagonal para cima e para a direita.
\searrow	\searrow	Seta sudeste, indicando movimento diagonal para baixo e para a direita.
\swarrow	\swarrow	Seta sudoeste, indicando movimento diagonal para baixo e para a esquerda.
\nwarrow	\nwarrow	Seta noroeste, indicando movimento diagonal para cima e para a esquerda.

Tabela 4: Operadores Matemáticos em LaTeX

Símbolo	Uso	Descrição
$+$	$a + b$	Adição de a e b .
$-$	$a - b$	Subtração de b de a .
\cdot ou \times	$a \cdot b$ ou $a \times b$	Multiplicação de a por b .
\div	$a \div b$	Divisão de a por b .
\times	$a \times b$	Multiplicação ou produto cartesiano.
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$ ou $\frac{a}{b}$	Fração de a por b , ou divisão de a por b .
\sqrt{x}	\sqrt{x}	Raiz quadrada de x .
$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x}$	Raiz cúbica de x .
$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x}$	Raiz n -ésima de x .
x^y	x^y	x elevado à potência y .
$\log_b x$	$\log_b x$	Logaritmo de x na base b .
$\text{sen} x$	$\text{sen} x$	Seno de x .
$\cos x$	$\cos x$	Cosseno de x .
$\tan x$	$\tan x$	Tangente de x .
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a .
$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i$	Somatório de x_i de $i = 1$ até n .
$\prod_{i=1}^n x_i$	$\prod_{i=1}^n x_i$	Produto de x_i de $i = 1$ até n .
$\int_a^b f(x) dx$	$\int_a^b f(x) dx$	Integral definida de $f(x)$ de a a b .
$\int f(x) dx$	<code>\displaystyle \int</code>	Integral indefinida de $f(x)$. Ao final da integração, soma-se uma constante que dependerá do PVI.
\oint	<code>\oint</code>	integral de linha.
\pm	mais ou menos	Usado para expressar duas operações.
\mp	menos ou mais	Usado para expressar duas operações.
\oplus	soma de Kronecker	Usado em estatística, matrizes, espaços vetoriais.
\otimes	produto de Kronecker	Usado em estatística, matrizes, espaços vetoriais.
$A \# B$	produto de Hadamard	Usado em estatística, matrizes, espaços vetoriais.
Re	Parte Real	Indica a parte real de um número complexo.
Im	Parte Imaginária	Indica a parte imaginária de um número complexo.
$i = \sqrt{-1}$	$z = x + i \cdot y$	representação cartesiana de z cuja parte real é x e a unidade imaginária é y , número complexo
f'	<code>f^{\prime}</code>	derivada de uma função f
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	Derivada de $f(x)$ em relação a x .
$\mathcal{S}f(x)$	<code>\mathcal{S}</code>	Schwarziano de $f(x)$ em relação a x .
$\mathcal{O}(x_0)$	Trajétória de x	Notação para a Órbita do ponto inicial x_0 .
∂	Diferencial Parcial	Indica uma derivada parcial de uma função multivariável.
∇	Nabla (Laplaciano)	Representa o operador nabla, usado em cálculo vetorial.
∇^2	Coordenadas cartesianas	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
∇^2	Coordenadas cilíndricas	$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
∇^2	Coordenadas esféricas	$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Tabela 5: Relações Lógicas e Operações com Conjuntos em LaTeX

Símbolo	Uso	Descrição
\neg	Negação Lógica	Representa a negação de uma proposição.
\neg	$\neg p$	Negação, não p .
\wedge	$p \wedge q$	Conjunção, p e q .
\vee	$p \vee q$	Disjunção, p ou q .
\Rightarrow	$p \Rightarrow q$	Implicação, se p então q .
\Leftrightarrow	$p \Leftrightarrow q$	Bicondicional, p se e somente se q .
\forall	$\forall x \in S$	Para todo x em S .
\exists	$\exists x \in S$	Existe um x em S .
\in	$x \in A$	Pertence, x é um elemento de A .
\notin	$x \notin A$	Não pertence, x não é um elemento de A .
\subset	$A \subset B$	Subconjunto, todos os elementos de A estão em B .
\subseteq	$A \subseteq B$	Subconjunto ou igual, A é um subconjunto de B .
\supset	$A \supset B$	Superset, todos os elementos de B estão em A .
\supseteq	$A \supseteq B$	Superset ou igual, A é um superconjunto de B .
\cap	$A \cap B$	Interseção, conjunto de elementos em comum entre A e B .
\cup	$A \cup B$	União, conjunto de todos os elementos de A e B .
\setminus	$A \setminus B$	Diferença, conjunto de elementos em A mas não em B .
\emptyset ou \varnothing	\emptyset	Conjunto vazio, sem elementos.
\mathbb{N}	<code>(\mathbb{N})</code>	conjunto dos números naturais
$\mathbb{N} \cup 0$	<code>(\mathbb{N})</code>	conjunto dos números naturais incluindo o zero
\mathbb{Z}	<code>(\mathbb{Z})</code>	conjunto dos números inteiros
\mathbb{Z}^+	<code>(\mathbb{Z})</code>	conjunto dos números inteiros positivos
\mathbb{Z}^-	<code>(\mathbb{Z})</code>	conjunto dos números inteiros negativos
\mathbb{Q}	<code>(\mathbb{Q})</code>	conjunto dos números racionais
\mathbb{I}	<code>(\mathbb{I})</code>	conjunto dos números irracionais
\mathbb{R}	<code>(\mathbb{R})</code>	conjunto dos números reais
\mathbb{C}	<code>(\mathbb{C})</code>	conjunto dos números complexos

Tabela 6: Miscelâneas

Símbolo	Descrição	Significado
∞	Infinito	Representa um valor que é maior do que qualquer número real.
\forall	Quantificador Universal	Indica que uma propriedade é verdadeira para todos os elementos de um conjunto.
\exists	Quantificador Existencial	Indica que pelo menos um elemento com uma determinada propriedade existe em um conjunto.
\bigcirc	círculo	circunferência
\square	Quadrado	Pode ser usado para indicar um fim de prova ou um operador lógico.
\triangle	Triângulo	Pode ser usado para representar uma variedade de conceitos geométricos ou matemáticos.
\aleph	Aleph	Representa o primeiro cardinal infinito.
\wp	Script P	Indica o conjunto das partes de um conjunto dado.
#	Jogo da Velha	Usado para representar números inteiros ou como um símbolo em programação.
\$	Símbolo de Dólar	Representa a moeda dos Estados Unidos ou pode ser usado como delimitador.
%	Porcentagem	Indica uma proporção em relação a 100.
&	E Comercial	Usado para delimitar células em tabelas ou em linguagens de programação.
{	Chave Aberta	Usada para abrir um grupo ou bloco de código.
}	Chave Fechada	Usada para fechar um grupo ou bloco de código.
<	Menor que	Usado para indicar a abertura de um intervalo ou conjunto.
>	Maior que	Usado para indicar o fechamento de um intervalo ou conjunto.
\propto	proporcional a	Usado em física-matemática para indicar proporcionalidade.
... ou ...	três pontinhos	Usado em séries ou sequências para indicar continuidade.
\therefore	por causa	Usado em matemática.
\therefore	portanto	Usado para concluir raciocínio matemático.

Tabela 7: Outros diversos

Símbolo	Descrição	Significado
\widehat{p}	<code>\widehat{p}</code>	Representa um chapéu na letra p.
\overline{AB}	\overline{AB} ou $\frac{1}{3} = 1,333\dots = 1,\overline{3}$	Representa uma dízima periódica ou um segmento de reta de A para B.
\overleftrightarrow{AB}	<code>overleftarrow{AB}</code>	Representa uma seta dupla acima de AB.
\widehat{AB}	<code>\overset{AB}</code>	Representa o arco geométrico AB.
$//$	<code>/\!\!/</code>	Representa duas barras deitadas juntas.
\overrightarrow{AB}	<code>\overset{\rightrightarrows}{AB}</code>	Representa uma notação alternativa para vetor AB.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Matriz identidade de ordem 2×2	Notação de Matrizes.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Notação alternativa de Matrizes	Representa uma matriz ou tabela.
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	Determinante ou Discriminante da Matriz.	Representa a notação do discriminante da matriz.
$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	Determinante ou Discriminante da Matriz.	Representa a notação do discriminante da matriz.

ÍNDICE DE CONTEÚDOS

I	INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS	1
1	INTRODUÇÃO	3
1.1	O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS	6
1.2	DA MATEMÁTICA CLÁSSICA À DINÂMICA DO CAOS: FUNDAMENTOS E CONTRIBUIÇÕES	7
1.2.1	OBJETIVOS	15
1.2.2	PRÉ-REQUISITOS	15
1.3	CAOS	16
1.4	EQUAÇÕES A DIFERENÇAS	16
1.4.1	EQUAÇÃO DE DIFERENÇA ORDINÁRIA	17
1.4.2	PONTOS FIXOS	17
1.5	EXEMPLOS	19
1.5.1	CONCEITOS DESTE EXEMPLO	19
1.5.2	CLÁSSICO MODELO MATEMÁTICO - CASAIS DE COELHOS DE FIBONACCI	20
1.5.3	PROPRIEDADE IMEDIATA DE FIBONACCI	22
1.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	25
II	SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: TERMINOLOGIAS, DEFINIÇÕES, APLICAÇÕES, MODELAGEM MATEMÁTICA E DINÂMICA NÃO HIPERBÓLICA	27
2	DEFINIÇÕES - SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS	29
2.0.1	PRÉ REQUISITOS	30
2.0.2	OBJETIVOS	30
2.0.3	JUSTIFICATIVA	30
2.1	EQUAÇÕES A DIFERENÇAS	31
2.1.1	EXPANSÃO EM SÉRIES DE TAYLOR	32

2.2	COMPORTAMENTO DE PONTOS FIXOS	33
2.2.1	CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS FIXOS	33
2.2.2	PONTOS PERIÓDICOS	39
2.2.3	EXEMPLOS	40
2.2.3.1	EXEMPLOS DE PONTOS FIXOS HIPERBÓLICOS	40
2.2.3.2	EXEMPLOS DE PONTOS FIXOS NÃO-HIPERBÓLICOS	47
2.2.3.3	APLICAÇÃO I	50
2.2.3.4	APLICAÇÃO II	53
2.3	O OPERADOR DUPLO NAS E.D.L.	57
2.3.1	CONJECTURA	57
2.3.2	SOLUÇÃO GERAL DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇA LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	57
2.3.2.1	CASO 1	61
2.3.2.2	CASO 2	61
2.4	TEORIA GERAL DE E.D.L DE ORDEM SUPERIOR	65
2.4.1	DISCUSSÃO SOBRE SOLUÇÕES PARTICULARES	66
2.4.2	Definição e Forma Geral	67
2.4.3	Reescrita da Equação na Forma Resolutiva	68
2.4.4	Exemplo: Equação Não-Homogênea de Terceira Ordem	68
2.5	CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES	69
2.5.1	Problemas de Valor Inicial	70
2.5.1.0.1	Prova:	71
2.5.2	EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEM K	82
2.5.2.1	Demonstração: Polinômios de Determinante de Vandermonde	84
2.5.3	REVISITANDO O PROBLEMA DE FIBONACCI	85
2.5.3.1	EXEMPLO DE EQUAÇÃO LINEAR HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES DE SEGUNDA ORDEM (QUANDO A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA TEM RAÍZES IGUAIS DE MULTIPLICIDADE 2)	92
2.6	COBWEBBING	95
2.6.1	EXEMPLOS	95
2.7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102

3	APLICAÇÃO EM FINANÇAS	103
3.1	PRÉ-REQUISITOS	103
3.2	OBJETIVOS	103
3.3	JUSTIFICATIVA	103
3.4	JUROS COMPOSTOS	104
3.4.1	TAXA EFETIVA E TAXA NOMINAL	104
3.4.2	FINANCIAMENTO COM PRESTAÇÕES FIXAS	106
3.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	112
III	MODELOS MATEMÁTICOS	113
4	ESTUDO DOS MAPAS DA TENDA E LOGÍSTICO	115
4.1	PRÉ-REQUISITOS	115
4.2	OBJETIVOS	115
4.3	JUSTIFICATIVA	115
4.3.1	MAPA DA TENDA	115
4.3.2	MAPAS LOGÍSTICOS	116
4.3.3	HISTÓRICO DOS MODELOS LOGÍSTICOS	117
4.4	MAPA DA TENDA	118
4.4.1	PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA	120
4.4.2	PONTOS FIXOS EVENTUAIS DO MAPA DA TENDA	121
4.4.3	CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA	121
4.4.4	MAPA DA TENDA GENERALIZADO	121
4.4.5	PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA GENERALIZADO	121
4.4.6	CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA GENERALIZADO	122
4.4.7	GRÁFICO DO MAPA DA TENDA GENERALIZADO	122
4.4.8	CICLOS PERIÓDICOS DO MAPA DA TENDA	123
4.4.8.1	CICLO 2-PERIÓDICO	123
4.4.8.2	CICLO 3-PERIÓDICO	123
4.4.8.3	CICLO 4-PERIÓDICO	124
4.4.8.4	CICLO 5-PERIÓDICO	124
4.4.9	NÚMEROS DIÁDICOS	127

4.5	MODELOS LOGÍSTICOS	128
4.5.1	MODELO DE MALTHUS	128
4.5.2	MODELO DE VERHULST	129
4.5.2.1	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	130
4.5.3	SISTEMA DE VOLTERRA	131
4.5.4	MODELO DE RICKER	132
4.5.5	MODELO LOGÍSTICO DE MAY	132
4.5.5.1	PONTOS FIXOS	133
4.5.5.2	CICLOS PERIÓDICOS DO MAPA LOGÍSTICO	143
4.6	MAPAS QUADRÁTICOS: ESTUDO DE ESTABILIDADE	147
4.6.1	ESTABILIDADE DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS	148
4.7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
5	DINÂMICA NÃO HIPERBÓLICA	153
5.1	PRÉ REQUISITOS	153
5.2	OBJETIVOS	153
5.3	JUSTIFICATIVA	153
5.4	PONTOS FIXOS NÃO-HIPERBÓLICOS	154
5.4.1	PONTO FIXO não-hiperbólico $f'(x^*) = 1$	154
5.4.2	PONTO FIXO não-hiperbólico $f'(x^*) = -1$	161
5.4.2.1	ESTABILIDADE EM FUNÇÕES ITERADAS	161
5.4.2.2	SCHWARZIANO	167
5.4.2.3	TEOREMA DO SINAL DO SCHWARZIANO	168
5.4.2.4	EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE STURM-LIOUVILLE	169
5.4.2.5	SCHWARZIANO IDENTICAMENTE NULO	171
5.4.2.6	SCHWARZIANO NEGATIVO	175
5.4.2.7	SCHWARZIANO INCONCLUSIVO	175
5.5	EXEMPLOS	177
5.5.1	APROXIMAÇÃO PELA DIREITA	178
5.5.2	APROXIMAÇÃO PELA ESQUERDA	180
5.5.3	AFASTAMENTO PELOS DOIS LADOS	182
5.5.4	APROXIMAÇÃO PELOS DOIS LADOS	184
5.5.5	EXEMPLO $f'(x^*) = -1$	186

5.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	187
IV	CONCLUSÃO: PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA	189
6	PROPOSTA PARA ENSINO BÁSICO	191
6.1	PRÉ REQUISITOS	191
6.2	OBJETIVOS	191
6.3	JUSTIFICATIVA	191
6.4	PROBLEMATIZAÇÃO	192
6.5	CONTEXTUALIZAÇÃO	192
6.6	REVISÃO DAS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	192
6.7	METODOLOGIA	194
6.8	ATIVIDADES	195
6.8.1	GEOMETRIA FRACTAL E PROGRESSÕES	195
6.8.2	MODELOS FINANCEIROS	198
6.8.3	SEQUÊNCIA DIDÁTICA - MODELO 1	203
6.8.4	INTERPRETANDO TABELAS OU GRÁFICOS	203
6.8.4.1	VALIDAÇÃO	208
6.8.4.2	ESTABILIDADE - UM ESTUDO DA IMPORTÂNCIA DA RETA TANGENTE	211
6.8.4.3	ESTUDO DE GRÁFICOS SOBREPOSTOS	213
6.8.5	SEQUÊNCIA DIDÁTICA - MODELO 2 ORÇAMENTO FAMILIAR	215
6.8.6	MODELO 2: ORÇAMENTO FAMILIAR	216
6.8.6.1	SOLUÇÃO: CASO ESPECIAL COM RENDA BRUTA FIXA	219
6.8.6.2	SOLUÇÃO: CASO ESPECIAL COM VALORES	221
6.9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	224
	REFERÊNCIAS	225
V	APÊNDICES	231
	APÊNDICE A – SOMAS DEFINIDAS	233
A.1	A Motivação de Arquimedes na Soma de Quadrados Dentro do Quadrado Unitário	233

A.2	SOMA DOS N PRIMEIROS NATURAIS	235
A.3	SOMA DOS N PRIMEIROS QUADRADOS	235
A.4	SOMA DOS N PRIMEIROS CUBOS	237
A.5	SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE POTÊNCIA DE QUARTA ORDEM	238
A.6	SOMA DEFINIDA P.G DE N TERMOS	240
	APÊNDICE B – TEOREMA DE TAYLOR	243
B.1	Fórmula de Taylor com resto de Lagrange	245
	APÊNDICE C – DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO NO GOOGLE PLANILHAS	247
C.1	PACOTES TIKZ, PGFPLOTS, TIKZ-3DPLOT	249
VI	ANEXOS	257
.1	OBRAS DE ARTE DE ESCHER	259
.2	FRACTAIS DE SIERPINSKI-MENGER	260
.3	FRACTAIS DE KOCH	262
.3.1	TRIÂNGULO DE SIERPINSKI	263
	ÍNDICE	265

Parte I

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS
DINÂMICOS DISCRETOS

1 INTRODUÇÃO

Pouco se conhece sobre a história e o desenvolvimento dos sistemas dinâmicos discretos. Por volta de 1600 a.C., os babilônios realizavam registros astronômicos que despertaram a curiosidade da humanidade em relação ao movimento dos planetas e das estrelas. Essa civilização foi a primeira a perceber que as observações astronômicas eram periódicas. Eles calcularam os períodos dos planetas e suas posições no céu, registrando os resultados em tábuas de argila - os registros mais antigos de que se tem notícia - utilizando a numeração cuneiforme de base sexagesimal.

A expressão “teoria dos sistemas dinâmicos” não possui uma data de origem específica, pois seu desenvolvimento ocorreu de forma gradual ao longo do tempo, com contribuições de diversos matemáticos e cientistas. No entanto, alguns marcos importantes podem ser destacados na evolução dessa teoria:

- ☞ Século XIX - Henri Poincaré (1854-1912) foi um dos pioneiros na abordagem da teoria dos sistemas dinâmicos.
- ☞ Século XX - Matemáticos como Stephen Smale, René Thom e David Ruelle desempenharam papéis fundamentais no desenvolvimento e na formalização da teoria.
- ☞ Século XXI - Saber Nasf Elaydi, conhecido por suas contribuições na área de sistemas dinâmicos e equações diferenciais, é autor de diversas obras, incluindo *An Introduction to Difference Equations*, parte da série *Undergraduate Texts in Mathematics* (Textos Universitários em Matemática) da editora Springer.

Elaydi é cofundador e coeditor-chefe dos periódicos *Journal of Difference Equations and Applications* (JDEA) e *Journal of Biological Dynamics* (JBD). Possui mais de cem publicações em sistemas dinâmicos, equações diferenciais, equações de diferença e biologia matemática. Sua pesquisa atual aborda a estabilidade e a bifurcação de sistemas dinâmicos discretos não autônomos e suas aplicações em populações com habitats flutuantes. É professor de Matemática na Trinity University, onde atuou como presidente entre 1991 e 1999, e preside a Sociedade Internacional de Equações de Diferença (ISDE) desde 2005.

Em síntese, a expressão “teoria dos sistemas dinâmicos” (TSD) consolidou-se gradualmente entre os séculos XIX e XXI. A TSD, tal como a compreendemos atualmente, não existia nas eras pitagórica e socrática da Grécia Antiga.

Os membros da escola pitagórica, liderados por Pitágoras, realizaram uma descoberta fundamental ao identificarem a existência dos números incomensuráveis, diferentes dos quadrados perfeitos. Um número é chamado de quadrado perfeito quando pode ser expresso como $p^2 = p \cdot p$, isto é, $p = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$, sendo \sqrt{p} o lado do quadrado de área p .

Considere, por exemplo, o número $\sqrt{2}$. Sua peculiaridade reside no fato de que ele não pode ser representado como a razão entre dois números inteiros; em outras palavras, trata-se de um número irracional. Os pitagóricos tentaram demonstrar que $\sqrt{2}$ poderia ser racional, mas suas tentativas sempre levavam a contradições. De certo modo, elaboraram um raciocínio de natureza dinâmica - ainda que sem o uso desse termo moderno - para se aproximar de seu valor. Sabiam, por exemplo, que $1,4 \times 1,4 = 1,96$ e que $1,42 \times 1,42 = 2,0164$, o que evidenciava sua busca pela precisão numérica, embora o enigma da exatidão permanecesse sem solução.

Outros métodos de cálculo também chamaram a atenção pela sua abordagem dinâmica. Entre eles, destaca-se o método da “exaustão”, desenvolvido por teóricos como Eudoxo, Arquimedes e Euclides, séculos antes de Cristo. Essa técnica consistia em calcular áreas e volumes por aproximações sucessivas, e é considerada uma precursora do cálculo integral moderno. Atualmente, no século XXI, utiliza-se o método da “integração” para determinar, de forma precisa, áreas sob curvas e outras grandezas contínuas.

Em 1543, na cidade de Nuremberg, foi publicada a obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, de Nicolau Copérnico (1473-1543). Nela, o astrônomo apresentou o modelo heliocêntrico, segundo o qual a Terra deixa de ocupar o centro do universo e passa a orbitar o Sol. O termo *Orbis*, utilizado por Copérnico e anteriormente por Cláudio Ptolomeu (100-170 d.C.), designava as esferas ou órbitas dos corpos celestes.

Ptolomeu, influenciado pela filosofia aristotélica, havia proposto um modelo geocêntrico, no qual a Terra ocupava o centro do universo. Embora seu sistema tenha prevalecido por mais de mil anos, não explicava de maneira satisfatória as irregularidades observadas nos movimentos planetários. Copérnico, ao reformular o conceito de órbita, rompeu com essa tradição e estabeleceu as bases para uma nova compreensão do cosmos - uma visão que, séculos depois, inspiraria o desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos (TSD).

O conceito de órbita, entretanto, possuía múltiplos significados e, nas obras antigas, não se referia necessariamente aos corpos celestes como entendido na TSD moderna. Copérnico e seus predecessores não questionavam a estabilidade ou instabilidade das órbitas, temas que seriam aprofundados posteriormente por Henri Poincaré.

No mesmo período, destaca-se Bartolomeu Velho, matemático, cartógrafo e

cosmógrafo português do século XVI. Entre suas principais obras, encontra-se a Carta General do Orbe, desenhada em 1561 para o rei Sebastião de Portugal. Trabalhou por muitos anos na França, onde concluiu seu tratado *Cosmographia*, publicado em Paris no ano de sua morte, em 1568.

Nas observações do planeta Marte, Copérnico registrou o que denominou epí-ciclo da órbita. O termo epí-ciclo foi amplamente utilizado na teoria geocêntrica desenvolvida por astrônomos gregos como Ptolomeu e, mais tarde, aperfeiçoada por estudiosos islâmicos como Al-Battani e Al-Biruni. Nesse modelo, a Terra era considerada o centro do universo, e o Sol, a Lua e os planetas orbitavam ao seu redor em movimentos circulares.

Para explicar as irregularidades observadas nos movimentos planetários, os astrônomos da Antiguidade propuseram que os planetas descreviam trajetórias compostas por círculos menores - os epí-ciclos - que, por sua vez, giravam em torno de um ponto denominado deferente. Embora essas anomalias possam ser calculadas com precisão atualmente, na época não havia ferramentas matemáticas adequadas para isso.

Hoje se sabe que fenômenos semelhantes de instabilidade orbital ainda ocorrem no sistema solar. O planeta Netuno, por exemplo, possui mais de uma dúzia de luas, cujas órbitas sofrem variações caóticas ao longo dos anos, resultado de interações gravitacionais complexas. Esses comportamentos imprevisíveis, que fascinavam os antigos, são objeto de estudo direto da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, revelando como ideias nascidas na Antiguidade ainda ecoam na ciência contemporânea.

Assim, um epí-ciclo é uma pequena órbita circular cujo centro se move ao longo da circunferência de outra órbita maior, denominada deferente. Esse conceito foi utilizado para explicar os movimentos retrógrados aparentes e outras irregularidades observadas no céu noturno a partir da Terra. No sistema geocêntrico, os epí-ciclos permitiam aos astrônomos gregos representar com maior precisão as posições e os movimentos dos planetas em relação à Terra, embora esse modelo tenha sido posteriormente substituído pelo heliocentrismo proposto por Nicolau Copérnico, segundo o qual a Terra e os demais planetas orbitam o Sol.

É importante destacar que Pitágoras não foi o único matemático grego de destaque. Pensadores como Tales de Mileto, Euclides, Eratóstenes e Arquimedes também contribuíram significativamente para o avanço da matemática e para a formação do pensamento científico ocidental. Suas investigações sobre proporções, áreas e volumes lançaram as bases para o desenvolvimento posterior do cálculo infinitesimal.

Milhares de anos mais tarde, surge Isaac Newton (1642-1726), que deu forma moderna ao antigo enigma da exatidão enfrentado pelos pitagóricos. Sua principal contribuição foi estabelecer um método geral para resolver equações e aproximar raí-

zes de funções - o método das aproximações sucessivas, também conhecido como método de Newton.

Considere o problema clássico:

Fórmula 1.0.1: Aproximação sucessiva de Newton

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0.$$

Partindo de um palpite inicial $x_0 = 1,4$, Newton propôs que um novo valor x_1 pudesse ser obtido adicionando uma pequena correção Δx , de modo que $x_1 = x_0 + \Delta x$. Substituindo essa expressão na equação original, tem-se:

Fórmula 1.0.2: Aproximação sucessiva de Newton - palpite x_1

$$x_1^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \cancel{\Delta x^2} - 2 = 0,$$

O termo Δx^2 , riscado na expressão, representa uma quantidade de segunda ordem, ou seja, muito pequena em comparação a Δx . Newton o desprezou para simplificar a equação e obter uma aproximação linear, inaugurando o raciocínio que levaria à formulação do cálculo diferencial. Isolando-se Δx e desprezando os termos Δx de ordem superior a 2, obtém-se $\Delta x = \frac{1}{x_0} - \frac{x_0}{2}$. Substituindo $x_0 = 1,4$, obtém-se $\Delta x = \frac{1}{70}$, daí um melhor palpite seria $x_1 = 1,4 + \frac{1}{70} = \frac{99}{70}$. Assim $\sqrt[3]{2} \approx 1,4142857$. Seguindo esta ideia, o próximo iterado (ou palpite) seria $x_2 = \frac{99}{70} + \Delta x$. Isolando Δx e desprezando os termos de ordem superior a 2, obtém-se $\Delta x = \frac{1}{x_1} - \frac{x_1}{2}$. Que resulta em $\Delta x = -\frac{1}{13860}$. Assim $\sqrt[3]{2} \approx \frac{19601}{13860}$, daí $\sqrt[3]{2} \approx 1,41421356421$. E esta dinâmica continua indefinidamente até alcançar a exatidão desejada.

1.1 O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

O clássico problema dos três corpos é um dos mais fascinantes e complexos desafios da física e da matemática. Ele consiste em determinar o movimento de três corpos celestes - por exemplo, o Sol, a Terra e a Lua - sob a influência mútua de suas forças gravitacionais. Embora a solução exata do problema de dois corpos seja bem conhecida desde Newton, a introdução de um terceiro corpo torna o sistema não integrável, ou seja, impossibilita encontrar uma solução analítica geral que descreva o movimento dos três corpos ao longo do tempo.

Esse problema foi formulado inicialmente no século XVII por Isaac Newton, ao tentar compreender as perturbações gravitacionais na órbita da Lua causadas tanto pela Terra quanto pelo Sol. Desde então, o tema tem atraído a atenção de cientistas como Euler, Lagrange e, mais tarde, Henri Poincaré, cujo trabalho revelou que pequenas variações nas condições iniciais podem gerar comportamentos imprevisíveis - um dos primeiros indícios do que hoje se conhece como caos determinístico.

Do ponto de vista da teoria dos sistemas dinâmicos, o problema dos três corpos representa um marco histórico. Ele exemplifica como leis simples e determinísticas - como a lei da gravitação universal - podem produzir trajetórias altamente complexas e sensíveis a pequenas mudanças nos parâmetros iniciais. Esse fenômeno deu origem a uma nova forma de compreender o universo: não como uma máquina previsível, mas como um sistema dinâmico intrinsecamente caótico em certas condições.

Convido o leitor a visitar o simulador interativo disponível em University of Colorado Boulder (2024), que permite explorar o movimento de corpos celestes em um sistema gravitacional.

Na figura 2, tem-se uma simulação para 4 corpos planetários, acessando o laboratório virtual:



Figura 2: Meu Sistema Solar

1.2 DA MATEMÁTICA CLÁSSICA À DINÂMICA DO CAOS: FUNDAMENTOS E CONTRIBUIÇÕES

Segundo (GONGOL, 2003), há uma excelente aproximação para π no livro Aryabhatiya de Aryabhata. Por volta do século III - A. C., o matemático grego Arquimedes, utilizou-se do método da exaustão, cuja característica se assemelha muito a um sistema dinâmico, embora o termo sistema dinâmico teria sido consolidado no século XIX - D. C., este método consistia em inserir dentro do círculo, polígonos regulares conhecidos e abstraindo o número de lados deles até uma situação limite. Este processo gerava uma dinâmica indutiva recorrente, pois quanto maior o número de

lados do polígono regular inscrito no círculo, mais se aproximava de seu perímetro e área.

Segundo (STEWART, 2013):

A primeira régua de cálculo foi construída em 1630 por um matemático inglês, William Oughtred, usando escalas circulares. Ele modificou o desenho em 1632, fazendo as duas escalas retas. Esta foi a primeira régua de cálculo. A ideia é simples: quando você alinha duas hastes, as medidas se somam. Se as hastes são marcadas utilizando uma escala logarítmica, na qual os números estão espaçados segundo seus logaritmos, então os números correspondentes se multiplicam. Por exemplo, alinhemos o 1 de uma haste com o 2 da outra. Então, qualquer número x da primeira haste estará alinhado com $2x$ da segunda. Desse modo, alinhado com o 3 teremos 6, e assim por diante, como vemos nas figuras 3 e 4. Se os números forem mais complicados, digamos 2,67 e 3,51, colocamos o 1 alinhado com o 2,67 e lemos o número alinhado com o 3,51, ou seja, 9,37. É muito fácil.

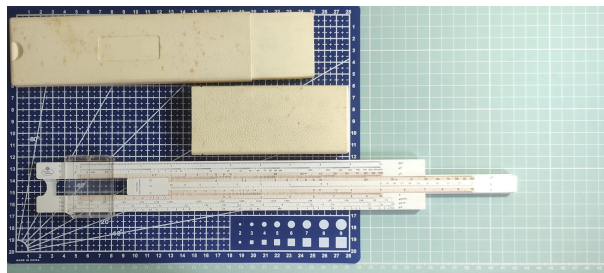


Figura 3: Régua de Cálculo - lado da frente <Fonte do autor>

Outros diversos processos dinâmicos surgiam na história da matemática, para interpolar tabelas de logaritmos e tábuas trigonométricas. O progresso e o desenvolvimento dos números era inevitável até o surgimento dos computadores modernos a partir do século XIX - D. C. Em 1946, surge o *Eniac (Electronic Numerical Integrator and Computer)*, primeiro computador eletrônico e digital automático: pesava 30 toneladas, com cerca de 18 mil válvulas e realizava 4.500 cálculos por segundo.

Esta dissertação de mestrado contribui para entendimentos de obras como (KATOK; HASSELBLATT, 2005) e (BROER; TAKENS, 2011) principalmente para os não iniciados nos trabalhos de matemáticos tais como Arnold, Smale, Mandelbrot, Feigen-

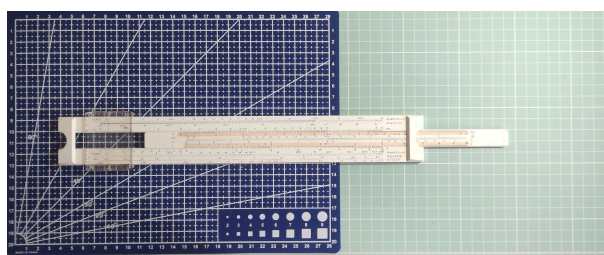


Figura 4: Régua de Cálculo - lado de trás <Fonte do autor>

baum, Hausdorff, René Thom, Anosov, dentre muitos outros não é uma tarefa fácil, como afirma (RICIERI, 1990).

A referência (ELAYDI et al., 2005) como ponto de partida, da figura 5 na página 9, tem como objetivo na pesquisa demonstrar as aplicações práticas do estudo de sistemas dinâmicos, especialmente na educação básica, por meio do desenvolvimento de planos de aula. O autor destaca a importância de conectar o conceito de equações de diferenças ao comportamento dos sistemas em várias áreas do conhecimento.

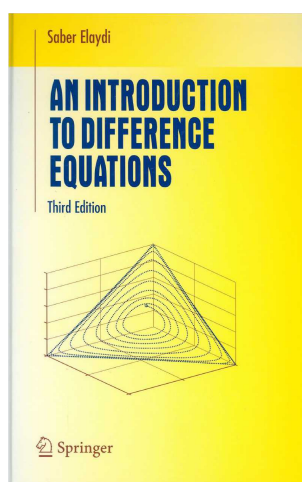


Figura 5: Elaydi, Saber - 2005 - An introduction to difference equations (Undergraduate texts in mathematics), 3rd edition - Springer

Em pesquisas anteriores, (PROFMAT, 2023), diversos trabalhos prévios foram conduzidos no campo das equações de diferença envolvendo sistemas dinâmicos, abordando tópicos similares desse trabalho. Alguns mais relevantes incluem (CAMPREGHER et al., 2021), (FIGUEIREDO et al., 2020), (ELLER, 2015), (FELIX, 2018), (GUNELLA, 2016), (NOVAKI et al., 2016), (JUNIOR, 2016), (GOMES, 04/06/2014), (FERNANDES, 2016), (CAPILUPE, 23/06/2017), (MORAIS, 24/03/2014), entre outros. Essa rica base de pesquisa destaca a importância de aprofundar nosso entendimento sobre **introdução à modelagem matemática por equações de diferença - sistemas dinâmicos e aplicações na educação básica** nas etapas de ensino fundamental e ensino médio.

Para (STEWART, 2013):

O caos surgiu de uma abordagem topológica da dinâmica, orquestrada em particular pelo matemático americano Stephen Smale e pelo matemático russo Vladimir Arnold na década de 1960. Ambos tentavam descobrir que espécies de comportamento eram típicas em equações de diferença. Smale estava

motivado pelos estranhos resultados de Poincaré no problema dos três corpos (STEWART, 2014b), e Arnold inspirou-se em descobertas relacionadas de seu ex-orientador de pesquisa Andrei Kolmogorov. Ambos rapidamente perceberam por que o caos é comum: é uma consequência natural da geometria das equações de diferença, como logo veremos.

À medida que se espalhava o interesse no caos, foram identificados exemplos escondidos em artigos científicos mais anteriores. Inicialmente considerados apenas efeitos esquisitos isolados, tais exemplos agora se encaixavam em uma teoria mais ampla. Na década de 1940, os matemáticos ingleses John Littlewood e Mary Cartwright tinham visto traços de caos em osciladores eletrônicos. Em 1958, Tsuneji Rikitake, da Associação para Desenvolvimento da Predição de Terremotos, em Tóquio, havia descoberto comportamento caótico num modelo de dínamo do campo magnético terrestre. E em 1963 o meteorologista americano Edward Lorenz especificou a natureza da dinâmica caótica em considerável detalhe, num modelo simples de convecção atmosférica elaborado para previsão do tempo. Estes e outros pioneiros mostraram o caminho; agora, todas as suas descobertas disparatadas estavam começando a se encaixar.

Segundo (STEWART, 2014a), o estranho conjunto de anomalias matemáticas exploradas incluía diversas contribuições notáveis. Dentre elas, destaca-se uma curva que preenche uma extensa região do espaço, identificada por Peano em 1890, assim como outra, encontrada por Hilbert em 1891, que se auto-intersecciona em todos os seus pontos. Uma curva de relevância peculiar é a chamada curva floco de neve de Koch, cujo comprimento é infinito, mas que circunscreve uma área finita. Esta notável construção geométrica, idealizada por Helge von Koch em 1906, emerge a partir da adição de saliências triangulares nas metades de cada lado de um triângulo equilátero, criando uma estrela de seis pontas. Posteriormente, novas saliências são adicionadas nas metades dos doze lados menores da estrela, perpetuando-se o processo indefinidamente. A simetria hexagonal resultante confere à curva a aparência de um intrincado floco de neve, embora os flocos de neve reais sigam regras distintas. Essa narrativa, contudo, é tema para outra discussão.

Suponha como exemplo, que você queira entender o crescimento de uma população de coelhos. Não é preciso modelar o comprimento dos pelos do coelho, nem o tamanho de suas orelhas, nem como funciona seu sistema imunológico. Bastam apenas alguns fatos básicos sobre cada coelho: a idade, o sexo e, se for fêmea, se está grávida. Aí você pode focalizar os recursos do seu computador naquilo que realmente importa.

Poincaré realizou investigações sobre equações diferenciais em 1880, resultando em uma importante descoberta: uma generalização das funções elípticas. Ele mostrou que a periodicidade é apenas um caso especial de uma propriedade mais geral, onde certas funções são restauradas ao seu estado inicial quando a variável

é substituída por diversas transformações lineares fracionárias. Essas descobertas foram fundamentais para entender a natureza das funções periódicas de uma única variável. Por exemplo a função senoidal tem periodicidade $2 \cdot \pi$, ou seja, $\text{sen}(x) = \text{sen}(2 \cdot \pi + x)$. Agora, por exemplo, para uma função elíptica, digamos $\xi(x)$, existem dois períodos distintos, dados pelos dois pontos focais de sua geometria, digamos f_1 e f_2 , tais que $\xi(x + f_1) = \xi(x)$, e que $\xi(x + f_2) = \xi(x)$.

O termo foco foi empregado pela primeira vez em 1604 por Johannes Kepler (1571 - 1630), assistente de Tycho Brahe. Analisando a enorme coleção de dados e observações astronômicas de Tycho Brahe (1546 - 1601), de quem se tornou assistente, Kepler publicou a obra *Astronomia Nova* em 1609, concluindo que a órbita de Marte é uma elipse tendo o Sol num dos focos.

Se x for substituído por $\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$, então, para uma infinidade enumerável de conjuntos de valores de $\{a, b, c, d\}$ existem funções uniformes de x , digamos $\xi(x)$ é uma delas, tal que $\xi\left(\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}\right) = \xi(x)$. Há uma “substituição de identidade no conjunto”, ou seja, resulta $x \mapsto x$ (aqui $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$); e, finalmente, cada substituição tem um “inverso único” - isto é, para cada substituição no conjunto, há uma outra única que, se aplicada à primeira, produzirá a substituição de identidade. Em resumo, vemos que $\xi(x)$ é uma função que é invariante sob um grupo infinito de transformações lineares fracionárias. Note que o infinito de substituições é um infinito enumerável, como primeiro declarado: as substituições podem ser contadas 1, 2, 3, ... e não são tão numerosas quanto os pontos em uma linha. Poincaré realmente construiu tais funções e desenvolveu suas propriedades mais importantes em uma série de artigos na década de 1880. Tais funções são chamadas de funções automórficas.

Isaac Newton, em seu *Principia Mathematica*, de 1687, mostrou as três leis de Kepler a partir de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei Universal da Gravitação. Para isso, usou o cálculo vetorial e o cálculo diferencial para chegar a conclusão que a equação do movimento de um planeta em torno do Sol tem equação polar, onde e é a excentricidade, h é a distância entre reta diretriz e ponto focal e θ é o ângulo de varredura num sistema de coordenadas polares com o Sol no polo:

Fórmula 1.2.1: Seções cônicas Newtonianas em coordenadas polares

$$\rho(e, h, \theta) = \frac{e \cdot h}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

Como a órbita de um planeta é uma curva limitada, a cônica descrita por um planeta só pode ser uma elipse, provando, assim, a primeira lei de Kepler.

Para Isaac Newton, as cônicas modelavam as órbitas dos planetas:

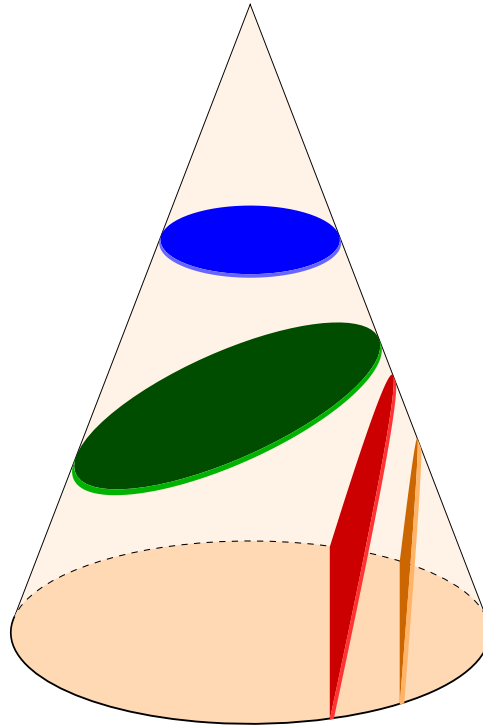


Figura 6: Todas as órbitas possíveis são cônicas

Uma curva algébrica, que não é função, é aquela cuja equação é do tipo $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x, y) = 0$, onde $P(x, y)$ é um polinômio em x e y . A publicação do primeiro tratado sobre cônicas está registrado na história pelo matemático grego Apolônio de Perga por volta do século III a.C. Este tratado é considerado uma das obras mais importantes da matemática antiga e influenciou significativamente o desenvolvimento da geometria analítica e da álgebra. Posteriormente, Fermat-Viète define as cônicas através de uma equação geral:

Fórmula 1.2.2: Equação geral das cônicas

$$P(x, y) = A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F.$$

Como exemplo simples, a equação analítica da circunferência, cujo centro está na origem $(0, 0)$ e raio r , é $x^2 + y^2 = r^2 \implies P(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. De acordo com as “ideias” de Poincaré, deve ser possível expressar x e y como funções automórficas de um único parâmetro, digamos t . Fazendo-se $x = r \cdot \cos t$ e $y = r \cdot \sin t$, então, ao elevar ao quadrado e somar, eliminamos t (já que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$), e encontramos a curva algébrica novamente. Mas as funções trigonométricas $\cos t$ e $\sin t$ são casos especiais de funções elípticas, que por sua vez, são casos especiais de funções automórficas.

Enquanto Isaac Newton estava concentrado na força gravitacional universal, William Rowan Hamilton (1805 - 1865) e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) estu-

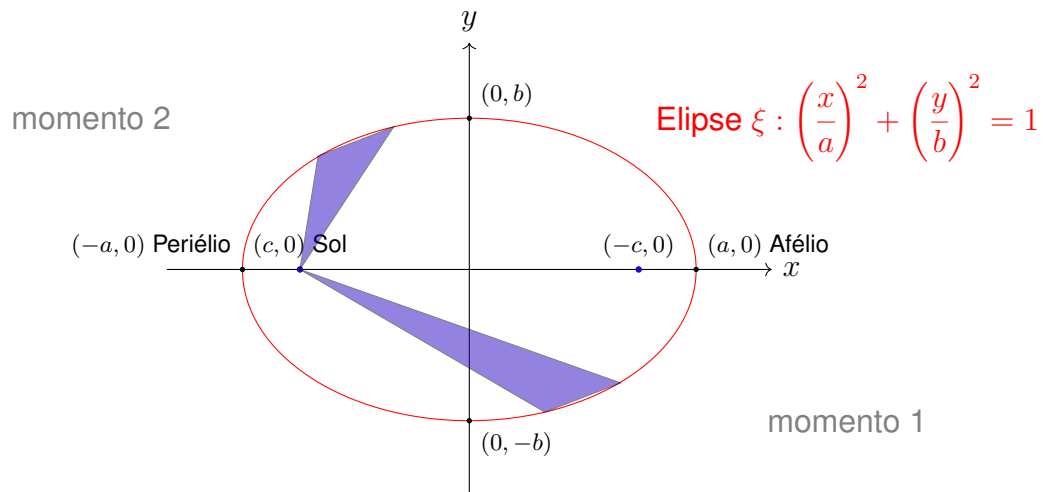


Figura 7: Elipse de Kepler

davam métodos variacionais, cujos fundamentos se baseavam no mínimo esforço da natureza, ou seja, a natureza quer minimizar a energia para que o movimento dos planetas não seja arbitrário.

A criação dessa vasta teoria de funções automórficas foi apenas uma das muitas coisas surpreendentes em análise que Poincaré fez antes de completar trinta anos. Nem todo o seu tempo foi dedicado à análise; a teoria dos números, partes da álgebra e a astronomia matemática também compartilharam sua atenção. Na primeira, ele reformulou a teoria gaussiana de formas quadráticas binárias.

O trabalho mais original de Poincaré em astronomia matemática foi resumido em seu grande tratado *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Novos métodos de mecânica celeste; três volumes, 1892, 1893, 1899). Isso foi seguido por outro trabalho em três volumes de natureza mais imediatamente prática, *Leçons de mécanique céleste*, de 1905 a 1910, e um pouco mais tarde pela publicação de seu curso de palestras *Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide* (Sobre as figuras de equilíbrio de uma massa fluida), e um livro histórico-crítico *Sur les hypothèses cosmogoniques* (Sobre hipóteses cosmológicas).

A teoria do caos foi desenvolvida nos anos 1960 pelo matemático e meteorologista americano Edward Lorenz. (LORENZ, 1964, p. 3), ao usar um computador para trabalhar em modelos do clima, como o modelo logístico climático, Lorenz reparou que o seu programa produzia padrões climáticos muitíssimo diferentes simplesmente porque os números iniciais que ele tinha fornecido tinham sido arredondados de maneira diferente, vide tabela (LORENZ, 1964, p. 6). A teoria do caos surgiu na altura em que se descobriu os fractais. De fato, ambos estão intimamente ligados. Os mapas de atratores das soluções caóticas de muitos sistemas podem ter a aparência de fractais, em que a estrutura fina do atrator se repete a muitas escalas. A equação de diferenças utilizada no artigo produzido por Lorenz, assumiu-se como quadrática de primeira

ordem em uma variável unidimensional.

(LORENZ, 1964, p. 10):

Vamos concordar em identificar o parâmetro “a” em nossa simples equação de diferenças discreta com a taxa de rotação nos experimentos de laboratório, e vamos identificar a variável “x” com a energia cinética das ondas. Descobrimos então que, para a rotação mais lenta ($0 < a < 1$), x se aproxima de zero, ou seja, não há ondas (**extinção populacional logística, grifos nosso**). Para taxas de rotação um pouco mais altas ($1 < a < 3$), x se aproxima de uma constante positiva, ou seja, as ondas existem e sua energia permanece estável com o tempo. Para taxas de rotação ainda mais altas ($3 < a < 3,449$), x oscila periodicamente entre dois valores, ou seja, as ondas oscilam. Finalmente, para pelo menos algumas das taxas de rotação mais altas ($3,449 < a < 4$), x oscila de maneira não periódica, ou seja, as ondas se movem de maneira irregular (**caos, grifo nosso**).

Embora a disponibilidade de computadores tenha sido aquilo que realmente permitiu o desenvolvimento da teoria do caos, tendo permitido aos matemáticos calcular muitas vezes os comportamentos de sistemas variando os números iniciais, houve sistemas mais simples que mostraram ter comportamento caótico, e isso foi reconhecido desde muito cedo. Por exemplo, no final do século XIX já se sabia que o caos se aplicava às trajetórias das bolas de bilhar e às estabilidades das órbitas.

O crédito da palavra “caos”, da-se à Poincaré, e seu significado para matemática e física não é algo abstrato, mas algo concreto que possui definição como veremos adiante. A motivação de Poincaré no estudo do problema dos três corpos, e no problema dos n corpos, fora devido à premiação colocada pelo rei Oscar em 1885: “Dado um sistema de n corpos de massas arbitrárias, atraindo umas as outras de acordo com a lei da gravitação universal de Newton, determine suas órbitas num sistema de coordenadas, ou seja a evolução no tempo da posição e da velocidade de cada partícula.” que foi publicado na *Acta Mathematica*, fundada por Gösta Mittag-Leffler em 1882 e é publicada pelo Institut Mittag-Leffler, uma das revistas de matemática mais prestigiadas do mundo.

A grande questão que intrigava os cientistas era se o sistema solar permaneceria estável ou instável por infinitos períodos de tempo. Seria possível prever colisões entre corpos celestes? A Lua e a Terra poderiam, em algum momento, colidir? Existiria algum planeta cuja órbita se tornasse instável a ponto de escapar do sistema solar? Essas perguntas conduziram Poincaré à formulação de uma teoria matemática capaz de descrever o comportamento de sistemas complexos.

Durante suas investigações sobre o problema dos três corpos, Poincaré identificou que pequenas variações nas condições iniciais poderiam gerar grandes diferenças nas trajetórias dos corpos um fenômeno que hoje reconhecemos como **sensibilidade às condições iniciais**, ou **caos determinístico**. Embora seu trabalho inicial

contivesse imprecisões posteriormente corrigidas, essas próprias correções revelaram aspectos fundamentais da dinâmica não linear, inaugurando as bases da **Teoria dos Sistemas Dinâmicos (TSD)** tal como a conhecemos atualmente.ⁱ

1.2.1 OBJETIVOS

- Dar subsídios motivacionais aos professores para seus alunos.
- Introduzir a teoria dos sistemas dinâmicos (TSD) discretos através de equações de diferenças.
- O objetivo principal é criar um recurso que torne mais agradável temas como sistemas dinâmicos, bifurcações, fractais caos e catástrofes, mais acessíveis para estudantes com pouca experiência nesses assuntos, principalmente almejando ao aprimoramento da educação básica nas escolas públicas.
- Estabelecer as cinco etapas ao abordar um problema complexo, conforme (BRAMBURGER, 2023) delineado a seguir:
 1. **Passo 1:** Pergunta inicial, central ou principal de um problema.
 2. **Passo 2:** Seleção do método mais adequado de modelagem matemática.
 3. **Passo 3:** Formulação do modelo matemático correspondente.
 4. **Passo 4:** Resolução do modelo.
 5. **Passo 5:** Resposta à pergunta inicial.

1.2.2 PRÉ-REQUISITOS

- Conceitos básicos de física e matemática do ensino básico;
- Conceitos e fundamentos do cálculo diferencial e integral da graduação;
- Leis de Newton.

ⁱ Em 1889, Henri Poincaré venceu o prêmio proposto pelo rei Oscar II da Suécia, que desafiava os matemáticos a determinar se o sistema solar era estável. Sua solução, publicada na *Acta Mathematica*, continha um erro detectado antes da impressão. Poincaré revisou o texto às pressas e, ao corrigir o problema, percebeu que pequenas perturbações nas condições iniciais podiam tornar o comportamento do sistema imprevisível. Esse episódio levou ao conceito de *órbitas homoclínicas* e marcou o nascimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos moderna.

1.3 CAOS

Anteriormente conceituamos a palavra “caos”, porém nesta seção ela será definida formalmente. Segundo (STEWART, 1991), caos foi o pseudônimo que Deus usou quando não quis assinar. Se Deus jogasse dados. . . ele ganharia.

Um sistema dinâmico exibe caos se tiver soluções que parecem bastante aleatórias e as soluções exibem dependência sensível das condições iniciais.

A dependência sensível significa que se você realizasse dois experimentos evoluindo o sistema dinâmico onde a única diferença entre os experimentos fosse uma ligeira diferença nas condições iniciais, as duas trajetórias resultantes se tornariam muito diferentes com o passar do tempo. (Como as condições iniciais determinam completamente os estados futuros, os experimentos seriam exatamente os mesmos se as condições iniciais fossem idênticas.) Em um sistema do mundo real, normalmente não se conheceria exatamente as condições iniciais, então o caos em um sistema dinâmico severamente limita a capacidade de prever o futuro do sistema (pense na previsão do tempo).

O fato de as soluções “parecerem bastante” significa que se alguém iniciasse um monte de experiências com diferentes condições iniciais, todas fortemente agrupadas, as órbitas resultantes acabariam por se espalhar por todo o espaço de estados.

1.4 EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

As equações de diferença são ferramentas fundamentais na análise de sistemas dinâmicos. Elas descrevem e modelam como uma variável discreta, representada por x_n , evolui de um estado n para o seu próximo $n+1$, x_{n+1} , em termos de uma função a ser modelada matematicamente por diferenças simples $f(n, x(n)) = f(n, x_n) = \Delta x$, definida em termos de uma função:

Definição 1.1

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{n+1} = f(n, x_n)$.

A função inversa existe se dadas f e g , f é dita inversa de g então as seguintes condições ocorrem:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= y_i & i \in \mathbb{N}, \\ g(f(x_i)) &= x_i & i \in \mathbb{N}, \\ g(y_i) &= x_i & i \in \mathbb{N}, \\ f(g(y_i)) &= y_i & i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

O princípio da iteração está presente em métodos clássicos como os de Picard, Euler e Newton-Raphson, amplamente utilizados para modelar e resolver sistemas dinâmicos em diversas áreas do conhecimento.

1.4.1 EQUAÇÃO DE DIFERENÇA ORDINÁRIA

Uma equação de diferença de primeira ordemⁱⁱ, se $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ são dois estados conhecidos do sistema, $n - 1$ o estado anterior e n o estado atual do sistema dinâmico discreto, então a equação de diferença ordinária tem ordem:

$$\underbrace{(n)}_{\text{Estado de Maior grau}} - \underbrace{(n-1)}_{\text{Estado de Menor grau}} \implies n - (n-1) = 1 \implies \text{logo é uma equação de primeira ordem.}$$

Pode-se obter uma equação de diferença simples, fazendo-se:

$\Delta x = f(n, x(n))$, onde f está definida em 1.1 na página 16. Assim, denotamos uma diferença simples $\Delta x = x(n+1) - x(n) = x_{n+1} - x_n \implies x(n+1) = x(n) + \Delta x \implies x(n+1) = x(n) + f(n, x(n)) \implies x_{n+1} = x_n + f(n, x_n)$.

Se $x(n) = x_n$ é dito um estado conhecido do sistema dinâmico, então o próximo estado do sistema será $x(n+1) = x_{n+1}$.

Chamando-se $x_{n+1} = g(n, x_n)$, então temos $g(n, x(n)) = x(n) + f(n, x(n)) \implies g(n, x_n) = x_n + f(n, x_n)$, e se escrevermos a função em termos de sua variável independente x implicitamente de n , temos $g(x) = x + f(x)$. Se f está definida em 1.1 na página 16, g segue a mesma definição, pois $x \in \mathbb{R}$. Portanto, se $g(x) = x + f(x) = x + \Delta x$ vamos definir o que são pontos fixos de um sistema dinâmico discreto.

1.4.2 PONTOS FIXOS

O par ordenado $(x_n, x_{n+1}) \in f$ é usualmente denotado por $f(x_n) = x_{n+1}$, ou seja, em \mathbb{R}^2 , a sequência numérica dada por $(x_n, f(x_n))$.

Denotamos x^* **ponto fixo ou estacionário** de f declarada na definição 1.1 na página 16.

Então $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow g(x^*) = x^*$, isto é, significa dizer que $\Delta x = 0 \Leftrightarrow f(x^*) = 0$, ou seja, **não há mudanças de estado, pois as diferenças das equações da modelagem matemática são nulas.**

ⁱⁱ ordem da equação de diferença é definida como o maior grau obtido das diferenças entre os estados, conforme pode ser visto no exemplo 1.5.2 da página 21, em que temos uma equação de diferença ordinária de segunda ordem.

O ponto x^* é um ponto fixo de $g(x) = x + f(x) = x + \Delta x$ quando não ocorre mudanças de estado e o mapa ou função $g : A \rightarrow B$ pode ser estudado (analisado) a partir dessa condição de estabilidade ou de instabilidade do(s) ponto(s) fixo(s).

Definição 1.2

O ponto x^* no domínio de f declarada anteriormente, na definição 1.1 na página 16, é dito ponto fixo de f se ocorre $f(x^*) = x^*$, isto é, x^* é ponto fixo de f .

Em outras palavras, $x_0 = x^*$, $x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*$, $x_2 = f(x_1) = f(x_0) = f(x^*) = x^*$, $x_n = f^n(x_0) = x^*$, conforme $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 1.4.1

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{4}{5} \cdot x + 1$ e considere a equação de diferenças discreta dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Essa equação tem único ponto fixo $x^* = 5$, pois ocorre $f(x^*) = x^*$.

Assim, tome $x_0 = 5$. Daí fazendo as iterações, temos:

$$\begin{aligned} n, \quad x_{n+1} &= f(x_n) = \frac{4}{5} \cdot x_n + 1 = \\ n = 0, \quad x_1 &= f(x_0) = \frac{4}{5} \cdot 5 + 1 = 5, \\ n = 1, \quad x_2 &= f(x_1) = f \circ f(x_0) = f^2(x_0) = f^2(5) = 5, \\ n = 2, \quad x_3 &= f(x_2) = f \circ f(x_1) = f \circ f \circ f(x_0) = f^3(5) = 5, \\ \vdots, \quad \vdots &= \vdots = \vdots = \vdots = \vdots = \vdots = \vdots, \\ n = k, \quad x_{k+1} &= f(x_k) = f \circ f(x_{k-1}) = f^2(x_{k-1}) = f^k(x_0) = 5. \end{aligned}$$

Dado um ponto de equilíbrio x^* podemos perguntar sobre o comportamento de pontos $x = x^* \pm \epsilon$, sob a ação de f , se são estáveis ou instáveis.

As seguintes notações serão definidas para o estudo de sistemas dinâmicos:

Fórmula 1.4.1: Notação para equações de diferenças

$$x(n+1) = g(n, x(n)),$$

Alternativamente a mesma equação pode ser denotada por:

Fórmula 1.4.2: Notação para equações de diferenças alternativa

$$x_{n+1} = g(n, x_n)$$

1.5 EXEMPLOS

Os problemas abordados trazem uma contextualização que investigaremos como eles podem ser aplicadas nos diferentes passos do processo de modelagem matemática.

1.5.1 CONCEITOS DESTE EXEMPLO

O que é Órbita?

Em matemática, especificamente no estudo dos sistemas dinâmicos, uma órbita é o conjunto de pontos gerados pela função de evolução que descreve o comportamento do sistema ao longo do tempo.

Pode ser compreendida como o subconjunto do espaço de fase percorrido pela trajetória do sistema sob determinadas condições iniciais, à medida que este evolui.

Uma **sequência recursiva** em matemática discreta é uma trajetória ou órbita de números em que cada termo subsequente é definido com base em um ou mais termos anteriores da sequência, seguindo uma regra matemática específica (ou função) como vista na definição 1.1 na página 16. Essa regra é chamada de relação de recorrência.

Exemplo 1.5.1

Exemplo de Órbita discreta:

Seja uma função g definida em 1.1 na página 16, para uma condição inicial dada x_0 , a sequência recursiva $x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), \dots, x_n = g(x_{n-1})$ gera uma órbita ou trajetória de pontos $x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g \circ g(x_0), x_3 = g \circ g \circ g(x_0), \dots, x_n = \underbrace{g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ \dots \circ g}_{\text{função } g \text{ composta com ela mesma } n \text{ vezes}}(x_0)$.

Produzindo uma sequência orbital:

$$\implies \mathcal{O}(x_0) = x_0, g(x_0), g^2(x_0), g^3(x_0), \dots, g^n(x_0)$$

Que gera os n pares ordenados em \mathbb{R}^2 :

$$(x_0, g(x_0)); (g(x_0), g^2(x_0)); (g^2(x_0), g^3(x_0)); \dots; (g^{n-1}(x_0), g^n(x_0))$$

Relação de recorrência é uma fórmula matemática que descreve como calcular os termos subsequentes da sequência com base em termos anteriores. A relação de recorrência pode ser uma equação que usa termos anteriores da sequência, e é isso que torna a sequência recursiva.

Caso base: Esses são os primeiros termos da sequência, que são fornecidos explicitamente. Eles servem como ponto de partida para a recursão. Em muitos casos, esses são os termos iniciais da sequência que não dependem de cálculos anteriores.

1.5.2 CLÁSSICO MODELO MATEMÁTICO - CASAS DE COELHOS DE FIBONACCI

Segundo o autor (SETZER, 2020):

Um homem tinha um casal de coelhos, e se deseja saber quantos serão criados partindo desse casal em um ano, quando é da natureza deles gerar mais um casal a cada mês, e no segundo mês os que nasceram também dão cria.

Como apresentado em Setzer (2023), neste site do professor Setzer, encontram-se materiais sobre este referencial bibliográfico utilizado para contextualizar a sequência de Fibonacci.

Fibonacci descreve o modelo que usou para calcular o crescimento populacional dos coelhos e responder a essa pergunta. As suas hipóteses de como os coelhos se multiplicavam podem ser esquematizadas da seguinte maneira:

- i. No início há um casal recém nascido de coelhos;
- ii. Depois de nascido um casal, ele leva um mês para se tornar sexualmente maduro;
- iii. Sempre que um casal dá cria, nasce um e apenas um casal;
- iv. Cada casal sexualmente maduro acasala-se a cada mês;
- v. Depois do acasalamento, a gestação leva um mês até o nascimento, sempre de um novo casal;
- vi. Os coelhos vivem indefinidamente. Isto é, implica dizer que há taxa nula de mortalidade no modelo de Fibonacci.

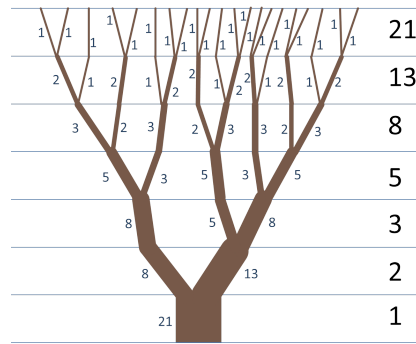


Figura 8: Fibonacci em plantas (Fonte: (SETZER, 2020))

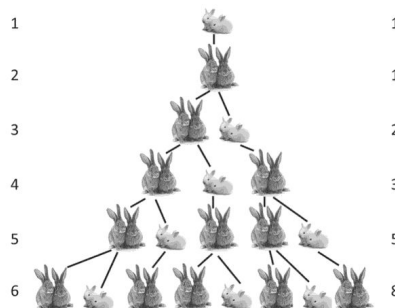


Figura 9: Fibonacci em coelhos (Fonte: (SETZER, 2020))

Exemplo 1.5.2

Exemplo de uma sequência (órbita ou trajetória) do crescimento populacional de casais de coelhos. Números de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..., n

- Passo 1:** Como se comporta a trajetória (órbita) do crescimento da população de coelhos para n grande?

Esta pergunta é fundamental para administrar os recursos tais como alimentação (ração e água), despesas com tratamento veterinário, espaço de confinamento entre outras variáveis. É uma aplicação interessante da matemática em biologia e modelagem de populações. Em modelagem matemática são construídos modelos como este, que prevê o crescimento populacional de uma espécie de coelhos. O modelo pode ser interessante se competir com predadores como por exemplo a raposa ou a onça.

- Passo 2:** Estudo do caso por equação de diferenças entre um estado e o próximo.
- Passo 3:** Formulação do modelo matemático correspondente.

Fórmula 1.5.1: Clássico modelo de Fibonacci - equação de diferença de segunda ordem

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1},$$

A equação pode ser reescrita como $x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$, sujeito às condições iniciais $(x_0 = 0)$, $x_1 = x_2 = 1$ para $n \geq 3$, tal que $n \in \mathbb{Z}^+$.

4. Passo 4: Resolução do modelo.

Neste caso, para modelar matematicamente o crescimento populacional de casais de coelhos, sabe-se que inicialmente, o casal jovem, não gera novos casais de coelhos ($x_0 = 0$), e no primeiro mês, há um novo casal de filhotes ($x_1 = 1$). A partir do segundo mês em diante, o número de casais de coelhos em um determinado mês (x_n) é igual à soma do número total de casais do mês anterior (x_{n-1}) e do número total de casais do mês anterior ao anterior (x_{n-2}). A resolução para encontrar a função x_n para a equação de diferenças associada $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ será retomada no capítulo seguinte.

1.5.3 PROPRIEDADE IMEDIATA DE FIBONACCI

Construindo os iterados para $n \in \mathbb{Z}^+$ da equação de diferenças associada $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, tem-se:

$n = 0,$	x_2	-	x_1	-	x_0	= 0	Cond. iniciais	$x_0 = 0$
$n = 1,$	x_3	-	x_2	-	x_1	= 0	Cond. iniciais	$x_1 = x_2 = 1$
$n = 2,$	x_4	-	x_3	-	x_2	= 0		
$\vdots,$	\vdots	-	\vdots	-	\vdots	= \vdots		\vdots
$n = k - 2,$	x_k	-	x_{k-1}	-	x_{k-2}	= 0		
$n = k - 1,$	x_{k+1}	-	x_k	-	x_{k-1}	= 0		
$n = k,$	x_{k+2}	-	x_{k+1}	-	x_k	= 0		
Somando todas linhas:	Col. 1	-	Col. 2	-	Col. 3	= 0		
	$\sum_{h=2}^{k+2} x_h$	-	$\sum_{i=1}^{k+1} x_i$	-	$\sum_{j=0}^k x_j$	= 0		

Note que $\sum_{h=2}^{k+2} x_h - \sum_{i=1}^{k+1} x_i = x_{k+2} - x_1$, daí $\sum_{j=0}^k x_j = x_{k+2} - x_1$.

Fórmula 1.5.2: Propriedade da Soma da população de n casais de coelhos (Fibonacci)

$$\therefore \sum_{i=0}^n x_i = x_{n+2} - 1$$

Assim, a soma dos casais de coelhos no instante i (respectivamente a soma da série), é dada por dois termos deslocados da própria sequência menos a unidade. Uma importante propriedade no estudo da órbita populacional de Fibonacci.

5. **Passo 5:** Resposta à pergunta inicial.

Essa abordagem é uma maneira de modelar o crescimento populacional usando uma sequência recursiva. Posteriormente veremos como obter uma fórmula fechada para a recorrência de Fibonacci, resolvendo este modelo populacional de coelhos.

Exemplo 1.5.3

modelagem matemática para a queda de uma bola

Larga-se uma bola de 10 metros de altura, e a cada choque com o solo a bola recupera metade de sua altura. Determine:

- i. Distância total percorrida pela bola
- ii. O tempo gasto até a bola parar

- i. Distância total percorrida pela bola

Como já é sabido da física, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. $v(t) = -10 \cdot t \implies y(t) = -5 \cdot t^2 + 10$

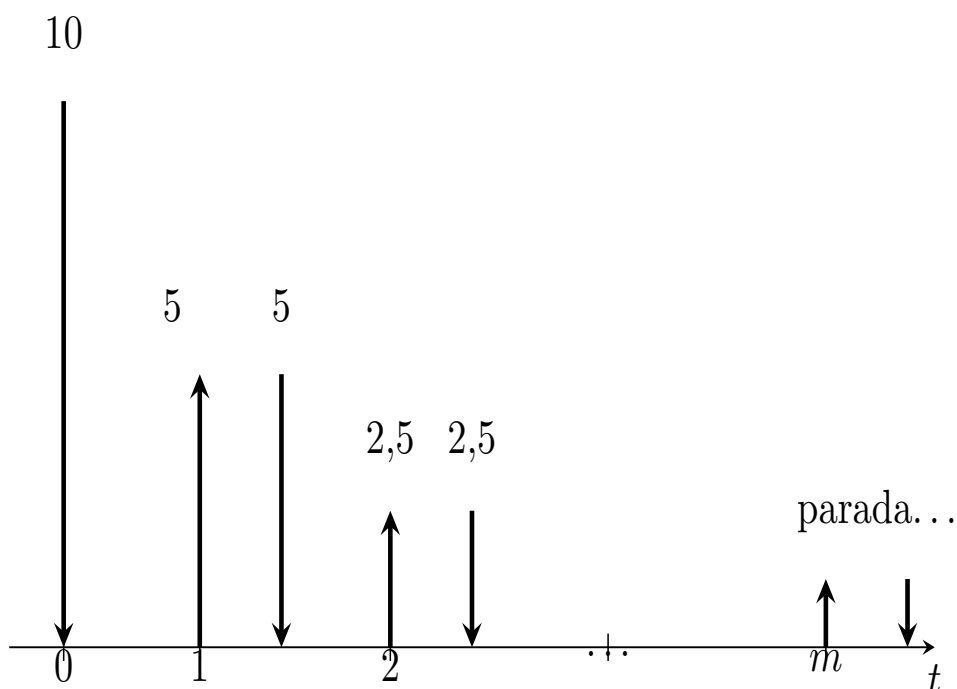


Figura 10: Sequência de movimentos da bola.

Para resolvermos, basta observar a tabela abaixo de iterações:

Valor para t	$f(t) = \frac{1}{2^{t-1}} \cdot \underbrace{y_0}_{\text{valor inicial}=10}$
$t = 0$	$y(1) = 10 \cdot \frac{1}{2^0} = 10$
$t = 1$	$y(2) = y_0 \cdot \frac{1}{2^1} = 5$
$t = 3$	$y(3) = y_0 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
...	...
$t = m$	$y(m) = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot y_0$

Tabela 8: Tabela da bola largada de 10 metros de altura - recursões

A distância total percorrida pela bola é a Soma definida em A.6.1 na página 240:

$$S_{P.G} = 10 + \underbrace{\left(10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \dots\right)}_{\text{a partir daqui começa a PG}} = 10 + 10 \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Passando o limite dos dois lados da somação para ∞ , pois queremos iterar y até a bola parar:

$$10 + \sum_{k=0}^{\infty} 10 \cdot \frac{1}{2^k} = 10 + 10 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 10 + 20 = 30 \text{ metros} \quad (1.1)$$

ii. O tempo gasto até a bola parar Sabe-se da física que em queda livre é dado pela equação:

$$t = \sqrt{\frac{2 \times y_k}{g}}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (1.2)$$

Valor para y	$t = \sqrt{\frac{2 \times y_k}{g}}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$y_0 = 10$	$t(y_0) = \sqrt{\frac{2 \times 10}{10}} = \sqrt{2}$
$y(1) = 10$	$t(y_1) = \sqrt{\frac{2 \times 10}{10}} = \sqrt{2}$
$y(3) = 5$	$t(y_3) = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10}} = \sqrt{1}$
...	...
$y(m)$	$y(m) = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2^m}} = 2^{1-m} \cdot \frac{\sqrt{2^m}}{2^m}$

Tabela 9: Tabela da bola largada de 10 metros de altura - tempo computado

O tempo gasto total será de:

$$\sqrt{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k = \sqrt{2} + \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \approx 6,24 \text{ seg.} \quad (1.3)$$

1.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente, reconhecemos que a visão de um mundo completamente previsível, conforme proposto por Newton, não se sustenta mais. Mesmo em sistemas simples, como um pêndulo forçado, onde conhecemos as regras precisamente e não há elementos aleatórios, a dinâmica caótica pode surgir, tornando a previsão a longo prazo impossível. Isso foi percebido em várias áreas da ciência a partir da década de 1970, impulsionado tanto pela metáfora meteorológica de Lorenz quanto por estudos de equações de diferença não lineares. Trabalhos subsequentes exploraram a possibilidade de regras simples gerarem trajetórias dinâmicas que parecem aleatórias, questionando a natureza dos movimentos em mercados financeiros e populações naturais.

Neste capítulo apresentamos os sistemas dinâmicos discretos através de exemplos didáticos como o estudo de uma população de coelhos e a queda livre de corpos. O pif, equações de diferenças e o estado estacionário de um sistema dinâmico discreto. A seguir iremos detalhar a análise dos pontos fixos, conceitos de equilíbrio e estabilidade, que é fundamental para entender o comportamento de um sistema dinâmico.

Parte II

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: TERMINOLOGIAS, DEFINIÇÕES, APLICAÇÕES, MODELAGEM MATEMÁTICA E DINÂMICA NÃO HIPERBÓLICA

2 DEFINIÇÕES - SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Neste capítulo, exploraremos os conceitos básicos dos sistemas dinâmicos discretos, suas propriedades e aplicações.

(LORENZ, 2023), o conhecido “efeito borboleta”, vide figura 11 na página 29, decorre das implicações do mundo real do atrator de Lorenz, ou seja, em um sistema físico caótico, na ausência de conhecimento perfeito das condições iniciais (mesmo a minúscula perturbação do ar devido a uma borboleta batendo suas asas), nossa capacidade de prever seu curso a longo prazo sempre falhará.

Isso ressalta que os sistemas físicos podem ser completamente determinísticos e, ainda assim, inerentemente imprevisíveis.

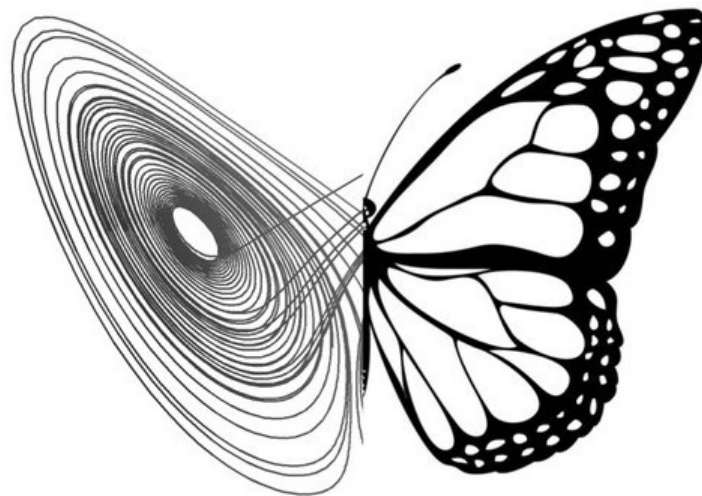


Figura 11: Efeito borboleta de Lorenz.

Fonte: <<https://extendednews.com/attractors-the-platform-for-creating-new-futures-in-chaotic-systems/>>

Segundo (ALLIGOOD et al., 1996) o cientista inglês, Isaac Newton, modelou o movimento de sistemas físicos com equações. Ele criou o cálculo diferencial e integral em paralelo ao cientista alemão, Gottfried Wilhelm Leibniz. As equações fundamentais do movimento envolvem velocidades e acelerações.

A lei da gravitação universal foi sua obra prima: a atração gravitacional dos corpos. Ele demonstrou que o movimento observado dos planetas poderia ser explicado

assumindo que é uma atração gravitacional entre quaisquer dois objetos, uma força que é proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

As órbitas circulares, elípticas e parabólicas da astronomia, não eram mais determinantes fundamentais do movimento, mas aproximações das equações de diferenças. Seus métodos são usados na modelagem dos movimentos e mudanças em todas as áreas da ciência.

2.0.1 PRÉ REQUISITOS

- O capítulo 1 desta dissertação na página 3.
- Teoria dos conjuntos.
- Álgebra linear (Matrizes e Determinantes).

2.0.2 OBJETIVOS

- Definir elementos básicos dos sistemas dinâmicos discretos.
- Fornecer uma introdução abrangente aos sistemas dinâmicos discretos, abordando desde os conceitos básicos, até aplicações práticas. Ao final da leitura, você terá uma compreensão sólida e poderá aplicar esse conhecimento em suas próprias pesquisas e projetos.

2.0.3 JUSTIFICATIVA

Os sistemas dinâmicos discretos desempenham um papel crucial em várias áreas da ciência e da matemática. Compreender esses sistemas é essencial para modelar e prever o comportamento de fenômenos complexos, desde a propagação de doenças até a dinâmica de populações. Além disso, eles têm aplicações práticas na otimização de processos, controle de sistemas e análise de algoritmos. Portanto, é necessário compreender os fundamentos desses sistemas e suas implicações em diferentes contextos.

2.1 EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

As equações de diferenças podem ser classificadas em **autônomas** e **não-autônomas**. Além disso, possuem ordem, tal como primeira ordem, segunda ordem, etc. Podem ser lineares ou não-lineares. Uma única simples equação pode governar o fenômeno matemático modelado, ou um sistema de equações a diferenças. Neste último caso a abordagem matricial é empregada.

Lorenz, usou 9 equações a 9 incógnitas em seu modelo matemático de previsão climática. Posteriormente, conseguiu reduzi-lo para 3 equações a 3 incógnitas. No artigo (LORENZ, 1964) ele utiliza apenas uma equação a diferenças simples de primeira ordem não linear, do tipo quadrática, mais especificamente, uma equação logística, que governa o fenômeno do clima.

Definição 2.1

Dada uma função $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma **equação de diferenças de primeira ordem**, cuja expressão é da forma $x_{n+1} = g(n, x_n) = \hat{g}(x_n)$ definida como $\hat{g} : A \mapsto B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, é chamada autônoma ou invariante no domínio do tempo, enquanto que $x_{n+1} = g(n, x_n)$, é chamada não-autônoma ou variante no domínio do tempo.

Vejamos alguns exemplos:

- (i) $x(n+1) = 3 \cdot x(n) + 1 \implies \hat{g}(x) = 3 \cdot x + 1$
- (ii) $x(n+2) = 3 \cdot x(n+1) + 1 \implies \hat{g}(x) = 3 \cdot x + 1$
- (iii) $x(n+1) = 3^n \cdot x(n) + n \implies g(x, n) = 3^n \cdot x + n$
- (iv) $x(n+2) = 3^{n+1} \cdot x(n+1) + 1 \implies g(x, n) = 3^n \cdot x + n$

Por exemplo, as equações (i) e (ii) são autônomas, enquanto que as equações (iii) e (iv) são não-autônomas com $n \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

Segundo (GIORDANO et al., 2013, p. 18) as soluções para sistemas dinâmicos envolvem certos tipos padrões. Em alguns casos, o comportamento previsto é caracterizado pela estrutura matemática do sistema. Em outros casos, vemos variações bruscas no comportamento, causado apenas por pequenas mudanças (mesmo tão pequenas quanto se queira) nos valores iniciais do equação de diferenças.

2.1.1 EXPANSÃO EM SÉRIES DE TAYLOR

A expansão em séries de Taylor, vide demonstração no apêndice deste trabalho B.0.1 na página 245, pode ser utilizada em sistemas dinâmicos discretos, como equações a diferenças, para aproximar o comportamento de uma função em torno de um ponto específico. Essa técnica é útil para a análise local do comportamento do sistema próximo a um ponto de equilíbrio ou ponto fixo.

Em sistemas dinâmicos discretos, as equações a diferenças descrevem como uma variável evolui ao longo do tempo em passos discretos. A expansão em séries de Taylor pode ser aplicada para aproximar a função que descreve a evolução do sistema em torno de um ponto fixo. A ideia é semelhante à aplicação de séries de Taylor em equações diferenciais ordinárias contínuas.

Por exemplo, considere uma equação a diferenças simples, equação linear de primeira ordem autônoma, do tipo:

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

onde a função g , dada por $g : A \rightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, é considerada suave descreve a dinâmica de certo sistema estudado. Se x^* é um ponto fixo, ou seja, $g(x^*) = x^*$, então a expansão em séries de Taylor para aproximar a função $g(x)$ em torno desse ponto fixo, é dada por:

$$g(x) = g(x^*) + g'(x^*) \cdot (x - x^*) + \mathcal{O}\mathcal{G}^2 \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{O}\mathcal{G}$ denota termos de ordem superior. Essa expansão pode ser útil para entender o comportamento local do sistema próximo ao ponto fixo. A partir dessa expansão, é possível obter informações sobre estabilidade, bifurcações e outras propriedades da equação de diferenças discreto.

A expansão em série de Taylor é uma ferramenta matemática poderosa para aproximar funções em termos de suas derivadas de ordens superiores. Essa técnica é amplamente utilizada na análise de sistemas dinâmicos discretos, pois permite uma representação aproximada da função em torno de um ponto fixo. A expansão em séries de Taylor envolve a expressão da função como uma série infinita de termos, onde cada termo é uma função de x . A igualdade entre a função original e a série de Taylor implica que, ao calcularmos a série com um número crescente de termos, nos aproximamos cada vez mais da função original. Essa técnica é especialmente útil para analisar a estabilidade dos pontos fixos e prever o comportamento do sistema ao longo do tempo.

Seja f uma função qualquer, o teorema de Taylor B.0.1 garante sua expansão em séries de Taylor, se x é tomado a distância menor de x^* do que o raio de convergência R da série, isto é, $|x - x^*| < R$.

2.2 COMPORTAMENTO DE PONTOS FIXOS

Existem diferentes critérios para descrever o comportamento dos sistemas dinâmicos discretos, como estabilidade, instabilidade, convergência, divergência, sensibilidade às condições iniciais e caos. Um ponto fixo é considerado estável se, para quaisquer condições iniciais próximas, as soluções permanecerem próximas umas das outras ao longo do tempo. Por outro lado, um ponto fixo é considerado instável se as soluções se afastarem umas das outras. Pontos fixos, pontos de equilíbrio ou pontos estacionários são nomenclaturas comuns que se referem ao mesmo objeto.

A convergência ocorre quando as soluções do sistema convergem para um ponto fixo ou uma órbita periódica, enquanto a divergência ocorre quando as soluções se afastam do ponto fixo ou da órbita periódica.

Para uma dada condição inicial x_0 , observado o ponto fixo x^* neste intervalo, temos as vizinhanças $0 \leq x_0 < x^* + \delta \iff |x_0 - x^*| < \delta$.

Definição 2.2

Definição: Seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ uma função e $x^* \in \mathcal{D}(f)$ ponto fixo de f . Dizemos que x^* é estável se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x_0 - x^*| < \delta \implies |f^n(x_0) - x^*| < \epsilon \forall n > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Se x^* não é estável, então é chamado de instável. O ponto x^* é dito **Super-Atrator**, se existe $\eta > 0$ tal que:

$$|x_0 - x^*| < \eta \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

2.2.1 CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS FIXOS

Começaremos com um exemplo de simples compreensão, para entender como são classificados os pontos fixos associado a uma função f .

Exemplo 2.2.1

(Iteração por uma função linear) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot x$ com $a \neq 1$ e considere a equação de diferenças dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Essa equação tem único ponto fixo na origem. Esse ponto fixo é repulsor se $|a| > 1$ (respectivamente atrator se $|a| < 1$).

Solução: Quando $a \neq 1$, a origem $x^* = 0$ é o único ponto fixo de f , pois se $x^* \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de f então:

$$f(x^*) = x^*,$$

Daí, temos que:

$$a \cdot x^* = x^* \Leftrightarrow x^* \cdot (a - 1) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \text{ ou } x^* = 0$$

Suponha $|a| > 1$ e seja $x_0 \neq 0$. Vamos mostrar que a órbita de x_0 move-se para longe de $x^* = 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = a \cdot x_0, \\ x_2 &= f^2(x_0) = f(x_1) = a^2 \cdot x_0, \\ \vdots &= \vdots = \vdots = \vdots, \\ x_n &= f^n(x_0) = f(x_{n-1}) = a^n \cdot x_0, \end{aligned}$$

onde a expressão na última igualdade pode ser obtida para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução sobre n .

Assim,

$$|x_n| = |f^n(x_0)| = |a|^n \cdot |x_0| \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

De modo análogo, se $|a| < 1$ tem-se:

$$|x_n| = |f^n(x_0)| = |a|^n \cdot |x_0| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

Concluindo que a órbita $\mathcal{O}(x_0) \rightarrow \infty$ se $|a| > 1$ (respectivamente $\mathcal{O}(x_0) \rightarrow 0$ se $|a| < 1$). \square

Observação: Note que nem sempre é fácil obter f^n como neste exemplo. Em casos mais gerais, utilizaremos o teorema dos multiplicadores (Obtido da regra da cadeia) 2.5 na página 40. Observe a figura 12 na página 35 mostrando quando o ponto fixo x^* é **instável**, e também note a figura 13 na página 36 mostrando quando o ponto

fixo x^* é **estável**. A questão da estabilidade de f está ligada à própria característica topológica do mapa funcional.

instabilidade para $|a| > 1$

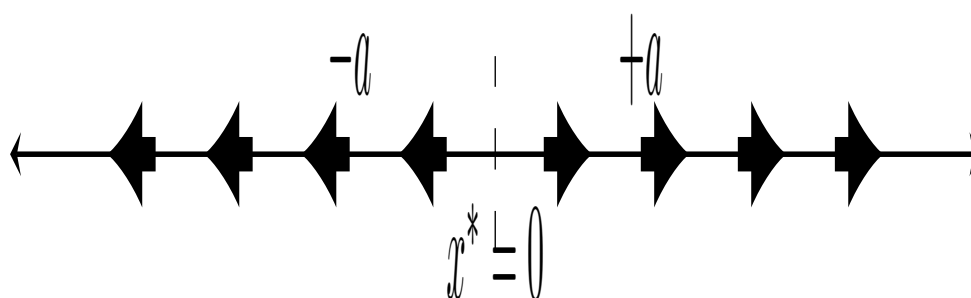


Figura 12: Diagrama de fase mostrando como os iterados de $x_0 \neq 0$ se afastam de x^* quando $|a| > 1$ (instabilidade).

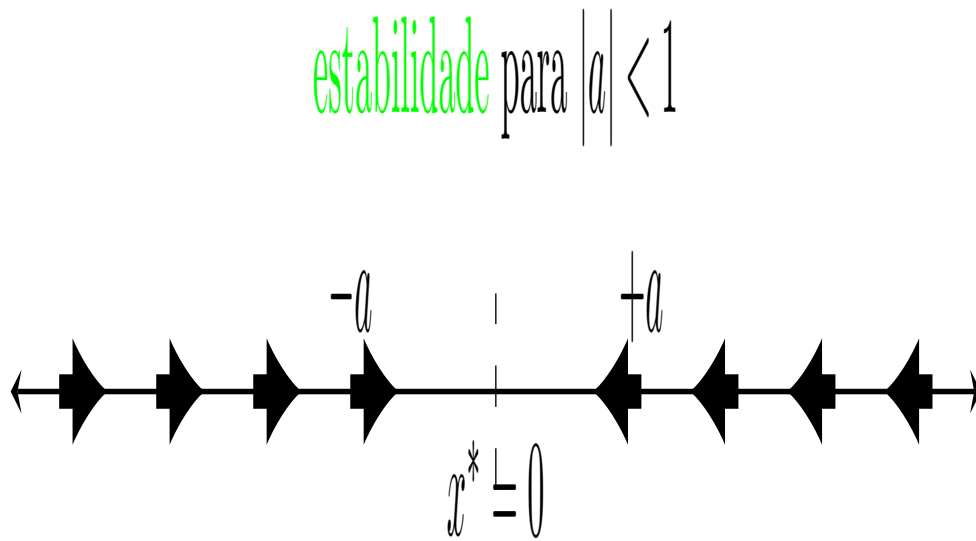


Figura 13: Diagrama de fase mostrando como os iterados de $x_0 \neq 0$ se afastam de x^* quando $|a| < 1$ (estabilidade).

É sabido, do cálculo diferencial e integral, que o coeficiente angular de uma função afim $f(x) = a \cdot x + b$, com coeficientes a e $b \in \mathbb{R}^*$ é a derivada da função f , ou seja, $f'(x) = a$.

Logo, analisar $f'(x_0) = a$ e verificar se o módulo $|f'(x_0)| > 1$ indica nesse caso a instabilidade do ponto fixo $x_0 = a$.

Analisar $f'(x_0) = a$ e verificar se o módulo $|f'(x_0)| < 1$ indica nesse caso a estabilidade do ponto fixo $x_0 = a$.

Ponto fixo da função afim

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$ com $\alpha \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Considere a equações de diferenças discreta dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Essa equação tem ponto fixo

$$\begin{aligned} g(x^*) = x^* &\Leftrightarrow \alpha \cdot x^* + \beta = x^* \\ &\Leftrightarrow x^* = \frac{\beta}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Esse ponto fixo é repulsor se $|\alpha| > 1$ (respectivamente atrator se $|\alpha| < 1$).

Graficamente, pontos fixos são coordenadas x^* onde o gráfico de uma função $f(x)$ intercepta a reta diagonal $y = x$.

Os exemplos 2.2.1 e 2.2.2 conduzem a uma definição formal de classificação dos pontos fixos logo a seguir.

Definição 2.3 Classificação dos pontos fixos hiperbólicos

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave continuamente diferenciável e suponha que $x^* \in \mathbb{R}$ seja um ponto fixo de f . Então classificamos x^* como:

- (i) atrator, se $|f'(x^*)| < 1$,
- (ii) super-atrator, se $f'(x^*) = 0$,
- (iii) repulsor, se $|f'(x^*)| > 1$,
- (iv) não-hiperbólico, se $|f'(x^*)| = 1$.

No caso não-hiperbólico não é possível estudar a estabilidade do equilíbrio apenas com a derivada primeira. Aprofundaremos este assunto posteriormente no capítulo 5 na página 153 desta dissertação.

Existe um fenômeno que é exclusivo das equações de diferenças e não pode ocorrer em equações diferenciais suaves. É possível, em equações de diferenças, que uma condição inicial possa não ser um ponto fixo, mas pode atingir um desses pontos, após um número finito de iterações. Em outras palavras, um estado de não equilíbrio pode ir para um estado de equilíbrio em um tempo finito. Isso leva à seguinte definição:

Definição 2.4

Sejam $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $\bar{x} \in \mathcal{D}(f)$ e $x^* \in \mathcal{D}(f)$ ponto fixo de f . Se existir um número r inteiro não negativo, isto é, $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^i(\bar{x}) \neq x^*$, para $i = \{0, 1, 2, 3, \dots, r-1\}$ e $f^r(\bar{x}) = x^*$, então \bar{x} é dito Ponto Fixo Eventual de f .

Em outras palavras acontece o seguinte cenário:

$$\begin{array}{cccccccccccc} i: & 0 & , & 1 & , & 2 & , & 3 & , & \dots & , & r-1 & , & r & , & r+1 \\ \mathcal{O}(\bar{x}): & \bar{x} & \rightarrow & f(\bar{x}) & \rightarrow & f^2(\bar{x}) & \rightarrow & f^3(\bar{x}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & f^{r-1}(\bar{x}) & \rightarrow & f^r(\bar{x}) = x^* & \rightarrow & x^* \end{array}$$

Proposição 2.1

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e $x^* \in \mathbb{R}$, ponto fixo de f ($f(x^*) = x^*$).

- i) Se x^* é um ponto fixo atrator ou super-atrator de f , então existe $\epsilon > 0$ tal que a órbita para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x - x^*| < \epsilon$ tende a x^* quando n cresce.
- ii) Se x^* é um ponto fixo repulsor de f , então existe $\epsilon > 0$ tal que a órbita de um ponto x sob a iteração de f se afasta de x^* para $|x - x^*| > \epsilon$.

Prova

Provaremos a primeira parte, a segunda parte é semelhante. Como $|f'(x^*)| < 1$ e f' é contínua, conforme definição 2.3 na página 37, podemos escolher $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira e um número positivo $R < 1$ tal que $|f'(x)| < R < 1 \forall x$ satisfazendo $|x - x^*| < \epsilon$.

Então, dado x satisfazendo $|x - x^*| < \epsilon$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médioⁱ, para obter um número $c \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$, tal que:

$$|f'(c)| = \frac{|f(x) - f(x^*)|}{|x - x^*|}.$$

Mas já sabemos que x^* é ponto fixo de $f(x)$, ou seja, $f(x^*) = x^*$. Daí:

$$|f'(c)| = \frac{|f(x) - x^*|}{|x - x^*|} \implies |f(x) - x^*| = |f'(c)| \cdot |x - x^*| = |f(x) - x^*| < R \cdot |x - x^*|.$$

Por indução, é possível mostrar que:

$$|f^n(x) - f^n(x^*)| = |f^n(x) - x^*| < R^n \cdot |x - x^*|.$$

ⁱ O TVM é um resultado clássico do cálculo diferencial e integral que será utilizado ao longo deste trabalho. Por se tratar de um resultado amplamente conhecido, sua demonstração será omitida.

Como $R < 1$, segue que $f^n(x) \rightarrow x^*$, quando $n \rightarrow +\infty$.

2.2.2 PONTOS PERIÓDICOS

Considere a equação a diferenças:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Dizemos que um ponto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ é um ponto periódico, de período $p > 1$ quando ocorre:

$$\begin{aligned} x_0 &\in \mathcal{D}(f) && , \\ f(x_0) &= x_1 \neq x_0, \\ f \circ f(x_0) &= f(x_1) \neq f(x_0), \\ f^2(x_0) &= x_2 \neq x_0, \\ \vdots &= \vdots \neq \vdots, \\ f^{p-1}(x_0) &= x_{p-1} \neq x_0, \\ f^p(x_0) &= x_p = x_0. \end{aligned}$$

Ou seja, neste caso, a órbita do ponto x_0 , $\mathcal{O}(x_0)$, é dada por:

$$\underbrace{x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{p-1}}_{\text{Bloco com } p \text{ elementos distintos que se repetem em } \mathcal{O}(x_0)} \rightarrow x_0 \rightarrow \dots$$

Note que, tomando $g(x) = f^p(x)$, segue que o ponto p -periódico de f é um ponto fixo de g , isto é, $g(x_0) = x_0$. Na verdade, todos os pontos x_i , com $i = \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$ são pontos fixos de g .

Desta forma, podemos estudar questões de estabilidade ou instabilidade da órbita periódica de f a partir da estabilidade ou instabilidade dos pontos fixos x_i de g .

Observe que, segue da regra da cadeia que:

$$g'(x_0) = f'(x_{p-1}) \cdot f'(x_{p-2}) \cdot \dots \cdot f'(x_0).$$

Também, segue da regra da cadeia, que vale:

$$g'(x_0) = g'(x_1) = g'(x_2) = \dots = g'(x_{p-1}),$$

ou seja, a derivada de g em todos os pontos x_0, x_1, \dots, x_{p-1} , coincidem numericamente.

Assim, a estabilidade da órbita periódica será dada pela estabilidade de qualquer um dos pontos fixos x_0, x_1, \dots, x_{p-1} de g .

Desta forma, podemos classificar os pontos periódicos de f de acordo com a definição a seguir.

Definição 2.5

Seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ uma função continuamente diferenciável e $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ um ponto p -periódico de f , isto é, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$, \dots . Então dizemos que a órbita p -periódica, $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{p-1}$ é:

- atrator, se $|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_2) \cdot \dots \cdot f'(x_{p-1})| < 1$,
- super-atrator, se $|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_2) \cdot \dots \cdot f'(x_{p-1})| = 0$,
- repulsor, se $|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_2) \cdot \dots \cdot f'(x_{p-1})| > 1$,
- neutro, se $|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_2) \cdot \dots \cdot f'(x_{p-1})| = 1$.

2.2.3 EXEMPLOS

A seguir, veremos exemplos de pontos fixos hiperbólicos, não-hiperbólicos e órbitas periódicas. Será visto como a dinâmica não-hiperbólica se difere das demais. Basicamente as diferenças na dinâmica são:

- i. Pontos Fixos Hiperbólicos: A dinâmica é previsível, estável ou instável (depende da derivada). Sistemas com pontos fixos hiperbólicos têm comportamento bem estruturado.
- ii. Pontos Fixos Não-Hiperbólicos: São mais complicados. Podem ocorrer bifurcações, onde pequenas mudanças podem resultar em grandes alterações no comportamento do sistema. A análise linear é insuficiente para descrever a dinâmica.
- iii. Órbitas Periódicas: Como vimos anteriormente, o seu estudo se reduz a estudar pontos fixos de uma aplicação auxiliar ($f^p(x)$). Desta forma, os mesmos cenários descritos para pontos fixos (em (i) e (ii)) estão presentes como pode ser visto nos exemplos 2.2.3.1 e 2.2.3.2 nas páginas 46 e 47.

2.2.3.1 EXEMPLOS DE PONTOS FIXOS HIPERBÓLICOS

Nos exemplos a seguir, apresentamos vários possíveis cenários de sistemas discretos onde a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que o define admite ponto fixo x^* hiperbólico, ou seja, $|f'(x^*)| \neq 1$.

2.2.3 Exemplo Pontos fixos da cúbica

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função definida por $f(x) = x^3$. A função f admite três pontos fixos dados por $x^* = \{-1, 0, 1\}$. Além disso,

$$x^* = \begin{cases} -1, & \text{é ponto fixo repulsor, já que } f'(-1) > 1, \\ 0, & \text{é ponto fixo Super-atrator, já que } f'(0) = 0, \\ 1, & \text{é ponto fixo repulsor, já que } f'(1) > 1. \end{cases}$$

Solução: A figura 15 apresenta as posições relativas de $f(x) = x^3$ e $y = x$. Desta forma é fácil ver que para $x \in (0, 1)$, então $f(x) < y \implies x^3 < x$. Além disso, a derivada de f é $f'(x) = 3 \cdot x^2$, assim temos:

$$\begin{aligned} x \in (0, 1) &\implies f(x) < x, \\ 0 < x_1 &= f(x_0) = x_0^3 < x_0, \\ x_1 > x_2 &= f(x_1) = x_1^3 < x_1, \\ \vdots > \vdots &= \vdots = \vdots, \\ x_n > x_{n+1} &= f(x_n) = x_n^3 < x_n. \end{aligned}$$

Além disso, para encontrar os pontos fixos de f , basta resolver $f(x^*) = x^*$. Daí:

$$x^{*3} = x^* \Leftrightarrow x^{*3} - x^* = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}.$$

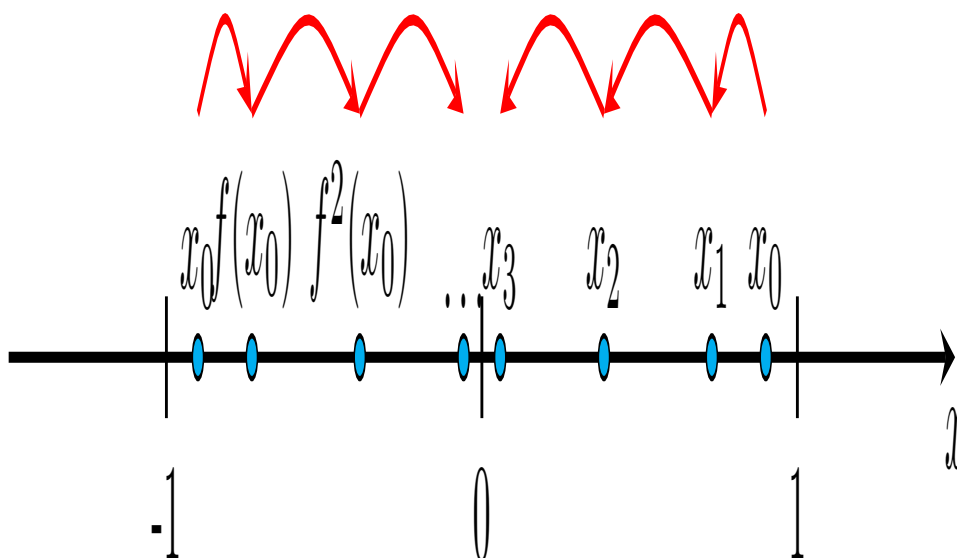


Figura 14: Iterados da cúbica

Portanto, existem três pontos fixos: -1 , 0 , 1 . Também como $f'(x) = 3 \cdot x^2$ temos:

$$f'(x^*) = \begin{cases} f'(-1) = 3, & \text{é ponto fixo hiperbólico repulsor, já que } f'(-1) > 1, \\ f'(0) = 0, & \text{é ponto fixo hiperbólico Super-atrator, já que } f'(0) = 0, \\ f'(1) = 3, & \text{é ponto fixo hiperbólico repulsor, já que } f'(1) > 1. \end{cases}$$

É fácil ver que para qualquer condição inicial $|x_0| < 1$, a órbita sob iteração da cúbica será atratora.

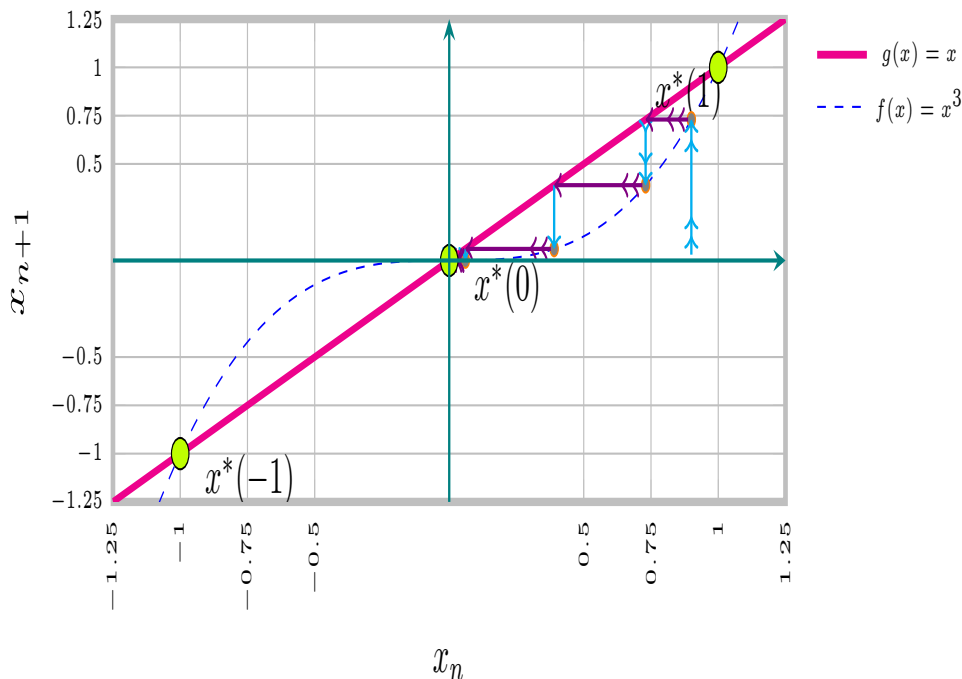


Figura 15: Cobweb $x_0 = 0,9$ para 5 iterações. Função cúbica e seus pontos fixos

É fácil ver que para qualquer condição inicial $|x_0| > 1$, a órbita sob iteração da cúbica será repulsora.

Exemplo 2.2.4

Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $4,8 \cdot x^2 \cdot (1 - x)$ e a equação de diferenças associada dada por:

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

Essa equação admite três pontos fixos, **0** (super-atrator); **0,3** (repulsor) e **0,7** (atrator).

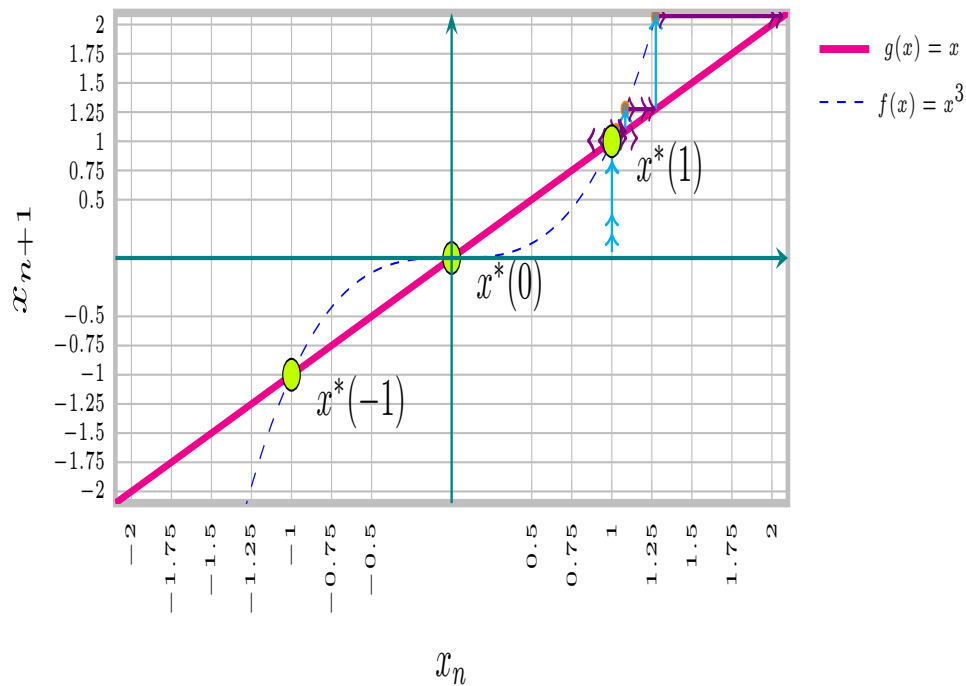


Figura 16: Cobweb $x_0 = 1,001$ para 6 iterações. Função cúbica e seus pontos fixos

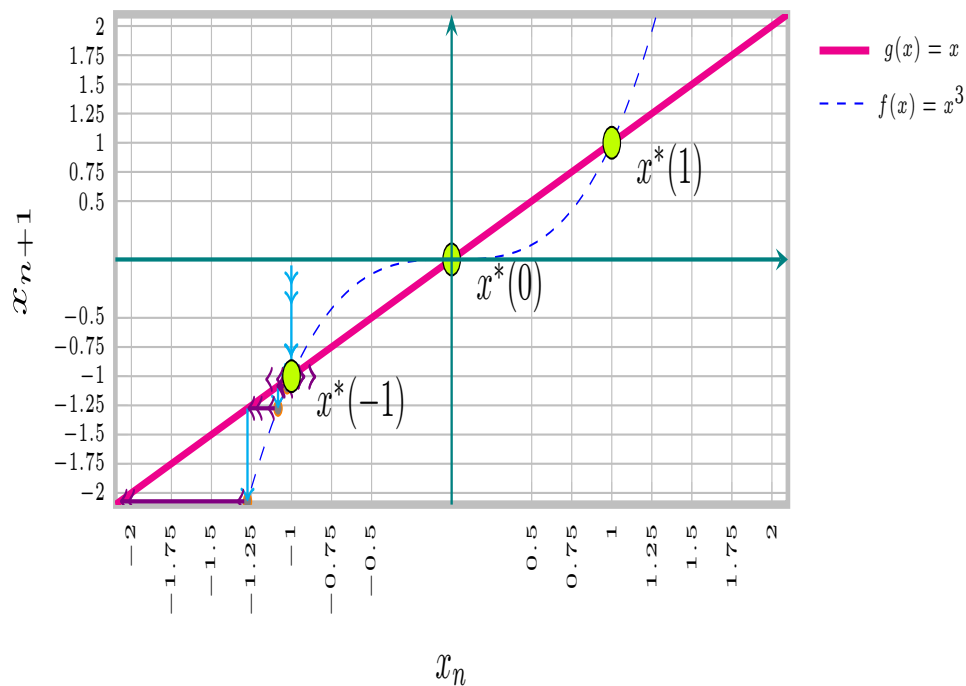


Figura 17: Cobweb $x_0 = -1,001$ para 6 iterações. Função cúbica e seus pontos fixos

Solução: Fazendo o gráfico no plano cartesiano da função $y = x$ e $g(x)$, cujos pontos de intersecção são os pontos fixos, da esquerda para a direita como visto na figura 18 na página 44, nesta ordem sucessivamente, eles são classificados como

super-atrator, repulsor e atrator.

Para encontrar os pontos fixos de g resolvemos:

$$g(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* \cdot (-4,8 \cdot x^{*2} + 4,8 \cdot x^* - 1) = 0.$$

Daí os pontos fixos são: $x^* = \{0; 0,3; 0,7\}$.

Além disso, conforme a definição 2.3 na página 37, calcula-se a derivada de g , ou seja, $g'(x) = 4,8 \cdot x \cdot (2 - 3 \cdot x)$ nos três pontos fixos, o que implica:

$$\begin{aligned} g'(0) &= 4,8 \cdot 0 \cdot (2 - 3 \cdot 0) = 0,000 \quad , \\ g'(0,3) &= 4,8 \cdot 0,3 \cdot (2 - 3 \cdot 0,3) = 1,600 \quad , \\ g'(0,7) &= 4,8 \cdot 0,7 \cdot (2 - 3 \cdot 0,7) = -0,336 \quad . \end{aligned}$$

Nas figuras 18, 19 e 20 a seguir, ilustramos a dinâmica do exemplo 2.2.3.1 na página 42.

Note que os pontos de intersecção de $f(x) = x$ com $g(x)$ representam os pontos fixos de g .

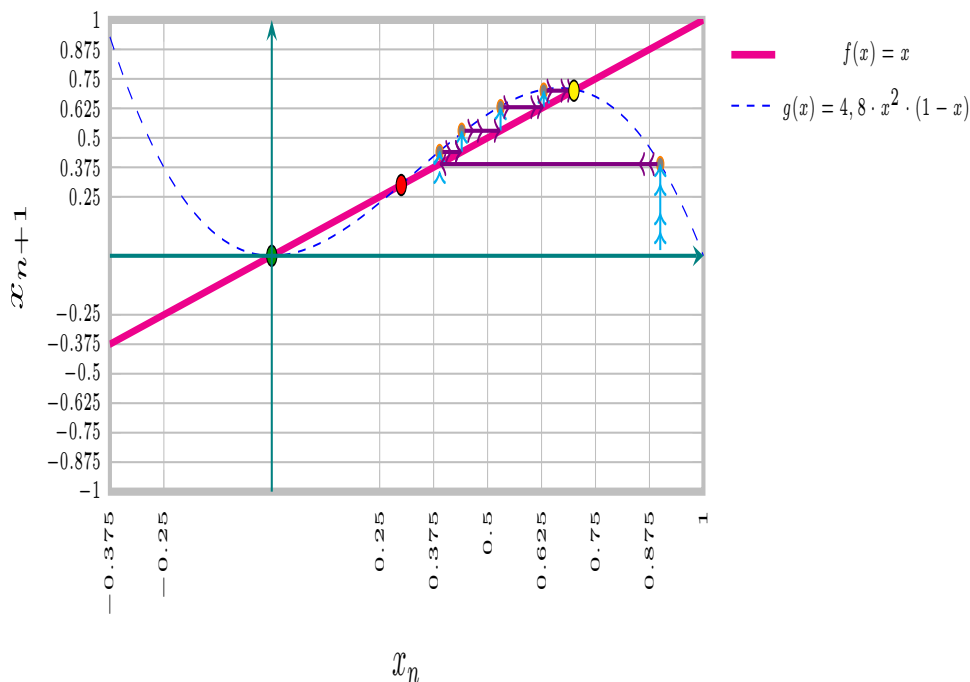


Figura 18: Cobweb $x_0 = 0,9$ para 5 iterações. Gráfico das funções $g(x) = 4,8 \cdot x^2 \cdot (1 - x)$ e $f(x) = x$.

Tome $x_0 < 0$. Devido à bacia de atração da característica dinâmica da curva, tem-se:

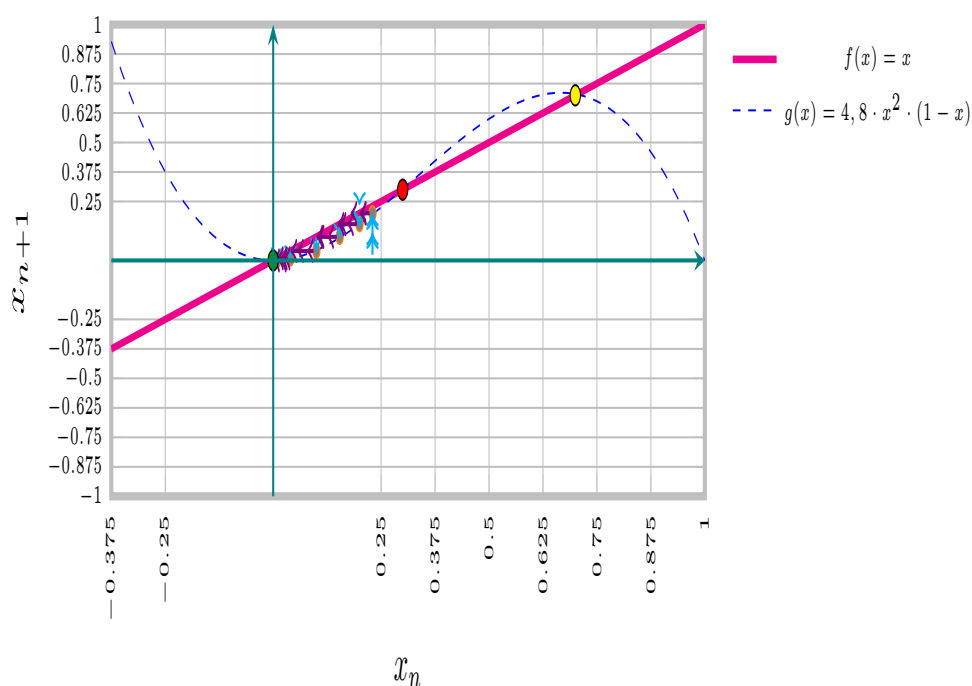


Figura 19: Cobweb $x_0 = 0,23$ para 6 iterações. Gráfico das funções $g(x) = 4,8 \cdot x^2 \cdot (1-x)$ e $f(x) = x$.

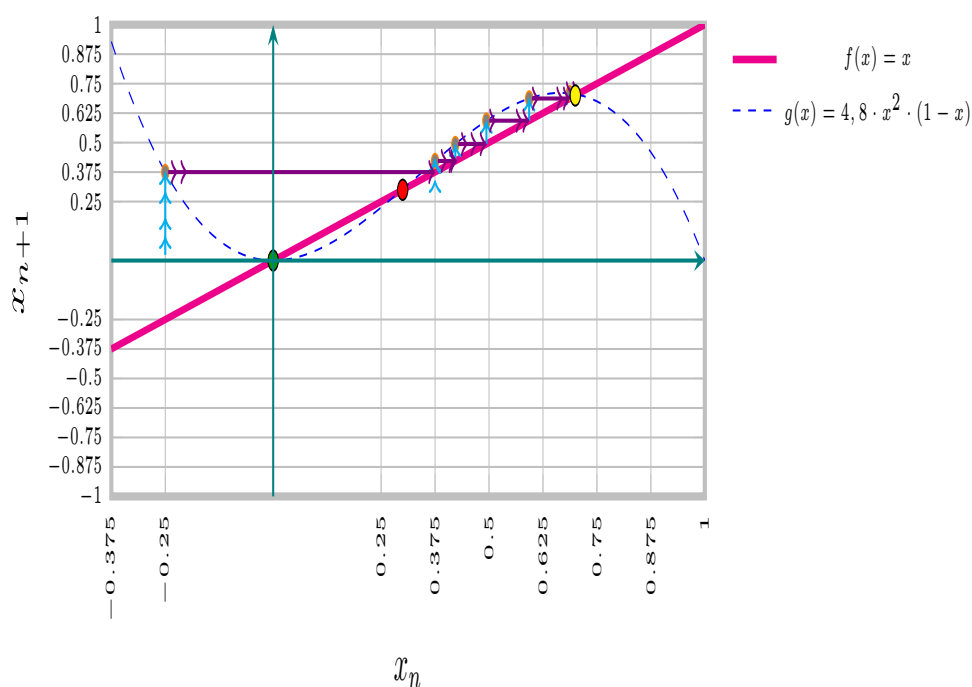


Figura 20: Cobweb $x_0 = -0,25$ para 6 iterações. Gráfico das funções $g(x) = 4,8 \cdot x^2 \cdot (1-x)$ e $f(x) = x$.

Exemplo 2.2.5

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ e considere a equação de diferenças discreta dada por $x_{n+1} = f(x_n)$. Essa equação tem pontos fixos, na origem (super-atrator) e em $x^* = 1$ (repulsor).

Note que o ponto zero é periódicoⁱⁱⁱ (2-periódico), e pode facilmente ser visto na seguinte órbita sob iteração da função $f(x) = x^2 - 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x_p) &= x_p \rightarrow (x_p)^2 - 1 \rightarrow ((x_p)^2 - 1)^2 - 1 \rightarrow (((x_p)^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1 \rightarrow \dots \\ \mathcal{O}(x_p) &= x_p \rightarrow f(x_p) \rightarrow f^2(x_p) \rightarrow f^3(x_p) \rightarrow f^4(x_p) \rightarrow \dots \\ \mathcal{O}(0) &= 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Para $x_p = 1$ ocorre uma órbita não periódica, mas logo após algumas iterações, sua órbita atinge uma órbita periódica. Isto nos leva a diferenciar o ponto periódico do ponto eventualmente periódico, definido a seguir:

Definição 2.6

Se um ponto x_p , $p \in \mathbb{N}$, de uma órbita $\mathcal{O}(x_n)$ não é periódico, mas x_n é periódico para algum $n \in \mathbb{Z}^+$, então x_p e sua órbita é chamado de eventualmente periódico.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x_p) &= x_p \rightarrow f(x_p) \rightarrow f^2(x_p) \rightarrow f^3(x_p) \rightarrow f^4(x_p) \rightarrow \dots \\ \mathcal{O}(1) &= 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

2.2.3.2 EXEMPLOS DE PONTOS FIXOS NÃO-HIPERBÓLICOS

Mais adiante, no capítulo 5 na página 153, dar-se-á o estudo detalhado dos casos de pontos fixos não-hiperbólicos, quando $|f'(x^*)| = 1$. No que se segue apresentamos alguns exemplos de possíveis pontos fixos não-hiperbólicos de dinâmicas discretas.

Exemplo 2.2.8

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x$ e considere a equação de diferenças discreta dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Essa equação tem único ponto fixo na origem. Esse ponto fixo é não-hiperbólico e estável.

Solução: O ponto fixo de f é $x^* = 0$, pois temos o gráfico de duas retas concorrentes, uma igual a x e outra igual a $-x$, que se interceptam apenas na origem.

Toma-se um valor inicial $x_0 \neq x^*$, por exemplo $x_0 = x^* + \epsilon$. Note o comportamento periódico e oscilatório da órbita sob iteração de f :

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, -x_0, +x_0, -x_0, +x_0, \dots\}$$

ⁱⁱⁱ De acordo com a definição 2.5 esta órbita periódica é super-atratora.

Ou seja, dado qualquer $x_0 \neq x^*$ a órbita de x_0 é 2-periódica. Em particular, segue da definição 2.2 na página 33 que $x^* = 0$ é estável.

Note que o sinal dos iterados, por indução sobre n , dependerá se temos um índice n par ou ímpar:

$$\begin{aligned} x_0 &= f^0(x_0) = x_0, \\ x_1 &= f(x_0) = -x_0, \\ x_2 &= f(x_1) = -(-x_0) = +x_0, \\ x_3 &= f(x_2) = -x_0, \\ \vdots &= \vdots = \vdots, \\ x_n &= f^{n-1}(x_0) = (-1)^n \cdot x_0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.9

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - e^{-x}$ e considere a equação de diferenças discreta definida por:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Esta equação admite único ponto fixo em $x^* = 0$, satisfazendo $f'(x^*) = 1$ (Não-hiperbólico e semi-estável à direita).

Solução: Como antes, para estudar os pontos fixos de f , devemos considerar a equação:

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x = 0$$

Ou seja, basta estudar os zeros da função $g(x) = f(x) - x$, isto é, $g(0) = 0$, daí $x^* = 0$ é ponto fixo de f . Agora, observe que,

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(x) = f'(x) - 1 = e^{-x} - 1.$$

$$g'(x) = \begin{cases} (i) & : e^{-x} - 1 < 0 \text{ se } x > 0 \text{ (logo } g \text{ é decrescente)} \\ (ii) & : e^{-x} - 1 > 0 \text{ se } x < 0 \text{ (logo } g \text{ é crescente)} \end{cases}$$

De (i) implica dizer que f não admite ponto fixo para $x > 0$ (pois $g(x) > 0 \forall x > 0$). De (ii), f também não admite ponto fixo para $x < 0$ (pois $g(x) < 0 \forall x < 0$).

Este ponto fixo é semi-estável, mais adiante, no capítulo 5 na página 153 este assunto será mais aprofundado. O ponto fixo é estável pela direita e instável pela esquerda, como pode ser visto nas figuras 21 na página 49 e 22 na página 49.

De fato, dado $x_0 > 0$, temos que $f(x_0) = 1 - e^{-x_0} = \frac{e^{x_0} - 1}{e^{x_0}} > 0$. Além disso, segue de $g'(x)$, que $f(x) < x, \forall x \neq 0$ (graficamente vemos a curva sempre abaixo da diagonal $y = x$). Daí:

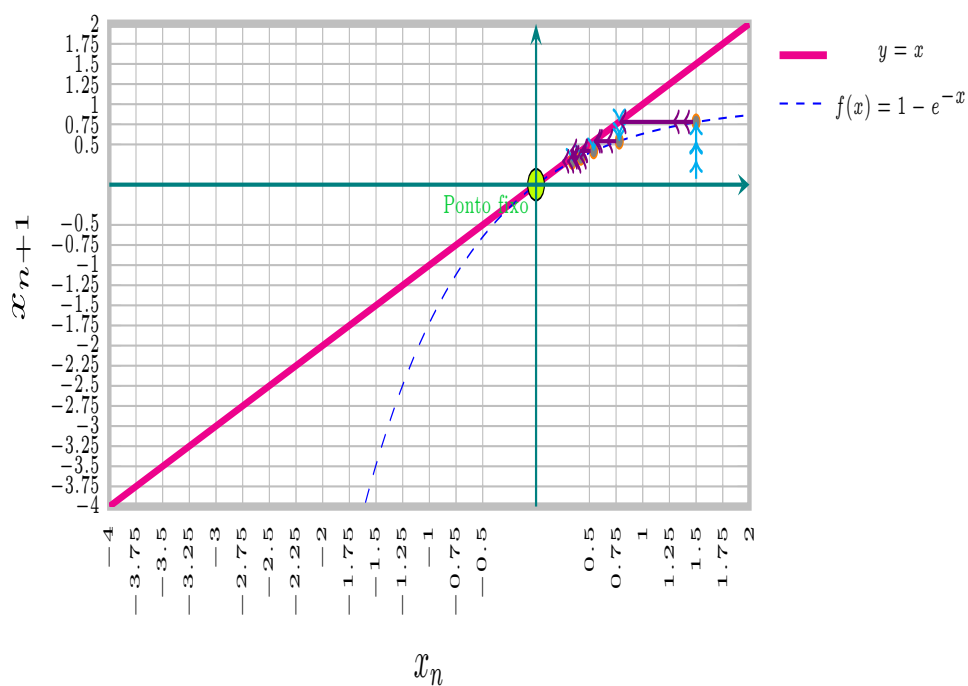


Figura 21: Cobweb $x_0 = 1,5$ para 5 iterações. Estável pela direita.

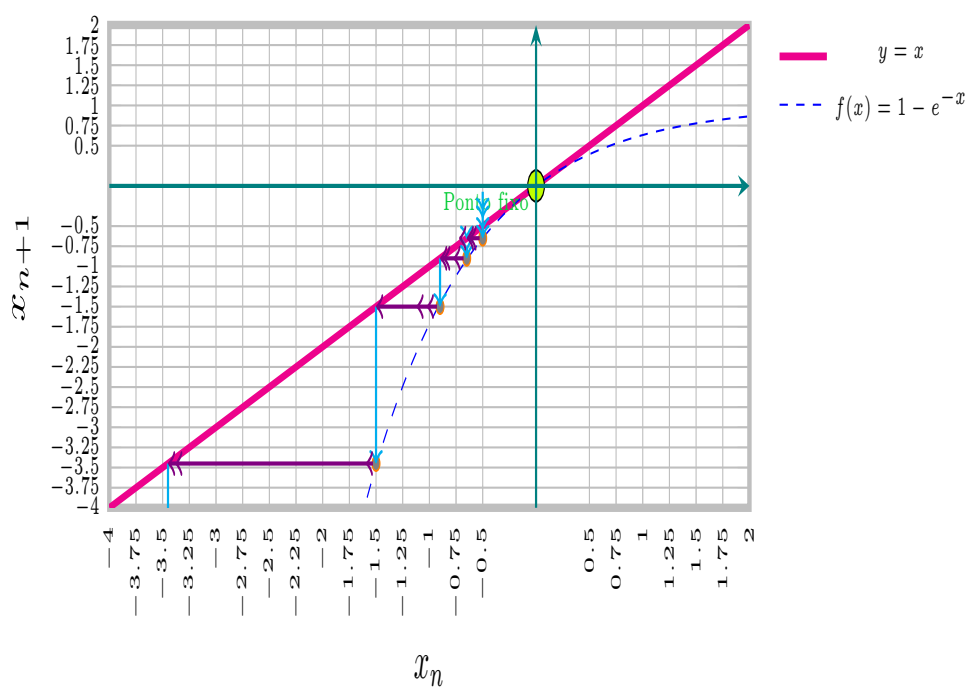


Figura 22: Cobweb $x_0 = -0,5$ para 5 iterações. Instável pela esquerda.

$$\begin{aligned}
 0 &< x_1 &= f(x_0) &= 1 - e^{-x_0} < x_0 \\
 0 &< x_2 &= f(x_1) &= 1 - e^{-x_1} < x_1 \\
 0 &< \vdots &= \vdots &= \vdots < \vdots \\
 0 &< x_{n+1} &= f(x_n) &= 1 - e^{-x_n} < x_n
 \end{aligned}$$

Em outras palavras, a órbita de x_0 tem o comportamento descrito abaixo:

$$\begin{aligned} x_0 &> x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > 0 \\ x_0 &> f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_{n-1}) > f(x_n) > 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, dado $x_0 < 0$, temos que $f(x_0) = 1 - e^{-x_0} = \frac{e^{x_0} - 1}{e^{x_0}} < 0$. Daí, a órbita de x_0 é dada por:

$$\begin{aligned} x_0 &< x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots \rightarrow -\infty \\ x_0 &< f(x_0) < f(x_1) < \dots < f(x_{n-1}) < f(x_n) < \dots \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

2.2.3.3 APLICAÇÃO I

Aqui utilizaremos o método de Newton-Raphson para calcular a raiz quadrada de um número a positivo.

Exemplo 2.2.10

Considere a equação de diferenças^a:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

com $a > 0$. Dado $x_0 > 0$, a órbita de x_0 converge para \sqrt{a} .

^a Seção de exercícios 1.3, problema 2, (ELAYDI et al., 2005, p. 18)

Solução: Inicialmente, observe que, dado $a > 0$ para encontrar \sqrt{a} é equivalente a encontrar solução positiva da equação $x^2 = a$. Esta equação pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} x \cdot x &= a \Leftrightarrow x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x + x = x + \frac{a}{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cdot x &= x + \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \end{aligned}$$

Desta forma, a solução de $x^2 = a$ é dada pelo único ponto fixo positivo de $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x} \right)$.

- i. Esta equação de diferenças tem dois pontos fixos, $-\sqrt{a}$ e \sqrt{a} . Para encontrá-los, devemos estudar $f(x^*) = x^*$.

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(x^* + \frac{a}{x^*} \right) = x^*.$$

- ii. Nas figuras 24 na página 52 e 25 na página 52 apresentamos os diagramas *cobweb* para $a = 3$, $x_0 = 1$ (respectivamente $x_0 = -1$).
- iii. Note que, a derivada de f é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right).$$

Desta forma,

$$f'(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{a} \right) = 0,$$

ou seja, o ponto fixo em $x^* = \pm\sqrt{a}$ é super-atrator^{iv}

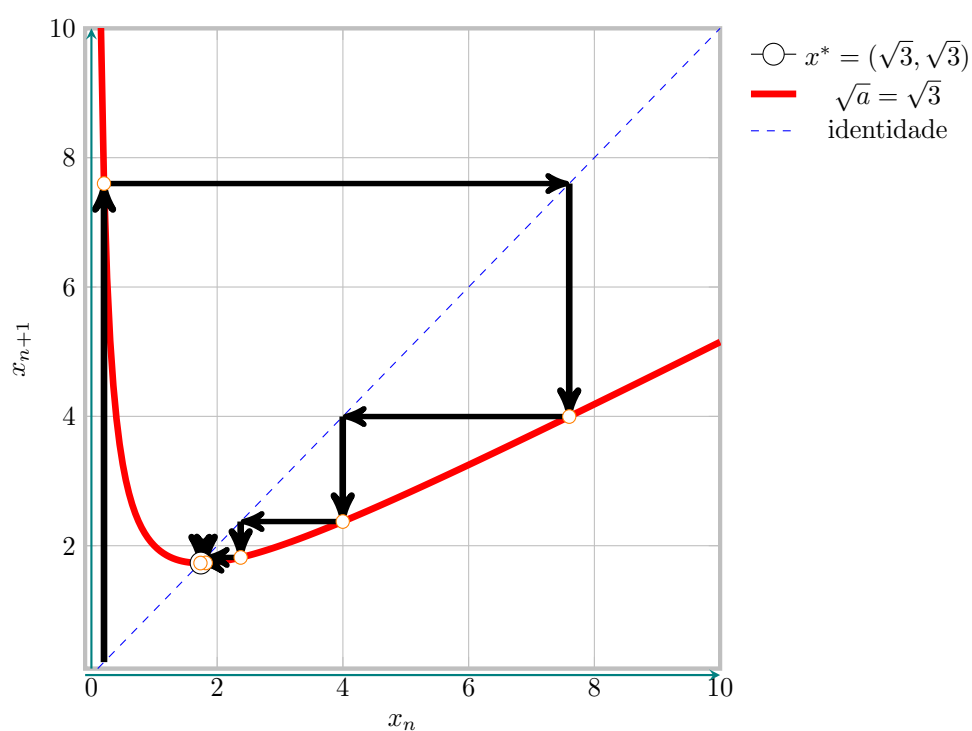
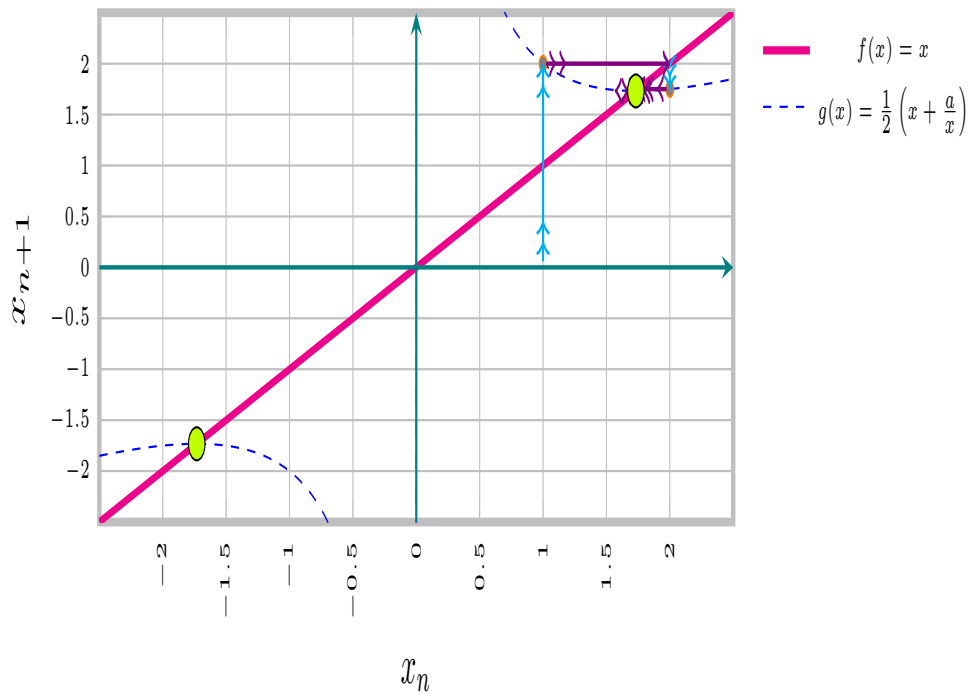
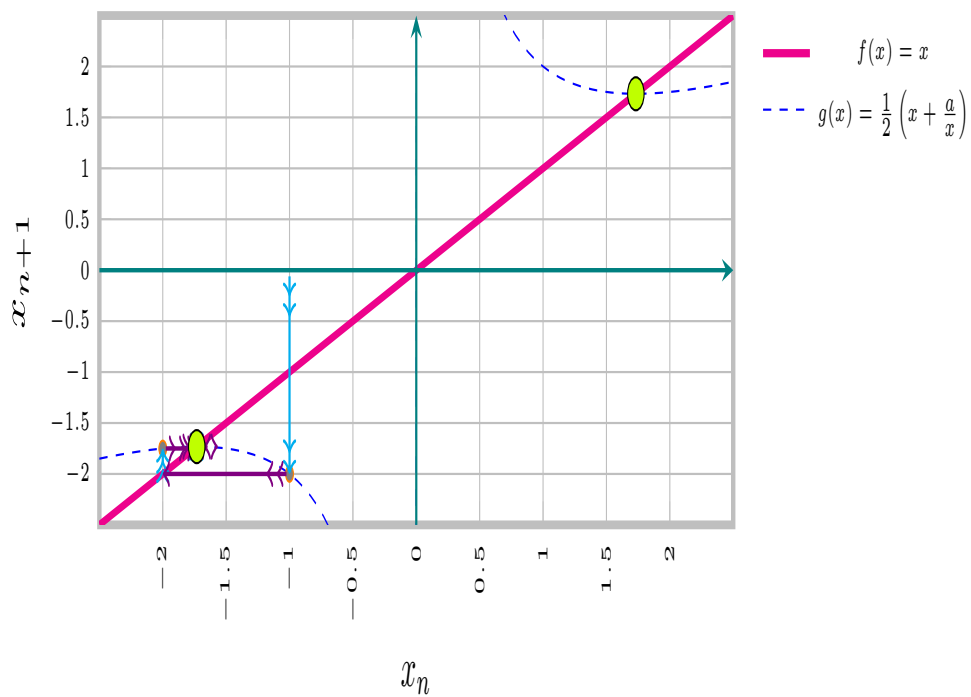


Figura 23: Cobweb para $x_0 = 0,2$ com 6 iterações

^{iv} Conforme definição 2.3 na página 37.

Figura 24: Cobweb da $\sqrt{3}$ Figura 25: Cobweb da $-\sqrt{3}$

2.2.3.4 APLICAÇÃO II

Retomando o capítulo 1, na página 3, Isaac Newton desenvolveu as próprias ferramentas do cálculo diferencial e será aplicado neste exemplo.

O método das aproximações sucessivas é uma excelente ferramenta para o cômputo de zeros de funções, já que não é possível calcular os zeros de funções polinomiais através de seus coeficientes de quinto grau em diante.

Exemplo 2.2.11

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $\Delta x \in \mathbb{R}^*$, dada por:

$$f(x) = x^3 - 2 \cdot x - 5,$$

cujo gráfico pode ser visto na figura 26.

Se a raiz da função f é pouco maior que 2, vamos utilizar a equação de diferenças $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$, com $x_0 = 2$, para encontrar sua solução.

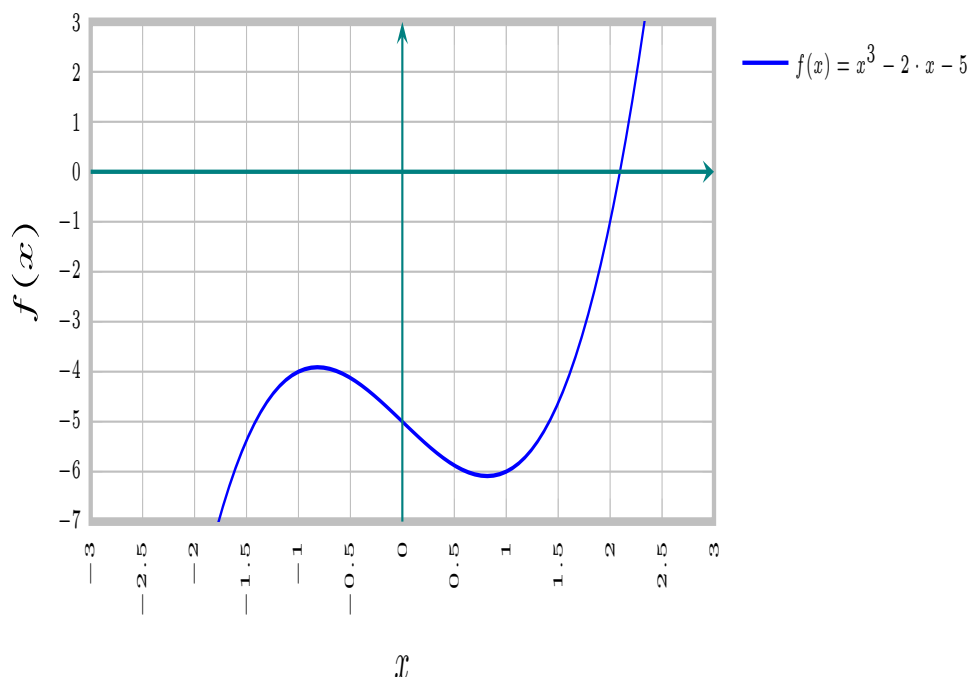


Figura 26: Método de Newton para encontrar zeros de funções

Como queremos os zeros das funções polinomiais, o método das aproximações sucessivas de Newton^v utiliza equações de diferenças como veremos a seguir.

^v Isaac Newton publicou a obra O “Método dos fluxões e séries infinitas” em 1740, no século XVIII. Computadores modernos não existiam, e até os dias atuais os computadores utilizam-se deste método para o cômputo de zeros de funções.

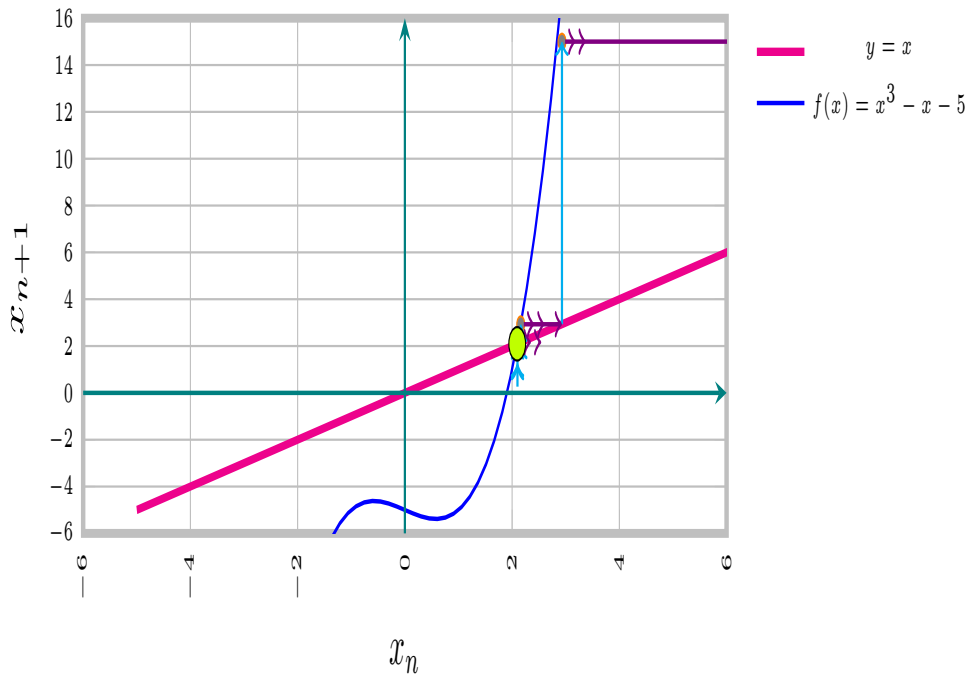


Figura 27: Método de Newton para encontrar zeros de funções por *Cobweb*. 4 iterações - ponto fixo repulsor.

A ideia básica antes da existência da derivada era calcular $f(x_1) = f(x_0 + \Delta x_0) = 0$, para um palpite x_1 . Por exemplo, é sabido que quando há troca de sinal, isto é, o produto $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, implica que há pelo menos uma raiz de $f(x)$ no intervalo $[x_0, x_1]$. Um palpite melhor seria calcular $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x_1) = 0$, e de modo geral $f(x_{n+1}) = f(x_n + \Delta x_n) = 0$, e quanto maior o número n de iterações, a raiz x_n fica cada vez melhor^{vi}.

1ª Aproximação do zero da função

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= (x_1)^3 - 2 \cdot (x_1) - 5 \\
 f(2 + \Delta x_0) &= (2 + \Delta x_0)^3 - 2 \cdot (2 + \Delta x_0) - 5 \\
 f(2 + \Delta x_0) &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \Delta x_0 + 3 \cdot 2 \cdot \cancel{\Delta x_0^2} + \cancel{\Delta x_0^3} - 4 - 2 \cdot \Delta x_0 - 5 \\
 0 &= 10 \cdot \Delta x_0 - 1
 \end{aligned}$$

Assim $-1 + 10 \cdot \Delta x_0 = 0 \implies \Delta x_0 = \frac{1}{10}$, isto é, ao invés de 2, um palpite inicial de 2.1 é melhor para a raiz.

^{vi} Como foi visto na introdução deste trabalho, no século XVIII já havia a régua de cálculo que facilitava efetuar as quatro operações básicas.

2ª Aproximação do zero da função

$$\begin{aligned} f(x_2) &= (x_2)^3 - 2 \cdot (x_2) - 5 \\ f(x_1 + \Delta x_1) &= (2.1 + \Delta x_1)^3 - 2 \cdot (2.1 + \Delta x_1) - 5 \\ 0 &= 11.23 \cdot \Delta x_1 + 0,061 \end{aligned}$$

Daí $\implies \Delta x_1 = -\frac{6,1}{1123} = -5,4 \times 10^{-3}$, assim, um palpite ainda melhor que 2.1 seria 2.0946. As iterações continuam sucessivamente, até atingir o valor desejado.

De modo geral, o trabalho de Newton, é conhecido por método de “Newton-Raphson”, dado por:

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= (x_n + \Delta x_n)^3 - 2 \cdot (x_n + \Delta x_n) - 5 \\ 0 &= (x_n^3 + 3 \cdot x_n^2 \cdot \Delta x_n + 3 \cdot x_n \cdot \Delta x_n^2 + \Delta x_n^3) - 2 \cdot (x_n + \Delta x_n) - 5 \\ 0 &= (x_n^3 + 3 \cdot x_n^2 \cdot \Delta x_n + 3 \cdot x_n \cdot \cancel{\Delta x_n^2}^0 + \cancel{\Delta x_n^3}^0) - 2 \cdot (x_n + \Delta x_n) - 5 \end{aligned}$$

Isolando o termo Δx_n em termos dos demais, tem-se:

$$\Delta x_n = -\frac{x_n^3 - 2 \cdot x_n - 5}{3 \cdot x_n^2 - 2} \implies x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

Note que sem definir derivada, ela apareceu no denominador de Δx_n , calculada em x_n , e no numerador a função $f(x_n)$, assim $\Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

De modo geral, dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável ($f'(x_n) \neq 0$), escrevem-se as seguintes equações de diferenças, para calcular $f(x_n) = 0$, para algum $n \in \mathbb{Z}^+$, isto é, as iterações continuam enquanto $f(x_n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Fórmula 2.2.1: Método de Newton-Raphson (Cômputo do zero de funções)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Solução: Retomando o exemplo 2.2.3.4, primeiro vamos estudar o diagrama de *Cobweb* da figura 27 na página 54. Daí encontramos soluções para $f(x^*) = x^*$, mas já sabemos do método das aproximações sucessivas (estudado anteriormente) que um ponto fixo é $x^* = 2,0946$ (Utilizando uma aproximação com quatro casas decimais). Como $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \implies f'(2,0946) > 1$, daí implica que o ponto fixo é repulsor (tende a empurrar os iterados para longe),^{vii} isto é, tende a empurrar para longe qualquer órbita de pontos que iniciem sua trajetória próxima da raiz real. Isso torna a técnica *Cobweb* não muito eficaz para calcular zeros de funções, uma vez que podemos encontrar pontos fixos repulsores como neste exemplo. Graças ao excelente

^{vii} De acordo com a definição 2.3 na página 37

método de Newton-Raphson, podemos obter raízes de forma rápida, pois trata-se de um método com pontos fixos super-atratores como veremos a seguir.

O método de Newton-Raphson é super-atrator, pois a equação de diferenças associada a função é

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

seguindo com sua derivada em relação a x_n , tem-se:

$$\begin{aligned} \left[f(x_n) \right]' &= \left[x_n \right]' - \frac{\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right]'}{\left[f'(x_n) \right]^2} \\ f'(x_n) &= 1 - \frac{\left[f'(x_n) \right]^2 - f(x_n) \cdot f''(x_n)}{\left[f'(x_n) \right]^2} \end{aligned}$$

Supondo que para $n_0 \in n$ ocorra $f(x_{n_0}) = 0$, mas que a derivada não se anule, então tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x_{n_0}) &= 1 - \frac{\left[f'(x_{n_0}) \right]^2 - \cancel{f(x_{n_0})} \cdot f''(x_{n_0})}{\left[f'(x_{n_0}) \right]^2} \\ f'(x_{n_0}) &= 1 - \frac{\left[f'(x_{n_0}) \right]^2}{\left[f'(x_{n_0}) \right]^2} \\ f'(x_{n_0}) &= 1 - 1 \\ f'(x_{n_0}) &= 0, \quad \text{daí é super-atrator.} \end{aligned}$$

Concluimos de acordo com a definição 2.3 na página 37. □

Esta equação tem mais dois pontos fixos. Pelo método de Briott-Ruffini, tem-se:

Raiz	Coef. do grau 3	Coef. do grau 2	Coef. do grau 1	Coef. indep.
2,0946	1	0	-2	-5
Operação	↓	$1 \times 2,0946 + 0$	$2,0946 \times 2,0946 - 2$	$2,3872 \times 2,0946 - 5$
Resultado	1	2,0946	2,3872	0
Coef. grau reduzido	Coef. grau 2: 1	Coef. grau 1: 2,0946	Coef. indep.: 2,3872	Resto da divisão: 0

Então fatoramos $f(x) = x^3 - 2x - 5 = (x - 2,0946) \cdot (x^2 + 2,0946x + 2,3872)$. Porém, como estamos estudando análise real, esta quadrática não têm raízes reais (respectivamente $x^* = -1,0473 \pm i1,1359$). Portanto, estes pontos fixos não são objetos de nosso estudo.

2.3 O OPERADOR DUPLO NAS E.D.L.

Nesta seção utilizaremos operadores duplos de somatório e produtório nas E.D.L. (equações de diferenças lineares).

2.3.1 CONJECTURA

O método da conjectura é uma técnica poderosa para formular hipóteses sobre as formas de soluções para as equações de diferenças que modelam os sistemas dinâmicos.

Daí, em seguida, aceita-se ou rejeita-se a hipótese com base na substituição de valores e manipulação algébrica.

O método baseia-se na observação do sistema, a partir do qual tentamos detectar um padrão para a solução. O processo envolve observar um padrão, conjecturar formas de soluções do sistema.

Pode-se resumir nas seguintes etapas:

- i. Observar padrões,
- ii. Conjecturar formas de soluções,
- iii. Testes da conjectura,
- iv. Aceitar ou rejeitar a conjectura dependendo se ela satisfaz ou não o sistema após a substituição e manipulação algébrica (para que a conjectura seja aceita a substituição deve resultar em uma identidade).

2.3.2 SOLUÇÃO GERAL DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇA LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção vamos apresentar a estrutura das soluções de relações de recorrências de primeira ordem do tipo:

Fórmula 2.3.1: Recorrência de primeira ordem não homogênea

$$x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n,$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ onde a_n e b_n são funções cujo domínio é \mathbb{N} e $x_{n+i} \in \mathbb{R}$ com $i \in \mathbb{N}$.

Já foi visto anteriormente que o cômputo de iterados, dá-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 = f(x_0) &\rightarrow x_2 = f(x_1) &\rightarrow x_3 = f(x_2) &\rightarrow \dots \rightarrow x_{n+1} = f(x_n) \\ x_1 = f(x_0) &\rightarrow x_2 = f(f(x_0)) &\rightarrow x_3 = f(f(x_1)) &\rightarrow \dots \rightarrow x_{n+1} = f(f(x_{n-1})) \\ x_1 = f(x_0) &\rightarrow x_2 = f(f(x_0)) &\rightarrow x_3 = f(f(f(x_0))) &\rightarrow \dots \rightarrow x_{n+1} = f(f(\dots f(x_0))) \end{aligned}$$

Para evitar o uso repetido de letras f , é denotado um expoente indicando quantas aplicações de f deve ser feita no valor inicial x_0 , e não deve ser confundido com um expoente para elevar a função ao expoente.

Devemos entender que denota composição funcional, isto é, $f^2(x) = f \circ f(x)$, $f^3(x) = f \circ f \circ f(x) \dots$ e assim por diante. Assim, tem-se:

$$x_0 \rightarrow x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f^2(x_0) \rightarrow x_3 = f^3(x_0) \rightarrow \dots \rightarrow x_n = f^{n-1}(x_0)$$

Portanto:

$$x_0 = f^0(x_0) \rightarrow x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f^2(x_0) \rightarrow x_3 = f^3(x_0) \rightarrow \dots \rightarrow x_n = f^{n-1}(x_0)$$

Exemplo 2.3.1

Prove que uma recorrência de primeira ordem, em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, associada a uma equação de diferenças:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

com uma condição inicial $x_0 = a$, tem sempre uma e somente uma única solução.

Solução: Essa solução é trivial, pois basta observar que:

$$\begin{aligned} x_0 &= f^0(x_0) = a \\ x_1 &= f^1(x_0) = f(a) \\ x_2 &= f^2(x_0) = f^2(a) \\ x_3 &= f^3(x_0) = f^3(a) \\ \vdots &= \vdots = \vdots \\ x_n &= f^n(x_0) = f^n(a) \end{aligned}$$

Portanto, $x_{n+1} = f(x_n)$ possui solução única $x_n = f^n(a)$

□.

Proposição 2.2

Considere a equação de diferenças linear de primeira ordem não homogênea 2.3.1 da página 57 (respectivamente homogênea, caso $b_n = 0$):

$$x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n,$$

em que a_n e b_n são funções reais com domínio em $n \in \mathbb{Z}^+$. A solução (única) que satisfaz a condição inicial x_0 é:

$$x_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right] \cdot x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} a_i \right] \cdot b_k.$$

Demonstração: Para demonstrar a proposição 2.2 é necessário iterar a função um número k vezes, e assumir uma condição de valor inicial x_0 . Assim, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} n = 0, & x_1 & = a_0 \cdot x_0 + b_0, \\ n = 1, & x_2 & = a_1 \cdot x_1 + b_1, \\ n = 2, & x_3 & = a_2 \cdot x_2 + b_2, \\ \vdots, & \vdots & = \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \vdots, \\ n = k-1, & x_k & = a_{k-1} \cdot x_{k-1} + b_{k-1}. \end{array}$$

Substituindo x_1 em x_2 , x_2 em x_3 , respectivamente x_{n-1} em x_n , tem-se:

$$\begin{array}{rcl} n = 0, & x_1 & = a_0 \cdot x_0 & + & b_0, \\ n = 1, & x_2 & = a_1 \cdot [a_0 \cdot x_0 + b_0] & + & b_1, \\ n = 2, & x_3 & = a_2 \cdot [a_1 \cdot a_0 \cdot x_0 + a_1 \cdot b_0 + b_1] & + & b_2, \\ n = 3, & x_4 & = a_3 \cdot [a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot x_0 + a_2 \cdot a_1 \cdot b_0 + a_2 \cdot b_1 + b_2] & + & b_3, \\ n = 4, & x_5 & = a_4 \cdot (a_3 \cdot [a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot x_0 + a_2 \cdot a_1 \cdot b_0 + a_2 \cdot b_1 + b_2] + b_3) & + & b_4, \\ \vdots, & \vdots & = \quad \quad \quad \vdots & + & \quad \quad \quad \vdots, \\ n = k-1, & x_k & = a_{k-1} \cdot a_{k-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot x_0 & + & \\ & & + a_{k-1} \cdot a_{k-2} \cdots a_2 \cdot a_1 & \cdot & b_0 \\ & & + a_{k-1} \cdot a_{k-2} \cdots a_2 & \cdot & b_1 \\ & & + a_{k-1} \cdot a_{k-2} \cdots a_3 & \cdot & b_2 \\ & & + \quad \quad \quad \vdots \cdot \quad \quad \quad & \cdot & \quad \quad \quad \vdots \\ & & + a_{k-1} \cdot a_{k-2} & \cdot & b_{k-3} \\ & & + a_{k-1} & \cdot & b_{k-2} \\ & & + 1 & \cdot & b_{k-1}. \end{array}$$

Note que de 0 até $k - 1$ há k elementos. De modo a tornar as expressões mais compactas, utilizaremos as notações de produtórios \prod (respectivamente somatórios

\sum) cujos índices i e k estão variando e sofrem incrementos de um em um a cada termo da operação i e $k \in \mathbb{Z}^+$, isto é, $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Assim a primeira parte da solução geral fica:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1} a_i &= a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \\ \implies \prod_{i=0}^{n-1} a_i \cdot x_0 &= a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot x_0 \end{aligned}$$

Por outro lado, a segunda parte da solução exige um **operador duplo**. Note que para cada b_k com $0 \leq k \leq n-1$, isto é $k=0$ (até $n-1$) fazemos a varredura do índice $i = \{k+1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} a_i \right] \cdot b_k =$$

Para k fixado em:	varredura de i :	b_0	\cdot	a_1	\cdot	a_2	\cdot	a_3	\cdot	\dots	\cdot	a_{n-1}	$+$
$k=0,$	$1 < i < n-1:$	b_0	\cdot	a_1	\cdot	a_2	\cdot	a_3	\cdot	\dots	\cdot	a_{n-1}	$+$
$k=1,$	$2 < i < n-1:$	b_1	\cdot		\cdot	a_2	\cdot	a_3	\cdot	\dots	\cdot	a_{n-1}	$+$
$k=2,$	$3 < i < n-1:$	b_2	\cdot				\cdot	a_3	\cdot	\dots	\cdot	a_{n-1}	$+$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$+$
$k=n-1,$	$n < i < n-1:$	b_{n-1}	\cdot							\dots		1	

Na expressão acima, denotamos

$$\prod_{i=j}^k a_i = 1,$$

quando $k \leq j$. De modo análogo, denotamos

$$\sum_{k=j}^{n-1} a_i = 0,$$

quando $n-1 \leq j$.^{viii}

Assim, segue que dado $x_0 \in \mathbb{R}$ a única solução da equação 2.3.1 da página 57 é dada por:

$$x_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right] \cdot x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} a_i \right] \cdot b_k. \quad \square$$

Há dois casos para investigarmos. Se a função $a_n = A$ for uma constante (respectivamente parte não homogênea $b_n = B$ for uma constante).

^{viii} Note que adotamos $\prod_2^1 a_i = \prod_1^0 a_i = 1$ (respectivamente o elemento neutro do somatório $\sum_k^{k+1} a_i = 0$).

2.3.2.1 CASO 1

Seja $a_n = A$ e considere a equação de diferenças não homogênea:

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + b_n,$$

com condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$. Aplicando a expressão da solução dada na proposição 2.2 da página 59, tem-se:

$$x_n = A^n \cdot x_0 + \begin{bmatrix} k=0, & 1 < i < n-1: & b_0 & \cdot & a_1 & \cdot & a_2 & \cdot & a_3 & \cdot & \dots & \cdot & a_{n-1} & + \\ k=1, & 2 < i < n-1: & b_1 & \cdot & & & a_2 & \cdot & a_3 & \cdot & \dots & \cdot & a_{n-1} & + \\ k=2, & 3 < i < n-1: & b_2 & \cdot & & & & & a_3 & \cdot & \dots & \cdot & a_{n-1} & + \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \\ k=n-1, & n < i < n-1: & b_{n-1} & \cdot & & & & & & & \dots & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$x_n = A^n \cdot x_0 + \begin{bmatrix} k=0, & 1 < i < n-1: & b_0 & \cdot & A & \cdot & A & \cdot & A & \cdot & \dots & \cdot & A & + \\ k=1, & 2 < i < n-1: & b_1 & \cdot & & & A & \cdot & A & \cdot & \dots & \cdot & A & + \\ k=2, & 3 < i < n-1: & b_2 & \cdot & & & & & A & \cdot & \dots & \cdot & A & + \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \\ k=n-1, & n < i < n-1: & b_{n-1} & \cdot & & & & & & & \dots & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$x_n = A^n \cdot x_0 + [A^{n-1} \cdot b_0 + A^{n-2} \cdot b_1 + \dots + A^3 \cdot b_{n-4} + A^2 \cdot b_{n-3} + A \cdot b_{n-2} + b_{n-1}]$$

Daí, temos a seguinte solução geral para este caso:

Fórmula 2.3.2: Caso 1 Solução da eq. dif. não-homogênea

$$x_n = A^n \cdot x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} \cdot b_k$$

2.3.2.2 CASO 2

Sejam $a_n = A$, $b_n = B$ e considere a equação de diferenças não homogênea:

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + B,$$

com condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$. Aplicando a expressão da solução dada na proposição 2.2 da página 59, tem-se:

$$x_n = A^n \cdot x_0 + \begin{bmatrix} k=0, & 1 < i < n-1: & B \cdot A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A & + \\ k=1, & 2 < i < n-1: & B \cdot & A \cdot A \cdot \dots \cdot A & + \\ k=2, & 3 < i < n-1: & B \cdot & & A \cdot \dots \cdot A & + \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \\ k=n-1, & n < i < n-1: & B \cdot & & & \dots & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_n = A^n \cdot x_0 + \underbrace{\left[A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A^3 + A^2 + A + 1 \right]}_{\text{Soma Definida de } n \text{ termos de razão } A} \cdot B$$

Daí, usando a soma definida A.6.1 na página 240, temos a seguinte solução geral para este caso:

Fórmula 2.3.3: Caso 2 Solução da eq. dif. não-homogênea

$$x_n = \begin{cases} A^n \cdot x_0 + B \cdot \left[\frac{A^n - 1}{A - 1} \right], & \text{se } A \neq 1, \\ x_0 + B \cdot n, & \text{se } A = 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.3.2

Mostre que a solução da equação de diferenças

$$y(n+1) - (n+1) \cdot y(n) = 2^n \cdot (n+1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

que satisfaz $y_0 = 1$, é dada por $y_n = n! \cdot 2^n$.

Solução: Temos a equação de diferenças do tipo $y_{n+1} = a_n \cdot y_n + b_n$. Aplicando a solução da proposição 2.2 da página 59, com a função $a_n = n + 1$, e a parte não homogênea dada por $b_n = 2^n \cdot (n + 1)!$. Após as substituições na fórmula e aplicando a soma definida A.6.1 na página 240 ficamos com:

$$y_n = n! \cdot 1 + \begin{bmatrix} k=0, & 1 < i < n-1: & 2^0 \cdot 1! & \cdot & (1+1) \cdot (2+1) \cdot (3+1) \cdot \dots \cdot (n) & + \\ k=1, & 2 < i < n-1: & 2^1 \cdot 2! & \cdot & (2+1) \cdot (3+1) \cdot \dots \cdot (n) & + \\ k=2, & 3 < i < n-1: & 2^2 \cdot 3! & \cdot & (3+1) \cdot \dots \cdot (n) & + \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \\ k=n-2, & i=n-1: & 2^{n-2} \cdot (n-1)! & \cdot & \dots & (n) & + \\ k=n-1, & n < i < n-1: & 2^{n-1} \cdot n! & \cdot & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 y_n &= n! + \left[n! + n! \cdot 2 + n! \cdot 2^2 + \dots + n! \cdot 2^{n-1} \right] = n! + n! \cdot \left[1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \right], \\
 y_n &= n! + n! \cdot \left[\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right] = n! \cdot \left(1 + \left[\frac{2^n - 1}{1} \right] \right), \\
 y_n &= n! \cdot \left(1 + \left[\frac{2^n - 1}{1} \right] \right) = n! \cdot (1 - 1 + 2^n), \\
 \implies & \qquad \qquad \qquad y(n) \qquad \qquad \qquad = n! \cdot 2^n.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.3.3

A torcida do Corinthians tem hoje p_0 membros. A taxa anual de natalidade é i , a mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de R torcedores desiste de vez. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a n anos. A torcida está condenada a extinção?

Solução:^{ix} Para modelar a situação da torcida em termos de equações de diferenças lineares de primeira ordem, vamos definir algumas variáveis:

- (i) p_n : número de torcedores no ano n .
- (ii) p_{n+1} : número de torcedores no ano seguinte ao n .
- (iii) p_0 : número inicial de torcedores (cenário atual).
- (iv) i : taxa anual de natalidade (proporção de novos torcedores).
- (v) $i \cdot p_n$: quantidade de novos torcedores que nasceram no período apurado n .
- (vi) j : taxa de mortalidade (proporção de torcedores que falecem).
- (vii) $j \cdot p_n$: quantidade de torcedores que faleceram no período apurado n .
- (viii) R : número de torcedores que desistem a cada ano.

Dada a situação, o número de torcedores no ano seguinte p_{n+1} pode ser modelado como:

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= p_n + i \cdot p_n - j \cdot p_n - R, \\
 \implies p_{n+1} &= p_n \cdot \left(1 + i - j \right) - R,
 \end{aligned}$$

Como $i, j \in [0, 1]$, se definirmos $k = 1 + i - j$ como a taxa líquida da população de torcedores, a equação se torna:

$$p_{n+1} = p_n \cdot k - R,$$

^{ix} (Adaptado) Problema 2 da seção 7.7 Exercícios Suplementares da apostila de MA12 do profmat - unidade 7 - Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Temos então uma equação de diferenças do tipo $x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n$. Aplicando a solução da proposição 2.2 da página 59, com a função $a_n = k_n$, e a parte não homogênea dada por $b_n = -R$ ($R \in \mathbb{R}$ uma constante), tem-se:

$$p_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} k_i \right] \cdot p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} k_i \right] \cdot R,$$

A solução particular^x, considerando a taxa $k_i = k$ (constante) pode ser estudada, aplicando-se a fórmula 2.3.3 na página 62:

Modelagem matemática da torcida de um time de futebol

$$p_n = \begin{cases} k^n \cdot \left[p_0 - R \frac{k^n - 1}{k - 1} \right], & \text{se } k \neq 1, \\ p_0 - R \cdot n, & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Conclui-se que:

$$\begin{cases} \text{se } i < j, \text{ tem-se: } k < 1, & \text{portanto a torcida está condenada à extinção.} \\ \text{se } i = j, \text{ tem-se: } k = 1, & \text{vide a nota de rodapé.} \\ \text{se } i > j, \text{ tem-se: } k > 1, & \text{portanto a torcida cresce exponencialmente.} \end{cases}$$

Portanto, a análise mostra que a torcida está condenada à extinção se a taxa de natalidade não superar a soma das taxas de mortalidade e desistência de torcedores.

Exemplo 2.3.4

^aUm médico receita ao seu paciente um medicamento que é administrado uma vez a cada 8 horas. Seja $M(n)$ a quantidade do medicamento no sistema sanguíneo no n -ésimo intervalo. O corpo elimina uma certa fração p em percentagem do medicamento até a próxima dose ser administrada. Se a quantidade administrada é m_0 , encontre a equação de diferenças $x_{n+1} = f(x_n)$, que modela o problema e estude o comportamento da solução quando $n \rightarrow \infty$.

^a Problema adaptado de (ELAYDI et al., 2005, p. 12)

Solução Para modelar a situação problema em termos de equações de diferenças lineares de primeira ordem, vamos definir algumas variáveis:

(i) M_n : quantidade de medicação no instante n .

^x Note que para $k = 1$ a função $p_n = p_0 - R \cdot n$ inicia seu gráfico em p_0 ($p_n = p_0$ para $n = 0$) e decresce (com declinação R) a cada ano n , uma vez que há R torcedores que desistem a cada ano. A torcida permanece constante em p_0 torcedores se $R = 0$ e tende à extinção se $R > 0$.

- (ii) M_{n+1} : quantidade de medicação no instante seguinte.
- (iii) m_0 : quantidade de medicação inicial.
- (iv) p : taxa de eliminação do medicamento no instante n (proporção).
- (v) $p \cdot M_n$: quantidade de medicação eliminada no instante n .

Dito isso, tem-se:

$$M_{n+1} = m_0 + M_n - p \cdot M_n = m_0 + M_n \cdot (1 - p),$$

Para a equação de diferenças linear de primeira ordem não homogênea do tipo $x_{n+1} = A \cdot x_n + B$, com $A = 1 - p$ e $B = m_0$, segue de 2.3.3 da página 62 a solução:

$$M_n = \begin{cases} (1 - p)^n \cdot m_0 + m_0 \cdot \left[\frac{1 - (1 - p)^n}{p} \right], & \text{se } p \neq 0, \\ m_0 + m_0 \cdot n, & \text{se } p = 0. \end{cases}$$

Pode-se manipular algebricamente alguns termos e usar fatoração, daí tem-se:

$$M_n = \begin{cases} (1 - p)^n \cdot m_0 \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{m_0}{p}, & \text{se } p \neq 0, \\ m_0 \left(1 + n \right), & \text{se } p = 0, \end{cases}$$

Passando o limite dos dois lados da fórmula anterior^{xi} resta apenas $\frac{m_0}{p}$, pois $1 - p < 1$.

2.4 TEORIA GERAL DE E.D.L DE ORDEM SUPERIOR

As E.D.L., equações de diferenças lineares, de ordem superior ($k \neq 1$) aparecem em diversas aplicações na modelagem de sistemas dinâmicos e algoritmos numéricos. Nesta seção, vamos apresentar a teoria geral dessas equações, abordando os conceitos fundamentais, além de ilustrar o processo com exemplos.

Uma Equação Diferencial Linear (E.D.L.) autônoma não homogênea ($g(n) \neq 0$), respectivamente homogênea ($g(n) = 0$) de ordem $k \neq 1$ é uma equação que depende de $k - 1$ estados, ou k estados anteriores. Escrever a equação na forma dada em 2.4.1 é fácil, caso a equação seja dada por:

$$\mathcal{P}_{0,n} \cdot x_{n+k} + \mathcal{P}_{1,n} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + \mathcal{P}_{k-1,n} \cdot x_{n+1} + \mathcal{P}_{k,n} \cdot x_n = 0,$$

^{xi} Fórmula em conformidade com a referência (ELAYDI et al., 2005, p. 6).

onde os $(\mathcal{P}_{i,n})_{i=0}^{i=k}$ podem ser estudados em casos quando são funções reais com domínio definido nos naturais ($n \in \mathbb{N}$), ou são constantes com $(p_i)_{i=1}^{k \in \mathbb{N}} \neq 0$. Dividindo-se toda a equação pelo primeiro elemento $\mathcal{P}_{0,n}$, obtemos a equação 2.4.1 chamando $\frac{\mathcal{P}_{i,n})_{i=0}^{i=k}}{\mathcal{P}_{0,n}}$ de $(p_{j,n})_{j=1}^{j=k}$.

2.4.1 DISCUSSÃO SOBRE SOLUÇÕES PARTICULARES

A equação acima pode ter várias soluções particulares, conforme será explorado no decorrer do capítulo. Para representar cada solução, usa-se a notação $(x_{i,n})_{i=1}^{i=k}$, onde:

- O índice i identifica uma solução particular diferente.
- O índice n representa a variável discreta independente $n \in \mathbb{N}$, que em muitas situações é interpretada como sendo o prazo ou tempo.

Assim, o conjunto fundamental de soluções particulares da equação pode ser representado pela sequência como:

$$\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\},$$

onde temos k soluções particulares da equação de diferenças linear.

A seguir é exposto proposições e definições para estas soluções propriamente ditas. Os teoremas e definições a seguir são necessários para a obtenção do **conjunto fundamental de soluções** e, conseqüentemente, da solução geral da equação completa conforme exposto em 2.4.1.

Proposição 2.3

Seja uma equação de diferença da forma:

$$x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n), \alpha$$

onde f é uma função real arbitrária, não autônoma, definida sobre uma sequência finita ou infinita de valores inteiros consecutivos de n . A forma de escrita é a forma resolutiva em que o termo de maior grau está isolado dos de menor grau. A equação possui solução única correspondente a cada especificação arbitrária de k condições iniciais:

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}.$$

Demonstração: Suponhamos que os valores $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$ estão especificados. Então, a equação de diferença linear (α), com $n = n + k$, pode ser resolvida de forma única para x_{n+k} por simples evolução da função f .

Uma vez que x_{n+k} é conhecido, a equação de diferença (α) com $n = n + k + 1$ pode ser resolvida para x_{n+k+1} (Pelo PIF e os axiomas de Peano), e assim sucessivamente, para todos os valores consecutivos de n .

Portanto, a equação possui solução única para cada conjunto de condições iniciais especificado. Provando assim a existência e unicidade das soluções \square .

Definição 2.7

As soluções $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$, são LI se é impossível encontrar uma relação da forma:

$$\sum_{i=1}^{i=k} p_i \cdot x_{i,n+k+1-i} = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

exceto pela solução trivial.

Caso seja possível encontrar a relação acima com as constantes $(p_i)_{i=1}^k$, não todas iguais a zero, tal que a relação seja satisfeita, então o conjunto fundamental de soluções é LD.

2.4.2 Definição e Forma Geral

A equação de diferenças linear de ordem superior $k \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ é expressa na forma:

Fórmula 2.4.1: Equação de diferenças linear de ordem k

$$x_{n+k} + p_{1,n} \cdot x_{n+k-1} + p_{2,n} \cdot x_{n+k-2} + \dots + p_{k-1,n-1} \cdot x_{n-1} + p_{k,n} \cdot x_n = g(n).$$

onde:

- x_n : sequência desconhecida a ser determinada;
- $p_{i,n}$: $(i)_{i=1}^k$ coeficientes da equação, que podem depender de n ;
- $g(n)$: termo independente (não-homogêneo).

Se $g(n) = 0$, a equação é chamada de **homogênea**. Caso contrário, é dita **não-homogênea**. Para que a equação seja bem definida, exige-se que $p_{k,n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4.3 Reescrita da Equação na Forma Resolutiva

Podemos reorganizar a equação 2.4.1 da página 67 para expressar x_{n+k} em termos anteriores de $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$:

Fórmula 2.4.2: Equação na forma resolutiva

$$x_{n+k} = - \sum_{i=1}^k p_{i,n} \cdot x_{n+k-i} + g(n).$$

Essa forma é útil para resolver a equação iterativamente, uma vez que x_{n+k} depende apenas dos valores anteriores da sequência. Por exemplo a equação de Fibonacci em sua forma resolutiva é dada por:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

2.4.4 Exemplo: Equação Não-Homogênea de Terceira Ordem

Exemplo 2.4.1

Considere a equação de diferenças de terceira ordem:

$$x_{n+3} - \frac{n}{n+1} \cdot x_{n+2} + n \cdot x_{n+1} - 3 \cdot x_n = n,$$

onde $x_0 = 0, x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Encontre x_4, x_5, x_6 e x_7 .

Solução: Neste exemplo, verificaremos a importância do problema de valor inicial para as equações de diferenças lineares não homogêneas de ordem superior. Primeiro reescrevemos a equação de ordem $k = 3$ na forma adequada resolutiva e resolvemos para x_n passo a passo:

$$\begin{aligned} x_{n+3} &= \frac{n}{n+1} \cdot x_{n+2} - n \cdot x_{n+1} + 3 \cdot x_n + n, \\ n = 0, \quad x_3 &= \frac{0}{1} \cdot x_2 - 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_0 + 0 = 0, \\ n = 1, \quad x_4 &= \frac{1}{2} \cdot x_3 - x_2 + 3 \cdot x_1 + 1 = \frac{5}{2}, \\ n = 2, \quad x_5 &= \frac{2}{3} \cdot x_4 - 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_2 + 2 = -\frac{4}{3}, \\ n = 3, \quad x_6 &= \frac{3}{4} \cdot x_5 - 3 \cdot x_4 + 3 \cdot x_3 + 3 = -\frac{3}{2}, \\ n = 4, \quad x_7 &= \frac{4}{5} \cdot x_6 - 4 \cdot x_5 + 3 \cdot x_4 + 4 = 20,9. \end{aligned}$$

2.5 CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES

Definição 2.8

Um conjunto de k soluções linearmente independentes de uma **equação de diferenças linear homogênea de ordem superior** é chamado de **conjunto fundamental de soluções**. Isso significa que qualquer solução da equação pode ser escrita como uma combinação linear das soluções do conjunto fundamental.

Os autovalores são os valores de λ que satisfazem o polinômio característico. O conjunto fundamental de soluções é formado pelas funções associadas aos autovalores, ou seja, soluções da forma $x_{i,n} = \lambda_i^n$ com $i \in \mathbb{Z}^+$ e $n \in \mathbb{N}$. O número de soluções no conjunto fundamental é igual à ordem da equação de diferenças, porém são seqüências de $n \in \mathbb{N}$.

A solução geral da equação é uma combinação linear das soluções fundamentais. Este assunto é discutido em boas referências de álgebra linear (COLLEY, 2013), (ROBBIANO, 2011) dentre outros.

Exemplo 2.5.1

Considere a seguinte equação de diferenças:

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$$

Determine o conjunto fundamental de soluções.

Passo 1: Determinação do polinômio característico O polinômio característico associado à equação é:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática, obtemos:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

Passo 2: Construção do conjunto fundamental de soluções Para cada raiz λ_i , a solução geral da equação tem a forma:

$$x_n = a_1 2^n + a_2 1^n$$

O conjunto fundamental de soluções é:

$$\{2^n, 1^n\}$$

Solução geral A solução geral da equação é:

$$x_n = a_1 2^n + a_2 1$$

onde a_1 e a_2 são constantes arbitrárias reais.

Exemplo 2.5.2

Considere a seguinte equação de diferenças de ordem 3:

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 0$$

Determine o conjunto fundamental de soluções.

Passo 1: Determinação do polinômio característico

O polinômio característico associado à equação é:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

Portanto, as raízes são:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Passo 2: Construção do conjunto fundamental de soluções Para cada raiz $(\lambda_i)_{i=1}^3$, a solução geral da equação tem a forma:

$$x_n = a_1 1^n + a_2 2^n + a_3 3^n$$

O conjunto fundamental de soluções é:

$$\{1^n, 2^n, 3^n\}$$

Solução geral A solução geral da equação de diferenças é:

$$x_n = a_1 1 + a_2 2^n + a_3 3^n$$

onde a_1 , a_2 e a_3 são constantes arbitrárias reais.

2.5.1 Problemas de Valor Inicial

Uma solução para a equação 2.4.1 é única se especificarmos k valores iniciais com $(a_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}$:

$$x(n_0) = a_0, \quad x(n_0 + 1) = a_1, \quad \dots, \quad x(n_0 + k - 1) = a_{k-1}.$$

Esse conjunto de condições define o chamado **problema de valor inicial** (PVI), que é amplamente utilizado em aplicações práticas.

Proposição 2.4

Unicidade da Solução - O problema de valor inicial associado à equação 2.4.1 possui uma única solução para $n \geq n_0$, desde que $p_{k,n} \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.

2.5.1.0.1 Prova:

Para demonstrar a unicidade, consideremos a equação 2.4.1 juntamente com as condições iniciais:

$$x(n_0) = a_0, \quad x(n_0 + 1) = a_1, \quad \dots, \quad x(n_0 + k - 1) = a_{k-1}.$$

Dado que a equação é de ordem k , qualquer $n \geq n_0 + k$ pode ser escrito como:

$$n = n_0 + k + (n - n_0 - k).$$

Essa relação indica que x_n depende exclusivamente dos k valores iniciais e dos $(i)_{i=1}^k$ coeficientes $p_{i,n}$.

Agora, suponha que existam duas soluções $x(n)$ e $\tilde{x}(n)$ que satisfaçam tanto a equação quanto as condições iniciais. Substituindo $x(n)$ e $\tilde{x}(n)$ na equação, temos:

$$x(n+k) - \tilde{x}(n+k) = 0,$$

o que implica que $x(n) = \tilde{x}(n)$ para todo $n \geq n_0$. Assim, a solução é única. \square

Um comentário sobre soluções em forma fechada, embora a unicidade da solução esteja garantida, determinar uma solução explícita em forma fechada para equações de diferenças de ordem superior pode ser desafiador. Isso ocorre porque, ao contrário das equações de primeira ordem, que possuem métodos bem definidos para solução direta, as equações de ordem superior frequentemente exige abordagem mais complexa.

Tal abordagem (ELAYDI et al., 2005, p. 67) envolve matriz Casoratiana que é usada principalmente para determinar a independência linear de sequências (funções de $n \in \mathbb{N}$) em espaços discretos, como funções definidas em números inteiros. Já o Wronskiano é em homenagem ao matemático polonês Józef Hoene-Wroński (1776-1853), que introduziu o determinante Wronskiano em 1812, que é utilizado para determinar a independência linear de funções contínuas, especialmente soluções de equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 2.5.3

As funções:

$$x_{1,n} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}}^n, \quad x_{2,n} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}}^n,$$

Formam um conjunto fundamental de soluções na Equação de Fibonacci?

Solução: O **Casoratiano** das funções candidatas a soluções do problema de Fibonacci é definido como:

$$W_n = \begin{vmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} \end{vmatrix},$$

Substituímos as soluções:

$$x_{1,n} = \lambda_1^n, \quad x_{2,n} = \lambda_2^n,$$

com os autovalores $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim:

$$W_n = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Expandimos o determinante:

$$W_n = \lambda_1^n \cdot \lambda_2^{n+1} - \lambda_2^n \cdot \lambda_1^{n+1}.$$

Fatoramos λ_1^n e λ_2^n :

$$W_n = \lambda_1^n \cdot \lambda_2^n \cdot (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Substituímos λ_1 e λ_2 :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}.$$

Portanto:

$$W_n = -\sqrt{5} \cdot (\lambda_1 \lambda_2)^n.$$

Sabemos, das relações de Girard, que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ (produto das raízes da equação característica^{xii}). Assim:

$$W_n = -\sqrt{5} \cdot (-1)^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto $x_{1,n}$ e $x_{2,n}$ são LI e formam um conjunto fundamental de soluções ou bases vetoriais.

^{xii} $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, para esta equação característica a soma das raízes é igual a λ e o produto é igual a -1 .

Órbita das Soluções de Fibonacci

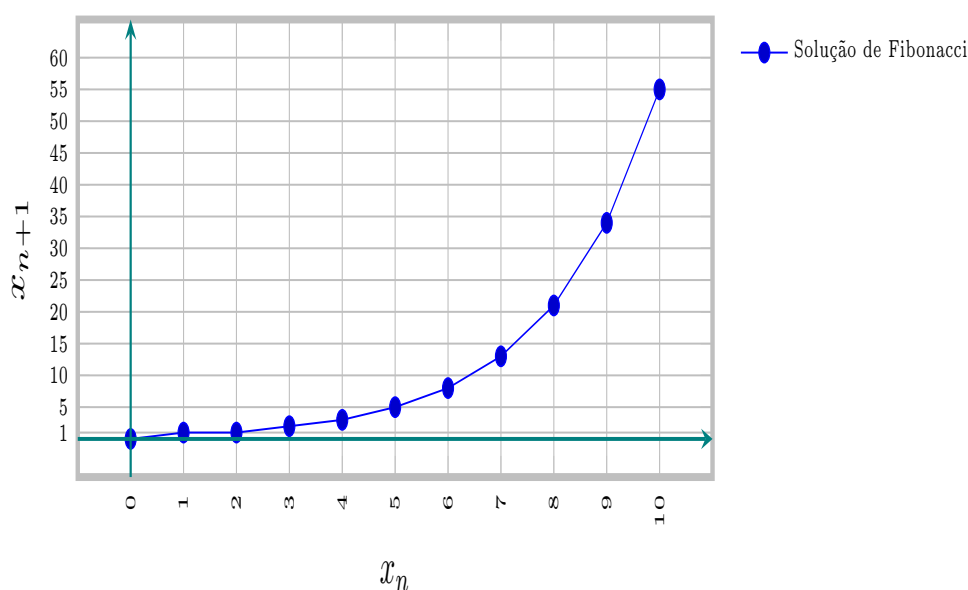


Figura 28: Gráfico representando a órbita das soluções da equação de Fibonacci, mostrando o comportamento da sequência para n de 0 a 10.

Segue um exemplo aplicado às equações de diferenças lineares de ordem superior sobre dependência linear.

Exemplo 2.5.4

Sejam as funções $f_{1,n} = 2^n$ e $f_{2,n} = 3 \cdot 2^n$, com $n \in \mathbb{N}$ as funções são LD.

Solução: Podemos escrever $f_{2,n}$ como múltiplo de $f_{1,n}$:

$$f_{2,n} = 3 \cdot f_{1,n},$$

logo, não formam bases vetoriais. Isto significa que qualquer vetor deste espaço, fazendo-se soma de vetores do conjunto ou multiplicando vetores do conjunto por escalar não saímos dele.

Exemplo 2.5.5

Mostre que as funções 3^n , $n \cdot 3^n$ e $n^2 \cdot 3^n$ são LI para $n \geq 1$.

Solução: Para verificar a independência linear, assumimos que existe uma combinação linear dessas funções que resulte em zero:

$$a_1 \cdot 3^n + a_2 \cdot n \cdot 3^n + a_3 \cdot n^2 \cdot 3^n = 0, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Dividindo por 3^n , obtemos:

$$a_1 + a_2 \cdot n + a_3 \cdot n^2 = 0, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Esta é uma equação polinomial de grau $k = 2$ em n com coeficientes reais $(a_i)_{i=1}^3$. Sabemos que um polinômio de grau k possui, no máximo, k soluções distintas. Para que a equação seja válida para todo $n \geq 1$, todos os coeficientes do polinômio devem ser zero. Assim:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Dito isso, apenas admite a solução trivial. Portanto, as funções 3^n , $n \cdot 3^n$ e $n^2 \cdot 3^n$ são linearmente independentes.

Exemplo 2.5.6

Mostre que o conjunto $\{1^n, n, (-2)^n\}$ é LI.

Demonstração. Solução: Suponha que existam constantes reais $(a_i)_{i=1}^3$, satisfazendo:

$$a_1 \cdot 1^n + a_2 \cdot n + a_3 \cdot (-2)^n = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Testando para $n = 0, 1, 2$, obtemos o sistema:

$$a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot (-2)^0 = 0,$$

$$a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot (-2)^1 = 0,$$

$$a_1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot (-2)^2 = 0.$$

Resolvendo o sistema, encontramos apenas a solução trivial $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Logo, o conjunto é linearmente independente.

Que pode ser denotado matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & n & (-2)^n \\ 1 & n+1 & (-2)^{n+1} \\ 1 & n+2 & (-2)^{n+2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & (-2)^n \\ 1 & n+1 & (-2)^{n+1} \\ 1 & n+2 & (-2)^{n+2} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Provando assim que o conjunto fundamental de soluções $\{1, n, (-2)^n\}$ é linearmente independente. \square

Exemplo 2.5.7

Considere a equação de diferenças de terceira ordem

$$x_{n+3} - 7 \cdot x_{n+1} + 6 \cdot x_n = 0,$$

- (i) As seqüências 1^n , $(-3)^n$ e 2^n são soluções da equação.
 (ii) Determine o Casoratiano de (i).

Solução: (i) Vamos substituir as três seqüências e verificar se resulta em uma identidade.

$$\begin{array}{rcllcl} & x_{n+3} & - & 7 \cdot x_{n+1} & + & 6 \cdot x_n & = & 0, \\ x_n = 1^n, & 1 & - & 7 \cdot 1 & + & 6 \cdot 1 & = & 0, \\ x_n = (-3)^n, & (-3)^{n+3} & - & 7 \cdot (-3)^{n+1} & + & 6 \cdot (-3)^n & = & 0, \\ x_n = 2^n, & 2^{n+3} & - & 7 \cdot 2^{n+1} & + & 6 \cdot 2^n & = & 0. \end{array}$$

O primeiro caso para $x_n = 1$ é direto, os dois seguintes, fatoramos $(-3)^n$ e 2^n , obtendo:

$$\begin{array}{rcllcl} & x_{n+3} & - & 7 \cdot x_{n+1} & + & 6 \cdot x_n & = & 0 \\ x_n = 1, & 1 & - & 7 & + & 6 & = & 0 \\ x_n = (-3)^n, & (-3)^n \cdot \left((-3)^3 - 7 \cdot (-3)^1 + 6 \right) & = & 0 \\ x(n) = 2^n, & 2^n \cdot \left(2^3 - 7 \cdot 2^1 + 6 \right) & = & 0 \end{array}$$

(ii)

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix}$$

Usando a Regra prática de Sarrus:

$$W_n = \det \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n & | & 1 & (-3)^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} & | & 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} & | & 1 & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}$$

$$W_n = \begin{aligned} & (-3)^{n+1} \cdot 2^{n+2} + (-3)^n \cdot 2^{n+1} + (-3)^{n+2} \cdot 2^n \\ & - (2^n \cdot (-3)^{n+1} + (-3)^n \cdot 2^{n+2} + 2^{n+1} \cdot (-3)^{n+2}) \end{aligned}$$

não inversível se $W_n = 0$. As demais soluções ocorrem se $W_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Essa dedução nos leva à seguinte conclusão.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) & \cdots & x_r(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & x_3(n+k-1) & \cdots & x_r(n+k-1) \end{pmatrix}^{-1}}_{(k-1) \times r \text{ elementos}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(k-1) \text{ linhas}}$$

Proposição 2.6

O conjunto de soluções da equação 2.4.1 da página 67 é conjunto fundamental de soluções, se, e só se, para algum $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, o Casoratiano W_{n_0} for não nulo $W_{n_0} \neq 0$.

Prova: Para provar esta proposição é necessário enunciar o lema de Abel.

Lema 2.5.1. *Sejam $(a_{i,n})_{i=1}^r$, com $n \in \mathbb{N}$, o conjunto fundamental de soluções de 2.4.1 da página 67 e o Casoratiano W_n , então para $n \geq n_0$, é dado por:*

Fórmula 2.5.2: Lema de Abel

$$W_n = (-1)^{k \cdot (n - n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p_{k,i} \right] \cdot W_{n_0}.$$

O Casoratiano de uma sequência de soluções de uma equação linear pode ser determinado pelo lema de Abel. Para se obter esta fórmula, em primeiro lugar calcula-se o Casoratiano para uma equação de ordem 3. Em seguida, procede-se a uma generalização para uma equação de ordem k .

Sejam $x_{1,n}, x_{2,n}$ e $x_{3,n}$ três soluções independentes linearmente de 2.4.1 da página 67 e o Casoratiano W_n (com W_{n+1}):

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ x_{1,n+3} & x_{2,n+3} & x_{3,n+3} \end{vmatrix}.$$

Da equação 2.4.1 da página 67 para $1 \leq i \leq 3$, tem-se:

$$x_{i,n+3} = -p_{1,n} \cdot x_{i,n+2} - p_{2,n} \cdot x_{i,n+1} - p_{3,n} \cdot x_{i,n}.$$

Que pode ser escrita como:

$$x_{i,n+3} = -p_{3,n} \cdot x_{i,n} - [p_{1,n} \cdot x_{i,n+2} + p_{2,n} \cdot x_{i,n+1}].$$

Agora, se usarmos a fórmula anterior para substituir $x_{1,n+3}$, $x_{2,n+3}$ e $x_{3,n+3}$ na última linha do determinante W_{n+1} , obtemos:

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ -p_{3,n} \cdot x_{1,n} - [p_{2,n} \cdot x_{1,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{1,n+2}] & -p_{3,n} \cdot x_{2,n} - [p_{2,n} \cdot x_{2,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{2,n+2}] & -p_{3,n} \cdot x_{3,n} - [p_{2,n} \cdot x_{3,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{3,n+2}] \end{vmatrix}.$$

Vamos enunciar algumas propriedades de Determinantes que utilizaremos:

- i. Determinante Nulo: caso ocorra uma linha que é combinação linear de outra, o determinante se anula.
- ii. Somas de elementos $b_{ij} + c_{ij}$ nas filas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (b_{1j} + c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (b_{2j} + c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (b_{nj} + c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- iii. Permutação de filas (linhas ou colunas): o Determinante troca de sinal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Aplicando a propriedade (ii) no determinante W_{n+1} , tem-se:

$$W_{n+1} = -p_{3,n} \cdot \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ x_{1,n} & x_{2,n} & x_{3,n} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ -[p_{2,n} \cdot x_{1,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{1,n+2}] & -[p_{2,n} \cdot x_{2,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{2,n+2}] & -[p_{2,n} \cdot x_{3,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{3,n+2}] \end{vmatrix}.$$

Aplicando novamente a propriedade (ii) no segundo determinante, tem-se:

$$\begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ -[p_{2,n} \cdot x_{1,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{1,n+2}] & -[p_{2,n} \cdot x_{2,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{2,n+2}] & -[p_{2,n} \cdot x_{3,n+1} + p_{1,n} \cdot x_{3,n+2}] \end{vmatrix} =$$

$$= -p_{2,n} \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \end{vmatrix} - p_{1,n} \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \end{vmatrix}.$$

Para verificar se este determinante se anula, basta observar que há pelo menos duas filas iguais^{xiv}, isto é, são idênticas, portanto se anulam.

$$W_{n+1} = -p_{3,n}(-1)^2 \begin{vmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & x_{3,n} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} \end{vmatrix}.$$

Assim, tem-se:

$$W_{n+1} = (-1)^3 p_{3,n} W_n. \quad (\text{Lema de Abel para } k = 3)$$

Pode-se interpretar $W_{n+1} = a_n \cdot W_n + b_n$, com $b_n = 0$ uma equação de diferenças linear homogênea, cuja solução por recorrência é:

$$\begin{aligned} W_{n_0+1} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ W_{n_0+2} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0+1} \cdot W_{n_0+1}, \\ W_{n_0+3} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0+2} \cdot W_{n_0+2}, \\ W_{n_0+4} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0+3} \cdot W_{n_0+3}, \\ \vdots &= \vdots \cdot \vdots \cdot \vdots, \\ W_{n_0+k} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0+k-1} \cdot W_{n_0+k-1}. \end{aligned}$$

Substituímos W_{n_0+1} , W_{n_0+2} , W_{n_0+3} , ... até W_{n_0+k-1} em W_{n_0+k} , e obtemos:

$$\begin{aligned} W_{n_0+1} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ W_{n_0+2} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0+1} \cdot (-1)^3 \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ &= (-1)^6 \cdot p_{3,n_0+1} \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ W_{n_0+3} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0+2} \cdot (-1)^6 \cdot p_{3,n_0+1} \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ &= (-1)^9 \cdot p_{3,n_0+2} \cdot p_{3,n_0+1} \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ W_{n_0+4} &= (-1)^3 \cdot p_{3,n_0+3} \cdot (-1)^9 \cdot p_{3,n_0+2} \cdot p_{3,n_0+1} \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ &= (-1)^{12} \cdot p_{3,n_0+3} \cdot p_{3,n_0+2} \cdot p_{3,n_0+1} \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}, \\ \vdots &= \vdots \cdot \vdots \cdot \vdots, \\ W_n &= (-1)^{3 \cdot (n-n_0)} \cdot p_{3,n-1} \cdot p_{3,n-2} \cdots p_{3,n_0+3} \cdot p_{3,n_0+2} \cdot p_{3,n_0+1} \cdot p_{3,n_0} \cdot W_{n_0}. \end{aligned}$$

Portanto, em geral, se $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$ são k soluções linearmente independentes da equação 2.4.1, então o Casoratiano desta sequência de soluções para $n \geq n_0$ é:

$$W_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 \cdot p_{3,i} \right] \cdot W_{n_0}.$$

^{xiv} Determinantes com linhas linearmente dependentes são nulos.

Para se estabelecer esta relação, note que também podemos usar a fórmula 2.2 na página 59. Assim a solução é dada por:

$$W_n = (-1)^{3(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_{3,i} W_{n_0}.$$

Isso completa a prova do lema para $k = 3$. \square

No caso geral, se ao invés de 3 soluções tivermos k soluções linearmente independentes, então:

$$W_n = (-1)^{k(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_{k,i} W_{n_0}.$$

De modo análogo ao feito anteriormente, o determinante é dado por:

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} & \cdots & x_{r,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} & \cdots & x_{r,n+2} \\ x_{1,n+3} & x_{2,n+3} & x_{3,n+3} & \cdots & x_{r,n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n+k-1} & x_{2,n+k-1} & x_{3,n+k-1} & \cdots & x_{r,n+k-1} \\ x_{1,n+k} & x_{2,n+k} & x_{3,n+k} & \cdots & x_{r,n+k} \\ x_{1,n+k+1} & x_{2,n+k+1} & x_{3,n+k+1} & \cdots & x_{r,n+k+1} \end{vmatrix}.$$

Note como sempre é possível escrever a última linha, onde os termos de maior grau aparecem, em função de termos de graus menores.

Para cada $1 \leq i \leq (k+1)$, tem-se:

$$x_{i,n+k} = -p_{k,n} \cdot x_{i,n} - \left[p_{1,n} \cdot x_{i,n+k-1} + p_{2,n} \cdot x_{i,n+k-2} + \cdots + p_{k-1,n} \cdot x_{i,n+1} \right].$$

De modo análogo feito anteriormente para $k = 3$, o termo $p_{k,n}$ que multiplica sua fila, é o único determinante não nulo, portanto:

$$W_{n+1} = -p_{k,n} \cdot \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & x_{3,n+1} & \cdots & x_{r,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & x_{3,n+2} & \cdots & x_{r,n+2} \\ x_{1,n+3} & x_{2,n+3} & x_{3,n+3} & \cdots & x_{r,n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n+k-1} & x_{2,n+k-1} & x_{3,n+k-1} & \cdots & x_{r,n+k-1} \\ x_{1,n} & x_{2,n} & x_{3,n} & \cdots & x_{r,n} \end{vmatrix}.$$

Assim, temos que $W_{n+1} = (-1)^k \cdot p_{k,n} \cdot W_n$.

Isso completa a prova do lema para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$. \square

Lema 2.5.2. *Sejam $x_{1,n}$ e $x_{2,n}$ duas soluções da equação 2.4.1 da página 67. Então a diferença entre elas é solução da parte homogênea associada a uma E.D.L. não homogênea.*

Prova:

$$x_{1,n+k} + p_{1,n}x_{1,n+k-1} + \cdots + p_{k,n}x_{1,n} = g_n, \quad (\text{equação i})$$

$$x_{2,n+k} + p_{1,n}x_{2,n+k-1} + \cdots + p_{k,n}x_{2,n} = g_n, \quad (\text{equação ii})$$

$$\frac{\left(x_{1,n+k} - x_{2,n+k}\right) + p_{1,n} \cdot \left(x_{1,n+k-1} - x_{2,n+k-1}\right) + \cdots + p_{k,n} \left(x_{1,n} - x_{2,n}\right)}{=} = 0, \quad (\text{equação i - ii}).$$

Fica demonstrado o lema 2.5.2. \square

A resolução da equação não homogênea 2.4.1 da página 67, depende da resolução da equação homogênea (quando $g(n) = 0$) que lhe está associada, como visto no lema 2.5.2, assim como da determinação de uma solução particular da equação não homogênea, como se vê no seguinte resultado.

Fórmula 2.5.3: Solução geral eq. dif. lineares de ordem k

$$x_n = x_{p,n} + \sum_{i=1}^k a_i \cdot x_{i,n}.$$

Onde:

- x_n é solução de 2.4.1 da página 67.
- $x_{i,n}$, com $1 \leq i \leq k$, é um conjunto fundamental de k soluções de 2.4.1 da página 67.
- $x_{p,n}$ é uma solução particular da equação homogênea associada de 2.4.1 da página 67.

Prova: Pelo lema 2.5.2 x_n é solução (respectivamente $x_{p,n}$ é solução particular da homogênea associada) e pelo princípio da superposição visto em 2.5, tem-se:

$$x_n - x_{p,n} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot x_{i,n},$$

$$\implies x_n = x_{p,n} + \sum_{i=1}^k a_i \cdot x_{i,n}.$$

Concluindo assim a prova. \square

2.5.2 EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEM K

Considere a equação de diferenças de ordem k 2.4.1 da página 67, com todos os $p_i(n) = p_i$ e $g(n) = 0$:

Fórmula 2.5.4: Eq. Lin. Homogênea com coef. constantes de ordem k

$$x_{n+k} + p_1x_{n+k-1} + p_2x_{n+k-2} + \cdots + p_kx_n = 0,$$

onde p_i são constantes e $p_k \neq 0$.

Nosso objetivo agora é encontrar um conjunto fundamental de soluções e, conseqüentemente, a solução geral da equação 2.5.4. O procedimento é relativamente simples. Já que desejamos um conjunto fundamental de k soluções, todo polinômio^{xv} de grau k possui k raízes.

Suponha que as soluções de 2.5.4 sejam da forma polinomial λ^n , onde $(\lambda_i)_{i=1}^k$ é um número complexo ($\lambda_i \in \mathbb{C}$). Substituindo este valor em 2.5.4, obtemos:

$$\begin{aligned} x_{n+k} + p_{1,n}x_{n+k-1} + p_{2,n}x_{n+k-2} + \cdots + p_{k,n}x_n &= 0, \\ \lambda^{n+k} + p_{1,n}\lambda^{n+k-1} + p_{2,n}\lambda^{n+k-2} + \cdots + p_{k,n}\lambda^n &= 0, \\ \left[\begin{array}{cccc} \lambda^k + p_{1,n}\lambda^{k-1} + p_{2,n}\lambda^{k-2} + \cdots + p_{k,n} \\ \lambda^k + p_{1,n}\lambda^{k-1} + p_{2,n}\lambda^{k-2} + \cdots + p_{k,n} \end{array} \right] \cdot \lambda^n &= 0, \\ \lambda^k + p_{1,n}\lambda^{k-1} + p_{2,n}\lambda^{k-2} + \cdots + p_{k,n} &= 0. \end{aligned}$$

Fórmula 2.5.5: Equação característica

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0.$$

Esta é chamada de equação característica de 2.5.4, e suas raízes λ são chamadas de raízes características. Note que, como $p_k \neq 0$, nenhuma das raízes características é igual a zero. (Por quê?)

Demonstração: Raízes características nenhuma nula implica o coeficiente $p_k \neq 0$.

Para a equação característica:

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_k = 0,$$

^{xv} Pelo Teorema Fundamental da Álgebra.

com raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, temos^{xvi}:

$$\prod_{i=1}^k \lambda_i = (-1)^k p_k.$$

Prova: Por indução matemática:

Para $k = 1$, caso base, temos $\lambda + p_1 = 0 \Rightarrow \lambda = -p_1$.

Assuma que é correto para $k = n$, ou seja,

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n \cdot p_n.$$

Então, para $k = n + 1$, ($n + 1$ raízes, sendo λ_{n+1} uma delas), temos:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} + p_1 \lambda^n + \dots + p_{n+1} &= 0 \\ \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda_{n+1}} + \frac{p_1}{\lambda_{n+1}} \lambda^n + \dots + \frac{p_{n+1}}{\lambda_{n+1}} &= 0 \end{aligned}$$

$$(\lambda - \lambda_{n+1}) \cdot (\lambda^n + \dots + q_n) = 0, \text{ onde } q_n = -\frac{p_{n+1}}{\lambda_{n+1}}.$$

Portanto:

$$\prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \lambda_{n+1} \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_{n+1} (-1)^n q_n = \lambda_{n+1} (-1)^n \left(-\frac{p_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \right) = (-1)^{n+1} p_{n+1}.$$

Claramente, se $p_k \neq 0$, nenhuma das raízes λ_i 's é zero. □

Retomando a equação 2.5.5, temos duas situações a considerar:

Caso (a): Raízes características distintas

Suponha que as raízes características $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sejam distintas. Vamos mostrar que o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções. Para provar isso, por virtude da proposição 2.6, basta mostrar que $W_0 \neq 0$, onde W_n é o casoratiano do conjunto fundamental das soluções. Isto é,

$$W_0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

^{xvi} No século XVII Albert Girard (1590-1633) apresentou uma importante relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial, conhecida como Relações de Girard.

Este determinante é chamado de determinante de Vandermonde. Pode-se demonstrar por indução matemática que

$$W_0 = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i). \quad (\text{Vandermonde (i)})$$

2.5.2.1 Demonstração: Polinômios de Determinante de Vandermonde

Seja

$$V_{k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k & \lambda_{k+1} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 & \lambda_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} & \lambda_{k+1}^{k-1} \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k & \lambda_{k+1}^k \end{vmatrix}.$$

Se considerarmos $V_{k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$ como um polinômio de grau k em λ_{k+1} , notamos que esse polinômio se anula para $\lambda_{k+1} = \lambda_k, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_2, \lambda_1$.

De fato, se tomarmos, por exemplo, $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, obtemos colunas idênticas, o que implica $V_{k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) = 0$.

Considerando H nossa hipótese, tem-se:

$$V_{k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) = H(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \prod_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i).$$

Comparando os coeficientes de λ_k^{k+1} em ambos os lados, obtemos que:

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = V_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k).$$

Logo:

$$V_{k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) = V_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \prod_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i).$$

Similarmente:

$$V_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = V_{k-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_i)$$

e assim por diante:

$$V_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = V_2(\lambda_1, \lambda_2) \prod_{i=1}^2 (\lambda_3 - \lambda_i),$$

$$V_2(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Portanto:

$$V_{k+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) = (\lambda_2 - \lambda_1) \prod_{i=1}^2 (\lambda_3 - \lambda_i) \cdots \prod_{i=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Como todas as λ_i são distintas, segue de (Vandermonde (i)) que $W_0 \neq 0$. Este fato prova que $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções de 2.5.4. \square

Consequentemente, a solução geral de 2.5.4 da página 82 é

Fórmula 2.5.6: Raízes distintas

$$x_n = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i^n, \quad a_i \text{ é um número complexo.}$$

Caso as raízes características sejam múltiplas, a demonstração do resultado abaixo é extremamente técnica e consta na referência (ELAYDI et al., 2005). Aqui, vamos somente enunciar que é dada por:

Fórmula 2.5.7: Solução geral com raízes múltiplas

$$x(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \cdots + a_{i(m_i-1)}n^{m_i-1}).$$

2.5.3 REVISITANDO O PROBLEMA DE FIBONACCI

No exemplo 1.5.2 na página 21, que também foi apresentado na figura 8 na página 21 no estudo populacional dinâmico de coelhos, e também apresentado anteriormente na figura 9 na página 21 no estudo de botânica, queremos encontrar sua **solução geral**. No exemplo da sequência de Fibonacci, calcular o n -ésimo termo não é possível se os termos anteriores da sequência não forem explícitos conforme fórmula 1.5.2 na página 22. Note que esta fórmula, obtida com a técnica da soma telescópica, não tem utilidade prática imediata aos estudantes da educação básica, conforme cita (SETZER, 2020).

Como mostrado na fórmula 2.5.6 na página 85 a solução geral da equação de diferenças (com grau $k = 2$) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ (Sequência de Fibonacci) é:

$$x_n = \sum_{i=1}^2 a_i \lambda_i^n = a_1 \cdot (\lambda_1)^n + a_2 \cdot (\lambda_2)^n,$$

Conforme visto anteriormente, a equação característica 2.5.5 da página 82 para ordem 2 é:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0.$$

Resolvemos a quadrática, com $p_1 = p_2 = -1$, encontrando as raízes características na incógnita λ :

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

Daí, a solução do problema 1.5.2 na página 21 é:

$$x_n = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]^n \cdot a_1 + \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]^n \cdot a_2.$$

Lembrando que as condições iniciais x_0 e x_1 servem para encontrar as constantes a_1 e a_2 arbitrárias.

Encontrando as constantes a_1 e a_2 para problemas de valor inicial.

Se $x_0 = 0$ (No instante inicial $n = 0$, não há casais de coelhos).

Se $x_1 = 1$ (no instante $n = 0 + 1$, há um único casal não fértil), tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Eq. i: } 0 &= \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]^0 \cdot a_1 + \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]^0 \cdot a_2 \\ \text{Eq. i: } 0 &= 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 \\ \text{Eq. i: } 0 &= a_1 + a_2 \\ \implies a_1 &= -a_2 \\ \text{Eq. ii: } 1 &= \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]^1 \cdot a_1 + \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]^1 \cdot a_2 \\ \text{Eq. ii: } 1 &= \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right] \cdot a_1 + \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right] \cdot (-a_1) \\ \text{Eq. ii: } 1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_1 \\ \implies a_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \implies a_2 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Portanto, tem-se:

Fórmula 2.5.8: Fórmula fechada para a sequência de Fibonacci

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^n} \cdot \left[(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right]$$

A fim de reescrever a expressão acima, utilizaremos o número binomial^{xvii} denotado como $\binom{n}{k}$, n e $k \in \mathbb{Z}^+$ definido por:

^{xvii} O coeficiente binomial pode ser interpretado por n escolhe k

Fórmula 2.5.9: Coeficiente Binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad k \leq n$$

Lembrando que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n,$$

Que podemos escrever de forma compacta como:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i,$$

Segue imediatamente da expressão acima que:

$$(a-b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot a^{n-i} \cdot b^i,$$

Assim, a diferença $(a+b)^n - (a-b)^n$ se escreve na forma:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Observe que os termos relativos a i par são cancelados enquanto que os relativos a i ímpar aparecem duplicados. Desta forma a expressão se escreve como:

$$2 \cdot \left[\binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 + \dots + \binom{n}{k-4} a^5 b^{k-4} + \binom{n}{k-2} a^3 b^{k-2} + \binom{n}{k} b^k \right]$$

Ou ainda, de forma mais compacta como:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{5}^i$$

Aplicando este resulta a fórmula 2.5.8 da página 86 com $a = 1$ e $b = \sqrt{5}$ segue que:

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n-1}} \cdot \left[\binom{n}{1} \sqrt{5} + \binom{n}{3} \sqrt{5}^3 + \binom{n}{5} \sqrt{5}^5 + \dots + \binom{n}{k-4} \sqrt{5}^{k-4} + \binom{n}{k-2} \sqrt{5}^{k-2} + \binom{n}{k} \sqrt{5}^k \right]$$

A seguir enunciamos propriedades dos coeficientes binomiais para facilitar seus cálculos.

Propriedade 2.7 Conjunto Complementar

Seja $n = p + q$, $p \leq n$ e $q \leq n$, com $p, q \in \mathbb{Z}^+$, então:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q},$$

ou ainda, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

Prova

A demonstração é imediata aplicando a fórmula 2.5.9 da página 87:

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\ \Leftrightarrow \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} &= \frac{n!}{(n-p)! \cdot (n-(n-p))!} \\ \Leftrightarrow \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} &= \frac{n!}{(n-p)! \cdot (p)!} \end{aligned}$$

Propriedade 2.8 Binomiais equivalentes

Seja $K = \frac{n-p+1}{p}$ com $p \leq n$, n e $p \in \mathbb{Z}^+$, então:

$$\binom{n}{p} = K \cdot \binom{n}{p-1}.$$

Prova

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} &= K \cdot \binom{n}{p-1} \\ \Leftrightarrow \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} &= K \cdot \frac{n!}{(p-1)! \cdot (n-(p-1))!} \\ \Leftrightarrow \frac{\cancel{n!}}{p \cdot \cancel{(p-1)!} \cdot \cancel{(n-p)!}} &= K \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(p-1)!} \cdot (n-p+1) \cdot \cancel{(n-p)!}} \\ \Leftrightarrow K &= \frac{n-p+1}{p} \end{aligned}$$

Propriedade 2.9 Binomiais sequenciais pares ou ímpares

Como corolário da propriedade 2.8 da página 88, temos o seguinte resultado.

Seja $M = \frac{(n-p) \cdot (n-p-1)}{(p+1) \cdot (p+2)}$, ou ainda $M^{-1} = \frac{(n-p) \cdot (n-p-1)}{(p+1) \cdot (p+2)}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{então} \quad \binom{n}{p+2} &= M \cdot \binom{n}{p}, \\ \text{ou ainda} \quad \binom{n}{p} &= M^{-1} \cdot \binom{n}{p+2}. \end{aligned}$$

Enunciadas as propriedades, podemos estudar as expansões da fórmula fechada da sequência de Fibonacci dada em 2.5.8da página 86 em dois casos.

Primeiro caso - n é par

Fórmula 2.5.10: Fórmula fechada para a sequência de Fibonacci - Quando n é par

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n-1}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{5}^i \right].$$

A partir da expressão acima, podemos agora responder a pergunta formulada anteriormente. Quantos casais de coelhos serão criados a partir de um casal de coelhos no prazo de um ano ($n = 12$)?

Para isso, calculamos os coeficientes binomiais:

$$\begin{aligned} \binom{12}{1} &= \frac{12!}{1! \cdot (12-1)!} = 12 \\ \binom{12}{3} &= \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = 220 \\ \binom{12}{5} &= \frac{12!}{5! \cdot (12-5)!} = 792 \end{aligned}$$

Aplicamos a propriedade 2.7:

$$\begin{aligned} \binom{12}{7} &= \binom{12}{5} = \frac{12!}{7! \cdot (12-7)!} = 792 \\ \binom{12}{9} &= \binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \cdot (12-9)!} = 220 \\ \binom{12}{11} &= \binom{12}{1} = \frac{12!}{11! \cdot (12-11)!} = 12 \end{aligned}$$

Calculados os coeficientes binomiais, utilizando-se da fórmula 2.5.10 na página 89, tem-se:

$$x_{12} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot 2^{12-1}} \left[12 \cdot 5^0 + 220 \cdot 5^1 + 792 \cdot 5^2 + 792 \cdot 5^3 + 220 \cdot 5^4 + 12 \cdot 5^5 \right]$$

$$x_{12} = \frac{5}{5 \cdot 2^{11}} \left[294.912 \right] = \frac{294.912}{2^{11}} = \frac{294.912}{2.048}$$

$$x_{12} = 144 \text{ Casais de coelhos a partir do } 12^0 \text{ mês}$$

Segundo caso - n é ímpar

Fórmula 2.5.11: Fórmula fechada para a sequência de Fibonacci - Quando n é ímpar

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n-1}} \left[\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot \sqrt{5}^i \right]$$

Por exemplo se $n = 17$ é ímpar, como pode ser visto no exemplo 1.5.2 na página 21 o termo da sequência vale 1597, que pode ser obtido por exaustão (O que não é prático calcular todos os $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de uma sequência numérica).

Dito isso, é fácil fazer $n = 17$ na fórmula 2.5.8 da página 86 e obter o resultado 1597 sem esforço.

Calculando-se os coeficientes binomiais:

$$\binom{17}{1} = \frac{17!}{1! \cdot (17-1)!} = 17$$

$$\text{Pela propriedade 2.9: } M = \frac{(17-1) \cdot (17-1-1)}{(1+1) \cdot (1+2)} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 8 \cdot 5$$

$$\binom{17}{3} = M \cdot 17 = 40 \cdot 17 = \frac{17!}{3! \cdot (17-3)!} = 680$$

$$\text{Pela propriedade 2.9: } M = \frac{(17-3) \cdot (17-3-1)}{(3+1) \cdot (3+2)} = \frac{14 \cdot 13}{4 \cdot 5} = \frac{91}{10}$$

$$\binom{17}{5} = M \cdot 680 = \frac{91}{10} \cdot 680 = \frac{17!}{5! \cdot (17-5)!} = 6.188$$

$$\text{Pela propriedade 2.9: } M = \frac{(17-5) \cdot (17-5-1)}{(5+1) \cdot (5+2)} = \frac{12 \cdot 11}{6 \cdot 7} = \frac{22}{7}$$

$$\binom{17}{7} = M \cdot 6.188 = \frac{22 \cdot 6.188}{7} = \frac{17!}{7! \cdot (17-7)!} = 19.448$$

$$\text{Pela propriedade 2.9: } M = \frac{(17-7) \cdot (17-7-1)}{(7+1) \cdot (7+2)} = \frac{10 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{5}{4}$$

$$\binom{17}{9} = M \cdot 19.448 = \frac{5}{4} \cdot 19.448 = \frac{17!}{9! \cdot (17-9)!} = 24.310$$

$$\text{Pela propriedade 2.9: } M = \frac{(17-9) \cdot (17-9-1)}{(9+1) \cdot (9+2)} = \frac{8 \cdot 7}{10 \cdot 11} = \frac{28}{55}$$

$$\binom{17}{11} = M \cdot 24.310 = \frac{28}{55} \cdot 24.310 = \frac{17!}{11! \cdot (17-11)!} = 12.376$$

$$\text{Pela propriedade 2.9: } M = \frac{(17-11) \cdot (17-11-1)}{(11+1) \cdot (11+2)} = \frac{6 \cdot 5}{12 \cdot 13} = \frac{5}{26}$$

$$\binom{17}{13} = M \cdot 12.376 = \frac{5}{26} \cdot 12.376 = \frac{17!}{13! \cdot (17-13)!} = 2.380$$

$$\text{Pela propriedade 2.9: } M = \frac{(17-13) \cdot (17-13-1)}{(13+1) \cdot (13+2)} = \frac{4 \cdot 3}{14 \cdot 15} = \frac{2}{35}$$

$$\binom{17}{15} = M \cdot 2.380 = \frac{2}{35} \cdot 2.380 = \frac{17!}{15! \cdot (17-15)!} = 136$$

$$\binom{17}{17} = \frac{17!}{17! \cdot (17-17)!} = 1$$

De posse de todos os binomiais, colocamos todos eles na fórmula 2.5.11 para obter o termo x_{17} :

$$x_{17} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot 2^{17-1}} \left[17 \cdot 5^0 + 680 \cdot 5^1 + 6.188 \cdot 5^2 + 19.448 \cdot 5^3 + 24.310 \cdot 5^4 + 12.376 \cdot 5^5 + 2.380 \cdot 5^6 + 136 \cdot 5^7 + 1 \cdot 5^8 \right]$$

$$x_{17} = \frac{5}{5 \cdot 2^{16}} \left[104.660.992 \right] = \frac{104.660.992}{2^{16}} = \frac{104.660.992}{65.536}$$

$$x_{17} = 1.597 \text{ Casais de coelhos a partir do } 17^{\text{o}} \text{ mês}$$

2.5.3.1 EXEMPLO DE EQUAÇÃO LINEAR HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES DE SEGUNDA ORDEM (QUANDO A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA TEM RAÍZES IGUAIS DE MULTIPLICIDADE 2)

Neste exemplo iremos ilustrar uma abordagem algébrica mais simples do que vista em 2.5.7 na página 85, partindo já da fórmula que usamos no conhecido problema de Fibonacci.

No problema de Fibonacci, para a equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes homogênea do tipo

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n),$$

sua solução geral é

$$x_n = a_1 \cdot (\lambda_1)^n + a_2 \cdot (\lambda_2)^n,$$

onde λ_1 e λ_2 são duas raízes distintas da equação característica. No exemplo 2.5.3.1 temos uma raiz só, de multiplicidade dois que chamaremos apenas de λ .

Exemplo 2.5.8

Considere a equação de diferenças discreta dada por:

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n) = 6 \cdot x_{n+1} - 9 \cdot x_n,$$

com equação característica associada dada por:

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 9 = 0,$$

que tem raízes^a características múltiplas $\lambda = 3$, isto é, $(\lambda - 3)^2 = 0$.

^a Conhecido como raiz dupla.

Por exaustão, pode-se construir a sequência supondo que $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, assim temos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 6 \cdot x_1 - 9 \cdot x_0 = 6 \\ x_3 &= 6 \cdot x_2 - 9 \cdot x_1 = 27 \\ x_4 &= 6 \cdot x_3 - 9 \cdot x_2 = 108 \end{aligned}$$

A solução por exaustão (encontrar $(x_n)_{n=0}^{\infty}$) não é prática, porém é necessário conhecer as condições iniciais para encontrar as constantes a_1 e a_2 . Note que chegamos a uma contradição^{xviii} ao aplicar a fórmula $x_n = a_1 \cdot (\lambda_1)^n + a_2 \cdot (\lambda_2)^n$, portanto vamos manipular algebricamente para demonstrar que a solução de raízes características com multiplicidades tem solução 2.5.7 na página 85.

No que segue construiremos solução do problema de valor inicial de $x_{n+2} = 6 \cdot x_{n+1} - 9 \cdot x_n$ com x_0 e x_1 fixados.

Supondo que o polinômio característico admite duas raízes λ_1 e λ_2 , desta forma, segue das relações de Girard que:

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0,$$

Escrevendo a solução de $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$ na forma:

$$x_n = a_1 \cdot [\lambda_1]^n + a_2 \cdot [\lambda_2]^n,$$

Temos:

$$\begin{cases} x_{n_0} = a_1 \cdot [\lambda_1]^{n_0} + a_2 \cdot [\lambda_2]^{n_0} \\ x_{n_1} = a_1 \cdot [\lambda_1]^{n_1} + a_2 \cdot [\lambda_2]^{n_1} \end{cases}$$

Daí isolamos as duas constantes a_1 e a_2 , substituindo na expressão x_n .

$$(a_1 \ a_2) \times \begin{pmatrix} \lambda_1^{n_0} & \lambda_1^{n_1} \\ \lambda_2^{n_0} & \lambda_2^{n_1} \end{pmatrix} = (x_{n_0} \ x_{n_1}),$$

$$(a_1 \ a_2) = (x_{n_0} \ x_{n_1}) \times \begin{pmatrix} \lambda_1^{n_0} & \lambda_1^{n_1} \\ \lambda_2^{n_0} & \lambda_2^{n_1} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$(a_1 \ a_2) = (x_{n_0} \ x_{n_1}) \times \frac{1}{\lambda_1^{n_0} \cdot \lambda_2^{n_1} - \lambda_2^{n_0} \cdot \lambda_1^{n_1}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2^{n_1} & -\lambda_1^{n_1} \\ -\lambda_2^{n_0} & \lambda_1^{n_0} \end{pmatrix},$$

$$(a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_{n_0} \cdot \lambda_2^{n_1} - x_{n_1} \cdot \lambda_2^{n_0}}{\lambda_1^{n_0} \cdot \lambda_2^{n_1} - \lambda_2^{n_0} \cdot \lambda_1^{n_1}} & \frac{-x_{n_0} \cdot \lambda_1^{n_1} + x_{n_1} \cdot \lambda_1^{n_0}}{\lambda_1^{n_0} \cdot \lambda_2^{n_1} - \lambda_2^{n_0} \cdot \lambda_1^{n_1}} \end{pmatrix},$$

$$x_n = \frac{x_{n_0} \cdot \lambda_1^n \cdot \lambda_2^{n_1} - x_{n_1} \cdot \lambda_1^n \cdot \lambda_2^{n_0} - x_{n_0} \cdot \lambda_2^n \cdot \lambda_1^{n_1} + x_{n_1} \cdot \lambda_2^n \cdot \lambda_1^{n_0}}{\lambda_1^{n_0} \cdot \lambda_2^{n_1} - \lambda_2^{n_0} \cdot \lambda_1^{n_1}},$$

^{xviii} Porque recaímos em um sistema linear impossível. $\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$, a soma de duas coisas iguais não pode resultar em dois valores, isto é um absurdo.

Escolhendo-se $n_0 = 0$ e $n_1 = 1$, podemos colocar a expressão $x_n, n > 1, n \in \mathbb{N}$ de forma fatorada, como segue adiante:

$$x_n = \frac{x_0 \cdot (\lambda_1^n \cdot \lambda_2^1 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1^1) + (x_1 \cdot \lambda_2^n \cdot \lambda_1^0 - \lambda_1^n \cdot \lambda_2^0)}{\lambda_1^0 \cdot \lambda_2^1 - \lambda_2^0 \cdot \lambda_1^1},$$

$$x_n = \frac{x_0 \cdot (\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1) + x_1 \cdot (\lambda_2^n - \lambda_1^n)}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$x_n = \frac{x_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}) + x_1 \cdot (\lambda_2^n - \lambda_1^n)}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$x_n = \frac{-x_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}) + x_1 \cdot (\lambda_2^n - \lambda_1^n)}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

Fatorando as diferenças $\lambda_2^n - \lambda_1^n$ e $\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}$, têm-se:

$$\begin{aligned} \lambda_2^n - \lambda_1^n &= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \underbrace{(\lambda_2^{n-1} \cdot \lambda_1^0 + \lambda_2^{n-2} \cdot \lambda_1 + \lambda_2^{n-3} \cdot \lambda_1^2 + \dots + \lambda_2^2 \cdot \lambda_1^{n-3} + \lambda_2 \cdot \lambda_1^{n-2} + \lambda_1^{n-1} \cdot \lambda_2^0)}_{n \text{ termos}}, \\ \lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} &= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \underbrace{(\lambda_2^{n-2} \cdot \lambda_1^0 + \lambda_2^{n-3} \cdot \lambda_1 + \lambda_2^{n-4} \cdot \lambda_1^2 + \dots + \lambda_2^2 \cdot \lambda_1^{n-4} + \lambda_2 \cdot \lambda_1^{n-3} + \lambda_1^{n-2} \cdot \lambda_2^0)}_{n-1 \text{ termos}}, \end{aligned}$$

Note que a fração $\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}$ tem n termos enquanto que a fração $\frac{\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}$ tem $n-1$ termos.

Como temos raízes de multiplicidade dois, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_n &= -x_0 \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot ([n-1] \cdot \lambda^{n-2}) + x_1 \cdot (n \cdot \lambda^{n-1}), \\ x_n &= -x_0 \cdot ([n-1] \cdot \lambda^n) + x_1 \cdot (n \cdot \frac{\lambda^n}{\lambda}), \end{aligned}$$

Daí concluímos o seguinte resultado. □

Fórmula 2.5.12: Solução de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com raízes características de multiplicidade dupla

$$x_n = \lambda^n \cdot \left\{ \left(\frac{x_1}{\lambda} - x_0 \right) \cdot n + x_0 \right\}.$$

Abaixo apresentamos algumas soluções do problema^{xix} $x_{n+2} = 6 \cdot x_{n+1} - 9 \cdot x_n$, para condições iniciais dadas por x_0 e x_1 :

$$\begin{aligned} \lambda = 3, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad \text{solução:} \quad x_n &= 3^{n-1} \cdot n; \\ \lambda = 3, \quad x_0 = 3, \quad x_1 = 12, \quad \text{solução:} \quad x_n &= 3^n \cdot (n+3); \\ \lambda = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \lambda \cdot x_0, \quad \text{solução:} \quad x_n &= 3^n; \\ \lambda = 3, \quad x_0 = -\frac{x_1}{\lambda}, \quad x_1 = \lambda, \quad \text{solução:} \quad x_n &= 3^n. \end{aligned}$$

^{xix} Note que $\frac{x_1}{\lambda} - x_0$ é uma constante arbitrária que podemos chamá-la de A . Daí pode-se apresentar a solução como $x_n = \lambda^n \cdot (An + x_0)$, ou ainda $x_n = \lambda^n \cdot (A + x_0n)$.

Como $\frac{x_1}{\lambda} - x_0$ é uma constante real, o resultado exposto em 2.5.12 é apresentado em diversas literaturas como $x_n = \lambda^n \cdot (A \cdot n + B)$, com λ autovalor da equação característica, A e B constantes reais a determinar dependendo das condições iniciais e $n \in \mathbb{N}$.

2.6 COBWEBBING

O método gráfico para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, chama-se *cobweb diagram* ou *stair step diagram*. É conhecido como “diagrama escada” ou “diagrama teia de aranha”.

Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que leva o elemento $x \mapsto f(x)$. Transforma-se esta função, numa equação iterativa, fazendo-se $x_{n+1} = f(x_n)$, isto é, o ponto $x_n \rightarrow x_{n+1}$ é levado a x_{n+1} por meio da aplicação da lei f , onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, é a n -ésima iteração sob aplicação de f .

Construímos os gráficos de f e de uma linha diagonal $y = x$. Depois através de sucessivas iterações (x_n, x_{n+1}) vamos construindo o diagrama que possui semelhanças a uma escada ou teia.

Desenhamos uma linha vertical de x_0 até $x_1 = f(x_0)$. Em seguida, desenhamos uma linha horizontal a partir de (x_0, x_1) para interceptar a linha diagonal $y = x$ no ponto (x_1, x_1) . Uma linha vertical desenhada a partir do ponto (x_1, x_1) encontrará o gráfico de f no ponto (x_1, x_2) .

Continuando este processo iterativo, podemos encontrar diversos produtos cartesianos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ de pares ordenados (x_n, x_{n+1}) para todos os valores de $n \in \mathbb{Z}^+$.

Há uma ferramenta na internet disponível em (MINNESOTA, 2023) que permite uma investigação sobre o comportamento dos pontos fixos.

O diagrama de *cobweb* é uma ferramenta importante no estudo de mapas e suas órbitas geradas iterativamente.

2.6.1 EXEMPLOS

Vamos ilustrar a exemplo, o diagrama de *cobweb* de uma função afim.

Exemplo 2.6.1

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que leva $x \mapsto a \cdot x + b$, com $a \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = 1 + 0,8 \cdot x$.

Solução: Para transformar esta função, numa equação a diferenças associada iterativa, fazemos:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

assim, $x_{n+1} = 1 + 0,8 \cdot x_n$ é a equação de diferenças associada. Esta equação tem ponto fixo em:

$$1 + 0,8 \cdot x^* = x^* \Leftrightarrow x^* \cdot (1 - 0,8) = 1 \implies x^* = \frac{1}{0,2} = \frac{10}{2} = 5$$

Sua classificação via derivada é $f'(5) = 0,8 < 1 \implies$ atrator conforme definição 2.3 na página 37.

Note que após a vigésima sétima iteração há uma estabilidade em torno do ponto fixo $4,99 \dots = 5$, (MINNESOTA, 2023).

Explicação analítica

Ao fazermos x_0 em $f(x_0) = x_1$ obtemos $f(x_0) = 1 + 0,8 \cdot x_0$. Daí o próximo iterado é $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, \dots , gerando assim, a sequência:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 0,8 \cdot (1 + 0,8 \cdot x_0) = 1 + 0,8 + 0,8^2 \cdot x_0 = 1,8 + 0,8^2 \cdot x_0, \\ x_3 &= 1 + 0,8 \cdot (1 + 0,8 \cdot x_2) = 1 + 0,8 \cdot (1,8 + 0,8^2 \cdot x_0) = 2,44 + 0,8^3 \cdot x_0, \\ x_4 &= 1 + 0,8 \cdot (1 + 0,8 \cdot x_3) = 1 + 0,8 \cdot (2,44 + 0,8^3 \cdot x_0) = 2,952 + 0,8^4 \cdot x_0, \\ x_5 &= 1 + 0,8 \cdot (1 + 0,8 \cdot x_4) = 1 + 0,8 \cdot (2,952 + 0,8^4 \cdot x_0) = 3,3616 + 0,8^5 \cdot x_0, \\ x_6 &= 1 + 0,8 \cdot (1 + 0,8 \cdot x_5) = 1 + 0,8 \cdot (3,3616 + 0,8^5 \cdot x_0) = 3,6893 + 0,8^6 \cdot x_0, \end{aligned}$$

De modo análogo, seguem os iterados seguintes:

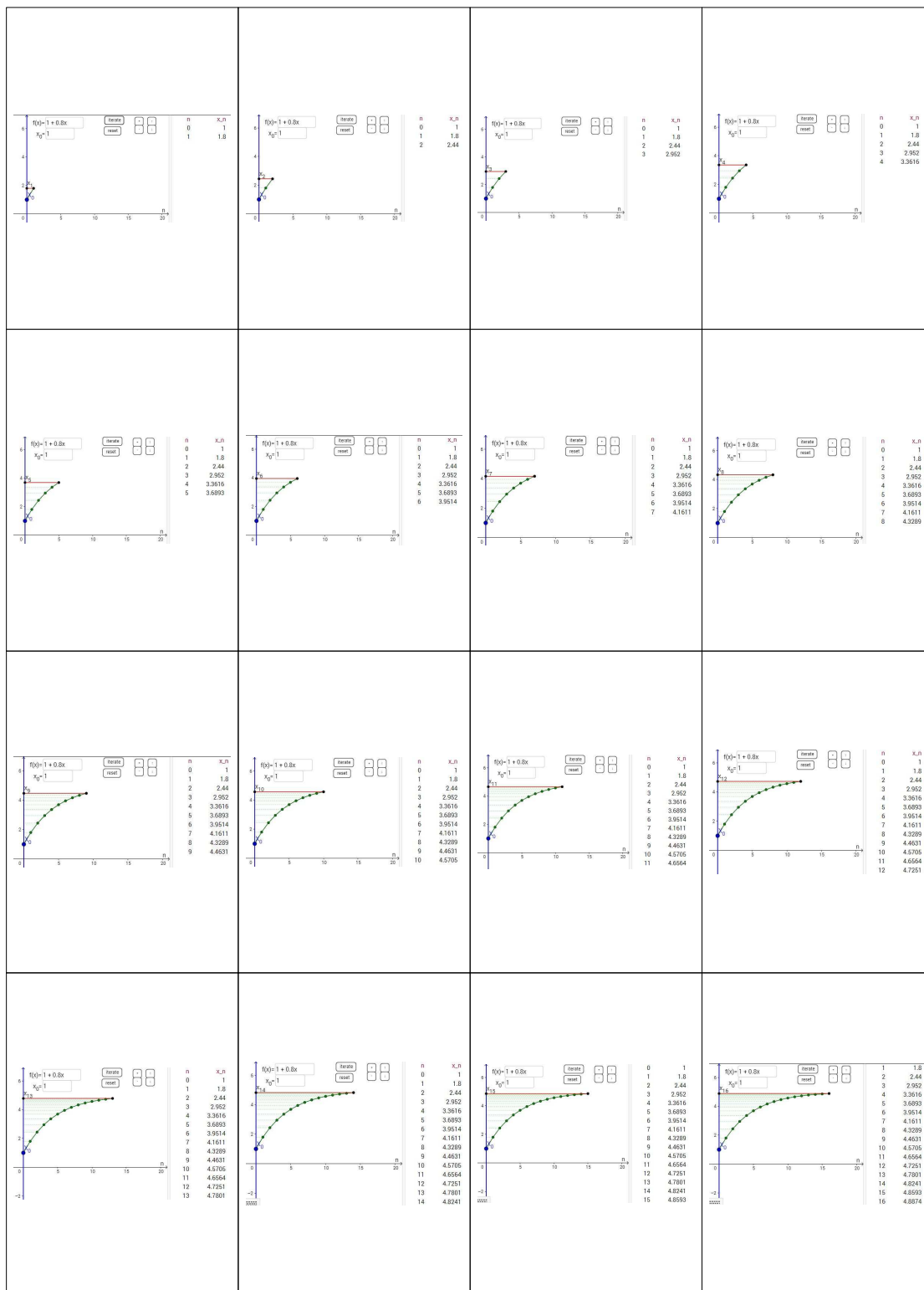


Figura 29: Primeiras 16 interações

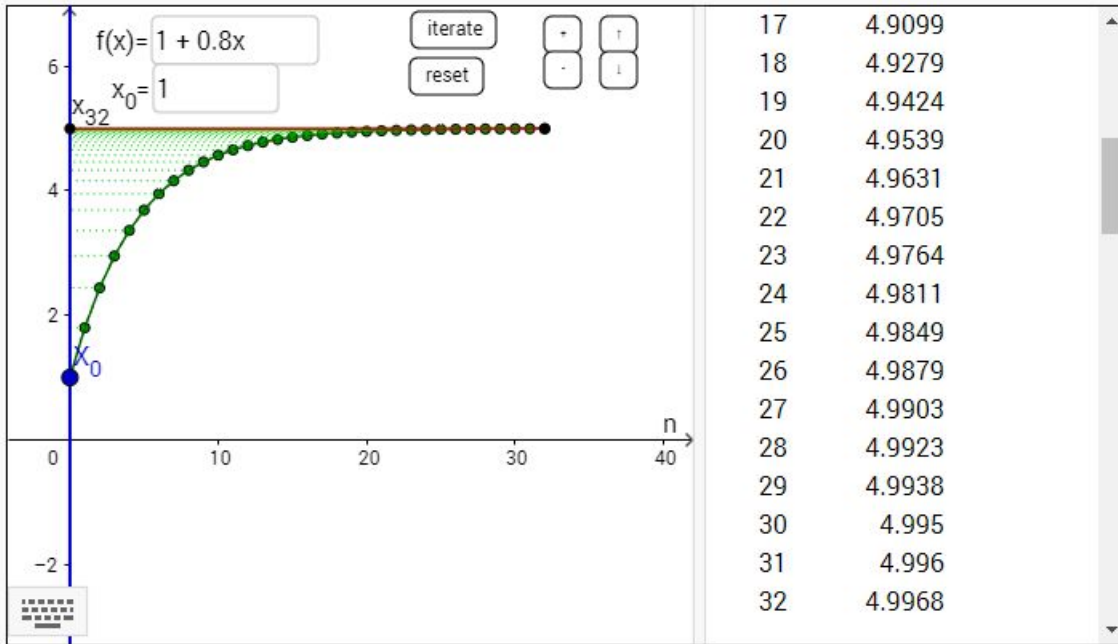


Figura 30: 32 iterações

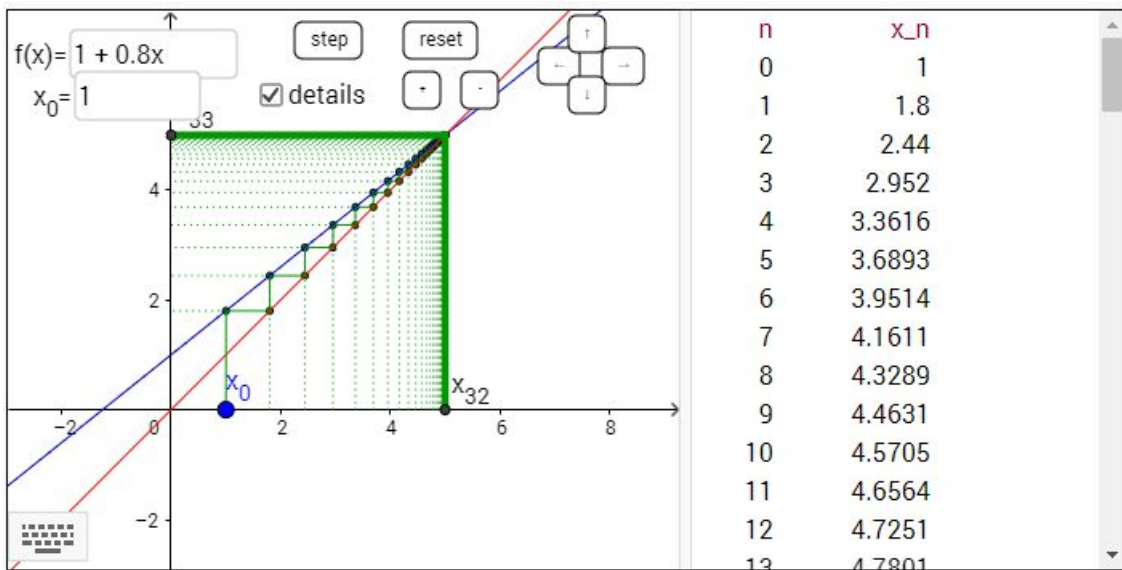


Figura 31: 32 iterações cobweb

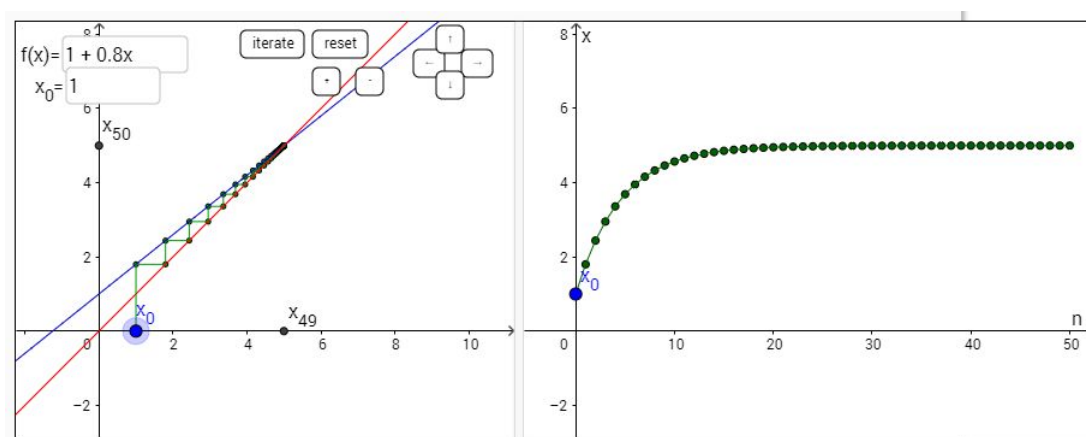


Figura 32: programa escrito na linguagem de programação Java

$$\begin{aligned}
x_7 &= 1 + 0,8 \cdot (3,6893 + 0,8^6 \cdot x_0) = 3,9514 + 0,8^7 \cdot x_0, \\
x_8 &= 1 + 0,8 \cdot (3,9514 + 0,8^7 \cdot x_0) = 4,1611 + 0,8^8 \cdot x_0, \\
x_9 &= 1 + 0,8 \cdot (4,1611 + 0,8^8 \cdot x_0) = 4,3289 + 0,8^9 \cdot x_0, \\
x_{10} &= 1 + 0,8 \cdot (4,3289 + 0,8^9 \cdot x_0) = 4,4631 + 0,8^{10} \cdot x_0, \\
x_{11} &= 1 + 0,8 \cdot (4,4631 + 0,8^{10} \cdot x_0) = 4,5705 + 0,8^{11} \cdot x_0, \\
x_{12} &= 1 + 0,8 \cdot (4,5705 + 0,8^{11} \cdot x_0) = 4,6564 + 0,8^{12} \cdot x_0, \\
x_{13} &= 1 + 0,8 \cdot (4,6564 + 0,8^{12} \cdot x_0) = 4,7251 + 0,8^{13} \cdot x_0, \\
x_{14} &= 1 + 0,8 \cdot (4,7251 + 0,8^{13} \cdot x_0) = 4,7801 + 0,8^{14} \cdot x_0, \\
x_{15} &= 1 + 0,8 \cdot (4,7801 + 0,8^{14} \cdot x_0) = 4,8241 + 0,8^{15} \cdot x_0, \\
x_{16} &= 1 + 0,8 \cdot (4,8241 + 0,8^{15} \cdot x_0) = 4,8593 + 0,8^{16} \cdot x_0, \\
x_{17} &= 1 + 0,8 \cdot (4,8593 + 0,8^{16} \cdot x_0) = 4,8874 + 0,8^{17} \cdot x_0, \\
x_{18} &= 1 + 0,8 \cdot (4,8874 + 0,8^{17} \cdot x_0) = 4,9099 + 0,8^{18} \cdot x_0, \\
x_{19} &= 1 + 0,8 \cdot (4,9099 + 0,8^{18} \cdot x_0) = 4,9279 + 0,8^{19} \cdot x_0,
\end{aligned}$$

Continuando o processo de iterar a equação de diferenças associada, temos:

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
x_{39} &= 1 + 0,8 \cdot (4,9990 + 0,8^{38} \cdot x_0) = 4,9992 + 0,8^{39} \cdot x_0, \\
&\vdots \\
x_\infty &= x^* = 5.
\end{aligned}$$

Em outras palavras, para uma função afim do tipo:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{5} \cdot x,$$

então, o atrator é o ponto fixo:

Fórmula 2.6.1: Ponto fixo atrator

$$x_\infty = x^* = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5.$$

Exemplo 2.6.2

Exemplo super-atrator.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida logo abaixo e considere a equação de diferenças discreta dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Essa equação tem único ponto fixo super-atrator.

A função que leva o elemento $x \mapsto f(x)$, definida conforme segue:

$$f(x) = 3 \cdot x \text{ se } 0 < x \leq 3 \text{ ou,}$$

$$f(x) = 9 \text{ se } x > 3.$$

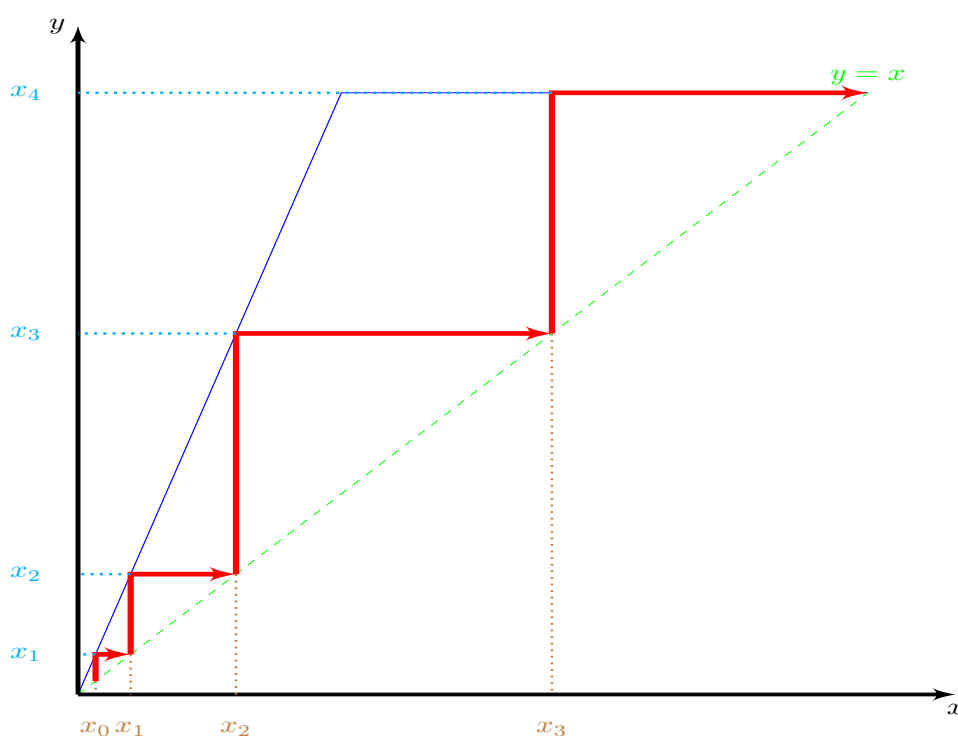


Figura 33: Diagrama de cobweb para $x_0 = 0.2$ e $f(x) = 3 \cdot x$ se $0 < x \leq 3$, $f(x) = 9$ se $x > 3$.

O diagrama de *cobweb* é uma ferramenta gráfica útil para visualizar a dinâmica de uma função iterativa. Neste caso, vemos que, para $x_0 = 0.2$, a sequência gerada pelo mapeamento converge para o ponto fixo em $y = 9$. Podemos observar também que o ponto fixo é a interseção da curva da função iterativa com a reta $y = x$. Isso ocorre porque, em um ponto fixo, temos que $f(x^*) = x^*$, ou seja, a função iterativa

cruza a reta $y = x$ nesse ponto. É mostrado abaixo o que ocorreu analiticamente:

$$x_0 = \frac{2}{10}$$

$$x_1 = f(x_0) = 3 \times \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$$

$$x_2 = f(x_1) = 3 \times \frac{6}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$x_3 = f(x_2) = 3 \times \frac{9}{5} = \frac{27}{5}$$

Como $x_3 > 3$, $\forall j$, tal que $j > 3$, tem-se $x_j > 3 \Leftrightarrow f(x_j) = 9$. Note que $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow 9 = x^*$. Portanto toda sequência caminha para este ponto.

$$x_4 = f(x_3) = 3 \times \frac{27}{5} = 9$$

$$x_5 = x_6 = x_7 = \dots = f(x_4) = 9$$

Considere o exemplo 2.2.3.1 na página 42. Conforme os gráficos 18 na página 44 e 19 na página 45, no método *cobweb*, como o ponto repulsor empurra as órbitas para longe, a visualização gráfica não destaca claramente a presença dele. De fato, parece que só existem atratores (os pontos para os quais as órbitas convergem), já que o método mostra apenas o comportamento a longo prazo das órbitas, que é dominado pelos atratores.

Isto não é uma falha do método *cobweb*. A impressão de que só há dois atratores nestes dois gráficos do exemplo é causada pelo ponto repulsor, que está presente, mas suas propriedades de instabilidade não são evidentes nesse método visual.

2.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, exploramos os conceitos básicos dos sistemas dinâmicos discretos, como pontos fixos, equações autônomas e não-autônomas, expansão em séries de Taylor e comportamento dos sistemas dinâmicos discretos, os pontos fixos atratores e repulsores. Também foram vistas técnicas de solução de sistemas dinâmicos lineares de segunda ordem homogêneos com coeficientes constantes, solução gráfica *cobweb* e discutimos exemplos práticos para ilustrar a aplicação desses conceitos.

3 APLICAÇÃO EM FINANÇAS

3.1 PRÉ-REQUISITOS

O capítulo 1 na página 3.

O capítulo 2 na página 29.

Cotidianamente, enfrentamos dilemas práticos, como decidir se devemos parcelar uma compra e, em caso afirmativo, em quantas parcelas. Também nos deparamos com a decisão de antecipar o pagamento de uma dívida utilizando, por exemplo, o décimo terceiro salário. Tais desafios, quando solucionados adequadamente, podem nos ajudar a tomar decisões financeiras mais eficientes e gerar economia.

As ferramentas matemáticas para abordar essas questões são as progressões geométricas e aritméticas dadas por equações de diferenças, que permitem modelar corretamente problemas para encontrar a solução.

O foco principal é o cálculo de juros em diferentes situações relacionadas a operações de crédito, seja em investimentos (quando emprestamos dinheiro), seja em compras a crédito (quando contraímos empréstimos). Essa análise baseia-se em um teorema fundamentalⁱ, que descreve como o capital inicial se transforma ao longo do tempo sob o regime de juros compostos.

3.2 OBJETIVOS

- Explorar a aplicação de sistemas dinâmicos discretos na área financeira.

3.3 JUSTIFICATIVA

A justificativa para estudar aplicações dos sistemas dinâmicos discretos em finanças é compreender como esses sistemas podem ser aplicados para modelar e analisar fenômenos financeiros complexos.

ⁱ Princípio multiplicativo de um principal por $(1 + i)$, transformando-o em valor futuro e o princípio do quociente por $(1 + i)$, que transforma o principal em valor presente.

3.4 JUROS COMPOSTOS

Uma das aplicações mais significativas da Matemática Financeira, está especificamente nas operações de empréstimo. Nessas operações, uma pessoa que possui um capital inicial C , conhecido como principal, o empresta a outra por um determinado período de tempo. Ao final desse período, o capital C é devolvido acrescido de uma remuneração J , correspondente ao valor do juro. A soma $C + J$ é denominada montante, que representamos por $M = C + J$, ou ainda $\frac{M}{C} = 1 + \frac{J}{C}$.

A relação ou razão $i = \frac{J}{C}$ que expressa a taxa de crescimento do capital, é chamada de taxa de juros nominal (interesse) e sempre se refere ao período da operação financeira.

3.4.1 TAXA EFETIVA E TAXA NOMINAL

Definição 3.1 de Taxas de juros efetiva e nominal

A **taxa de juros nominal** é aquela geralmente indicada em contratos financeiros, boletos bancários, títulos e etc, que expressa os juros em termos anuais ou de outro período de referência, sem levar em conta a frequência de capitalização. Já a **taxa de juros efetiva** considera o efeito das capitalizações no período, refletindo o real aumento no montante em relação ao principal.

Taxa Nominal (i): Representa os juros informados em um contrato, podendo ser referida em termos anuais, mensais ou de outros intervalos. Não reflete diretamente os juros acumulados devido à capitalização.

Taxa Efetiva (\mathcal{I}): É a taxa que reflete o impacto completo das capitalizações no período, expressando a equivalência ao efeito dos juros compostos sobre o principal.

Dito isso, para os dois montantes serem equivalentes, tem-se $C \cdot (1 + \mathcal{I}) = C \cdot (1 + i)^n$. Seja \mathcal{I} a taxa efetiva, i a taxa nominal e n o período, tem-se:

Fórmula 3.4.1: Equivalência entre taxas de juros

$$1 + \mathcal{I} = (1 + i)^n$$

3.4.1 Exemplo Equivalência entre taxas

Qual é a taxa efetiva semestral correspondente a uma taxa nominal proporcional de 24% ao semestre, considerando capitalização mensal?

A taxa de 24% semestral corresponde proporcionalmente a $\frac{24\%}{6} = 4\%$.

$$\begin{aligned} 1 + \mathcal{I} &= \left(1 + i\right)^n \\ 1 + \mathcal{I} &= \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6 \\ 1 + \mathcal{I} &= \left(1,04\right)^6 \\ \mathcal{I} &= 1,2653 - 1 \\ \mathcal{I} &= 0,2653 \\ \mathcal{I} &= 26,53\% \end{aligned}$$

Daí, $\mathcal{I} = 26,53\%$ no final de seis meses. Note que as pessoas menos educadas matematicamente têm tendência a achar que juros de 4% ao mês dão em seis meses juros de 24%.

3.4.2 Exemplo de juros compostos

Considere a taxa de juros nominal mensal fixada em i e um investimento inicial x_0 . Seja x_n o capital após n meses. Determine a renda, modelando-a por equações de diferenças.

Solução: Para cada momento n , tem-se:

Período n ,	Montante	Principal	Juros
$n = 0$,	x_0 principal inicial		
$n = 1$,	x_1	$= x_0$	$+ J_0$
$n = 2$,	x_2	$= x_1$	$+ J_1$
$n = 3$,	x_3	$= x_2$	$+ J_2$
\vdots ,	\vdots	$= \vdots$	$+ \vdots$
$n = k - 1$,	x_{k-1}	$= x_{k-2}$	$+ J_{k-2}$
$n = k$,	x_k	$= x_{k-1}$	$+ J_{k-1}$

Para cada momento n , tem-se:

$$\begin{aligned} n = 0, & \quad x_0 \text{ principal inicial} \\ n = 1, & \quad x_1 = x_0 + i \cdot x_0 \\ n = 2, & \quad x_2 = x_1 + i \cdot x_1 \\ n = 3, & \quad x_3 = x_2 + i \cdot x_2 \\ & \quad \vdots \\ n = k - 1, & \quad x_{k-1} = x_{k-2} + i \cdot x_{k-2} \\ n = k, & \quad x_k = x_{k-1} + i \cdot x_{k-1} \end{aligned}$$

Substituindo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}$ em x_k , vem:

$$\begin{aligned} n = k, \quad x_k &= x_{k-2} \cdot (1+i)^2 = \dots = x_2 \cdot (1+i)^{k-2} \\ \text{continuação, } x_k &= x_1 \cdot (1+i)^{k-1} = \dots = x_0 \cdot (1+i)^k \end{aligned}$$

Desta forma, x_n satisfaz uma equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea dada por $x_{n+1} = x_n \cdot (1+i)$, com valor inicial x_0 , $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{R}$, cuja solução é dada por:

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n$$

Utilizando o jargão de matemática financeira, montante M (acumulado), principal C (capital) e taxa de juros compostos i , tem-se:

Fórmula 3.4.2: Transformação do Capital Principal a regime de juros compostos “i”

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

3.4.2 FINANCIAMENTO COM PRESTAÇÕES FIXAS

Agora aplicaremos o teorema fundamental dito na seção de pré-requisitos deste capítulo. No diagrama 34 cada pagamento “ p ” corresponde a um período n , isto é, o pagamento p_0 é a parcela de pagamento p correspondente na assinatura do contrato inicial, o pagamento p_1 é a parcela um mês seguinte, e assim por diante até completar n pagamentos na última parcela p_{n-1} . Seja a soma de todas as parcelas nos seus respectivos prazos correspondentes igual a S_n , soma definida de n parcelas iguais a $(p_k)_{k=0}^{n-1}$.

Basicamente operamos com multiplicações e divisões em matemática financeira conforme visto na fórmula 3.4.2, tudo depende se a transformação vai n vezes para o futuro, onde multiplica-se o principal por $(1+i)^n$, ou quando a transformação é trazida n vezes para o presente, onde divide-se a importância por $(1+i)^n$.

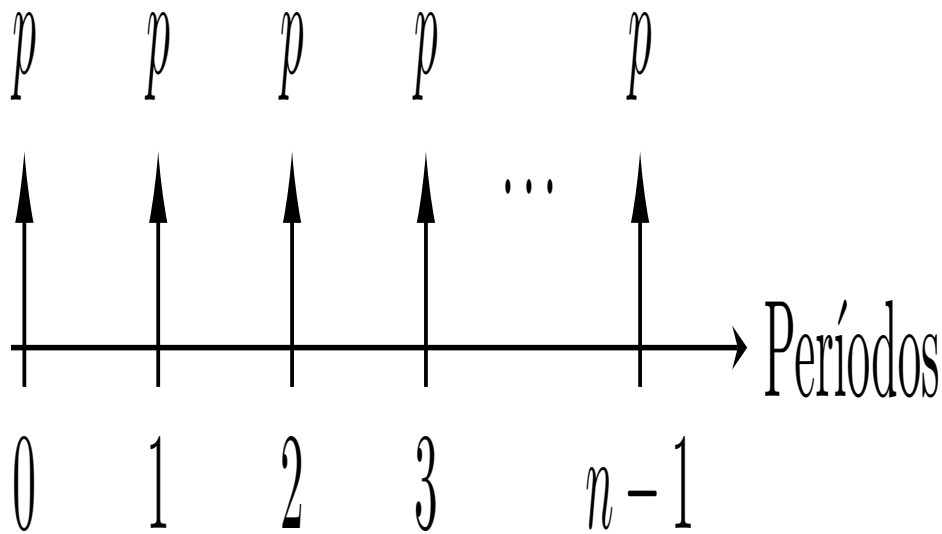


Figura 34: Diagrama com n pagamentos iguais a p ao longo de cada período.

A soma definida S_n é dada por:

$$S_n = \frac{p}{(1+i)} + \frac{p}{(1+i)^2} + \frac{p}{(1+i)^3} + \dots + \frac{p}{(1+i)^{n-1}} + \frac{p}{(1+i)^n} \quad (3.1)$$

Multiplicando-se a equação 3.1 por $\frac{1}{1+i}$, tem-se nova equação 3.2.

$$\frac{1}{(1+i)} \cdot S_n = \frac{p}{(1+i)^2} + \frac{p}{(1+i)^3} + \dots + \frac{p}{(1+i)^n} + \frac{p}{(1+i)^{n+1}} \quad (3.2)$$

Daí ao subtrair a equação (3.2) da equação (3.1), obtém-se o cancelamento telescópico, dado por:

$$(3.2) - (3.1) \underline{\hspace{15em}}$$

$$\Leftrightarrow S_n \cdot \left(1 - \frac{1}{1+i}\right) = \frac{p}{(1+i)} - \frac{p}{(1+i)^{n+1}} = p \cdot \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_n \cdot \left(\frac{1+i-1}{1+i}\right) = S_n \cdot \left(\frac{i}{1+i}\right) = p \cdot \left[\left(1+i\right)^{-1} - \left(1+i\right)^{-(n+1)}\right]$$

$$\Leftrightarrow S_n = p \cdot \frac{\left[\left(1+i\right)^{-1} \cdot \left(1+i\right)^{+1} - \left(1+i\right)^{-(n+1)} \cdot \left(1+i\right)^{+1} \right]}{i}$$

$$\Leftrightarrow S_n = p \cdot \frac{\left[\left(1+i\right)^{(-1+1)} - \left(1+i\right)^{(-n-1+1)} \right]}{i}$$

$$\Leftrightarrow S_n = p \cdot \frac{\left[\left(1+i\right)^{(0)} - \left(1+i\right)^{(-n)} \right]}{i} = p \cdot \frac{\left[1 - \left(1+i\right)^{(-n)} \right]}{i}$$

Fórmula 3.4.3: Fórmula para financiamento com prestações fixas

$$S_n = p \cdot \frac{\left[1 - \left(1+i\right)^{(-n)} \right]}{i}$$

Esta fórmula 3.4.3 é usada pelo Banco Central, conforme cita a fonte, em metodologia de financiamento com prestações fixas p , taxa de juros i e o prazo de financiamento n (CENTRAL, 2023).

Exemplo 3.4.3

Uma dívida de R\$12.000 deve ser amortizada por pagamentos iguais de R\$380 no final de cada mês, mais um pagamento parcial final um mês após o último pagamento de R\$380 ser pago. Se os juros estão a uma taxa anual de 12% compostos mensalmente, construa uma tabela de amortização para mostrar os pagamentos necessários.^a

^a problema 9, da referência (ELAYDI et al., 2005, p. 8).

Solução: Note que a taxa anual é de 12%, que corresponde a uma taxa mensal de 1%.

Usando a fórmula 3.4.3 na página 108, isolando para $n = \frac{\ln \frac{12000}{380} \cdot 1\%}{\ln(1+1\%)}$ resulta em $n = 38,1384$. O que significa que o financiamento deverá ser pago em 38 prestações fixas de R\$380 e um último pagamento final de R\$52,29 (Note que $R\$380,00 \times 0,1383923112 = R\$52,59$).

A seguir, apresentamos uma tabela das equações de diferenças lineares, para acompanhamento da evolução financeira.

Tabela 10 – Amortização de um empréstimo de R\$12.000 a 1% de juros ao mês

Mês	Pag. Mensal	Juros Mensais	Amortização	Saldo
0	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 12.000,00
1	R\$ 380,00	R\$ 120,00	R\$ 260,00	R\$ 11.740,00
2	R\$ 380,00	R\$ 117,40	R\$ 262,60	R\$ 11.477,40
3	R\$ 380,00	R\$ 114,77	R\$ 265,23	R\$ 11.212,17
4	R\$ 380,00	R\$ 112,12	R\$ 267,88	R\$ 10.944,30
5	R\$ 380,00	R\$ 109,44	R\$ 270,56	R\$ 10.673,74
6	R\$ 380,00	R\$ 106,74	R\$ 273,26	R\$ 10.400,48
7	R\$ 380,00	R\$ 104,00	R\$ 276,00	R\$ 10.124,48
8	R\$ 380,00	R\$ 101,24	R\$ 278,76	R\$ 9.845,73
9	R\$ 380,00	R\$ 98,46	R\$ 281,54	R\$ 9.564,18
10	R\$ 380,00	R\$ 95,64	R\$ 284,36	R\$ 9.279,82
11	R\$ 380,00	R\$ 92,80	R\$ 287,20	R\$ 8.992,62
12	R\$ 380,00	R\$ 89,93	R\$ 290,07	R\$ 8.702,55
13	R\$ 380,00	R\$ 87,03	R\$ 292,97	R\$ 8.409,57
14	R\$ 380,00	R\$ 84,10	R\$ 295,90	R\$ 8.113,67
15	R\$ 380,00	R\$ 81,14	R\$ 298,86	R\$ 7.814,81
16	R\$ 380,00	R\$ 78,15	R\$ 301,85	R\$ 7.512,96
17	R\$ 380,00	R\$ 75,13	R\$ 304,87	R\$ 7.208,08
18	R\$ 380,00	R\$ 72,08	R\$ 307,92	R\$ 6.900,17
19	R\$ 380,00	R\$ 69,00	R\$ 311,00	R\$ 6.589,17
20	R\$ 380,00	R\$ 65,89	R\$ 314,11	R\$ 6.275,06
21	R\$ 380,00	R\$ 62,75	R\$ 317,25	R\$ 5.957,81
22	R\$ 380,00	R\$ 59,58	R\$ 320,42	R\$ 5.637,39
23	R\$ 380,00	R\$ 56,37	R\$ 323,63	R\$ 5.313,76
24	R\$ 380,00	R\$ 53,14	R\$ 326,86	R\$ 4.986,90
25	R\$ 380,00	R\$ 49,87	R\$ 330,13	R\$ 4.656,77
26	R\$ 380,00	R\$ 46,57	R\$ 333,43	R\$ 4.323,34
27	R\$ 380,00	R\$ 43,23	R\$ 336,77	R\$ 3.986,57
28	R\$ 380,00	R\$ 39,87	R\$ 340,13	R\$ 3.646,43
29	R\$ 380,00	R\$ 36,46	R\$ 343,54	R\$ 3.302,90
30	R\$ 380,00	R\$ 33,03	R\$ 346,97	R\$ 2.955,93
31	R\$ 380,00	R\$ 29,56	R\$ 350,44	R\$ 2.605,49
32	R\$ 380,00	R\$ 26,05	R\$ 353,95	R\$ 2.251,54
33	R\$ 380,00	R\$ 22,52	R\$ 357,48	R\$ 1.894,06
34	R\$ 380,00	R\$ 18,94	R\$ 361,06	R\$ 1.533,00

Continua na próxima página

Tabela 10 Continuação da página anterior

Mês	Pag. Mensal	Juros Mensais	Amortização	Saldo
35	R\$ 380,00	R\$ 15,33	R\$ 364,67	R\$ 1.168,33
36	R\$ 380,00	R\$ 11,68	R\$ 368,32	R\$ 800,01
37	R\$ 380,00	R\$ 8,00	R\$ 372,00	R\$ 428,01
38	R\$ 380,00	R\$ 4,28	R\$ 375,72	R\$ 52,29
39	R\$ 52,81	R\$ 0,52	R\$ 52,29	R\$ 0,00
TOTAIS	R\$ 14.492,81	R\$ 2.492,81	R\$ 12.000,00	

Exemplo 3.4.4**Amortização de uma dívida**

Sejam x_n , o valor da dívida, p_n , o n -ésimo pagamento^a. Resolva a equação de diferenças linear de primeira ordem não homogênea.

^a Suponha que os juros sejam compostos à taxa i incidente por período de pagamento.

A formulação de nosso modelo, para Amortizaçãoⁱⁱ, aqui é baseada no fato de que o resultado principal permanente x_{n+1} é igual ao valor da dívida pendente x_n , mais os juros nominal incidente no período apurado $i \cdot x_n$ menos o n -ésimo pagamento p_n . Dito isso, tem-se a equação de diferenças linear de primeira ordem homogênea:

$$x_{n+1} = x_n + i \cdot x_n - p_n = (1 + i) \cdot x_n - p_n$$

A solução desta equação de diferenças foi vista em 2.3.2 na página 61. Após o último pagamento atinge o valor zero, pois $(p_k)_{k=0}^{n-1}$, que representa a sequência de pagamentos do financiamento, vai diminuindo o saldo devedor. Assim temos:

$$x_n = (1 + i)^n \cdot x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^{n-k-1} \cdot p_k$$

Na prática, as instituições bancárias realizam estudos para saber a carga de pagamento que a renda familiar comporta comprometer com o financiamento. Normalmente esse valor está em torno de ser não superior a 30% do montante que foi financiado. Essa sequência de pagamentos $p_k = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ costuma ser um valor constanteⁱⁱⁱ.

ⁱⁱ A amortização é o processo pelo qual um empréstimo é reembolsado por uma sequência de pagamentos periódicos, cada um dos quais é parte do pagamento de juros e parte de pagamento para reduzir o valor principal em dívida.

ⁱⁱⁱ O contrato de financiamento com a instituição pode sofrer alterações por diversos motivos, pedido de pausa, inadimplência, falecimento, outros eventos tais como: renegociação voluntária (o cliente pode solicitar mudanças nas condições do financiamento, como taxa de juros ou prazo), mudanças legislativas, revisão judicial.

Exemplo 3.4.5

Suponha que a quantia constante T seja depositada no final de cada período fixo, em um banco que paga juros à taxa i por período. Seja $A(n)$ o valor acumulado no banco após n períodos.

(a) Escreva uma equação de diferenças modelando $A(n)$.

(b) Resolva a equação de diferenças obtida em (a), quando $T = R\$200,00$ no final do período, com taxa de juros de $0,8\%$.^a

^a problema 11 de (ELAYDI et al., 2005, p. 8).

Solução:

☞ item (a)

Para $n = 0$, iniciou-se o acúmulo com o valor zero, $A(0) = 0$, pois o depósito da quantia T é feito ao final do período.

Para $n = 1$, acumulou-se em um período, somente o depósito, já que a quantia que havia $A(0) = 0$ e os juros incidentes sobre esta quantia $A(0) \cdot i = 0$, então $A(1) = A(0) + A(0) \cdot i + T \Leftrightarrow A(1) - A(0) \cdot (1 + i) = T \implies A(1) = T$.

Para $n = 2$, acumulou-se ao final do período, um novo depósito, mais os juros incidentes ao acumulado anterior: $A(2) - A(1) \cdot (1 + i) = T$.

Para $n = 3$, acumulou-se ao final do período, um novo depósito, mais os juros incidentes ao acumulado anterior: $A(3) = T + A(2) \cdot r \implies A(3) - A(2) \cdot (1 + i) = T$.

... e assim por diante, ...

Um período anterior ao n -ésimo período, tem-se: $A(n - 1) = T + A(n - 2) + A(n - 2) \cdot i \implies A(n - 1) - A(n - 2) \cdot (1 + i) = T$

Resultando a seguinte equação de diferenças:

$$A(n) - A(n - 1) \cdot (1 + i) = T$$

Reorganizando todas as equações de diferenças, efetuando os produtos necessários de $(1 + i)$ para o cancelamento telescópico, daí vem que:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{A(1) \cdot (1 + i)^n} & - & A(0) \cdot (1 + i)^n = T \cdot (1 + i)^n, \\ \cancel{A(2) \cdot (1 + i)^{n-1}} & - & \cancel{A(1) \cdot (1 + i)^n} = T \cdot (1 + i)^{n-1}, \\ A(3) \cdot (1 + i)^{n-2} & - & \cancel{A(2) \cdot (1 + i)^{n-1}} = T \cdot (1 + i)^{n-2}, \\ \vdots & & \vdots = \vdots, \\ \cancel{A(n-1) \cdot (1 + i)} & - & A(n-2) \cdot (1 + i)^2 = T \cdot (1 + i), \\ A(n) & - & \cancel{A(n-1) \cdot (1 + i)} = T. \end{array}$$

(+)

$$A(n) - A(0) \cdot (1+i)^n = T + T \cdot (1+i) + T \cdot (1+i)^2 + \dots + T \cdot (1+i)^{n-2} + T \cdot (1+i)^{n-1} + T \cdot (1+i)^n,$$

$$A(n) - A(0) \cdot (1+i)^n = T \cdot \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \right].$$

Reescrevendo a equação de diferenças para o acumulado $A(n)$ no período n , com depósitos T ao fim de cada período, vem:

$$A(n) = A(0) \cdot (1+i)^n + T \cdot \sum_{j=0}^n (1+i)^j$$

Cuja soma definida da PG de $n+1$ termos e razão $(1+i)$, vale:

$$A(n) = A(0) \cdot (1+i)^n + T \cdot \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{(1+i) - 1} = A(0) \cdot (1+i)^n + T \cdot \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} \right]$$

☞ item (b)

$$\begin{aligned} A(n) &= 0 + 200 \cdot \left[\frac{(1,008^{n+1} - 1)}{0,008} \right], \\ A(n) &= (1,008^{n+1} - 1) \cdot 25000. \end{aligned}$$

3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, vimos, como a modelagem matemática através de equações de diferenças é fundamental para modelar fenômenos financeiros.

Dominar a arte dos sistemas dinâmicos requer o uso de ferramentas e técnicas como matemática discreta, simulação computacional e análise de dados.

Parte III

MODELOS MATEMÁTICOS

4 ESTUDO DOS MAPAS DA TENDA E LOGÍSTICO

4.1 PRÉ-REQUISITOS

- Capítulo 1 na página 3.
- Capítulo 2 na página 29.
- Capítulo 3 na página 103.

4.2 OBJETIVOS

- 1) Apresentar dois modelos matemáticos fundamentais. (Mapa da Tenda e Mapa Logístico).
- 2) Estudar o comportamento qualitativo dos modelos matemáticos apresentados, analisar seus pontos fixos e estudar a estabilidade.

4.3 JUSTIFICATIVA

4.3.1 MAPA DA TENDA

O mapa da Tenda é importante na teoria dos sistemas dinâmicos. Suas aplicações incluem:

- **Sistemas de comunicação:** Criação de sequências para codificação de sinais digitais.
- **Modelagem de populações:** Estudo do crescimento populacional e interações entre espécies.
- **Finanças:** Previsão de séries temporais não lineares, como preços de ações.
- **Engenharia de controle:** Projeto de controladores para sistemas dinâmicos não lineares.

- **Estabilidade:** Análise da propagação de pequenas perturbações em sistemas dinâmicos.

Esses itens acima, ilustram a versatilidade do mapa da Tenda em várias áreas, incluindo física, biologia e economia.

4.3.2 MAPAS LOGÍSTICOS

Os modelos logísticos são ferramentas matemáticas amplamente utilizadas para estudar o crescimento e a dinâmica das populações.

Conforme pode ser consultado em (SEADE, 2023), é possível obtermos informações das populações do estado de São Paulo, para posterior estudo com os modelos logísticos.

Em <<https://populationmatters.org>> acesso em 05/11/2023, pode-se verificar a grandeza da preocupação com o crescimento populacional, a dinâmica populacional humana e os seus impactos no planeta.

Nossa visão é a de um futuro em que a nossa população co-exista em harmonia com a natureza e prospere num planeta saudável, para o benefício de todos.

[...]Existem agora mais de 8×10^9 (cerca de oito bilhões) de pessoas no planeta Terra.

[...]Demorou até o início de 1800 para que a população mundial atingisse um bilhão. Agora adicionamos um bilhão a cada 12-15 anos.

A perda de biodiversidade, as alterações climáticas, a poluição, a desflorestação, a escassez de água e de alimentos tudo isto é exacerbado pelos nossos números enormes e cada vez maiores. Nosso impacto no meio ambiente é produto do nosso consumo e dos nossos números. Devemos abordar ambos.

As aplicações dos modelos logísticos incluem recursos naturais e consumo:

- **Aumento do uso de fertilizantes:** contaminação do solo e das águas, afetando ecossistemas.
- **Aumento de dióxido de carbono (CO₂):** contribui para o aquecimento global e acidificação dos oceanos.
- **Escassez de água potável:** racionamento e competição por recursos hídricos.
- **Aumento da pesca predatória:** colapsos ecológicos e impacto na segurança alimentar.
- **Perda de florestas tropicais:** redução da biodiversidade e agravamento das mudanças climáticas.

O crescimento desenfreado populacional pode gerar pobreza e afetar o desenvolvimento:

- **Menor número de empregos e renda:** massa populacional ultrapassa a criação de postos de trabalho.
- **Educação de qualidade em queda:** sistemas educacionais sobrecarregados.

Danos climáticos e à biodiversidade podem ser previstos pelos modelos logísticos:

- **Destruição de reservas naturais** devido à exploração de habitats para construção e agricultura que intensifica as mudanças climáticas.
- **Extinção de espécies** devido à caça predatória causando desequilíbrios nos ecossistemas.

4.3.3 HISTÓRICO DOS MODELOS LOGÍSTICOS

A seguir estão os principais contribuintes para o desenvolvimento dessa teoria:

- **Thomas Robert Malthus (1798).**
- **Pierre-François Verhulst (1838).**
- **Raymond Pearl e Lowell Reed (1920).**
- **Alfred J. Lotka (1925).**
- **Vito Volterra (1926).**
- **May (1976)**

Diversos pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento desses modelos. Malthus foi o primeiro a propor um modelo de crescimento populacional exponencial. Verhulst, posteriormente, introduziu melhorias no modelo de Malthus, considerando a capacidade de suporte do ambiente e a taxa de mortalidade.

Pearl e Reed aplicaram a equação logística ao crescimento populacional humano, enquanto Lotka desenvolveu uma equação similar para o crescimento populacional animal, considerando a interação com o ambiente. Volterra propôs um sistema de equações a diferenças para modelar interações entre espécies animais. Esses modelos têm aplicações em diversas áreas, como ecologia, economia, demografia e epidemiologia. Pearl, Reed, e Lotka expandiram o estudo do crescimento populacional

para incluir interações entre espécies, enquanto Volterra descreveu a interação entre duas espécies usando um sistema de equações diferenciais.

4.4 MAPA DA TENDA

Apresentar-se-á o primeiro modelo matemático deste capítulo.

A função $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$), $T(x)$ com $x \in \mathbb{R}$ e $T(x) = 1 - 2 \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right|$ tem gráfico, dado pela Figura 35 da página 119.

A equação de diferenças associada ao mapa da Tenda tem a forma:

$$x_{n+1} = 1 - 2 \cdot \left| x_n - \frac{1}{2} \right|, \quad (\chi)$$

Observe que a função $T(x)$ pode ser expressa alternativamente na forma:

$$T(x) = \begin{cases} 2 \cdot x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2 \cdot x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Através dos gráficos das Figuras 35, 36, 37 e 38, seguem os respectivos diagramas de *cobweb*, onde é possível observar algumas órbitas e seus pontos fixos.

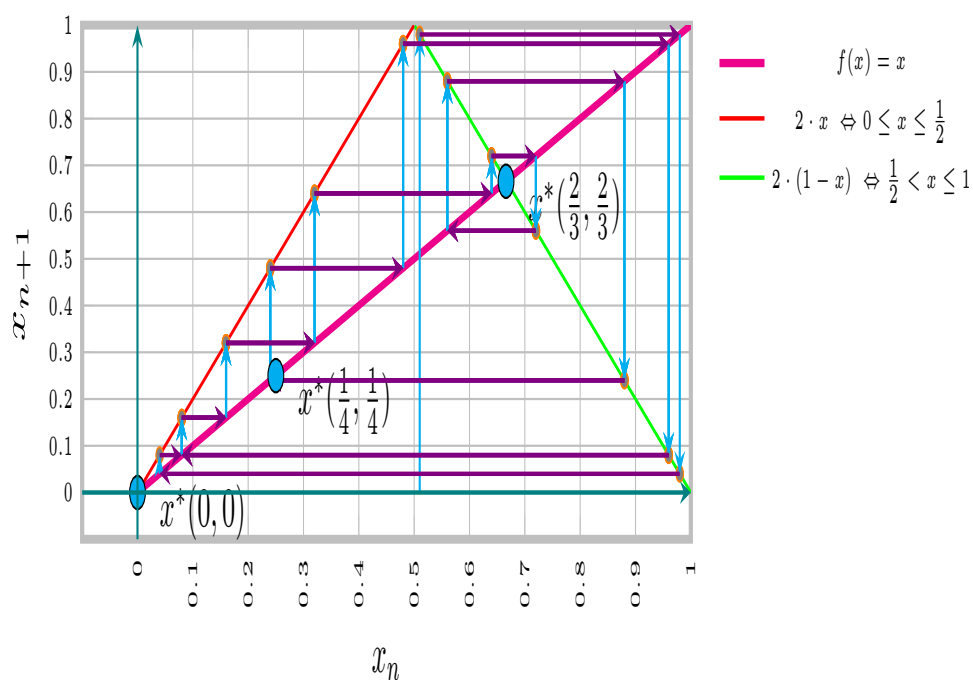


Figura 35: Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,51$ com 36 iterações.

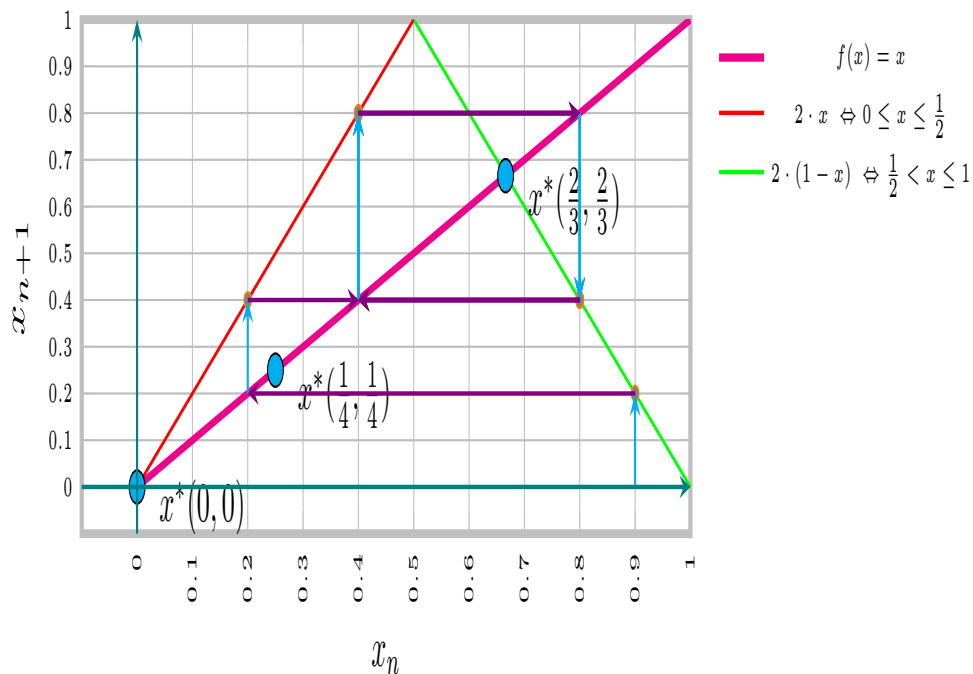


Figura 36: Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,9$ com 12 iterações.

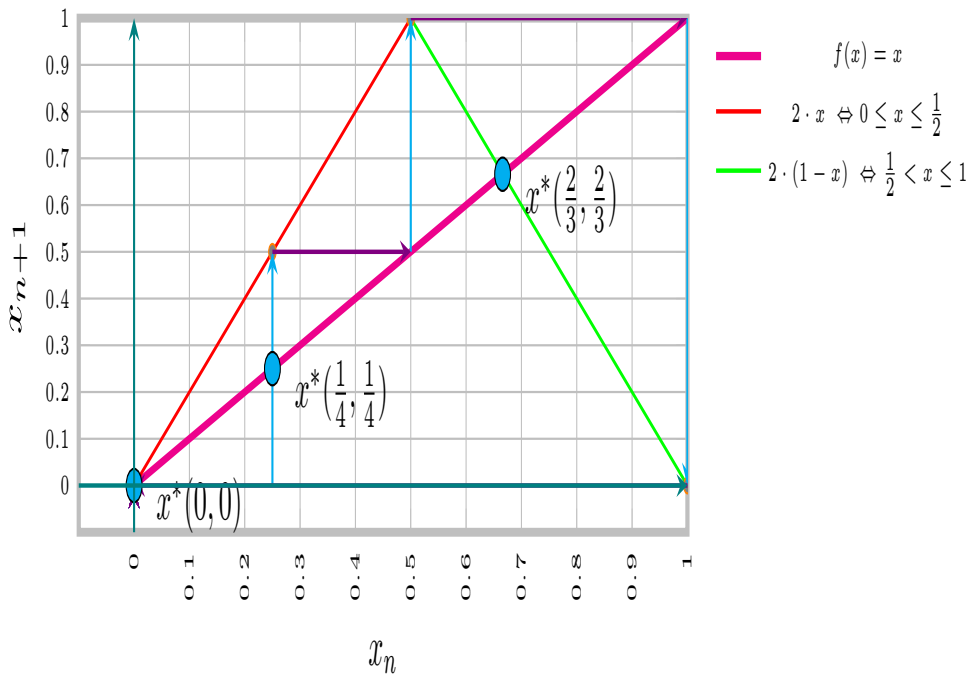


Figura 37: Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,25$ com 12 iterações. Ponto Fixo Eventual.

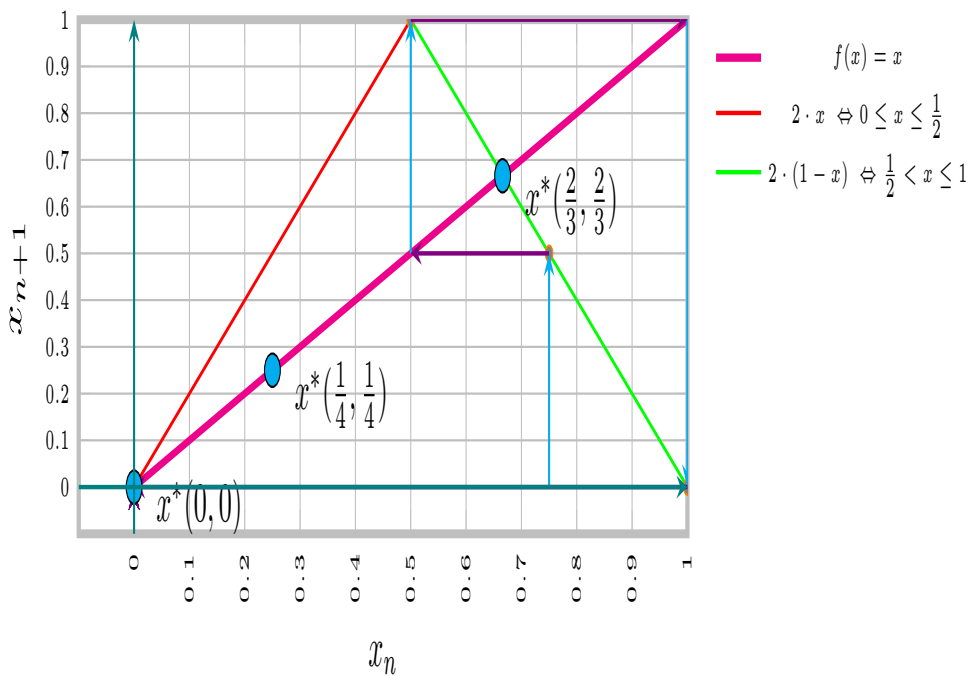


Figura 38: Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda, para $x_0 = 0,75$ com 12 iterações. Ponto fixo Eventual.

4.4.1 PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA

Conforme visto no capítulo 2, basta estudar os pontos em que $T(x^*) = x^*$.

$$T(x^*) = x^* : \begin{cases} \text{Para } x^* \in [0, \frac{1}{2}]: 2 \cdot x^* = x^* \Leftrightarrow 2 \cdot x^* - x^* = 0 \Leftrightarrow x^* = 0 \\ \text{Para } x^* \in]\frac{1}{2}, 1]: -2 \cdot x^* + 2 = x^* \Leftrightarrow 3 \cdot x^* = 2 \Leftrightarrow x^* = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, a função Tenda $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite dois pontos fixos $x^* = \{0, \frac{2}{3}\}$, $0 \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\frac{2}{3} \in]\frac{1}{2}, 1]$.

4.4.2 PONTOS FIXOS EVENTUAIS DO MAPA DA TENDA

Considere a condição inicial $x_0 = \frac{1}{4}$: Tem-se que a órbita por x_0 do mapa da Tenda é dada por:

$$x_{n+1} : \begin{cases} x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \dots \rightarrow x^* \\ \frac{1}{4} \rightarrow T\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow T\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow T(1) \rightarrow T(0) \rightarrow \dots \rightarrow x^* \\ \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow x^* = 0 \\ \bar{x} = \frac{1}{4} \rightarrow T^2\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow T^3\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow T^4\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow T^5\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow \dots \rightarrow T^r\left(\frac{1}{4}\right) = x^* \end{cases}$$

Desta forma, $x_0 = \frac{1}{4}$ é um ponto fixo eventual de (χ) .

As Figuras 37 e 38 da página 120 ilustram como este fenômeno ocorre.

4.4.3 CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA

$$\text{Para isto basta estudar } T'(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -2, & x \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Conforme definição 2.3 na página 37 o ponto fixo $x^* = 0$ é repulsor, pois $|T'(0)| > 1$, e o ponto fixo $x^* = \frac{2}{3}$ é repulsor, pois $|T'(\frac{2}{3})| > 1$.

4.4.4 MAPA DA TENDA GENERALIZADO

O mapa da Tenda generalizado pode ser definido em função de um parâmetro λ da seguinte forma:

$$T(x) = \begin{cases} \lambda \cdot x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \lambda \cdot (1 - x), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

4.4.5 PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA GENERALIZADO

Conforme visto anteriormente, basta estudar os pontos em que $T(x^*) = x^*$.

ⁱ Vide definição 2.4 na página 38.

$$T(x^*) = x^* : \begin{cases} \text{Para } x^* \in [0, \frac{1}{2}]: \lambda \cdot x^* = x^* \Leftrightarrow \lambda \cdot x^* - x^* = 0 \Leftrightarrow x^* = 0 \\ \text{Para } x^* \in [\frac{1}{2}, 1]: -\lambda \cdot x^* + \lambda = x^* \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot x^* = \lambda \Leftrightarrow x^* = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \end{cases}$$

4.4.6 CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS FIXOS DO MAPA DA TENDA GENERALIZADO

A derivada do mapa da Tenda generalizado é:

$$T'(x) = \begin{cases} \lambda, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -\lambda, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Assim o módulo da derivada $|T'(x)| = \lambda$ em qualquer ponto. Para $\lambda > 1$, temos $T'(x) > 1$, indicando que x^* é **repulsor**ⁱⁱ.

4.4.7 GRÁFICO DO MAPA DA TENDA GENERALIZADO

A seguir, mostra-se o Gráfico do Mapa da Tenda generalizado para alguns valores do parâmetro λ . Como podemos observar na Figura 39 na página 122, a intersecção das curvas, com a linha diagonal $y = x$ são os pontos fixos.

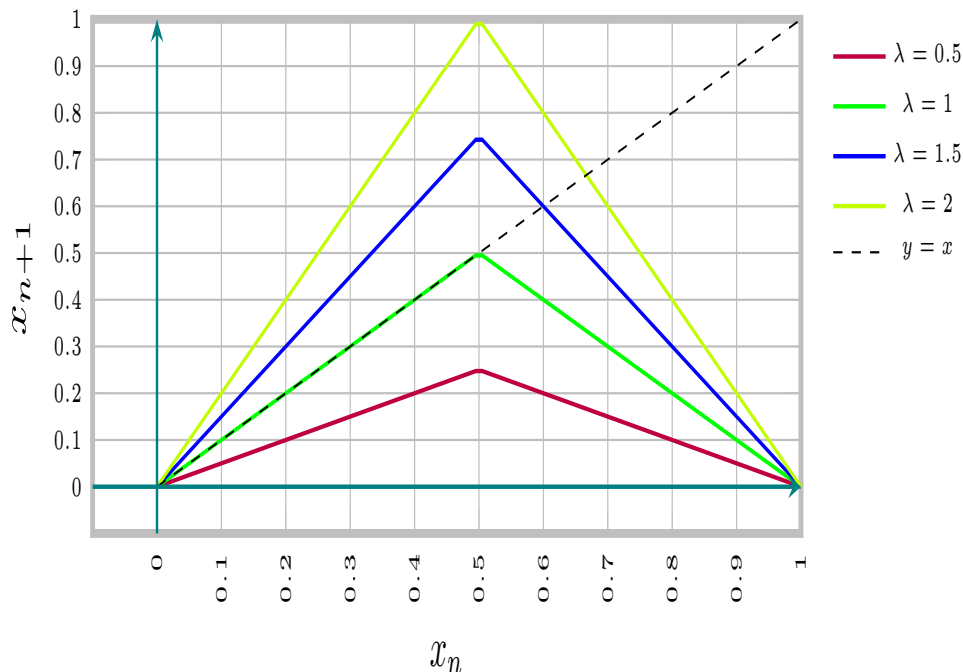


Figura 39: Mapas da Tenda com diversos parâmetros λ .

ⁱⁱ Observar a definição 2.3 da página 37 e comparar com o parâmetro λ para verificação da estabilidade dos pontos fixos.

Observe que quando $\lambda = 1$, temos um ponto contínuo de pontos fixos para o mapa de tenda generalizado.

4.4.8 CICLOS PERIÓDICOS DO MAPA DA TENDA

Como foi visto na Definição 2.5 na página 40, para se encontrar pontos periódicos estudamos $T^n(x_p) = x_p$ com $n \in \mathbb{N}$. Aqui vamos considerar o mapa da tenda clássico, isto é, quando $\lambda = 2$.

4.4.8.1 CICLO 2-PERIÓDICO

Para estudar os ciclos 2–periódicos, temos que considerar a função $T^2(x)$ e estudar seus pontos fixos. Esta função toma a forma:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4 \cdot x, & x < \frac{1}{4}, \\ -4 \cdot x + 2, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 4 \cdot x - 2, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -4 \cdot x + 4, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4.4.8.2 CICLO 3-PERIÓDICO

De modo análogo, os ciclos 3–periódicos, temos que considerar a função $T^3(x)$ e estudar seus pontos fixos. Esta função toma a forma:

$$T^3(x) = \begin{cases} 8 \cdot x, & x < \frac{1}{8}, \\ -8 \cdot x + 2, & \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4}, \\ 8 \cdot x - 2, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{8}, \\ -8 \cdot x + 4, & \frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 8 \cdot x - 4, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{8}, \\ -8 \cdot x + 6, & \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 8 \cdot x - 6, & \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8}, \\ -8 \cdot x + 8, & \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4.4.8.3 CICLO 4-PERIÓDICO

De modo análogo, os ciclos 4–periódicos, temos que considerar a função $T^4(x)$ e estudar seus pontos fixos. Esta função toma a forma:

$$T^4(x) = \begin{cases} 16 \cdot x, & x < \frac{1}{16}, \\ -16 \cdot x + 2, & \frac{1}{16} \leq x < \frac{2}{16}, \\ 16 \cdot x - 2, & \frac{2}{16} \leq x < \frac{3}{16}, \\ -16 \cdot x + 4, & \frac{3}{16} \leq x < \frac{4}{16}, \\ 16 \cdot x - 4, & \frac{4}{16} \leq x < \frac{5}{16}, \\ -16 \cdot x + 6, & \frac{5}{16} \leq x < \frac{6}{16}, \\ 16 \cdot x - 6, & \frac{6}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ -16 \cdot x + 8, & \frac{7}{16} \leq x < \frac{8}{16}, \\ 16 \cdot x - 8, & \frac{8}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ -16 \cdot x + 10, & \frac{9}{16} \leq x < \frac{10}{16}, \\ 16 \cdot x - 10, & \frac{10}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ -16 \cdot x + 12, & \frac{11}{16} \leq x < \frac{12}{16}, \\ 16 \cdot x - 12, & \frac{12}{16} \leq x < \frac{13}{16}, \\ -16 \cdot x + 14, & \frac{13}{16} \leq x < \frac{14}{16}, \\ 16 \cdot x - 14, & \frac{14}{16} \leq x < \frac{15}{16}, \\ -16 \cdot x + 16, & \frac{15}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4.4.8.4 CICLO 5-PERIÓDICO

De modo análogo, os ciclos 5–periódicos, temos que considerar a função $T^5(x)$ e estudar seus pontos fixos. Esta função toma a forma:

$$T^5(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 32 \cdot x, & x < \frac{1}{32}, \\ -32 \cdot x + 2, & \frac{1}{32} \leq x < \frac{2}{32}, \\ 32 \cdot x - 2, & \frac{2}{32} \leq x < \frac{3}{32}, \\ -32 \cdot x + 4, & \frac{3}{32} \leq x < \frac{4}{32}, \\ 32 \cdot x - 4, & \frac{4}{32} \leq x < \frac{5}{32}, \\ -32 \cdot x + 6, & \frac{5}{32} \leq x < \frac{6}{32}, \\ 32 \cdot x - 6, & \frac{6}{32} \leq x < \frac{7}{32}, \\ -32 \cdot x + 8, & \frac{7}{32} \leq x < \frac{8}{32}, \\ 32 \cdot x - 8, & \frac{8}{32} \leq x < \frac{9}{32}, \\ -32 \cdot x + 10, & \frac{9}{32} \leq x < \frac{10}{32}, \\ 32 \cdot x - 10, & \frac{10}{32} \leq x < \frac{11}{32}, \\ -32 \cdot x + 12, & \frac{11}{32} \leq x < \frac{12}{32}, \\ 32 \cdot x - 12, & \frac{12}{32} \leq x < \frac{13}{32}, \\ -32 \cdot x + 14, & \frac{13}{32} \leq x < \frac{14}{32}, \\ 32 \cdot x - 14, & \frac{14}{32} \leq x < \frac{15}{32}, \\ -32 \cdot x + 16, & \frac{15}{32} \leq x < \frac{16}{32}, \\ 32 \cdot x - 16, & \frac{16}{32} \leq x < \frac{17}{32}, \\ -32 \cdot x + 18, & \frac{17}{32} \leq x < \frac{18}{32}, \\ 32 \cdot x - 18, & \frac{18}{32} \leq x < \frac{19}{32}, \\ -32 \cdot x + 20, & \frac{19}{32} \leq x < \frac{20}{32}, \\ 32 \cdot x - 20, & \frac{20}{32} \leq x < \frac{21}{32}, \\ -32 \cdot x + 22, & \frac{21}{32} \leq x < \frac{22}{32}, \\ 32 \cdot x - 22, & \frac{22}{32} \leq x < \frac{23}{32}, \\ -32 \cdot x + 24, & \frac{23}{32} \leq x < \frac{24}{32}, \\ 32 \cdot x - 24, & \frac{24}{32} \leq x < \frac{25}{32}, \\ -32 \cdot x + 26, & \frac{25}{32} \leq x < \frac{26}{32}, \\ 32 \cdot x - 26, & \frac{26}{32} \leq x < \frac{27}{32}, \\ -32 \cdot x + 28, & \frac{27}{32} \leq x < \frac{28}{32}, \\ 32 \cdot x - 28, & \frac{28}{32} \leq x < \frac{29}{32}, \\ -32 \cdot x + 30, & \frac{29}{32} \leq x < \frac{30}{32}, \\ 32 \cdot x - 30, & \frac{30}{32} \leq x < \frac{31}{32}, \\ -32 \cdot x + 32, & \frac{31}{32} \leq x \leq 1. \end{array} \right.$$

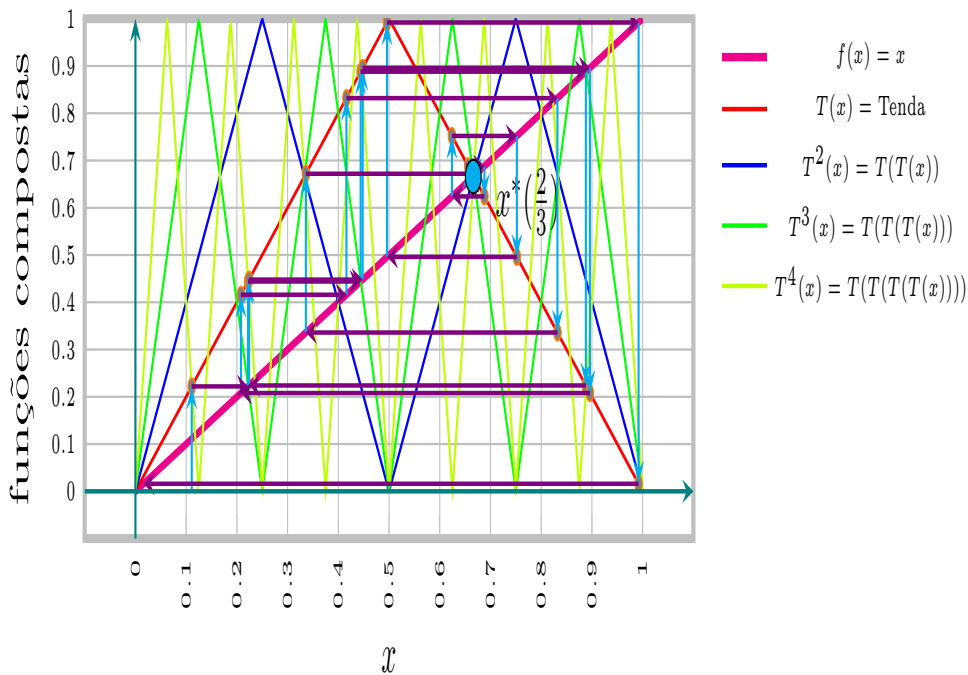


Figura 40: Diagrama Cobweb do Mapa da Tenda com $x_0 = 0,111$, $\lambda = 2$ para 18 iterações.

Como esperado, para o mapa da Tenda com $\lambda = 2$, cada iteração dobra o número de “picos”, mostrando o crescimento da complexidade através da Figura 40.

Estudando $T^2(x_p) = x_p$ encontramos quatro pontos $x_p = \{0; \frac{2}{5}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}\}$. Como $x^* = \{0; \frac{2}{3}\}$ são pontos fixos de $T(x)$ (portanto são fixos de $T^2(x)$), segue que para existe apenas um 2-ciclo a saber $\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\}$.

Estudando $T^3(x_p) = x_p$ encontramos oito novos pontos:

$$x_p = \left\{0; \frac{2}{9}; \frac{2}{7}; \frac{4}{9}; \frac{4}{7}; \frac{6}{9}; \frac{6}{7}; \frac{8}{9}\right\}.$$

Estudando $T^4(x_p) = x_p$, surgem dezesseis novos pontos, tais como:

$$x_p \in \left\{0, \frac{2}{17}, \frac{2}{15}, \frac{4}{17}, \frac{4}{15}, \frac{6}{17}, \frac{6}{15}, \frac{8}{17}, \frac{8}{15}, \frac{10}{17}, \frac{10}{15}, \frac{12}{17}, \frac{12}{15}, \frac{14}{17}, \frac{14}{15}, \frac{16}{17}\right\}.$$

Estudando $T^5(x_p) = x_p$, surgem trinta e dois novos pontos, tais como:

$$x_p \in \left\{0, \frac{1}{33}, \frac{2}{33}, \frac{3}{33}, \frac{4}{33}, \frac{5}{33}, \frac{6}{33}, \frac{7}{33}, \frac{8}{33}, \frac{9}{33}, \frac{10}{33}, \frac{11}{33}, \frac{12}{33}, \frac{13}{33}, \frac{14}{33}, \frac{15}{33}, \frac{16}{33}, \frac{17}{33}, \frac{18}{33}, \frac{19}{33}, \frac{20}{33}, \frac{21}{33}, \frac{22}{33}, \frac{23}{33}, \frac{24}{33}, \frac{25}{33}, \frac{26}{33}, \frac{27}{33}, \frac{28}{33}, \frac{29}{33}, \frac{30}{33}, \frac{31}{33}, \frac{32}{33}\right\}.$$

Como queremos estudar a estabilidade desses pontos periódicos, aplicamos a definição 2.5 na página 40.

Exemplo 4.4.1

Seja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida pelo mapa da Tenda para $\lambda = 2$. Mostre que $\{\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\}$ são pontos 3-periódico instável.

Demonstração. Já vimos anteriormente que estes pontos pertencem ao ciclo 3-periódico.

Note que as derivadas $|T'(\frac{2}{9})| = |T'(\frac{4}{9})| = |T'(\frac{8}{9})| = 2 > 1$, aplicando a definição 2.5 da página 40, tem-se:

$$\left|T' \left(\frac{2}{9}\right)\right| \cdot \left|T' \left(\frac{4}{9}\right)\right| \cdot \left|T' \left(\frac{8}{9}\right)\right| = 8 > 1$$

Daí implica que o ciclo 3-periódico $\{\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\}$ é instável. \square

O Teorema de Li e Yorke (LI; YORKE, 2004) afirma que, em sistemas dinâmicos, se um ponto de um sistema iterativo tem um ciclo 3-periódico instável (ou seja, o ciclo de período 3 não é estável), então o sistema possui caos. Mais especificamente, o teorema afirma que se houver um ciclo 3-periódico instável, o sistema apresenta uma dinâmica caótica e, por consequência, a presença de um atrator estranho.

4.4.9 NÚMEROS DIÁDICOS

Chamamos de números racionais diádicos uma classe especial de números racionais que podem ser expressos como frações em que o denominador é uma potência de 2, isto é, são do tipo $\frac{k}{2^n}$ com k e $n \in \mathbb{Z}^+$.

Alguns exemplos de números racionais diádicos são:

$$\frac{1}{2}, (k = 1, n = 1)$$

$$\frac{3}{4}, (k = 3, n = 2)$$

$$\frac{5}{8}, (k = 5, n = 3)$$

Esses números podem ser representados de forma exata em binário, pois o denominador é uma potência de 2. Por exemplo; $\frac{1}{2}$ em binário é 0,1; $\frac{3}{4}$ é 0,11 e $\frac{5}{8}$ é 0,101.

Proposição 4.1

Todo número racional da forma $\frac{k}{2^n}$, com $k, n \in \mathbb{Z}^+$, é ponto fixo eventual do mapa da Tenda $T(x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$.

Demonstração. Vamos utilizar indução sobre n . Para o caso, $n = 1$, isto é, $x_0 = \frac{k}{2}$, $0 < k < 2$, temos:

Hipótese de indução: Suponha o resultado válido para todo natural $< n$. Vamos mostrar que o resultado é válido para:

$$T\left(\frac{k}{2^n}\right) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{k}{2^n} & , \text{com } \frac{k}{2^n} \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 \cdot \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) & , \text{com } \frac{k}{2^n} \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Caso 1: $\frac{k}{2^{n-1}}$, com $0 \leq k \leq 2^{n-1} \in [0, 2^{n-1}]$,

Segue da hipótese de indução que existe $s > 0$ tal que $T^s\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0$, o que implica $T^{s+1}\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Caso 2: } T\left(\frac{k}{2^n}\right) &= 2 \cdot \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2^n - k}{2^n}\right) = \frac{2^n - k}{2^{n-1}} = \frac{\tilde{k}}{2^{n-1}} \quad , \text{com } \tilde{k} \in [0, 2^{n-1}], \\ \frac{1}{2} \leq \frac{k}{2^n} \leq 1 & \Leftrightarrow 2^{n-1} \leq k \leq 2^n & \Leftrightarrow 0 \leq 2^n - k \leq 2^{n-1} \end{aligned}$$

Segue da hipótese de indução que existe $s > 0$ tal que $T^s\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0$, o que implica $T^{s+1}\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0$.

□

4.5 MODELOS LOGÍSTICOS

4.5.1 MODELO DE MALTHUS

Seja x_0 o número inicial de indivíduos de uma população. Denotamos por x_n o tamanho da população no instante n , para $n \in \mathbb{N}$. Suponha que a taxa de crescimento seja r , isto é, $r = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$ com $0 \leq r \leq 1$. Definimos $\lambda = r + 1$, o que implica $1 \leq \lambda \leq 2$.

A razão entre a variação populacional e o tamanho da população no instante n define a taxa relativa de crescimento. Isso nos leva à seguinte equação de diferenças de primeira ordem homogênea:

$$\begin{aligned} r &= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \\ x_{n+1} &= (r + 1) \cdot x_n \\ x_{n+1} &= \lambda \cdot x_n \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a conhecida equação malthusiana de crescimento populacional.

Fórmula 4.5.1: Equação de Malthus (1798)

$$x_{n+1} = \lambda \cdot x_n$$

Como se trata de uma equação de diferenças linear, homogênea e de primeira ordem com coeficiente constante λ , sua solução geral é dada por:

$$x_n = \lambda^n \cdot x_0,$$

A função associada a essa solução é uma exponencial real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lambda^x \cdot x_0,$$

onde x_0 é o número inicial de indivíduos.

Uma particularidade deste modelo malthusiano é que o número de indivíduos cresce exponencialmente, sem considerar fatores ambientais, mortalidade ou limitação de recursos. A seguir, veremos modelos que levam essas variáveis em consideração.

4.5.2 MODELO DE VERHULST

Embora o modelo de Malthus explique o crescimento exponencial de uma população, ele desconsidera fatores ambientais que impõem limites naturais à expansão. Em 1838, o matemático belga Pierre-François Verhulst propôs uma alternativa mais realista ao incorporar a ideia de *capacidade de suporte*. Seu modelo introduz variáveis como escassez de recursos, competição e mortalidade, levando à chamada **equação logística discreta**.

Assumindo que a taxa de crescimento seja proporcional ao número atual de indivíduos, mas que a taxa de mortalidade aumente com o tamanho da população, temos os parâmetros r e b , com $0 < b < r \leq 1$, representando, respectivamente, as taxas de crescimento e mortalidade proporcional à população x_n . A equação resultante é:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} &= r - b \cdot x_n \\ x_{n+1} &= x_n + r \cdot x_n - b \cdot x_n^2 \\ x_{n+1} &= x_n \cdot (r + 1 - b \cdot x_n) \\ x_{n+1} &= (r + 1) \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{b}{r+1} \cdot x_n\right) \\ x_{n+1} &= \lambda \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

Aqui, definimos $\lambda = r + 1$ como a taxa líquida de crescimento e $\kappa = \frac{\lambda}{b}$ como a **capacidade de suporte ambiental**, ou seja, o número máximo de indivíduos que o ambiente pode sustentar.

Fórmula 4.5.2: Equação Logística de Verhulst (1838)

$$x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{\kappa}\right)$$

4.5.2.1 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

- **Lobos em uma floresta:** Suponha uma floresta que abriga uma população de lobos. Os recursos são limitados, e a população cresce com taxa $r = 0,2$, enquanto a taxa de mortalidade proporcional é $b = 0,006$.

$$\lambda = r + 1 = 1,2 \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{1,2}{0,006} = 200$$

Assim, a floresta pode sustentar no máximo 200 lobos. Essa é a *capacidade de suporte ambiental*: se a população ultrapassar esse valor, a competição por recursos a reduzirá naturalmente.

- **Peixes em um lago:** Considere um lago onde os peixes se reproduzem com taxa $r = 0,3$, e a taxa de mortalidade proporcional é $b = 0,00006$.

$$\lambda = 1,3 \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{1,3}{0,00006} \approx 21666,67$$

O modelo prevê uma capacidade de cerca de 21.667 peixes. No entanto, fatores ecológicos como oxigenação da água ou espaço podem limitar κ na prática a valores menores, como 5000, exigindo políticas de manejo para preservar o equilíbrio do ecossistema.

- **População urbana:** Imagine uma cidade projetada para comportar até 10^5 habitantes. A taxa natural de crescimento é $r = 0,01$, e a taxa de mortalidade é $b = 0,00001$.

$$\lambda = 1,01 \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{1,01}{0,00001} = 101000$$

Embora o modelo sugira um limite teórico de 101.000 habitantes, a capacidade real depende de fatores como moradia, transporte e infraestrutura. Ou seja, a *capacidade de suporte urbana* é definida mais por critérios políticos e sociais do que por simples parâmetros ecológicos.

O modelo de Verhulst, portanto, reflete com mais fidelidade os limites impostos pela natureza ou pela sociedade ao crescimento populacional. A presença da capacidade de suporte κ impõe um teto dinâmico à população, tornando o crescimento

mais realista do que o modelo exponencial proposto por Malthus. Nas próximas subseções, veremos como essa equação pode apresentar comportamentos ainda mais complexos, como ciclos e caos, dependendo dos valores de λ .

4.5.3 SISTEMA DE VOLTERRA

Enquanto os modelos de Malthus e Verhulst tratam de populações isoladas, muitas situações reais envolvem interações entre espécies, como a relação predador-presa. Para representar essas dinâmicas, surgiram os chamados **sistemas de Lotka-Volterra**, propostos independentemente por Alfred Lotka (1925) e Vito Volterra (1926).

Apresentamos a seguir uma versão discretizada e simplificada do sistema, com ênfase na interação entre duas populações: presas (x_n) e predadores (P_n). O sistema assume crescimento natural das presas e mortalidade natural dos predadores, com efeitos recíprocos decorrentes do encontro entre ambas as espécies.

Fórmula 4.5.3: Sistema de Lotka-Volterra (discretizado)

$$x_{n+1} = x_n \cdot (1 + r - a \cdot P_n)$$

$$P_{n+1} = P_n \cdot (1 - b + c \cdot x_n)$$

No que se refere à equação anterior, temos:

- x_n : população de presas no instante n ;
- P_n : população de predadores no instante n ;
- r : taxa natural de crescimento das presas;
- a : taxa de predação, que representa o impacto dos predadores sobre as presas;
- b : taxa natural de mortalidade dos predadores;
- c : taxa de conversão de presas capturadas em novos predadores.

Esse modelo prevê oscilações periódicas entre as populações: quando há muitas presas, os predadores prosperam, mas isso leva a uma queda nas presas, o que, por sua vez, reduz a população de predadores, permitindo que as presas se recuperem e o ciclo recomeça.

4.5.4 MODELO DE RICKER

O modelo de Ricker, proposto por William E. Ricker em 1954, descreve o crescimento populacional com limitação de recursos, utilizando uma equação de diferenças não linear. Essa modelagem é especialmente útil para populações de organismos com gerações não sobrepostas, como insetos ou peixes.

Fórmula 4.5.4: Equação de Ricker

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{r \cdot \left(1 - \frac{x_n}{\kappa}\right)}$$

Ou, de forma equivalente:

$$x_{n+1} = x_n \cdot e^{r \cdot \left(1 - \frac{x_n}{\kappa}\right)}$$

Os termos da equação têm os seguintes significados:

- x_n : população no instante n ;
- r : taxa intrínseca de crescimento populacional;
- κ : capacidade de suporte do ambiente (valor máximo sustentável de x_n);
- e : base dos logaritmos naturais, aproximadamente igual a:

$$e = 2,718281 \dots$$

O modelo de Ricker assume que a taxa de crescimento varia exponencialmente quando a população se aproxima ou ultrapassa a capacidade de suporte κ . Diferentemente do modelo logístico de Verhulst, o termo $e^{r(1-x_n/\kappa)}$ permite flutuações mais abruptas e até comportamentos caóticos, dependendo dos valores de r , (ELAYDI et al., 2005, p. 243).

4.5.5 MODELO LOGÍSTICO DE MAY

Conforme (OTTO et al., 2008):

Este modelo foi introduzido na literatura de dinâmica populacional pelo ecologista Robert May em 1976. Foi popularizado em seu artigo de 1976 em parte, como um modelo de tempo discreto análogo à equação logística criada pela primeira vez por P. F. Verhulst.

O modelo logístico de May é frequentemente utilizado em estudos de ecologia e biologia populacional, bem como em outras áreas, como economia e finanças.

Ele é considerado um exemplo clássico de sistema dinâmico não linear e tem sido amplamente estudado em teoria do caos e dinâmica de populações devido à sua apresentação e estética simples que atraiu imediatamente os matemáticos.

Considere a equação de Verhulst 4.5.2 da página 130. Fazendo uma mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x_n &= \kappa \cdot y_n, \\ x_{n+1} &= \kappa \cdot y_{n+1}, \\ x_n^2 &= \kappa^2 \cdot y_n^2. \end{cases}$$

Assim, a equação 4.5.2, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot y_{n+1} &= \lambda \cdot \kappa \cdot y_n - \frac{\lambda}{\kappa} \cdot \kappa^2 \cdot y_n^2 \\ \cancel{\kappa} \cdot y_{n+1} &= \lambda \cdot \cancel{\kappa} \cdot y_n - \frac{\lambda}{\cancel{\kappa}} \cdot \cancel{\kappa}^2 \cdot y_n^2 \\ y_{n+1} &= \lambda \cdot y_n - \lambda \cdot y_n^2 \end{aligned}$$

O que nos leva à equação:

Fórmula 4.5.5: Equação Logística de May

$$y_{n+1} = \lambda \cdot y_n \cdot (1 - y_n).$$

Esta é a equação 4.5.5 de diferença de primeira ordem não linear de grande interesse para os matemáticos. Associamos a ela a função quadrática $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unidimensional, definida por $f_\lambda(x) = \lambda \cdot x \cdot (1 - x)$.

Observe que esta função, para $\lambda \in [0, 4]$, quando restrita ao intervalo $[0, 1]$, satisfaz $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ou seja, $[0, 1]$ é invariante sob a ação de f , tendo seu ponto de máximo no vértice $(\frac{1}{2}; \frac{\lambda}{4})$.

A seguir, estudaremos alguns aspectos da dinâmica da equação logística para $\lambda \in [0, 4]$ dentro do intervalo $[0, 1]$.

4.5.5.1 PONTOS FIXOS

Basta estudar $f_\lambda(x^*) = x^*$. Assim temos:

$$\begin{aligned} f_\lambda(x^*) &= x^* \\ f_\lambda(x^*) &= \lambda \cdot x^* \cdot (1 - x^*) \end{aligned}$$

O que implica:

$$\begin{cases} x^* = 0 & , \text{ ou} \\ x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda} & . \end{cases}$$

Onde x^{**} existe para $\lambda \in [1, 4]$, ou seja, existe único ponto fixo em $x^* = 0$ para $\lambda \in [0, 1]$ e dois pontos fixos $x^* = 0$ e $x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda}$ para $\lambda \in [1, 4]$.

Para estudar a estabilidade dos pontos fixos devemos, de acordo com a definição 2.3 na página 37, calcular $f'_\lambda(x) = \lambda \cdot (1 - 2 \cdot x)$.

Assim,

$$f'_\lambda(0) = \lambda,$$

O que implica em:

$$\begin{array}{lll} x^* = 0 & , \text{ estável,} & \text{quando } 0 < \lambda < 1, \\ x^* = 0 & , \text{ não hiperbólico,} & \text{quando } \lambda = 1, \\ x^* = 0 & , \text{ instável,} & \text{quando } 1 < \lambda < 4. \end{array}$$

Por outro lado,

$$f'_\lambda\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = 2 - \lambda,$$

O que implica em:

$$\begin{array}{lll} x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda} & , \text{ instável,} & \text{quando } 0 < \lambda < 1, \\ x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda} & , \text{ não hiperbólico,} & \text{quando } \lambda = 1, \\ x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda} & , \text{ estável,} & \text{quando } 1 < \lambda < 3, \\ x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda} & , \text{ não hiperbólico,} & \text{quando } \lambda = 3, \\ x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda} & , \text{ instável,} & \text{quando } 3 < \lambda < 4. \end{array}$$

Observe que na mudança de estabilidade do ponto fixo $x^* = 0$ de estável para instável (em $\lambda = 1$) surge o novo ponto fixo de f_λ em $x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

A seguir veremos alguns diagramas *cobweb* do modelo logístico clássico de Robert May.

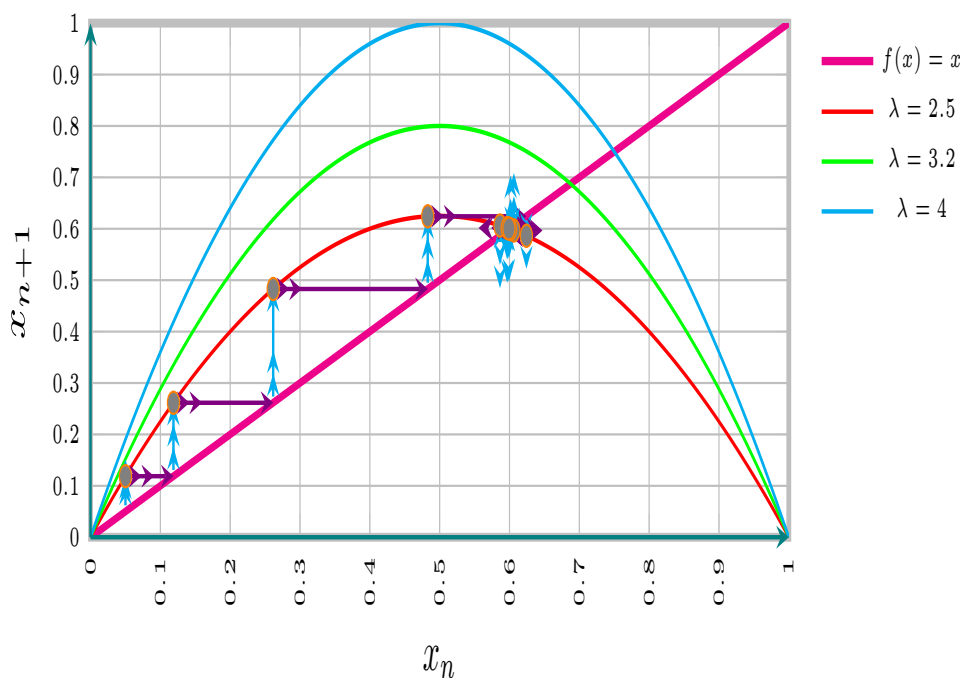


Figura 41: Cobweb $x_0 = 0,0500$ para $\lambda = 2,5000$ - Modelo Logístico - 10 iterações

Note que, na figura 41, a órbita do ponto $x_0 = 0,05$ é assintótica no ponto de equilíbrio estável $x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

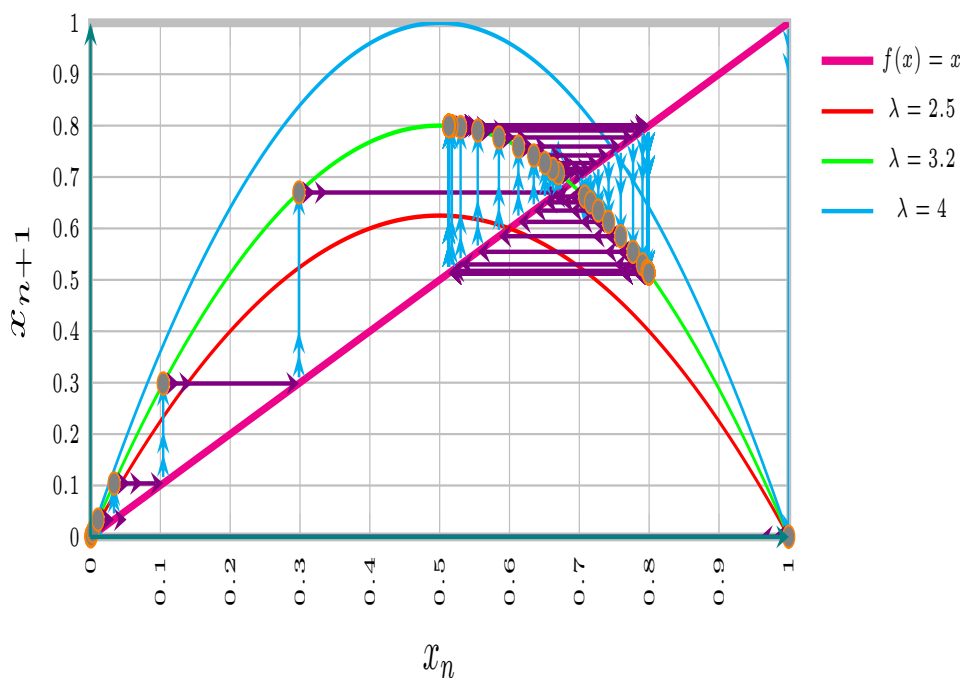


Figura 42: Cobweb para $x_0 = 0,9999$ e $\lambda = 3,2000$ do Modelo Logístico com 60 iterações.

Note que, na figura 42 a órbita do ponto $x_0 = 0,9999$ após dez iterações vai

para o centro da teia, que se espalha para fora, desenhando um ciclo 2–periódico com a teia da esquerda próxima do ponto $\approx 0,5$ e a teia da direita próxima do ponto $\approx 0,8$.

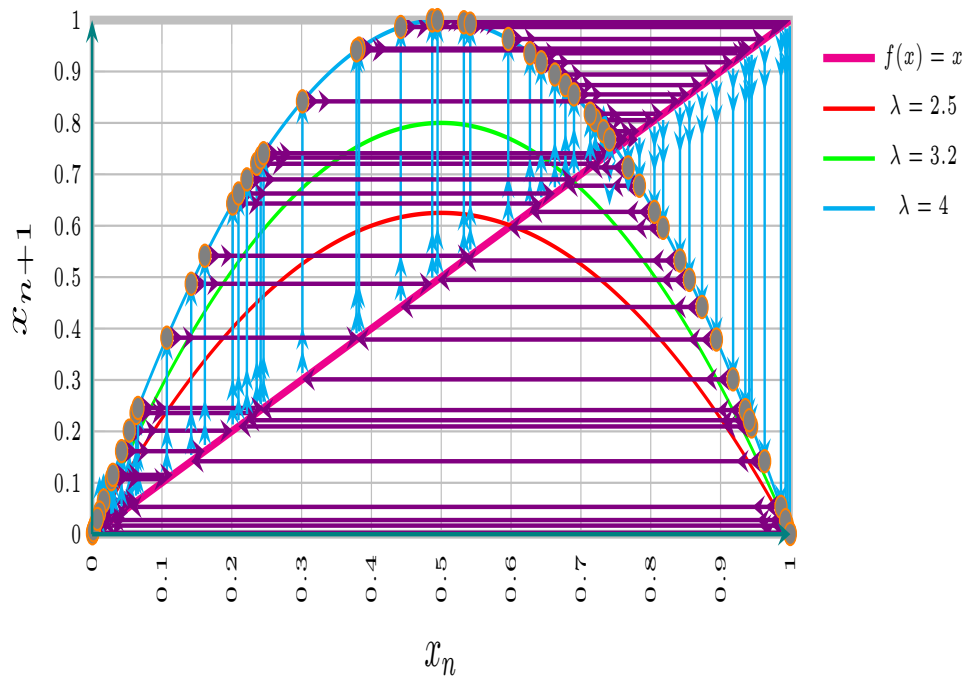


Figura 43: Cobweb para $x_0 = 0,001$ e $\lambda = 4,0$ do Modelo Logístico com 60 iterações.

Note que, na figura 43, a órbita do ponto $x_0 = 0,001$ é caótica e sempre se afasta.

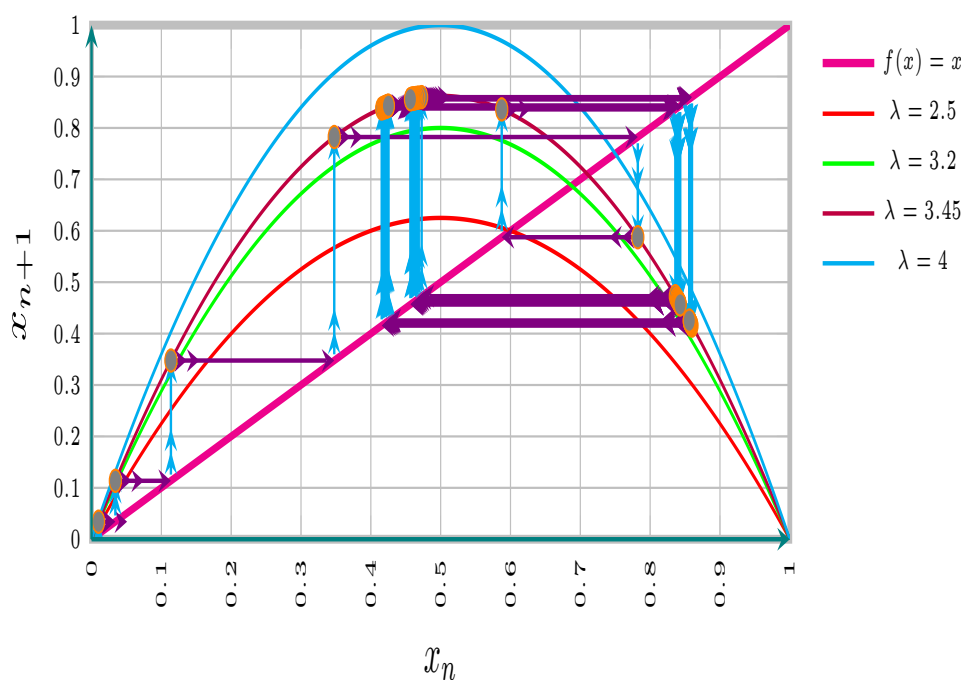


Figura 44: Cobweb para $x_0 = 0,01$ e $\lambda = 3,45$ do Modelo Logístico com 50 iterações.

Note na figura 44 o surgimento de soluções 4–periódicas. Após um número grande de iterações a órbita do ponto $x_0 = 0,01$ tende a se aproximar do ciclo 4–periódico dado por $(x_p)_1 = 0,8525$, $(x_p)_2 = 0,4337$, $(x_p)_3 = 0,8473$ e $(x_p)_4 = 0,4463$.

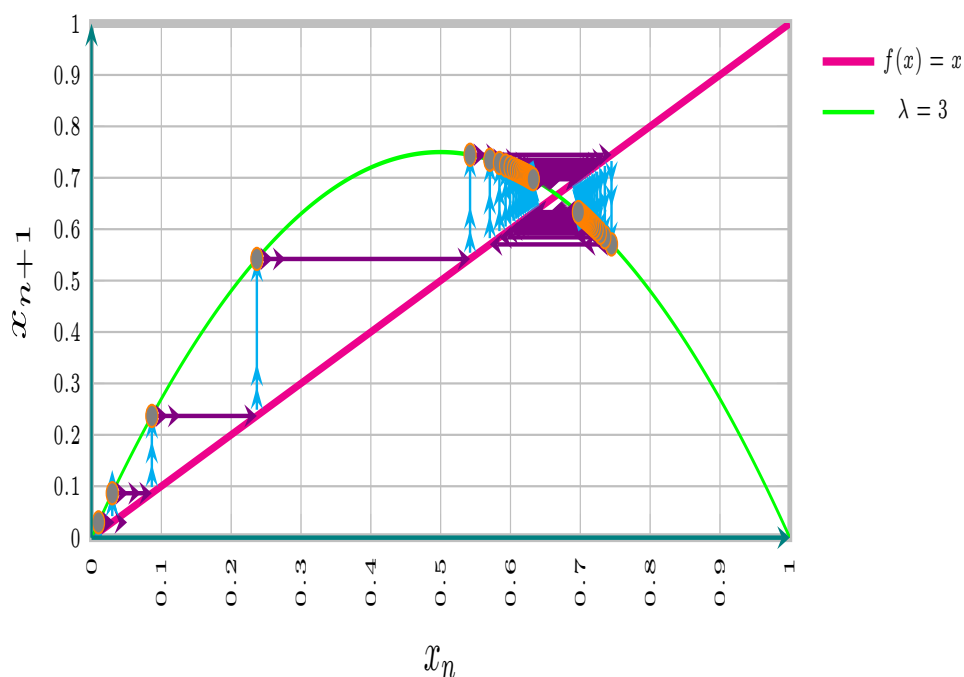


Figura 45: Cobweb para $x_0 = 0,01$ e $\lambda = 3$ do Modelo Logístico com 50 iterações.

Note na figura 45 o surgimento de soluções 2–periódicas. Após um número grande de iterações a órbita do ponto $x_0 = 0,01$ tende a se aproximar do ciclo 2–periódico dado por $(x_p)_1 = 0,6605$ e $(x_p)_2 = 0,6728$.

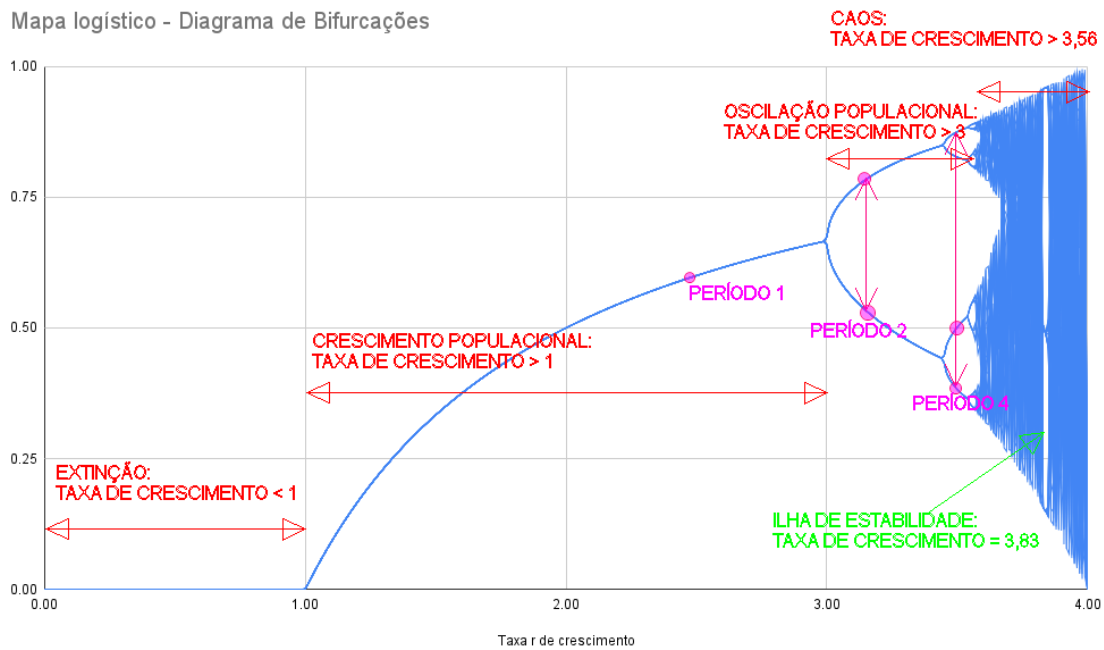


Figura 46: Diagrama de bifurcações da equação de diferenças logística

Na Figura 45 temos a condição de estabilidade assintótica, conforme veremos no capítulo 5.

À medida que a taxa de crescimento λ ultrapassa o valor 1, a população deixa de tender ao ponto fixo nulo e passa a convergir para um novo equilíbrio estável, dado por $x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Com o aumento contínuo de λ , o sistema começa a apresentar oscilações periódicas e, para valores entre 3 e 4, o comportamento torna-se progressivamente caóticoⁱⁱⁱ.

Apesar do caos predominante, existem **janelas de ordem** em que padrões periódicos reaparecem. Tais fenômenos podem ser visualizados em um **diagrama de bifurcação**, construído ao representar a taxa de crescimento no eixo x e os valores populacionais estáveis (após centenas de iterações) no eixo y . Segundo (COLLINS, 2023), esse gráfico pode ser feito no *Google Planilhas* ou *Excel*.

A descrição matemática do comportamento próximo aos pontos fixos é detalhada por Devaney (1989) e May (1976).

Iremos calcular os iterados mostrados na Figura 41 na página 135, Figura 42 na página 135 e Figura 43 na página 136, observando a tabela de cálculo iterativa 11 na página 141. Para a tabela usamos a equação de diferenças $x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, com valores iniciais para x_0 indicados pela primeira linha da tabela.

Através de um aplicativo on-line, e de muita utilidade (OTHERS, 2023), podemos converter tabelas de excel para \LaTeX e vice e versa.

n	$x(n)$	$\lambda = 2,5$	$\lambda = 3,2$	$\lambda = 4$
0	$x(0)$	0,05	0,9999	0,001
1	$x(1)$	0,1188	0,0003	0,004
2	$x(2)$	0,2616	0,001	0,0159
3	$x(3)$	0,4829	0,0033	0,0627
4	$x(4)$	0,6243	0,0104	0,235
5	$x(5)$	0,5864	0,033	0,719
6	$x(6)$	0,6063	0,1023	0,8081
7	$x(7)$	0,5967	0,2938	0,6202
8	$x(8)$	0,6016	0,6639	0,9422
9	$x(9)$	0,5992	0,714	0,2178
10	$x(10)$	0,6004	0,6534	0,6816
11	$x(11)$	0,5998	0,7247	0,8682
12	$x(12)$	0,6001	0,6384	0,4578
13	$x(13)$	0,5999	0,7387	0,9929

ⁱⁱⁱ Nesta faixa, a população varia de forma imprevisível, caracterizando um sistema altamente sensível às condições iniciais, fenômeno conhecido como *efeito borboleta* ou *efeito catastrófico*.

Tabela 11 continuação da página anterior

n	$x(n)$	$\lambda = 2,5$	$\lambda = 3,2$	$\lambda = 4$
14	x(14)	0,6	0,6177	0,0282
15	x(15)	0,6	0,7557	0,1097
16	x(16)	0,6	0,5908	0,3908
17	x(17)	0,6	0,7736	0,9523
18	x(18)	0,6	0,5604	0,1817
19	x(19)	0,6	0,7883	0,5948
20	x(20)	0,6	0,534	0,9641
21	x(21)	0,6	0,7963	0,1386
22	x(22)	0,6	0,5191	0,4775
23	x(23)	0,6	0,7988	0,998
24	x(24)	0,6	0,5142	0,0081
25	x(25)	0,6	0,7994	0,0321
26	x(26)	0,6	0,5132	0,1243
27	x(27)	0,6	0,7994	0,4354
28	x(28)	0,6	0,5131	0,9833
29	x(29)	0,6	0,7995	0,0656
30	x(30)	0,6	0,513	0,2451
31	x(31)	0,6	0,7995	0,7402
32	x(32)	0,6	0,513	0,7693
33	x(33)	0,6	0,7995	0,7099
34	x(34)	0,6	0,513	0,8237
35	x(35)	0,6	0,7995	0,5808
36	x(36)	0,6	0,513	0,9739
37	x(37)	0,6	0,7995	0,1016
38	x(38)	0,6	0,513	0,3652
39	x(39)	0,6	0,7995	0,9273
40	x(40)	0,6	0,513	0,2696
41	x(41)	0,6	0,7995	0,7877
42	x(42)	0,6	0,513	0,6689
43	x(43)	0,6	0,7995	0,8859
44	x(44)	0,6	0,513	0,4042
45	x(45)	0,6	0,7995	0,9633
46	x(46)	0,6	0,513	0,1413
47	x(47)	0,6	0,7995	0,4854
48	x(48)	0,6	0,513	0,9991
49	x(49)	0,6	0,7995	0,0034

Tabela 11 continuação da página anterior

n	$x(n)$	$\lambda = 2,5$	$\lambda = 3,2$	$\lambda = 4$
50	$x(50)$	0,6	0,513	0,0136
51	$x(51)$	0,6	0,7995	0,0538
52	$x(52)$	0,6	0,513	0,2036

Tabela 11 – Modelo logístico de May - Cobweb iterativo para 3 parâmetros r diferentes

Na primeira coluna, dada condição inicial com $x_0 = 0,05$, notamos que os iterados de f_λ convergem para 0,6 (ponto fixo estável, que é ponto fixo atrator).

Na segunda coluna, dada condição inicial $x_0 = 0,9999$ e $\lambda = 3,2$ (x^{**} instável) nota-se que os iterados de x_0 por f_λ tendem a um ciclo de período 2 ($(x_p)_1 \approx 0,513$ e $(x_p)_2 \approx 0,7995$). Veremos que^{iv}, surgem dois valores atratores estranhos aproximadamente iguais a 0,513 e 0,7995 esses dois pontos formam uma órbita periódica estável de ordem 2, ou seja, a população se alterna entre esses dois valores. Este comportamento pode ser visualizado claramente por meio do diagrama de *cobweb* (teia de aranha conforme pode ser visto na figura 42 da página 135^v).

Na terceira coluna, consideramos a condição inicial $x_0 = 0,001$ e o parâmetro $\lambda = 4$. Nessa configuração, os pontos fixos do sistema são instáveis (repulsores). Observa-se que a órbita iniciada em $x_0 = 0,001$ rapidamente se afasta do ponto de equilíbrio $x^* = 0$, e tampouco converge para o outro ponto de equilíbrio $x^{**} = 1 - \frac{1}{\lambda} = 0,75$. A trajetória evolui para um comportamento caótico e se mostra extremamente sensível às condições iniciais. Por exemplo, com $x_0 = 0,001$, temos os seguintes iterados:

$$0,001 \rightarrow 0,004 \rightarrow 0,016 \rightarrow 0,063 \rightarrow 0,24 \rightarrow 0,72 \rightarrow 0,81 \rightarrow 0,62 \rightarrow 0,94 \rightarrow 0,22 \rightarrow \dots$$

Se alterarmos levemente a condição inicial para $x_0 = 0,0011$, a trajetória se modifica drasticamente:

$$0,0011 \rightarrow 0,0044 \rightarrow 0,02 \rightarrow 0,07 \rightarrow 0,3 \rightarrow 0,8 \rightarrow 0,7 \rightarrow 0,8 \rightarrow 0,6 \rightarrow 0,9 \rightarrow 0,3 \rightarrow \dots$$

E para $x_0 = 0,00101$, a sequência evolui como:

$$0,00101 \rightarrow 0,004 \rightarrow 0,02 \rightarrow 0,06 \rightarrow 0,2 \rightarrow 0,7 \rightarrow 0,8 \rightarrow 0,6 \rightarrow 0,9 \rightarrow 0,3 \rightarrow 0,8 \rightarrow \dots$$

Esse fenômeno de alterar em 0,0001 e 0,00001 nas condições iniciais é conhecido como *efeito borboleta*, característico de sistemas caóticos: pequenas variações nas condições iniciais geram trajetórias significativamente distintas ao longo do tempo.

^{iv} Na próxima seção, o estudo de pontos periódicos será aprofundado.

^v Embora esse regime já represente uma dinâmica mais complexa do que a estabilidade simples, ele ainda não é considerado caótico. O caos, no sentido rigoroso, só se estabelece após a cascata de bifurcações de período, que inicia-se em torno de $\lambda \approx 3,57$.

A seguir é feito um gráfico simples de linhas com os dados da tabela 11 da página 141, cada coluna formando uma série para os três parâmetros λ . A tabela mostra os valores de n (tempo discreto) e as respectivas populações x_n para três cenários diferentes de acordo com o parâmetro λ (2,5; 3,2 e 4,0).

Na próxima seção veremos como obter os pontos 2–periódicos do mapa logístico.

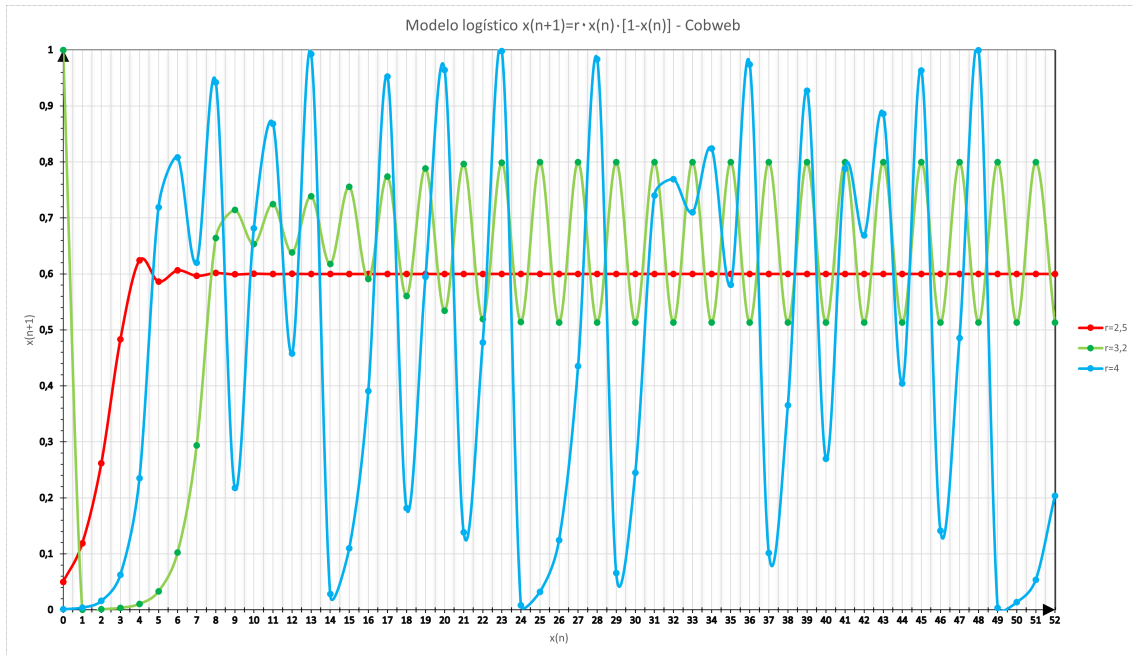


Figura 47: Gráfico com os dados da tabela 11 da página 141.

4.5.5.2 CICLOS PERIÓDICOS DO MAPA LOGÍSTICO

A Figura 48, na página 143, apresenta os gráficos das funções iteradas do mapa logístico. Esses gráficos são especialmente úteis para o estudo de pontos periódicos, isto é, pontos que retornam a si mesmos após um número finito de iterações. Formalmente, um ponto x_p é dito periódico de período n se satisfaz $f^n(x_p) = x_p$, com $n \in \mathbb{N}$. Tais pontos podem ser visualizados como as interseções entre as curvas das iterações $f^n(x)$ e a diagonal $y = x$.

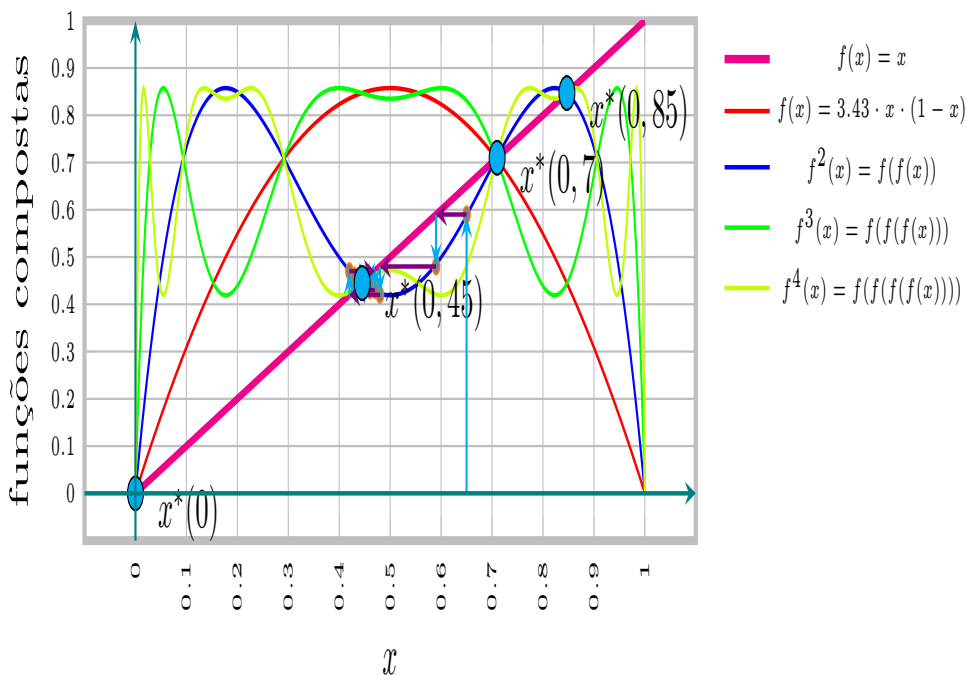


Figura 48: Diagrama cobweb na função f^2 , com $x_0 = 0,65$, durante 12 iterações. Mapas iterados da função logística.

Para identificar os pontos 2-periódicos do mapa logístico, analisamos a equação $f^2(x_p) = x_p$. Supondo $f(x) = \lambda x(1 - x)$, temos:

$$f^2(x) = \lambda^2 x(1 - x) - \lambda^3 x^2(1 - x)^2,$$

ou seja, uma função polinomial de grau quatro. Como todo ponto fixo de $f(x)$ também é fixo para $f^2(x)$, podemos removê-los para obter apenas os pontos genuinamente 2-periódicos. Um truque útil é dividir:

$$\frac{f^2(x) - x}{f(x) - x},$$

o que elimina os pontos fixos de f . Essa razão resulta em um polinômio quadrático:

$$\frac{f^2(x) - x}{f(x) - x} = \lambda^2 x^2 - (\lambda^2 + \lambda)x + (\lambda + 1) = 0.$$

Dividindo por λ^2 , temos a forma:

$$x^2 - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)x + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = 0,$$

cujo discriminante é:

$$\Delta = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3).$$

As raízes correspondentes aos pontos 2-periódicos são:

$$x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}\right).$$

Portanto, existem dois pontos distintos 2-periódicos $(x_p)_1$ e $(x_p)_2$ sempre que $\lambda^2 - 2\lambda - 3 > 0$. Isso ocorre se, e somente se, $\lambda > 3$. No caso limite $\lambda = 3$, as duas raízes coincidem e temos:

$$(x_p)_1 = (x_p)_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

que coincide com o ponto fixo $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Para analisar a estabilidade desses pontos periódicos, usamos o critério do multiplicador (Definição 2.5, página 40): um ciclo de período 2 é assintoticamente estável se

$$|f'((x_p)_1) \cdot f'((x_p)_2)| < 1.$$

Sabemos que $f'(x) = \lambda(1 - 2x)$. Substituindo os valores das raízes, obtemos:

$$f'((x_p)_1) = -1 - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}, \quad f'((x_p)_2) = -1 + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}.$$

Logo,

$$|f'((x_p)_1) \cdot f'((x_p)_2)| = |1 - (\lambda^2 - 2\lambda - 3)| = |-\lambda^2 + 2\lambda + 4|.$$

Para estabilidade, impomos:

$$|-\lambda^2 + 2\lambda + 4| < 1,$$

o que resulta nas duas inequações:

$$\begin{cases} -\lambda^2 + 2\lambda + 4 > -1, \\ -\lambda^2 + 2\lambda + 4 < 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda - 5 < 0, \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 > 0. \end{cases}$$

A solução comum é:

$$\lambda \in]3, 1 + \sqrt{6}].$$

Portanto, o ciclo 2-periódico é assintoticamente estável nesse intervalo. Para $\lambda = 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$, ocorre uma bifurcação, a partir deste valor de λ e o ciclo torna-se instável.

De forma geral, a equação $f_\lambda^n(x) = x$ é um polinômio de grau 2^n , com até no máximo 2^n raízes. Para contar os ciclos de **período mínimo** n , devemos eliminar os pontos periódicos de períodos que dividem n . Já que n é divisor, o resultado restante será múltiplo de n , ou seja, $\kappa \cdot n$, com $\kappa \in \mathbb{N}$.

Os seguintes valores ilustram esse princípio:

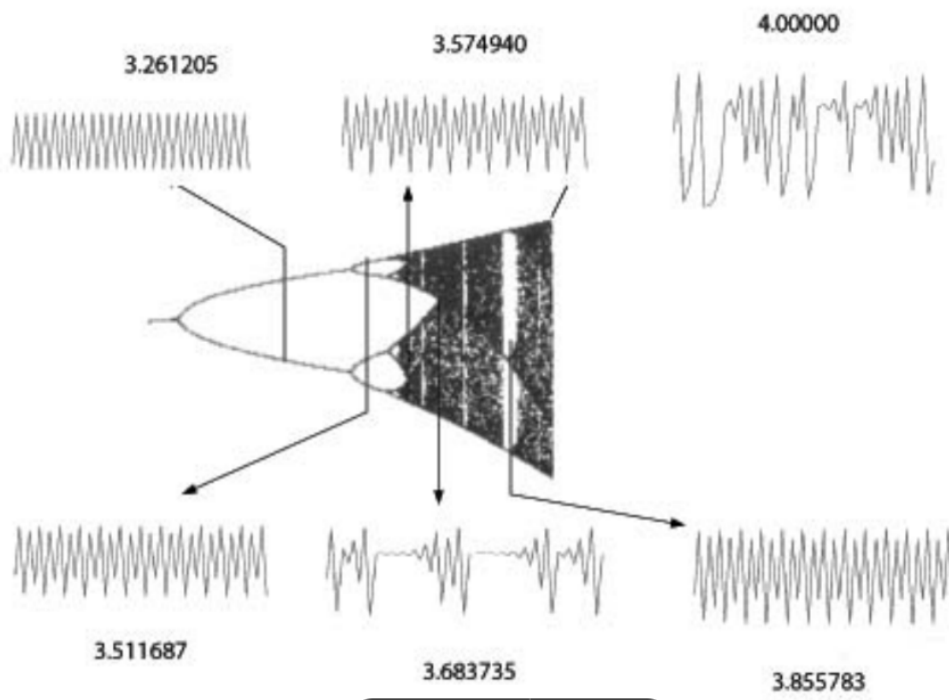
- $n = 1$: Tem no máximo $2^1 = 2$ raízes (pontos fixos) $\implies \kappa = 1$ ciclo de período $n = 1$.
- $n = 2$: Tem no máximo $2^2 = 4$ raízes, 2 pontos fixos, 2 novas raízes que equivalem a uma solução 2-periódica $\implies \kappa = 1$ ciclo de período $n = 2$.
- $n = 3$: Tem no máximo $2^3 = 8$ raízes, 2 fixos, 6 novas raízes que equivalem a uma solução 3-periódica $\implies \kappa = 2$ ciclos de período $n = 3$.
- $n = 4$: Tem no máximo $2^4 = 16$ raízes, 2 fixos, 2 do ciclo-2, 12 novas raízes que equivalem a uma solução 4-periódica $\implies \kappa = 3$ ciclos de período $n = 4$.
- $n = 5$: Tem no máximo $2^5 = 32$ raízes, 2 fixos, 30 novas raízes que equivalem a uma solução 5-periódica $\implies \kappa = 6$ ciclos de período $n = 5$.
- $n = 6$: Tem no máximo $2^6 = 64$ raízes, 2 fixos, 2 do ciclo-2, 6 do ciclo-3, $64 - 2 - 2 - 6 = 54$ novas raízes que equivalem a uma solução 6-periódica $\implies \kappa = 9$ ciclos de período $n = 6$.
- ...

Período n	Grau de f_λ^n	Pontos de período primo	Ciclos de período primo
1	$2^1 = 2$	2	1
2	$2^2 = 4$	2	1
3	$2^3 = 8$	6	2
4	$2^4 = 16$	12	3
5	$2^5 = 32$	30	6
6	$2^6 = 64$	54	9

Tabela 12: Tabela de ciclos de período primo do mapa logístico

Esses cálculos revelam a estrutura dos ciclos no mapa logístico, cuja complexidade cresce com λ . Mais detalhes podem ser encontrados em <<https://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html>>, acessado em 06/05/2024.

Por fim, fora das regiões de estabilidade, o comportamento do sistema se torna caótico. A Figura^{vi} 49 exibe os ciclos periódicos do mapa logístico para diferentes valores de λ . Observe que para $\lambda = 4$, não há estabilidade.

Figura 49: Ciclos periódicos da função logística para diferentes valores de λ .

Antes de avançarmos, é oportuno discutir por que nos interessamos por mapas quadráticos e a estabilidade de seus ciclos.

^{vi} Fonte da imagem: (ELAYDI, 2007, p. 49).

4.6 MAPAS QUADRÁTICOS: ESTUDO DE ESTABILIDADE

O quadro a seguir resume os critérios de estabilidade de pontos fixos e periódicos de acordo com as derivadas da função que define o mapa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nele adiantamos resultados sobre a estabilidade de pontos não hiperbólicos que serão discutidos no capítulo 5 na página 153. Utilizaremos esses resultados para estudar mapas definidos por funções quadráticas mais gerais na seção que se segue.

Na referência (ELAYDI, 2007, p. 33), encontra-se um quadro resumo para classificar pontos fixos bem além do escopo deste trabalho. O leitor poderá verificar nele **Schwarzianos** de ordem superior e até derivadas de ordem maiores que 4 para determinar estabilidade.

Fórmula 4.6.1: Resumo dos critérios e teoremas de estabilidade dos pontos fixos

$$\left. \begin{array}{l} |f'(x^*)| < 1 \text{ } x^* \text{ é estável,} \\ |f'(x^*)| = 0 \text{ } x^* \text{ é estável porque é ponto fixo super-atrator,} \\ |f'(x^*)| > 1 \text{ } x^* \text{ é instável,} \\ |f'(x^*)| = 1 \text{ } x^* \text{ é ponto fixo não-hiperbólico}^\Delta, \end{array} \right\} f(x^*) = x^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta |f'(x^*)| = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f'(x^*) = -1 \left\{ \begin{array}{l} S_1 f(x^*) > 0 \text{ } x^* \text{ é instável} \\ S_1 f(x^*) < 0 \text{ } x^* \text{ é assintoticamente estável} \\ S_1 f(x^*) = 0 \left\{ \begin{array}{l} S_k f(x^*) = \frac{1}{2} \cdot f^{2 \cdot (2k+1)}(x^*) \neq 0 \\ k \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} S_k f(x^*) > 0 \text{ } x^* \text{ é instável} \\ S_k f(x^*) < 0 \text{ } x^* \text{ é assintoticamente estável} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ f'(x^*) = 1 \left\{ \begin{array}{l} f''(x^*) \neq 0 \text{ } x^* \text{ é instável} \\ f''(x^*) \neq 1 \text{ e } f''(x^*) > 0 \text{ } x^* \text{ é semi assintoticamente estável pela esquerda} \\ f''(x^*) \neq 1 \text{ e } f''(x^*) < 0 \text{ } x^* \text{ é semi assintoticamente estável pela direita} \\ f''(x^*) = 0 \text{ e } f'''(x^*) > 0 \text{ } x^* \text{ é instável} \\ f''(x^*) = 0 \text{ e } f'''(x^*) < 0 \text{ } x^* \text{ é assintoticamente estável} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Quadro 1. Resumo dos teoremas de estabilidade.

Como o mapa logístico é um caso particular de função quadrática, iniciaremos pelo estudo da estabilidade dessas funções.

Para o mapa logístico $f_\lambda(x) = \lambda \cdot x \cdot (1 - x)$, extraímos os coeficientes da função quadrática em 4.6.2 na página 148 $a = -\lambda$, $b = \lambda$ e $c = 0$. A seguir estudaremos o caso geral desta quadrática quanto a estabilidade dos pontos fixos.

4.6.1 ESTABILIDADE DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Considere o mapa cuja equação de diferenças é dada por $x_{n+1} = Q(x_n)$, onde $Q(x)$ é dada pela função 4.6.2.

Segundo (RICHMOND, 1959, p. 136), seja $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática dada pelos seus coeficientes reais $a \neq 0$, b e c é definida por:

Fórmula 4.6.2: Função Quadrática

$$Q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

Os pontos fixos do mapa são obtidos resolvendo:

$$\begin{aligned} Q(x^*) &= x^*, \\ a \cdot x^{*2} + b \cdot x^* + c &= x^*, \\ a \cdot x^{*2} + (b-1) \cdot x^* + c &= 0, \end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$x^* = \frac{-(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \begin{cases} x^* = \frac{-(b-1) + \sqrt{(b-1)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ x^{**} = \frac{-(b-1) - \sqrt{(b-1)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{cases}$$

Note que essas soluções existem desde que $(b-1)^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$, ou seja:

$$\begin{aligned} (b-1)^2 - 4 \cdot a \cdot c &\geq 0 \\ (b-1)^2 &\geq 4 \cdot a \cdot c \end{aligned}$$

Os pontos fixos são estáveis quando $|Q'(x^*)| = |2 \cdot a \cdot x^* + b| < 1$. Assim temos duas inequações:

$$-1 < 2 \cdot a \cdot x^* + b < 1,$$

$$\begin{cases} 2 \cdot a \cdot x^* + (b-1) < 0 \\ 2 \cdot a \cdot x^* + (b+1) > 0 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira inequação, obtém-se $x^* < -\frac{b-1}{2 \cdot a}$, para a segunda inequação, obtém-se $x^* < -\frac{b+1}{2 \cdot a}$. Isto é, o intervalo de estabilidade é $\frac{b-1}{2 \cdot a} < x^* < \frac{b+1}{2 \cdot a}$, ou de forma equivalente $\frac{b}{2 \cdot a} - 2 \cdot a < x^* < \frac{b}{2 \cdot a} + 2 \cdot a$.

Nas Figuras 50 e 51 a área hachurada em verde indica a fase de crescimento da quadrática, enquanto a área hachurada em vermelho indica a fase de decrescimento da quadrática.

Função Quadrática e suas derivadas

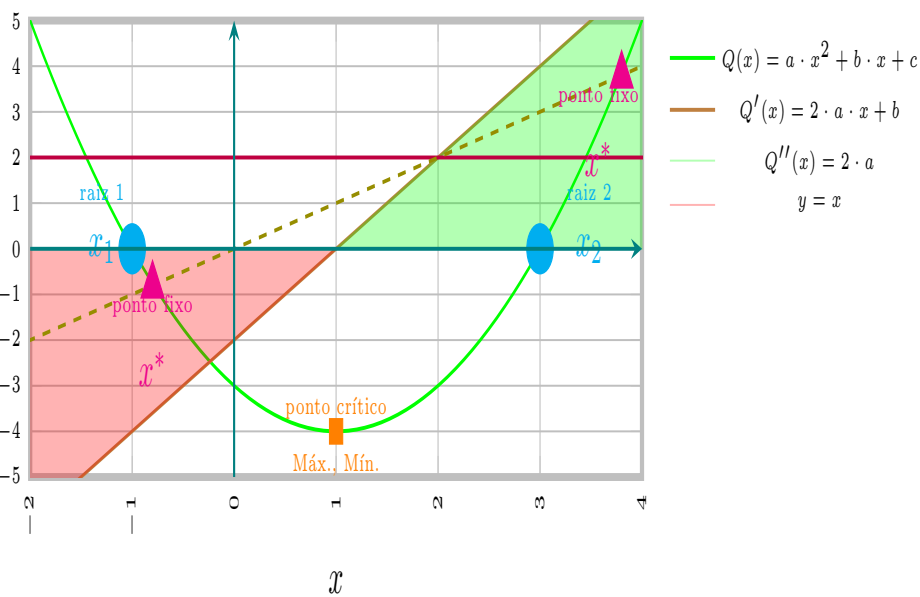


Figura 50: Quadrática côncava para cima $Q'' > 0 \Leftrightarrow a > 0$.

Função Quadrática e suas derivadas

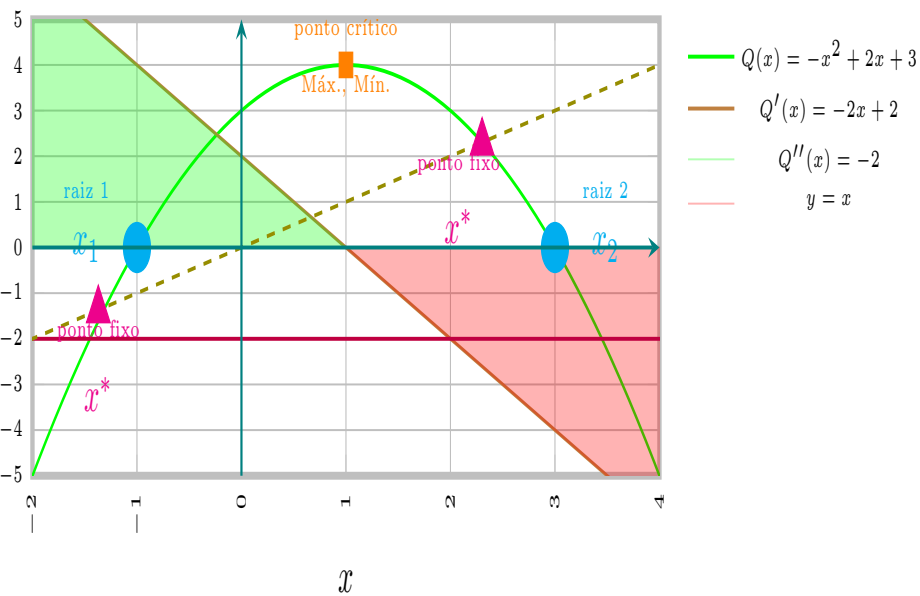


Figura 51: Quadrática côncava para baixo $Q'' < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

4.2 Teorema de estabilidade geral das quadráticas

Considere a função $Q(x)$ já definida anteriormente e seja x^* um ponto fixo de Q .

- i. Se $Q'(x^*) = 1$, então x^* é instável.
- ii. Se $Q'(x^*) = -1$, então x^* é assintoticamente estável.

Demonstração. Seja $Q(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

- i. Se $Q(x^*) = x^*$ e $Q'(x^*) = 1$, então $Q''(x^*) = 2a \neq 0$. Segue do Teorema 5.1 da página 155 que x^* é instável.
- ii. Se $Q(x^*) = x^*$ e $Q'(x^*) = -1$, então como $Q \in C^3$, isto é $Q'(x)$, $Q''(x)$ e $Q'''(x)$ são contínuas e suaves. Além disso o Swarziano é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}Q(x^*) &= \frac{Q'''(x^*)}{Q'(x^*)} - \frac{3}{2} \left[\frac{Q''(x^*)}{Q'(x^*)} \right]^2, \\ \mathcal{S}Q(x^*) &= -\frac{6a^2}{(-1)^2} < 0. \end{aligned}$$

o que implica que $\mathcal{S}Q(x^*) < 0$, segue, portanto, do Teorema 5.3 da página 168 que x^* é assintoticamente estável, concluindo assim a demonstração

□

Exemplo 4.6.1

Transformar a equação de diferenças não linear de primeira ordem não homogênea $z_{n+1} = z_n^2 + c$ em uma equação logística, com a mudança de variáveis $c = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$ em uma equação logística $x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$.^a

^a Este exemplo foi extraído do exercício da seção 1.7, número 11, da referência (ELAYDI et al., 2005, p. 49).

Fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} y_n = -\lambda \cdot x_n + \frac{\lambda}{2}, \\ y_n^2 = \lambda^2 \cdot x_n \cdot (x_n - 1) + \frac{\lambda^2}{4}, \end{cases}$$

Se, e somente, se:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2} - \frac{y_n}{\lambda}, \\ y_n^2 = \lambda^2 \cdot x_n^2 - 2 \cdot \lambda \cdot x_n \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4}, \end{cases}$$

Somando a constante c em ambos os membros da igualdade, tem-se:

$$\begin{array}{rclcl}
 y_n^2 & + & c & = & \lambda^2 \cdot x_n \cdot (x_n - 1) & + & \frac{\lambda^2}{4} + c, \\
 y_{n+1} & & & = & \lambda^2 \cdot x_n \cdot (x_n - 1) & + & \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}, \\
 y_{n+1} & & & = & \lambda^2 \cdot x_n \cdot (x_n - 1) & + & \cancel{\frac{\lambda^2}{4}} + \frac{\lambda}{2} - \cancel{\frac{\lambda^2}{4}}, \\
 y_{n+1} - \frac{\lambda}{2} & = & \lambda^2 \cdot x_n \cdot (x_n - 1) & & & & , \\
 \frac{\lambda}{2} - y_{n+1} & = & \lambda^2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n) & & & & , \\
 \frac{1}{2} - \frac{y_{n+1}}{\lambda} & = & \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n) & & & & , \\
 x_{n+1} & = & \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n) & & & & .
 \end{array}$$

Conclui-se assim o que queríamos demonstrar. □.

4.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das populações, iniciado com Malthus em 1798, revelou que o crescimento contínuo da população mundial contrasta com a finitude dos recursos naturais, evidenciando a necessidade de avaliar a qualidade de vida em diferentes contextos. A capacidade de suporte de um local depende não apenas do número de habitantes, mas também de fatores como o estilo de vida e o acesso à saúde. Além disso, o aumento da longevidade, impulsionado por melhorias nos sistemas de saúde, eleva ainda mais a demanda por recursos, tornando essa dinâmica ainda mais complexa.

Ao estudar previsões climáticas, Lorenz (LORENZ, 1964, p. 6–7) utilizou um modelo simplificado, no qual representava o comportamento de uma variável relacionada à energia cinética das ondas atmosféricas. Ao construir o gráfico desse modelo em um computador, ele não utilizou os eixos tradicionais x_n e x_{n+1} , mas adotou o parâmetro de controle (que ele chamou de "taxa de rotação") no eixo horizontal e a energia no eixo vertical. O gráfico obtido, semelhante ao diagrama de bifurcação do mapa logístico, é apresentado na Figura 46, na página 138.

5 DINÂMICA NÃO HIPERBÓLICA

5.1 PRÉ REQUISITOS

- 1) Capítulo 1, na página 3.
- 2) Capítulo 2, na página 29.
- 3) Capítulo 3, na página 103.
- 4) Capítulo 4, na página 115.
- 5) Análise Real (Fundamentos de cálculo).
- 6) Curso de cálculo integral e diferencial universitário.

5.2 OBJETIVOS

- Estudar as funções unidimensionais: encontrar os pontos fixos não-hiperbólicos e analisar estabilidade.
- Classificação de Comportamento Dinâmico não-hiperbólico
- Apresentar o *Schwarziano*.

5.3 JUSTIFICATIVA

Neste capítulo, estabeleceremos os critérios para a estabilidade de pontos fixos, não-hiperbólicos.

No capítulo 2, na página 29, aprendemos sobre a dinâmica discreta hiperbólica, teoremas dentre outros fundamentos. Neste capítulo exploraremos a ligação entre as derivadas de ordens superiores e o estudo da estabilidade dos sistemas dinâmicos discretos com pontos fixos não-hiperbólicos, isto é, $|f'(x^*)| = 1$.

5.4 PONTOS FIXOS NÃO-HIPERBÓLICOS

São pontos onde $|f'(x^*)| = 1$. Os dois resultados principais a seguir abordam os casos típicos:

- Quando $f'(x^*) = 1$ (ver página 154);
- Quando $f'(x^*) = -1$ (ver página 161).

Antes de prosseguirmos, introduzimos as noções fundamentais de semi-estabilidade e estabilidade semi-assintótica, que nos permitirão tratar esses casos.

Definição 5.1 de Semi-estabilidade e Estabilidade Semiassintótica

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, e seja $x^* \in \mathbb{R}$ um ponto fixo, ou seja, $f(x^*) = x^*$.

- Dizemos que x^* é **semi-estável pela direita** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < x_0 - x^* < \delta$, então

$$0 < |f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

- Se, além disso, existe $\eta > 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$ sempre que $0 < x_0 - x^* < \eta$, então dizemos que x^* é **semi-assintoticamente estável pela direita**.
- A definição **pela esquerda** é análoga: trocando a condição $x_0 > x^*$ por $x_0 < x^*$.

Esses conceitos permitem compreender o comportamento de órbitas próximas a pontos fixos que não são totalmente atratores nem totalmente repulsores.

5.4.1 PONTO FIXO não-hiperbólico $f'(x^*) = 1$

Antes de apresentar o próximo resultado, vale destacar uma situação que foge ao critério clássico de estabilidade baseado apenas na primeira derivada. Quando temos um ponto fixo x^* tal que $f'(x^*) = 1$, a linearização da função por um polinômio de Taylor de primeira ordem não é suficiente para determinar o comportamento local das órbitas. Nesse caso, os termos de ordem superior do desenvolvimento do polinômio de Taylor (Apêndice B na página 243) ao redor de x^* tornam-se relevantes. A análise do sinal da segunda e terceira derivadas pode revelar a estabilidade ou instabilidade desse ponto, como veremos a seguir. Esse tipo de resultado é particularmente impor-

tante sendo citado em diversos livros clássicos de sistemas dinâmicos discretos, como citados nos livros (ELAYDI et al., 2005) e (ELAYDI, 2007).

5.1 Estabilidade envolvendo derivadas superiores — Teorema do ponto fixo não-hiperbólico $f'(x^*) = 1$

Seja $x^* \in \mathbb{R}$ ponto fixo da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x^*) = 1$. Se f é da classe C^3 em vizinhanças de x^* , isto é, f' , f'' e f''' são contínuas nas vizinhanças de x^* , então:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i) } f''(x^*) \neq 0 & \Rightarrow x^* \text{ é instável (semi-estável}^a\text{);} \\ \text{ii) } f''(x^*) = 0 \text{ e } f'''(x^*) > 0 & \Rightarrow x^* \text{ é ponto fixo instável;} \\ \text{iii) } f''(x^*) = 0 \text{ e } f'''(x^*) < 0 & \Rightarrow x^* \text{ é assintoticamente estável.} \end{array} \right.$$

^a Definição 5.1 na página 154

Prova (i). A continuidade de f''' nesta parte não é necessária. Seja x^* ponto fixo de f , isto é, $f(x^*) = x^*$, satisfazendo $f'(x^*) = 1$. Por hipótese, temos $f''(x^*) \neq 0$. Então a curva $y = f(x)$ é *côncava para cima* se $f''(x^*) > 0$ ou *côncava para baixo* se $f''(x^*) < 0$ numa vizinhança de x^* , conforme mostrado na Figura 54 da página 157. Note que a curva $y = f(x)$ está acima da função identidade $y = x$ em um intervalo compacto, isto é, existe $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{I} = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$, tal que, $f(x) > x$, para todo $x \in \mathcal{I}$.

Vamos mostrar o caso $f''(x^*) > 0$. O outro caso $f''(x^*) < 0$ segue de modo análogo.

Como f'' é contínua em vizinhança de x^* , existe $\varepsilon > 0$ tal que $f''(x) > 0 \forall x \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$.

Aplicando o teorema de Taylor de primeira ordem (ver Apêndice B na página 243) com o resto de segunda ordem na forma de Lagrange (ver Apêndice B.1 na página 245) dado $x \sim x^{*i}$, tem-se:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x^*)^2,$$

onde ξ é um ponto entre x e x^* .

ⁱ Usamos a notação \sim para evidenciar que x está na vizinhança do ponto fixo, em se tratando de estabilidade local.

Daí se $x > x^* \Leftrightarrow x - x^* > 0$, então:

$$f(x) = x + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x^*)^2}_{>0},$$

Considere a equação de diferenças discreta $x_{n+1} = f(x_n)$ com $n \in \mathbb{N}$. Do exposto acima, segue que, se x_n está à direita do ponto fixo x^* , então x_{n+1} está avançando na reta real.

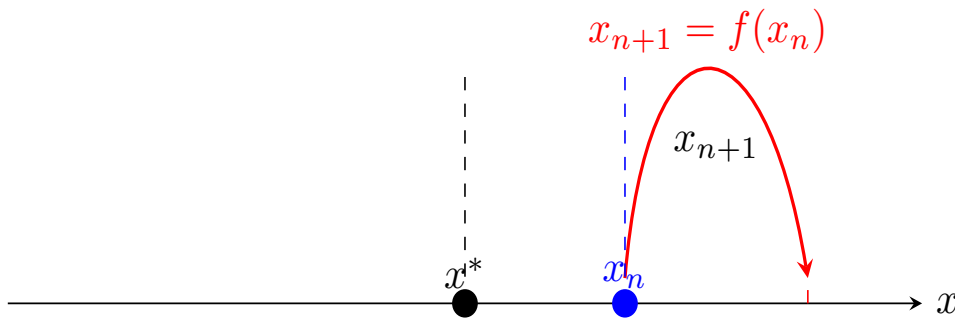


Figura 52: $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) > 0$

Por outro lado se $x < x^* \Leftrightarrow x - x^* < 0$, então:

$$f(x) = x^* + \underbrace{(x - x^*)}_{<0} \cdot \left\{ 1 + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x^*)^2}_{>0} \right\},$$

Desta forma, segue que:

$$x < f(x) < x^* \Leftrightarrow x < x^* + \underbrace{(x - x^*)}_{<0} \cdot \left\{ 1 + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x^*)^2}_{>0} \right\} < x^*,$$

o que implica:

$$x_n < x_{n+1} < x^*, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

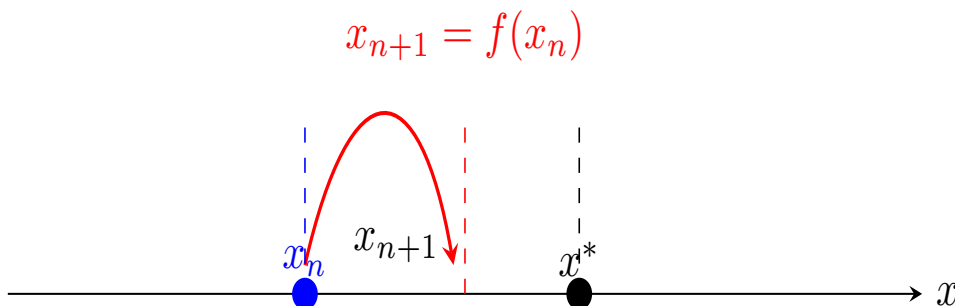


Figura 53: $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) > 0$

Portanto, sobrepondo as figuras 52 da página 156 e 53 da página 156, o ponto fixo x^* é instável (semi-estável).

Concluindo a demonstração, dadas as hipóteses $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) \neq 0$, o ponto fixo x^* é instável à direita (assintoticamente estável à esquerda). \square

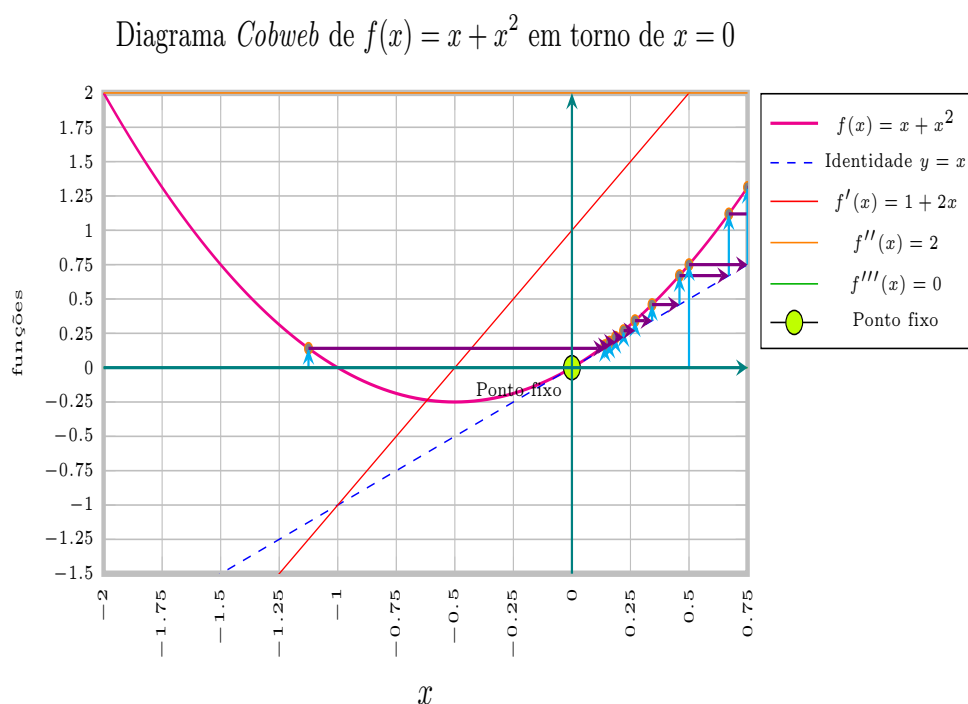


Figura 54: $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) \neq 0$

Prova (ii): Nesta parte assumimos que f' , f'' e f''' são contínuas em vizinhança do ponto fixo x^* .

Seja x^* ponto fixo de f , isto é, $f(x^*) = x^*$, satisfazendo $f'(x^*) = 1$. Por hipótese temos $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$, assim o ponto x^* é um *ponto de inflexão* da curva $y = f(x)$, conforme pode ser visto na figura 56 da página 159. Além disso, $f'(x^*) = 1$ implica que a reta tangente à curva f em x^* coincide com a reta identidade $y = x$ naquele ponto, ou seja, as curvas se tocam com mesma inclinação.

Por ser um ponto de inflexão com $f'''(x^*) > 0$, a função f é **concava para baixo à esquerda de x^* e concava para cima à direita**.

Pelo Teorema de Taylor de segunda ordem (ver Apêndice B na página 243), com o resto de terceira ordem na forma de Lagrange (ver Apêndice B.1 na página

245), para um ξ no compacto entre x e x^* , tem-se:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!} \cdot (x - x^*)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x^*)^3,$$

Para as condições dadas, tem-se:

$$f(x) = x^* + (x - x^*) \cdot \left\{ 1 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x^*)^2 \right\},$$

O que nos permite escrever dois casos, quando o ponto x está à direita de x^* que veremos no item (i) e quando o ponto x está à esquerda de x^* que veremos no item (ii). Dito isso, tem-se:

i) Se $x > x^* \Leftrightarrow x - x^* > 0$, isto implica que:

$$f(x) = x^* + \underbrace{(x - x^*)}_{>0} \cdot \underbrace{\left\{ 1 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x^*)^2 \right\}}_{>0},$$

Assim $x > x^* \implies x > f(x) > x^*$.

$$\Leftrightarrow x > x^* + \underbrace{(x - x^*)}_{>0} \cdot \underbrace{\left\{ 1 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x^*)^2 \right\}}_{>0} > x^*.$$

Escrito em forma de equação de diferenças de primeira ordem $x_n > x_{n+1} > x^*$. É fácil ver, dado $\varepsilon > 0$, que o ponto $x \in [x^*, x^* + \varepsilon]$ está escapando na órbita sob iteração de f , demonstrando instabilidade pela direita.

ii) Por outro lado, se $x < x^* \Leftrightarrow x - x^* < 0$, isto implica que:

$$f(x) = x^* + \underbrace{(x - x^*)}_{<0} \cdot \underbrace{\left\{ 1 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x^*)^2 \right\}}_{>0},$$

Assim $x < x^* \implies x < f(x) < x^*$.

$$\Leftrightarrow x < x^* + \underbrace{(x - x^*)}_{<0} \cdot \underbrace{\left\{ 1 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x^*)^2 \right\}}_{>0} < x^*.$$

É fácil ver, dado $\varepsilon > 0$, que o ponto $x \in [x^* - \varepsilon, x^*]$ está escapando na órbita sob iteração de f , demonstrando instabilidade pela esquerda.

Logo, a iteração da equação de diferenças discreta $x_{n+1} = f(x_n)$ afasta os pontos de x^* , como visto na figura 55 na página 159.

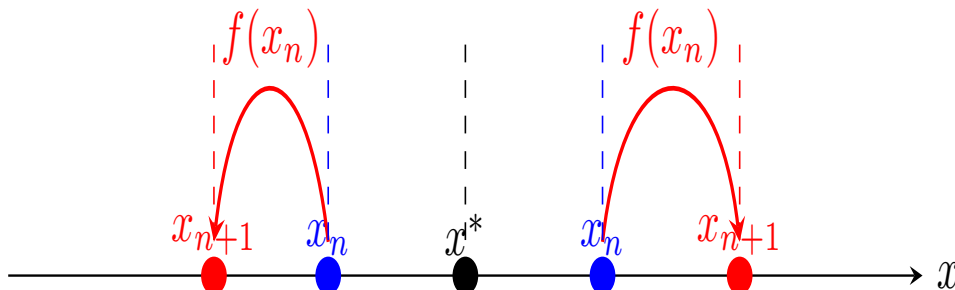


Figura 55: $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$

Tese: conclui-se que o ponto fixo x^* é *instável* pela esquerda de x^* e pela direita de x^* . □

Diagrama *Cobweb* de $f(x) = x + x^3$ em torno de $x = 0$

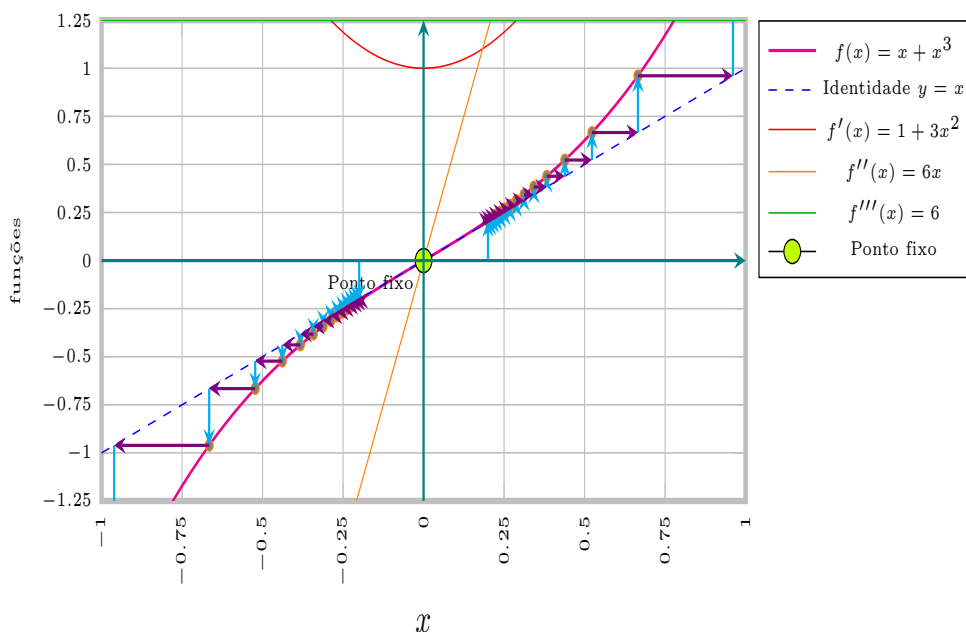


Figura 56: $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$

Prova (iii): O raciocínio é análogo ao da Prova (ii), bastando observar que agora assumimos $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$, de modo que o ponto x^* é um *ponto de inflexão* da curva $y = f(x)$, com tangência à reta identidade $y = x$ e concavidade

oposta nos lados esquerdo e direito de x^* , conforme pode ser visto na figura 58 da página 161.

Pelo Teorema de Taylor de segunda ordem com o resto de terceira ordem na forma de Lagrange, tem-se para algum ξ entre x e x^* :

$$f(x) = x^* + (x - x^*) \left\{ 1 + \frac{f'''(\xi)}{3!} (x - x^*)^2 \right\}.$$

A análise dos sinais é semelhante à prova (ii):

- Se $x > x^*$, então $f(x) < x$ mas ainda $f(x) > x^*$, e por indução obtemos uma sequência decrescente limitada inferiormente por x^* , que converge para o ponto fixo.
- Se $x < x^*$, então $f(x) > x$ mas ainda $f(x) < x^*$, e por indução obtemos uma sequência crescente limitada superiormente por x^* , que converge para o ponto fixo.

Assim, em ambos os casos, a iteração $x_{n+1} = f(x_n)$ aproxima x^* , como visto na figura 57 na página 160.

Tese: o ponto fixo x^* é *estável* tanto pela esquerda quanto pela direita. □

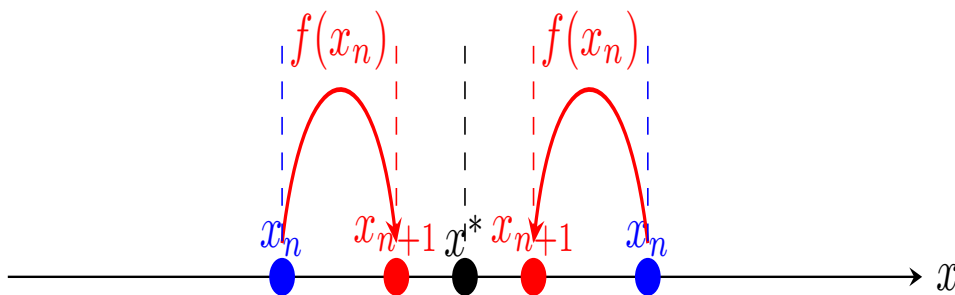


Figura 57: $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$

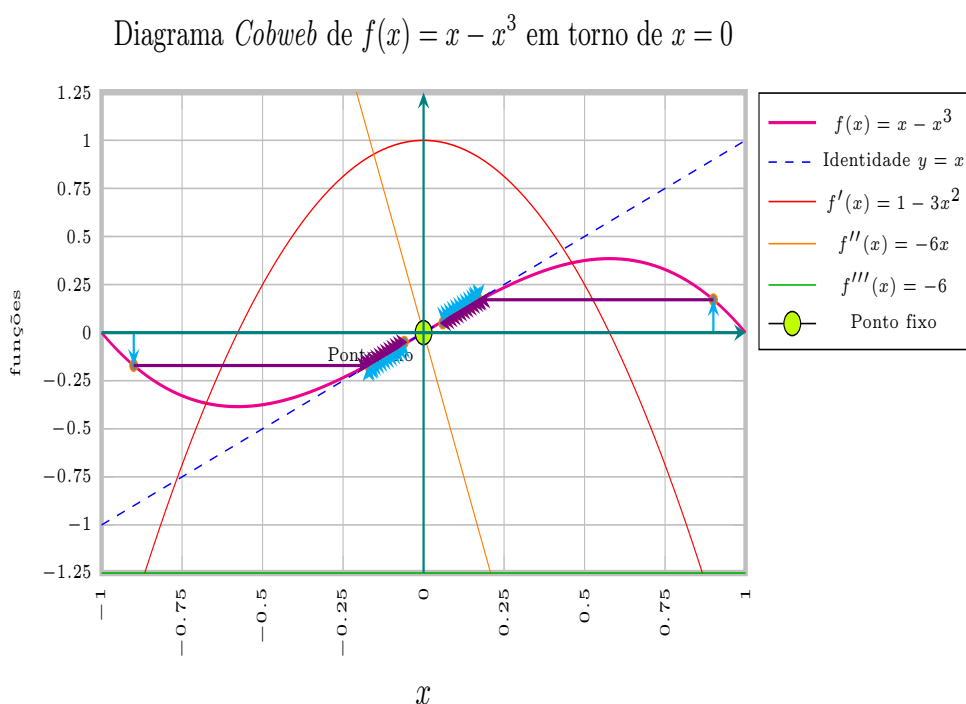


Figura 58: $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$

5.4.2 PONTO FIXO não-hiperbólico $f'(x^*) = -1$

Iremos apresentar o próximo resultado para estudar a estabilidade do ponto fixo de f satisfazendo $f'(x^*) = -1$.

5.4.2.1 ESTABILIDADE EM FUNÇÕES ITERADAS

Nesta seção vamos ver porque a estabilidade de um ponto fixo x^* de um mapa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser obtida estudando a estabilidade do ponto fixo x^* de $g(x^*) = f \circ f(x^*)$.

Proposição 5.2

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $f \in C^3$ quando conveniente, e seja $x^* \in \mathbb{R}$ um ponto fixo, isto é, $f(x^*) = x^*$.

Hipótese: Suponha que x^* seja assintoticamente estável (respectivamente, instável) em relação à função g , dada por:

$$g(x) = f \circ f(x) = f^2(x) = f(f(x)).$$

Tese: Então x^* também é assintoticamente estável (respectivamente, instável) em relação à função f .

Demonstração. Considere a função $g(x) = f^2(x) = f(f(x))$. Como f é de classe C^3 , segue pela regra da cadeia que

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x),$$

e, avaliando em x^* (onde $f(x^*) = x^*$),

$$g'(x^*) = f'(f(x^*)) f'(x^*) = (f'(x^*))^2.$$

Calculamos também as derivadas de ordem superior (expressas em termos das derivadas de f):

$$g''(x) = f''(f(x)) [f'(x)]^2 + f'(f(x)) f''(x),$$

logo, em x^* ,

$$g''(x^*) = f''(x^*) ([f'(x^*)]^2 + f'(x^*)).$$

A terceira derivada é:

$$\begin{aligned} g'''(x) &= f'''(f(x)) f'(x) [f'(x)]^2 + f''(f(x)) \cdot 2(f'(x) f''(x)) \\ &\quad + f''(f(x)) f'(x) f''(x) + f'(f(x)) f'''(x), \end{aligned}$$

portanto, em x^* ,

$$g'''(x^*) = f'''(x^*) ([f'(x^*)]^3 + f'(x^*)) + 3f'(x^*) [f''(x^*)]^2.$$

Assumimos que x^* é um ponto fixo comum de f e g (isto é, $g(x^*) = x^*$, $f(x^*) = x^*$), mas $g \neq f$. Queremos provar:

Hipótese:

x^* tem uma dada estabilidade (assintótica ou instabilidade) para g .

Tese:

x^* tem a mesma estabilidade para f .

Trabalharemos em três casos, conforme o valor de $f'(x^*)$.

Caso 1 (Ponto fixo hiperbólico): $|g'(x^*)| < 1$.

Como $g'(x^*) = [f'(x^*)]^2 \Leftrightarrow |g'(x^*)| = |[f'(x^*)]^2| = [f'(x^*)]^2$. Daí $|g'(x^*)| < 1 \Leftrightarrow |f'(x^*)| < 1$ e temos o resultado (Ver Teorema 2.3 na página 37).

Caso 2 (Ponto fixo não-hiperbólico): $f'(x^*) = 1$.

Neste caso, como $g'(x^*) = [f'(x^*)]^2$ e as fórmulas em x^* reduzem-se a

$$g'(x^*) = 1, \quad g''(x^*) = 2f''(x^*),$$

$$g'''(x^*) = 2f'''(x^*) + 3[f''(x^*)]^2.$$

Agora, a partir das hipóteses sobre g :

- Se, por hipótese, x^* é instável para g e isto se verifica pela condição do Teorema 5.1 (parte (i)), então $g''(x^*) \neq 0$ com o sinal apropriado. Como $g''(x^*) = 2f''(x^*)$, segue que $f''(x^*) \neq 0$ e tem o mesmo sinal de $g''(x^*)$. Pelo mesmo Teorema 5.1 (parte (i) aplicado a f), x^* é instável para f .
- Se, por hipótese, x^* é instável para g na situação não-hiperbólica da parte (ii) (isto é, $g'(x^*) = 1$, $g''(x^*) = 0$ e $g'''(x^*) > 0$), então $g''(x^*) = 0$ implica $f''(x^*) = 0$ (pois $g'' = 2f''$), e com $f''(x^*) = 0$ temos:

$$g'''(x^*) = 2f'''(x^*).$$

Assim $g'''(x^*) > 0$ implica $f'''(x^*) > 0$. Logo a condição da parte (ii) do Teorema 5.1 aplica-se a f e garante instabilidade de f .

- Analogamente, se x^* é estável para g pela condição da parte (iii) (isto é, $g'(x^*) = 1$, $g''(x^*) = 0$ e $g'''(x^*) < 0$), segue a mesma dedução: de $g''(x^*) = 0$ obtemos $f''(x^*) = 0$ e então $g'''(x^*) = 2f'''(x^*)$ implica $f'''(x^*) < 0$, e a parte (iii) do Teorema 5.1 da página 155 garante que f é assintoticamente estável.

Portanto, qualquer classificação (instável / estável assintótico) de g traduz-se na mesma classificação para f .

Caso 3 (Ponto fixo não-hiperbólico): $f'(x^*) = -1$.

Vamos resumir a ideia central, usamos a iteração de segunda ordem para “suavizar” o efeito de $f'(x^*) = 1$. A visualização pode ser feita através das Figuras 59 e 60 das páginas 166 e 167. Isso garante que a órbita par converge para o ponto fixo. Se a órbita ímpar tentar escapar indefinidamente, teria que existir outro ponto fixo ou

periódico no meio (contradição). Logo, toda a órbita (pares e ímpares) converge (é atratora).

Seja $g = f^2$ e assumamos que x^* é ponto fixo assintótico ou semi-estável (Vide Definição 5.1 da página 154) compartilhado a ambas as funções. Desde que x^* é estável em relação à função g , existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, tal que, $x_0 > x^* \Leftrightarrow x_0 - x^* > 0$, ou por indução sobre n , $0 < |x_0 - x^*| < \delta \implies 0 < |g^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Dito isso, é equivalente $0 < |f^{2n}(x_0) - x^*| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Suponha ainda que para este ponto inicial próximo ao ponto fixo, x_0 exista \mathcal{N} , tal que a iteração na \mathcal{N} -ésima vez posterior seja $0 < |f^{2\mathcal{N}+1}(x_0) - x^*| \geq \varepsilon$, isto é, saia pra fora do compacto $f : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$. Dito isso, a iteração anterior é, $0 < |f^{2\mathcal{N}}(x_0) - x^*| < \varepsilon$, e como assumimos que o ponto fixo é semi-estável, deve voltar ao compacto quando $0 < |f^{2\mathcal{N}+2}(x_0) - x^*| < \varepsilon$.

Vamos considerar dois casos:

Caso i (lado direito do compacto):

$f^{2\mathcal{N}}(x_0) < x^* + \varepsilon < f^{2\mathcal{N}+1}(x_0) \implies f(f^{2\mathcal{N}}(x_0)) < f(f^{2\mathcal{N}+1}(x_0)) \Leftrightarrow f^{2\mathcal{N}+1}(x_0) < f^{2\mathcal{N}+2}(x_0)$, conseqüentemente a função $g(x) = f(x) - x$ muda de sinal entre $f^{2\mathcal{N}}(x_0)$ e $f^{2\mathcal{N}+1}(x_0)$, portanto, tem uma raiz nesse intervalo. Isto implica que f tem um ponto fixo diferente de x^* .

Caso ii (lado esquerdo do compacto):

$f^{2\mathcal{N}+1}(x_0) < x^* - \varepsilon < f^{2\mathcal{N}}(x_0) \implies f(f^{2\mathcal{N}+1}(x_0)) < f(f^{2\mathcal{N}}(x_0)) \Leftrightarrow f^{2\mathcal{N}+2}(x_0) < f^{2\mathcal{N}+1}(x_0)$, daí é análogo ao caso i. Assumindo que não há pontos periódicos ou pontos fixos em vizinhanças de x^* caímos em contradição, como assumimos que não há outros pontos fixos/periódicos isso significa que não pode haver essa oscilação contraditória. Para provar o atrator, basta notar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x_0) = x^*$, então pela continuidade de f segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{2n}(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(x_0) = f(x^*) = x^*$.

Aqui $g'(x^*) = [f'(x^*)]^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ também, então $g'(x^*) = 1$ como antes.

Contudo

$$g''(x^*) = f''(x^*)(1 + (-1)) = 0,$$

ou seja, neste caso $g''(x^*)$ é sempre zero independentemente de $f''(x^*)$. A terceira derivada quando avaliada no ponto fixo x^* , torna-se:

$$g'''(x^*) = -2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2.$$

Assim, para deduzir propriedades de f a partir de propriedades de g quando $f'(x^*) = -1$ precisamos de informação adicional. Em muitos tratamentos (ver o enunciado do Teorema 5.3 usado anteriormente) assume-se uma hipótese suplementar sobre o *Schwarziano* de f ou equivalente (isto é, sinais adequados das combinações das derivadas superiores) para garantir que o sinal de $g'''(x^*)$ controle o sinal de $f'''(x^*)$. Sob essa hipótese adicional (a mesma usada na referência citada), segue que:

- Se g satisfaz a condição da parte (iii) do Teorema 5.1 (isto é, $g'(x^*) = 1$, $g''(x^*) = 0$, $g'''(x^*) < 0$) então, pela hipótese suplementar sobre f (p.ex. $Sf(x^*) < 0$ ou resultado análogo), podemos concluir que $f'''(x^*) < 0$ e, assim, o Teorema 5.1 (parte (iii)) aplica-se a f , fornecendo estabilidade assintótica de f .
- O raciocínio para instabilidade segue por argumentos análogos quando as derivações superiores de g satisfazem as hipóteses da parte (ii) do Teorema 5.1 (ou diretamente a parte (i) quando adequada).

Portanto, em ambos os itens anteriores (com a hipótese adicional necessária no caso $f'(x^*) = -1$), a estabilidade (ou instabilidade) de g implica a mesma propriedade para f . Logo a proposição 5.2 é demonstrada. \square

Para demonstrar visualmente esta proposição, considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + \frac{3}{10} \cdot x^3$, cuja derivada é dada por $f'(x) = -1 + \frac{9}{10} \cdot x^2$, que avaliada nos pontos fixos, isto é, $-x^* + \frac{3}{10} \cdot x^{*3} = x^* \implies x^* \cdot (-2 + \frac{3}{10} \cdot x^{*2})$, temos: $x_1^* = 0$, $x_{2,3}^* = \pm \frac{2}{3} \sqrt{15}$ que são pontos fixos. Avaliando na primeira derivada $f'(0) = -1$ (não-hiperbólico), $|f'(\pm \frac{2}{3} \sqrt{15})| > 1$ (hiperbólico repulsor).

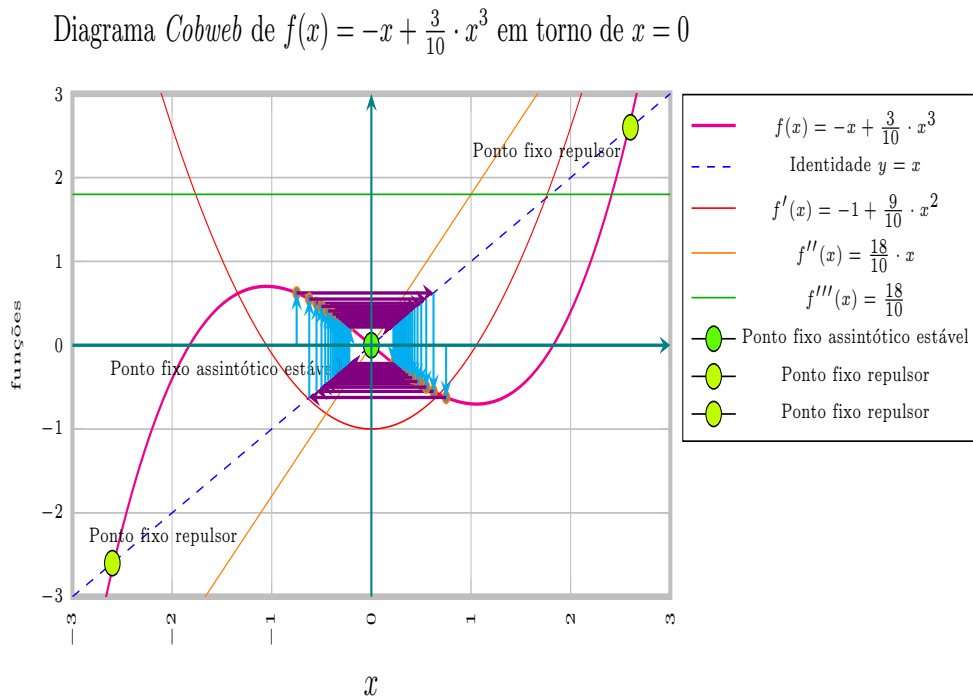


Figura 59: Cobweb para $f(x) = -x + \frac{3}{10} \cdot x^3$ ilustrando a estabilidade do ponto fixo $x^* = 0$ com $f'(0) = -1$.

Agora vamos mostrar o mesmo gráfico com relação à função g , ou seja, em vez de intercalar valores positivos e negativos que faz a aparência assintótica aparecer no meio das teias de aranha do diagrama *Cobweb*, as iterações vão convergir “mais direto” para o ponto fixo. Por isso a estratégia $g = f^2$ cria um comportamento mais regular.

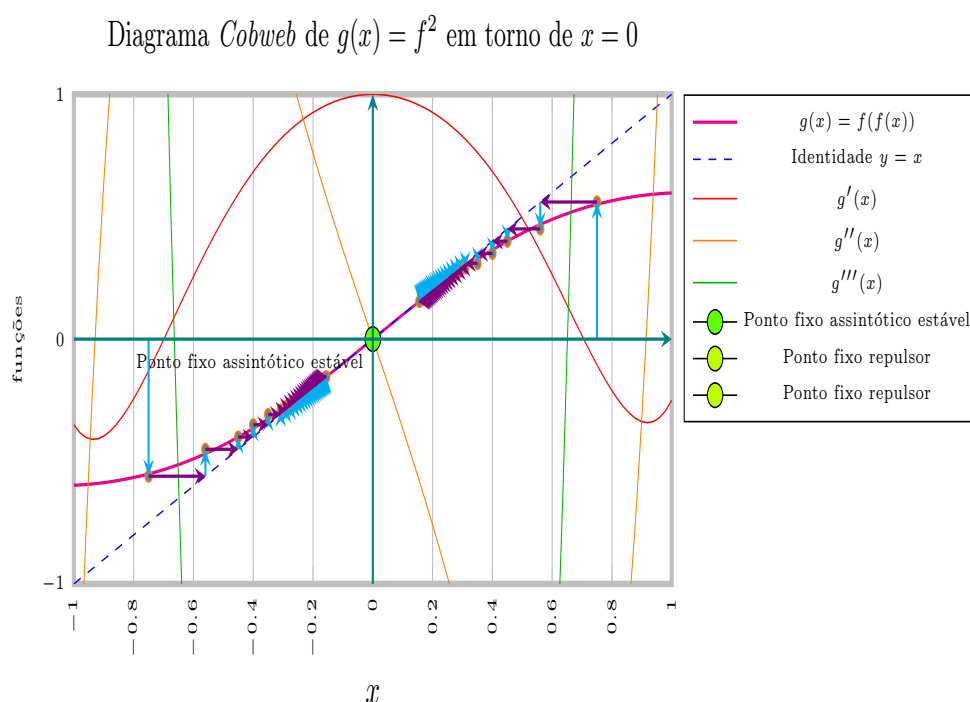


Figura 60: Cobweb para $g(x) = f^2$ ilustrando a estabilidade mais regular do ponto fixo $x^* = 0$ com $f'(0) = -1$.

5.4.2.2 SCHWARZIANO

Nesta seção, formalizamos a apresentação do operador *Schwarziano*. O documento original em língua estrangeira está disponível em <<https://www.ams.org/notices/200901/tx090100034p.pdf>> de Valentin Ovsienko e Sergei Tabachnikov, 2009.

Para estabelecer o teorema relativo à estabilidade de pontos fixos que satisfazem $f'(x^*) = -1$, devemos considerar o que chamamos de *Schwarziano* de uma função f de classe 3, isto é, três vezes continuamente derivável.

Dada $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ três vezes continuamente derivável, definimos o *Schwarziano* de f aplicado em $x \in \mathcal{I}$ por:

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2, \quad \text{desde que } f'(x) \neq 0.$$

5.4.2.3 TEOREMA DO SINAL DO SCHWARZIANO

Teorema 5.3 Quando $f'(x^*) = -1$ testar o Schwarziano.

Seja x^* um ponto fixo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x^*) = -1$. Se a função f é de classe C^3 , isto é, $f'(x)$, $f''(x)$, e $f'''(x)$ são contínuas em $x = x^*$, então as seguintes afirmações são válidas:

- i) $Sf(x^*) < 0$, então x^* é assintoticamente estável,
 ii) $Sf(x^*) > 0$, então x^* é instável.

Demonstração. Hipóteses: Seja x^* um ponto fixo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x^*) = x^*, \quad f'(x^*) = -1, \quad \text{e} \quad f', f'', f''' \text{ são contínuas em } x^*.$$

Assuma ainda que $Sf(x^*) < 0$ (Schwarziano negativo).

Tese: Provar que x^* é um ponto fixo **assintoticamente estável**.

Estratégia da demonstração: Como visto na proposição 5.2 na página 161, temos que:

$$g(x) = f^2(x),$$

Observações importantes:

- Note que $g'(x^*) = 1$, desta forma podemos utilizar critério de estabilidade do ponto fixo x^* de f através da estabilidade do ponto fixo x^* de g , como descritos no Teorema 5.1 da página 155 e na proposição 5.2 na página 161.
- Se x^* é ponto fixo de f , então é também ponto fixo de $g = f \circ f$.

Cálculo das derivadas:

Aplicando a regra da cadeia sucessivamente, temos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(f(x)) \cdot f'(x) && \text{(derivada de } f \circ f) \\ g''(x) &= f''(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x) \\ g'''(x) &= \left[[f'(x)]^3 + f'(f(x)) \right] \cdot f'''(x) + 3 \cdot f'(x) \cdot [f''(x)]^2. \end{aligned}$$

Avaliando essas derivadas em $x = x^*$, e utilizando nossas hipóteses, obtemos:

$$\begin{aligned}
 g'(x^*) &= (-1)^2 = 1, \\
 g''(x^*) &= f''(x^*) \cdot [1 + (-1)] = f''(x^*) \cdot 0 = 0, \\
 g'''(x^*) &= -2 \cdot f'''(x^*) - 3 \cdot [f''(x^*)] = 2 \cdot \mathcal{S}f(x^*).
 \end{aligned}$$

Tese: Portanto, segue do Teorema 5.1 da página 155 item (iii) que se $\mathcal{S}f(x^*) < 0$ (respectivamente $\mathcal{S}f(x^*) > 0$), então $g'''(x^*) < 0$, $g''(x^*) = 0$ e $g'(x^*) = 1$ (respectivamente $g'''(x^*) > 0$, $g''(x^*) = 0$ e $g'(x^*) = 1$), o ponto fixo x^* é assintoticamente estável para g e f (respectivamente instável para g e f , conforme Teorema 5.1 da página 155 item (ii)).

□

5.4.2.4 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE STURM-LIOUVILLE

O *Schwarziano* foi introduzido formalmente na teoria dos sistemas dinâmicos em 1918, embora já aparecesse de forma implícita na equação diferencial hipergeométrica estudada por *Ernst Kummer* por volta de 1840, durante a análise de suas soluções. No entanto, surge de maneira explícita na equação diferencial homogênea de segunda ordem do tipo *Sturm-Liouville*, como veremos a seguir:

Fórmula 5.4.1: Equação do tipo Sturm-Liouville

Uma equação diferencial do tipo:

$$y''(z) + p(z) \cdot y(z) = 0, \quad (\alpha)$$

Com $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real (α) é chamada equação de Sturm-Liouville.

A seguir, enunciamos uma importante proposição (proposição 5.4) que relaciona o *Schwarziano* à equação acima.

Proposição 5.4 Schwarziano e a equação (α)

Sejam $y_1(z)$ e $y_2(z)$ duas soluções linearmente independentes da equação (α), ou seja,

$$\mathcal{W}(z) = \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{vmatrix} \neq 0,$$

Onde $\mathcal{W}(z)$ é o Wronskiano de $y_1(z)$ e $y_2(z)$.

Então, a razão $g(z) = \frac{y_1(z)}{y_2(z)}$ satisfaz:

$$\frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{g''}{g'} \right)^2 = 2 \cdot p,$$

Demonstração. Por hipótese, suponha $y_1(z) = g(z) \cdot y_2(z)$. Calculando as derivadas, tem-se:

$$\begin{aligned} y_1'(z) &= g'(z) \cdot y_2(z) && + && g(z) \cdot y_2'(z), \\ y_1''(z) &= g''(z) \cdot y_2(z) + g'(z) \cdot y_2'(z) && + && g'(z) \cdot y_2'(z) + g(z) \cdot y_2''(z), \\ \Leftrightarrow y_1''(z) &= g''(z) \cdot y_2(z) && + 2 \cdot g'(z) \cdot y_2'(z) && + g(z) \cdot y_2''(z). \end{aligned}$$

Substituindo na equação (α) e suprimindo a variável (z), tem-se:

$$\begin{aligned} y_1'' + p \cdot y_1 &= g'' \cdot y_2 + 2g' \cdot y_2' + g \cdot y_2'' + p \cdot g \cdot y_2, \\ \Leftrightarrow \underbrace{y_1'' + p \cdot y_1}_0 &= g'' \cdot y_2 + 2g' \cdot y_2' + g \cdot \underbrace{(y_2'' + p \cdot y_2)}_0. \end{aligned}$$

Usando o fato de que y_1 e y_2 satisfazem a equação (α), obtemos:

$$g'' \cdot y_2 + 2g' \cdot y_2' = 0, \quad (\beta)$$

Calculando a derivada da expressão acima (β), tem-se:

$$\begin{aligned} (y_2'' \cdot g') + (y_2' \cdot g'') + \frac{1}{2} \cdot [(g'' \cdot y_2) + (g'' \cdot y_2')] &= 0, \\ \Leftrightarrow g''' \cdot y_2 + g'' \cdot y_2' + 2 \cdot g'' \cdot y_2' + 2 \cdot g' \cdot y_2'' &= 0, \\ \Leftrightarrow g''' \cdot y_2 + 3 \cdot g'' \cdot y_2' + 2 \cdot g' \cdot y_2'' &= 0, \\ \Leftrightarrow g''' + 3 \cdot g'' \cdot \frac{y_2'}{y_2} + 2 \cdot g' \cdot \frac{y_2''}{y_2} &= 0, \end{aligned}$$

Por outro lado, da equação (α), sabemos que $\frac{y_2''}{y_2} = -p$, então:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow g''' + 3 \cdot g'' \cdot \frac{y_2'}{y_2} - 2 \cdot g' \cdot p &= 0, \\ \Leftrightarrow g''' + 3 \cdot g'' \cdot \frac{y_2'}{y_2} &= 2 \cdot g' \cdot p, \\ \Leftrightarrow \frac{g'''}{g''} + 3 \cdot \frac{y_2'}{y_2} &= 2 \cdot \frac{g'}{g''} \cdot p, \end{aligned}$$

Note que de (β), tem-se $\frac{y'_2}{y_2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g''}{g'}$. Substituindo na igualdade anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{g'''}{g''} - \frac{3}{2} \cdot \frac{g''}{g'} = 2 \cdot \frac{g'}{g''} \cdot p, \\ \Leftrightarrow \left(\frac{g''}{g'}\right) \cdot \frac{g'''}{g''} - \left(\frac{g''}{g'}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{g''}{g'} &= 2 \cdot \left(\frac{g''}{g'}\right) \cdot \frac{g'}{g''} \cdot p, \\ \Leftrightarrow \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{g''}{g'}\right)^2 &= 2 \cdot p, \end{aligned}$$

Ou seja, tem-se a identidade:

$$\frac{g'''(z)}{g'(z)} - \frac{3}{2} \left[\frac{g''(z)}{g'(z)} \right]^2 = 2 \cdot p(z).$$

A expressão do lado esquerdo da igualdade acima é chamada *Schwarziano* da função $g(z)$ e denotada por $Sg(z)$. Concluindo assim a demonstração. \square

5.4.2.5 SCHWARZIANO IDENTICAMENTE NULO

Nesta seção, introduzimos as funções cujo *Schwarziano* é zero de forma explícita. Tais funções, como as transformações de *Möbius* ou transformações fracionária linear, desempenham um papel fundamental na dinâmica discreta e ajudam a compreender a relação entre estabilidade no estudo de sistemas dinâmicos.

No estudo de iterações e estabilidade de sistemas, funções com *Schwarziano* nulo são utilizadas para analisar a estabilidade de órbitas e entender bifurcações. Elas servem como mudanças de variáveis que simplificam certos mapas dinâmicos.

Dito isso, o *Schwarziano* de uma função f é nulo quando satisfaz:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2 = 0$$

Colocando a fração sob o mesmo denominador, tem-se:

$$\frac{2 \cdot f'''(x) \cdot f'(x) - 3 \cdot [f''(x)]^2}{[f'(x)]^2} = 0$$

Multiplicando ambos os membros da equação, resulta em:

$$\frac{2 \cdot f'''(x) \cdot f'(x) - 3 \cdot [f''(x)]^2}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{f''(x) \cdot [f'(x)]^2}{[f'(x)]^4} = 0 \cdot \frac{f''(x) \cdot [f'(x)]^2}{[f'(x)]^4}$$

Assim, obtemos a expressão:

$$\frac{2 \cdot f'''(x) \cdot f''(x) \cdot [f'(x)]^3 - 3 \cdot [f'(x)]^2 \cdot [f''(x)]^3}{[f'(x)]^6} = 0$$

Primeiro, fatorizamos o numerador:

$$2f'''f''(f')^3 - 3(f')^2(f'')^3 = (f')^2 f'' (2f'''f' - 3(f'')^2).$$

Note que o denominador é:

$$(f')^6 = ((f')^3)^2.$$

Isto sugere definir a seguinte mudança de variáveis:

$$u = (f'')^2, \quad v = (f')^3.$$

Calculamos:

$$u' = 2f''f''', \quad v' = 3(f')^2 f''.$$

Assim,

$$u'v - uv' = 2f''f'''(f')^3 - 3(f'')^3(f')^2,$$

que coincide exatamente com o numerador original. Portanto, da derivada da regra do quociente, segue que:

$$\frac{2f'''f''(f')^3 - 3(f')^2(f'')^3}{(f')^6} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{(f'')^2}{(f')^3}\right)'.$$

Do *Schwarziano* identicamente nulo, temos:

$$\left(\frac{(f'')^2}{(f')^3}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(f'')^2}{(f')^3} = C,$$

Onde C é a constante de integração indefinida $\int \left(\frac{(f'')^2}{(f')^3}\right)' dx$.

Manipulando algebricamente a expressão anterior $\sqrt{\frac{(f'')^2}{(f')^3}} = \sqrt{C}$, tem-se:

$$\frac{f''(x)}{[f'(x)]^{\frac{3}{2}}} = \alpha, \quad \alpha \geq 0 \mid \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

Multiplicando-se pelo infinitesimal dx e integrando membro a membro, tem-se:

$$\int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^{\frac{3}{2}}} dx = \int \alpha dx$$

Fazendo a mudança de variável $u = f'(x) \Leftrightarrow du = f''(x) dx$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} &= \int u^{-\frac{3}{2}} du = \int \alpha dx, \\ \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} &= -2 \cdot u^{-\frac{1}{2}} = \alpha \cdot x + \beta, \\ \frac{-2}{\sqrt{u}} &= -\frac{2}{\sqrt{u}} = \alpha \cdot x + \beta, \\ \left(\frac{-2}{\sqrt{u}}\right)^2 &= \frac{4}{u} = (\alpha \cdot x + \beta)^2, \\ \Leftrightarrow u &= \frac{4}{[\alpha \cdot x + \beta]^2}, \\ \Leftrightarrow f'(x) &= 4 \cdot [\alpha \cdot x + \beta]^{-2}, \\ \Leftrightarrow \int f'(x) dx &= 4 \int [\alpha \cdot x + \beta]^{-2} dx, \\ \Leftrightarrow f(x) &= 4 \cdot \frac{[\alpha \cdot x + \beta]^{1-2}}{1-2} + \gamma, \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{-4}{\alpha \cdot x + \beta} + \gamma, \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot x + (\beta \cdot \gamma - 4)}{\alpha \cdot x + \beta}, \end{aligned}$$

Como $\alpha \cdot \gamma$ e $\beta \cdot \gamma - 4$ são constantes, podemos renomeá-las reescrevendo f como:

$$f(x) = \frac{\delta \cdot x + \epsilon}{\alpha \cdot x + \beta}$$

Com restrição de que $\alpha \cdot x + \beta \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\beta}{\alpha}$.

Fórmula 5.4.2: Transformação de Möbius

$$f(x) = \frac{\delta \cdot x + \epsilon}{\alpha \cdot x + \beta}$$

Esta função f gera as linhas Schwarzianas, para cada constante real α, β, δ e ϵ arbitrárias, como pode ser visto nas figuras 61 da página 174 e 62 da página 174 para alguns valores das constantes reais arbitrárias entre $[-10, 10]$.

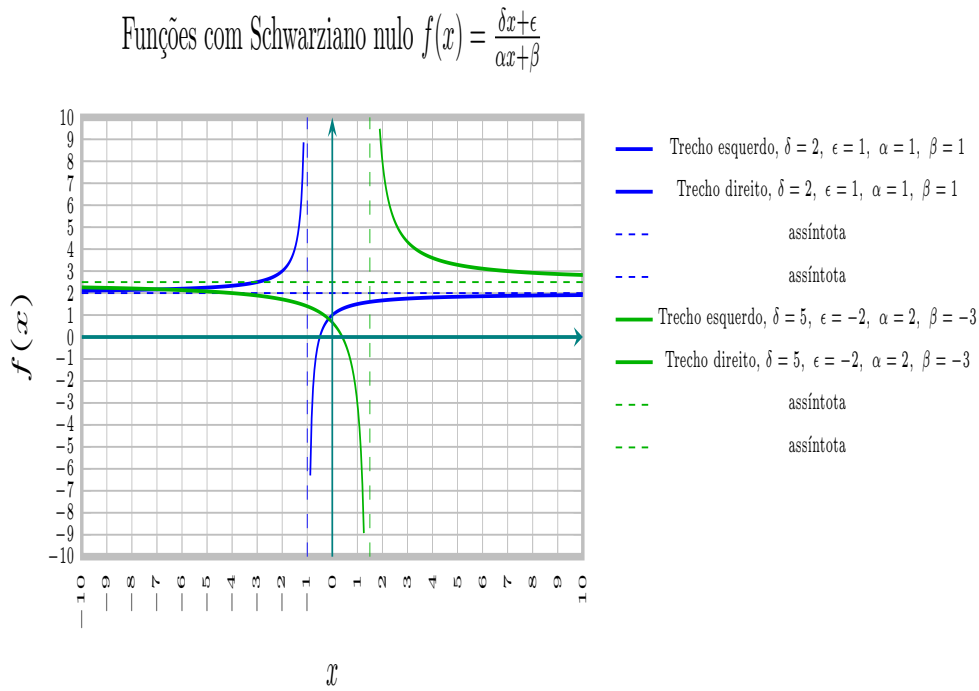


Figura 61: Gráfico das funções com Schwarziano nulo, para diferentes valores de α, β, δ e ϵ .

Segue gráfico de alguns casos especiais da função $f(x)$.

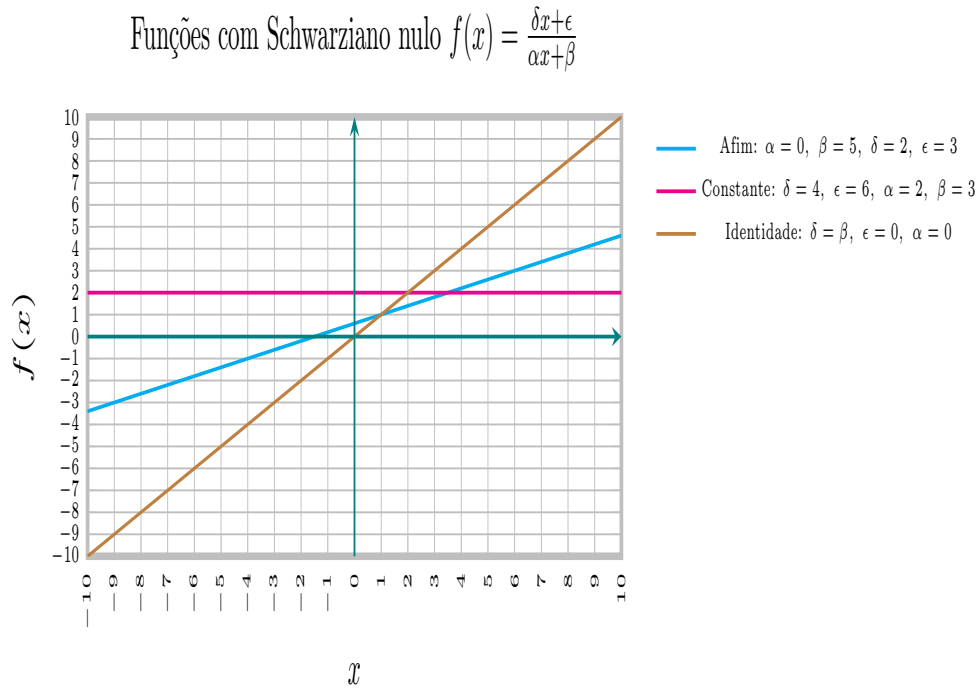


Figura 62: Gráfico das funções com Schwarziano nulo, para diferentes valores de α, β, δ e ϵ .

5.4.2.6 SCHWARZIANO NEGATIVO

Quando o *Schwarziano* Sf de uma função f é negativo, ou seja, $Sf(x) < 0$ para todo x em um dado intervalo, uma série de propriedades dinâmicas significativas emergem. Esse comportamento é especialmente relevante para o estudo de estabilidade de órbitas periódicas e estrutura dos atratores.

Funções com *Schwarziano* negativo apresentam uma rigidez dinâmica que permite controlar melhor o número e a natureza de seus atratores periódicos. De fato, o Teorema de Singer (1978) fornece um resultado notável nesse contexto: *para aplicações unidimensionais contínuas com Schwarziano negativo, o número de atratores periódicos é finito, e cada um deles atrai uma componente conexa do domínio de atração.*

Diversas funções amplamente utilizadas em sistemas dinâmicos unidimensionais satisfazem a condição $Sf(x) < 0$, tais como:

- Funções quadráticas: $Q(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$;
- Funções exponenciais modificadas: $f(x) = \lambda e^{-x}$;
- Transformações senoidais suaves: $f(x) = \text{sen}(x)$ em intervalos restritos.

Portanto, o estudo de casos com *Schwarziano* negativo não apenas permite classificações mais refinadas sobre estabilidade local, como também estabelece limites globais sobre a dinâmica qualitativa do sistema.

5.4.2.7 SCHWARZIANO INCONCLUSIVO

O critério baseado em sinal da derivada Schwarziana $Sf(x)$ é uma ferramenta poderosa para a análise da estabilidade de pontos fixos não-hiperbólicos. No entanto, ele não é infalível. Existem situações em que o *Schwarziano* se anula no ponto de interesse, mas a função ainda assim pode ser assintoticamente estável ou instável.

O *Schwarziano* não detecta comportamento estável ou instável para essas funções porque simplesmente não varia, isto é, $Sf(x^*) = 0$. Ao invés de calcular *Schwarzianos* de ordem superiores (tarefa que é bastante complexa), (ELAYDI et al., 2005) mostra um apêndice com uma técnica mais simples. Os *Schwarzianos* de primeira, segunda e k -ésima ordens, são calculados da forma que se segue, não fazendo parte do escopo deste trabalho:

$$S_1 f(x) = Sf(x), \quad S_2 f(x) = \frac{1}{2} g^{(5)}(x), \quad \text{onde } g = f^2,$$

Generalizando, tem-se:

$$S_k f(x) = \frac{1}{2} g^{(2k+1)}(x).$$

Conforme citado por (ELAYDI et al., 2005, p. 477), o Apêndice A apresenta uma abordagem mais prática para tratar a estabilidade de pontos fixos. Nesse apêndice, os autores estendem os teoremas previamente discutidos a fim de abranger casos ainda não resolvidos de estabilidade local de pontos fixos *não-hiperbólicos* em aplicações definidas na reta real. O foco está na análise de mapas cujos pontos fixos possuem derivada igual a -1 , com uma abordagem inspirada no artigo de Dannan, Elaydi e Ponomarenko.

Na Seção A.1, o apêndice trata da *estabilidade local de mapas não oscilatórios*. São utilizados resultados clássicos da análise real, como o *Teorema do Valor Intermediário* e o *Teorema de Taylor* (ver Apêndice B, página 243), para estabelecer condições sob as quais um ponto fixo pode ser classificado como estável, instável ou semi-assintoticamente estável. Essas condições dependem da ordem da primeira derivada não nula da função no ponto fixo, bem como da sua paridade (isto é, se a ordem é par ou ímpar).

Na Seção A.2, o foco se volta aos *casos oscilatórios*, nos quais a derivada da função no ponto fixo é -1 . Nessa situação, a análise recai sobre a função composta $g(x) = f \circ f(x) = f(f(x))$, que preserva o mesmo ponto fixo (conforme discutido no Teorema 5.2). Essa reformulação permite transferir os critérios de estabilidade para g , oferecendo uma análise mais refinada do comportamento dinâmico nas vizinhanças do ponto fixo.

O apêndice também discute as limitações dessa técnica, demonstrando que, no caso de *funções analíticas*ⁱⁱ, certos tipos de estabilidade (como a semi-assintótica para g) não ocorrem. São apresentados exemplos concretos para ilustrar os diferentes comportamentos possíveis incluindo estabilidade, instabilidade e estabilidade semi-assintótica conforme a estrutura da função considerada. Um modelo biológico é explorado como exemplo aplicado, evidenciando a utilidade prática dos resultados teóricos.

Por fim, são apresentados exemplos em que o *critério Schwarziano* falha:

$$f'(x^*) = -1, \quad f''(x^*) = 0, \quad f'''(x^*) = 0, \quad \text{e} \quad \mathcal{S}f(x^*) = 0.$$

Nesse caso, não é possível concluir a estabilidade do ponto fixo x^* apenas com base na análise do Schwarziano $\mathcal{S}f(x^*)$, o que evidencia a necessidade de ferramentas complementares para a análise qualitativa.

ⁱⁱ Função analítica é aquela que pode ser escrita em série de Taylor.

Um exemplo clássico inconclusivo do critério ocorre quando $f'(x^*) = -1$ e $Sf(x^*) = 0$.

5.4.1 Exemplo de falha

Considere a função:

$$f(x) = -x + 2x^2 - 4x^3.$$

Calculando os pontos fixos, obtemos três soluções:

$$x_1^* = 0, \quad x_{2,3}^* = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{4}.$$

Somente $x_1^* = 0 \in \mathbb{R}$. Derivando-se f verificamos que $f'(x) = -1 + 4x - 12x^2$, $f''(x) = 4 - 24x$ e $f'''(x) = -24$, assim:

$$f'(0) = -1, \quad f''(0) = 4 > 0, \quad f'''(0) = -24 < 0, \quad Sf(0) = 0.$$

Assim, temos um ponto fixo não-hiperbólico com *Schwarziano* nulo.

Observação. A teoria desenvolvida por Fozi M. Dannan, Saber N. Elaydi e Vadim Ponomarenko em 2003 propõe um critério mais geral de estabilidade para funções não lineares que falham nos testes tradicionais.

No exemplo 5.4.1 conforme cita (ELAYDI et al., 2005, p. 479) o ponto fixo $x^* = 1$ é semi-assintoticamente estável pela esquerda, porém os critérios tradicionais são inconclusivos.

Em (ELAYDI, 2007, p. 34) alguns casos inconclusivos com $f'(x^*) = 1$ são investigados, envolvendo derivadas maiores que quarto grau.

5.5 EXEMPLOS

Nesta seção veremos exemplos de pontos fixos não-hiperbólicos, com exemplos de funções que ilustram a teoria deste capítulo. A seguir, apresentamos exemplos de pontos fixos em que as órbitas se afastam ou aproximam em ambos os lados, e também se afastam (respectivamente aproximam) de um lado e aproximam (respectivamente afastam) do outro lado do ponto fixo.

5.5.1 APROXIMAÇÃO PELA DIREITA

5.5.1 Exemplo Semi-estável pela direita (instável pela esquerda)

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suas derivadas f' , f'' , f''' dadas por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 + x, \\ f'(x) &= 3x^2 - 2x + 1, \\ f''(x) &= 6x - 2, \\ f'''(x) &= 6, \end{aligned}$$

Esboçar o diagrama *Cobweb* e classificar os pontos fixos de f .

Solução: Determinando os pontos fixos de f :

$$\begin{aligned} f(x^*) &= x^*, \\ x^{*3} - x^{*2} + x^* &= x^*, \\ x^{*3} - x^{*2} &= 0, \\ x^{*2} \cdot (x^* - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, os pontos fixos de f são $x_1^* = x_2^* = 0$ e $x_3^* = 1$.

Análise do ponto fixo não-hiperbólico $x^* = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1, \\ f''(0) &= -2 \neq 0, \end{aligned}$$

Pelos critérios usuaisⁱⁱⁱ, Teorema 5.1 da página 155, $x^* = 0$ é instável (semi-estável como definido em 5.1 na página 154).

Análise do ponto fixo hiperbólico $x^* = 1$:

$$f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 1 = 2 > 1.$$

Pelo Teorema 2.3 (pág. 37), o ponto fixo $x^* = 1$ é repulsor.

Os gráficos do exemplo 5.5.1 (*Cobweb*) indicam que órbitas próximas de $x^* = 1$ são repelidas, com tendência de estabilização em $x^* = 0$, visível nas Figuras 63 e 64.

ⁱⁱⁱ A continuidade de f''' ($f'''(0) = 6 > 0$) não é necessária.

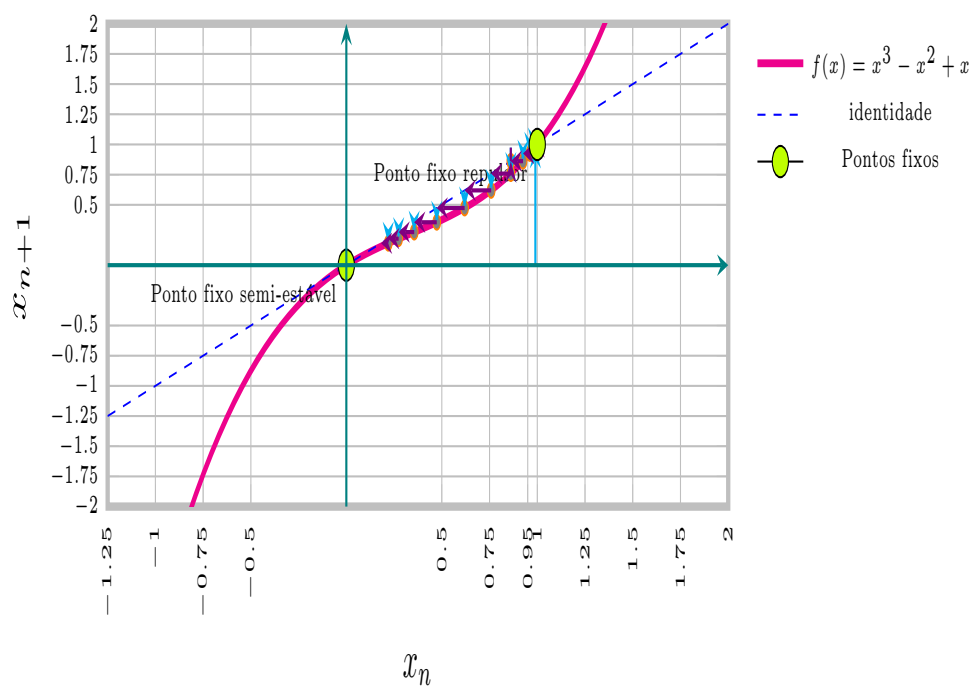


Figura 63: Semi-estabilidade: $f'(0) = 1$, $f''(0) < 0$ e $f'''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = 0,99$ para 12 iterações.

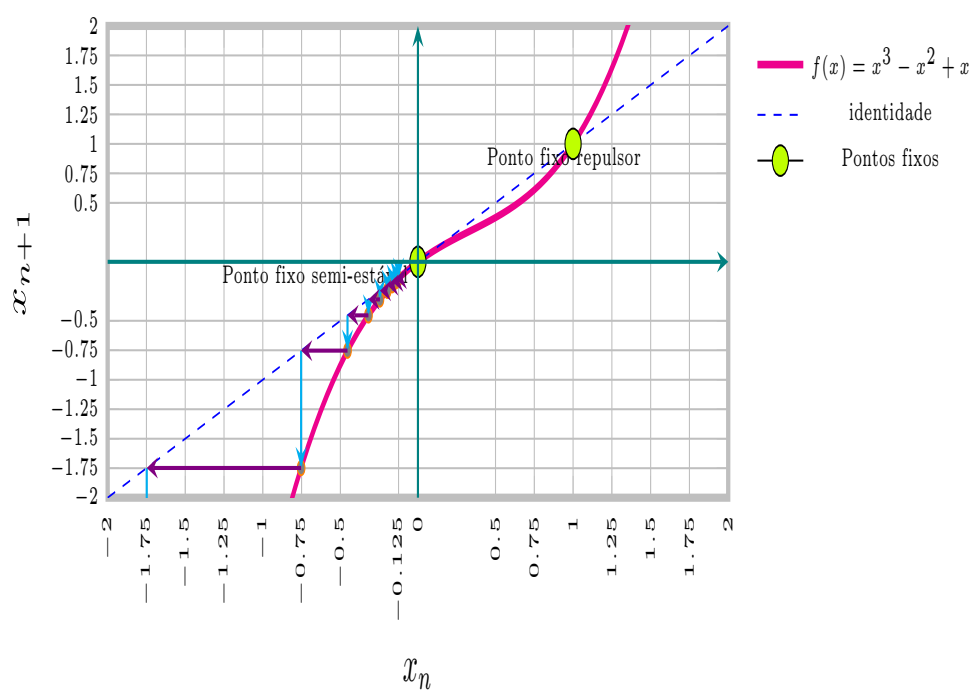


Figura 64: Semi-estabilidade: $f'(0) = 1$, $f''(0) < 0$ e $f'''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = -0,125$ para 12 iterações.

5.5.2 APROXIMAÇÃO PELA ESQUERDA

5.5.2 Exemplo Semi-estável pela esquerda (instável pela direita)

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suas derivadas f' , f'' e f''' dadas por:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 + x, \\ f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1, \\ f''(x) &= 6x + 2, \\ f'''(x) &= 6, \end{aligned}$$

Esboçar o diagrama *Cobweb* e classificar os pontos fixos de f .

Solução: Determinando os pontos fixos de f :

$$\begin{aligned} f(x^*) &= x^*, \\ x^{*3} + x^{*2} + x^* &= x^*, \\ x^{*3} + x^{*2} &= 0, \\ x^{*2}(x^* + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, os pontos fixos de f são $x_1^* = 0$, de multiplicidade 2 e $x_2^* = -1$.

Análise do ponto fixo não-hiperbólico $x^* = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1, \\ f''(0) &= 2 \neq 0, \end{aligned}$$

Pelos critérios usuais, Teorema 5.1 (pág. 155), o ponto fixo $x^* = 0$, é instável, porque $f(x^*) = x^*$, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) \neq 0$.

Análise do ponto fixo hiperbólico $x^* = -1$:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 > 1.$$

Pelo Teorema 2.3 (pág. 37), o ponto fixo $x^* = -1$ é repulsor.

Os gráficos do exemplo 5.5.2, do tipo teia-de-aranha (*Cobweb*), que ilustram a semi-estabilidade do ponto fixo $x^* = 0$, podem ser visualizados nas Figuras 65 e 66.

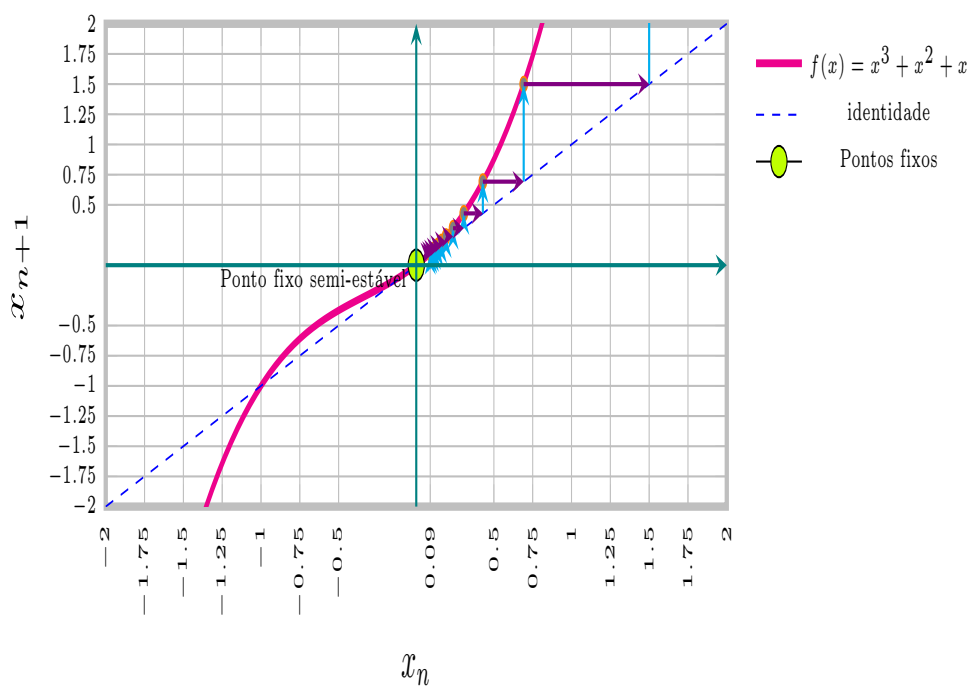


Figura 65: Semi-estabilidade: instável pela direita e estável pela esquerda. $f'(0) = 1$ e $f''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = 0,09$ para 12 iterações.

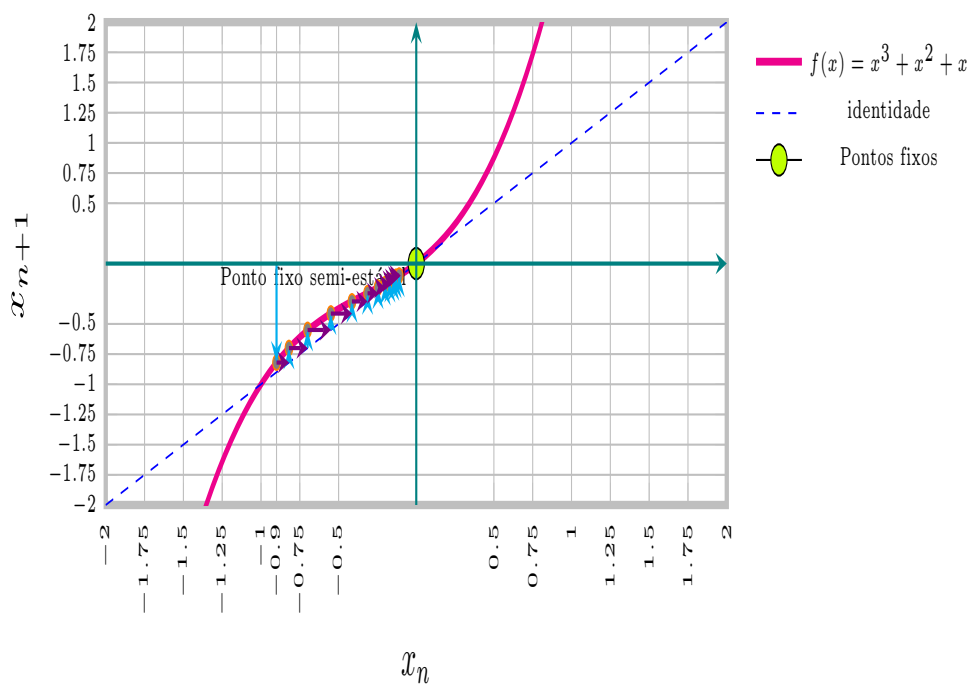


Figura 66: Semi-estabilidade: instável pela direita e estável pela esquerda. $f'(0) = 1$ e $f''(0) > 0$. Cobweb com $x_0 = -0,9$ para 12 iterações.

5.5.3 AFASTAMENTO PELOS DOIS LADOS

5.5.3 Exemplo Instabilidade dos dois lados

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suas derivadas f' , f'' e f''' dados por:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - \operatorname{sen}(x), \\ f'(x) &= 2 - \cos(x), \\ f''(x) &= \operatorname{sen}(x), \\ f'''(x) &= \cos(x), \end{aligned}$$

Esboçar o diagrama *Cobweb* e classificar os pontos fixos de f .

Solução: Os pontos fixos de f satisfazem:

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow 2x^* - \operatorname{sen}(x^*) = x^* \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* = 0.$$

Essa equação é não linear e não pode ser resolvida analiticamente^{iv}.

Classificação do ponto fixo $x^* = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 2 - \cos(0) = 1 \quad (\text{não-hiperbólico}), \\ f''(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0, \\ f'''(0) &= \cos(0) = 1, \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.1 (pág. 155), como $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) > 0$, concluímos que o ponto fixo não-hiperbólico $x^* = 0$ é **instável**.

Análise lateral da instabilidade:

Para ilustrar o comportamento ao redor do ponto fixo, analisamos:

$$f'(\pm 0,1) = 2 - \cos(\pm 0,1) > 1 \quad (\text{ou seja, } |f'| > 1).$$

Pelo teorema 2.3, as órbitas iniciadas em $x_0 = \pm 0,1$ afastam-se do ponto fixo, evidenciando instabilidade nos dois lados.

Visualização: Esse afastamento bilateral é ilustrado nas Figuras 67 e 68, nas páginas 183 e 183, respectivamente.

^{iv} Um método resolutivo eficiente é o de Newton-Raphson.

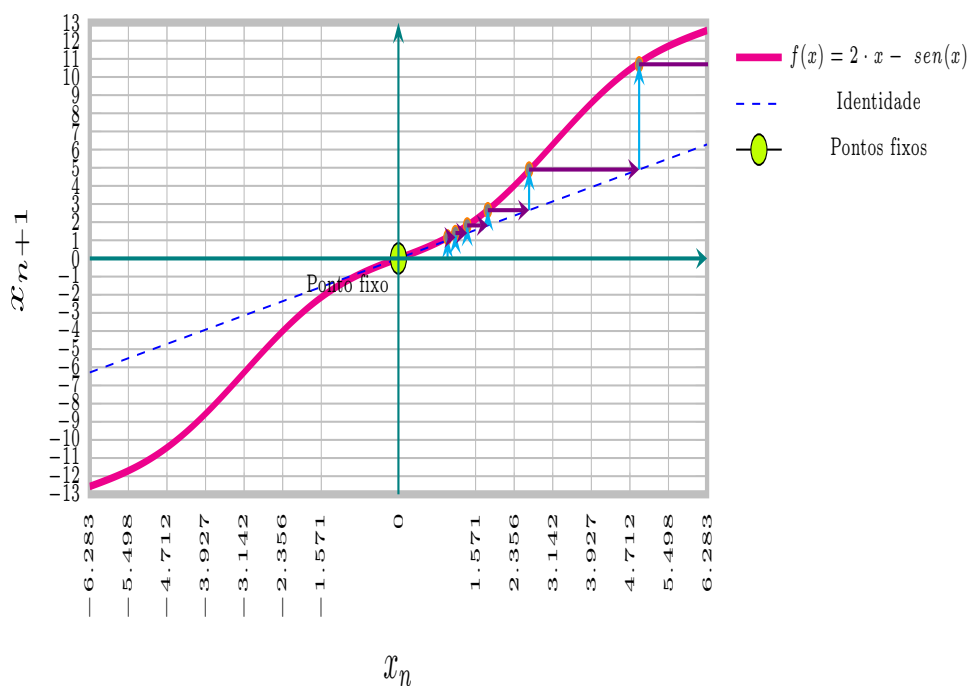


Figura 67: Instável pelos dois lados (lado direito) Cobweb $x_0 = 1$ para 6 iterações.

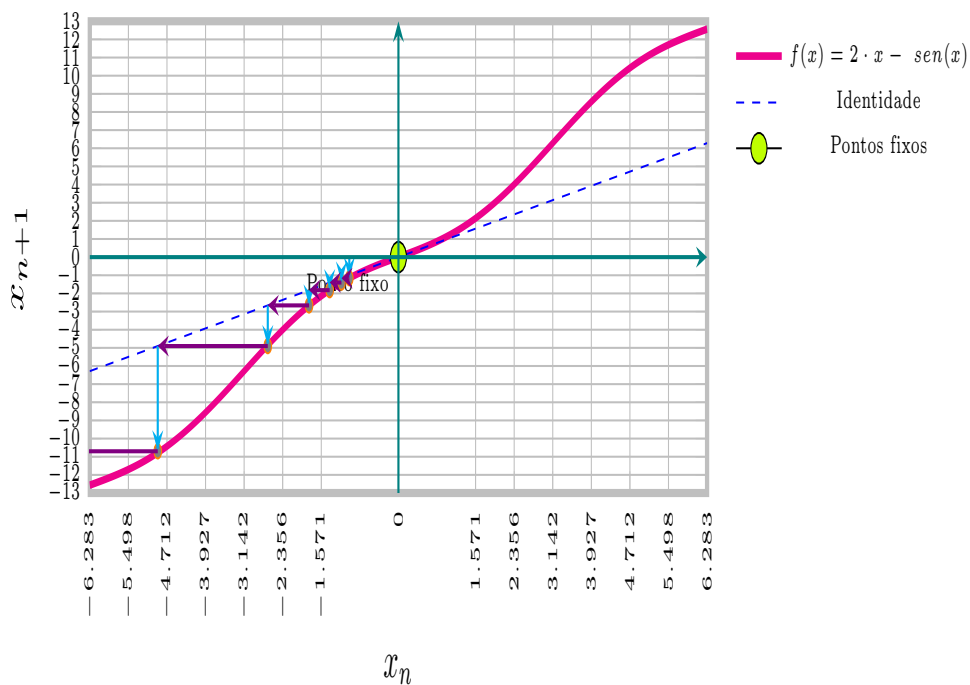


Figura 68: Instável pelos dois lados (lado esquerdo) Cobweb $x_0 = -1$ para 6 iterações.

5.5.4 APROXIMAÇÃO PELOS DOIS LADOS

5.5.4 Exemplo Estabilidade dos dois lados

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suas derivadas f' , f'' e f''' dados por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{sen}(x), \\ f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x), \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}\text{sen}(x), \\ f'''(x) &= -\frac{1}{2}\cos(x), \end{aligned}$$

Esboçar o diagrama *Cobweb* e classificar os pontos fixos de f .

Solução: Os pontos fixos de f satisfazem:

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}\text{sen}(x^*) = x^* \Leftrightarrow \text{sen}(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* = 0.$$

Assim, o ponto fixo real, isto é $x \in \mathbb{R}$, de f é $x^* = 0$.

Classificação dos pontos fixos de f :

Órbita de Ponto próximo ao ponto fixo $x_0 = \pm 0, 1$:

$$f'(\pm 0, 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pm 0, 1) < 1.$$

Como $|f'| < 1$, pelo Teorema 2.3 da página 37, a órbita de $x_0 = \pm 0, 1$ é **atratora**.

Ponto fixo não-hiperbólico em $x^* = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(0) = 1, \\ f''(0) &= -\frac{1}{2}\text{sen}(0) = 0, \\ f'''(0) &= -\frac{1}{2}\cos(0) = -\frac{1}{2} < 0, \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.1 da página 155, o ponto fixo $x^* = 0$, por (iii), é **assintoticamente estável**.

Para ilustrar o comportamento assintótico das órbitas de f ao redor dos pontos fixos, apresentamos as Figuras 69 e 70, nas páginas 185 e 185, respectivamente.

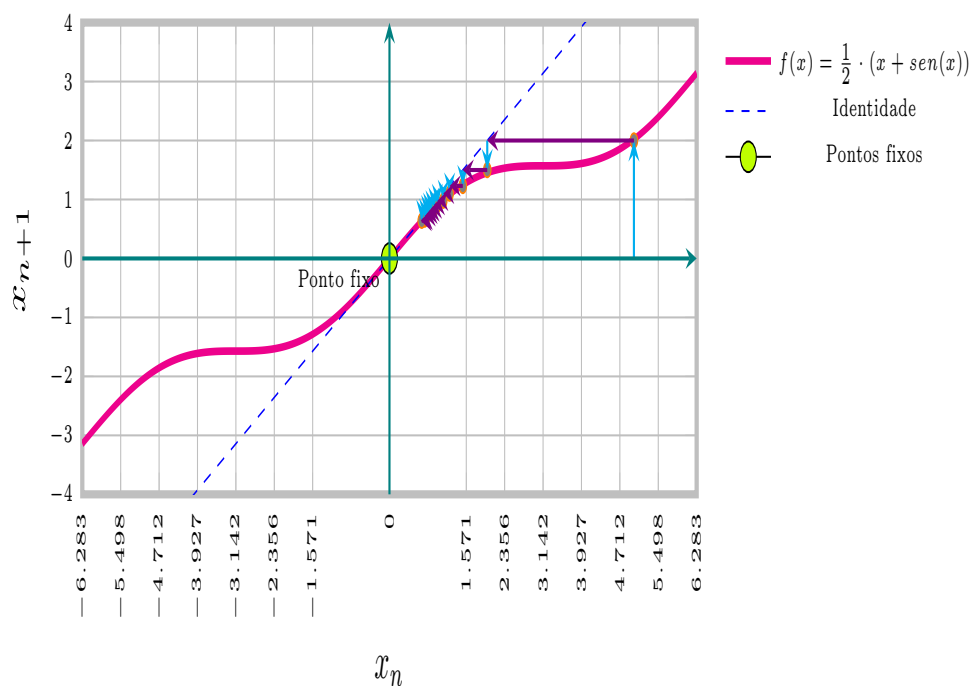


Figura 69: Comportamento assintótico da órbita com valor inicial $x_0 = 5$ após 12 iterações.

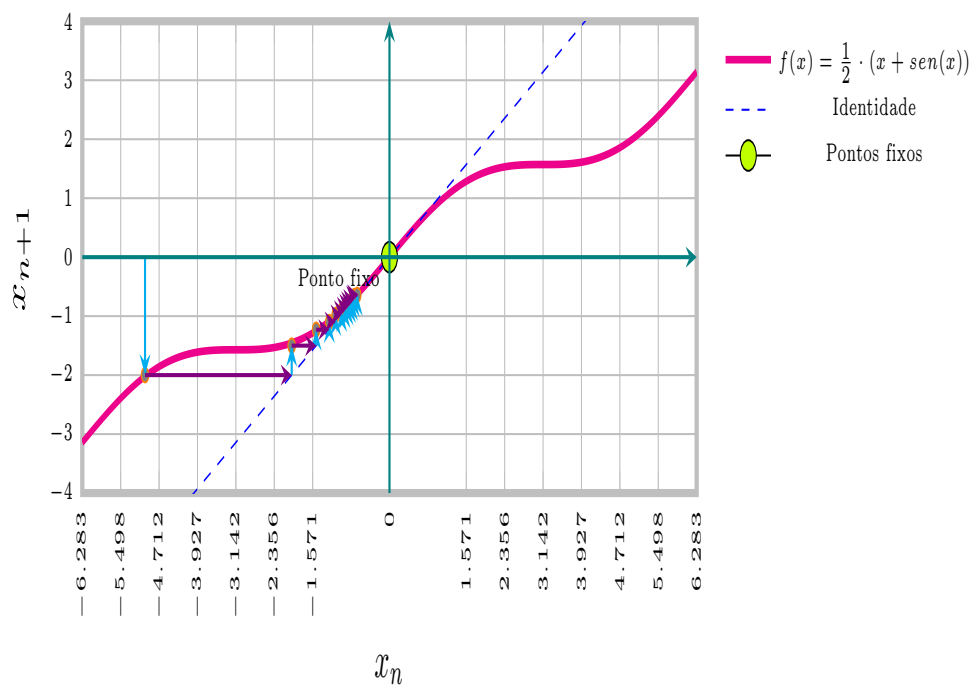


Figura 70: Comportamento assintótico da órbita com valor inicial $x_0 = -5$ após 12 iterações.

5.5.5 EXEMPLO $f'(x^*) = -1$ **5.5.5 Exemplo** Ponto fixo não-hiperbólico com $f'(x^*) = -1$

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suas derivadas f' , f'' , f''' e o *Schwarziano*, Sf , dados por:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x + x^3 & , \\ f'(x) &= -1 + 3x^2 & , \\ f''(x) &= 6x & , \\ f'''(x) &= 6 & , \\ Sf(x) &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2 = -6 - \frac{54 \cdot x^2}{9 \cdot x^4 - 6 \cdot x^2 + 1} . \end{aligned}$$

Esboçar o diagrama *Cobweb* e classificar os pontos fixos de f .

Solução: Determinando os pontos fixos de f :

$$\begin{aligned} f(x^*) &= x^*, \\ -x^* + (x^*)^3 &= x^*, \\ (x^*)^3 - 2x^* &= 0, \\ x^* \left((x^*)^2 - 2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, os pontos fixos de f são $x^* = 0$, $x^* = \sqrt{2}$ e $x^* = -\sqrt{2}$.

Análise do ponto fixo não-hiperbólico $x^* = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= -1, \quad \text{não-hiperbólico,} \\ f''(0) &= 0, \\ Sf(0) &= -6 < 0 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.3 da página 168, o ponto fixo $x^* = 0$ é **assintoticamente estável**.

Análise dos pontos fixos hiperbólicos $x^* = \pm\sqrt{2}$:

$$f'(\pm\sqrt{2}) = -1 + 3(\sqrt{2})^2 = -1 + 6 = 5 > 1.$$

Portanto, ambos os pontos são **repulsores** pelo Teorema 2.3 da página 37.

Na figura 71 da página 187 ilustramos com 30 iterações pela esquerda, começando a órbita do ponto $x_0 = -0,5$, 30 iterações pela direita começando a órbita do ponto $x_0 = 0,5$ demonstrando a estabilidade assintótica (vide definição 5.1 na página 154) do ponto fixo $x^* = 0$.

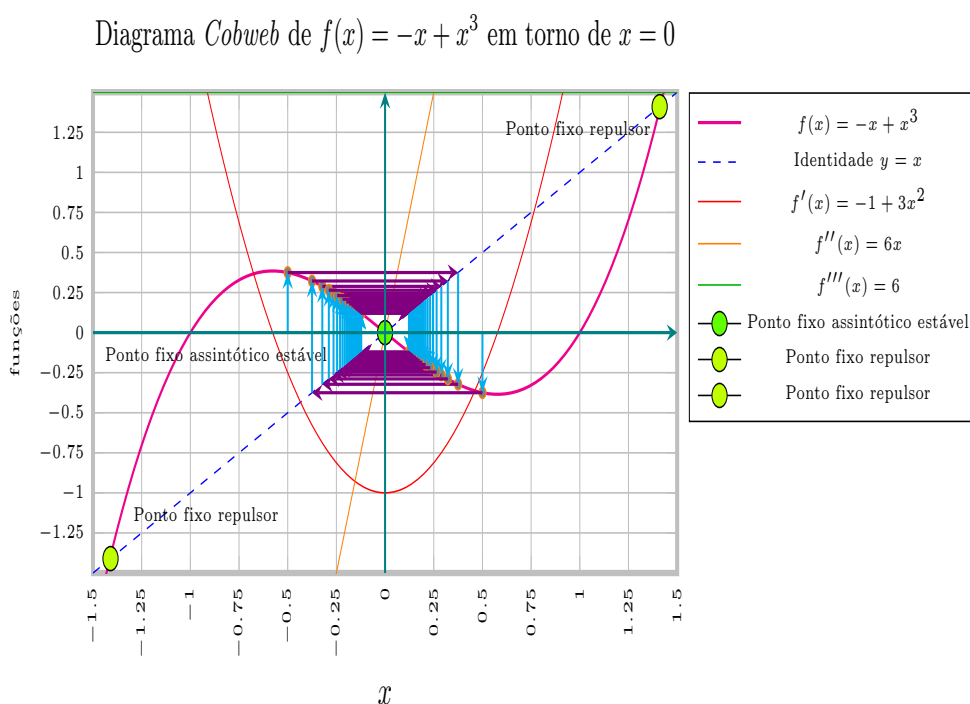


Figura 71: Cobweb para $f(x) = -x + x^3$ ilustrando a estabilidade do ponto fixo $x^* = 0$ com $f'(0) = -1$.

5.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, além da análise dos pontos fixos hiperbólicos apresentada no Capítulo 2, dedicamo-nos ao estudo dos pontos fixos não-hiperbólicos, caracterizados pela condição $|f'(x^*)| = 1$. A investigação desses casos exigiu o uso de ferramentas mais refinadas, como derivadas de ordens superiores e o *Schwarziano*, permitindo uma compreensão mais profunda da estabilidade local dos pontos fixos.

Cada cenário de estabilidade foi abordado de forma sistemática, por meio de exemplos cuidadosamente escolhidos e acompanhados de diagramas ilustrativos. Essa abordagem contribuiu para tornar acessível a análise qualitativa de sistemas dinâmicos unidimensionais, mesmo nos casos em que os critérios tradicionais não são conclusivos.

Destacamos ainda o papel central do *Schwarziano* nesse contexto. Trata-se de um operador que conecta diversas áreas da matemática - da análise complexa e geometria diferencial à teoria de sistemas dinâmicos e até mesmo à física teórica.

Na física, em teoria conforme bidimensional, o tensor energia-momento $T(z)$ transforma-se sob um mapa conforme $f(z)$ como:

$$T(z) \mapsto \left(\frac{df}{dz} \right)^{-2} \left[T(f(z)) - \frac{c}{12} \cdot \mathcal{S}f(z) \right],$$

onde c é a carga central da teoria. O termo com o *Schwarziano* reflete a **anomalia conforme**.

Já em **Gravidade**, o *Schwarziano* em JT Gravity e Supergravidade, estudos recentes de gravidade de Jackiw–Teitelboim (JT), o *Schwarziano* surge de forma central como ação efetiva que governa as dinâmicas de borda do espaço-tempo em duas dimensões. Ele aparece naturalmente na descrição da gravidade quase- AdS_2 , controlando as flutuações do contorno e desempenhando papel crucial no diagnóstico de caos quântico via o fator de forma espectral.

Na palestra de Clifford V. Johnson, disponível em <https://youtu.be/ktzzJp-YBzw?feature=shared>, o *Schwarziano* foi apresentado como elo entre a formulação em termos de modelos de matrizes e a descrição gravitacional. Em particular, o *Schwarziano* captura correções não perturbativas importantes, revelando a transição entre os regimes de inclinação, vale e patamar no comportamento espectral. Assim, o *Schwarziano* constitui a ferramenta matemática fundamental para conectar JT gravity, caos quântico e os modelos de cordas mínimas.

Na Mecânica Quântica, a equação de Schrödinger unidimensional dada por:

$$-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

o *Schwarziano* surge ao aplicar transformações de variáveis que preservam a forma da equação. Por exemplo, sob $x \mapsto f(x)$:

$$\psi(x) \mapsto \sqrt{f'(x)} \phi(f(x)),$$

o potencial efetivo ganha um termo proporcional a $Sf(x)$.

Caos Quântico e Modelo SYK, No modelo Sachdev–Ye–Kitaev (SYK), que descreve férmions com interações aleatórias, o limite de baixa energia é governado pela ação do *Schwarziano*.

Espera-se que os resultados e discussões aqui apresentados contribuam para aprofundar o entendimento dos sistemas dinâmicos discretos, servindo como base para futuras investigações teóricas ou aplicações em modelagem matemática.

Parte IV

CONCLUSÃO: PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

6 PROPOSTA PARA ENSINO BÁSICO

6.1 PRÉ REQUISITOS

- Fundamentos Históricos, Filosóficos e Sociológicos da educação
- Políticas Educacionais e Estrutura e Organização da educação básica
- Teorias da Aprendizagem
- Teorias do Currículo
- Didática
- Metodologias para a pesquisa em Educação
- Metodologias ativas de aprendizagem: projetos interdisciplinares
- Fundamentos e práticas no ensino de Matemática
- Organização do Trabalho Pedagógico

6.2 OBJETIVOS

- Discutir uma possível proposta de ensino de matemática na educação básica por meio de planos de aulas e sequências didáticas.
- Promover uma transformação significativa, visando o desenvolvimento integral dos estudantes. Para alcançar esse objetivo, propomos a adoção de práticas pedagógicas inovadoras, a valorização dos professores e a participação ativa da comunidade escolar.

6.3 JUSTIFICATIVA

A educação básica constitui um pilar essencial para o desenvolvimento social, sendo por meio dela que os indivíduos adquirem conhecimentos, competências e valores indispensáveis à sua formação integral. Ao longo do tempo, o sistema educacional tem sido objeto de críticas e de demandas por mudanças que visem à melhoria da qualidade e da eficácia do ensino.

6.4 PROBLEMATIZAÇÃO

A necessidade de reformas na educação básica é amplamente reconhecida. Contudo, a implementação dessas mudanças tem gerado discussões e debates intensos. A reforma do novo ensino médio, por exemplo, foi aplicada de maneira obrigatória, o que evidencia a importância de refletir sobre os processos de planejamento e participação dos profissionais da educação.

Os MAPPAS (Material de Apoio ao Planejamento e Práticas do Aprofundamento) constituem os itinerários formativos do novo ensino médio (conforme ⁱ (CULTURA, 2023)). Esses itinerários incluem oficinas, projetos e núcleos escolhidos pelos estudantes, oferecendo uma abordagem mais personalizada e diversificada. O desafio, no entanto, está na forma como esses itinerários são planejados, implementados e avaliados, de modo a garantir que atendam de maneira eficaz às necessidades educacionais dos alunos.

6.5 CONTEXTUALIZAÇÃO

Para compreender as propostas de reforma para a educação básica, é importante analisar a contextualização histórica do sistema educacional. Desde o Brasil colônia até os dias atuais, as salas de aula pouco se inovaram. O modelo tradicional de ensino, em que o professor é detentor dos saberes e os alunos meros receptores, ainda prevalece em muitas escolas.

6.6 REVISÃO DAS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Segundo (ZABALA, 2014), o novo professor, tem o arquétipo construtivista para lecionar estes itinerários. O profissional atua nas três fases de toda a intervenção reflexiva: planejamento, aplicação e avaliação. Porém, esta última fase da intervenção, não tem caráter de auferir um grau de alcance, resultados obtidos nos boletins dos alunos, que foi considerada sancionadora e qualificadora (apenas seletiva e propedêutica, uniforme e transmissora) por muitos pedagogos progressistas. Para (ZABALA, 2014) os princípios das reformas do novo ensino propõem formas diferentes de entender a avaliação. Algumas dessas formas podem ser progresso pessoal, progresso coletivo, ensino versus aprendizagem, maneiras confusas e indeterminadas. A pala-

ⁱ Os links de internet foram encurtados para facilitar o acesso com o aplicativo encurtador de URL simples e rápido! (REBRANDLY, 2023).

vra de ordem é desenvolver ao máximo as capacidades do público alvo do professor, mesmo até que cada indivíduo tenha sua limitação. Daí, concluem-se formações integrais para os cidadãos. Uma vasta pesquisa de referências foi feita na biblioteca da faculdade, site do mestrado do profmat (PROFMAT, 2023), site da Universidade Federal do ABC (UFABC, 2023a), manuais sobre \LaTeX disponíveis em (UFABC, 2023b), e o site da pró-reitoria de extensão universitária. Também alguns applets disponíveis em <https://mathinsight.org/> com viés voltado aos sistemas dinâmicos. As aulas do professor (BRAMBURGER, 2023), Dr. Jason Bramburger assistente na Universidade da Concordia cujos interesses estão amplamente em sistemas dinâmicos com programas de pesquisa focados em descoberta baseada em dados, formação de padrões e otimização polinomial aplicada a equações diferenciais. Dinâmica básica real e complexa uma bordagem computacional tem um curso completo e iterativo também, que pode ser acessado em (MCCLURE, 2017).

6.7 METODOLOGIA

A metodologia adotada fundamenta-se em abordagens construtivistas, que priorizam a participação ativa dos estudantes e o papel do professor como mediador do processo de aprendizagem. O foco é estimular a autonomia, o pensamento crítico e a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos.

Serão identificados os principais desafios do sistema de ensino, tais como:

1. Infraestrutura escolar insuficiente;
2. Carga horária desproporcional ao currículo;
3. Desvalorização e sobrecarga dos professores;
4. Ênfase em avaliações padronizadas;
5. Pouca integração entre teoria e prática;
6. Limitações na formação integral dos estudantes.

Com base na análise, são propostas ações para superar tais desafios:

1. Investimentos em infraestrutura;
2. Revisão da carga horária e do currículo;
3. Valorização e formação continuada dos professores;
4. Avaliações mais diversificadas e formativas;
5. Projetos interdisciplinares que unam teoria e prática;
6. Ênfase no desenvolvimento socioemocional.

Espera-se que as propostas resultem em:

1. Melhoria da qualidade do ensino;
2. Maior engajamento dos estudantes;
3. Estímulo ao pensamento crítico e criativo;
4. Formação de cidadãos preparados para os desafios contemporâneos;
5. Redução das desigualdades educacionais.

6.8 ATIVIDADES

A seguir apresentamos algumas atividades que podem ser aplicadas na educação básica:

1. GEOMETRIA FRACTAL E PROGRESSÕES na página 195,
2. MODELOS FINANCEIROS na página 198,
3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA - MODELO 1 na página 203,
4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA - MODELO 2 ORÇAMENTO FAMILIAR na página 215.

6.8.1 GEOMETRIA FRACTAL E PROGRESSÕES

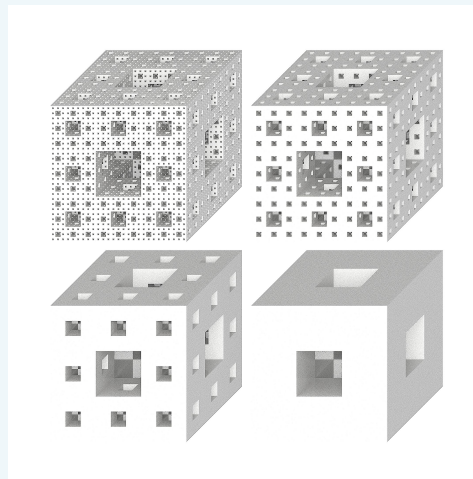
A *Esponja de Menger* é um exemplo clássico de fractal tridimensional. Seu processo de construção segue as seguintes etapas:

1. Comece com um cubo.
2. Divida o cubo em 27 cubos menores, organizados em uma grade $3 \times 3 \times 3$.
3. Remova o cubo central e os cubos centrais de cada face, totalizando 7 remoções.
4. Repita o processo para cada um dos cubos restantes.
5. Continue iterando o procedimento infinitamente, gerando uma estrutura com infinitos detalhes e vazios.

Exemplo 6.8.1

A figura construída segundo esse processo é chamada **Espanja de Menger** (ou *Espanja de Sierpinski*, em algumas versões) e representa um fractal gerado a partir de subdivisões sucessivas de um cubo.

Suponha que a aresta do cubo inicial meça 1 m. A cada etapa, os cubos menores têm arestas com $\frac{1}{3}$ da aresta anterior. Em cada face, o número de quadrados (cubos visíveis na face) forma uma progressão geométrica de razão 8, enquanto as áreas desses quadrados formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{9}$. Qual é a área, em m^2 , de uma face da figura 30?



- $\left(\frac{8}{9}\right)^{30}$
- $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$
- $\left(\frac{9}{8}\right)^{30}$
- $\left(\frac{64}{9}\right)^{19}$

Resposta: A alternativa correta é a $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$.

Solução:

A cada etapa:

- O número de quadrados na face segue a progressão geométrica $1, 8, 8^2, \dots, 8^{n-1}$.
- A área de cada quadrado segue a progressão $1, \frac{1}{9}, \left(\frac{1}{9}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$.

Para a figura 30 (ou seja, na 30^a etapa), o número de quadrados na face é:

$$8^{29}$$

A área de cada quadrado é:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{29}$$

Logo, a área total de uma face é:

$$8^{29} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{29} = \left(\frac{8}{9}\right)^{29}$$

6.8.2 MODELOS FINANCEIROS

Título da Atividade: Explorando Modelos Matemáticos Financeiros com Equações de Diferenças e Órbitas (Trajetórias) em sistemas dinâmicos Discretos

Introduzir o conceito de órbitas em sistemas dinâmicos pode enriquecer ainda mais a atividade, pois permite que os alunos visualizem e compreendam melhor as trajetórias que os sistemas seguem ao longo do tempo. Esta atividade visa contribuir com as competências, definidas na bncc, base nacional comum curricular, (MEC, 2023), competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socio-emocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. As competências e habilidades trabalhadas neste plano de aula são elaboradas conforme o documento currículo paulista (COPED/SEDUC, 2020).

Para (ZABALA, 2014), plano de aula é um conteúdo procedimental. Os conteúdos factuais e conceituais, farão parte deste procedimento. Ainda, segundo concepção do renomado autor Zabala, a avaliação, que mede o grau de alcance, de acordo com os princípios das reformas na educação básica, avalia-se o progresso pessoal, processo coletivo de ensino ou aprendizagem que visa desenvolver ao máximo as capacidades dos estudantes, de acordo com suas individualidades, mantendo-se o julgador discreto e ponderado.

Segundo Libâneo, 2006, páginas 244 a 246. O plano de aula pode ser estruturado conforme apresentado no modelo abaixo, (LIBÂNEO, 2006).

Para (D'AMBRÓSIO, 16^a Edição 2022 - (1996 1^a Edição)), matema consiste em explicar ou entender. Já as ticas, consistem nos modos, maneiras, técnicas ou artes. Assim matemáticas são as maneiras de entender como funciona por exemplo o mundo financeiro que será introduzido aos estudantes, e as maneiras de resolver seus problemas. Para o autor a definição de currículo, os três componentes que devem estar integrados no seu desenvolvimento são os objetivos, os conteúdos e os métodos. Em (BASSANEZI, 2015) e(BASSANEZI et al., 2014) os modelos matemáticos dependem de características variacionais, que podem ter interpretações em diferentes contextos.

Os tipos de variação são: variação simples: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, variação média: $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$,

variação relativa: $\frac{1}{y_n} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$, variação instantânea: $\lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$, se o limite existir.

Tabela 13 – Plano de Aula Nº 1

Escola: E. E. Maria Iracema Munhoz	Disciplinas: Matemática, Educação Financeira, Eletivas ou Itinerários Formativos	Nº DE AULAS	Data: __ / __ / __
Séries: 9º ano do EF, 1º ao 3º ano do EM	Etapas: Ensino Fundamental e Ensino Médio	(espaço em branco)	Professor(a): Alexandre de M. Lemos
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDOS, HABILIDADES E DESCRITORES	Nº DE AULAS	DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO
1) Introduzir os alunos ao conceito de sistemas dinâmicos, órbitas e como eles podem ser modelados matematicamente usando equações de diferenças.	1) (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.	5 tempos de aula de 45 minutos cada	1. Introdução a sistemas dinâmicos e Órbitas: Explique o que são sistemas dinâmicos e como eles evoluem ao longo do tempo. Introduza o conceito de órbitas, mostrando como as trajetórias podem se repetir ou serem caóticas em sistemas dinâmicos.

Tabela 13 continuação da página anterior

<p>2) Aplicar esses conceitos à área financeira para entender como modelos matemáticos podem ajudar a prever comportamentos financeiros ao longo do tempo.</p>	<p>2) (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.</p>	<p>5 tempos de aula de 45 minutos cada</p>	<p>2. Equações de Diferenças: Explique como equações de diferenças podem modelar mudanças discretas em sistemas dinâmicos. Mostre exemplos de equações de diferenças que resultam em órbitas periódicas ou caóticas</p>
<p>3) Desenvolver habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e visualização dos alunos. Cálculos envolvendo porcentagens.</p>	<p>3) (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.</p>	<p>5 tempos de aula de 45 minutos cada</p>	<p>3. Modelos Financeiros e Órbitas: Relacione o conceito de órbitas a comportamentos financeiros, explicando como os padrões de investimento podem ser considerados órbitas. Discuta como diferentes fatores podem afetar a estabilidade das órbitas financeiras.</p>
<p>4) Conceitos de Matemática Financeira (juros simples, compostos, taxas de juros etc.). Alguns sistemas de amortização e noções de fluxo de caixa.</p>	<p>4) (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.</p>	<p>5 tempos de aula de 45 minutos cada</p>	<p>4. Desenvolvendo um Modelo Financeiro com Órbitas: Divida a classe em grupos e atribua a cada grupo um cenário financeiro, como investimento em ações ou poupança. Peça aos grupos para identificarem as variáveis relevantes e criarem uma equação de diferenças que represente uma órbita financeira.</p>

Tabela 13 continuação da página anterior

5) Funções polinômiais do 2º grau (função quadrática). Funções: exponenciais e logarítmicas. Gráficos de funções. Pontos críticos de uma função quadrática: concavidade, pontos de máximo ou de mínimo.	5) (EF09MA05) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira	5 tempos de aula de 45 minutos cada	5. Simulações e Visualização: Use software ou planilhas para criar simulações das órbitas financeiras ao longo do tempo. Ajude os alunos a visualizarem as órbitas e identifiquem padrões.
(espaço em branco)	6) (EMIFMAT10) Avaliar como oportunidades, conhecimentos e recursos relacionados à Matemática podem ser utilizados na concretização de projetos pessoais ou produtivos, considerando as diversas tecnologias disponíveis e os impactos socioambientais.	(espaço em branco)	(espaço em branco)
(espaço em branco)	7) (EMIFMAT11) Selecionar e mobilizar intencionalmente conhecimentos e recursos da Matemática para desenvolver um projeto pessoal ou um empreendimento produtivo.	(espaço em branco)	6. Apresentação e Discussão: Cada grupo apresenta seus modelos e órbitas financeiras para a classe. Incentive a discussão sobre as características das órbitas e como elas se relacionam com decisões financeiras.

Tabela 13 continuação da página anterior

(espaço branco)	em	8) (EMIFMAT12) Desenvolver projetos pessoais ou produtivos, utilizando processos e conhecimentos matemáticos para formular propostas concretas, articuladas com o projeto de vida.	(espaço em branco)	7. Extensões Criativas: Para alunos mais avançados, explore a ideia de bifurcações de órbitas, transições de estabilidade e comportamento caótico.
(espaço branco)	em	9) (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	(espaço em branco)	8. Funções polinomiais de 2º grau; Gráficos de funções a partir de transformações no plano; Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos de crescimento ou decréscimo, ponto de máximo ou mínimo e variação da função).

6.8.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA - MODELO 1

1. Dividir os alunos em pequenos grupos para elaborar a justificativa.
2. Elabore modelos matemáticos. Essa abordagem aprofundada ajuda os alunos a entenderem os sistemas dinâmicos em um nível mais complexo, visualizando as órbitas e padrões que podem surgir. Isso também incentiva o pensamento crítico e a análise de como os conceitos matemáticos podem ser aplicados na modelagem de sistemas reais, incluindo finanças.

Organização do Trabalho conforme (FEDERAL, 2005), Diretrizes e concepções para as práticas pedagógicas cotidianas, formuladas considerando-se a realidade da instituição. Deve-se levar em conta a adaptação do Currículo, dos Tempos, dos Espaços Pedagógicos, dos Materiais, das Crianças, pré adolescentes, adolescentes e jovens, da Metodologia de Trabalho, dos Instrumentos do professor, dos Professores e suas condições de trabalho, das Relações com as famílias e da Articulação da Educação Infantil com o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

6.8.4 INTERPRETANDO TABELAS OU GRÁFICOS

Para (BASSANEZI, 2015) e (BASSANEZI et al., 2014, p. 137), modelagem matemática segue os seguintes passos: medir ou contar, analisar os dados, formular hipóteses, propor modelos e validá-los. Segundo o autor ela se restringe no ensino fundamental, invariavelmente, à confecção de gráficos e ao ajuste de curvas. Inicia-se com uma tabela de valores, obtida de diversas formas.

Tempo (n)	Valor da Variável (x_n)
1	20
2	30
3	50
5	120
6	180
7	260
8	350
9	440
10	510
11	560
12	600
13	630
14	640
15	650

Tabela 14: Tabela de valores de (n, x_n) .

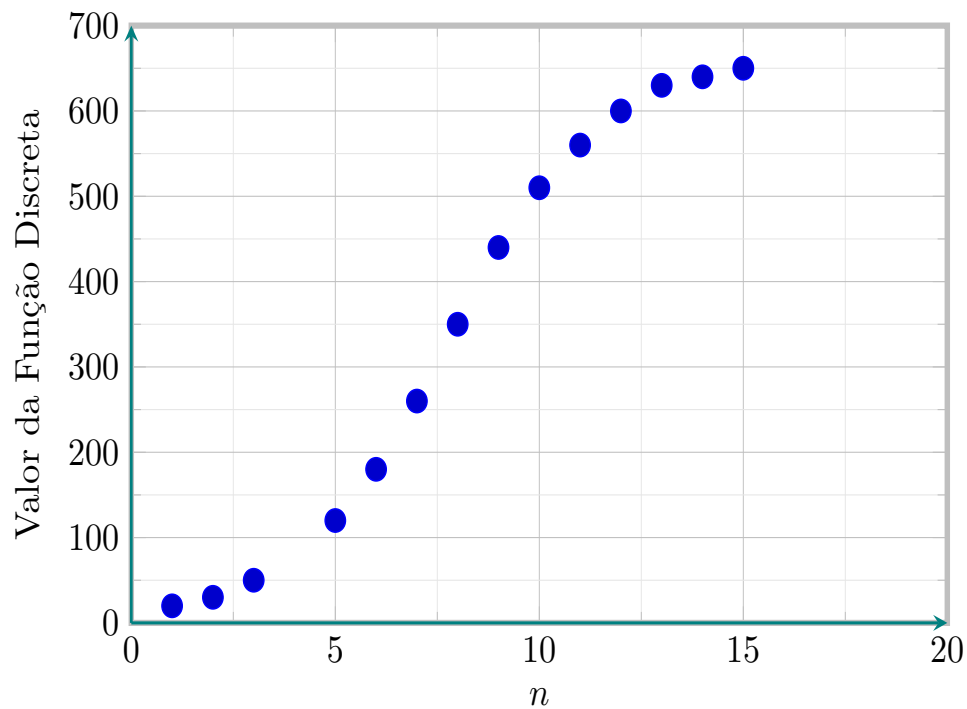


Figura 72: Tendência ou trajetória da sequência orbital x_n

Conseguir-se-á mais informações sobre a dinâmica dos pontos da sequência x_n , calculando-se a variação simples, que nos dá a diferença $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Tempo (n)	Valor da Variável (x_n)	Variação Simples ($\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$)
1	20	x_0
2	30	10
3	50	20
5	120	70
6	180	60
7	260	80
8	350	90
9	440	90
10	510	70
11	560	50
12	600	40
13	630	30
14	640	10
15	650	10

Tabela 15: Tabela dos pontos e suas variações simples.

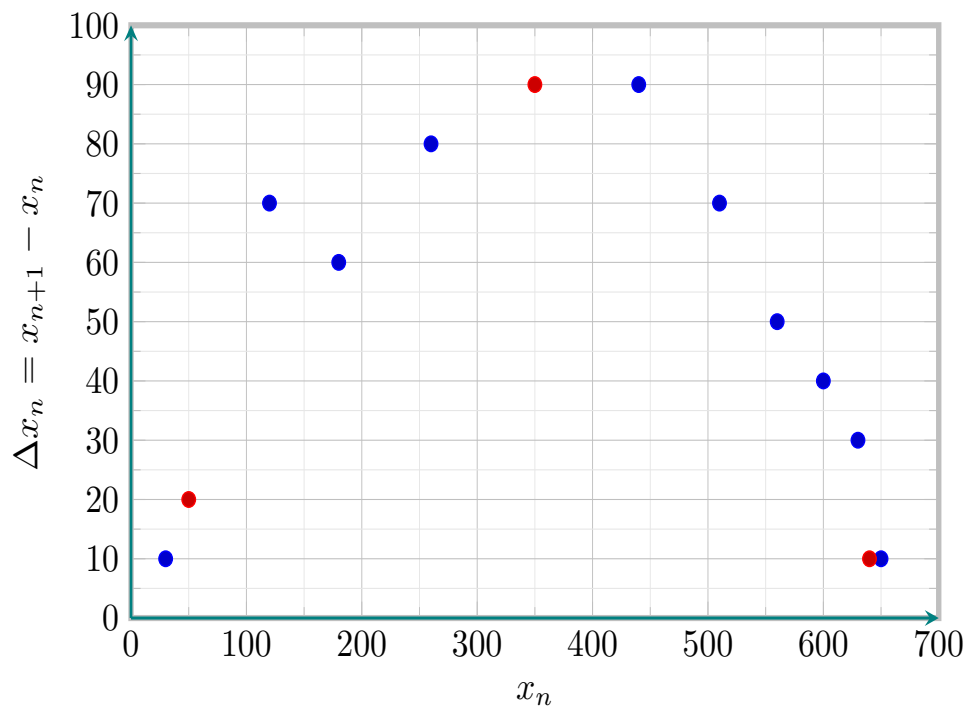


Figura 73: Gráfico discreto dos pontos e suas variações simples.

Note que as variações simples crescem até 90, e depois decrescem, sugerindo um comportamento quadrático, com a concavidade voltada para baixo.

Ajuste de curvas

Vamos ajustar uma quadrática do tipo $Q(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ⁱⁱ, encontrando os coeficientes a , b e c . Para tal tarefa, basta fazer uma escolha de três pontos do gráfico, o mais fiel possível, $Q(50) = 20$, $Q(350) = 90$ e $Q(640) = 10$.ⁱⁱⁱ Logo, tem-se um sistema de três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} -50^2 \cdot a + 50 \cdot b + c = 20 & (i) \\ -350^2 \cdot a + 350 \cdot b + c = 90 & (ii) \\ -640^2 \cdot a + 640 \cdot b + c = 10 & (iii) \end{cases}$$

Técnica ou Método da Eliminação

$$\begin{cases} -2500 \cdot a + 50 \cdot b + c = 20 & (i) \\ -122.500 \cdot a + 350 \cdot b + c = 90 & (ii) \\ -409.600 \cdot a + 640 \cdot b + c = 10 & (iii) \end{cases}$$

ⁱⁱ O estudante pode perguntar o porquê de não utilizar a quadrática do tipo $Q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, pois bem, a resposta é simples, porque já desconfia-se da concavidade para baixo, porém se insistir em colocar esse tipo de quadrática, o sinal de $-$ aparecerá no final da resposta, mas como a já tem o sinal $-$, a resposta será positiva.

ⁱⁱⁱ Tomar outros pontos $Q(x_n) = \Delta x_n$ pode resultar em outra curva. Isto será discutido posteriormente em validação do modelo matemático.

$$\left\{ \begin{array}{l} -120.000 \cdot a + 300 \cdot b = 70 \quad \text{eq (7)}(ii - i) \\ -407.100 \cdot a + 590 \cdot b = -10 \quad \text{eq (8)}(iii - i) \\ -400 \cdot a + b = \frac{7}{30} \quad \text{eq (9)}\left(\frac{(ii - i)}{300}\right) \\ -236.000 \cdot a + 590 \cdot b = \frac{4130}{30} \quad \text{eq (10)}590 \times \left(\frac{(ii - i)}{300}\right) \\ 171.100 \cdot a = \frac{4130}{30} + 10 \quad \text{eq (11)}590 \times \left(\frac{(ii - i)}{300}\right) - (iii - i) \end{array} \right.$$

Logo, $171.100 \cdot a = \frac{4130+300}{30} = \frac{4430}{30} = \frac{443}{3} \implies 513.300 \cdot a = 443$

Coeficiente a da Quadrática $Q(x)$

$$\implies a = \frac{443}{513.300} \approx 8,6304 \times 10^{-4}$$

Da equação $-400 \cdot a + b = \frac{7}{30}$, tiramos o valor de b , $-400 \cdot \frac{443}{513.300} + b = \frac{7}{30} \implies$
 $b = \frac{177.200}{513.300} + \frac{7}{30} = \frac{177.200 + 119.770}{513.300} = \frac{296.970}{513.300}$

Vamos demonstrar que $\text{mdc}(513.300, 296.970) = 30$, pelo algoritmo de Euclides de divisões sucessivas.

Tabela 16 – Algoritmo de Euclides para MDC entre 513.300 e 216.330 (Parte 1)

Quocientes		1	1	2	1
Dividendos/Divisores	513.300	296.970	216.330	80.640	55.050
Restos	216.330	80.640	55.050	25.590	3.870

Tabela 17 – Algoritmo de Euclides para MDC entre 513.300 e 216.330 (Parte 2)

Quocientes	2	6	1	1	1
Dividendos/Divisores	25.540	3.870	2.370	1.500	870
Restos	2.370	1.500	870	630	240

Tabela 18 – Algoritmo de Euclides para MDC entre 513.300 e 216.330 (Parte 3)

Quocientes	1	2	1	1	1	2
Dividendos/Divisores	630	240	150	90	60	30
Restos	150	90	60	30	0	

Concluindo assim que 513.300 e 216.330 são divisíveis por 30, podendo reduzir a fração em $\frac{9899}{17110}$

Coeficiente b da Quadrática $Q(x)$

$$\implies b = \frac{9899}{17.110} \approx 0,5786$$

Finalmente o coeficiente c , é obtido agora de qualquer uma das 3 equações (i), (ii) ou (iii). Por exemplo de (i), temos, $-2500 \cdot a + 50 \cdot b + c = 20 \implies -2500 \cdot \frac{443}{513.300} + 50 \cdot \frac{9899}{17.110} + c = 20 \implies c = 20 + \frac{1.107.500}{513.300} - \frac{9899}{17.110} \implies c = \frac{10.266.000 + 1.107.500 - 14.848.500}{513.300} = -\frac{3.475.000}{513.300} = -\frac{34.750}{5133}$

Coeficiente c da Quadrática $Q(x)$

$$\implies c = -\frac{34.750}{5133} = -\approx 6,7699$$

$$a = \frac{443}{513300}$$

$$b = \frac{9899}{17110}$$

$$c = -\frac{34750}{5133}$$

Logo, a curva de ajuste quadrática do modelo matemático é $Q(x) = -\frac{443}{513300} \cdot x^2 + \frac{9899}{17110} \cdot x - \frac{34750}{5133}$, ou, em notação de sistema dinâmico discreto, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = -\frac{443}{513300} \cdot x_n^2 + \frac{9899}{17110} \cdot x_n - \frac{34750}{5133}$, que resulta na recorrência $\implies x_{n+1} = -\frac{443}{513300} \cdot x_n^2 + \frac{9899}{17110} \cdot x_n - \frac{34750}{5133}$

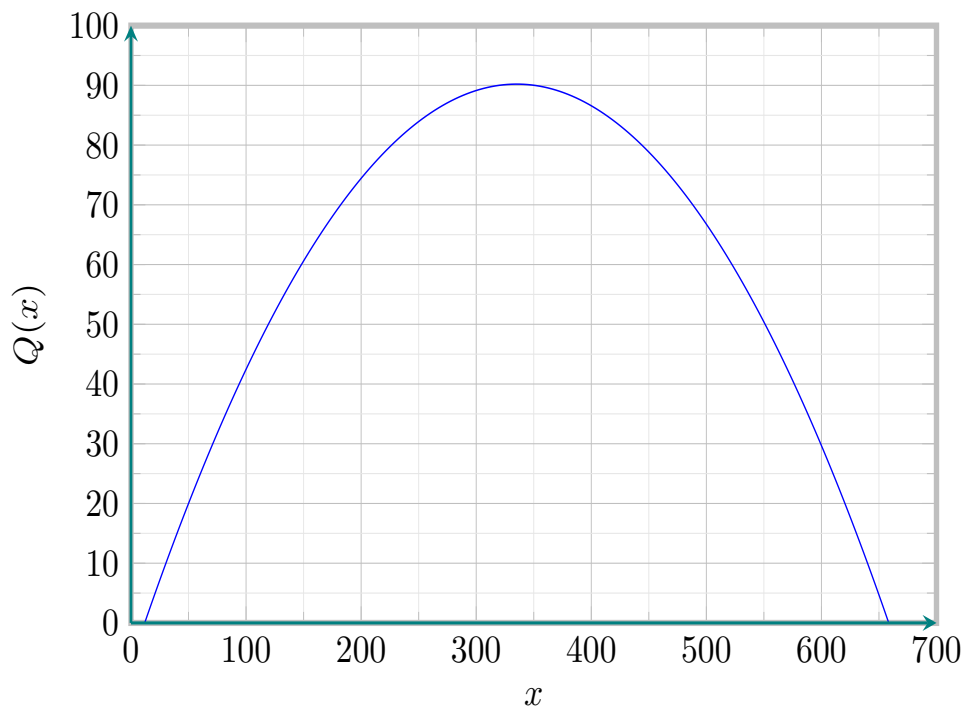


Figura 74: Gráfico da função quadrática $Q(x)$.

Fórmula 6.8.1: Fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = -\frac{443}{513300} \cdot x_n^2 + \frac{27009}{17110} \cdot x_n - \frac{34750}{5133} \approx -0,0009 \cdot x_n^2 + 1,5786 \cdot x_n - 6,7699$$

Esta é a fórmula onde cada termo depende do anterior, isto é:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ x(0) &= x_0, \text{ dado} \end{aligned}$$

Para um valor inicial x_0 dado e conhecido. A proposta desejada é que se encontre a relação entre o estágio n e a variável de estado x_n , porque a validação aceita ou rejeita o modelo matemático. Queremos estudar o comportamento das soluções x_n , conhecer as trajetórias e órbitas numéricas nos diz o comportamento para onde a sequência tem tendência de se direcionar.

6.8.4.1 VALIDAÇÃO

É possível analisar o comportamento dos pontos fixos de um sistema dinâmico quadrático no ensino médio, sem recorrer a conceitos complexos, como derivadas ou a derivada schwarziana. Aqui estão alguns pontos que podem ser explorados:

1. Identificação de Pontos Fixos: Comece por encontrar os pontos fixos, ou seja, os valores de x para os quais $f(x^*) = x^*$, onde $f(x)$ é a função quadrática que define o sistema dinâmico e x estrela é ou são pontos de equilíbrios.
2. Discutir o Significado Geométrico: Explique o significado geométrico dos pontos fixos. São os valores de x nos quais a função $f(x)$ cruza a reta diagonal $y = x$. Isso representa os pontos onde a solução permanece constante ao longo das iterações.
3. Análise da estabilidade: Classifique os pontos fixos em estáveis, instáveis ou semi-estáveis. Para fazer isso, comece avaliando o valor absoluto da derivada se é igual a unidade, maior ou menor que a unidade. O ponto fixo é estável (atrativo ou atrator) se for menor que um. O ponto fixo é instável (repulsivo ou repulsor) se for maior que um. É possível que o ponto seja semi-estável, se for igual a um o módulo da derivada, o que significa que ele é estável em uma direção e instável em outra. **Ao invés de falar de derivadas, toma-se as retas tangentes nos pontos fixos. Analisam-se as inclinações, classificando-se os pontos em atrator, repulsor ou semi-estável.**
4. Trajetórias Próximas aos Pontos Fixos: Sem entrar em cálculos de derivadas, você pode discutir como as trajetórias evoluem próximo aos pontos fixos. Se o módulo da derivada é menor que um, as trajetórias convergem para o ponto fixo quando iteradas. Se o módulo da derivada é maior que um, as trajetórias se afastam do ponto fixo.
5. Análise Gráfica: Utilize gráficos para visualizar a função quadrática e a reta diagonal. Marque os pontos fixos e mostre como as trajetórias se comportam perto desses pontos.
6. Exemplos Numéricos: Use exemplos numéricos específicos para ilustrar os conceitos. Escolha valores simples para os coeficientes da função quadrática e mostre como as iterações se comportam.
7. Discussão das Conclusões: Finalize a análise destacando as conclusões sobre os pontos fixos e como eles afetam o comportamento geral do sistema dinâmico.

Lembrando que essa abordagem fornece uma compreensão intuitiva dos conceitos de pontos fixos e sua estabilidade em sistemas dinâmicos quadráticos, sem a necessidade de cálculos complexos. Isso torna o tópico acessível e interessante para estudantes da educação básica do ensino médio.

Cálculo dos pontos fixos

$$Q(x^*) = -\frac{443}{513300} \cdot x^{*2} + \frac{27009}{17110} \cdot x^* - \frac{34750}{5133} = x^*$$

$$Q(x^*) = -\frac{443}{513300} \cdot x^{*2} + \frac{27009}{17110} \cdot x^* - \frac{34750}{5133} - x^* = 0$$

$$Q(x^*) = -\frac{443}{513300} \cdot x^{*2} + \frac{9899}{17110} \cdot x^* - \frac{34750}{5133} = 0$$

$$\Rightarrow Q(x^*) \approx -8,6304 \times 10^{-4} \cdot x^{*2} + 0,5786 \cdot x^* - 6,7699 = 0$$

$$\Delta = (0,5786)^2 - 4 \cdot (8,6304 \times 10^{-4}) \cdot (6,7699)$$

$$\Delta \approx 0,3115$$

$$x^* = \frac{-(0,5786) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot (-8,6304 \times 10^{-4})}$$

$$x^* = \frac{-(0,5786) \pm \sqrt{0,3115}}{2 \cdot (-8,6304 \times 10^{-4})}$$

$$x_1^* \approx 12$$

$$x_2^* \approx 661$$

Estes pontos estacionários ou de equilíbrio podem ser vistos no gráfico 76.

6.8.4.2 ESTABILIDADE - UM ESTUDO DA IMPORTÂNCIA DA RETA TANGENTE

Para encontrar o coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva quadrática $Q(x)$ nos pontos estacionários sem usar derivadas, pode-se usar a abordagem da inclinação média entre dois pontos próximos na curva. Aqui está como fazer isso:

- Escolha um ponto próximo ao ponto $(12, Q(12))$ na curva quadrática. Vamos escolher o ponto $(13, Q(13))$, onde $Q(x)$ é a equação da curva quadrática.
- Calcule a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(12, 12)$ e $(13, Q(13))$ usando a fórmula da equação da reta $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$:

Fórmula 6.8.2: Equação da reta tangente

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Inclinação da reta secante:

$$m = \frac{Q(13) - Q(12)}{13 - 12} = \frac{13,61 - 12,05}{13 - 12} \approx 1,56$$

Inclinação^{iv}

Agora você tem a inclinação da reta tangente. Logo a equação da reta é:

$$y - 12 = 1,56 \cdot (x - 12)$$

$$y = 12 + 1,56 \cdot (x - 12)$$

$$y = 12 + 1,56 \cdot x - 1,56 \cdot 12$$

$$y = 1,56 \cdot x - 6,7$$

^{iv} A inclinação da reta tangente no ponto $(12, 12)$ será aproximadamente igual à inclinação da secante calculada no passo anterior.

- Calcule a inclinação da reta secante que passa pelos pontos (661, Q(661)) e (662, Q(662)) usando a fórmula da equação da reta $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$:

Equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Inclinação da reta secante:

$$m = \frac{Q(662) - Q(661)}{662 - 661} = \frac{659,6 - 660,04}{662 - 661} \approx 0,4368$$

Inclinação^v

Agora você tem a inclinação da reta tangente. Logo a equação da reta é:

$$y - 661 = 0,4368 \cdot (x - 661)$$

$$y = 661 + 0,4368 \cdot (x - 661)$$

$$y = 661 + 0,4368 \cdot x - 0,4368 \cdot 661$$

$$y = 0,4368 \cdot x + 372,28$$

Analisando as tangentes à curva quadrática, quando o coeficiente angular da reta é maior do que a unidade em magnitude, o ponto fixo é classificado como repulsor enquanto que quando é menor do que a unidade em magnitude, o ponto fixo é classificado como atrator, conforme pode ser visto no gráfico 75.

^v A inclinação da reta tangente no ponto (661, 661) será aproximadamente igual à inclinação da secante calculada no passo anterior.

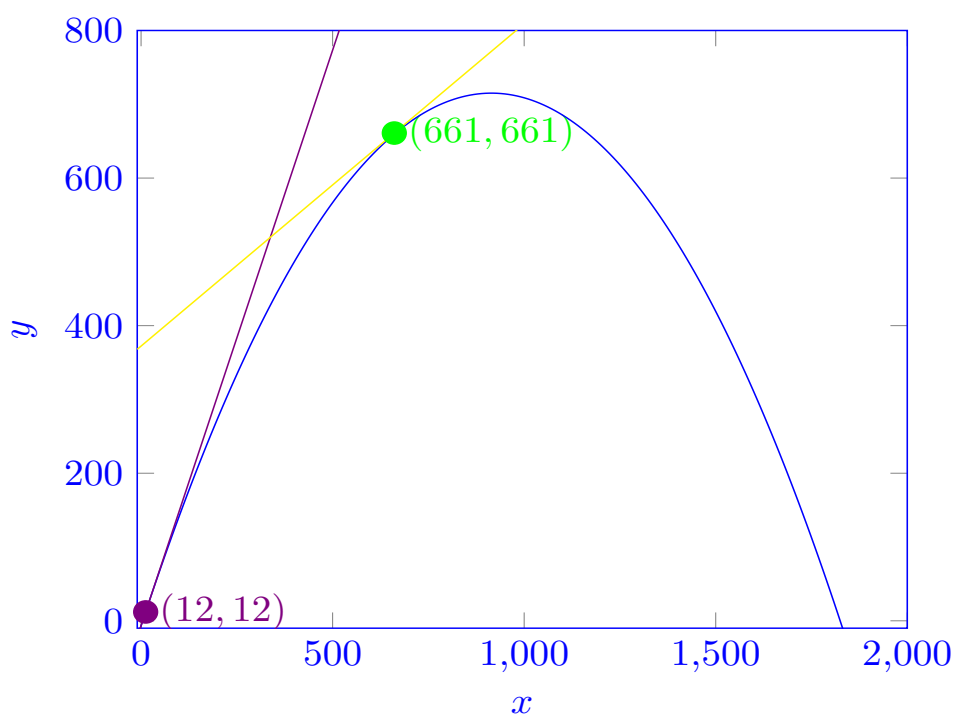


Figura 75: Gráfico da função quadrática e tangentes.

6.8.4.3 ESTUDO DE GRÁFICOS SOBREPOSTOS

Para (BASSANEZI, 2015) e (BASSANEZI et al., 2014), a validação de um modelo matemático consiste na verificação da aproximação do modelo com a realidade, ou seja, se os dados experimentais ou observados não estão muito longe daqueles fornecidos pelo modelo. Aqui temos os dados discretos com o modelo matemático contínuo para verificação e validação conforme gráfico 77 na página 214.

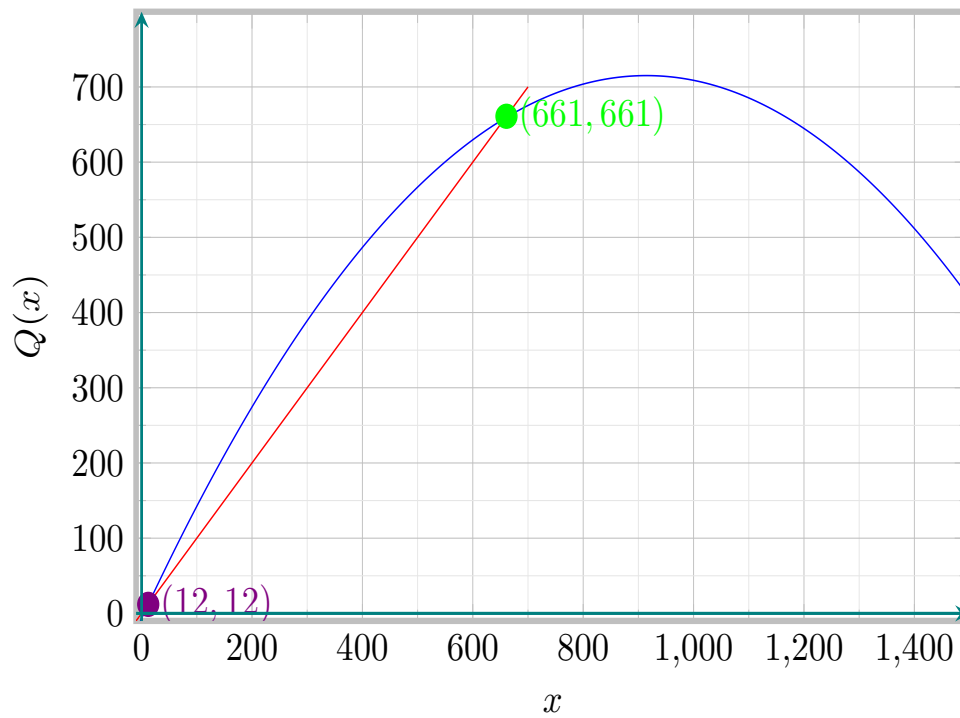


Figura 76: Gráfico da quadrática $Q(x)$ com a função identidade e pontos fixos marcados.

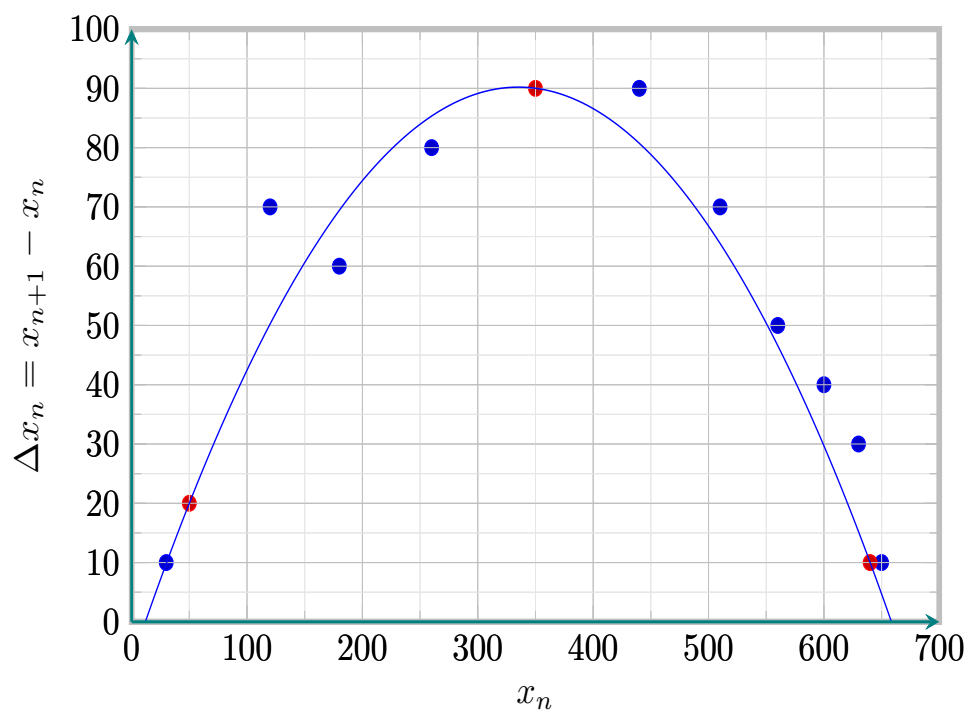


Figura 77: Gráfico discreto dos pontos e sua sobreposição com a função quadrática $Q(x)$.

6.8.5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA - MODELO 2 ORÇAMENTO FAMILIAR

(BASSANEZI, 2015) e (BASSANEZI et al., 2014), a relação entre a poupança do mês atual, que chamaremos de p_{n+1} e a poupança do mês anterior p_n , e consideremos que a sobra do mês (diferença entre a renda e o consumo) seja aplicada na poupança do mês atual, ou seja, $p_{n+1} =$ poupança do mês anterior + sobra do mês atual \implies

Fórmula 6.8.3: Fórmula do orçamento

$$p_{n+1} = p_n + \underbrace{\left(r_{n+1} - c_{n+1} \right)}_{\text{Sobra do mês}}$$

Nessa equação, tem-se:

p_{n+1} representa a poupança no mês atual. p_n representa a poupança no mês anterior. r_{n+1} é a renda mensal da família no mês atual. c_{n+1} é o consumo mensal da família no mês atual.

A equação modela como a poupança de um mês é afetada pela renda desse mês e pelo consumo desse mês, levando em consideração a poupança acumulada do mês anterior. Basicamente, a poupança do mês atual é igual à poupança do mês anterior somada à diferença entre a renda e o consumo do mês atual, que significa a sobra.

Esta renda é a composição do salário da família, que em $n = 0$, $s_0 = 0$, chamaremos de s_{n+1} um salário familiar variável de acordo com o mês $n + 1$, $r_{n+1} = s_{n+1} + p_n \cdot (1 + i)$, em que i é a taxa de interesse, ou taxa de juros da poupança. Já o consumo não pode exceder a renda, ou seja, $c_{n+1} < r_{n+1} \implies \frac{c_{n+1}}{r_{n+1}} < \frac{r_{n+1}}{r_{n+1}} \implies \frac{c_{n+1}}{r_{n+1}} < 1$. Isto implica criar um fator de consumo que chamaremos de κ , e está compreendido no intervalo positivo $0 < \kappa < 1$, que varia entre zero e um, estritamente diferente de zero e um. Logo, temos $c_{n+1} = \kappa \cdot r_{n+1}$.

6.8.6 MODELO 2: ORÇAMENTO FAMILIAR

poupança no mês atual =

poupança no mês anterior + renda no mês atual
– consumo no mês atual

consumo no mês atual = $\kappa \cdot$ renda no mês atual

renda no mês atual = salário do mês atual
+ poupança do mês anterior $\cdot (i)$

i é a taxa de remuneração da poupança, ou o rendimento pago pela caderneta de poupança.

$$p_{n+1} = p_n + r_{n+1} - c_{n+1} \quad (6.1)$$

$$c_{n+1} = \kappa \cdot r_{n+1} \quad (6.2)$$

$$r_{n+1} = s_{n+1} + p_n \cdot (i) \quad (6.3)$$

Combinando-se as três equações anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + r_{n+1} - \kappa \cdot [r_{n+1}] = p_n + r_{n+1} \cdot (1 - \kappa) \\ \Rightarrow p_{n+1} &= p_n + [s_{n+1} + p_n \cdot (i)] \cdot (1 - \kappa) \\ \Rightarrow p_{n+1} &= p_n + \left[s_{n+1} \cdot (1 - \kappa) + p_n \cdot (i) \cdot (1 - \kappa) \right] \\ \Rightarrow p_{n+1} &= p_n + s_{n+1} \cdot (1 - \kappa) + p_n \cdot (i) \cdot (1 - \kappa) \\ \Rightarrow p_{n+1} &= p_n \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_{n+1} \cdot (1 - \kappa) \end{aligned}$$

Fórmula 6.8.4: Fórmula do orçamento de recorrência

$$p_{n+1} = p_n \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_{n+1} \cdot (1 - \kappa)$$

n	p_{n+1}	
0	$p_1 = p_0 \cdot$	$\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_1 \cdot (1 - \kappa)$
1	$p_2 = p_1 \cdot$	$\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_2 \cdot (1 - \kappa)$
2	$p_3 = p_2 \cdot$	$\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_3 \cdot (1 - \kappa)$
\vdots		\vdots

Tabela 19: Tabela iterativa do orçamento familiar

Deve-se resolver a recorrência de forma iterativa, partindo-se de $n = 0$, $p_0 =$ valor inicial dado:

Note que neste modelo os ganhos salariais da família são variáveis, ou seja apresenta órbitas (trajetórias) $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, s_{s+1}$ durante cada um dos meses n observados e p_0 é o valor de abertura da conta poupança numa instituição bancária.

Iterando as recorrências por substituições, têm-se:

p_0 = valor inicial dado, aplicado na poupança.

$$p_1 = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_1 \cdot (1 - \kappa)$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_2 \cdot (1 - \kappa)$$

$$\implies p_2 = \left(p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_1 \cdot (1 - \kappa) \right) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_2 \cdot (1 - \kappa)$$

$$\implies p_2 = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^2 + s_1 \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_2 \cdot (1 - \kappa)$$

$$p_3 = p_2 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_3 \cdot (1 - \kappa)$$

$$\implies p_3 = \left(p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^2 + s_1 \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_2 \cdot (1 - \kappa) \right) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_3 \cdot (1 - \kappa)$$

$$\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_3 \cdot (1 - \kappa)$$

$$\implies p_3 = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^3 + s_1 \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^2$$

$$+ s_2 \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + s_3 \cdot (1 - \kappa)$$

⋮

$$p_{n+1} = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1} + s_1 \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^n +$$

$$+ s_2 \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n-1} + \dots + s_n \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] +$$

$$+ s_{n+1} \cdot (1 - \kappa)$$

6.8.6.1 SOLUÇÃO: CASO ESPECIAL COM RENDA BRUTA FIXA

Caso as órbitas de salários da família forem fixos, ou seja, $O = s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, s_{n+1}$ seja constante todos os meses igual a um valor RB , de renda bruta, a solução é:

$$p_{n+1} = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1} + RB \cdot (1 - \kappa) \cdot \left[\text{Soma de uma progressão geométrica de } n+1 \text{ termos} \right]$$

Esta P.G $\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^n + \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n-1} \dots + \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right] + 1$, tem o valor da sua soma calculada como $\frac{\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1} - 1}{i \cdot (1 - \kappa)}$ ou $\frac{1 - \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1}}{i \cdot (\kappa - 1)}$. Substituindo na recorrência, tem-se:

$$p_{n+1} = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1} + RB \cdot \left[1 - \kappa \right] \cdot \frac{\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1} - 1}{i \cdot (1 - \kappa)}$$

ou

$$p_{n+1} = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1} + RB \cdot \left[1 - \kappa \right] \cdot \frac{1 - \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^{n+1}}{i \cdot (\kappa - 1)}$$

As duas fórmulas anteriores são equivalentes. Para muitos autores, o índice $n + 1$ pode ser trocado por n sem prejuízos aos entendimentos, não modificando em nada a dinâmica estudada do sistema. Ambas as fórmulas representam a dinâmica de um sistema financeiro ao longo do tempo. A troca do índice $n + 1$ por n não afeta o entendimento do sistema e é comumente utilizada em análises financeiras. Ambas as fórmulas descrevem como o valor p evolui ao longo do tempo, considerando uma taxa de juro i , um fator de consumo κ , um valor inicial p_0 , e possivelmente, um termo adicional RB , que denota a renda bruta familiar. A primeira fórmula utiliza a somação de uma série geométrica infinita para calcular o valor presente de uma série de pagamentos futuros. A segunda fórmula expressa o mesmo cálculo de forma um pouco diferente, mas ainda é equivalente à primeira. A substituição de $n + 1$ por n pode ser

útil em situações em que você deseja calcular o valor presente de uma série de pagamentos futuros até o período n (em vez de até $n + 1$). No contexto financeiro, isso é comum e não afeta a lógica geral do cálculo. Em resumo, ambas as fórmulas são válidas e equivalentes, e a escolha entre elas depende do contexto específico da análise financeira que está sendo realizada. A troca de $n + 1$ por n é uma simplificação que é frequentemente usada para facilitar os cálculos.

6.8.6.2 SOLUÇÃO: CASO ESPECIAL COM VALORES

Analisaremos o cenário financeiro de um família, cuja renda mensal bruta é de 9 salários mínimos, composto por todos os integrantes da família, e a composição do consumo chega a 85% desta renda. Sabe-se que a taxa de juro da poupança é de 0,62% ao mês (remuneração básica).

CENÁRIO

Vamos considerar o exemplo de uma família com uma renda mensal de R\$11.880,00, equivalente a 9 salários mínimos federais com base no ano de 2023, onde cada salário mínimo é de R\$1.320,00. A composição de seus gastos mensais inclui 30% destinados a despesas de financiamento imobiliário, 5% para serviços essenciais como água, saneamento básico, energia elétrica e gás de cozinha, e os restantes 50% são gastos com cartão de crédito, abrangendo despesas diversificadas como farmácia, alimentação, transporte, lazer e etc. Portanto, podemos definir o parâmetro $\kappa = 85\%$, refletindo o fato de que 15% do orçamento familiar não é gasto.

Sabendo que a taxa de juro de remuneração básica da poupança atualmente é de $i = 0,62\%$ ao mês, e como não há um valor mínimo estipulado pelas instituições bancárias para abertura de conta poupança, suponha que essa família deposite inicialmente $p_0 = R\$1000,00$ (Um único depósito de uma vez somente). É apresentado a seguir a evolução da trajetória ou órbita dos valores monetários observados no período n em forma de tabela 20.

Fórmula 6.8.5: soluções da recorrência do orçamento familiar

$$p_n = p_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^n + RB \cdot \frac{\left[1 + i \cdot (1 - \kappa) \right]^n - 1}{i}$$

Tabela 20 – Orçamento familiar da proposta numérica

n	$p_n = 1000 \cdot \left[1 + 0,62\% \cdot (1 - 85\%) \right]^n + R\$11.880,00 \cdot \frac{\left[1 + 0,62\% \cdot (1 - 85\%) \right]^n - 1}{0,62\%}$
0	R\$ 1.000,00 valor inicial dado
1	R\$ 2.782,93
2	R\$ 4.567,52
3	R\$ 6.353,77
4	R\$ 8.141,67
5	R\$ 9.931,25

Tabela 20 continuação da página anterior

n	$p_n = 1000 \cdot \left[1 + 0,62\% \cdot (1 - 85\%) \right]^n +$ $+ R\$11.880,00 \cdot \frac{\left[1 + 0,62\% \cdot (1 - 85\%) \right]^n - 1}{0,62\%}$
6	R\$ 11.722,48
7	R\$ 13.515,38
8	R\$ 15.309,95
9	R\$ 17.106,19
10	R\$ 18.904,10
11	R\$ 20.703,68
12	R\$ 22.504,94
13	R\$ 24.307,87
14	R\$ 26.112,47
15	R\$ 27.918,76
16	R\$ 29.726,72
17	R\$ 31.536,37
18	R\$ 33.347,70
19	R\$ 35.160,71
20	R\$ 36.975,41
21	R\$ 38.791,80
22	R\$ 40.609,87
23	R\$ 42.429,64
24	R\$ 44.251,10
25	R\$ 46.074,25
26	R\$ 47.899,10
27	R\$ 49.725,65
28	R\$ 51.553,89
29	R\$ 53.383,84
30	R\$ 55.215,48
31	R\$ 57.048,83
32	R\$ 58.883,89
33	R\$ 60.720,65
34	R\$ 62.559,12
35	R\$ 64.399,30
36	R\$ 66.241,19

Como podemos perceber, após 36 meses observados, o modelo matemático

fornece a maior órbita cujo valor numérico é $R\$66.241,19$ (Sessenta e seis mil, duzentos e quarenta e um Reais e dezenove centavos). O modelo também fornece subsídios para planejamento financeiro familiar de aquisição de bens de qualquer natureza, seja móvel ou imóvel. Por exemplo, suponha que a família deseja adquirir um bem imóvel no valor de $R\$850.000,00$. Qual é o prazo n , em que isso ocorre no modelo? Se a construção da tabela fosse continuada até que se atingisse o valor desejado, verificaríamos que essa órbita ocorre em $n = 395$, cujo valor é $R\$851.547,19$, deixando um saldo de $R\$1547,19$, sendo necessário recomeçar a rodar o modelo desta etapa novamente.

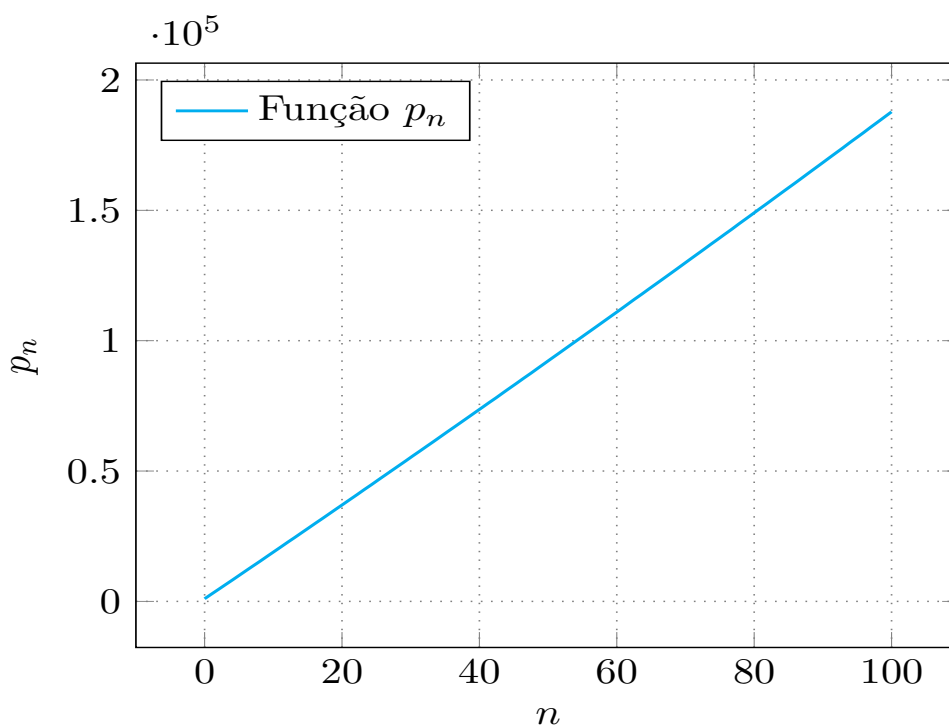


Figura 78: Curva da poupança do orçamento familiar

Note que a Figura 78 da página 223 é aproximadamente linear devido às baixas taxas de juros que a poupança remunera e também ao curto prazo. Se fizermos um gráfico para uma taxa de interesse fictícia de $i = 20\%$, poderíamos alterar outros parâmetros também, e assim teríamos o seguinte cenário na Figura 79 da página 224.

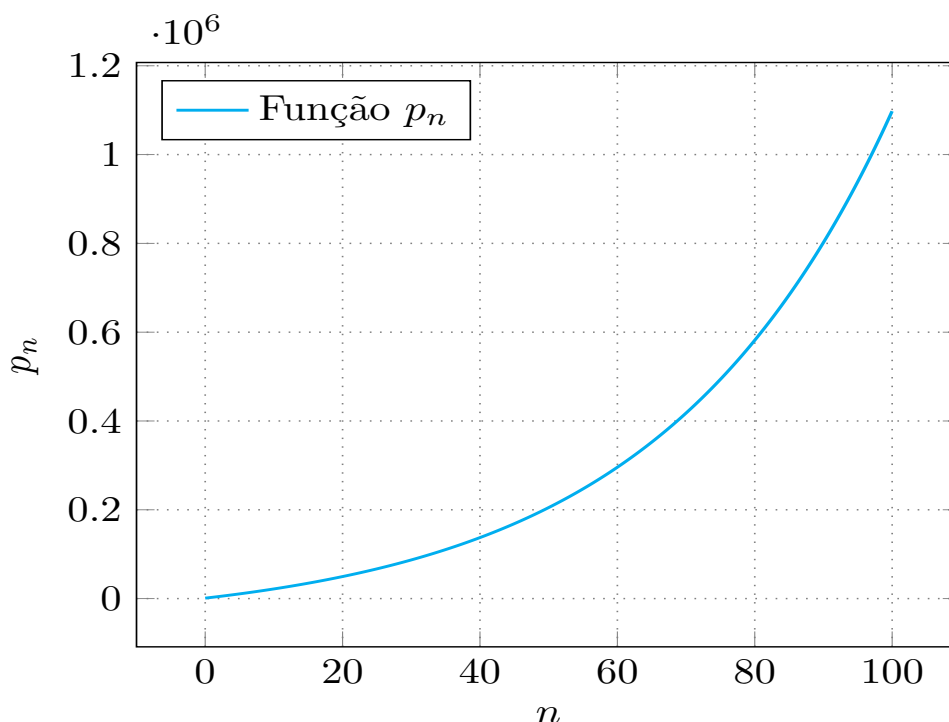


Figura 79: Curva da poupança do orçamento familiar com taxa de interesse maior

6.9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo apresentou uma proposta de reforma para a educação básica, levando em consideração os desafios enfrentados pelo sistema atual e as possíveis soluções para superá-los. A implementação de mudanças significativas no sistema educacional é fundamental para garantir uma educação de qualidade e formar cidadãos preparados para os desafios do século XXI. Acredita-se que a valorização dos professores, a adoção de práticas pedagógicas inovadoras e a participação ativa da comunidade escolar são elementos-chave para o sucesso dessa reforma.

Esta obra tem a finalidade de fornecer recursos aos professores e torná-los motivadores dos seus alunos, almejando à formação integral do sujeito, fomentando as curiosidades de adolescentes e jovens aprendizes ao cálculo e modelagem matemática, através de muitas situações de exemplos práticos e aplicáveis no contexto de suas realidades de vivência e convivência.

REFERÊNCIAS

- ALLIGOOD et al. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. [S.l.]: Springer, 1996. Citado na página 29.
- BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática, teoria e prática**. Editora Contexto, 2015. 240 p. ISBN 978-85-7244-893-2. Disponível em: <<https://www.editoracontexto.com.br/produto/modelagem-matematica-teoria-e-pratica/1496705>>. Citado 4 vezes nas páginas 198, 203, 213 e 215.
- BASSANEZI, R. C. et al. **Modelagem matemática**. UFU, 2014. 187 p. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25315/1/Modelagem%20Matem%20c3%a1tica.pdf>>. Citado 4 vezes nas páginas 198, 203, 213 e 215.
- BRAMBURGER, J. **Site do Professor Jason Bramburger**. 2023. Disponível em: <<https://www.concordia.ca/faculty/jason-bramburger.html>>. Acesso em: 12/03/2023. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 193.
- BROER, H. W.; TAKENS, F. **Dynamical systems and chaos**. Springer, 2011. v. 172. Disponível em: <<https://www.math.rug.nl/~broer/pdf/nova.pdf>>. Acesso em: 31 março 2023. Citado na página 8.
- CAMPREGHER, L. C. et al. **Modelagem com equações de diferenças: propostas de aplicação em sala**. [S.l.]: profmat, 2021. Citado na página 9.
- CAPILUPE, A. R. **EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS: APLICAÇÕES EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO E EM MODELOS POPULACIONAIS**. 23/06/2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3374&id2=150400084>. Acesso em: 01 abril 2023. Citado na página 9.
- CENTRAL, B. **Calculadora do cidadão**. 2023. Disponível em: <<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/exibirMetodologiaFinanciamentoPrestacoesFixas.do?method=exibirMetodologiaFinanciamentoPrestacoesFixas>>. Acesso em: 01 abril 2023. Citado na página 108.
- COLLEY, S. J. **The Manga guide to linear algebra, by Shin Takahashi, illustrated by Iroha Inoue and math girls, by Hiroshi Yuki (translated by Tony Gonzalez)**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2013. Citado na página 69.
- COLLINS, B. **Google Developer Expert e instrutor de análise de dados**. 2023. Disponível em: <<https://www.benlcollins.com/spreadsheets/logistic-map/>>. Acesso em: 10 abril 2023. Citado na página 139.
- COPED/SEDUC, C. P. **Currículo paulista**. 2020. Disponível em: <<https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>>. Acesso em: 13/08/2023. Citado na página 198.
- CULTURA, M. M. da educação e. **MEC - Novo Ensino Médio - perguntas e respostas**. 2023. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/publicacoes-para-professores/30000-uncategorised/40361-novo-ensino-medio-duvidas>>. Acesso em: 12/03/2023. Citado na página 192.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Papirus Editora, 16ª Edição 2022 – (1996 1ª Edição). 112 p. ISBN 9788530804107. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=NkGnY25OShcC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>>. Citado na página 198.

ELAYDI, S. et al. **An introduction to difference equations (Undergraduate texts in mathematics)**. Springer, 2005. Disponível em: <<http://bmm.univ-lyon1.fr/bmm/data/references/Elaydi-2005.pdf>>. Acesso em: 12/12/2023. Citado 14 vezes nas páginas 9, 50, 64, 65, 71, 85, 108, 111, 132, 150, 155, 175, 176 e 177.

ELAYDI, S. N. **Discrete Chaos with applications in science and engineering**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 146, 147, 155 e 177.

ELLER, E. S. **Equações de diferenças: aplicações no ensino médio**. [S.l.]: Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2015. Citado na página 9.

FEDERAL, S. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. BRASÍLIA, 2005. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394compilado.htm>. Citado na página 203.

FELIX, E. **EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS: UMA ABORDAGEM MAIS COMPLETA PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO**. profmat, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4115&id2=161010721>. Citado na página 9.

FERNANDES, J. **EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E APLICAÇÕES**. 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2630&id2=81125>. Acesso em: 01 abril 2023. Citado na página 9.

FIGUEIREDO et al. **Equações de diferenças lineares e homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes e crescimento populacional de plantas anuais**. [S.l.]: profmat, 2020. v. 2. Citado na página 9.

GIORDANO et al. **A first course in mathematical modeling**. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. Citado na página 31.

GOMES, D. F. **EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E ALGUNS MODELOS**. 04/06/2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1095&id2=382>. Acesso em: 01 abril 2023. Citado na página 9.

GONGOL, W. J. The aryabhatiya: Foundations of indian mathematics. **THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS**, 2003. Disponível em: <<https://www.bing.com/ck/a?!&&p=d4d22d556e02810d1da504504ab40e4a7c64304180394bdbc728a8b4c3acba9fJmltdHM9MTc1MjUzNtpn=3&ver=2&hsh=4&fclid=37ac397d-3c41-6831-0343-2c9f3df0694d&psq=title%3d%7bThe+aryabhatiya%3a+Foundations+of+indian+mathematics%7d%2c+author%3d%7bGongol%2c+William+J%7d%2c+year%3d%7b2003%7d&u=a1aHR0cHM6Ly93d3cuaG9seWJvb2tzLmNvbS93cC1jb250ZW50L3VwbG9hZHMvVGhlLUFyeWFiaGntb=1>>. Citado na página 7.

GUNELLA, M. **Equações de diferenças dinâmica cobweb e ajustes adaptativos**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado na página 9.

JUNIOR, W. F. d. S. **Equações de diferenças lineares de ordem superior e aplicações**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado na página 9.

KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **A moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos, Coordenação e revisão da tradução por Luis Barreira, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 2005**. [S.l.]: Fundação Calouste Gulbenkian, 2005. Citado na página 8.

LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. **The theory of chaotic attractors**, Springer, p. 77–84, 2004. Disponível em: <<https://www.its.caltech.edu/~matilde/LiYorke.pdf>>. Citado na página 127.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. [S.l.]: Editora Cortez, 2006. 244-246 p. Citado na página 198.

LORENZ, E. N. The problem of deducing the climate from the governing equations. **Tellus**, Taylor & Francis, v. 16, n. 1, p. 1–11, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.3402/tellusa.v16i1.8893>>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 14, 31 e 151.

LORENZ, E. N. **Edward Lorenz**. 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Edward_Lorenz>. Acesso em: 29 março 2023. Citado na página 29.

MCCLURE, M. **Basic real and complex dynamics - A computational approach**. 2017. Disponível em: <<https://marksmath.org/classes/Spring2017ComplexDynamics/text/index.html>>. Acesso em: 02 abril 2023. Citado na página 193.

MEC, M. da E. **Base Nacional Comum Curricular**. 2023. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 13/08/2023. Citado na página 198.

MINNESOTA, U. de. **Construa seu próprio gráfico de Cobweb (teia de aranha)**. 2023. Disponível em: <https://mathinsight.org/cobwebbing_graphical_solution>. Acesso em: 23 março 2023. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 96.

MORAIS, L. **EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS, CAOS E FRACTAIS**. 24/03/2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1072&id2=951>. Acesso em: 01 abril 2023. Citado na página 9.

NOVAKI et al. **Equações de diferenças na projeção de populações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016. Citado na página 9.

OTHERS. **Conversor e gerador de tabelas excel para L^AT_EX**. 2023. Disponível em: <<https://tableconvert.com/pt/excel-to-latex>>. Acesso em: 10 abril 2023. Citado na página 139.

OTTO et al. **A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution**. [S.l.]: Princeton, 2008. v. 50. 381 p. Citado na página 132.

PROFMAT. **Site do mestrado**. 2023. Disponível em: <<https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=sistemas+dinamicos&polo=>>. Acesso em: 10/03/2024. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 193.

- REBRANDLY. **Ferramenta para encurtar um link longo**. 2023. Disponível em: <<https://www.shorturl.at>>. Acesso em: 13/08/2023. Citado na página 192.
- RICHMOND, D. E. **Samuel Goldberg, Introduction to difference equations**. [S.l.]: Dover Publications, 1959. Citado na página 148.
- RICIERI, A. P. **Fractais e Caos: A matemática de hoje**. 1. ed. São Paulo: <https://www.prandiano.com.br/>, 1990. Disponível em: <<https://www.prandiano.com.br/>>. Acesso em: 29 março 2023. Citado na página 9.
- ROBBIANO, L. **Álgebra Linear: para todos**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 69.
- SEADE, F. **Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados SEADE**. 2023. Disponível em: <<http://produtos.seade.gov.br/produtos/500anos/index.php?tip=esta>>. Acesso em: 23 abril 2023. Citado na página 116.
- SETZER, V. W. **A matemática pode ser interessante... e linda! Espirais, Fibonacci, razão áurea, crescimento proporcional e a natureza**. [S.l.]: Editora Blucher, 2020. 334 p. ISBN 978-65-5506-022-5. Citado 4 vezes nas páginas 15, 20, 21 e 85.
- SETZER, V. W. **Site do Professor Valdemar W. Setzer**. 2023. <<https://www.ime.usp.br/~vwsetzer/>>. Acesso em: nov. 2023. No site, encontram-se materiais utilizados como referencial bibliográfico para contextualizar a sequência de Fibonacci. Citado na página 20.
- STEWART, I. **Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos**. [S.l.]: Zahar, 1991. Citado na página 16.
- STEWART, I. **17 equações que mudaram o mundo**. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.
- STEWART, I. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2014. Citado na página 10.
- STEWART, I. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos**. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2014. Citado na página 10.
- UFABC. **Manual de Identidade Visual da UFABC**. 2023. Disponível em: <<https://www.ufabc.edu.br/administracao/aci/programacao-visual/manual-de-identidade-visual-da-ufabc>>. Acesso em: 26/03/2023. Citado na página 193.
- UFABC. **Mini Curso de L^AT_EX**. 2023. Disponível em: <<https://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/latex/>>. Acesso em: 26/03/2023. Citado na página 193.
- University of Colorado Boulder. **Simulador: Meu Sistema Solar PhET Interactive Simulations**. 2024. <https://phet.colorado.edu/sims/html/my-solar-system/1.3.3/my-solar-system_pt_BR.html>. [Acesso em: 9 nov. 2025]. Citado na página 7.
- WIKIPEDIA. **Site da wikipedia**. 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Taylor>. Acesso em: 17/03/2023. Citado na página 245.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar.** [S.l.]: Penso, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 192 e 198.

Parte V

APÊNDICES

APÊNDICE A – SOMAS DEFINIDAS

Neste apêndice são produzidas pelo próprio autor demonstrações e alguns resultados importantes de somas definidas usadas ao longo deste trabalho de dissertação de mestrado .

Após a obtenção das fórmulas fechadas, deixo como sugestão que o leitor faça indução sobre n e que prove-as como funcionam.

A.1 A MOTIVAÇÃO DE ARQUIMEDES NA SOMA DE QUADRADOS DENTRO DO QUADRADO UNITÁRIO

Arquimedes, um dos maiores matemáticos da Antiguidade, mostrou notável habilidade em calcular áreas e volumes utilizando métodos que anteciparam o cálculo diferencial e integral. Entre suas contribuições mais intrigantes está o estudo de séries infinitas, como a soma de quadrados inscritos em um quadrado unitário. Sua motivação para explorar essa soma estava ligada à busca de uma forma precisa de medir a área de figuras geométricas por meio da decomposição em partes menores.

Uma série infinita notável que Arquimedes estudou é:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \dots$$

Esta série representa a soma das áreas de quadrados sucessivamente inscritos dentro de um quadrado unitário, com cada novo quadrado tendo uma área equivalente a um quarto do quadrado anterior (ou cada lado dividido pela metade). Na figura 80 demonstramos alguns quadrados iterados inscritos no interior do quadrado unitário.

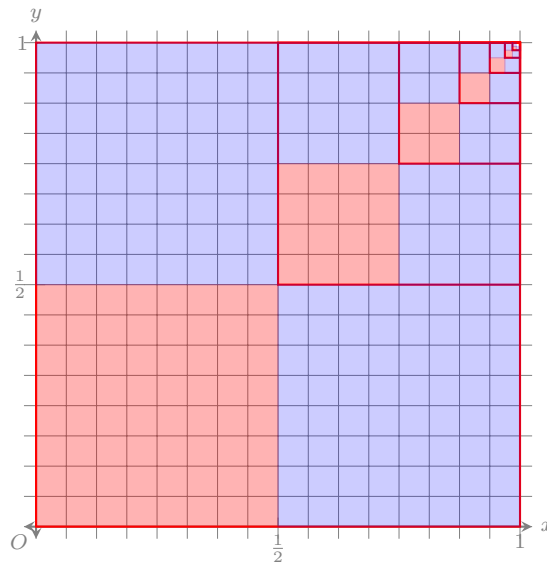


Figura 80: Representação geométrica da soma infinita de quadrados inscritos no quadrado unitário.

Para calcular a soma da série infinita, podemos utilizar a fórmula de soma de uma série geométrica infinita:

Fórmula A.1.1: Séries infinitas de Arquimedes - Soma Definida

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a \cdot r^{k-1},$$

onde a é o primeiro termo e r é a razão comum. No caso da série estudada por Arquimedes, temos $a = r = \frac{1}{4}$. Assim, a soma é dada por:

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

A interpretação Geométrica, é que a soma $S = \frac{1}{3}$ corresponde à fração da área do quadrado unitário que é ocupada pela soma infinita dos quadrados menores. Essa abordagem reflete a genialidade de Arquimedes em conectar abstrações matemáticas à realidade geométrica da época.

A descoberta de Arquimedes destaca um dos primeiros usos registrados de séries infinitas na história da matemática, demonstrando sua visão de infinitude e precisão matemática em um contexto prático. Esse trabalho também antecipou conceitos que mais tarde seriam formalizados no cálculo infinitesimal.

A.2 SOMA DOS N PRIMEIROS NATURAIS

Seja $n \in \mathbb{N}$ e a sequência

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n,$$

o valor S_n é sua soma definida para um número n de termos.

Escreve-se a sequência em ordem crescente primeiramente, posteriormente em ordem decrescente.

$$\begin{array}{r} \text{Linha 1: } S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ \text{Linha 2: } S_n = n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1 \\ \hline \text{Somando Linhas 1 e 2: } 2 \cdot S_n = n + 1 + n + 1 + n + 1 + \dots + n + 1 \end{array}$$

Note que somam-se n parcelas de $(n + 1)$, assim pelo princípio multiplicativo, tem-se:

Fórmula A.2.1: Soma n naturais

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

A.3 SOMA DOS N PRIMEIROS QUADRADOS

Seja $n \in \mathbb{N}$ e a sequência

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

o valor S_n é sua soma definida para um número n de termos. Utilizando a seguinte equação de diferenças:

$$(n + 1)^3 - n^3 = 3 \cdot (n^2 + n) + 1,$$

recursivamente para $n \in \mathbb{N}$, isto é, para cada $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, tem-se:

$$\begin{array}{rcll}
 n=1: & 2^3 - 1 & = & 3 \cdot (1^2 + 1) + 1 \\
 n=2: & 3^3 - 2^3 & = & 3 \cdot (2^2 + 2) + 1 \\
 n=3: & 4^3 - 3^3 & = & 3 \cdot (3^2 + 3) + 1 \\
 & \vdots & - & \vdots = & \vdots \cdot (\vdots + \vdots) & + & \vdots \\
 n=k: & (k+1)^3 - k^3 & = & 3 \cdot (k^2 + k) + 1
 \end{array}$$

Somando todas as Linhas: $(k+1)^3 - 1 = 3 \cdot \left(\underbrace{\sum_{i=1}^k i^2}_{\text{Soma desejada}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k i}_{\frac{k \cdot (k+1)}{2}} \right) + k$

Isolando a soma desejada, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k i^2 &= \frac{1}{3} \cdot ((k+1)^3 - 1) - \frac{k}{3} - \frac{k \cdot (k+1)}{2} \\
 \sum_{i=1}^k i^2 &= \frac{1}{3} \cdot (k^3 + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1 - 1) - \frac{k}{3} - \frac{(k^2+k)}{2} \\
 \sum_{i=1}^k i^2 &= \frac{1}{3} \cdot (k^3 + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k) - \frac{k}{3} - \frac{-k^2-k}{2} \\
 \sum_{i=1}^k i^2 &= \frac{2}{6} \cdot (k^3 + 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k) - \frac{2 \cdot k}{6} - \frac{-3 \cdot k^2 - 3 \cdot k}{6}
 \end{aligned}$$

Daí, segue que:

Fórmula A.3.1: Soma n quadrados forma não fatorada

$$n \cdot \frac{2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}{6} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

Como $n = -1 \implies 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 = 0$, portanto para fatorar este polinômio que é divisível por $n + 1$, temos que fazer $2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \div n + 1$. Vamos usar o dispositivo prático de Briott-Ruffini:

Raiz	Coefficiente do grau 2	Coefficiente do grau 1	Coefficiente independente
-1	2	3	1
Operação	↓	$2 \times -1 + 3$	$1 \times -1 + 1$
Resultado	2	1	0
Novos coeficientes com um grau reduzido	Coef. grau 1: 2	Coef. independente: 1	Resto da divisão: 0

Daí chegamos na forma fatorada da mesma fórmula.

Fórmula A.3.2: Soma n quadrados

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$$

Percebe-se que somas de potências do n -ésimo grau, isto é, grau n , resulta num polinômio de n -ésimo grau mais um, isto é, $n + 1$. Este é um teorema muito importante no estudo da matemática discreta. Outra forma de obter o mesmo resultado é igualar um polinômio de coeficientes a determinar e montar um sistema linear com as incógnitas.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = A \cdot n^3 + B \cdot n^2 + C \cdot n + D$$

A.4 SOMA DOS N PRIMEIROS CUBOS

Seja $n \in \mathbb{N}$ e a sequência

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3,$$

o valor S_n é a soma dos cubos dos primeiros n números inteiros. Utilizando a seguinte equação de diferenças:

$$(n+1)^4 - n^4 = 4 \cdot \left(n^3 + \frac{3}{2} \cdot n^2 + n \right) + 1,$$

aplicando-a recursivamente para $n \in \mathbb{N}$, isto é, para $n = 1, 2, 3, \dots$, temos:

$$\begin{array}{rcl} n=1: & 2^4 - 1^4 & = 4 \cdot \left(1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 1 \right) + 1 \\ n=2: & 3^4 - 2^4 & = 4 \cdot \left(2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \right) + 1 \\ n=3: & 4^4 - 3^4 & = 4 \cdot \left(3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 3 \right) + 1 \\ & \vdots & \\ & \vdots - \vdots & = \vdots \cdot \left(\vdots + \vdots + \vdots \right) + \vdots \\ n=k: & (k+1)^4 - k^4 & = 4 \cdot \left(k^3 + \frac{3}{2} \cdot k^2 + k \right) + 1 \end{array}$$

Somando todas as equações, obtemos:

$$(k+1)^4 - 1 = 4 \cdot \left(\underbrace{\sum_{i=1}^k i^3}_{\text{Soma desejada}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k i^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k i}_{\frac{k(k+1)}{2}} \right) + k.$$

Isolando a soma desejada, temos:

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \frac{1}{4} \cdot \left((k+1)^4 - 1 \right) - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Desenvolvendo a expressão e simplificando, obtemos:

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

Portanto, chegamos à fórmula fatorada da soma dos cubos dos primeiros n números inteiros:

Fórmula A.4.1: Soma dos n primeiros cubos

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Similarmente à soma dos quadrados, percebe-se que a soma dos cubos também resulta em um polinômio, e a resolução pode ser abordada pela resolução de um sistema linear para determinar os coeficientes do polinômio correspondente.

A.5 SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE POTÊNCIA DE QUARTA ORDEM

Seja a soma $S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$, que pode ser expressa como:

$$S_n = \sum_{j=1}^n j^4$$

ARTIFÍCIO UTILIZADO:

Partimos da expressão para expandir potências de quinta ordem:

$$(n+1)^5 - n^5 = 5 \cdot n^4 + 10 \cdot n^3 + 10 \cdot n^2 + 5 \cdot n + 1$$

Agora, de forma recursiva para $n \in \mathbb{N}$, podemos calcular para os primeiros termos:

$$\begin{aligned} (2)^5 - (1)^5 &= 5 \cdot 1^4 + 10 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1 \\ (3)^5 - (2)^5 &= 5 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 \\ (4)^5 - (3)^5 &= 5 \cdot 3^4 + 10 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 \\ &\vdots \\ (n+1)^5 - n^5 &= 5 \cdot n^4 + 10 \cdot n^3 + 10 \cdot n^2 + 5 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Somando todas as equações, temos:

$$(n+1)^5 - 1 = 5 \cdot \sum_{j=1}^n j^4 + 10 \cdot \sum_{j=1}^n j^3 + 10 \cdot \sum_{j=1}^n j^2 + 5 \cdot \sum_{j=1}^n j + n$$

Agora, dividindo todos os elementos por 5:

$$\frac{(n+1)^5 - 1}{5} = \sum_{j=1}^n j^4 + 2 \cdot \sum_{j=1}^n j^3 + 2 \cdot \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j + \frac{n}{5}$$

SUBSTITUINDO AS SOMAS CONHECIDAS:

Sabemos os resultados para as somas dos cubos e quadrados dos primeiros n termos, então podemos substituir:

$$\frac{(n+1)^5 - 1 - n}{5} = \sum_{j=1}^n j^4 + 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

Agora, desenvolvendo e simplificando a equação:

$$\sum_{j=1}^n j^4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - n}{5} - \left(\frac{3n^4 + 10n^3 + 12n^2 + 5n}{6} \right)$$

Podemos reescrever a soma dos potências de quarta ordem como:

$$\sum_{j=1}^n j^4 = n(n+1) \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3n^2 + 3n - 1}{15}$$

CONCLUSÃO:

Assim, chegamos à fórmula final da somatória dos n primeiros termos de potências de quarta ordem:

Fórmula A.5.1: Soma definida de quarta ordem

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = n(n+1) \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{3n^2 + 3n - 1}{15}$$

Esta fórmula confirma que a soma das potências de n -ésimo grau resulta em um polinômio de grau $n+1$. Esta técnica é importante no estudo de sequências e

progressões aritméticas, e pode ser encontrada na unidade 5 da apostila de MA12 do material do *Profmat*, página 11.

Proposição A.1

Sejam $n \in \mathbb{N}$; $i, j \in \mathbb{Z}^+$ e $(k_m)_{m=0}^n$ constantes a determinar, então:

$$\sum_{i=1}^n i^j = k_0 \cdot i^{j+1} + k_1 \cdot i^j + \dots + k_n$$

A.6 SOMA DEFINIDA P.G DE N TERMOS

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} a^k &= 1 + a^1 + a^2 + \dots + a^{n-1} \\ a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k &= a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n \\ (-) \hline \implies \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot (1 - a) &= 1 - a^n \implies \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a} \end{aligned}$$

Fórmula A.6.1: Soma definida P.G de n termos

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Note que caso a seja igual unidade, você estará somando uma quantidade de n termos iguais a 1, então a somação vale n .

Caso o índice k não inicie em zero, ou seja, inicie na unidade, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a^k &= a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} \\ a \cdot \sum_{k=1}^{n-1} a^k &= a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n \\ (-) \hline \sum_{k=1}^{n-1} a^k \cdot (1 - a) &= a - a^n \\ \implies \sum_{k=1}^{n-1} a^k &= \frac{a - a^n}{1 - a} \implies \sum_{k=1}^{n-1} a^k = a \cdot \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a} \end{aligned}$$

Fórmula A.6.2: Soma definida P.G de n termos

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k = a \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Note que caso a seja igual unidade, você estará somando 1, uma quantidade de vezes igual a $n - 1$, neste caso, então a soma definida vale $n - 1$.

Soma definida de n termos do tipo $k \cdot a^k$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e a sequência

$$a \neq 1, \sum_{k=1}^n k \cdot a^k = 1 \cdot a^1 + 2 \cdot a^2 + 3 \cdot a^3 + \dots + n \cdot a^n,$$

o valor $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot a^k$ é sua soma definida para um número n de termos.

Vamos escrever em uma linha esta série multiplicada pela razão de progressão dos coeficientes a e logo abaixo a série oposta. Daí, temos:

$$\begin{array}{r} \text{Linha 1:} \quad a \cdot S_n = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a^3 + 3 \cdot a^4 + \dots + (n-1) \cdot a^n + n \cdot a^{n+1} \\ \text{Linha 2:} \quad -S_n = -1 \cdot a^1 - 2 \cdot a^2 - 3 \cdot a^3 - \dots - n \cdot a^n \\ \hline \text{Somando Linhas 1 e 2: } S_n \cdot (a-1) = -a^1 - a^2 - a^3 - \dots - a^n + n \cdot a^{n+1} \end{array}$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \text{Fatorando } -: \quad S_n \cdot (a-1) &= - \left(a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n \right) + n \cdot a^{n+1} \\ S_n \cdot (a-1) &= - \left(\frac{a^{n+1} - a}{a-1} \right) + n \cdot a^{n+1} \\ S_n \cdot (a-1) &= \left(\frac{-a^{n+1} + a}{a-1} \right) + \frac{n \cdot (a-1) \cdot a^{n+1}}{a-1} \end{aligned}$$

Daí, efetuando a operação de mmc, tem-se:

$$\begin{aligned} S_n \cdot (a-1) &= \left(\frac{-a^{n+1} + a}{a-1} + \frac{n \cdot (a-1) \cdot a^{n+1}}{a-1} \right) \\ S_n &= \left(\frac{-a^{n+1} + a}{(1-a)^2} - \frac{n \cdot (1-a) \cdot a^{n+1}}{(1-a)^2} \right) \\ S_n &= \frac{-a^{n+1} + a}{(1-a)^2} - \frac{n \cdot (1-a) \cdot a^{n+1}}{(1-a)^2} + \frac{a^{n+2} - a^{n+2}}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{-a^{n+1} + a - n \cdot (1-a) \cdot a^{n+1} + a^{n+2} - a^{n+2}}{(1-a)^2} \\
 S_n &= \frac{-a^{n+1} + a - n \cdot (a^{n+1} - a^{n+2}) + a^{n+2} - a^{n+2}}{(1-a)^2} \\
 S_n &= \frac{-a^{n+1} + a - n \cdot a^{n+1} + n \cdot a^{n+2} + a^{n+2} - a^{n+2}}{(1-a)^2} \\
 S_n &= \frac{-(n+1) \cdot a^{n+1} + a + (n+1) \cdot a^{n+2} - a^{n+2}}{(1-a)^2} \\
 S_n &= \frac{(n+1) \cdot (a^{n+2} - a^{n+1}) + a - a^{n+2}}{(1-a)^2}
 \end{aligned}$$

Afim de fatorar, note que:

$$\begin{aligned}
 (n+1) \cdot (a^{n+2} - a^{n+1}) &= (n+1) \cdot a^{n+2} - (n+1) \cdot a^{n+1} \\
 (n+1) \cdot (a^{n+2} - a^{n+1}) &= (n+1) \cdot (a-1) \cdot a^{n+1}
 \end{aligned}$$

Assim, ficamos com:

$$a \neq 1, \sum_{k=1}^n k \cdot a^k = \frac{(n+1) \cdot ((a-1) \cdot a^{n+1}) + a - a^{n+2}}{(1-a)^2}$$

Fórmula A.6.3: Soma definida de n termos do tipo $k \cdot a^k$

$$a \neq 1, \sum_{k=1}^n k \cdot a^k = \frac{(n+1) \cdot (a-1) \cdot a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(1-a)^2}$$

APÊNDICE B – TEOREMA DE TAYLOR

A série de potências a seguir, também chamada de polinômio de Taylor, ou Teorema de Taylor, é conhecida por expansão em série de Taylor.

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x^* ponto fixo, $n \in \mathbb{N}$ o grau do polinômio de Taylor e coeficientes a_n :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x^*) + a_2 \cdot (x - x^*)^2 + a_3 \cdot (x - x^*)^3 + \dots + a_n \cdot (x - x^*)^n$$

onde:

$$0 \leq |x - x^*| < \varepsilon, \quad \text{em que } \varepsilon \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon].$$

Os coeficientes do polinômio de Taylor são calculados da forma que se segue:

1. Primeiro fator

$$f(x = x^*) = f(x^*) = a_0$$

$$\therefore a_0 = \frac{f^{(0)}(x^*)}{0!}$$

onde:

$$f^{(0)}(x^*) = f(x^*) \text{ e } 0! = 1$$

2. Segundo fator

Toma-se a primeira derivada de $f(x)$:

$$f^{(1)}(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (x - x^*) + 3 \cdot a_3 \cdot (x - x^*)^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot (x - x^*)^{n-1}$$

$$f^{(1)}(x^*) = a_1$$

$$a_1 = \frac{f^{(1)}(x^*)}{1!}$$

3. Terceiro fator

De mesmo modo, deriva-se duas vezes $f(x)$:

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot (x - x^*) + 12 \cdot a_4 \cdot (x - x^*)^2 + 20 \cdot a_5 \cdot (x - x^*)^3 + \dots$$

$$f^{(2)}(x^*) = 2 \cdot a_2$$

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(x^*)}{2!}$$

4. Quarto fator

De mesmo modo, deriva-se três vezes $f(x)$:

$$f^{(3)}(x) = 6 \cdot a_3 + 24 \cdot a_4 \cdot (x - x^*) + 60 \cdot a_5 \cdot (x - x^*)^2 + \dots$$

$$f^{(3)}(x^*) = 6 \cdot a_3$$

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(x^*)}{3!}$$

5. Quinto fator

De mesmo modo, deriva-se quatro vezes $f(x)$:

$$f^{(4)}(x) = 24 \cdot a_4 + 120 \cdot a_5 \cdot (x - x^*) + \dots$$

$$f^{(4)}(x^*) = 24 \cdot a_4$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(x^*)}{4!}$$

6. Sexto fator. De mesmo modo, deriva-se cinco vezes $f(x)$:

$$f^{(5)}(x) = 120 \cdot a_5 + \dots$$

$$f^{(5)}(x^*) = 120 \cdot a_5$$

$$a_5 = \frac{f^{(5)}(x^*)}{5!}$$

Substituindo todos os valores de a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 e a_5 em $f(x)$ nós obtemos:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(a)(x-a)^0}{0!} + \frac{f^{(1)}(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} +$$

$$+ \frac{f^{(4)}(a)(x-a)^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(a)(x-a)^5}{5!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

Fórmula B.0.1: Teorema de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{(n)!}$$

Provando assim o teorema de Taylor ou série de Taylor. No caso particular de $x^* = 0$, a série acima também é chamada de Série de Maclaurin ou, quando for o caso, de polinômio de Maclaurin. Brook Taylor é o nome do matemático britânico, que anunciou este resultado em 1712 (WIKIPEDIA, 2023).

B.1 FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

Proposição B.1

Seja $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $n + 1$ vezes derivável em um intervalo \mathcal{I} compacto. Dado $\varepsilon > 0$ no intervalo $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \in \mathcal{I}$, supondo que f seja $n + 1$ vezes derivável no intervalo aberto $]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$ e contínua no intervalo fechado $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$, então existe $\xi \in]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$ tal que

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n + R_n(x),$$

onde o termo de resto é dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x^*)^{n+1}.$$

Essa expressão é chamada **forma de Lagrange para o resto de Taylor**.

Demonstração. Suponha que $b > a$ (o caso $b < a$ é análogo). Defina a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!} \cdot (b-x) - \frac{f''(x)}{2!} \cdot (b-x)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot (b-x)^n - \frac{M}{(n+1)!} \cdot (b-x)^{n+1},$$

onde $M \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $g(a) = 0$.

Note que g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Além disso:

- $g(a) = 0$ (pela escolha de M)

- $g(b) = 0$ (pois todos os termos $(b - x)$ se anulam em $x = b$).

Portanto, pelo Teorema de Rolle, existe $\xi \in]a, b[$ tal que $g'(\xi) = 0$.

Derivando g , pela regra da cadeia, obtemos:

$$g'(x) = \underbrace{f'(b)}_0 - f'(x) - \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k}_{\text{termo principal}} + \underbrace{\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} \cdot (-1)}_{\text{cancelamento}} \right] + \underbrace{\frac{M}{n!} (b-x)^n}_{\text{resto de Lagrange}}.$$

Note que os termos em cascata se cancelam.

$$g'(x) = \underbrace{f'(b)}_0 - \cancel{f'(x)} - \left[\cancel{\frac{f''(x)}{1!} (b-x)} + \cancel{f'(x) \cdot (-1)} \right] - \left[\frac{f'''(x)}{2!} (b-x)^2 + \cancel{\frac{f''(x)}{2!} \cdot 2 \cdot (b-x) \cdot (-1)} \right] - \dots - \left[\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} \right] - \frac{M}{(n+1)!} \cdot (n+1)(b-x)^n \cdot (-1)$$

$$\implies g'(x) = \frac{M - f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n$$

Simplificando, obtemos

$$g'(x) = \frac{M}{n!} (b-x)^n - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n.$$

Como $g'(\xi) = 0$, conclui-se que

$$\boxed{M = f^{(n+1)}(\xi)}.$$

Substituindo $x = a$ na definição de g e lembrando que $g(a) = 0$, resulta em

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Isto prova a fórmula de Taylor com resto na forma de Lagrange. □

APÊNDICE C – DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO NO GOOGLE PLANILHAS

Para o diagrama de bifurcação da equação logística $f(x, r) = r \cdot x \cdot (1 - x)$, utilizando o google planilhas ou google sheets o gráfico traçando o equilíbrio em relação à taxa de crescimento precisamos de mais dados, muito mais dados.

Queremos mostrar os resultados para cada taxa de crescimento simultaneamente. Uma cópia da planilha está disponível em https://docs.google.com/spreadsheets/d/1lidn1KS68RLvZjwTcWnZTNnJ61_nIZiYrXALvxVVkp8/edit?usp=sharing Acesso em 12-01-2025.

Portanto, executamos o modelo sob diferentes pressupostos de taxa de crescimento, 0,01, 0,02, 0,03, 0,04, etc., e plotamos os dados resultantes.

Adicione a suposição de valor inicial na linha 1 e as iterações na coluna A, usando a fórmula SEQUENCE acima.

Em seguida, gere as taxas de crescimento como cabeçalhos de coluna na linha 3, usando esta fórmula de matriz : =ArrayFormula((SEQUENCE(1,401,0,1)/100))

Isso cria títulos de coluna 401 (você terá que adicionar colunas suficientes, caso contrário a fórmula mostrará um erro), em incrementos de 0,01.

Em seguida, traga o valor inicial para a linha 4, como o valor da primeira iteração para cada taxa de crescimento: =\$B\$1

Em seguida, crie a equação do mapa logístico, onde a taxa de crescimento é referenciada como o cabeçalho desta coluna (observe o sinal \$ antes do 3 para bloquear a referência à linha 3, mas não à coluna): =B\$3*B4*(1-B4)

Copie esta fórmula para a parte inferior da coluna B e copie-a em todas as outras colunas. Isso pode demorar um pouco para calcular o Planilhas Google.

Os dados ficam assim:

Agora, lembre-se de que queremos plotar os valores do resultado para que

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	start	0.50										
2												
3	n / r	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	
4	1	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
5	2	0	0.0025	0.005	0.0075	0.01	0.0125	0.015	0.0175	0.02	0.0225	0
6	3	=B3*B5*(1-B5)	0.0000249375	0.0000995	0.0002233125	0.000396	0.0006171875	0.0008865	0.0012035625	0.001568	0.0019794375	0.0024
7	4	0	0.000000249368	0.000001989801	0.000006697878	0.000015833727	0.000030840328	0.000053142847	0.000084147975	0.000125243310	0.000177796739	0.000243155
8	5	0	0.000000002493	0.0000000039795	0.000000200935	0.000006633339	0.000001541968	0.000003188401	0.000005889862	0.000010018209	0.000015998861	0.000024309
9	6	0	0.000000000795	0.000000006028	0.000000025333	0.000000077098	0.000000191303	0.000000412287	0.000000801448	0.000001439874	0.000002430	
10	7	0	0	0.000000000180	0.00000001013	0.000000003854	0.000000011478	0.000000028860	0.000000064115	0.000000129588	0.000000243	
11	8	0	0	0	0	0.000000000192	0.000000000688	0.000000002020	0.000000005129	0.000000011662	0.000000024	
12	9	0	0	0	0	0	0	0.000000000141	0.000000000410	0.000000001049	0.000000002	
13	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.000000000	
14	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
18	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
20	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Figura 81: Planilha do Google para diagrama de bifurcações

não precisemos plotar todas as iterações. Podemos simplesmente usar um número razoável de linhas no final, uma vez que o equilíbrio terá sido alcançado, se for o caso, para a maioria das taxas de crescimento. Escolhe-se as 40 linhas finais, que eram dados suficientes para o gráfico sem sobrecarregar a ferramenta de gráfico.

Vamos também transpor os dados para que fiquem na orientação correta para a ferramenta de gráfico.

Em uma nova planilha, adicione esta fórmula de transposição à célula A2: $=\text{TRANSPOSE}(\text{Data!B3:OL3})$

Em seguida, use a função QUERY para trazer as últimas 40 linhas de dados, ou seja, iterações de 960 a 1000, e envolva-as com TRANSPOSE novamente. Coloque esta fórmula na célula B1: $=\text{TRANSPOSE}(\text{QUERY}(\text{Data!A4:OL1003}, \text{"select * offset 960"}, 0))$

Esses são os dados prontos. Agora podemos traçar o gráfico.

Destaque todos os dados.

Crie um gráfico de linha através do menu: Inserir > Gráfico

Para organizar o gráfico, exclua a legenda e adicione um título descritivo Mapa Logístico.

Por fim, vá para Série no menu Personalizar, certifique-se de que Aplicar a todas as séries esteja selecionado e, em seguida, altere a cor para azul para alterar

todas as linhas para uma única cor azul. Também fica melhor com a espessura da linha definida para 1px.

C.1 PACOTES TIKZ, PGFPLOTS, TIKZ-3DPLOT

O overleaf LaTeX oferece um visual espetacular através dos pacotes gráficos. A seguir segue código fonte para geração do gráfico *cobweb* do mapa de tenda e seus 18 iterados. O mesmo procedimento pode ser realizado para qualquer função. Fornecimento do código fonte para geração do gráfico cobweb em látex

```
%\begin{tikzpicture}
%\begin{axis}
%[
%yticklabel style={
%anchor=east,
%font=\tiny,
%/pgf/number format/fixed,
%/pgf/number format/precision=3,
%},
%xticklabel style={
%rotate=90,
%anchor=east,
%font=\tiny,
%/pgf/number format/fixed,
%/pgf/number format/precision=3,
%},
%width=0.8\textwidth,
%height=0.25\textheight,
%xlabel=$x$,
%xtick={0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1},
%ylabel=funções compostas,
%ytick={0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1},
%xmin=-0.1,
```

```

%xmax=1.1,
%ymin=-0.1,
%ymax=1,
%samples=500,
%domain=0:1,
%axis lines=middle,
%grid=both,
%legend pos=outer north east,
%legend style={draw=none, font=\tiny},
%scaled y ticks=false,
%]
%\addplot [magenta, thick, line width=1.5pt] {\x};
%\addlegendentry{\$g(x)=x\$}

% Declara a função  $f(x) = a*x$  se  $x \leq 0.5$  ou  $a*(1-x)$  se  $x > 0.5$ 
%\pgfmathdeclarefunction{tent}{1}{\pgfmathparse{#1 <= 0.5 ?
  2*#1 : 2*(1-#1)}}

% Gráfico de  $f(x)$ 
%\addplot[color=red, thick] {tent(x)};
%\addlegendentry{\$f(x)=\text{tenda}\$}

% Gráfico de  $f^2(x) = f(f(x))$ 
%\addplot[color=blue, thick] {tent(tent(x))};
%\addlegendentry{\$f^2(x) = f(f(x))\$}

% Gráfico de  $f^3(x) = f(f(f(x)))$ 
%\addplot[color=green, thick] {tent(tent(tent(x)))};
%\addlegendentry{\$f^3(x) = f(f(f(x)))\$}

% Gráfico de  $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$ 
%\addplot[color=lime, thick] {tent(tent(tent(tent(x))))};

```

```

%\addlegendentry{ $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$ }

% Pontos fixos para a função tenda
%\addplot [mark=*, mark options={fill=cyan, scale=1.5}] %
  coordinates {(0.666, 0.666)} node[anchor=north west,
    xshift=5, yshift=5] { $x^{\ast}(\frac{2}{3})$ };

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% D I A G R A M A D E C O B W E B
  INÍCIO %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Atualiza  $(x, y) = (x_{\{n\}}, x_{\{n+1\}})$ 
%\pgfmathsetmacro{\xZERO}{0.111}
%\pgfmathsetmacro{\xUM}{0.222}
%\pgfmathsetmacro{\xDOIS}{0.444}
%\pgfmathsetmacro{\xTRES}{0.888}
%\pgfmathsetmacro{\xQUATRO}{0.224}
%\pgfmathsetmacro{\xCINCO}{0.448}
%\pgfmathsetmacro{\xSEIS}{0.896}
%\pgfmathsetmacro{\xSETE}{0.208}
%\pgfmathsetmacro{\xOITO}{0.416}
%\pgfmathsetmacro{\xNOVE}{0.832}
%\pgfmathsetmacro{\xDEZ}{0.336}
%\pgfmathsetmacro{\xONZE}{0.672}
%\pgfmathsetmacro{\xDOZE}{0.656}
%\pgfmathsetmacro{\xTREZE}{0.688}
%\pgfmathsetmacro{\xQUATORZE}{0.624}
%\pgfmathsetmacro{\xQUINZE}{0.752}
%\pgfmathsetmacro{\xDEZESSEIS}{0.496}
%\pgfmathsetmacro{\xDEZESSETE}{0.992}
%\pgfmathsetmacro{\xDEZOITO}{0.016}

% NÓS

```

```
%%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xZERO,\xUM){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xUM,\xDOIS){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xDOIS,\xTRES){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xTRES,\xQUATRO){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xQUATRO,\xCINCO){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xCINCO,\xSEIS){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xSEIS,\xSETE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xSETE,\xOITO){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xOITO,\xNOVE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xNOVE,\xDEZ){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xDEZ,\xONZE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xONZE,\xDOZE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xDOZE,\xTREZE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xTREZE,\xQUATORZE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xQUATORZE,\xQUINZE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
  axis cs:\xQUINZE,\xDEZESSEIS){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
```

```
axis cs:\xDEZESSEIS,\xDEZESSETE){};
%\node[draw=orange, fill=gray, circle, inner sep=1pt] at (
axis cs:\xDEZESSETE,\xDEZOITO){};

% SETAS VERTICAIS POSIÇÕES (\xN, 0) para (\xN, \xN+1)
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xZERO, 0) -- (axis cs:\
xZERO, \xUM);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xUM, \xUM) -- (axis cs:\xUM
, \xDOIS);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xDOIS, \xDOIS) -- (axis cs
:\xDOIS, \xTRES);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xTRES, \xTRES) -- (axis cs
:\xTRES, \xQUATRO);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xQUATRO, \xQUATRO) -- (axis
cs:\xQUATRO, \xCINCO);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xCINCO, \xCINCO) -- (axis
cs:\xCINCO, \xSEIS);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xSEIS, \xSEIS) -- (axis cs
:\xSEIS, \xSETE);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xSETE, \xSETE) -- (axis cs
:\xSETE, \xOITO);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xOITO, \xOITO) -- (axis cs
:\xOITO, \xNOVE);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xNOVE, \xNOVE) -- (axis cs
:\xNOVE, \xDEZ);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xDEZ, \xDEZ) -- (axis cs:\
xDEZ, \xONZE);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xONZE, \xONZE) -- (axis cs
:\xONZE, \xDOZE);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xDOZE, \xDOZE) -- (axis cs
:\xDOZE, \xTREZE);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xTREZE, \xTREZE) -- (axis
cs:\xTREZE, \xQUATORZE);
```

```

%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xQUATORZE, \xQUATORZE) -- (
    axis cs:\xQUATORZE, \xQUINZE);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xQUINZE, \xQUINZE) -- (axis
    cs:\xQUINZE, \xDEZESSEIS);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xDEZESSEIS, \xDEZESSEIS) --
    (axis cs:\xDEZESSEIS, \xDEZESSETE);
%\draw[->, thick, cyan] (axis cs:\xDEZESSETE, \xDEZESSETE) --
    (axis cs:\xDEZESSETE, \xDEZOITO);

% SETAS HORIZONTAIS POSIÇÕES (\xN, xN+1) para (\xN+1, \xN+1)
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xZERO, \xUM) -- (axis cs
    :\xUM, \xUM);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xUM, \xDOIS) -- (axis cs
    :\xDOIS, \xDOIS);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xDOIS, \xTRES) -- (axis
    cs:\xTRES, \xTRES);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xTRES, \xQUATRO) -- (axis
    cs:\xQUATRO, \xQUATRO);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xQUATRO, \xCINCO) -- (
    axis cs:\xCINCO, \xCINCO);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xCINCO, \xSEIS) -- (axis
    cs:\xSEIS, \xSEIS);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xSEIS, \xSETE) -- (axis
    cs:\xSETE, \xSETE);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xSETE, \xOITO) -- (axis
    cs:\xOITO, \xOITO);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xOITO, \xNOVE) -- (axis
    cs:\xNOVE, \xNOVE);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xNOVE, \xDEZ) -- (axis cs
    :\xDEZ, \xDEZ);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xDEZ, \xONZE) -- (axis cs
    :\xONZE, \xONZE);
%\draw[->, thick, violet] (axis cs:\xONZE, \xDOZE) -- (axis

```


Parte VI

ANEXOS

.1 OBRAS DE ARTE DE ESCHER

As ilusões do artista Escher.

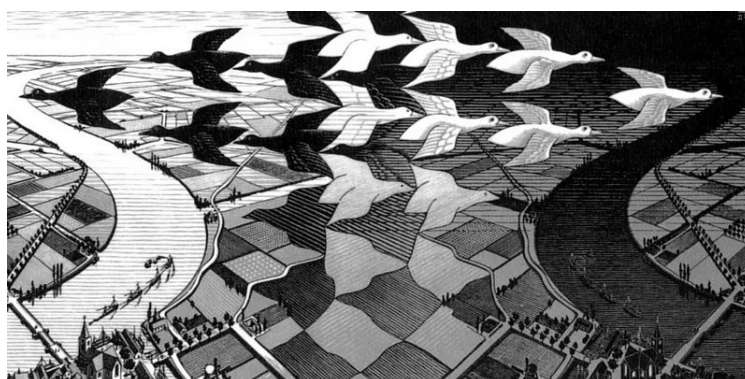
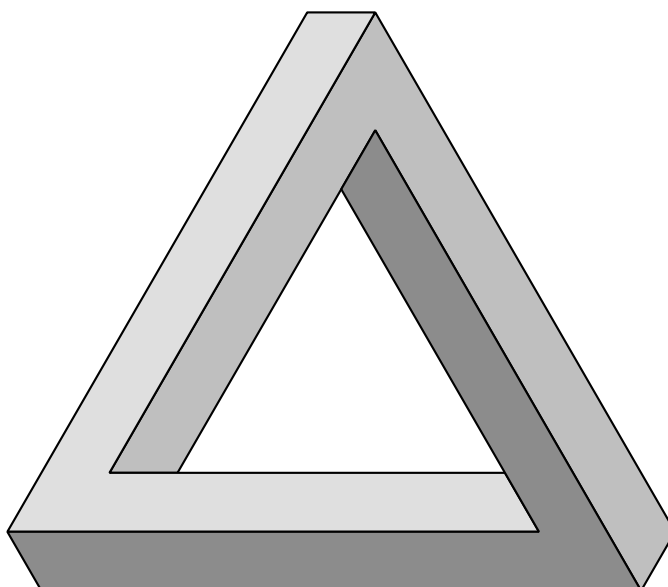
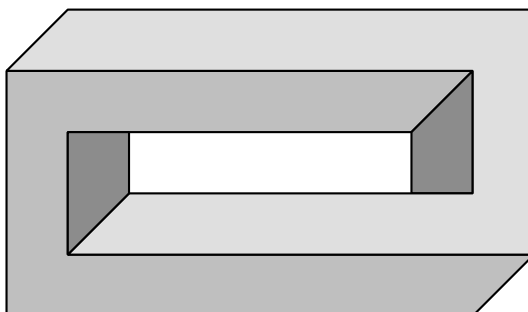


Figura 82: Dia e Noite

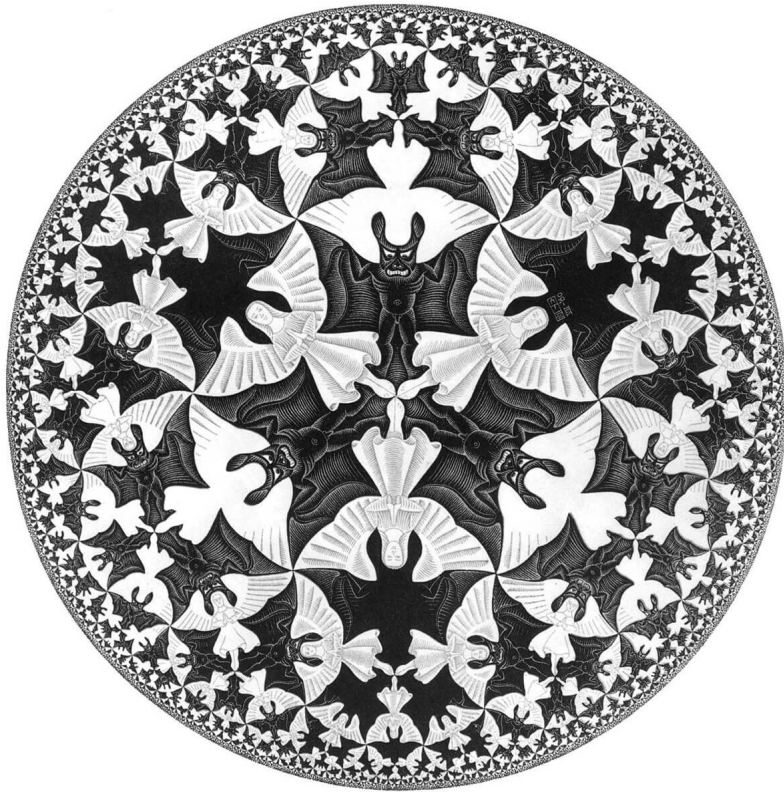


Figura 83: Anjos e Demônios

.2 FRACTAIS DE SIERPINSKI-MENGER

A esponja de Menger é construída a partir de um cubo sólido de lado unitário, onde em cada processo iterado, o centro do cubo é furado.

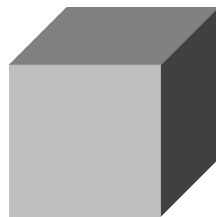


Figura 84: Esponja de Menger passo base de indução $n = 0$

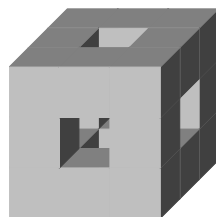


Figura 85: Esponja de Menger passo base de indução $n = 1$

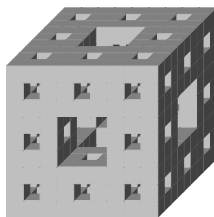


Figura 86: Esponja de Menger passo base de indução $n = 2$

.3 FRACTAIS DE KOCH

O floco de neve de Kochⁱ é um exemplo clássico de fractal, construído iterativamente a partir de um triângulo equilátero. Ele é gerado adicionando detalhes à estrutura inicial em cada etapa (ou iteração). Na figura 87 mostramos os sete primeiros iterados da curva de Koch.

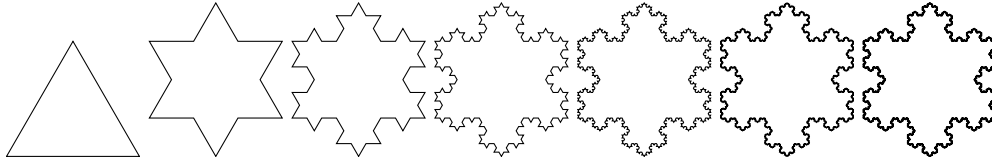


Figura 87: Fractais de Koch passo base de indução do $n = 0$ até o estágio $n = 6$

ⁱ Niels Fabian Helge von Koch foi um matemático sueco que criou o “floco de neve Koch” em 1904, devido à sua aparência semelhante a um floco de neve.

.3.1 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O triângulo de Sierpiński, criado por Wacaw Sierpińskiⁱⁱ em 1915, é um fractal famoso pela sua simplicidade e beleza matemática, ligado a conjuntos topológicos.

Surgiu do estudo de conjuntos geométricos com propriedades especiais, como auto-similaridade e área nula. Embora seja creditado a Sierpiski, formas semelhantes já existiam em artes decorativas. O triângulo é construído iterativamente a partir de um triângulo equilátero: começa com um triângulo sólido, divide-o em quatro partes e remove o triângulo central, repetindo o processo nas partes restantes. A cada iteração, o número de triângulos aumenta exponencialmente, criando uma figura detalhada. O triângulo exibe auto-similaridade, característica típica de fractais, e possui uma dimensão fractal aproximada de 1,585. À medida que as iterações progredem, sua área tende a zero, mas o perímetro aumenta exponencialmente. O triângulo é frequentemente usado em computação para ensinar recursão e também aparece na arte devido à sua estética simétrica. Além disso, é uma versão bidimensional de fractais como a esponja de Menger.

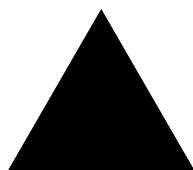


Figura 88: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 0$.

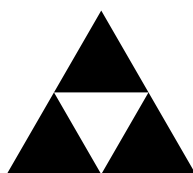


Figura 89: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 1$.



Figura 90: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 2$.

ⁱⁱ Wacaw Sierpiński era polonês. Ele nasceu em Varsóvia, no dia 14 de março de 1882, e faleceu na mesma cidade em 21 de outubro de 1969.



Figura 91: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 3$.

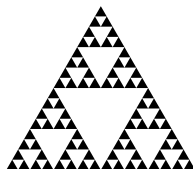


Figura 92: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 4$.

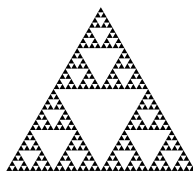


Figura 93: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 5$.

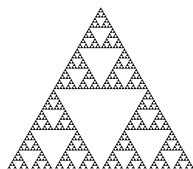


Figura 94: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 6$.

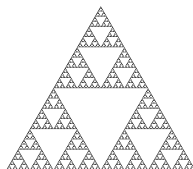


Figura 95: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 7$.

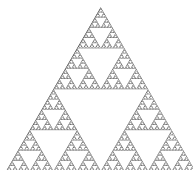


Figura 96: Triângulo de Sierpinski estágio $n = 8$.

ÍNDICE

Símbolos

Álgebra Linear, 76
Órbita, 19, 21, 23, 33, 38,
221, 223
Órbitas, 30, 95
Schwarziano, 153

A

Algoritmo De Euclides
Algoritmo Das
Divisões
Sucessivas 206
Anosov, 9
Aproximação sucessiva
de Newton, 6
Aproximação sucessiva
de Newton -
palpite x_1 , 6
Arnold, 8
Arquimedes, 7
Arybhata, 7
Atrator, 37, 40

B

Bartolomeu Velho, 4
Base Nacional
Comum Curricular
198
Bifurcações, 15

Briott-Ruffini, 56, 236

C

Caos, 9, 15
Características
Variacionais 198
Caso 1 Solução da eq. dif.
não-
homogênea, 61
Caso 2 Solução da eq. dif.
não-
homogênea, 62
Catástrofes, 15
Classificação
Pontos Fixos 33
Clássico modelo de
Fibonacci -
equação de
diferença de
segunda
ordem, 22
Cláudio Ptolomeu, 4
Coeficiente Binomial, 87
Competências Da
BNCC, 198
Composição
Funcional, 58
Condição
De Estabilidade 18
De Instabilidade 18

Conjunto Fundamental De
Soluções, 66

Cálculo

Diferencial E Integral
233

Cálculo Diferencial, 53

D

Definição de Caos, 16
Determinantes, 78
Devaney (1989) e May
(1976), 139
Diagrama
Cobweb 95
Diagrama De
Bifurcação, 247
Dinâmica
Caótica 25

E

Efeito
Borboleta 139
Catastrófico 139
Eniac, 8
Epícculo da Órbita, 5
Eq. Lin. Homogênea com
coef. constantes
de ordem k , 82
Equação

De Diferença De	Não-autônomas	31	Fibonacci -	
Primeira Ordem	Equivalência entre taxas		Quando n é	
Não Linear	de juros, 104		par, 89	
Não Linear	Estabilidade, 32, 33, 95,		Fórmula fechada para a	
Equação	96, 116, 200, 202,		sequência de	
Característica, 82	209		Fibonacci -	
Equação	Euler, 17		Quando n é	
característica, 82	Expansão		ímpar, 90	
Equação da reta	Em Série De Taylor		Fórmula para	
tangente, 211	243		financiamento	
Equação de Diferenças	F		com prestações	
Primeira Ordem	Factual e Procedimen-		fixas, 108	
31	tal, 198		G	
equação de diferenças, 31	Feigenbaum, 9		Geometria Analítica, 12	
Equação de diferenças	Fenômeno		Google	
linear de ordem	Exclusivo das		Planilhas	247
k , 67	Equações a		Sheets	247
Equação de Malthus	Diferenças	37	H	
(1798), 129	Fractais, 15		Hausdorff, 9	
Equação de Ricker, 132	Função Afim, 37		Henri Poincaré, 3	
Equação do tipo Sturm-	Função Quadrática, 148		I	
Liouville, 169	Funções Automórficas, 11,		Isaac Newton, 5, 53	
Equação geral das	12		Iterar, 59	
cônicas, 12	Fórmula de		Itinerários	
Equação Logística de	recorrência, 208		Formativos	192
May, 133	Fórmula do		L	
Equação Logística de	orçamento, 215		Lema de Abel, 77	
Verhulst	Fórmula do orçamento de		Livro Aryabhataiya, 7	
(1838), 130	recorrência, 216		Lotka, 117	
Equação na forma	Fórmula fechada para a			
resolutiva, 68	sequência de			
Equações	Fibonacci, 86			
Diferenciais Suaves	Fórmula fechada para a			
37	sequência de			
Equações a Diferenças				
Autônomas				
31				

- M**
- Malthus, 117
- Mandelbrot, 8
- Mapa da Tenda, 115
- Mapa Logístico, 115
- MAPPAS, 192
- Matemática Discreta, 237
- May, 117
- MDC
- Máximo Divisor
- Comum 206
- Modelagem
- Matemática, 203
- Método
- Da Exaustão 7
- Aproximações
- Sucessivas de
- Newton 53
- Da Conjectura 57
- Da Exaustão 4
- Da Integração 4
- Das Aproximações
- Sucessivas 6
- De Newton-Raphson
- 56
- Newton-Raphson 50
- Método de
- Newton-Raphson
- (Cômputo do zero
- de funções), 55
- N**
- Neutro, 40
- Newton-Raphson, 17
- Nicolau Copérnico, 4
- Notação para equações
- de diferenças, 18
- Notação para equações
- de diferenças
- alternativa, 18
- Não-hiperbólico, 37
- Número Binomial, 86
- Números
- Incomensuráveis 4
- Quadrados Perfeitos 4
- Racionais Diádicos
- 127
- O**
- Observações
- Astronômicas
- Periódicas 3
- Operador Duplo
- Somatório e
- Produtório 60
- Orbis, 4
- P**
- Pearl e Reed, 117
- Picard, 17
- Pitágoras, 4
- Plano De Aula, 198
- Polinômio
- De Taylor 243
- Ponto Fixo, 32–34, 37, 38,
- 40, 96, 101, 209,
- 212
- Ponto fixo atrator, 100
- Ponto Fixo Eventual, 38
- Pontos Fixos, 118
- Não-Hiperbólicos 153
- Problema dos Três
- Corpos, 6
- Propriedade da Soma da
- população de n
- casais de coelhos
- (Fibonacci), 22
- Q**
- Quadrática
- De Primeira Ordem
- Unidimensional
- 14
- R**
- Raízes Características, 82
- Raízes distintas, 85
- Recorrência de primeira
- ordem não
- homogênea, 57
- Relação
- Schwarziano e
- Terceira Derivada
- 169
- René Thom, 9
- Repulsor, 37, 40
- Resumo dos critérios e
- teoremas de
- estabilidade dos
- pontos fixos, 147
- Robert May, 132

S	Solução de recorrências	De Maclaurin	245
	lineares de	Série de Taylor,	32
Sarrus, 75	segunda ordem	Séries infinitas de	
Schwarziano, 167	homogêneas com	Arquimedes -	
Sequência De	raízes	Soma	
Fibonacci, 85	características de	Definida,	234
Seções cônicas	multiplicidade		
Newtonianas em	dupla, 94	T	
coordenadas	Solução geral com raízes	Teorema	
polares, 11	múltiplas, 85	De Li e Yorke	127
Sistema de Lotka-Volterra	Solução geral eq. dif.	De Singer	175
(discreti-	lineares de ordem	De Taylor	32, 243
zado), 131	k, 81	Resto De Lagrange	
Sistema Dinâmico	soluções da recorrência	155, 157	
Discreto	do orçamento	Do Valor Médio	38
Pontos Fixos	familiar, 221	Dos Multiplicadores	
17	Soma n naturais, 235	34	
Sistema Geocêntrico, 5	Soma n quadrados, 236	Teorema de Taylor, 245	
Sistema Linear, 237	Soma n quadrados forma	Teoria	
Sistemas	não fatorada, 236	Dos Sistemas	
Dinâmicos Discretos	Soma definida de n	Dinâmicos	3
15	termos do tipo	Trajetórias, 198	
Sistemas Dinâmicos, 9,	$k \cdot a^k$, 242	Transformação de	
15, 16, 18, 31, 57,	Soma definida de quarta	Möbius, 173	
115, 193, 199,	ordem, 239	Transformação do Capital	
200, 203, 209	Soma definida P.G de n	Principal a regime	
Discretos 29, 30, 32,	termos, 240, 241	de juros	
33, 198	Soma dos n primeiros	compostos	
Discretos Em	cubos, 238	“i”, 106	
Finanças	Somas		
103	Definidas	U	
Sistemas Dinâmicos	233	Unidimensional, 133	
Discretos	Super		
25	Atrator		
Smale, 8	33		
Solução da eq. de dif.	Super-Atrator, 37, 40		
linear homogênea	Série		
de ordem k, 76			

V		W		Eixo Y	139
Valor Inicial, 59		Wronskiano, 170		Z	
Variação		X		Zero, 110, 215, 240	
Instantânea	198			Zeros Da Função, 48	
Média	198	X		Zeros De Funções, 53	
Relativa	198	X		Polinomiais	53
Simples	198	Eixo X	139		
Variável Discreta, 16		Y		Órbita, 4	
Verhulst, 117, 132					
Volterra, 117		Y			

ÍNDICE DE FÓRMULAS

- Aproximação sucessiva de Newton, 6
- Aproximação sucessiva de Newton - palpite x_1 , 6
- Caso 1 Solução da eq. dif. não-homogênea, 61
- Caso 2 Solução da eq. dif. não-homogênea, 62
- Clássico modelo de Fibonacci - equação de diferença de segunda ordem, 22
- Coefficiente Binomial, 87
- Eq. Lin. Homogênea com coef. constantes de ordem k , 82
- Equação característica, 82
- Equação da reta tangente, 211
- Equação de diferenças linear de ordem k , 67
- Equação de Malthus (1798), 129
- Equação de Ricker, 132
- Equação do tipo Sturm-Liouville, 169
- Equação geral das cônicas, 12
- Equação Logística de May, 133
- Equação Logística de Verhulst (1838), 130
- Equação na forma resolutive, 68
- Equivalência entre taxas de juros, 104
- Função Quadrática, 148
- Fórmula de recorrência, 208
- Fórmula do orçamento, 215
- Fórmula do orçamento de recorrência, 216
- Fórmula fechada para a sequência de Fibonacci, 86
- Fórmula fechada para a sequência de Fibonacci - Quando n é par, 89
- Fórmula fechada para a sequência de Fibonacci - Quando n é ímpar, 90
- Fórmula para financiamento com prestações fixas, 108
- Fórmulas, 270
- Lema de Abel, 77
- Método de Newton-Raphson (Cômputo do zero de funções), 55
- Notação para equações de diferenças, 18
- Notação para equações de diferenças alternativa, 18
- Ponto fixo atrator, 100

Propriedade da Soma da população de n casais de coelhos (Fibonacci), 22

Raízes distintas, 85

Recorrência de primeira ordem não homogênea, 57

Resumo dos critérios e teoremas de estabilidade dos pontos fixos, 147

Seções cônicas Newtonianas em coordenadas polares, 11

Sistema de Lotka-Volterra (discretizado), 131

Solução da eq. de dif. linear homogênea de ordem k , 76

Solução de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com raízes características de multiplicidade dupla, 94

Solução geral com raízes múltiplas, 85

Solução geral eq. dif. lineares de ordem k , 81

soluções da recorrência do orçamento familiar, 221

Soma n naturais, 235

Soma n quadrados, 236

Soma n quadrados forma não fatorada, 236

Soma definida de n termos do tipo $k \cdot a^k$, 242

Soma definida de quarta ordem, 239

Soma definida P.G de n termos, 240, 241

Soma dos n primeiros cubos, 238

Séries infinitas de Arquimedes - Soma Definida, 234

Teorema de Taylor, 245

Transformação de Möbius, 173

Transformação do Capital Principal a regime de juros compostos “i”, 106