UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus Presidente Prudente

Ana Laura da Silva Neves

Desenhando sequências numéricas: encontro entre a Matemática e a Arte

Presidente Prudente

2024

Ana Laura da Silva Neves

Desenhando sequências numéricas: encontro entre a Matemática e a Arte

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Presidente Prudente.

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Nogueira.

Presidente Prudente

2024

N518d

Neves, Ana Laura da Silva

Desenhando sequências numéricas: encontro entre a Matemática e a Arte / Ana Laura da Silva Neves. -- Presidente Prudente, 2024

57 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientador: José Roberto Nogueira

1. Sequências numéricas. 2. Mosaico. 3. Interdisciplinaridade. 4. Metodologia ativa. 5. Aluno protagonista. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de São José do Rio Preto

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: "Desenhando sequências numéricas: encontro entre a Matemática e a Arte”

AUTORA: ANA LAURA DA SILVA NEVES

ORIENTADOR: JOSÉ ROBERTO NOGUEIRA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JOSÉ ROBERTO NOGUEIRA (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP/Câmpus de Presidente Prudente

Prof. Dr. SUETONIO DE ALMEIDA MEIRA (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP/Câmpus de Presidente Prudente

Profa. Dra. DAYENE MIRALHA DE CARVALHO SANO (Participaçao Presencial)
Núcleo de Educação à Distância-NEAD / Universidade do Oeste Paulista-UNOESTE

São José do Rio Preto, 26 de setembro de 2024

Elisandra Ramos Murgia de Lima:41330945816

Assinado de forma digital por Elisandra Ramos Murgia de Lima:41330945816
Dados: 2024.10.10 10:54:24 -03'00'

Assistente Adminstrativo II
Seção Técnica de Pós-Graduação

Ana Laura da Silva Neves

Desenhando sequências numéricas: encontro entre a Matemática e a Arte

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Roberto Nogueira
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente

Profª. Drª. Dayene Miralha de Carvalho Sano
Universidade do Oeste Paulista – Unoeste

Presidente Prudente

2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as oportunidades que me foram concedidas durante minha jornada até aqui.

Agradeço aos meus pais, Adilson e Ana Maria, por serem meu apoio e motivação desde os primeiros passos e a cada desafio subsequente. Refúgio quando precisei de acalento e inspiração quando precisei seguir em frente. Ao meu irmão Augusto, por toda parceria, gentileza e momentos especiais. E, juntamente a eles, à toda minha família, avós, tios e tias, primas e primos, por serem minha base e a representação do que é o amor.

A todos os professores do ensino fundamental e do ensino médio por servirem de inspiração à profissão, em especial aos de Matemática, José Luis, Márcia Maram e Elisa.

Agradeço aos amigos Anielly, Geovana, Giovana, Maria Paula, Ricardo, Kauan, Felipe, Gabriel, Larissa Castilho, André, Ângela, Caio e Naiara, por toda paciência e suporte para que tudo fluísse da melhor maneira possível. Aos amigos de infância, Guilherme, Lucas Edson, Maila e Patricia, muito obrigada por serem os primeiros melhores amigos e me ensinarem o valor da amizade de forma espontânea.

Aos amigos de graduação da FCT UNESP, Guilherme, Luiz Fernando, Alex, Maria Carolina, Thiago, Eduardo, Felipe Itapeva, Dinho, Cristiam, Bruno, que partilharam dificuldades e momentos especiais comigo.

Às meninas da República das Bocas, Thais, Letícia e Carol, por se tornarem parte da minha família desde quando moramos juntas até hoje.

Aos meus professores da graduação por todo conhecimento repassado.

Ao meu amigo, Diego Aleixo, por compartilhar as angústias e as vitórias do mestrado.

Aos meus professores do mestrado Cristiane Nespoli, José Gilberto Rinaldi, Benini (in memoriam), Ronaldo Correia, Suetônio Meira, Tatiana Miguel Rodrigues e Valter Locci, pelo conhecimento transmitido, pela determinação, persistência e fé durante as aulas no período pandêmico.

Agradeço muito à minha psicóloga Chris Pitarelo, pelas orientações e forças quando precisei. Ao amigo Ewerton Tikin, por toda gentileza, compreensão e palavras de fé e conforto.

Um agradecimento especial ao meu orientador, professor José Roberto,

pessoa por quem tenho grande admiração e carinho, por toda paciência e por não me deixar desistir.

RESUMO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) deixa estabelecido competências e habilidades a serem desenvolvidas durante cada etapa da educação básica e neste trabalho destacaremos as habilidades que envolvem as sequências numéricas. Além de nortear os currículos do Brasil com o que deve ser aprendido em cada ano escolar em cada disciplina, também está previsto na BNCC o trabalho interdisciplinar, que consiste em duas ou mais disciplinas de mesma natureza ou naturezas diferentes trabalhando em conjunto para o desenvolvimento do conhecimento, assim o aluno estabelece conexões de temas em conceitos de diferentes disciplinas. A interdisciplinaridade é a base deste trabalho. Aqui serão estudadas as teorias sobre as sequências numéricas e serão apresentadas propostas de aulas pautadas na interdisciplinaridade. Conectaremos a Matemática com a Arte com o intuito de melhorar a compreensão e a construção do conhecimento dos alunos sobre sequências, além de ser uma alternativa de aula mais atrativa do que uma aula expositiva tradicional. Pensando nisso, trouxemos a sugestão de construir mosaicos como forma de representar uma sequência numérica. As propostas de aula visam contemplar os anos e séries das habilidades previstas, mas não impede que sejam trabalhadas em outros anos e séries desde que o aluno já tenha o conhecimento prévio necessário em cada caso.
Palavras-chave: Sequências numéricas. Mosaico. Interdisciplinaridade. Metodologia ativa. Aluno protagonista.

ABSTRACT

The National Common Curricular Base (BNCC) establishes the competencies and skills to be developed at each stage of basic education, and in this work, we will highlight the skills related to numerical sequences. In addition to guiding Brazil's curricula on what should be learned each year in each subject, the BNCC also provides for interdisciplinary work, which involves two or more subjects of the same or different natures working together to develop knowledge, allowing students to make connections between themes and concepts from different disciplines. Interdisciplinarity is the foundation of this work. Here, we will study the theories about numerical sequences and present lesson proposals based on interdisciplinarity. We will connect Mathematics with Art to enhance students' understanding and construction of knowledge about sequences, offering a more engaging alternative to traditional expository lessons. With this in mind, we suggest constructing mosaics as a way to represent a numerical sequence. The lesson proposals are designed to cover the years and grades specified in the skills, but they can also be adapted for other years and grades, provided that students have the necessary prior knowledge in each case.

Keywords: Numerical sequences. Mosaic. Interdisciplinarity. Active methodology. Student protagonist.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Você consegue se lembrar do dia em que foi apresentado à Matemática? Espero que depois de refletir, você tenha concluído que não, pois muito dificilmente seria possível. É como perguntar a uma pessoa se ela se lembra do dia em que descobriu que poderia usar os dentes para mastigar. São processos que acontecem durante a vida, mas que não conseguimos identificar o "*start*".

A Matemática se faz presente em nossos dias, independe se conseguimos perceber ou não. Está presente quando precisamos calcular o dinheiro do troco de uma compra ou quando usamos o pensamento lógico para resolver um problema simples do cotidiano como organizar as tarefas do dia, visto que certos compromissos possuem hora marcada.

Assim acontece também em muitas vertentes da Arte onde a Matemática se faz presente, às vezes de forma intuitiva e discreta como na música, e aqui podemos citar ritmos, harmonias e estruturas, ou às vezes de forma mais marcante como nas simetrias e obras criadas a partir de padrões geométricos, além de vários outros nichos. Pode-se entender "padrão geométrico" como repetições regulares de formas e podem ser observados em uma variedade de contextos (arte, design, arquitetura, simetrias, sequências numéricas etc.).

Neste trabalho, falaremos sobre sequências numéricas e as possibilidades de trabalhar com elas dentro da sala de aula de forma interdisciplinar utilizando mosaicos.

Primeiramente, será apresentado o estudo de algumas das relações existentes entre Arte e Matemática desde as primeiras civilizações, associando-as com obras e artistas contemporâneos. Em seguida, o foco será na BNCC (Base Nacional Curricular Comum) e nas habilidades que contemplam sequências numéricas.

Nos próximos três capítulos, serão apresentadas as definições, teoremas, demonstrações, resultados importantes e exemplos de sequências numéricas. Além disso, serão destacados alguns tipos de sequências numéricas que são vistas com mais frequência na vida escolar básica de um estudante.

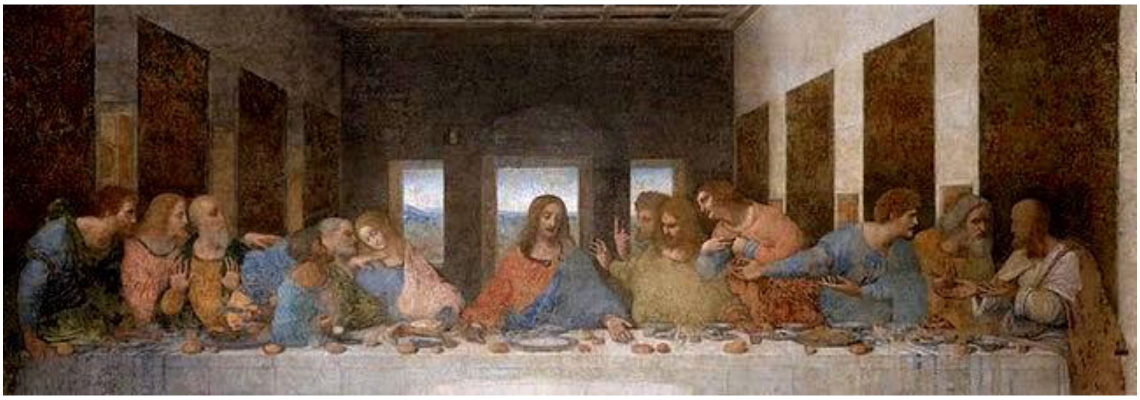
No Capítulo 6, será dada atenção às relações que podem ser estabelecidas entre sequências numéricas e mosaicos dentro das salas de aula. Dois assuntos que, inicialmente não parecem dar as mãos, porém se conectam muito bem quando colocados na mesma proposta de aula.

2. MATEMÁTICA E ARTE

A relação entre Matemática e Arte possui algumas diferentes vertentes, transitando por diversas culturas e períodos históricos. Nos primórdios já é possível observar que as civilizações antigas usavam a Matemática em suas artes e arquitetura, como para a construção das pirâmides do Egito, assim como os gregos utilizavam a geometria para aprimorar a arquitetura de templos e esculturas.

Essa interação segue acontecendo nos próximos períodos da história, mas agora é possível ser notada em diferentes obras de artes visuais e não apenas em arquiteturas, monumentos e esculturas. Observando obras de arte de Leonardo da Vinci, por exemplo, percebe-se uso marcante de proporção, perspectiva, simetria em algumas obras, geometria e profundidade em outras.

Figura 1 - A última ceia. Leonardo da Vinci.



Fonte: Toda Matéria, [s.d.].

Figura 2 - A anunciação. Leonardo da Vinci.

Fonte: História das Artes, 2020.

Nestas duas obras de Da Vinci, vale ressaltar o uso cuidadoso com a geometria para causar ao leitor a sensação de profundidade dos ambientes.

Figura 3 - Mona Lisa. Leonardo da Vinci.

Fonte: Mundo Educação, [s.d.].

Outro exemplo que pode ser observado é a obra Mona Lisa, que é citada frequentemente quando se fala em simetria.

Além dos casos já citados, podemos destacar os mosaicos como parte importante da Arte e relacioná-los com uma parte também importante da Matemática, as sequências numéricas. O mosaico é caracterizado pelo uso de pequenas peças coloridas, que podem ser de diversos materiais, para criar padrões e imagens. Existem desde civilizações muito antigas e teve destaque especial na Grécia Antiga, momento em que os artistas começaram a criar padrões geométricos e imagens figurativas usando as *tesserae*, como são chamadas as peças dos mosaicos. Durante o Império Romano, a técnica passou por adaptações e sofisticações como a introdução de peças de mármore e vidros coloridos, atingindo seu auge.

No Brasil, Roberto Burle Marx, paisagista e artista brasileiro ganhou destaque como mosaicista com a criação do Calçadão de Copacabana, representando ondas abstratas com pedras pretas e brancas e mantendo o paralelismo com as ondas do mar por vários quilômetros ao longo da Praia de Copacabana.

Figura 4 – Calçadão de Copacabana. Roberto Burle Marx.

Fonte: Casa Vogue, 2023.

Além de Burle Marx, podemos citar nomes como Lygia Clark, Aldemir Martins e Cândido Portinari, entre outros, todos artistas brasileiros renomados que possuem obras em mosaicos.

Figura 5 - Painel do Edifício Mira Mar, em Copacabana. Lygia Clark.

Fonte: Semióticas, 2014.

Figura 6 - Painel no condomínio New Horizons, no Alto da Lapa, em São Paulo. Aldemir Martins.

Fonte: Mosaicos do Brasil, 2009.

Figura 7 - Painel “Bandeirantes”, no Hotel Comodoro, em São Paulo. Cândido Portinari

Fonte: Projeto Portinari, [s.d.].

Para orientar os currículos das escolas no país, temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que normatiza e mapeia as competências e habilidades a serem atingidas em cada etapa escolar da criança e do adolescente de acordo as aprendizagens essenciais que lhes são garantidas. A Base estabelece os conteúdos da educação básica que devem ser trabalhados dentro de cada disciplina, mas também define competências gerais para a formação do cidadão nos termos da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), incluindo o desenvolvimento do pensamento crítico, criatividade, comunicação e colaboração.

Previsto na BNCC, “um processo de envolvimento e participação das famílias e da comunidade, referem-se, entre outras ações, a: [...] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares”, neste trabalho veremos como a Matemática e a Arte podem se conectar e contemplar algumas das habilidades previstas para o currículo.

A BNCC é dividida de forma a estruturar as três etapas da Educação

Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Em cada etapa, seguem as competências específicas de cada componente curricular, competências estas que estão separadas por unidade temática, objeto de conhecimento e habilidade. Aqui serão apresentadas as habilidades do Ensino Fundamental – Anos Finais e do Ensino Médio que contemplam o estudo de sequências numéricas, segundo a BNCC.

Ensino Fundamental – Anos Finais			
Ano	**Unidade temática**	**Objeto de conhecimento**	**Habilidade**
7º	Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
7º	Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
7º	Álgebra	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma

			mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
8º	Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
8º	Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Ensino Médio	
Ano	**Habilidade**
1º, 2º, 3º	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

1º, 2º, 3º	(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

3. SEQUÊNCIAS

Pelo dicionário Michaelis da Língua Portuguesa, podemos definir sequência como “série de acontecimentos que se sucedem ininterruptamente ou a pequenos intervalos”, tais acontecimentos podem ser números e então teremos uma série numérica ou sequência numérica.

Neste capítulo, direcionaremos a atenção aos estudos matemáticos sobre sequências numéricas. Serão apresentadas definições, teoremas e demonstrações, alguns resultados importantes e exemplos.

Definimos uma sequência numérica da seguinte forma:

Definição 1*: Uma sequência de números reais é uma função x:* $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ *que a cada número natural n associa um número real* $x_n = x(n)$*, chamado o n-ésimo termo da sequência. Escreve-se* $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ *ou* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ou* (x_n) *para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é* x_n*.*

Ou seja, uma sequência numérica é definida pelos seus termos e pela posição que cada termo ocupa dentro da sequência, podendo assumir algumas classificações como: finita ou infinita (a depender se existe ou não o último termo); crescente, quando o próximo termo, a partir do segundo, é sempre maior do que o seu antecessor; decrescente, quando o próximo termo, a partir do segundo, é sempre menor do que o seu antecessor; oscilante, quando o próximo termo, a partir do segundo, oscila entre maior e menor do que o antecessor; constante, quando o próximo termo é igual ao seu antecessor.

Chamamos uma sequência (x_n) de limitada superiormente (e respectivamente inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ $(x_n \geq c$, respectivamente) para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência (x_n) é limitada quando ela é limitada superior e inferiormente, e então, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2*: Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita convergente se existe* $x \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $x_n \rightarrow x$ *e dizemos que x é limite da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou que* x_n *converge para x quando n tende a mais infinito* $(n \rightarrow +\infty)$*. Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é convergente, dizemos que ela é divergente.*

***Teorema 1**: Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Então para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$.

Logo $\lim x_n \neq b$. ■

***Definição 3**: Dizemos que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se existe uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ crescente tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

***Teorema 2**: Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a.*

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ a subsequência.

Dado qualquer intervalo aberto I de centro a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I.

Em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$ também pertencem a I.

Logo $\lim x_{n_k} = a$. ■

Exemplo 1: Considere a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{1}{n}$ e seu limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tomando a subsequência $x_{2n} = \frac{1}{2n}$, note que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

***Proposição 1**: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência tal que as subsequências $a_n = x_{2n}$ e $a_n = x_{2n+1}$ convergem de forma que $\lim a_n = \lim b_n = L$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e vale $\lim x_n = L$.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$. Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_1$, temos $|x_{2n} - L| = |a_n - L| < \varepsilon$.

Existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_2$, temos $|x_{2n+1} - L| = |b_n - L| < \varepsilon$.

Tome $n_0 = máx\{2n_2 + 1, 2n_1\}$.

Logo, se $n \geq n_0$, temos duas possibilidades: n par e n ímpar.

Se n é par, então $n = 2k$, em que $k \geq n_1$, daí $|x_n - L| = |x_{2k} - L| = |a_k - L| < \varepsilon$.

Se n é ímpar, então $n = 2k + 1$, em que $k \geq n_2$, daí $|x_n - L| = |x_{2k+!} - L| = |b_k - L| < \varepsilon$.

Logo, se $n \geq n_0$, então $|x_n - L| < \varepsilon$. ■

***Teorema 3**: Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim\, x_n$.

Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow\; x_n \in (a-1, a+1)$.

Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$.

Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada. ■

Exemplo 2: Usando ainda $x_n = \frac{1}{n}$ e sabendo que é convergente pois $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Temos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}$ é sempre menor ou igual a 1, visto que n é sempre maior ou igual a 1. Logo, todos os termos de x_n estão no intervalo $[0, 1]$ e, portanto, x_n é limitada.

Chamamos uma sequência (x_n) de monótona quando temos $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n. No primeiro caso, (x_n) é monótona não-decrescente, no segundo, é monótona não-crescente. Ainda pode acontecer $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e então temos uma sequência crescente ou $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência é decrescente.

Toda sequência monótona não-decrescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo. Para que a sequência monótona seja limitada, basta que uma de suas subsequências seja limitada. Então, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma subsequência limitada da sequência monótona não-decrescente (x_n). Temos $x_{n'} \leq c$ para todo $n' \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. Então $x_n \leq x_{n'} \leq c$.

De forma análoga, toda sequência monótona não-crescente é limitada superiormente.

Para que uma sequência seja convergente, é suficiente o seguinte teorema.

***Teorema 4**: Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, não-decrescente, limitada.

Escrevamos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = sup\, X$. Afirmamos que $a = \lim\, x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X.

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} < a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e então $\lim x_n = a$.

Analogamente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim\, x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n. ■

Exemplo 3: Seja a sequência de termo geral dado por $x_n = \sqrt{n}$. Note que x_n é monótona não-decrescente pois temos $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ para todo $n \geq 1$ e limitada, pois, para qualquer n, $x_n \geq 1$, já que $\sqrt{n} \geq 1$ para todo $n \geq 1$. Logo, $x_n = \sqrt{n}$ é convergente.

***Teorema de Bolzano-Weierstrass**: Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Basta mostrar que toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo x_n da sequência é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$.

Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado.

Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente.

Se D for finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$.

Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$.

Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$.

Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente com $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$. ■

Estabeleceremos P como uma propriedade referente aos termos de uma sequência (x_n). Diremos que para todo n suficientemente grande, (x_n) goza da propriedade P para significar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n$ goza da propriedade P.

Exemplo 4: Tomemos a sequência de termo geral dado por $x_n = (-1)^n$. Note que é uma sequência que oscila entre -1 e 1 e, portanto, é limitada. Tomemos então a subsequência $x_{2n} = (1, 1, 1, 1, \dots)$, que por sua vez, é convergente.

***Teorema 5**: Seja $a = lim\ x_n$. Se $b < a$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração: Tomando $\varepsilon = a - b$, temos $\varepsilon > 0$ e $b = a - \varepsilon$.

Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow b < x_n$.

De forma análoga se prova a segunda afirmação. ■

Exemplo 5: Considere $x_n = \frac{n}{n+1}$ e então $a = 1$, pois $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Se $b < a$, então para todo n suficientemente grande, $b < \frac{n}{n+1}$.

Corolário 1: *Seja* $a = lim\ x_n$. *Se* $a > 0$ *então, para todo* n *suficientemente grande, tem-se* $x_n > 0$. *Analogamente, se* $a < 0$ *então* $x_n < 0$ *para todo* n *suficientemente grande.*

Corolário 2: *Sejam* $a = lim\ x_n$ *e* $b = lim\ y_n$. *Se* $x_n \leq y_n$ *para todo* n *suficientemente grande* $a \leq b$. *Em particular, se* $x_n \leq b$ *para todo* n *suficientemente grande, então* $lim\ x_n \leq b$.

Se fosse $b < a$, então tomaríamos $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < a$ e teríamos, pelo Teorema 5, $y_n < c < x_n$ para todo n suficientemente grande, contradizendo a hipótese.

Teorema 6: *Se* $lim\, x_n = lim\, y_n = a$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para todo* n *suficientemente grande, então* $lim\, z_n = a$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$.

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$.

Então $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, logo $\lim z_n = a$. ■

Definição 4: *Uma sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{R}}$ *é definida recursivamente (ou definida por recorrência) quando se pode calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).*

Exemplo 6: A sequência (x_n) dos números ímpares $(1, 3, 5, 7, \ldots)$ pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2$, com $n \geq 1$, com $x_1 = 1$.

4. RECORRÊNCIAS

Conforme a Definição 2 do capítulo anterior, dizemos que uma sequência é definida por recorrência (ou recursivamente) se é possível definir cada termo da sequência a partir do termo anterior, tendo o primeiro termo definido. Como exemplos de sequências de recorrência podemos citar as Progressões Aritméticas, as Progressões Geométricas, Sequência de Fibonacci, entre outras.

Exemplo 7: Qualquer PA (x_n) com razão r, onde $x_1 = a$, pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + r$ com $n \geq 1$.

Exemplo 8: Qualquer PG (x_n) com razão q, onde $x_1 = a$, pode ser definida por $x_{n+1} = x_n \cdot q$ com $n \geq 1$.

Exemplo 9: A sequência (x_n) dos números pares $(2, 4, 6, 8, \ldots)$ pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2$, com $n \geq 1$, com $x_1 = 2$.

Exemplo 10: A sequência de Fibonacci (F_n) onde cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $n \geq 0$, onde $F_0 = F_1 = 1$. Então temos a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$.

4.1 Recorrências lineares de primeira ordem

Uma recorrência é de primeira ordem quando cada termo da sequência é definido em função apenas do termo imediatamente anterior.

Então podemos citar como exemplos de recorrência de primeira ordem as progressões aritméticas ($a_n = a_{n-1} + r$), as progressões geométricas ($a_n = a_{n-1} \cdot q$), os fatoriais ($a_n = a_{n-1} \cdot n$, com $a_1 = 1$), as potências com expoente natural ($a_n = a_{n-1} \cdot a$, com $a_1 = a$).

Note que é necessário conhecer o primeiro termo da sequência e a recorrência.

Chamamos uma recorrência de primeira ordem expressa por x_{n+1} em função de x_n de linear se, e somente se, a função é do primeiro grau.

Exemplo 11: Note que a recorrência $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ é linear, bem como $x_{n+1} = nx_n$, diferente de $x_{n+1} = x_n^2$, que não é uma sequência linear. Além disso, chamamos de homogêneas as recorrências $x_{n+1} = nx_n$ e $x_{n+1} = x_n^2$ por não terem termos independentes de x_n.

Vejamos exemplos de resoluções de recorrências lineares de primeira ordem.

Exemplo 12: Resolva a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, onde $x_1 = 1$.

Solução: Temos então:

$$x_2 = 1x_1$$
$$x_3 = 2x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$x_n = (n-1)x_{n-1}$$

Fazendo as multiplicações, obtemos $x_n = (n-1)!\,x_1$. Como $x_1 = 1$, então $x_n = (n-1)!$.

Exemplo 13: Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$.

Solução: Temos

$$x_2 = 2x_1$$
$$x_3 = 2x_2$$
$$x_4 = 2x_3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$x_n = 2x_{n-1}$$

Multiplicando, temos $x_n = 2^{n-1}x_1$. Como x_1 não foi definido, existem infinitas soluções para $x_n = C \cdot 2^{n-1}$, onde C é uma constante arbitrária.

Exemplo 14: Resolva $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$.

Solução: Temos

$$x_2 = x_1 + 2$$
$$x_3 = x_2 + 2^2$$
$$x_4 = x_3 + 2^3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}$$

Realizando a soma, obtemos

$$x_n = x_1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$
$$x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

Note que o x_n obtido é a soma de uma Progressão Geométrica de razão 2 e $a_1 = 1$, portanto

$$x_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$
$$x_n = 2^n - 1.$$

Exemplo 15: Resolva $x_{n+1} = x_n + n$, $x_1 = 0$.

Solução: Temos

$$x_2 = x_1 + 1$$
$$x_3 = x_2 + 2$$
$$x_4 = x_3 + 3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$x_n = x_{n-1} + (n-1)$$
Somando, obtemos
$$x_n = x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$
$$x_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$
Repare que $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ é soma dos $(n-1)$ termos da Progressão Aritmética de razão 1, logo
$$x_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Teorema 7*: Se a_n é uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$.*

Demonstração: A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$.

Mas $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$.

Logo $g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$. ■

Exemplo 16: Resolva $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 2$.

Solução: Como resolvemos no Exemplo 13, uma solução não-nula para $x_{n+1} = 2x_n$ é $x_n = 2^{n-1}$.

Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$, obtemos $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, então $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$.

E daí
$$y_2 = y_1 + 2^{-1}$$
$$y_3 = y_2 + 2^{-2}$$
$$y_4 = y_3 + 2^{-3}$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}$$
Fazendo a soma
$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)}$$

$$y_n = y_1 + 2^{-1}\frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1}$$
$$y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1$$
Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$. Daí $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

Exemplo 17: Resolva $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, com $x_1 = 2$.

Solução: Temos que uma solução não-nula de $x_{n+1} = 3x_n$ é $x_n = 3^{n-1}$ (ou poderíamos considerar qualquer outra progressão geométrica de razão 3).

Fazendo a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$, obtemos $3^n y_{n+1} = 3^n y_n + 3^n$.

Ou seja, $y_{n+1} = y_n + 1$ e daí y_n é uma progressão geométrica de razão 1.

Logo, $y_n = y_1 + (n-1)1$.

Como $x_n = 3^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = n + 1$.

Portanto, $x_n = (n+1)3^{n-1}$.

4.2 Recorrências lineares de segunda ordem

Uma recorrência linear é de segunda ordem quando cada termo da sequência é definido em função dos dois termos anteriores, como por exemplo a sequência de Fibonacci que é definida por $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Uma sequência linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo
$$f(n)x_n + g(n)x_{n-1} + h(n)x_{n-2} + k(n) = 0$$
onde f, g, h e k são funções com domínio sendo o conjunto dos números naturais e $f(n)$ nunca é nula. Quando $k = 0$, temos uma recorrência homogênea. É necessário estipular os valores dos dois termos iniciais para que a recorrência defina uma sequência.

A recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes é do tipo
$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,$$
onde necessariamente $q \neq 0$, caso contrário teríamos uma recorrência de primeira ordem.

Será associada uma equação característica a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea da forma já definida, com coeficientes constantes. A equação associada é uma equação do segundo grau do tipo $r^2 + pr + q = 0$, e como $q \neq 0$, sabemos que 0 não é raiz da equação característica.

Exemplo 18: A recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ tem equação característica $r^2 = r + 1$.

Resolvendo a equação $r^2 - r - 1 = 0$ utilizando Bhaskara, temos $\Delta = 5$.

Então as raízes são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Teorema 8*: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valos das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e agrupando convenientemente os termos, obtemos

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Exemplo 19: A equação $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ tem $r^2 + 3r - 4 = 0$ como equação característica.

Utilizando Bhaskara, temos $\Delta = 25$ e então $r_1 = 1$ e $r_2 = -4$.

Logo, pelo Teorema 8, todas as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$ são soluções da recorrência $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$.

Teorema 9*: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ e C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Determinemos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

então,

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

e

$$C_2 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

é possível, pois $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja então $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos:

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n$$
$$= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

Sabemos que $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$, pois y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.
Além disso, os dois últimos parênteses são iguais a 0, pois r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.
Ainda temos que $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, logo $z_1 = z_2 = 0$.
Mas se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n. ■

Exemplo 20: Determine o número de Fibonacci F_n definido por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, onde $F_0 = F_1 = 1$.
Temos a equação característica $r^2 = r + 1$ e as raízes $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Então

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Vamos usar $F_0 = F_1 = 1$ para determinar C_1 e C_2.
Obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Logo

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

isto é

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

No caso de as raízes da equação característica serem raízes complexas, a solução $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes arbitrárias pode ser escrita de forma que evite cálculo com complexos.
Usando as raízes na forma trigonométrica, temos:

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \qquad r_2 = \rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta), \; r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta)$$

Logo,

$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n[(C_1 + C_2)\cos n\theta + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} n\theta].$$

Então

$$C_1' = C_1 + C_2 \text{ e } C_2' = i(C_1 - C_2)$$

são novas constantes e a solução pode ser escrita

$$a_n = \rho^n[C_1' \cos n\theta + C_2' \operatorname{sen} n\theta].$$

Exemplo 21: A recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ tem a equação $r^2 + r + 1 = 0$ como equação característica e suas raízes complexas são

$$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

que possuem módulo $\rho = 1$ e argumento $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

Então a solução é

$$x_n = \rho^n[C_1 \cos n\theta + C_2 \operatorname{sen} n\theta] = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}.$$

Teorema 10*: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: Sabendo que as raízes são iguais, então $r = -\frac{p}{2}$.

Substituindo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e agrupando os termos de forma conveniente, obtemos

$$C_1 r^n(r^2 + pr + q) + C_2 n r^n(r^2 + pr + q) + C_2 r^n r(2r + p) =$$
$$C_1 r^n \cdot 0 + C_2 n r^n \cdot 0 + C_2 r^n r \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Teorema 11*: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $C_1 r^n + C_2 n r^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja y_n uma solução qualquer da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Determinando constantes C_1 e C_2 que são soluções do sistema

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 r = y_1 \\ C_1 r^2 + 2C_2 r^2 = y_2 \end{cases}$$

ou seja,

$$C_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{y_2 - r y_1}{r^2}.$$

Como $r \neq 0$, é possível.

Afirmamos que $y_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ para todo n natural.

Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1r^n - C_2nr^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n.
Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n =$$
$$(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1r^n(r^2 + pr + q) - C_2nr^n(r^2 + pr + q) - C_2r^n r(2r + p).$$

Como y_n é solução, então $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.
Se r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$, então o segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero.
O último parênteses também é zero, pois $r = -\frac{p}{2}$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.
Além disso, como $C_1r + C_2r = y_1$ e $C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$.
Mas se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então que $z_n = 0$ para todo n. ■

Exemplo 22: A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ tem como equação caraterística a equação $r^2 - 4r + 4 = 0$.
As raízes da equação são $r_1 = r_2 = 2$ e a solução da recorrência é $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$.

Teorema 12*: Se a_n é solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.*
Demonstração: Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtemos

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ pois a_n é a solução da equação original.
Logo, a equação se transformou em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0. \blacksquare$$

Pelo último Teorema, uma recorrência não-homogênea possui solução formada por duas partes: uma solução qualquer da não-homogênea e a solução homogênea. A solução da não-homogênea é encontrada por tentativas.
Exemplo 23: A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$ tem como equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$ e raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$.
Logo, a solução de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.
Agora tentaremos encontrar uma solução particular t_n para a recorrência

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n.$$

Substituindo t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $n + 3^n$.
Devemos imaginar que t_n é a soma de um polinômio do primeiro grau com uma

exponencial de base 3.

Seja então $t_n = An + B + C3^n$. Substituindo em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$, obtemos

$$3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n.$$

Logo, t_n terá solução se $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ e $-C = 1$.

Portanto, $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{9}$ e $C = 1$.

Então

$$t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

Exemplo 24: A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$ tem como equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$ com raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$.

Portanto a solução da equação homogênea é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.

Tentaremos então descobrir uma solução particular t_n para a recorrência

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n.$$

Substituindo t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $1 + 2^n$.

Podemos imaginar que t_n seja a soma de um polinômio constante com uma exponencial de base 2, então tentaremos $t_n = A + B2^n$.

Substituindo em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$, obtemos $3A = 1 + 2^n$, mas a recorrência não admite solução da forma $t_n = A + B2^n$.

A ideia era tentar uma constante A para obter uma constante a ser igualada a 1 e tentar $B2^n$ para gerar uma exponencial a ser igualada a 2^n, então o termo $B2^n$ não poderia cumprir seu papel. $B2^n$ é solução da homogênea, obtida quando $C_1 = B$ e $C_2 = 0$, e fazendo a substituição na equação, resultaria em 0 e não em uma exponencial que fosse possível igualar a 2^n.

Podemos agora multiplicar o bloco por n e fazer a tentativa com $t_n = A + Bn2^n$.

Fazendo a substituição, obtemos $3A - B4B2^n = 1 + 2^n$.

Portanto, $3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$, $-4B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{4}$ e $t_n = \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}$.

Então a solução da recorrência é a soma de h_n com t_n, logo, $x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}$.

5. SEQUÊNCIAS ESPECIAIS

Pode-se obter os termos de uma sequência numérica a partir de três formas: por recorrência, através do termo geral (ou lei de formação), ou ainda por alguma particularidade dos termos. Aqui estão apresentados alguns exemplos de sequências que são estudadas com mais atenção no ensino básico.

5.1 Progressão Aritmética

Definição 5: *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão aritmética e representada pela letra* r.

Exemplo: A sequência $(2, 4, 6, 8, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética infinita e crescente com $r = 2$.

Esta sequência pode ser definida de três formas diferentes:

- Recursivamente: $a_n = a_{n-1} + r$, onde $a_1 = 2$. E então:

$a_1 = 2.$

$n = 2 \;\Rightarrow\; a_2 = a_1 + 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 2 + 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 4.$

$n = 3 \;\Rightarrow\; a_3 = a_2 + 2 \;\Rightarrow\; a_3 = 4 + 2 \;\Rightarrow\; a_3 = 6.$

$n = 4 \;\Rightarrow\; a_4 = a_3 + 2 \;\Rightarrow\; a_4 = 6 + 2 \;\Rightarrow\; a_4 = 8.$

Portanto $(2, 4, 6, 8, \ldots, a_n, \ldots)$.

- Expressa a partir do termo geral: $a_n = a_1 + (n-1)r$, onde $a_1 = 2$.

$a_1 = 2.$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 + (2-1)2 \Rightarrow a_2 = 2 + 1 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 4.$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 + (3-1)2 \Rightarrow a_3 = 2 + 2 \cdot 2 \Rightarrow a_3 = 6.$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 + (4-1)2 \Rightarrow a_4 = 2 + 3 \cdot 2 \Rightarrow a_4 = 8.$

Portanto $(2, 4, 6, 8, \ldots, a_n, \ldots)$.

- Particularidade dos termos: sequência dos números naturais pares.

Portanto $(2, 4, 6, 8, \ldots, a_n, \ldots)$.

5.2 Progressão Geométrica

Definição 6: *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante. A constante é chamada de razão da progressão geométrica e representada pela letra q.*

Exemplo: A sequência $(1, 2, 4, 8, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma progressão geométrica infinita e crescente com $q = 2$.

Neste caso, a sequência pode ser definida:

- Recursivamente: $a_n = a_{n-1} \cdot q$, onde $a_1 = 1$. E então:

$a_1 = 1.$

$n = 2 \;\Rightarrow\; a_2 = a_1 \cdot 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 1 \cdot 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 2.$

$n = 3 \;\Rightarrow\; a_3 = a_2 \cdot 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 2 \cdot 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 4.$

$n = 4 \;\Rightarrow\; a_4 = a_3 \cdot 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 4 \cdot 2 \;\Rightarrow\; a_2 = 8.$

Portanto $(1, 2, 4, 8, \ldots, a_n, \ldots)$.

- Expressa a partir do termo geral: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde $a_1 = 1$.

$a_1 = 1.$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 1 \cdot 2^{(2-1)} \Rightarrow a_2 = 1 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 2.$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 1 \cdot 2^{(3-1)} \Rightarrow a_3 = 1 \cdot 4 \Rightarrow a_3 = 4.$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 1 \cdot 2^{(4-1)} \Rightarrow a_3 = 1 \cdot 8 \Rightarrow a_4 = 8.$

Portanto $(1, 2, 4, 8, \ldots, a_n, \ldots)$.

- Particularidade dos termos: sequência dos números que são resultados das potências de base 2 com expoentes naturais.

Portanto $(1, 2, 4, 8, \ldots, a_n, \ldots)$.

5.3 Sequência de Fibonacci

Definição 7: *A sequência de Fibonacci trata-se da sequência de números tais que o primeiro e o segundo termos são iguais a 1 e todo termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos que o antecedem. Sendo assim:*

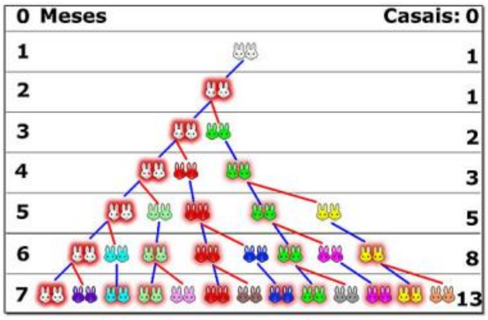
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall\, n > 2 \end{cases}$$

Temos então $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$.

A sequência ganhou notoriedade em conjunto com o problema da reprodução dos coelhos. Um par de coelhos dá à luz a um novo par cada mês, que se reproduzirá e gerará um novo par no segundo mês. Considerando que os coelhos não morrem e que cada par gera um novo par a cada mês, quantos pares de coelho haverá após n meses?

O resultado do problema é a própria sequência de Fibonacci.

Figura 8 - Ilustração do problema da reprodução dos coelhos



Fonte: Escola Educação, 2020.

Uma curiosidade interessante é a relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Podemos mostrar que ϕ é o limite da sequência $\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ quando n tende ao ∞.

Para demonstrar esse resultado, provaremos alguns lemas.

Lema 1: *A sequência φ_n é limitada e $1 < \varphi_n < 2$.*

Demonstração 8: Observe que $\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n+F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$. Lembre-se que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Agora, observando o fato de que a sequência de Fibonacci é crescente, segue que $\frac{F_{n-1}}{F_n} < 1$ donde segue que $1 < \varphi_n < 2$, $\forall\, n \geq 1$, logo é uma sequência limitada. Portanto se existir o limite, o valor deve estar no intervalo $I = [1, 2]$. ■

Lema 2: *A subsequência de φ_{2n} dos índices pares de φ_n satisfaz $\varphi_{2n} > \varphi_{2n+2}, \forall\, n \geq 1$, ou seja, é decrescente.*

Demonstração 9: Vamos fazer a demonstração por indução sobre n.

Observe inicialmente que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $\varphi_2 > \varphi_4 \Leftrightarrow 2 > \frac{3}{2}$.

Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para $n = k$, então:

$\varphi_{2k} > \varphi_{2k+2} \Leftrightarrow \frac{F_{2k+1}}{F_{2k}} > \frac{F_{2k+3}}{F_{2k+2}} \Leftrightarrow F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} > F_{2k} \cdot F_{2k+3}$ (Hipótese de Indução)

Mostremos agora que a afirmação é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$\varphi_{2k+2} > \varphi_{2n+2} \Leftrightarrow F_{2k+3} \cdot F_{2k+4} > F_{2k+2} \cdot F_{2k+5}$$

De fato:

$$F_{2k+3} \cdot F_{2k+4} = (F_{2k+2} + F_{2k+1}) \cdot (F_{2k+2} + F_{2k+3}) =$$
$$= F_{2k+2}^2 + F_{2k+2}F_{2k+3} + F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+1}F_{2k+3} =$$
$$= F_{2k+2}(F_{2k+2} + F_{2k+3}) + F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k+1}F_{2k+3} >$$
$$> F_{2k+2}(F_{2k+2} + F_{2k+3}) + F_{2k}F_{2k+3} + F_{2k+1}F_{2k+3} =$$
$$= F_{2k+2}F_{2k+4} + F_{2k+3}(F_{2k+1}F_{2k}) = F_{2k+2}F_{2k+4} + F_{2k+3}F_{2k+2} =$$
$$= F_{2k+2}(F_{2k+4} + F_{2k+3}) = F_{2k+2}F_{2k+5}$$

Pelo Princípio da Indução Finita, segue que (φ_{2n}) é uma sequência decrescente.

■

***Lema 3**: A subsequência de (φ_n) dos índices ímpares dada por (φ_{2n+1}) satisfaz $\varphi_{2n-1} < \varphi_{2n+1}$, $\forall\, n \geq 1$ ou seja, é crescente.*

Demonstração 10: Faremos a demonstração por indução sobre n.

Observamos inicialmente que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, ou seja:

$$\varphi_1 < \varphi_3 \Leftrightarrow 1 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 < 1{,}5$$

Suponha que a afirmação é verdadeira para $n = k$, então:

$\varphi_{2k-1} < \varphi_{2k+1} \Leftrightarrow \frac{F_{2k}}{F_{2k-1}} < \frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}} \Leftrightarrow F_{2k} \cdot F_{2k+1} < F_{2k-1} \cdot F_{2k+2}$ (Hipótese de Indução)

Mostremos agora que a afirmação é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$\varphi_{2k+1} < \varphi_{2k+3} \Leftrightarrow \frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}} < \frac{F_{2k+4}}{F_{2k+3}} \Leftrightarrow F_{2k+2} \cdot F_{2k+3} < F_{2k+1} \cdot F_{2k+4}$$

De fato:

$$F_{2k+2} \cdot F_{2k+3} = (F_{2k+1} + F_{2k}) \cdot (F_{2k+2} + F_{2k+1}) =$$
$$= F_{2k+1}^2 + F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k}F_{2k+2} + F_{2k}F_{2k+1} <$$
$$< F_{2k+1}^2 + F_{2k+1}F_{2k+2} + F_{2k}F_{2k+2} + F_{2k-1}F_{2k+2} =$$
$$= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}(F_{2k-1} + F_{2k}) + F_{2k+1}F_{2k+2} =$$
$$= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}F_{2k+1} + F_{2k+1}F_{2k+2} =$$
$$= F_{2k+1}(F_{2k+2} + F_{2k+1}) + F_{2k+1}F_{2k+2} = F_{2k+1}F_{2k+3} + F_{2k+1}F_{2k+2} =$$

$$= F_{2k+1}(F_{2k+2} + F_{2k+3}) = F_{2k+1}F_{2k+4}$$

Pelo Princípio da Indução Finita, segue que (φ_{2n-1}) é uma sequência crescente. ■

Lema 4*: As subsequências (φ_{2n}) e (φ_{2n+1}) são convergentes e convergem para o mesmo limite.*

Demonstração 11: Pelo lema 3 e o lema 2, temos que ambas as sequências são monótonas e pelo fato de (φ_n) ser limitada, ambas também são limitadas. Logo ambas são monótonas e limitadas e, portanto, convergentes. Suponha agora que $\lim \varphi_{2n} = a$ e que $\lim \varphi_{2n+1} = b$.

Temos que:

$\varphi_{2n} = 1 + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} = 1 + \frac{1}{\varphi_{2n-1}}$ e $\varphi_{2n+1} = 1 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{\varphi_{2n}}$

Passando os limites em ambas as igualdades ficamos com:

$$\lim \varphi_{2n} = 1 + \frac{1}{\lim \varphi_{2n-1}} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{b} \Leftrightarrow ab = b + 1$$

$$\lim \varphi_{2n+1} = 1 + \frac{1}{\lim \varphi_{2n}} \Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{a} \Leftrightarrow ab = a + 1$$

donde: $a = b$.

Assim $\lim \varphi_{2n} = \lim \varphi_{2n+1} = a$. ■

Teorema 7*: A sequência $\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ converge para $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Demonstração 12: Pelo lema 3 vimos que a subsequência dos índices pares φ_{2n} e a subsequência dos índices ímpares φ_{2n+1} convergem para o mesmo limite, ou seja, $\lim \varphi_{2n} = \lim \varphi_{2n+1} = a$. Por um resultado conhecido de análise (Elon, Lima – Análise na reta – Coleção Matemática Universitária) temos que a sequência $\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ também converge para a, ou seja, $\lim \varphi_n = a$. Usando a igualdade: $\varphi_n = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\varphi_{n-1}}$ e passando o limite temos que:

$$\lim \varphi_n = 1 + \frac{1}{\lim \varphi_{n-1}} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = a + 1$$

De $a^2 = a + 1$ temos, resolvendo a equação do segundo grau em que a, que $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ como queríamos demonstrar. ■

6. PROPOSTAS PEDAGÓGICAS

Neste capítulo serão apresentadas sequências didáticas como propostas de aula em que Matemática e a Arte se unem para uma finalidade comum: construção de conhecimento. Sabendo que a Matemática muitas vezes é vista como “bicho-papão” das disciplinas, a Arte dá suporte para a abstração que a Matemática exige, podendo então tornar mais leve o tema de cada aula.

6.1 Plano de aula: Sequências numéricas

Disciplina: Matemática.

Professor: Ana Laura.

Ano/Série: 7º ano EF.

Título da Atividade: Seu nascimento é uma arte!

Número de aulas previstas: 2 aulas.

Habilidade: (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

Objeto de aprendizagem: Sequências numéricas.

Questão disparadora: Você já pensou em poder personalizar o seu dia e transformar a data do seu nascimento em uma arte?

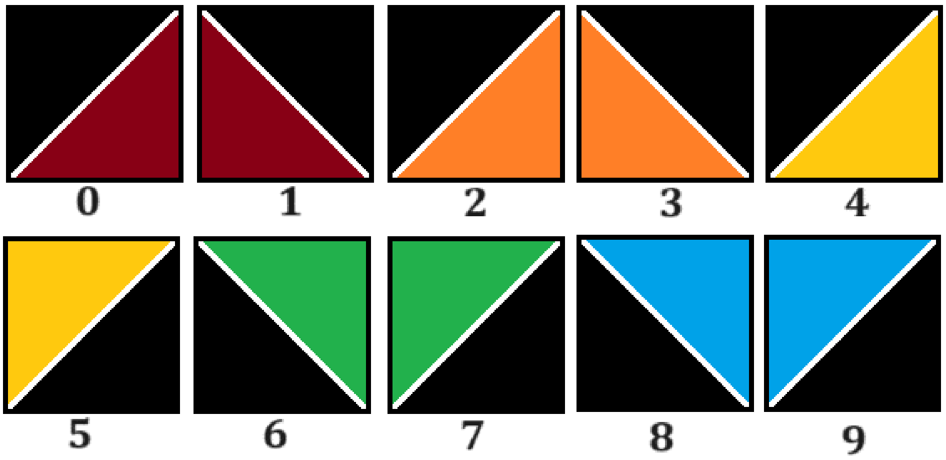
Desenvolvimento:

<u>Momento 1:</u> Inicialmente será discutida a ideia de sequência numérica e em seguida o professor deverá propor vários tipos de sequências numéricas diferentes e solicitar que os alunos também sugiram alguns exemplos. As primeiras sequências propostas não precisam assumir padrões, mas é interessante que durante o debate, o professor já introduza a ideia de seguir uma lei de formação para montar algumas sequências.

<u>Momento 2:</u> Após o debate, o professor deverá chamar a atenção dos alunos ao fato de que uma sequência numérica nada mais é do que uma sequência formada por números e, portanto, cada um pode determinar um critério próprio para a construção de uma sequência com números. Agora, o professor deverá sugerir uma sequência numérica formada pelos números do dia do nascimento de cada um repetidamente. Por exemplo, uma pessoa que nasceu no dia 27 de

março de 1984 (27/03/1984), formará a sequência $(2,7,0,3,1,9,8,4,2,7,0,3,1,9,8,4,2,\ldots)$. Com o objetivo de explorar as sequências que foram geradas, é interessante que o professor solicite aos alunos que identifiquem os termos de determinadas posições, por exemplo “Qual é o 4º termo da sua sequência? E o 12º termo? E o 228º termo?”

<u>Momento 3:</u> Com as sequências montadas, os alunos deverão observar as figurinhas apresentadas pelo professor e definir 10 figurinhas, cada uma para representar cada um dos algarismos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0). Por exemplo:

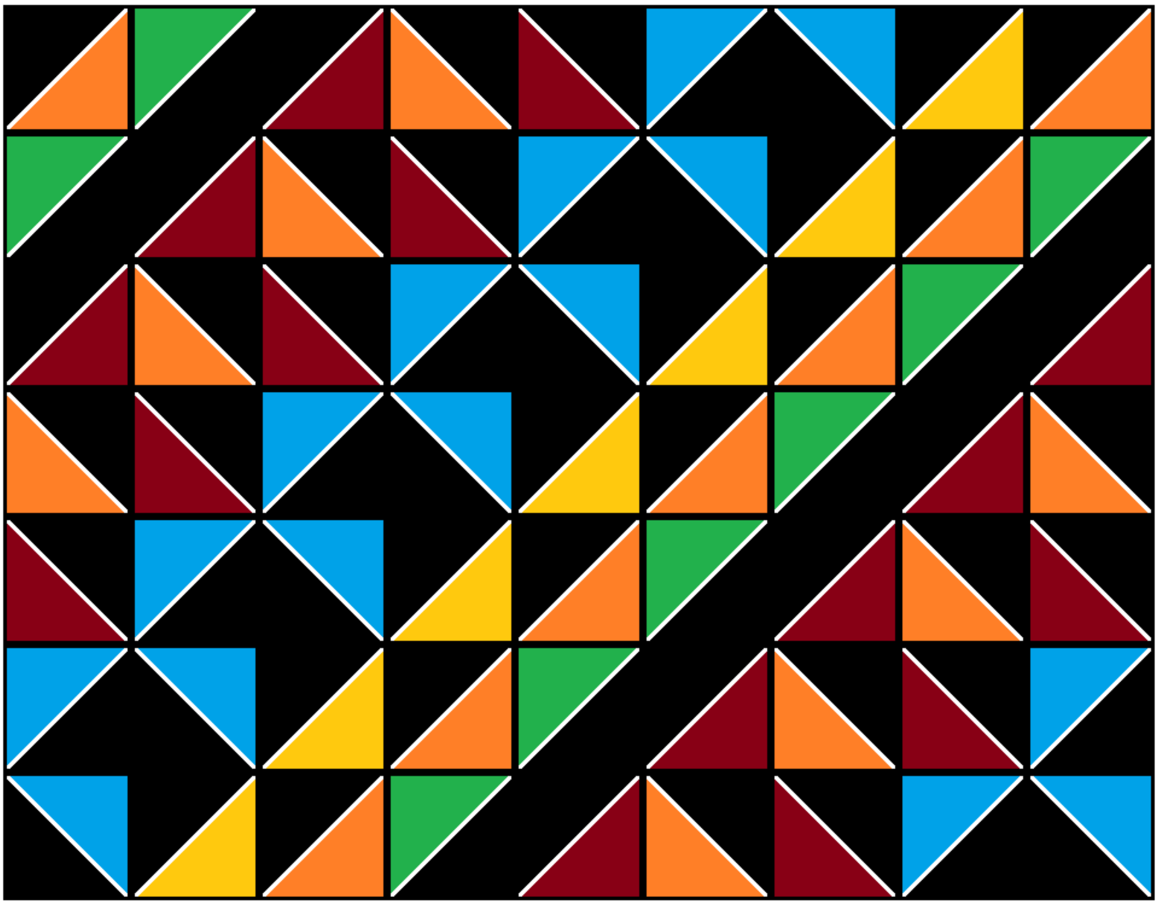


<u>Momento 4:</u> Agora é a hora de ressignificar a data de aniversário de cada um. Cada algarismo será representado por uma figurinha diferente e a sequência numérica já construída por cada um, agora será representada pelas figurinhas escolhidas. Por exemplo, para a sequência construída no nosso exemplo, usaremos primeiro a figurinha do 2, depois a do 7, em seguida a do 0, depois a do 3 e assim por diante. O ideal é que a sequência seja repetida por algumas vezes até que um mosaico seja formado.

Vejamos uma possibilidade do mosaico da nossa sequência de exemplo.

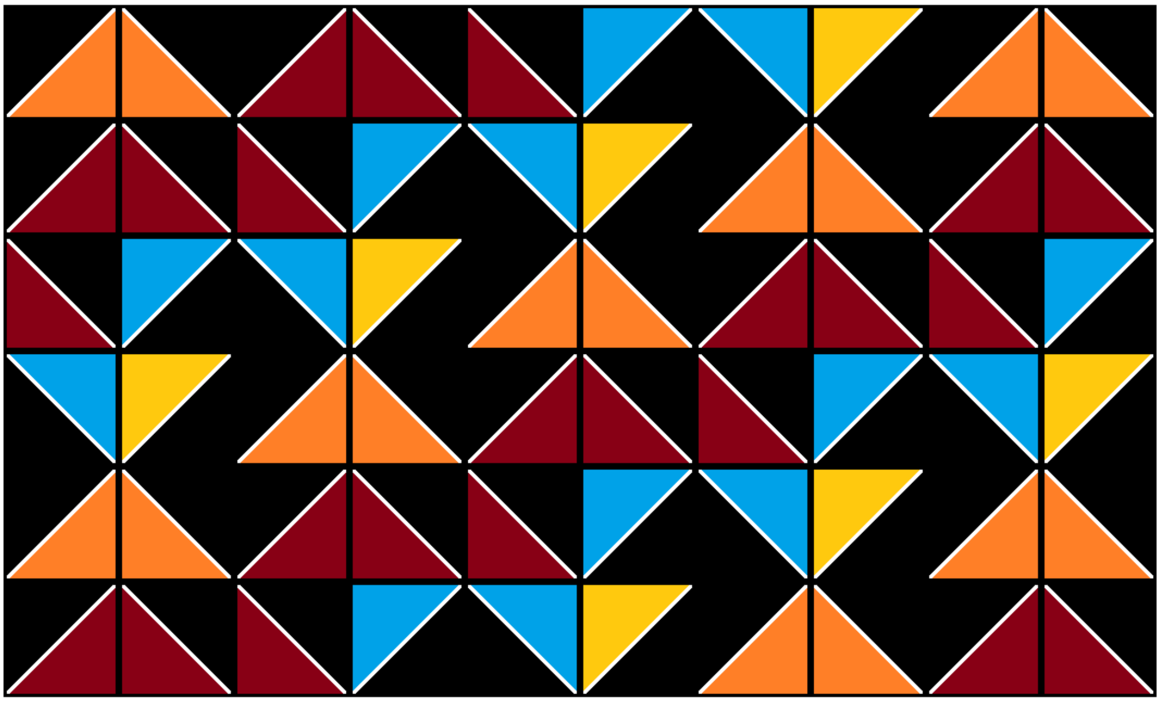
$$(2,7,0,3,1,9,8,4,2,7,0,3,1,9,8,4,2,\ldots)$$

2	7	0	3	1	9	8	4	2
7	0	3	1	9	8	4	2	7
0	3	1	9					



Momento 5: Após os alunos explorarem as possibilidades de mosaicos com a sua data de nascimento, eles deverão definir a forma que preferirem e colar em uma folha sulfite.

Como atividade complementar, o professor pode sugerir que os estudantes troquem de mosaicos com seus colegas e façam o exercício de adivinhar as datas de nascimento apenas olhando a sequência de figurinhas coladas. Por exemplo, supondo que o mosaico seguinte seja de um aluno:



O colega que pegar seu mosaico, investigará as figurinhas e a ordem em que estão dispostas. Sabendo que a data de nascimento é composta por 8 dígitos, então a data de nascimento será 23/01/1985.

Avaliação: Como proposta de avaliação é sugerido que o professor considere o desempenho e o engajamento do estudante durante o momento da aula.

6.2 Plano de aula: Número π

Disciplina: Matemática.

Professor: Ana Laura.

Ano/Série: 7º ano EF.

Título da Atividade: Descobrindo o π.

Número de aulas previstas: 2 aulas.

Habilidade: (EF07MA33) Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

Objeto de aprendizagem: Número π.

Questão disparadora: Já pensou como deve ser tentar escrever algo e não conseguir terminar porque não tem fim?

Desenvolvimento:

Momento 1: O professor deverá solicitar previamente que os alunos tragam objetos circulares de tamanhos variados (pratos, pires, copos, etc).

Momento 2: Com os alunos divididos em grupos e cada grupo com seus objetos, o professor solicitará que os alunos realizem as medidas das circunferências dos objetos e de seus diâmetros e preencham a tabela.

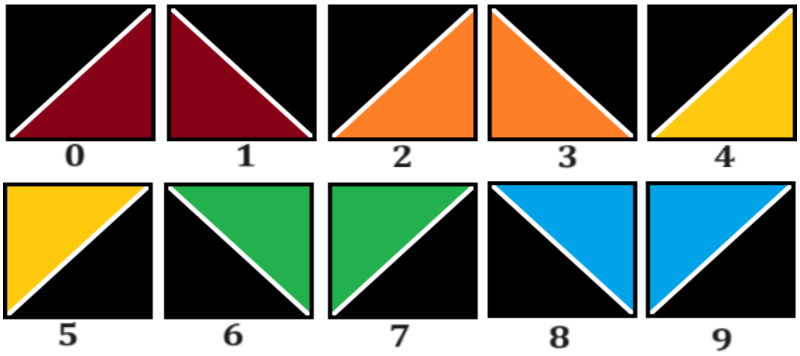
Objeto	Circunferência C	Diâmetro D	C ÷ D

Com as tabelas devidamente preenchidas, os alunos deverão expor os valores encontrados na última coluna, os valores deverão estar próximos de 3,1 independentemente do tamanho do objeto medido. Então o professor formaliza a razão entre a medida da circunferência e seu diâmetro e apresenta o número $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288 \cdots$ (pi).

Momento 3: É interessante que neste momento o professor contextualize a história deste número curioso, que teve início por volta de 4000 anos atrás. Foi investigado para a construção do grande templo de Salomão, na época aproximado para 3. No entanto, após muitos anos de estudo de vários matemáticos, uma descoberta importante: a existência dos números irracionais. E então foi possível que os estudos sobre o valor de π continuassem e as casas decimais sem padrão fossem descobertas.

<u>Momento 4</u>: Após a apresentação do novo número, o professor poderá apresentar a fórmula do comprimento da circunferência $(C = 2 \cdot \pi \cdot r)$, realizar alguns exemplos com o uso da fórmula e, em seguida, solicitar que os alunos realizem exercícios com a aplicação da fórmula.

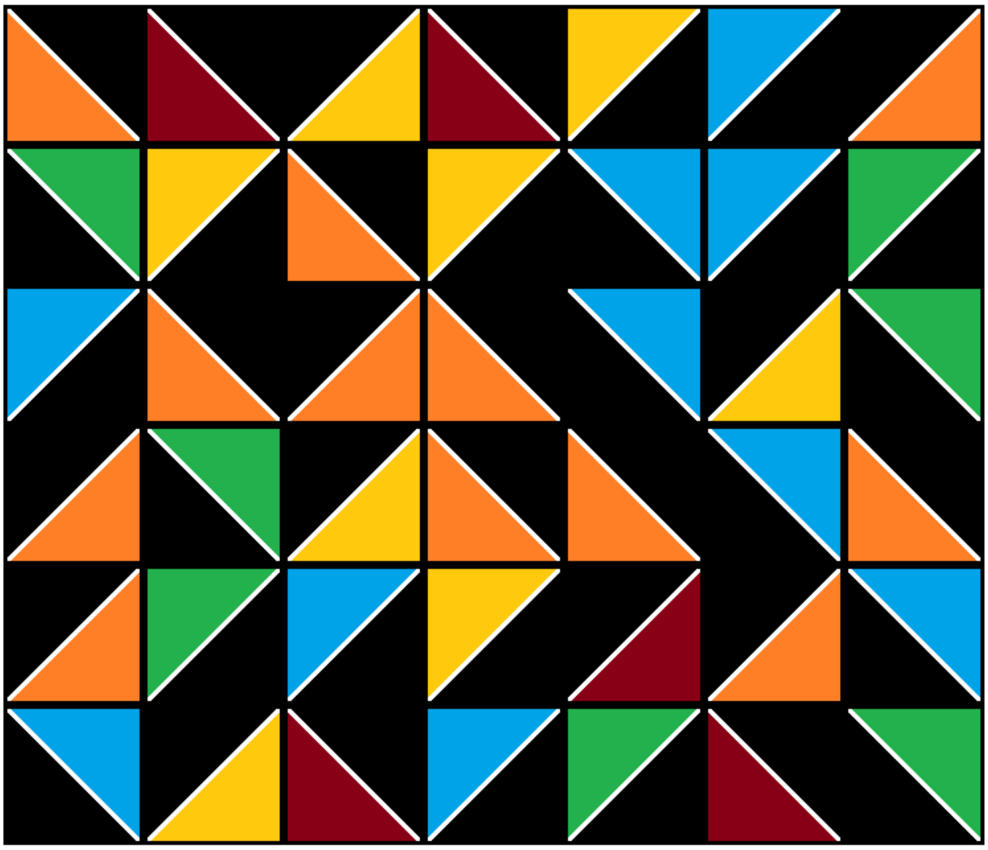
<u>Momento 5</u>: Agora que os alunos estão familiarizados com o novo número, será proposta a brincadeira de representar as casas decimais de π com figurinhas, é importante delimitar um espaço como uma folha sulfite ou uma página de caderno. Usando uma figurinha para cada algarismo, temos:



Portanto, para formar o número π até 41ª casa decimal, neste exemplo, obtemos a seguinte formação:

3	1	4	1	5	9	2
6	5	3	5	8	9	7
9	3	2	3	8		

Que resulta no mosaico:



Após a construção do mosaico é interessante que o professor chame a atenção dos alunos para o fato de não ser possível observar padrão na ordem das figurinhas, justamente por não ser possível estabelecer padrão nas casas decimais do número π.

Avaliação: Como proposta de avaliação é sugerido que o professor considere o desempenho e o engajamento do estudante durante o momento da aula.

6.3 Plano de aula: Progressão Aritmética

Disciplina: Matemática.

Professor: Ana Laura.

Ano/Série: 1ª série EM.

Título da Atividade: Introdução à Progressão Aritmética.

Número de aulas previstas: 2 aulas.

Habilidade: EM13MAT507: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Objeto de aprendizagem: Progressão aritmética.

Questão disparadora: Será que a mesma progressão aritmética pode despertar diferentes interpretações?

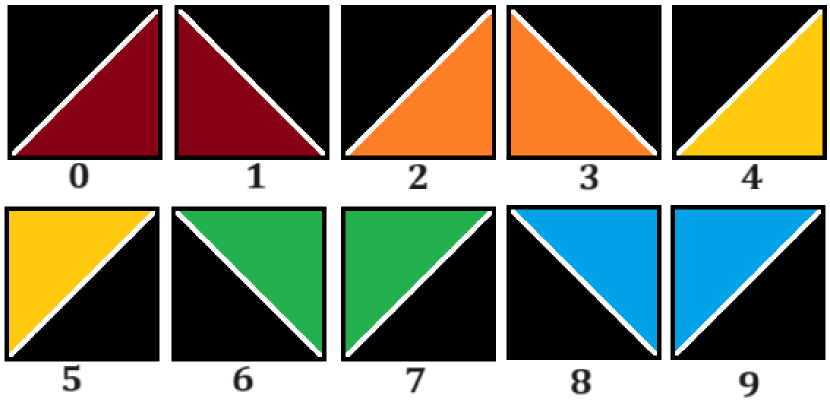
Desenvolvimento:

<u>Momento 1</u>: Inicialmente o professor deverá conversar com os alunos sobre quais são as condições necessárias para que uma sequência numérica possa ser classificada como uma Progressão Aritmética (PA). A partir das definições, o professor deverá sugerir que os alunos construam alguns exemplos de PA. Também é o momento de expandir o assunto e discutir sobre as sequências obtidas serem crescentes, decrescentes ou constantes, se alguma delas converge para algum valor por exemplo.

<u>Momento 2</u>: Depois de analisar os exemplos que os alunos sugeriram, o professor deverá apresentar a fórmula do termo geral da PA ($a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$) e mostrar diferentes exemplos de aplicações.

<u>Momento 3</u>: Neste momento, os alunos resolverão exercícios utilizando a fórmula do termo geral. É interessante que o professor explore as diversas formas de utilizar o termo geral da PA, como por exemplo para determinar a razão de uma PA onde se conhece o primeiro termo, o enésimo termo e a enésima posição.

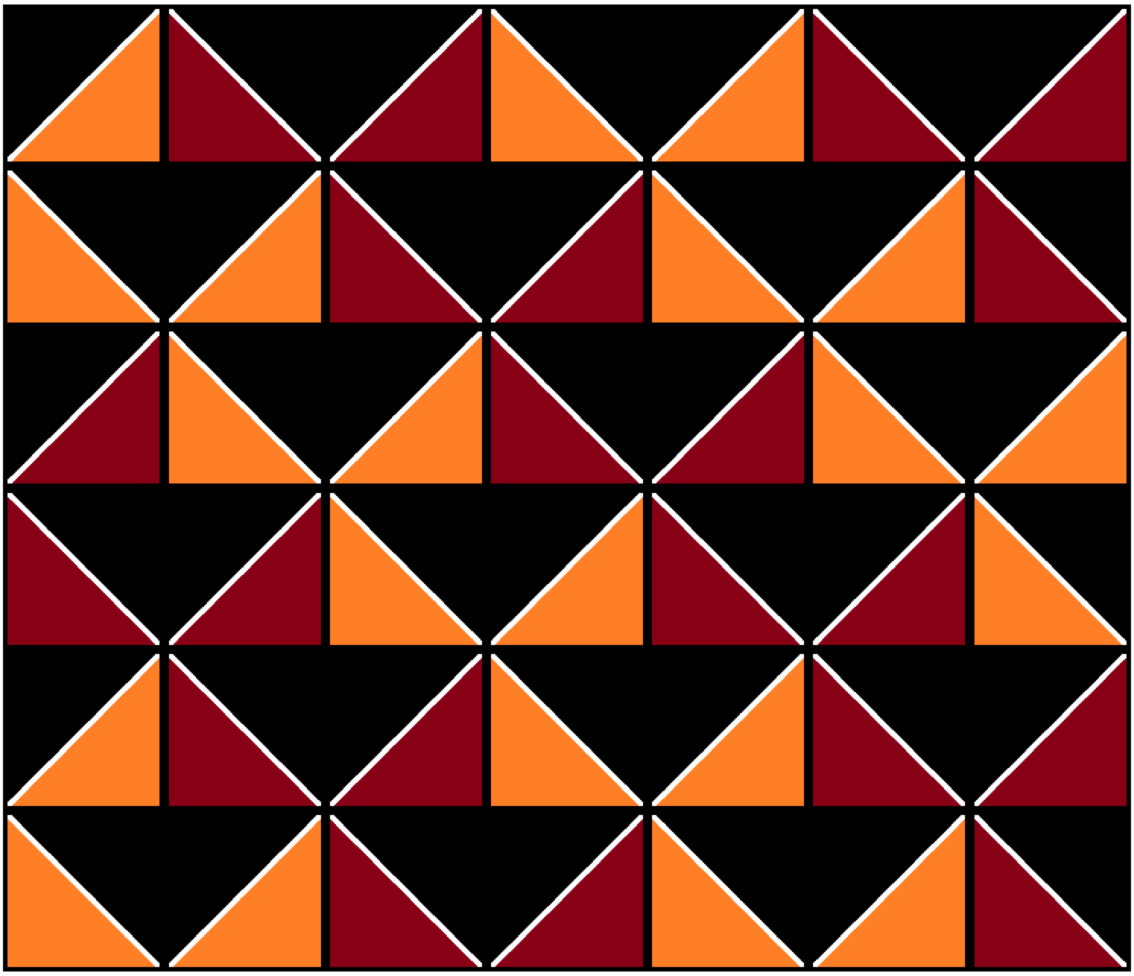
<u>Momento 4</u>: Já familiarizados com a PA, o professor deverá propor a atividade de representar os números de determinadas sequências por figurinhas. Por exemplo:



Para que a representação seja válida, ela deverá seguir alguma sequência lógica para todos os termos. Para ilustrar a situação, usaremos a PA de razão 3 iniciada no termo 2 $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, \dots)$ e definiremos que as figurinhas serão determinadas de acordo com o resto que cada um dos termos deixa quando acontece uma divisão por 4. Então para 2, a figurinha utilizada será a terceira, pois o número 2 deixa resto 2 na divisão por 4. Para 5, a figurinha utilizada será a segunda, pois o número 5 deixa resto 1 na divisão por 4. Seguindo esse padrão, obtemos a sequência $(2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 3, \dots)$:

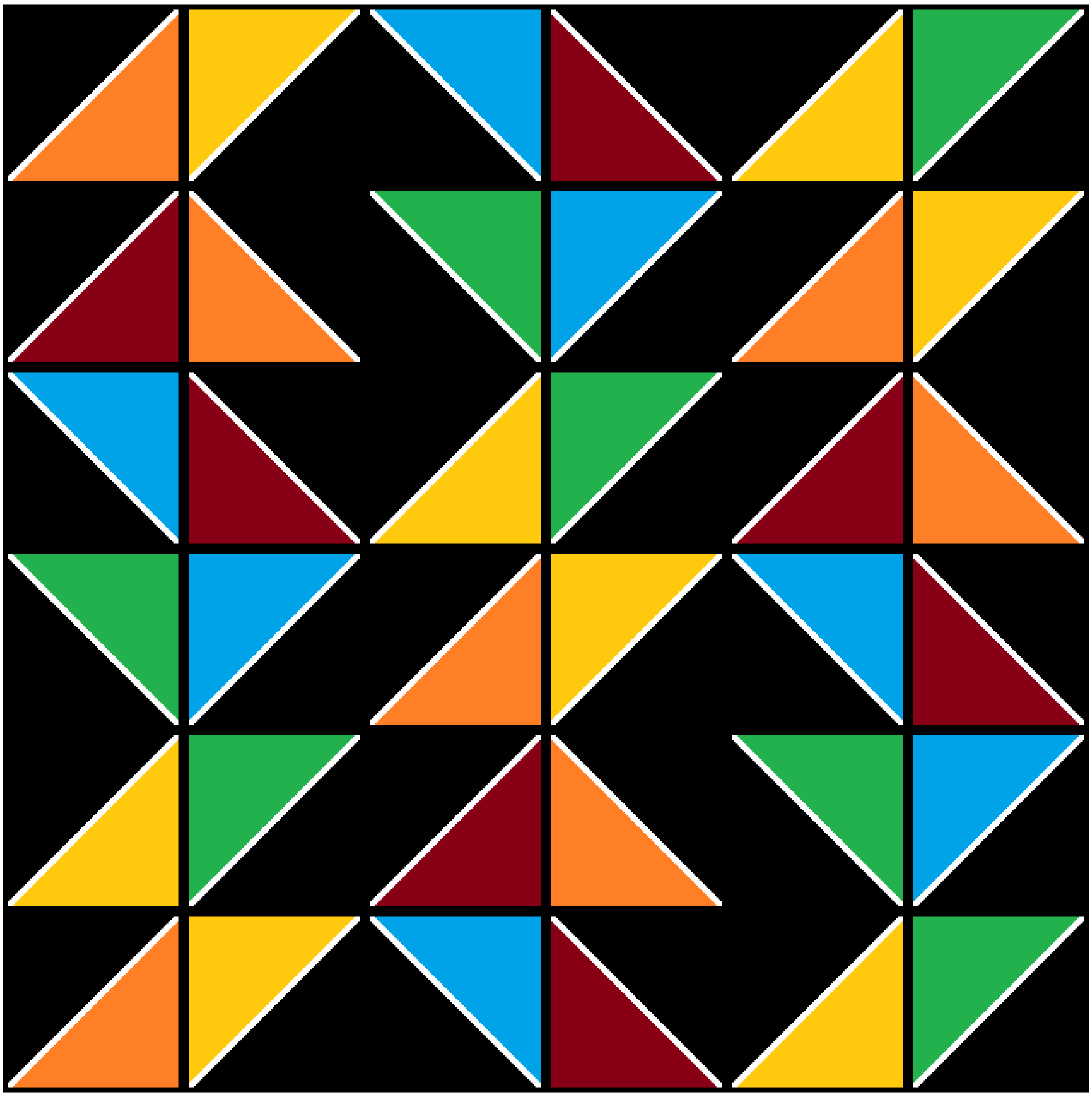
$2 : 4 = 0$ $R = 2$	$5 : 4 = 1$ $R = 1$	$8 : 4 = 2$ $R = 0$	$11 : 4 = 2$ $R = 3$	$14 : 4 = 3$ $R = 2$	$17 : 4 = 4$ $R = 1$	$20 : 4 = 5$ $R = 0$
$23 : 4 = 5$ $R = 3$	$26 : 4 = 6$ $R = 2$	$29 : 4 = 7$ $R = 1$	$32 : 4 = 8$ $R = 0$	$35 : 4 = 8$ $R = 3$	$38 : 4 = 9$ $R = 2$	$R = 1$
$R = 0$	$R = 3$	$R = 2$				

E formamos o seguinte mosaico:



Neste exemplo, formamos um mosaico de apenas sete colunas, mas o aluno fica livre para criar da forma que preferir desde que não se desvie do padrão definido para escolher as figurinhas.

<u>Momento 5</u>: Como atividade, o professor pode fixar uma PA e propor para que os alunos troquem seus mosaicos para que um investigue qual foi o padrão lógico definido pelo outro. Por exemplo, analisando o seguinte mosaico:



O aluno que deverá perceber que o mosaico é formado pela sequência de figurinhas $(2, 5, 8, 1, 4, 7, 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, \ldots)$, portanto pode considerar que a estratégia utilizada para sua construção foi a utilização do último algarismo de cada elemento da PA fixada pelo professor.

Avaliação: Como proposta de avaliação é sugerido que o professor considere o desempenho e o engajamento do estudante durante o momento da aula.

6.4 Plano de aula: Progressão Geométrica

Disciplina: Matemática.

Professor: Ana Laura.

Ano/Série: 1ª série EM.

Título da Atividade: Introdução à Progressão Geométrica

Número de aulas previstas: 2 aulas.

Habilidade: EM13MAT508: Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Objeto de aprendizagem: Progressão geométrica.

Questão disparadora: O que podemos chamar de progressão?

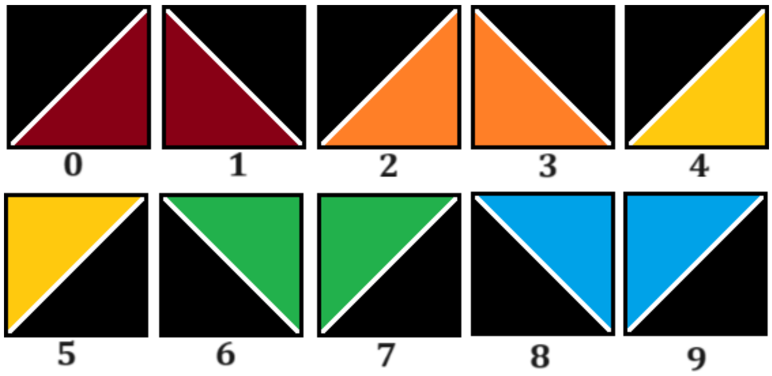
Desenvolvimento:

Momento 1: O professor pode iniciar a aula apresentando algumas sequências numéricas, dentre elas, é interessante que existam Progressões Geométricas (PG) e Progressões Aritméticas (PA) para que sejam levantados questionamentos de forma a induzir o aluno a concluir a principal diferença entre as progressões.

Momento 2: Após explorar e debater sobre as diferenças entre PA e PG, o professor deverá formalizar a definição de PG e apresentar sua fórmula do termo geral ($a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$) e demonstrar diversos tipos de aplicações. Aqui também podemos observar quais sequências são crescentes, decrescentes ou constantes, solicitar que os alunos sugiram uma subsequência de alguma sequência já analisada e façam uma nova análise, que observem que a subsequência está convergindo para algum valor.

Momento 3: Neste momento, os alunos resolverão exercícios utilizando a fórmula do termo geral. É interessante que o professor explore as diversas formas de utilizar o termo geral da PG, como por exemplo para determinar a razão de uma PG onde se conhece o primeiro, o enésimo e a enésima posição.

Momento 4: Mantendo o foco nas Progressões Geométricas, o professor vai fixar uma PG e pedir que os alunos determinem alguma sequência lógica para representá-la com figurinhas. Por exemplo:

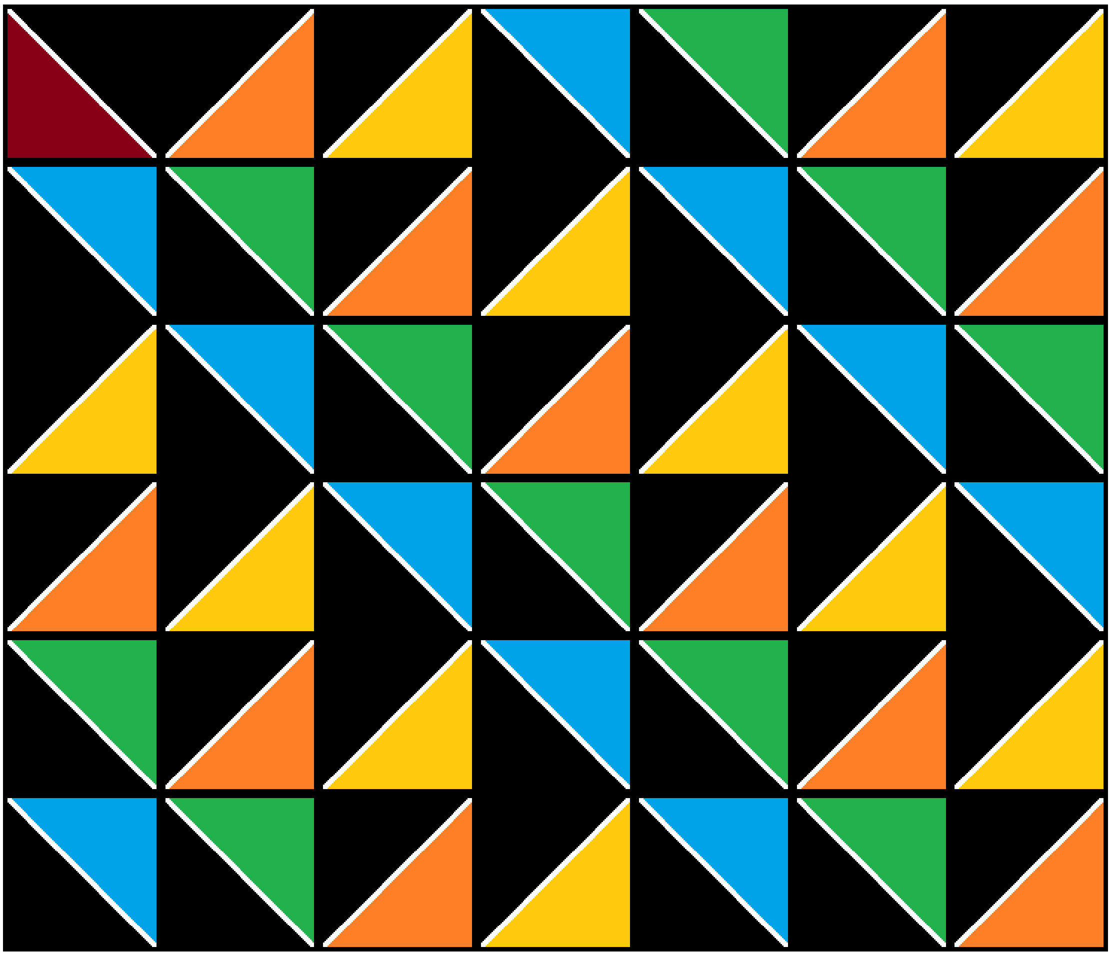


Fixando a PG $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 8192, 16384, \ldots)$, os alunos deverão desenvolver um pensamento lógico para representar a sequência usando apenas as figurinhas.

Supondo que a estratégia adotada seja a de usar o último algarismo de cada número da sequência, essa PG se torna:

1	2	4	8	6	2	4
8	6	2	4	8	6	2
4						

Que resulta o mosaico abaixo.



<u>Momento 5</u>: Propor para que os alunos troquem seus mosaicos para que um investigue qual foi o padrão lógico definido pelo outro.

Avaliação: Como proposta de avaliação é sugerido que o professor considere o desempenho e o engajamento do estudante durante o momento da aula.

6.5 Plano de aula: Sequências convergentes

Disciplina: Matemática.

Professor: Ana Laura.

Ano/Série: 1º ano EM.

Título da Atividade: Para onde vai?

Número de aulas previstas: 2 aulas.

Habilidade: (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

Objeto de aprendizagem: Sequências numéricas.

Questão disparadora: Já pensou como deve ser tentar escrever algo e não conseguir terminar porque não tem fim?

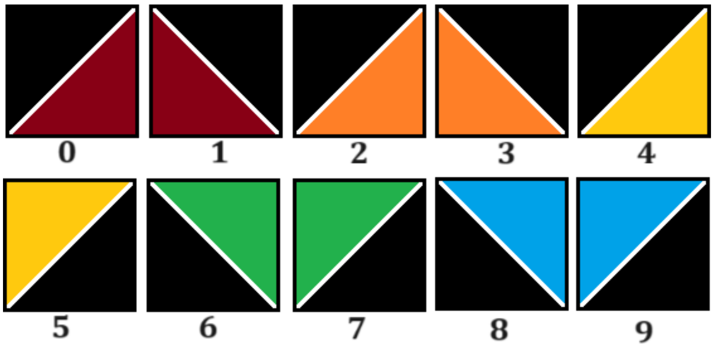
Desenvolvimento:

Momento 1: Inicialmente será discutida a ideia de sequência numérica e em seguida o professor deverá propor vários tipos de sequências numéricas diferentes e debater com os alunos sobre a lei de formação de cada sequência usada como exemplo, portanto é interessante que as sequências apresentadas assumam algum padrão.

Momento 2: Utilizando uma sequência bem simples e infinita, como por exemplo a dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...), o professor debaterá com os alunos sobre o último número da sequência, levando-os a concluir que esse último número não existe, mas que é possível perceber que a sequência segue para o infinito. Além disso, é interessante que o professor apresente e construa algumas sequências constantes com os alunos.

Momento 3: O professor poderá agora formalizar o conceito de convergência de sequência, apresentar novos exemplos de sequências convergentes e solicitar que os alunos também sugiram novos exemplos. Além disso, é interessante que o professor dê algumas leis de formação e solicite que os alunos montem as sequências convergentes correspondentes.

Momento 4: Para visualizar melhor o conceito de sequências convergentes, o professor fará a proposta de utilizar figurinhas para construir uma sequência convergente. Usando uma figurinha para cada algarismo, temos:

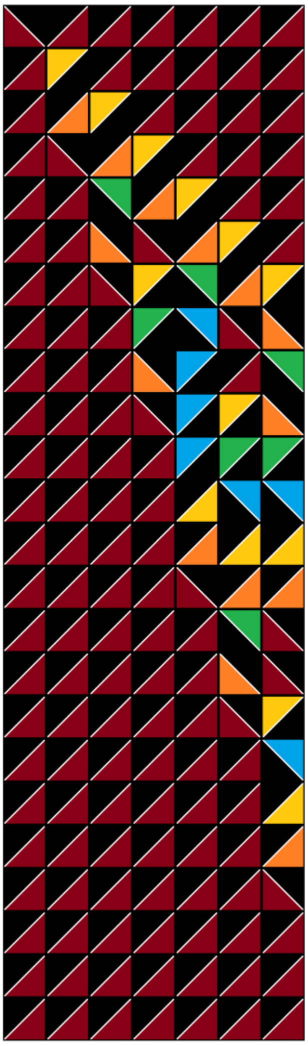


Antes de construir o mosaico de uma sequência convergente, o professor deve propor que o aluno monte um mosaico de uma sequência constante pra visualizar o que acontece e então prosseguir.

Neste exemplo, faremos a construção da sequência $a_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$. Note que esta é uma sequência que converge para o número 0, dada a lei de formação anterior, temos então a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \ldots)$. No exemplo representaremos em cada linha cada um dos termos da sequência até sua sexta casa decimal, ou seja:

1	0	0	0	0	0	0
0	5	0	0	0	0	0
0	2	5	0	0	0	0
0	1	2	5	0	0	0
0	0	6	2	5	0	0
0	0	3	1	2	5	0
0	0	1	5	6	2	5
0	0	0	7	8	1	2

Então, temos:



Como é possível observar no mosaico obtido, primeiro a primeira casa decimal foi zerada, em seguida a segunda casa decimal foi diminuindo também, o que nos mostra que também será zerada, assim como é a tendência das outras casas decimais também.

Avaliação: Como proposta de avaliação é sugerido que o professor considere o desempenho e o engajamento do estudante durante o momento da aula.

CONCLUSÃO

A construção do conhecimento é um processo particular de cada pessoa e que pode se dar e acontecer de formas diferentes de um indivíduo para outro. Sabemos que, assim como as pessoas possuem habilidades diferentes, também possuem facilidades e dificuldades distintas.

As propostas de aulas apresentadas neste trabalho, vem com o intuito de sugerir uma forma diferenciada e mais atrativa de representar e trabalhar sequências numéricas com os alunos em sala de aula. Agregar a Arte e o lúdico à Matemática pode despertar o interesse de pessoas com diversas habilidades, inclusive das que não possuem grande afinidade com a Matemática.

Hoje, um professor de ensino básico se vê constantemente enfrentando desafios, seja com relação à desvalorização da profissão, ou com relação à infraestrutura escolar, ou com relação ao convívio com os alunos ou vários outros fatores que podem alimentar essa visão. Certamente não existe receita milagrosa, porém uma aula que sai do padrão da metodologia expositiva e torna a Matemática mais acessível para todos os alunos pode amenizar os impactos desses enfrentamentos, pois o que é diferente ganha destaque.

Quando nos propomos a apresentar um conteúdo de forma diferente do que é o habitual, abrimos uma “porta de entrada” também diferente do que é a habitual e, portanto, um “caminhar” diferente poderá ser traçado até a construção do conhecimento. Quanto mais pessoas aprendem, mais ricas e variadas se tornam as experiências que compartilhamos e mais profundas e significativas são as mudanças que podemos alcançar.

REFERÊNCIAS

BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. 67 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. 2018.

FERREIRA, D. B.; OLIVEIRA, E. P. **Sequências numéricas**. In: FERREIRA, D. B.; OLIVEIRA, E. P. A matemática no jogo de Torres de Hanói. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. cap. 2. p. 15-42.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Recorrência**. In: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A matemática do ensino médio – Vol 2. 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. cap. 3. p. 65-81.

MAIA, R. J. D. **Progressões aritméticas e geométricas**. 2011. 32 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

MICHAELIS: Dicionário brasileiro da Língua Portuguesa. **Plataforma UOL**. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/sequ%C3%AAncia/. Acesso em: 10 de junho de 2024.

MONTEIRO, C. W. **Sequências numéricas e recorrências lineares aplicadas no ensino médio**. 2020. 74 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2021.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Recorrências**. In: MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. 3ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. cap. 4. p. 75-91.

PARAÍZO, R. F. **Progressões aritméticas e progressões geométricas**. In: PARAÍZO, R. F. Matemática instrumental. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009. cap. 10. p. 242-250.

SANTOS. F. L. **Um breve estudo da Sequência de Fibonacci usando recorrências e geometria: uma aplicação no ensino básico**. 2021. 78 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2021.

STEWART, J. **Sequências e séries infinitas**. In: STEWART, J. Cálculo – Vol 2.

Tradução: EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. cap. 11. p. 625-626.

WENDPAP, B. G.; BASTIANI, F.; GUZZO, S. M. **Uma abordagem histórico-matemática do número pi (π)**. XXII Semana acadêmica da matemática – UNIOESTE.

ANEXO – Sugestões de figurinhas