UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MARILETE DO ROCIO COLODEL

TEOREMAS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA COM ÊNFASE NO TEOREMA DE THALES E NO TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO O GEOGEBRA

CURITIBA

2024

MARILETE DO ROCIO COLODEL

TEOREMAS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA COM ÊNFASE NO TEOREMA DE THALES E NO TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO O GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

CURITIBA
2024

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **MARILETE DO ROCIO COLODEL** intitulada: **TEOREMAS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA COM ÊNFASE NO TEOREMA DE THALES E NO TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO O GEOGEBRA**, sob orientação do Prof. Dr. ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 21 de Junho de 2024.

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO
Presidente da Banca Examinadora

RAUL PRADO RAYA
Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPR)

ADRIANA LUIZA DO PRADO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me oportunizado almejar a graça de conseguir vencer mais uma etapa em minha vida e carreira profissional.

Agradeço aos professores do curso do Profmat pelas horas dedicadas ao nosso ensino-aprendizagem, sem eles eu não teria chegado até aqui.

Agradeço a minha filha e ao meu marido que me incentivaram a não desistir, pois o caminho foi cheio de obstáculos que aos poucos fui vencendo.

Agradeço em especial ao Prof. Aldemir, por aceitar ser o meu orientador e me incentivar na produção desse material.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

Matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha da matemática. Ela muitas vezes condescende a prestar serviço à astronomia e outras ciências naturais, mas em todas as relações ela tem direito à primeira classificação.

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

O presente trabalho foca inicialmente em uma abordagem sobre a história da Matemática, mais especificamente, a matemática babilônica e a matemática egípcia. Cito também os principais pensadores: Thales de Mileto e Pitágoras que foram os responsáveis pela transformação da Matemática em um estudo organizado e sistemático. Nesse material são abordados alguns teoremas geométricos clássicos, de forma que o objetivo principal deste trabalho é proporcionar ao leitor uma reflexão sobre como o Teorema de Thales e o Teorema de Pitágoras podem ser estudados utilizando os recursos do Geogebra, e, também, compreender os conceitos e aplicações, especialmente em triângulos semelhantes.

Palavras chaves: Teoremas geométricos clássicos, Teorema de Thales, Teorema de Pitágoras, Geogebra.

Abstract

The present work initially focuses on an approach about mathematics history, more specifically, the Babylonian and the Egyptian mathematics. I also cite the major thinkers: Thales of Miletus and Pythagoras, who were responsible for the transformation of mathematics into an organized and systematic study. In this material some classical geometric theorems are addressed, in such a way that the main purpose of this work is to provide the reader with a reflection on how the Thales's Theorem and the Pythagorean Theorem can be studied using the resources of GeoGebra, and also, to comprehend the concepts and applications, especially in similar triangles.

Keywords: Classical geometric theorems, Thales's Theorem, Pythagorean Theorem, GeoGebra.

A GEOMETRIA

Tão visível e vivenciada quanto despercebida
A geometria se vê,
No contorno da peneira,
No formato da tv,
No gingado da capoeira,
Nas portas e nas janelas,
Na forma do pãozinho,
Nas tamancas e chinelas,
Na xícara do cafezinho,
Na fachada das casas,
Nas curvas do caminho,
Das borboletas, nas asas,
E também no meu cantinho,
Nos sólidos geométricos,
Das rochas a beira mar,
Ou nos cristais assimétricos,
Que não flutuam no ar.
A esfera que gira no espaço,
Em movimento de rotação,
Na translação está o passo,
Para a sua evolução.
E, então?
Chegamos à conclusão,
De a geometria estar,
Em todo e qualquer lugar,
Na beleza dos abrolhos,
Nas estrelas do mar,
Ou no formato dos olhos,
Que nos enchem de amor sem par,
Deus deu ao homem inteligência,
Para aprender a contar,
E evoluindo na ciência,

Sua vida melhorar,
Da geometria a importância,
Levou-o a compreender,
E diante das circunstâncias
Seus cálculos desenvolver.
Ruth Nunes Dualibi

SÍMBOLOS DE LETRAS

$\overleftrightarrow{AB}$	reta AB
$\overrightarrow{AB}$	semirreta AB
$\overline{AB}$	segmento AB
AB	medida do segmento AB
$\hat{A}$	ângulo A
α	letra grega alfa
β	letra grega beta
δ	letra grega delta
γ	letra grega gama
θ	letra grega teta
φ	letra grega phi
$>$	maior
$<$	menor
=	igual
≡	equivalente
≅	aproximadamente igual a ou congruente
∥	retas paralelas
⊥	retas perpendiculares
Δ	triângulo
⇒	condicional; implica; se ..., então
m	reta m
m’	reta m’
n	reta n
∠	ângulo
∼	semelhante

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é a arte da pura razão, a estrutura lógica fundamental de tudo o que existe e de tudo o que não existe. Ela nos auxilia a organizar e compreender tudo o que podemos imaginar na vida, como a música, a arte e a linguagem, seus símbolos e conceitos essenciais.

O que sabemos sobre a história da Matemática é que toda civilização que desenvolveu a escrita também mostra evidências de conhecimentos matemáticos. Nomes para números e formas e as ideias básicas sobre contagem e operações aritméticas parecem ser parte da herança comum da humanidade em toda parte.

A escrita começou a se desenvolver no antigo Oriente, por volta de 5000 a.C., e assim a Matemática começou a surgir como atividade específica. Pois, como as sociedades adotavam diferentes formas de governo, necessitavam de meios para acompanhar o que era produzido, bem como, quanto era devido de impostos. Então unidades de medidas foram criadas ao acaso, mas somente algumas pessoas sabiam fazer essas conversões. Tal tarefa era específica dos escribas (funcionários públicos) que sabiam escrever e resolver problemas matemáticos simples, nascendo aí a Matemática como tema de estudos. Como descrito por Berlinghoff:

> Quase todas as evidências que temos para esse período no desenvolvimento da Matemática vêm da Mesopotâmia, região entre os rios Tigres e Eufrates, que agora é Iraque, e do Egito, a terra no vale do Nilo, no nordeste da África. É provável que um processo semelhante estivesse ocorrendo ao mesmo tempo na China e na Índia, mas temos muito menos evidências específicas. (Berlinghoff: 2010, p. 7)

Os antigos egípcios escreviam com tinta sobre papiros, um material que não sobrevive facilmente por milênios, e a maior fonte de informação sobre a Matemática egípcia é o papiro Rhind, um documento de cerca de 1650 a.C. O papiro contém de um lado, extensas tabelas que eram usadas como ajuda para os cálculos, e, do outro lado, uma coleção de problemas. O escriba de nome Amósis detalha a solução de 85 problemas de Aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, repartições proporcionais, progressões, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. É um dos mais famosos antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, juntamente com o Papiro de Moscou.

Figura 1 – Papiro de Moscou

Fonte: LUCHETTA, 2008.

A Matemática egípcia de 4000 anos atrás era de conhecimentos bem desenvolvidos e de conteúdos semelhantes ao que aprendemos hoje sobre cálculos e geometria no ensino fundamental e médio. Era registrada e ensinada por meio de situações problemas e parece ter suas raízes na prática dos escribas. Por fato, como colocado por Rooney:

> Por volta de 600 a.C., os gregos antigos desenvolveram um interesse pela Matemática. Eles foram além de seus predecessores porque estavam interessados em encontrar regras que pudessem ser aplicadas a qualquer problema de um tipo similar. Eles trabalharam com conceitos em Matemática que veio a ser a base de tudo o que veio depois. Alguns dos maiores matemáticos de todos os tempos viveram na Grécia e no centro Helênico de Alexandria no Egito.(Anne Rooney, 2012, p. 10)

Quando se fala de Matemática grega, a referência principal da palavra grega é a língua em que é escrita. Suas próprias histórias dizem que o mais antigo argumento matemático remonta a 600 a.C e teve atividade crescente até cerca de 400 d.C. Foi na Grécia Antiga que a Matemática ganhou contornos abstratos e passou a ser utilizada não apenas para medir e contar coisas do dia a dia, mas também como elemento de pensamento abstrato e filosófico. Foi na Grécia que se desenvolveram diversos sistemas de numeração, dentre eles o alfabético, em que os números eram representados por letras que compunham o alfabeto grego: alfa, beta, gama, delta, entre outros. Tais representações ainda hoje são utilizadas em fórmulas matemáticas

A Matemática da Mesopotâmia (Antigo Período Babilônio) vem de tábuas traduzidas entre 1900 e 1600 a.C. Diferente do que aconteceu na Matemática egípcia, foram descobertas muitas dessas tábuas, o que permite uma imagem mais clara do que era a Matemática da Mesopotâmia. Com relação a esse tópico, Berlinghoof descreve que:

> Muitas das tábuas matemáticas desse período são tabelas para ajudar nos cálculos ou coleções de problemas para o treinamento de jovens escribas. Algumas tábuas de problemas contêm respostas ou mesmo soluções completas, mas há muito pouco que explique o processo de descoberta por trás dos métodos que estão sendo ensinados ou apresentados. (Berlinghoff, 2010, p. 10)

A Matemática babilônica tinha um aspecto interessante que era a ocorrência de situações problemas, que tentavam ser práticos, mas com teor recreativo. Mas o fim desse período fértil para a Matemática foi quando os escribas, ao invés de serem treinados em escolas especiais, começaram a ser treinados em casa, o que ocasionou o fim do Antigo período Babilônico. A Matemática perde sua identidade, e a maior parte do entusiasmo e da criatividade desaparece. Somente muitos anos depois, cerca de 300 a.C, ressurge o interesse por essa ciência, agora voltada para a astronomia babilônia.

A Matemática babilônica era conduzida por métodos, e os escribas gostavam de construir outros ainda mais elaborados. Um exemplo foi a ideia de representar números em termos de potências de 60 e especialmente quando se tratava de representar frações. O fato de ainda dividirmos uma hora em 60 minutos e um minuto em 60 segundos remonta, passando pelos astrônomos gregos, as frações sexagesimais; quase 4 mil anos depois, ainda somos influenciados pelos escribas babilônicos. De acordo com Brown:

> Embora os usos práticos da matemática sejam abundantes, o que a torna tão mágica é a elegância e a beleza que possui fora dos contextos de aplicação real. E é por tornarem nossa existência inteligível e nos ajudarem a organizá-la que atribuímos significado aos conceitos matemáticos. (Brown, 2014, p. 6)

Tanto as condições da sociedade, quanto a própria Matemática estão em constante mudança. É absolutamente verdade que a validade das teorias matemáticas é contínua e duram séculos. No entanto, o status dessas teorias e técnicas relacionadas como novos desenvolvimentos, novas descobertas e campos de aplicação recentes aparecem dentro e fora da Matemática e variam muito em importância e eficácia. Segundo Lima:

> Sempre houve dificuldades para ensinar Matemática. O conhecimento diálogo de Sócrates para exemplificar seu método de ensino trata de

> um tópico de Geometria. A expressão *"pons assinorum"* (ponte dos burros), que durante séculos serviu para designar certos teoremas de Geometria, indica que, dentre os poucos jovens da Idade Média que se aventuravam a estudar essa matéria, somente alguns eram capazes de assimilá-la. A crença, que perdurou até o começo do século, de que existia no cérebro humano uma "bossa da Matemática", cujo maior ou menor desenvolvimento em cada pessoa era o fator determinante do seu êxito ou fracasso na aprendizagem da Matemática, é também uma indicação de que nunca foi tarefa banal ensinar essa matéria. (Lima, 2001, p. 167)

A Matemática, tal qual a conhecemos hoje, é uma ciência baseada essencialmente no raciocínio dedutivo. Esta forma de estruturar o conhecimento, onde hipóteses iniciais articuladas com o raciocínio lógico constroem o novo conhecimento, foi inaugurada na Grécia antiga. É consenso entre os historiadores e estudiosos, que nas origens deste método de raciocinar e exibir o pensamento, está o nome de Thales de Mileto.

O matemático Thales deu os primeiros passos para a sistematização da geometria. Ele foi o primeiro a demonstrar os teoremas geométricos, inventou o primeiro sistema de raciocínio lógico e foi o primeiro a considerar o conceito de congruência de figuras espaciais (que duas figuras num plano podem ser consideradas iguais se você puder deslizar e girar uma para coincidir exatamente com a outra). Entre os povos antigos, não existiam demonstrações formais como conhecemos hoje. Logo, "o critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam" (DOMINGUES, 2002, p. 56). Em relação às demonstrações, Mlodinow descreve que:

> ...tudo começou com um pequeno esquema planejado por Pitágoras: empregar a Matemática como o sistema abstrato de regras que pode modelar o universo físico. Depois veio um conceito de espaço diferente do chão ao qual pisamos, ou da água em que nadamos. Foi o nascimento da abstração e da demonstração. Logo, os gregos pareciam ser capazes de achar respostas geométricas para toda questão científica – da teoria da alavanca às órbitas dos corpos celestes. (Mlodinow, 2004, p. 10)

Já em relação ao matemático Pitágoras, ele foi um excelente especialista em geometria, deixando como principal contribuição para a Matemática a descoberta da relação de igualdade entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos no interior de um triângulo retângulo, o que ficou conhecido como teorema de Pitágoras. Segundo Berlinski:

> É por meio do teorema de Pitágoras que o conceito de distância fica sob controle geral da Matemática. Algum controle é necessário. A distância é uma extensão de algum tipo, um aspecto de geometria. É também um tipo de número, um aspecto da aritmética. É uma ou outra ou nenhuma. Mas seja qual for sua natureza, a distância é a resposta à pergunta quão longe, uma das grandes questões da raça humana, inferior apenas, suponho, a quanto. Tendo sido expresso como uma conclusão sobre triângulos retângulos, o teorema de Pitágoras também descreve a distância entre quaisquer dois pontos em um plano, porque quaisquer dois pontos em um plano pode ser entendido como vértices de um triângulo. Isso é simultaneamente mágico e maravilhoso: mágico porque trata-se de algo que responde a uma ideia não concebida de uma expansão atribuída a um número; e maravilhoso porque o número foi gerado por uma forma simbólica simples. Além da medida de distância bidimensional, há a distância em três dimensões e, na verdade, distância em n dimensões. A nobre família dos espaços métricos encontra sua linha paterna no Teorema de Pitágoras. (Berlinski, 2018, p. 70)

Dessa forma, se era possível constatar a veracidade de forma visual e ela sempre funcionava, ela era adotada como verdade. Com o tempo, acreditou-se que a Irmandade Pitagórica tenha sido a pioneira no método dedutivo, mesmo sem base axiomática pré-estabelecida. O que eles faziam era “encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria” (DOMINGUES, 2002, p. 58). De modo conclusivo, como descrito por Berlinghoff:

> A Matemática hoje, vista “de dentro”, é ao mesmo tempo diversa e mais unificada do que jamais foi. É mais abstrata, no entanto tem mais ampla aplicabilidade a áreas da vida moderna do que em qualquer tempo anterior. Por causa disso, a “vista de fora” é compreensivelmente confusa. De um lado, a Matemática é vista como muito esotérica, amedrontadora, um assunto sobre o qual até mesmo pessoas bastante instruídas confessam ignorância sem se envergonhar. De outro, é tida como parte essencial da prosperidade, segurança e conforto modernos, de modo que os hábeis em matemática são tomados como recursos humanos valiosos. (Berlinghoff, 2010, p. 60)

2 GEOMETRIA

Geometria, palavra de origem grega, “geo” significa terra e “metria” significa medida. A Geometria surgiu há aproximadamente 4000 anos no Egito e na Babilônia, sem dúvida de uma maneira intuitiva, e, portanto, não sistemática, como uma série de regras práticas sugeridas pela experiência, cujo objetivo principal era aplicações às medições. De fato, as relações dessa sociedade, baseadas na propriedade, impuseram a necessidade de medir.

A Geometria com um caráter dedutivo, apoiado em proposições gerais, teve seu início na antiga Grécia, com Thales de Mileto e Pitágoras. Já a Geometria com um caráter axiomático, um sistema formado por noções primitivas, definições, axiomas e teoremas aproveitando o conhecimento que já havia na época foi estudado por Euclides.

Um sistema axiomático é qualquer conjunto de axiomas que podem ser ligados em conjunção para logicamente derivar teoremas. Os axiomas são o começo de uma cadeia dedutiva e são as afirmações não demonstradas que podiam ser aplicadas a várias áreas de conhecimento. Euclides, na sua famosa obra Elementos chamou de postulado (aquilo que não se pode demonstrar) outras afirmações não demonstráveis, porém, agora vinculadas à teoria que queria construir, no caso a Geometria.

Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são os seguintes:

1º) Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

2º) Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

3º) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

4º) Todos os ângulos retos são iguais.

5º) Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

No decorrer deste trabalho o foco de estudo será formado por:

- Noções primitivas: são os conceitos aceitos sem definição.
- Axiomas: são os resultados aceitos sem demonstração.
- Definições: são os conceitos apresentados para simplificar a linguagem matemática ou para identificar um novo objeto matemático.

- Teoremas: são os resultados que são demonstrados a partir de uma cadeia dedutiva de afirmações.
- Proposições: são o mesmo que os teoremas, mas que no sistema como um todo, não apresentam tanta importância quanto os teoremas.
- Lemas: são pequenos resultados que também devem ser demonstrados e que simplificam a demonstração de um teorema.
- Corolários: são consequências imediatas de um teorema e que merecem ser evidenciados.

2.1 A GEOMETRIA - DEFINIÇÕES E POSTULADOS

A geometria é construída através de objetos primitivos: ponto, reta, plano, espaço, entre outros. Esses objetos não possuem definição, mas possuem características que possibilitam sua identificação. Fazendo uso desses objetos primitivos é que são definidas as primeiras formas geométricas do plano: segmentos de reta, polígonos e ângulos.

2.1.1 CONCEITOS PRIMITIVOS: PONTO, RETA E PLANO

O ponto, a reta e o plano são entes geométricos e não tem definição. Explicar cada um deles não é tarefa fácil, pois temos apenas noções primitivas sobre esses elementos, ou seja, não existe uma definição precisa para eles.

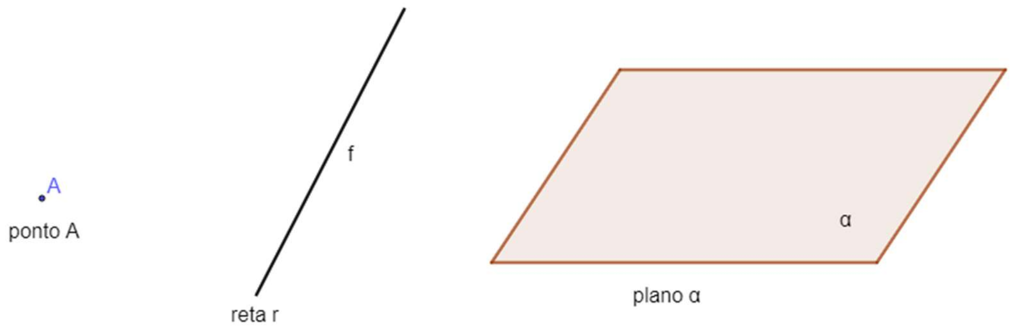
O **ponto** é um objeto que não possui definição, dimensão e forma. É de uso representá-lo por uma letra maiúscula ou algarismos, em alguns casos. Sua representação também se dá pelo cruzamento de duas linhas, que podem ser retas ou curvas. Por isso, é impossível encontrar qualquer medida nele, como comprimento, largura, altura, área, volume etc. O ponto é a base de toda a Geometria, pois é a partir de conjuntos deles que são formadas as figuras geométricas.

A **reta** é formada por um conjunto de pontos compreendidos como linhas infinitas que não fazem curvas. Embora sejam formadas por pontos, também não possuem definição. A reta é representada por uma letra minúscula e é infinita nas duas direções, isto é, devemos admitir que o ponto já viesse se deslocando infinitamente antes e continua esse deslocamento infinitamente depois. A reta pode ser definida por suas propriedades obvias através de quaisquer dois pontos podemos traçar uma e apenas uma reta.

O **plano** é outro conceito primitivo, e é representado, geralmente, por uma letra do alfabeto grego. Através de nossa intuição, estabelecemos modelos comparativos que o explicam, como: a superfície de um lago com sua água parada, o tampo de uma mesa, um espelho, uma folha de papel, entre outros. A esses modelos, devemos acrescentar a ideia de que o plano é um conjunto infinito e ilimitado de retas.

Graficamente:

Figura 2 – Ponto, reta e plano



2.1.2 OUTROS CONCEITOS

Além dos conceitos primitivos: ponto, reta e plano, temos outros conceitos que são importantes e precisam ser definidos. São eles:

Semirreta: um ponto divide a reta em duas partes, chamadas de semirretas, ou seja, é um pedaço de reta que tem começo e não tem fim.

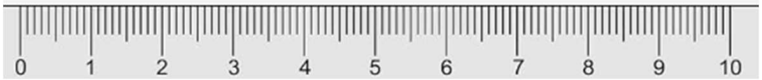
Figura 3 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$

Segmento de reta: Um segmento de reta é qualquer parte da reta compreendida entre dois pontos. Esses dois pontos são chamados de extremidades do segmento de reta. Na figura abaixo, temos o segmento de reta $\overline{AB}$ ou segmento de reta $\overline{BA}$, em que os pontos A e B são os extremos.

Figura 4 – Semirreta $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$

Medida do comprimento de um segmento de reta: É o número obtido quando comparamos um segmento considerado com outro segmento tomado como unidade de medida.

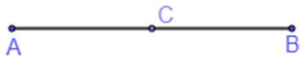
Figura 5 – medida do comprimento de um segmento de reta



1 dm = 10 cm = 100 mm

Ponto médio: é o ponto que divide um segmento de reta em dois segmentos iguais, isto é, de mesmo comprimento.

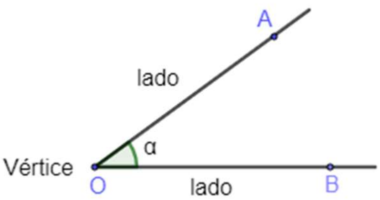
Figura 6 – ponto médio $\overline{AB}$



Temos que o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes iguais.

Ângulo: é a figura geométrica formada por duas semirretas que partem da mesma origem, e são medidos em grau (º) ou em radiano (rad), de acordo com o Sistema Internacional.

Figura 7 – ângulo $\angle \boldsymbol{AOB}$



2.1.3 POSTULADOS

Os postulados representam convenções necessárias para construir ou demonstrar lógicas matemáticas, não havendo a necessidade de serem provados ou demonstrados.

Postulado 1: O Postulado da distância

A todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.

Definição: A distância entre dois pontos é o número dado pelo postulado da distância.

Postulado 2: O Postulado da régua

Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números, isto é:

- A cada ponto da reta corresponde um único número real;
- A cada número real corresponde um único ponto da reta;
- A distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto (módulo) da diferença dos números correspondentes. $d(A, B) = \overline{AB}$

Definição: A correspondência descrita pelo postulado da régua é chamado de Sistema de Coordenadas. O número correspondente a um ponto é a coordenada do ponto.

Postulado 3: O Postulado de colocação da régua

Dados dois pontos P e Q numa reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de modo que a coordenada P seja zero (0) e a coordenada de Q seja positivo.

Definição: Dizemos que B está entre A e C se:

- A, B e C são pontos distintos de uma reta;
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Postulado 4: O Postulado da reta

Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.

Figura 8 – Postulado da reta

Definições:

i) Sejam A e B dois pontos quaisquer. O segmento $\overline{AB}$ é o conjunto $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{C/A - C - B\}$.

ii) AB é o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

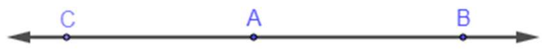
iii) Semirreta

Figura 9 – Semirreta

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C/A - B - C\}$$

Observação:

Figura 10 – Semirreta



$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semirretas opostas

Proposição 1:

Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta e x um número positivo. Então existe exatamente um ponto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AP} = x$.

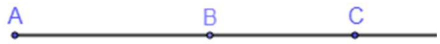
Demonstração: Podemos supor que a coordenada de A seja zero.

Figura 11 – Semirreta

Seja $x \in \mathbb{R};\ x > 0$. Então existe P tal que $\overline{AP} = |x - 0| = |x| = x$.

Definição: Um ponto B é chamado ponto médio de $\overline{AC}$ se B está entre A e C e $\overline{AB} = \overline{AC}$

Figura 12 – Ponto médio



Proposição 2:

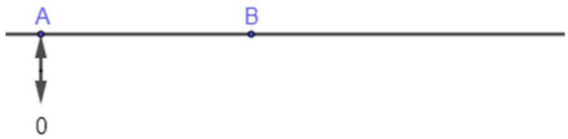
Todo segmento tem um único ponto médio.

Demonstração:

Figura 13 – Ponto médio

Queremos um ponto B tal que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$ $\therefore$ $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{2} > 0$

Figura 14 – Ponto médio



Pela proposição anterior, existe um único ponto B de $\overline{AC}$ tal que $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{2}$

Portanto, $\overline{AC}$ tem exatamente um ponto médio.

Definições:

i) O conjunto de todos os pontos é chamado de espaço.

ii) Um conjunto de pontos se diz colinear se existe uma reta que contém todos os pontos do conjunto.

Postulado 5:

i) Todo plano contém pelo menos três pontos não colineares;

ii) O espaço contém pelo menos quatro pontos não-coplanares.

Teorema 1: Se duas retas distintas se interceptam, a intersecção contém apenas um ponto.

Postulado 6:

Se dois pontos de uma reta estão em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

Teorema 2: Se uma reta intercepta um plano que não a contém, então a intersecção contém somente um ponto.

Postulado 7: O Postulado do plano

Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano e três pontos não colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.

Teorema 3: Dados uma reta e um ponto fora dela, existe exatamente um plano que os contém.

Teorema 4: Dados duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que os contém.

Postulado 8

Se dois planos distintos se interceptam, a intersecção é uma reta.

Definição: Um conjunto A é convexo se para todo par de pontos *P* e *Q* do conjunto, o segmento $\overline{PQ} \subset A$.

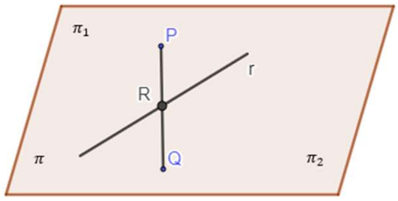
Postulado 9: O postulado de separação do plano

Dados uma reta e um plano que as contém, os pontos do plano que não pertencem à reta formam dois conjuntos tais que:

i) cada um dos conjuntos é convexo;

ii) se P pertence a um dos conjuntos e Q pertence ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$, intercepta a reta.

Figura 15 – Semiplanos



- π_1 e π_2 são chamados de semiplanos;
- r é chamada a origem de cada um dos semiplanos.

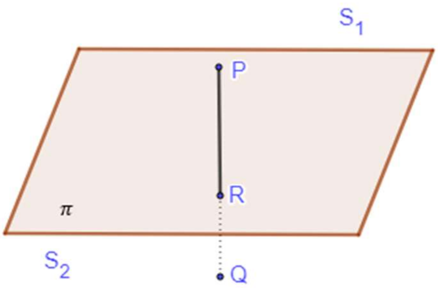
Postulado 10: O Postulado de separação do espaço

Os pontos no espaço que não pertencem a um plano dado formam dois conjuntos, tais que:

i) cada um deles é convexo, e

ii) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então $\overline{PQ}$ intercepta o plano.

Figura 16 – Separação do espaço



S_1 e S_2 são chamados de semiespaços e o plano é a origem de cada um deles.

Postulado 11: O Postulado da construção de um ângulo

A todo ângulo $\angle \boldsymbol{AOB}$ corresponde um número real α entre 0º e 180º.

Como consequência do postulado acima, a medida de angulo que utilizaremos é a unidade de graus (°).

2.1.4 Condições que garantem paralelismo

Duas retas podem estar situadas no espaço de três modos:

- Elas se interceptam em um ponto, ou seja, são coplanares.

- Não são coplanares e não se interceptam. Neste caso, são chamadas reversas.
- As duas retas podem estar num mesmo plano, sem se interceptarem. Neste caso, dizemos que as retas são paralelas.

Definição: Duas retas são paralelas se são coplanares e não se interceptam.

Teorema: Duas retas paralelas estão contidas em exatamente um plano.

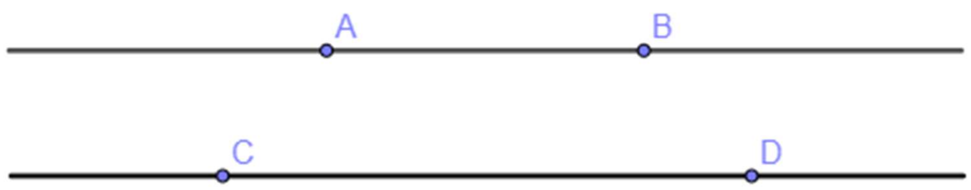
Demonstração: Se L_1 e L_2 são paralelas, então sabemos, de início, a partir da definição, que elas estão contidas em um plano E. Precisamos mostrar que estão contidas em um único plano.

Seja P um ponto de L_2. Existe apenas um plano contendo L_1 e P. Portanto, existe apenas um plano contendo L_1 e L_2, porque todo plano que contém L_2, contém P.

Escrevemos $L_1 \parallel L_2$ para significar que L_1 e L_2 são paralelas. Se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão contidos em retas paralelas, diremos, que os segmentos são paralelos e escreveremos $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

O mesmo diremos de duas semirretas, uma semirreta e um segmento e assim por diante.

Figura 17 – Retas paralelas



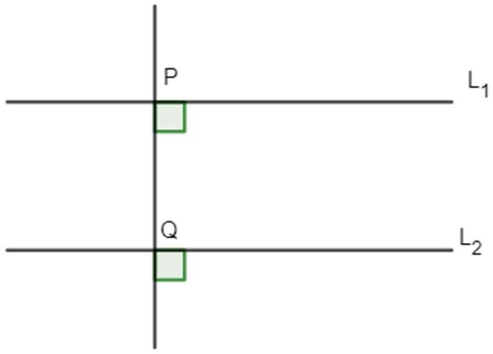
Por exemplo, dado que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, podemos também escrever $\overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BA} \parallel \overline{DC}$.

Como cada uma das retas se prolonga infinitamente nos dois sentidos e, para dizer se as retas se interceptam, pode parecer que precisamos examinar as duas retas inteiras. Em algumas situações, podemos dizer que duas retas são paralelas olhando apenas para um pequeno segmento de cada uma, como mostra o teorema seguinte.

Teorema: Duas retas em um plano são paralelas se ambas forem perpendiculares a uma mesma reta.

Lembrando que retas perpendiculares são retas que se interceptam formando ângulos de 90º.

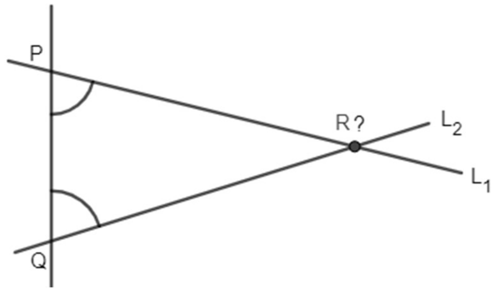
Figura 18 – Retas paralelas e perpendiculares



Demonstração: Dados: $L_1 \perp L$ em P, $L_2 \perp L$ em Q. L_1 e L_2 são coplanares. Precisamos mostrar que elas não se interceptam.

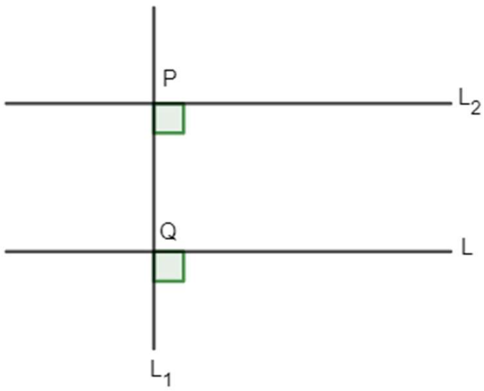
Suponha que L_1 intercepte L_2, em um ponto R. Então, existem duas perpendiculares a L, por R, isto é impossível. Portanto $L_1 \parallel L_2$, como queríamos demonstrar.

Figura 19 – Retas coplanares



Teorema: Seja L uma reta e P um ponto fora de L. Então existe pelo menos uma reta por P, paralela a L.

Figura 20 – Retas paralelas

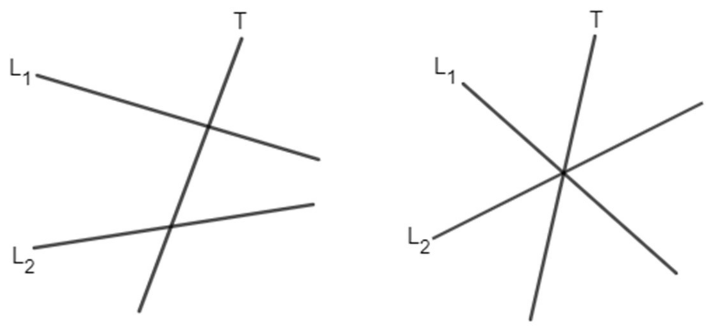


Demonstração: Seja L_1 a perpendicular a L por P. Seja L_2 a perpendicular a L_1 por P. Pelo teorema anterior, temos $L_2 \parallel L_1$, como queríamos demonstrar.

Agora, investiguemos um pouco mais a fundo as condições nas quais podemos dizer que duas retas são paralelas.

Na figura à esquerda, abaixo a reta T é uma transversal em relação às retas coplanares L_1 e L_2.

Figura 21 – Reta transversal

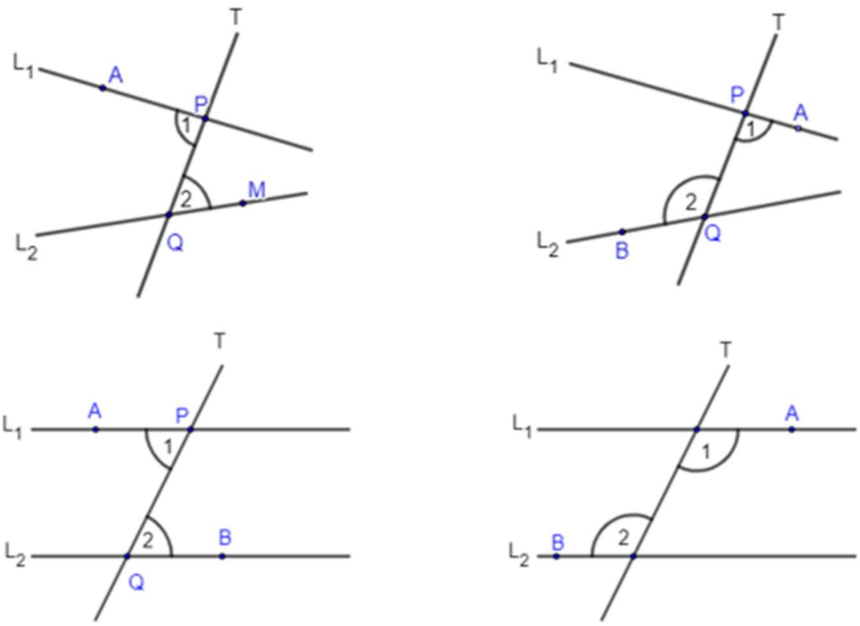


Na figura à direita, T não é uma transversal. Mais precisamente:

Definição: Uma transversal em relação a duas retas coplanares é uma reta que as intercepta em dois pontos distintos.

Em cada uma das figuras seguintes, $\angle 1$ e $\angle 2$ são ângulos alternos internos.

Figura 22 – Ângulos alternos internos

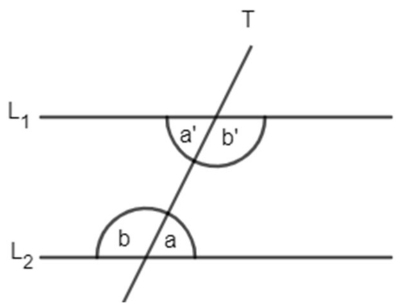


Observe que as retas cortadas pela transversal podem não ser paralelas. Os símbolos nas figuras sugerem como devemos descrever ângulos alternos internos em uma definição.

Definição: Dadas duas retas L_1 e L_2, cortadas por uma transversal T nos pontos P e Q, sejam A um ponto de L_1 e B um ponto de L_2, tais que A e B estão em lados opostos de T. Então $\angle APQ$ e $\angle PQB$ são ângulos alternos internos.

Teorema: Se duas retas são cortadas por uma transversal e se um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes, então o outro par de ângulos alternos internos também é formado por ângulos congruentes.

Figura 23 – Ângulos congruentes

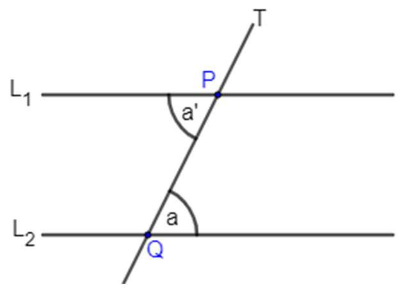


Isto é, se $\angle a \cong \angle a'$, então $\angle b \cong \angle b'$. E se $\angle b \cong \angle b'$, então $\angle a \cong \angle a'$

2.1.5 Teorema AIP (Alternos-Internos-Paralelas)

Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.

Figura 24 – Ângulos alternos internos paralelas

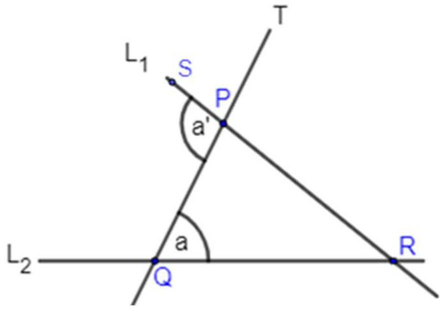


Demonstração: Seja T uma transversal, interceptando L_1 e L_2 em P e Q. É dado que um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes. Pelo teorema precedente, temos:

i) Ambos os pares de ângulos alternos internos são formados por ângulos congruentes.

Suponha, agora, que L_1 intercepte L_2 em um ponto R. Mostraremos que isto leva a uma contradição de (i).

Figura 25 – Ângulo externo



Seja S um ponto de L_1, no lado T oposto a R. Então $\angle SPQ$ é um ângulo externo do triângulo $\Delta\, PQR$ e $\angle\, PQR$ é um de seus ângulos internos não adjacentes. Pelo teorema do ângulo externo,

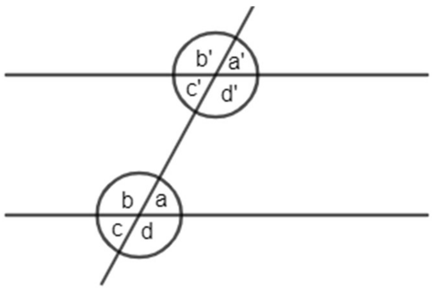
(ii) $\angle SPQ\ >\ \angle PQR$.

Isto contradiz (i), porque estes ângulos são alternos internos. Portanto, L_1 não intercepta L_2 e $L_1 \parallel L_2$, como queríamos demonstrar.

2.1.6 Ângulos correspondentes

Na figura abaixo, os ângulos assinalados com $\angle a$ e $\angle a'$ são chamados ângulos correspondentes.

Figura 26 – Ângulos correspondentes

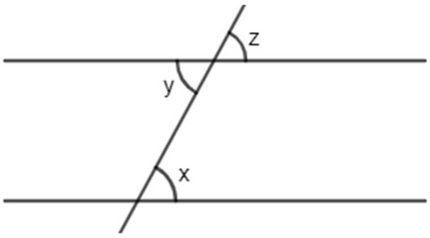


Da mesma forma, $\angle b$ e $\angle b'$ são ângulos correspondentes; os pares $\angle c$ e $\angle c'$, e $\angle d$ e $\angle d'$ também formam ângulos correspondentes.

Demonstração: Dadas duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, obtemos oito ângulos. Vejamos: os pares de ângulos $\angle a$ e $\angle a'$; $\angle b$ e $\angle b'$; $\angle c$ e $\angle c'$; $\angle d$ e $\angle d'$ são chamados ângulos correspondentes. Sabemos que $\angle a'$ e $\angle c'$ são opostos pelo vértice, assim como $\angle a$ e $\angle c$. Portanto a medida desses ângulos é a mesma, ou seja, $\angle a = \angle c$ e $\angle a' = \angle c'$. Porém, como r // s, também podemos concluir que $\angle a' = \angle a$ e $\angle c' = \angle c$, como queríamos demonstrar. Digite a equação aqui.

Definição: Se duas retas são cortadas por uma transversal, se $\angle x$ e $\angle y$ são ângulos alternos internos e se $\angle y$ e $\angle z$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\angle x$ e $\angle z$ são ângulos correspondentes.

Figura 27 – Retas paralelas cortadas por uma transversal



Teorema: Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes, então qualquer par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes.

Teorema: Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.

2.2 O POSTULADO DAS PARALELAS

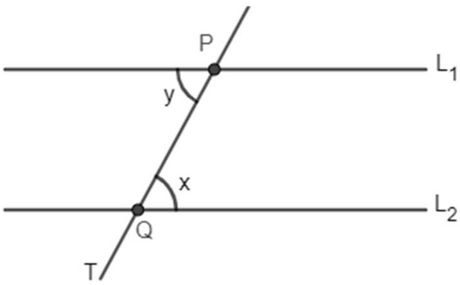
Por um ponto fora de uma reta, existe somente uma reta paralela à reta dada.

Observe que, desde que demonstramos que as paralelas existem, o postulado precisa apenas dizer que a paralela existente é única.

Teorema Paralelas - ângulos alternos internos

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

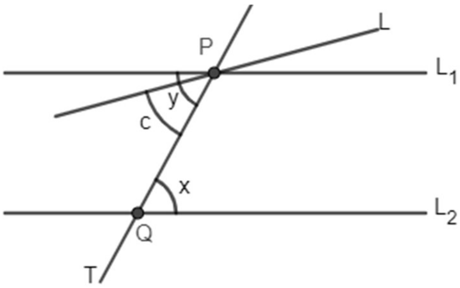
Figura 28 – Ângulos alternos internos



Demonstração:

São dadas duas paralelas L_1 e L_2 e uma transversal T, interceptando as paralelas em P e Q. Suponha que $\angle x$ e $\angle y$ não são congruentes. Seja L a reta por P para a qual os ângulos alternos internos são congruentes. Ou seja, na figura abaixo, $\angle x \cong \angle c$. Pelo Postulado da Construção de um ângulo, L é única; isto significa que $L \neq L_1$.

Figura 29 – Retas paralelas e concorrentes



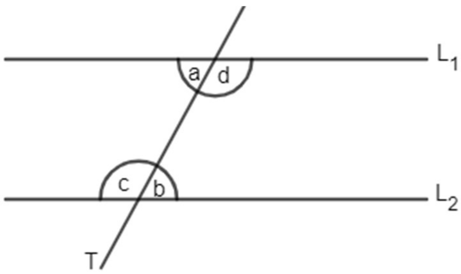
Como $L \neq L_1$, segue-se que existem duas retas por P, paralelas a L_2. Isto contradiz o Postulado das Paralelas. Portanto, $\angle x \cong \angle y$, como queríamos demonstrar.

Teorema: Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, cada par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes.

Teorema: Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos internos do mesmo lado da transversal são suplementares.

Sendo dadas as retas L_1 e L_2, com $L_1 \parallel L_2$ e uma transversal T, então $\angle b$ e $\angle d$ são suplementares, da mesma forma que $\angle a$ e $\angle c$ também são.

Figura 30 – Ângulos suplementares

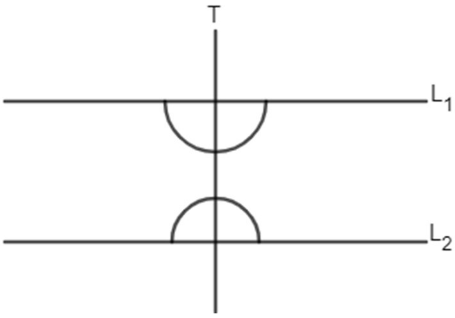


Teorema: Em um plano, se duas retas são paralelas a uma terceira, são elas paralelas entre si.

Teorema: Em um plano, se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular à outra.

Uma rápida demonstração deste teorema é sugerida pela figura abaixo,

Figura 31 – Ângulos retos

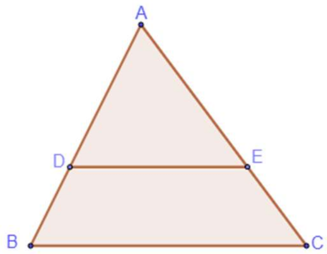


Um ângulo é um ângulo reto se, e somente se, é congruente a um ângulo com o qual forma um par linear.

2.3 TEOREMA FUNDAMENTAL SOBRE PROPORCIONALIDADE E SEU RECÍPROCO

Consideremos um triângulo ΔABC e um segmento $\overline{DE}$, paralelo a base $\overline{BC}$ cortando o triângulo. Parece que a correspondência $ABC \leftrightarrow ADE$ deve ser uma semelhança. De fato, é bastante fácil provar que os ângulos correspondentes são congruentes.

Figura 32 – Triângulos semelhantes



2.3.1 O Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade

Primeiramente vamos definir o que é razão e proporção.

A palavra **razão** vem do latim ratio e significa “divisão”. Quando comparamos duas quantidades ou medidas por meio de uma divisão, o quociente dessa divisão recebe o nome de razão.

A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por $\frac{a}{b}$.

Já a **proporção** é uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões.

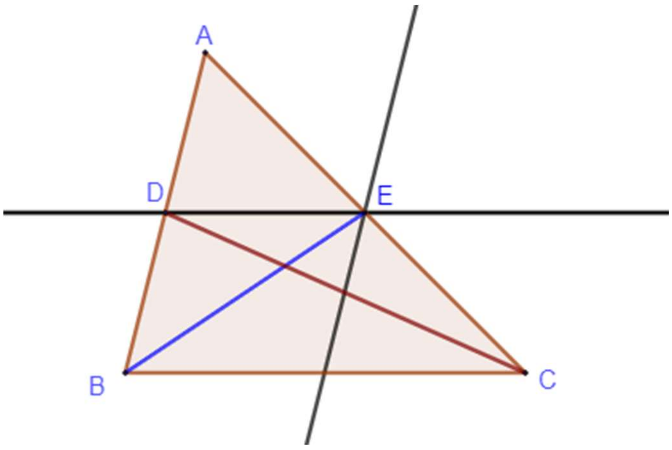
Quatro números racionais a, b, c e d, diferentes de zero, tomados nessa ordem, formam uma proporção quando: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a \div b \ = \ c \div d$. Lê-se: a está para b, assim como c está para d.

Teorema: Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados, ou seja:

Se $ED \parallel BC$, então

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Figura 33 – Teorema fundamental de proporcionalidade



Para demonstrar esse teorema inicialmente vamos relembrar que a área é a medida de uma superfície. Para calcular a área de um triângulo qualquer, o método mais comum é multiplicar o comprimento da base e da altura e dividir por dois.

Calculemos:

$$\frac{Área\ \Delta BDE}{Área\ \Delta ADE} = \frac{BD \cdot h}{2} \div \frac{\mathrm{AD} \cdot h}{2} = \frac{BD \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{\mathrm{AD} \cdot h} = \frac{BD}{AD}$$

$$\frac{Área\ \Delta CED}{Área\ \Delta EAD} = \frac{CE \cdot h}{2} \div \frac{EA \cdot h}{2} = \frac{CE \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{EA \cdot h} = \frac{CE}{EA}$$

Observamos que a $Área\ \Delta BDE = \ Área\ \Delta CED$.

Então:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{EA} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{AD} + 1 = \frac{CE}{EA} + 1 \quad \Leftrightarrow \frac{BD}{AD} + \frac{\mathrm{AD}}{AD} = \frac{CE}{EA} + \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EA}} \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \qquad (I)$$

Analogamente:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{EA} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AD}{BD} + 1 = \frac{AE}{CE} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AD}{BD} + \frac{BD}{BD} = \frac{AE}{CE} + \frac{CE}{CE} \Leftrightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \qquad (I)$$

Observação:

De (I):

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Longrightarrow AB = \frac{AC \cdot AD}{AE}$$

De (II) que é equivalente a I

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \Longrightarrow AB = \frac{AC \cdot BD}{CE}$$

Fazendo $(I) = (II)$

$$\frac{AC \cdot AD}{AE} = \frac{AC \cdot BD}{CE} \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

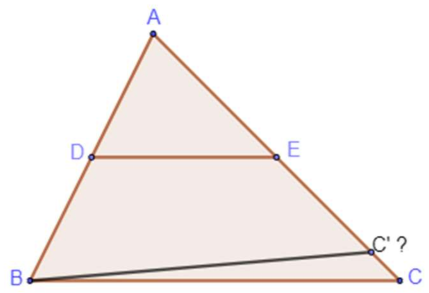
como queríamos demonstrar.

2.3.2 O recíproco do Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade

Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a estes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.

É dado o ΔABC. Seja D um ponto entre A e B e seja E um ponto entre A e C.

Figura 34 – Recíproco do Teorema Fundamental



Se

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Então $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Demonstração:

Seja $\overleftrightarrow{BC'}$ uma reta por B, paralela a $\overleftrightarrow{DE}$, interceptando $\overleftrightarrow{AC}$ em C'. Pelo Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$$

Como, por hipótese,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Temos

$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}$$

e $AC' = AC$. Portanto $C = C'$ e $DE \parallel BC$, como queríamos demonstrar.

2.4 POSTULADO E TEOREMAS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Duas figuras planas são congruentes quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões, ou seja, o mesmo tamanho.

Definimos dois triângulos como congruentes quando é possível perceber uma correspondência de igualdade entre as medidas dos lados e dos ângulos desses triângulos, ou seja, dois triângulos são congruentes quando os lados e ângulos correspondentes possuem as mesmas medidas.

Postulado Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Toda correspondência LAL é uma congruência, pois se dois lados e o ângulo formado entre esses lados são congruentes, então, os triângulos são congruentes.

Teorema Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

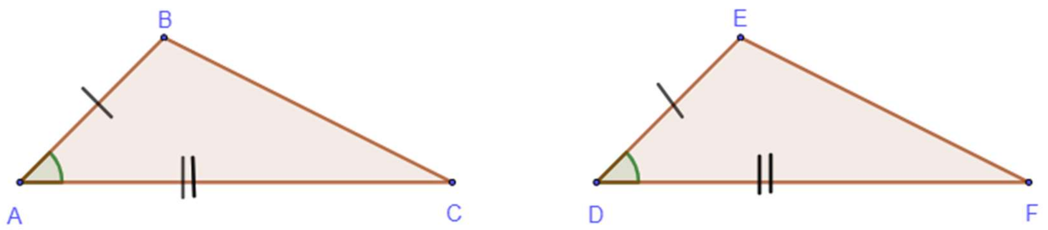
Toda correspondência ALA é uma congruência, pois se dois ângulos são congruentes e o lado que está entre eles também é congruente, então, esses triângulos são congruentes.

Teorema Lado-Lado-Lado (LLL)

Toda correspondência LLL é uma congruência, pois se os lados forem congruentes, então, os triângulos são congruentes.

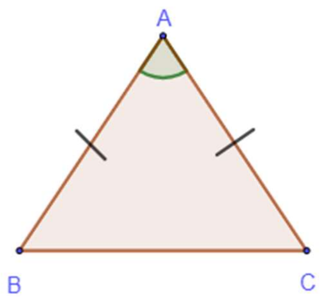
Em muitos casos, aplicaremos o postulado e os teoremas a correspondências entre dois triângulos diferentes. Em algumas situações, podemos estabelecer uma correspondência de um triângulo sobre si próprio; e o postulado e os teoremas acima se aplicam a tais casos. Assim uma correspondência LAL pode ser ilustrada da seguinte forma:

Figura 35 – Correspondência LAL



Ou, possivelmente, como a figura abaixo. Aqui os símbolos nos dizem $ABC \leftrightarrow ACB$ é uma correspondência LAL. Podemos, então, aplicar o Postulado LAL e concluir que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$.

Figura 36 – Correspondência LAL

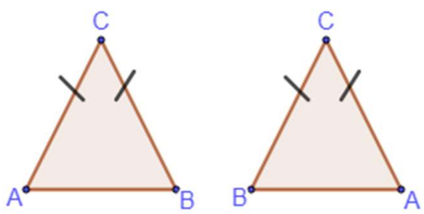


$$\Delta ABC \cong \Delta ACB$$

Teorema do triângulo isósceles

Se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Figura 37 – triângulo isósceles



Hipótese: $\Delta ABC, \overline{AB} \equiv \overline{AC}$

Tese: $\hat{B} \equiv \hat{C}$

Demonstração:

Considerando os triângulos ABC e ACB, por hipótese temos:

$$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$$

$$C\hat{A}B \equiv C\hat{A}B$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{AB}$$

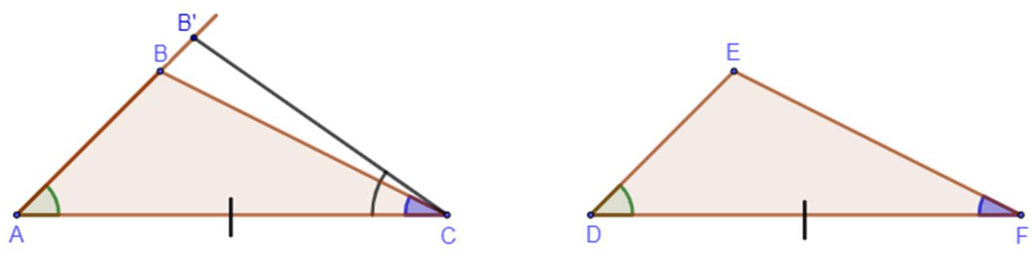
Pelo caso de congruência LAL o $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$

Portanto, $\hat{B} \equiv \hat{C}$, como queríamos demonstrar.

Teorema Ângulo – Lado – Ângulo (ALA) para congruência

Dada a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF,$

Figura 38 – Correspondência ALA



Se:

$$\angle A \cong \angle D$$

$$AC \cong DF$$

$\angle C \cong \angle F$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Demonstração: Seja B' tal que $\overline{AB'} = \overline{DE}$. Então pelo postulado LAL $\Longrightarrow$ $\Delta ACB' \cong \Delta DFE$ pelo caso LAL.

$\angle ACB' \cong \angle DFE$ pois são ângulos correspondentes.

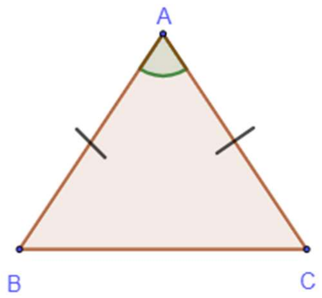
$B' = B$ pois duas retas distintas se interceptam no máximo em um ponto.

Portanto, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, como queríamos demonstrar.

Teorema Lado – Lado – Lado (LLL) por congruência

Consideremos o triângulo isósceles ABC.

Figura 39 – Correspondência LLL



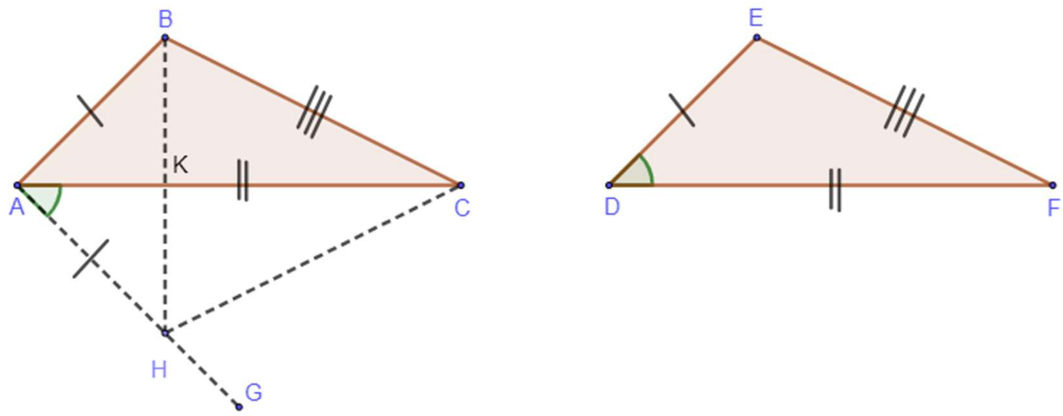
Como $ABC \leftrightarrow ACB$ é uma correspondência LAL, sabemos que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ e assim $\angle B \cong \angle C$.

Podemos, portanto usar o Teorema do Triângulo Isósceles para demonstrar o LLL.

Suponhamos agora que nos é dada uma correspondência LLL

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

Figura 40 – Correspondência LLL



Demonstração:

Se $AB = DE, AC = DF, BC = EF$ então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Existe um ponto G no lado oposto de AC relativamente a B, tal que $\angle CAG \cong \angle D$. E pelo Postulado da Construção de um ângulo.

Existe um ponto H de AG tal que AH = DE.

$AHC \leftrightarrow DEF$ é uma correspondência LAL pelas passagens anteriores.

$\Delta AHC \cong \Delta DEF$ pelo caso de congruência LAL.

Assim temos uma reprodução congruente do ΔDEF ao lado do ΔABC. Isso termina a primeira metade da demonstração. Na segunda metade, vamos mostrar que $\Delta ABC \cong \Delta AHC$. A seguinte demonstração se aplica ao caso visto na figura, no qual BH intercepta AC em um ponto entre A e C.

$\angle ABH \cong \angle AHB$ pelo Teorema do Triângulo Isósceles

$\angle HBC \cong \angle CHB$ pelo Teorema do Triângulo Isósceles

$\angle ABC \cong \angle AHC$ pelo Postulado de adição de ângulos

$ABC \leftrightarrow AHC$ é uma correspondência LAL.

$\Delta ABC \cong \Delta AHC$ pelo caso LAL.

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ pelo caso LAL.

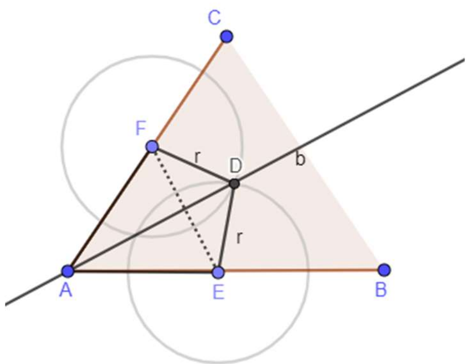
Assim demonstramos que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

2.4.1 Aplicações envolvendo congruência de triângulos

1ª) Prove que $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$

Bissetriz é a semirreta que parte do vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes.

Figura 41 – Bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$



$$\overline{AE} \equiv \overline{AF}$$

$$\overline{ED} \equiv \overline{FD}$$

$\overline{AD}$ é comum

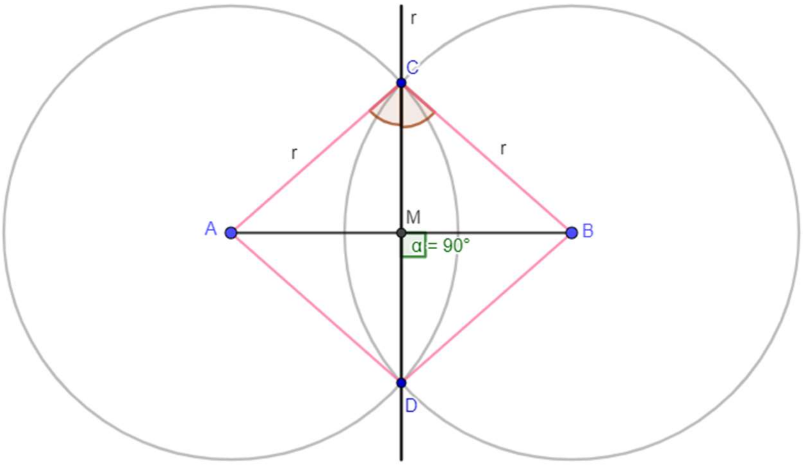
Então pelo caso de congruência (LLL) o $\Delta AED \equiv \Delta AFD$

$\Delta AED \equiv \Delta AFD \Longrightarrow E\hat{A}D \equiv F\hat{A}D \Longrightarrow$ b é bissetriz de $B\hat{A}C$

2ª) Prove que M é o ponto médio de um segmento de reta

Tomemos o segmento $\overline{AB}$. Queremos provar que r M é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Primeiramente traçamos duas circunferências de mesmo raio partindo dos pontos A e B, conforme figura abaixo.

Figura 42 – Ponto médio de um segmento de reta



Analisando as construções temos:

i) $\overline{AC} \equiv \overline{BC} = r$

$\overline{DA} \equiv \overline{DB} = r$

$\overline{CD}$ é comum

Então pelo caso de congruência (LLL) o $\Delta ACD \equiv \Delta BCD$

$\Delta ACD \equiv \Delta BCD \implies A\hat{C}M \equiv B\hat{C}M$

ii) $\overline{AC} \equiv \overline{BC} = r$

$A\hat{C}M \equiv B\hat{C}M$

$\overline{CM}$ é comum

Então pelo caso de congruência (LAL) o $\Delta ACM \equiv \Delta BCM$

$\Delta ACM \equiv \Delta BCM \implies \overline{AM} \equiv \overline{BM}\ (1)$

De (1), M é o ponto médio de AB.

iii) $A\widehat{M}C \equiv B\widehat{M}C\ (2)$, pois $\Delta ACM \equiv \Delta BCM$

$A\widehat{M}C + B\widehat{M}C = 180°\ (3)$

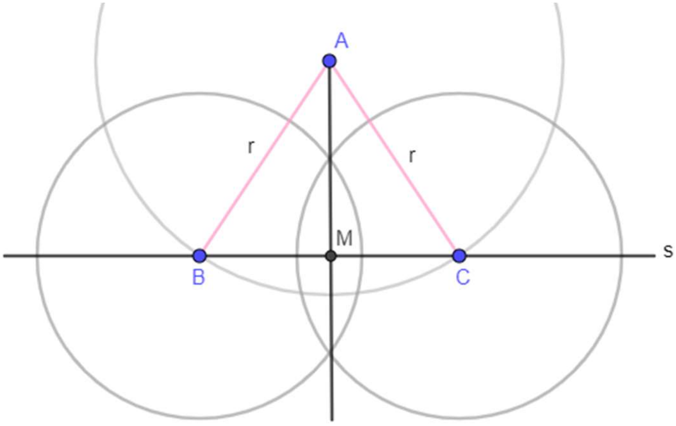
Substituindo (2) em (3), temos: $AA\widehat{M}C \equiv B\widehat{M}C = 90°$.

No ΔACB, *CM* é a mediana relativa ao lado *AB*.

3ª) Prove que uma reta é perpendicular a outra passando por um ponto dado

Seja A um ponto não pertencente a reta s.

Figura 43 – Reta perpendicular



$$\overline{AB} \equiv \overline{AC} = r$$

$$\overline{BM} \equiv \overline{MC}$$

$\overline{AM}$ é comum

Então pelo caso de congruência (LLL) o $\Delta ABM \equiv \Delta ACM$

$\Delta ABM \ \equiv \Delta ACM \ \Longrightarrow \ A\widehat{M}B \ \equiv A\widehat{M}C$

Como $A\widehat{M}B \ + \ A\widehat{M}C \ = \ 180°$ e $A\widehat{M}B \ \equiv \ A\widehat{M}C$, temos que $A\widehat{M}B \ \equiv \ A\widehat{M}C = 90°$

Portanto, $\overleftrightarrow{AM} \perp s$

2.5 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Duas figuras são semelhantes quando têm a mesma forma, mas não têm necessariamente o mesmo tamanho. Se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações.

2.5.1 Teorema Ângulo-Ângulo-Ângulo (AAA) sobre Semelhança

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.

É dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dois triângulos. Se $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demonstração:

Sabemos, por hipótese, que os ângulos correspondentes são congruentes, precisamos provar que os lados correspondentes são proporcionais. Isto é,

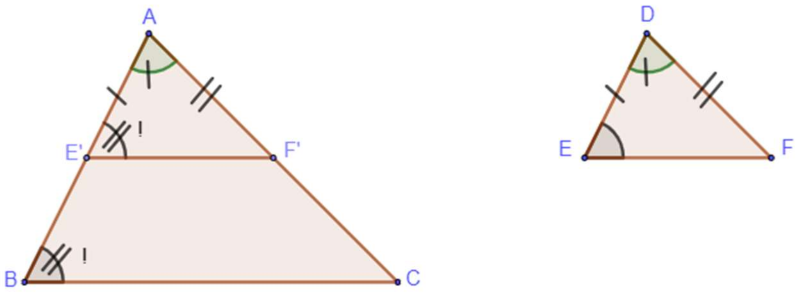
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Mostraremos que a primeira dessas equações é válida. Com uma demonstração idêntica, mudando apenas a notação, seguir-se-á que a segunda equação também é válida.

Inicialmente demonstraremos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Figura 44 – Semelhança AAA



Sejam E’ e F’ pontos de AB e AC tais que AE’ = DE e AF’ = DF. Por LAL temos $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$

Portanto, $\angle AE'F' \cong \angle E'$. Como $\angle E' \cong \angle B$, segue-se que $\angle AE'F' \cong \angle B$.

Vamos considerar dois casos:

1º caso: Se E’= B então $\Delta AE'F'$ e ΔABC são o mesmo triângulo. Nesse caso, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ e

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Pois cada uma dessas frações é igual a 1.

2º caso: Se E’ é diferente de B, $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Então pelo Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade, temos:

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Como $AE' = DE$ e $AF' = DF$, segue-se que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

como queríamos demonstrar.

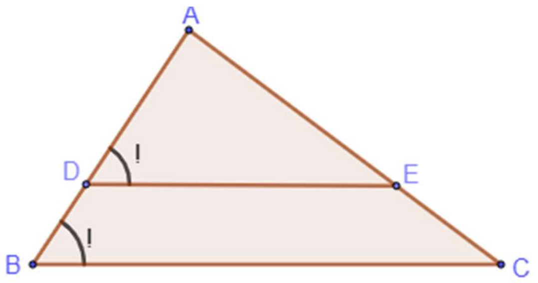
Lembrando, que se dois pares de ângulos são congruentes, então o terceiro par também tem de ser congruente. A razão disso, é claro, está no fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

2.5.2 O Corolário AA

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Se uma reta, paralela a um lado de um triângulo, interceptar os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina um triângulo semelhante ao triângulo dado.

Figura 45 – Corolário AA



Demonstração: Quando as retas paralelas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{AB}$, os ângulos correspondentes são congruentes. Portanto, $\angle ADE \cong \angle B$. Como $\angle A \cong \angle A$, segue-se que, pelo Corolário AA, que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

2.5.3 Teorema Lado-Ângulo-Lado (LAL) sobre Semelhança

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam, congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

São dados ΔABC e ΔDEF e a correspondência: $ABC \leftrightarrow DEF$

Se:

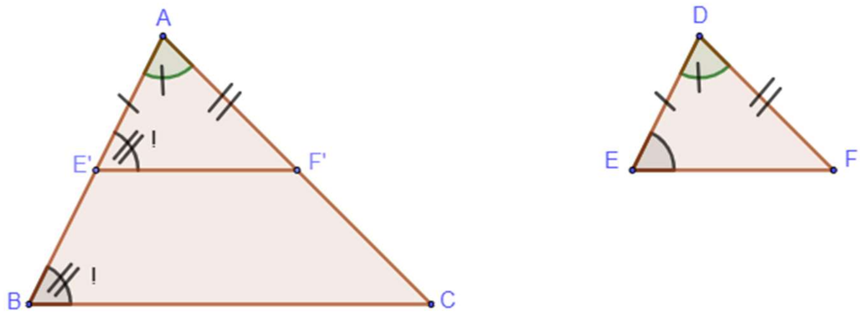
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

e

$$\angle A \cong \angle D$$

então: $\Delta ABC \approx \Delta DEF$

Figura 46 – Semelhança AAA



Demonstração:

Sejam E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tais que AE' = DE e AF' = DF. Por LAL, temos

$$\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$$

portanto

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Pelo Teorema Fundamental sobre Proporcionalidade temos $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Portanto,

$$\angle B \cong \angle AE'F'$$

Como

$$\angle A \cong \angle A$$

Segue-se pelo Corolário AA que $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$.

Mas $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$. Portanto, pela semelhança de triângulos, temos que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ como queríamos demonstrar.

2.5.4 O Teorema Lado-Lado-Lado (LLL) sobre Semelhança

É dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança.

São dados os ΔABC e ΔDEF e a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$

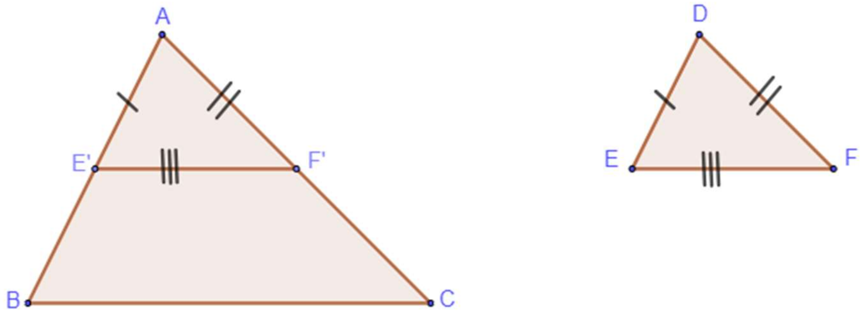
Se:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Então

$$\Delta ABC \approx \Delta DEF$$

Figura 47 – Semelhança LLL



Demonstração:

Sejam E' e F' pontos de AB e AC tais que AE' = DE e AF' = DF.

São dados:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad (1)$$

e

$$\mathrm{AE'} = \mathrm{DE};\ \mathrm{AF'} = \mathrm{DF}$$

Agora substituindo $\mathrm{AE'} = \mathrm{DE};\ \mathrm{AF'} = \mathrm{DF}$ em (1):

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Por identidade,

$$\angle A \cong \angle A$$

E aplicando o Teorema LAL sobre semelhança, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$$

E pela definição de semelhança

$$\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB} \Longrightarrow E'F' = \frac{BC \cdot AE'}{AB} \Longrightarrow E'F' = \frac{BC \cdot DE}{AB} \quad (1)$$

Agora fazendo a semelhança entre:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Longrightarrow EF = \frac{BC \cdot DE}{AB} \quad (2)$$

Portanto, de (1) em (2), temos:

$$E'F' = EF$$

logo

$$\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$$

e

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

2.6 A GEOMETRIA E A BNCC

A Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Seu principal objetivo é ser a balizadora da qualidade da educação no país por meio do estabelecimento de um patamar de aprendizagem e desenvolvimento a que todos os alunos têm direito.

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

O ensino de Geometria no Ensino Fundamental – Anos Finais, precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Deve ser enfatizadas as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança; de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica.

As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área. Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau.

Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos.

Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

2.6.1 A GEOMETRIA DO 9º ANO CONFORME BNCC

O estudo da geometria para os estudantes do 9º ano traz os seguintes objetos de conhecimento:

- Relações métricas no triângulo retângulo;
- Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração;
- Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais;
- Polígonos regulares Distância entre pontos no plano cartesiano Vistas ortogonais de figuras espaciais.

E cujas habilidades são:

- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos (EF09MA13).

- Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por transversais (EF09MA14).
- Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares (EF09MA15).
- Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano (EF09MA16).
- Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva (EF09MA17).

2.7 A GEOMETRIA E O GEOGEBRA

O GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um software de Matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo.

O GeoGebra é um software livre, disponível gratuitamente em www.geogebra.org, escrito em linguagem Java, linguagem essa orientada a objetos. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis de ensino. O projeto foi iniciado na Universidade de Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, além de ser traduzido para inúmeros países, incluindo o Brasil. O GeoGebra possui uma interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros.

As principais características do software é a realização de construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta e polígonos, assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após as contratações estarem finalizadas. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Desse modo, o Geogebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivadas e integrar funções, e ainda oferecer comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. O seu uso como ferramenta pedagógica auxilia no ensino da Matemática, pois através da observação das figuras geométricas construídas, facilita a compreensão dos conceitos matemáticos utilizados. Com a análise da construção gradual observam-se quais são as reações sofridas quando as figuras sofrem alterações dando, significado ao mesmo. Assim, aguçando a curiosidade e estabelecendo conexões entre a prática e a teoria.

Além disso, com o software Geogebra, o professor pode abordar assuntos simples e com a utilização de suas ferramentas obterá a possibilidade de abordagens de conhecimentos mais complexos das quais aumentará a capacidade de entendimento do aluno em vários campos da Matemática. O Geogebra apresenta várias versões que podem ser baixadas e instaladas no dispositivo móvel ou sistema operacional que seja utilizado no computador ou notebook. A versão utilizada neste trabalho foi o GeoGebra Classic, pois é a versão mais completa e abrange o que será proposto nas atividades.

3 TEOREMAS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA

Nesse capítulo são apresentados alguns teoremas clássicos de Geometria, bem como, demonstrações formais e visualizações dinâmicas com o uso do Geogebra.

Antes de entrarmos nos teoremas clássicos mais gerais, vamos enunciar o teorema de Thales que usaremos no decorrer do capítulo.

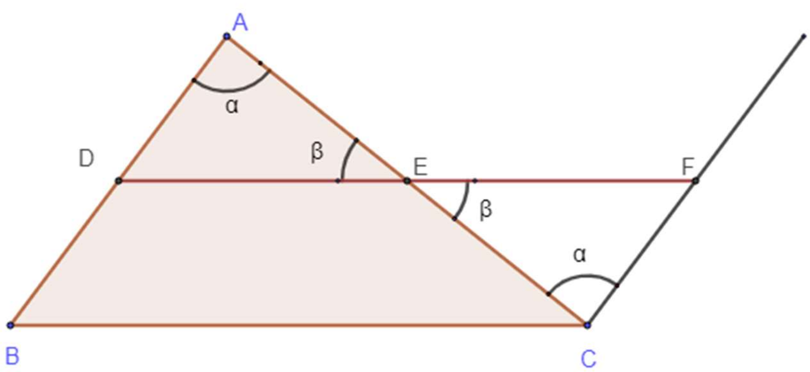
Teorema de Thales

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

3.1 Teorema da base média de um triângulo.

Vamos provar que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é a metade do comprimento deste terceiro lado.

Figura 49 - Teorema da base média de um triângulo



Seja D o ponto médio de $\overline{AB}$ e E o ponto médio de $\overline{AC}$. Vamos mostrar que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$. Construímos o triangulo FEC pela reta DE e uma paralela a AB assim,

$$\Delta DEA \cong \ \Delta FEC \ \text{ pelo caso LAL}$$

$$\Rightarrow \overline{DA} = \overline{FC} \ e \ \hat{A} = D\hat{A}E = \ F\hat{C}E$$

Portanto, temos que $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$, pois $\overline{AC}$ é uma transversal que forma um par de ângulos alternos internos congruentes.

$$\Rightarrow \overline{BD} \parallel \overline{CF} \ e \ \overline{BD} = \overline{CF}$$

$$\Longrightarrow BDFC \text{ é } um\ paralelogramo$$

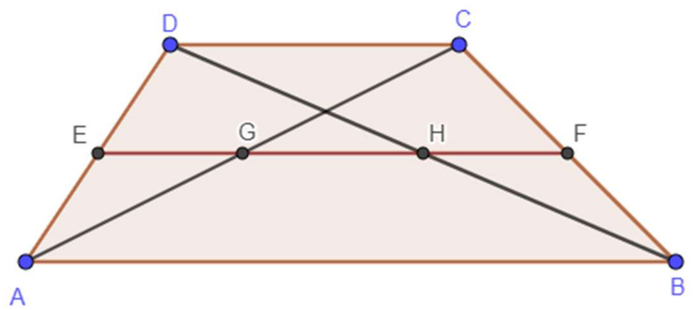
$$\Longrightarrow \overline{DF} = \overline{BC}, mas\ \overline{DF} = 2\overline{DE} \ \ \Longrightarrow \overline{DE} = \frac{1}{2}\ \overline{BC}\ e\ \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

3.2 Teorema da base média de um trapézio.

Seja o trapézio ABCD; E o ponto médio de $\overline{AD}$ e F o ponto médio de $\overline{BC}$; G e H os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então:

1) E, G, H, F são colineares e $\overline{EF} \parallel \overline{AB}\ e\ \overline{EF} \parallel \overline{CD}$
2) $\overline{EF} = \frac{1}{2}\ (\overline{AB} + \overline{CD})$; $\overline{GH} = \frac{1}{2}\ |\overline{AB} - \overline{CD}|$

Figura 48 - Teorema da base média de um trapézio



Demonstração:

No $\Delta ADC\ \ \Longrightarrow \overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{DC}$ (pela base média de um triângulo) $e\ \overline{EG} \parallel \overline{DC}$.

No $\Delta ADB\ \ \Longrightarrow \overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (pela base média de um triângulo) $e\ \overline{EH} \parallel \overline{AB}$.

Como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ então, $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ coincidem, isto é: $\overleftrightarrow{EG} = \overleftrightarrow{EH}$.

Usando o mesmo argumento nos ΔBCD e ΔACB

No $\Delta BCD\ \ \Longrightarrow \overline{FH} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ (pela base média de um triângulo) $e\ \overline{FH} \parallel \overline{CD}$

No $\Delta ACB\ \ \Longrightarrow \overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (pela base média de um triângulo) $e\ \overline{FG} \parallel \overline{AB}$

Como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ então, $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ coincidem, isto é: $\overleftrightarrow{FH} = \overleftrightarrow{FG}$.

Portanto, E, G, H, F são colineares.

Considerando:

$$\overline{EF} = \overline{EH} + \overline{HF}$$

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DC}\ \ \Longrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}\ (\overline{AB} + \overline{CD})$$

$\overline{GH} = \overline{EH} - \overline{EF} \implies \overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{DC} \implies \overline{GH} = \frac{1}{2}\,|\overline{AB} - \overline{CD}|$, como queríamos demonstrar.

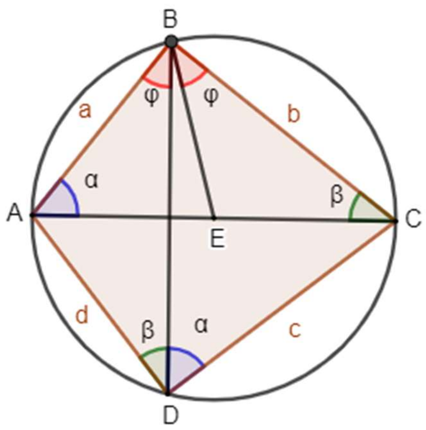
3.3 Teorema de Hiparco

Em todo quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Demonstração:

Seja o quadrilátero ABCD inscritível com lados $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$ e cujas diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$. Vamos mostrar que $\overline{BD}.\overline{AC} = ac + bd$

Figura 50 - Teorema de Hiparco



Seja $\varphi = \angle A\hat{B}D$. Podemos construir o ângulo $C\hat{B}E$ tal que m($\angle\, C\hat{B}E) = \varphi$

Observamos que:

1) $\Delta\, CBE \sim \Delta\, DBA\ (caso\ AA)$

$$\frac{\overline{CE}}{d} = \frac{b}{\overline{BD}} \implies \overline{CE}.\overline{BD} = bd\ (I)$$

2) $\Delta\, AEB \sim \Delta\, DCB\ (caso\ AA)$

$$\frac{\overline{AE}}{c} = \frac{a}{\overline{BD}} \implies \overline{AE}.\overline{BD} = ac\ (II)$$

Assim, somando (I)e (II):

$$\overline{CE}.\overline{BD} + \overline{AE}.\overline{BD} = bd + ac$$

$$\overline{BD}(\overline{CE} + \overline{AE}) = bd + ac$$

$$\overline{BD}.\overline{AC} = bd + ac$$

3.4 Teorema de Pitot

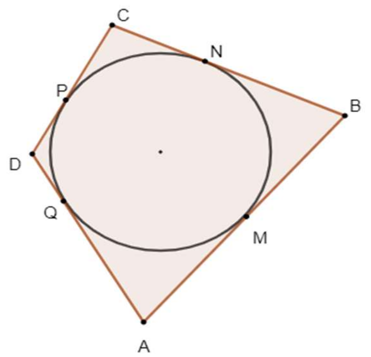
Um quadrilátero convexo ABCD, de lados, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ é circunscritível a um círculo se, e somente se, $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$.

Por definição, um quadrilátero pode ser circunscrito a uma circunferência se ocorre tangência entre seus lados e a circunferência.

Demonstração:

Sejam o círculo γ e o quadrilátero convexo ABCD circunscrito em γ, como mostra a figura.

Figura 51 - Teorema de Pitot



i) ABCD é circunscritível $\Rightarrow \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

Sejam M, N, P e Q os pontos de tangência do círculo γ aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivamente. Assim:

$$\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{AM} + \overline{MB} + \overline{CP} + \overline{PD};$$

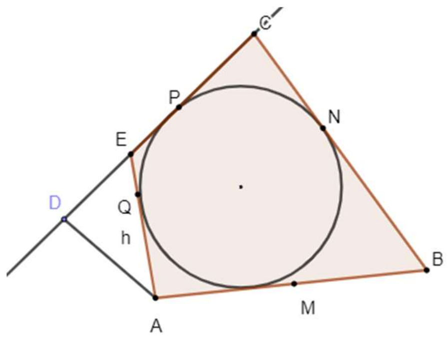
$$\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{AQ}+QM + MN + \overline{NB} + \overline{CN}+NP + PQ+\overline{QD};$$

$$\overline{AB}+\overline{CD} = \underbrace{(\overline{AQ}+\overline{QD})}_{AD} + \underbrace{(\overline{CN}+\overline{NB})}_{CB} + \underbrace{(QM+MN)+(NP+PQ)}_{QN+NQ};$$

$$\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{AD}+\overline{BC}$$

ii) Por contradição suponhamos que ABCD não é circunscritível.

Figura 52 - Teorema de Pitot



Consideremos que o círculo γ não tangencia o lado $\overline{AD}$ e tangencia os demais lados de ABCD.

Seja o ponto $E \in \overline{DC}$ tal que $\overline{CE}$ tangencia γ, assim o quadrilátero ABCE é circunscrito a γ e por (i)

$$\overline{AB} + \overline{CE} = \overline{AE} + \overline{BC} \qquad (1)$$

Por hipótese, $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ $\qquad (2)$

Subtraindo (2) de (1), temos que:

$$\overline{AB} + \overline{CD} - (\overline{AB} + \overline{CE}) = \overline{AD} + \overline{BC} - (\overline{AE} + \overline{BC})$$

$$\overline{CD} - \overline{CE} = \overline{AD} - \overline{AE}$$

$$\overline{ED} = \overline{AD} - \overline{AE}$$

$$\overline{AD} = \overline{ED} + \overline{AE} \qquad (3)$$

Como a desigualdade (3) contradiz a desigualdade triangular no triângulo ADE, o círculo γ tangencia o lado $\overline{AD}$ e o quadrilátero ABCD é circunscritível a γ, como queríamos demonstrar.

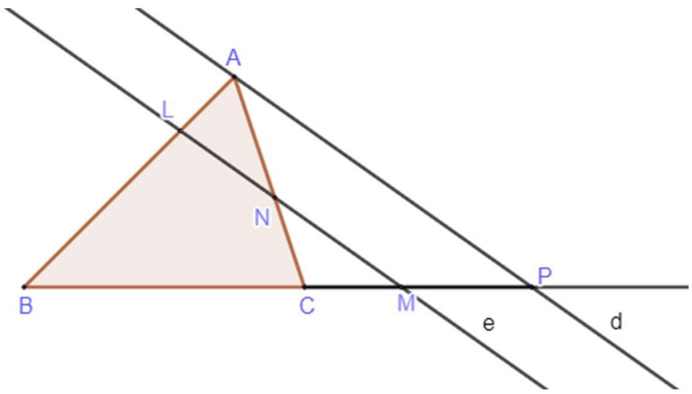
3.5 O Teorema de Menelaus

O teorema de Menelaus é util na resolução de problemas envolvendo triângulos e está relacionado com conjuntos de determinados pontos que são colineares, ou com conjuntos de segmentos que são concorrentes.

O Teorema de Menelaus, nos diz que seja um triângulo ABC e uma reta transversal *e* que corta as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ nos pontos L, M e N respectivamente. Então:

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$$

Figura 53 - Teorema de Menelaus



Demonstração: Seja $d \parallel e$; tal que $d \cap \overleftrightarrow{CB} = \{P\}$

Aplicando o Teorema de Proporcionalidade no $\Delta\, ABP$, temos:

$$\frac{\overline{LB}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MP}} \Leftrightarrow \overline{MP} \cdot \overline{LB} = \overline{LA} \cdot \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{LA} \cdot \overline{MB}}{\overline{LB}} \quad (I)$$

Aplicando o Teorema de Thales no $\Delta\, ACP$, temos:

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MP}} \Leftrightarrow \overline{MP} \cdot \overline{NC} = \overline{NA} \cdot \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{NA} \cdot \overline{MC}}{\overline{NC}} \quad (II)$$

Fazendo I = II, temos:

$$\frac{\overline{LA} \cdot \overline{MB}}{\overline{LB}} = \frac{\overline{NA} \cdot \overline{MC}}{\overline{NC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$$

3.6 Teorema de Ceva

Inicialmente vamos definir o que é Ceviana.

Ceviana é qualquer segmento de reta que parte do vértice de um triângulo e corta o lado oposto a esse vértice. São exemplos de cevianas: mediana, altura e bissetriz.

Mediana é uma ceviana que liga o vértice de onde ela parte ao ponto médio do lado oposto ao vértice.

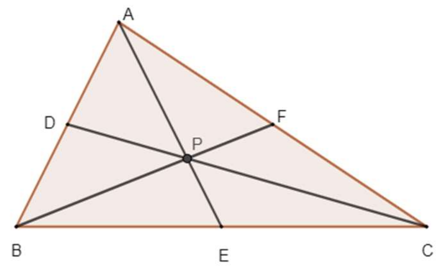
A altura é uma ceviana que parte de um vértice e faz 90º com o lado oposto ao mesmo, ou seja, ela é perpendicular ao lado oposto a esse vértice. De cada vértice do triângulo parte uma altura.

Já a bissetriz é a semirreta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes. Em um triângulo, de cada vértice parte uma bissetriz.

Teorema: Sejam D, E e F pontos médios, respectivamente, sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo ΔABC. As cevianas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$ intersectam-se em um ponto P, se, e somente se,

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = 1$$

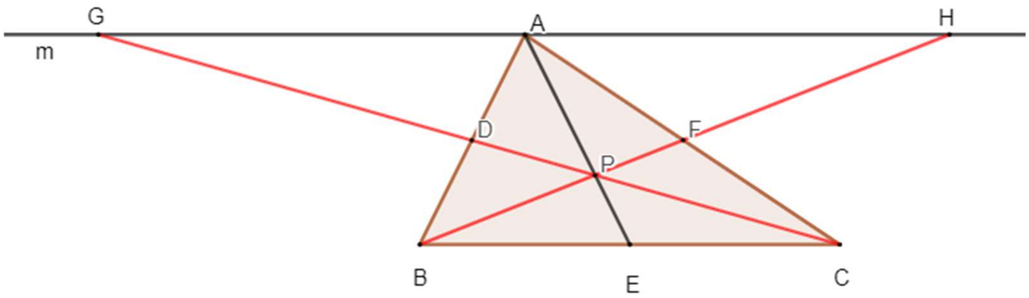
Figura 54 - Teorema de Ceva I



Demonstração:

Suponha que as cevianas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$ do triângulo ΔABC são concorrentes no ponto P. Pelo ponto A traçamos uma reta *m* paralela à reta suporte do lado $\overline{BC}$. Prolongamos as cevianas $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$ até interceptar a reta m, nos pontos G e H respectivamente.

Figura 55 - Teorema de Ceva II



Aplicando a semelhança dos triângulos:

$\Delta\, GDA \sim \Delta BDC$ (possuem dois ângulos alternos congruentes)

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{CB}} \qquad (I)$$

$\Delta\, AFH \sim \Delta BFC$ (possuem dois ângulos alternos congruentes)

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AH}} \qquad (II)$$

$\Delta\, AHP \sim \Delta EBP$. Daí obtemos

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PE}} \qquad (III)$$

$\Delta\, GAP \sim \Delta CEP$. Daí obtemos

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PE}} \qquad (IV)$$

De (III) e (IV) obtemos:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} \qquad (V)$$

Multiplicando as relações $(I), (II)$e (V) (I) e simplificando, temos:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{AH}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} = 1$$

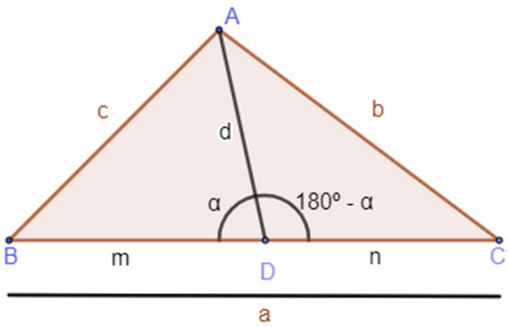
3.7 Teorema de Stewart

O Teorema de Stewart relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana, sendo aplicável a uma ceviana qualquer.

Considerando um triângulo ABC e um ponto D do lado $\overline{BC}$, vale a relação $c^2n + b^2m - d^2a = amn$, onde a, b e c são as medidas dos lados, d é a ceviana $\overline{AD}$ no lado $\overline{BC}$.

Demonstração:

Figura 56 - Teorema de Stewart



Na figura, m e n são as medidas são as medidas dos segmentos determinados pela ceviana d no lado $\overline{BC}$, α é a medida do $\measuredangle ADB$. Vamos aplicar a Lei dos Cossenos nos ΔADC e ΔADB, respectivamente:

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2dncos(180° - \alpha) \qquad (1)$$

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2dmcos\alpha \qquad (2)$$

Considerando $cos\alpha = -cos(180° - \alpha)$, podemos reescrever a equação 1 como

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2dn(-cos\alpha) \implies b^2 = d^2 + n^2 + 2dncos\alpha \qquad (3)$$

Subtraindo (2) e (3), temos:

$$c^2 - b^2 = d^2 - d^2 + m^2 - n^2 - 2dmcos\alpha - 2dncos\alpha$$

$$2dmcos\alpha + 2dncos\alpha = +m^2 - n^2 - c^2 + b^2$$

$$cos\alpha = \frac{+m^2 - n^2 - c^2 + b^2}{2d(m+n)} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (2), temos:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2dm\frac{+m^2 - n^2 - c^2 + b^2}{2d(m+n)}$$

$$c^2 = d^2 + m^2 - m\frac{+m^2 - n^2 - c^2 + b^2}{(m+n)}$$

$$c^2(m+n) = d^2(m+n) + m^2(m+n) - m(m^2 - n^2 - c^2 + b^2)$$

$$c^2m + c^2n = d^2m + d^2n + m^3 + m^2n - m^3 + mn^2 + mc^2 - mb^2$$

$$c^2n = d^2m + d^2n + m^2n + mn^2 - mb^2$$

$$c^2n + mb^2 = d^2(m+n) + mn(m+n) \qquad (5)$$

Como $m + n = a$, vamos reescrever a equação 5:

$$c^2n + mb^2 = d^2a + mna$$

$$c^2n + mb^2 - d^2a = mna$$

$$\frac{c^2n}{mna} + \frac{mb^2}{mna} - \frac{d^2a}{mna} = \frac{mna}{mna}$$

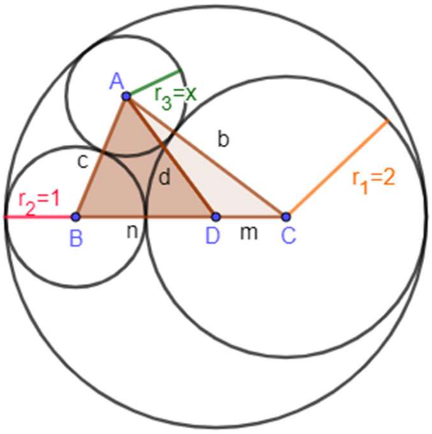
$$\frac{c^2}{ma} + \frac{b^2}{na} - \frac{d^2}{mn} = 1$$

3.7.1 Aplicações do Teorema de Stewart

Nessa seção apresento quatro exercícios que relatam a aplicação do Teorema de Stewart.

1ª) Sejam 3 circunferências tangentes duas a duas inscritas em uma quarta circunferência tangente às três primeiras, em que $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$. Calcular o raio x, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 57 – Circunferências tangentes



Do triângulo ABC, podemos construir as seguintes relações:

$$\overline{CB} = a, \overline{BA} = c \text{ e } \overline{AC} = b$$

$$\overline{CD} = m = 1, \quad \overline{DB} = n = 2, \quad \overline{CB} = a = m + n = 3$$

$$\overline{BA} = c = 1 + x$$

$$\overline{AC} = b = x + 2$$

$$\overline{AD} = d = 3 - x$$

Aplicando o Teorema de Stewart:

$$\frac{c^2}{an} + \frac{b^2}{am} - \frac{\overline{AD}^2}{nm} = 1$$

$$\frac{(1+x)^2}{3 \cdot 2} + \frac{(x+2)^2}{3 \cdot 1} - \frac{(3-x)^2}{1 \cdot 2} = 1$$

$$\frac{(1+x)^2}{6} + \frac{2(x+2)^2}{6} - \frac{3(3-x)^2}{6} = \frac{6}{6}$$

$$1 + 2x + x^2 + 2(x^2 + 4x + 4) - 3(9 - 6x + x^2) = 6$$

$$1 + 2x + x^2 + 2x^2 + 8x + 8 - 27 + 18x - 3x^2 = 6$$

$$28x = 6 - 1 - 8 + 27$$

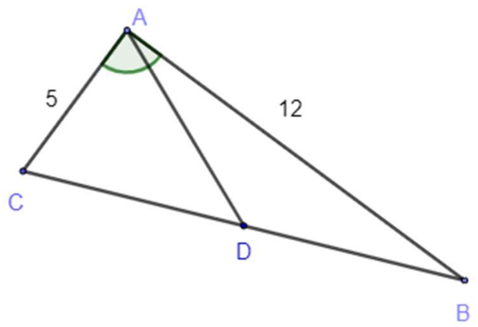
$$28x = 24$$

$$x = \frac{24}{28}$$

$$x = \frac{6}{7}$$

2ª) Em um triângulo retângulo, os catetos medem $5\ cm$ e $12\ cm$, como ilustra a figura abaixo. Calcule a medida da mediana relativa ao ângulo reto.

Figura 58 – Triângulo retângulo



Primeiramente determinando a medida do segmento $\overline{BC}$ que é a hipotenusa do triângulo retângulo BAC, temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$$
$$\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2$$
$$\overline{BC}^2 = 25 + 144$$
$$\overline{BC}^2 = 169$$
$$\overline{BC} = 13$$

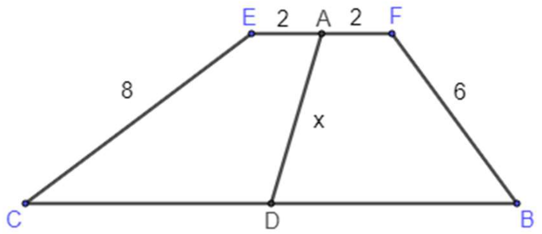
Como $\overline{AD}$ é a mediana, então $\overline{CD} = \overline{DB} = 6{,}5\ cm$

Aplicando o Teorema de Stewart no ΔBAC

$$\frac{c^2}{an} + \frac{b^2}{am} - \frac{\overline{AD}^2}{nm} = 1$$
$$\frac{12^2}{13 \cdot 6{,}5} + \frac{5^2}{13 \cdot 6{,}5} - \frac{\overline{AD}^2}{6{,}5 \cdot 6{,}5} = 1$$
$$\frac{144}{84{,}5} + \frac{25}{84{,}5} - \frac{\overline{AD}^2}{42{,}25} = 1$$
$$\frac{144}{84{,}5} + \frac{25}{84{,}5} - \frac{2\overline{AD}^2}{84{,}5} = \frac{84{,}5}{84{,}5}$$
$$144 + 25 - 84{,}5 = 2\overline{AD}^2$$
$$84{,}5 = 2\overline{AD}^2$$
$$\overline{AD}^2 = 42{,}25$$
$$\overline{AD} = 6{,}5$$

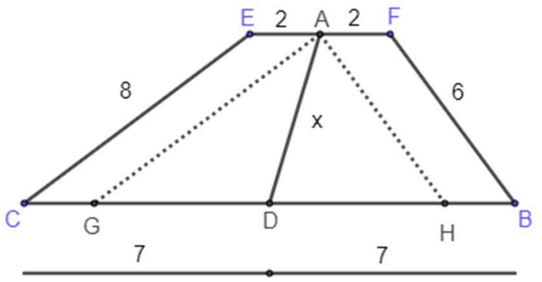
3ª) Considere um trapézio escaleno de bases 4 e 14 e lados oblíquos 6 e 8. Determine o tamanho do segmento que une os pontos médios das bases.

Figura 59 – Pontos médios da base de um trapézio escaleno I



Traçando retas paralelas aos lados oblíquos partindo do ponto médio da base menor, teremos:

Figura 60 – Pontos médios da base de um trapézio escaleno II



O triângulo HAG é pitagórico, cujos lados medem 6cm, 8cm e 10 cm. E $AM = x$ é a mediana da hipotenusa, pois $GD = DH = 5cm.$

Aplicando o Teorema de Stewart

$$\frac{c^2}{an} + \frac{b^2}{am} - \frac{\overline{AD}^2}{nm} = 1$$

$$\frac{6^2}{10 \cdot 5} + \frac{8^2}{10 \cdot 5} - \frac{\overline{AD}^2}{5 \cdot 5} = 1$$

$$\frac{36}{50} + \frac{64}{50} - \frac{2\overline{AD}^2}{50} = \frac{50}{50}$$

$$2\overline{AD}^2 = 50$$

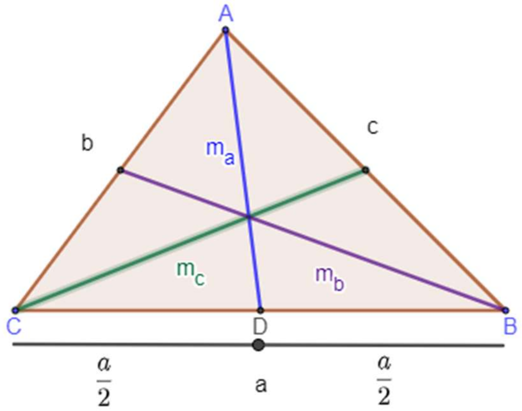
$$\overline{AD}^2 = 25$$

$$\overline{AD} = 5$$

4ª) Sejam m_a, m_b e m_c as medianas relativas ao lado $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, de um triângulo ΔABC, prove que $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$ e $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2)-c^2}$.

Dado o triângulo ΔABC, sendo $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{CD} = \overline{DB} = \frac{a}{2}$, $\overline{AD} = m_a$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

Figura 61 – Mediana relativa à base de um triângulo



Aplicando o teorema de Stewart:

$$\frac{c^2}{a\cdot\frac{a}{2}}+\frac{b^2}{a\cdot\frac{a}{2}}-\frac{\overline{AD}^2}{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=1$$

$$\frac{c^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{b^2}{\frac{a^2}{2}}-\frac{\overline{AD}^2}{\frac{a^2}{4}}=1$$

$$\frac{2c^2}{a^2}+\frac{2b^2}{a^2}-\frac{4\overline{AD}^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}$$

$$4\overline{AD}^2 = 2c^2+2b^2-a^2$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}}$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}$$

As relações das medianas m_b e m_c são mostradas de forma análoga a da mediana m_a, mostrado acima.

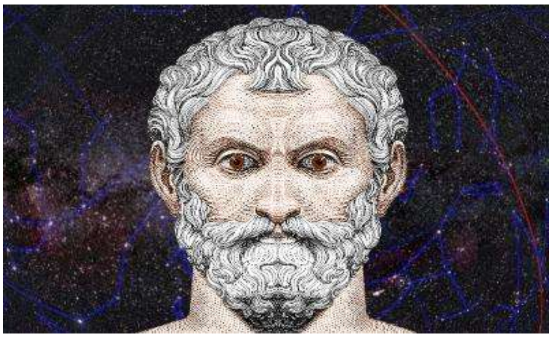
4 O TEOREMA DE THALES

Thales de Mileto era um engenheiro de Mileto. Nasceu na segunda metade do século VII a.C. de pais fenícios. Sua educação foi feita pelos sacerdotes egípcios e caldeus, ensinando-lhe tudo o que na época se conhecia acerca de Astronomia, Matemática e Ciência da navegação. A opinião antiga é unânime em considerar Thales como um homem de rara inteligência e como o primeiro filósofo – por acordo geral o primeiro dos Sete Sábios. Segundo Mlodinow:

> Thales passou longos períodos de tempo no Egito. Os egípcios tinham a capacidade de construir as pirâmides, mas não tinham o discernimento necessário para medir a sua altura. Thales buscou explicações teóricas para os fatos descobertos empiricamente pelos egípcios. Com tal compreensão, Thales foi capaz de deduzir técnicas geométricas, uma da outra, e de tirar a solução de um problema a partir de um outro, pois tinha extraído o princípio abstrato da aplicação prática particular. Ele deixou os egípcios impressionados quando lhes mostrou como eles poderiam mediar a altura da pirâmide empregando um conhecimento das propriedades de triângulos semelhantes. Mais tarde, Thales usou uma técnica similar para medir a distância de um navio ao mar. Ele se tornou uma celebridade no Egito antigo. (Mlodinow, 2004, p. 25)

De acordo com Boyer (1996, p. 31) “A proposição agora conhecida como teorema de Thales – que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto – pode ter sido aprendida por Thales durante suas viagens à Babilônia.” No entanto, a tradição vai mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. Por isso, Thales foi frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro – organizador da organização dedutiva da geometria”.

Figura 62 – Thales de Mileto



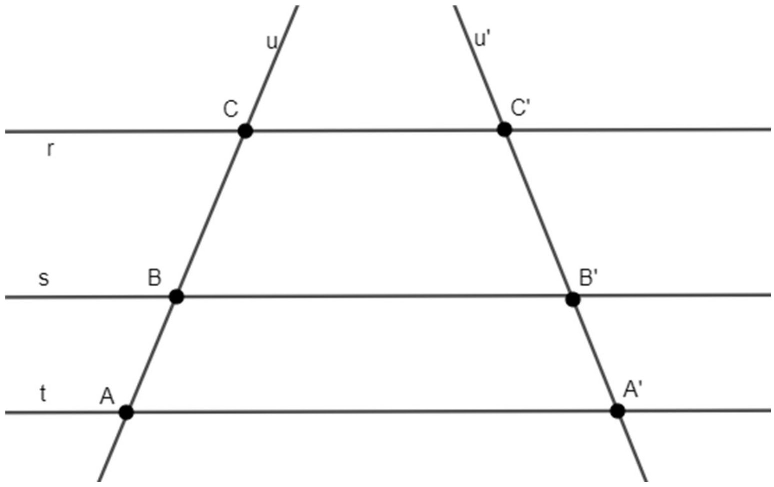
Fonte: Famous Scientists, 2015.

Para tratar de semelhança, vamos retomar os estudos do filósofo e matemático grego Thales de Mileto (624-547 a.C), cujo nome está associado ao teorema: “Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais”.

4.1 O Teorema de Thales: Proporcionalidade e semelhança

Teorema: Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Figura 63 – Proporcionalidade e semelhança



Temos: $r \parallel s \parallel t$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

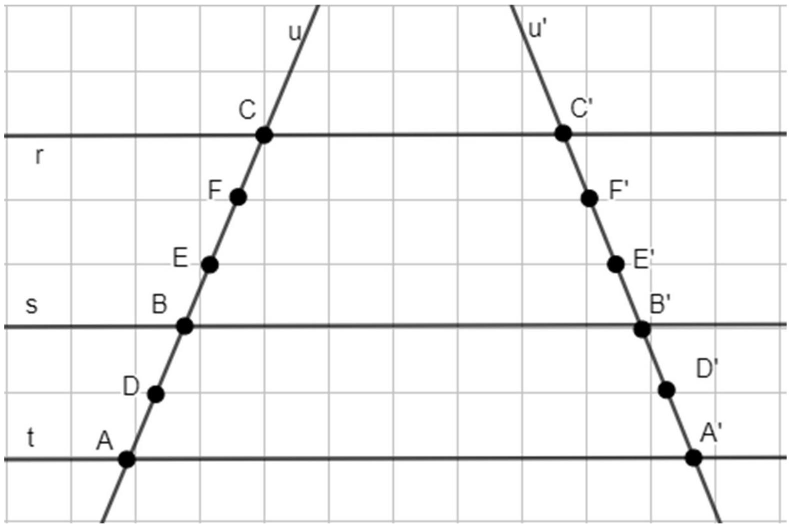
Demonstração:

i) os segmentos são comensuráveis

Considerando, por exemplo, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, digamos $\frac{2}{3}$. Dividimos então, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente em duas e três partes, obtendo os pontos D, E e F em u tais que $\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FC}$. Traçando por D, E e F paralelas às retas r, s e t, as quais intersectam u’ respectivamente em D’, E’ e F’, então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem que $\overline{A'D'} = \overline{D'B'} = \overline{B'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'C'}$, e daí

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}$$

Figura 64 – Proporcionalidade e semelhança



Agora, supondo que fosse $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Então, uma pequena modificação do argumento acima (dividindo, inicialmente, $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{BC}}$ em m e em n partes iguais, respectivamente) garantia que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$

De outra forma, concluímos que a relação $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ é válida sempre que o primeiro (ou o segundo) membro for um número racional.

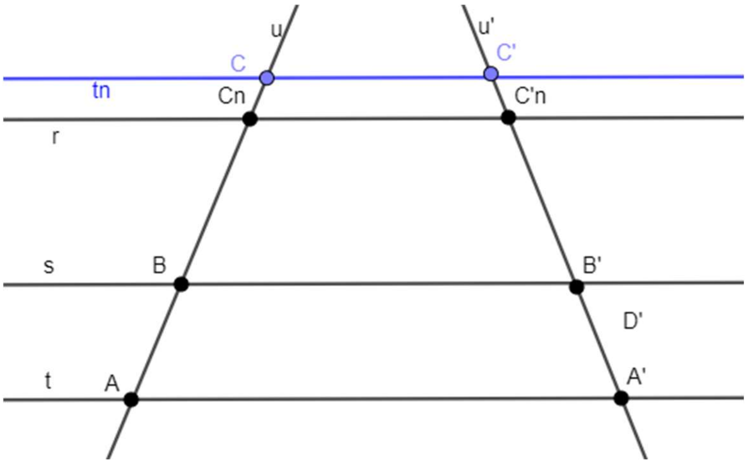
ii) os segmentos são incomensuráveis

Dados $x \in \mathbb{R}\, e\, n \in \mathbb{N},$ existe $a \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ $é\ denso\ em\ \mathbb{R}$) tal que $x < a < x + \frac{1}{n}$.

Supondo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$, com x irracional. Escolhendo uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$de racionais positivos, tais que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, marcando o ponto $C_n \in u$ tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = a_n$.

Seja t_n a reta paralela às retas r, s e t traçada por $C_n\ e\ C'_n$ o ponto onde t_n intersecta u'. Como $a_n \in \mathbb{Q}$, um argumento análogo ao anterior garante que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = a_n$.

Figura 65 – Proporcionalidade e semelhança



De outra forma, obtivemos que

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \qquad \rightarrow \quad x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}$$

ou, ainda

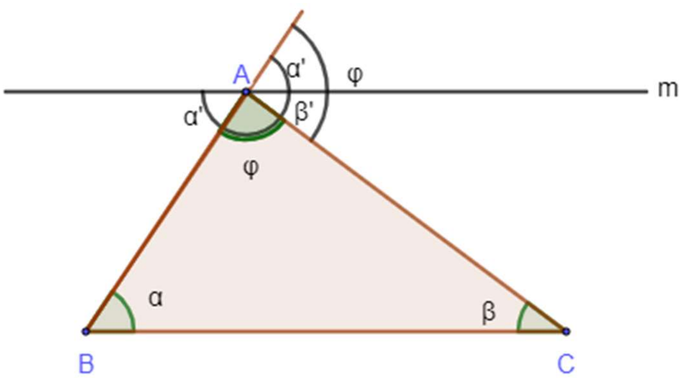
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \qquad \rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}$$

4.2 Lei angular de Thales

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos.

Demonstração: Consideremos um triângulo qualquer ABC e tracemos, por seu vértice A, a reta r paralela ao lado oposto.

Figura 66 – Lei angular de Thales



Considerando $BC \parallel m$, os ângulos $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$ pois são ângulos alternos internos, e representando por *r* a medida de um ângulo reto.

Temos, $\varphi = \alpha' + \beta'$

Temos, $\varphi + \alpha' + \beta' = 2r \longrightarrow \alpha' + \beta' + \alpha' + \beta' = 2r \rightarrow \alpha' + \beta' = r$

Logo, $\varphi + \alpha + \beta = 2r$

Assim, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois retos.

Corolários:

1º) Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes. Como o externo A' = B' + C' = B + C

2º) Cada ângulo interno de um triângulo é o suplemento da soma dos outros dois. Como o interno A e outros dois internos B e C, respectivamente, iguais a B' e C'.

3º) Todo triângulo possui, sempre, pelo menos, dois ângulos internos agudos. Porque a soma de seus três ângulos internos, sendo igual a dois retos, não pode admitir, em sendo um deles reto, um segundo também, o que implicaria em anular seu terceiro ângulo interno. E, ainda mais, não pode admitir mais que um ângulo interno obtuso.

4º) É o mesmo que afirmar que um triângulo só pode possuir, no máximo, um ângulo interno reto ou obtuso.

5º) Os ângulos internos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

6º) Os ângulos internos de um triângulo equilátero, porque são iguais entre si, valem 60º cada um.

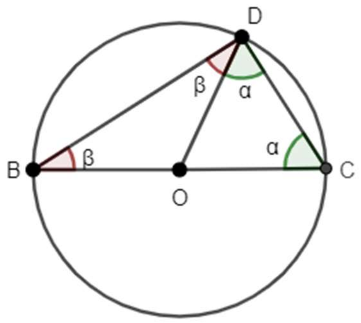
7º) Os ângulos externos de um triângulo equilátero valem 120º cada um.

4.3 O Teorema de Thales e o círculo

Teorema: Todo ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto. Isto é, se $\overline{\mathrm{BC}}$ é o diâmetro de uma circunferência e D é outro ponto da circunferência (diferente de B e C), então o ângulo $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{D}}C$ é um ângulo reto.

Demonstração: Considerando o $\Delta\mathrm{BCD}$ como mostra a figura:

Figura 67 - Teorema de Thales e o círculo



Sendo $\overline{BC}$ o diâmetro do círculo e $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ seus respectivos raios, então: $\overline{OB}$ = $\overline{OC}$ = $\overline{OD}$. Logo $\Delta\mathrm{OBD}$ e $\Delta\mathrm{ODC}$ são isósceles. Assim, os ângulos $O\hat{B}D \cong O\hat{D}B = \beta$ e $O\hat{C}D \cong O\hat{D}C = \alpha$.

Por outro lado, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180º, portanto: $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180°$

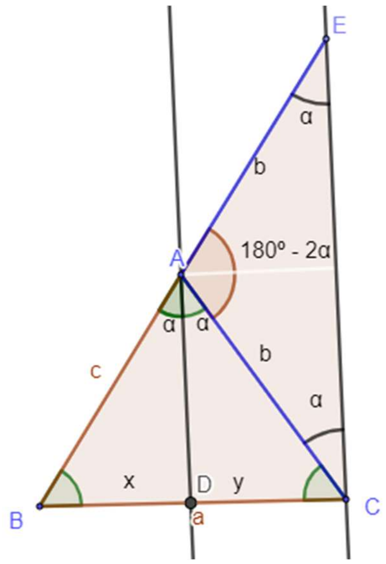
$2\alpha + 2\beta = 180°$ dividindo a equação por 2, teremos:

$$\alpha + \beta = 90°$$

4.4 O Teorema de Thales aplicado a bissetriz interna de um triângulo

Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Figura 68 – Bissetriz interna de um triângulo



Demonstração: Seja o triângulo ABC, de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam ainda $\overleftrightarrow{AD}$ a bissetriz do ângulo BÂC, $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$, $x + y = a$, $\overline{BD} = x$ e $\overline{CD} = y$

Assim temos que:

$B\hat{A}D \cong C\hat{A}D = \alpha$

$A\hat{E}C \cong B\hat{A}D = \alpha$ (ângulos correspondentes)

$A\hat{C}E \cong C\hat{A}D = \alpha$ (ângulos alternos internos)

ΔACE é isósceles $\Longrightarrow \overline{AC} \cong \overline{AE} = b$

Aplicando o Teorema de Thales

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}}$$

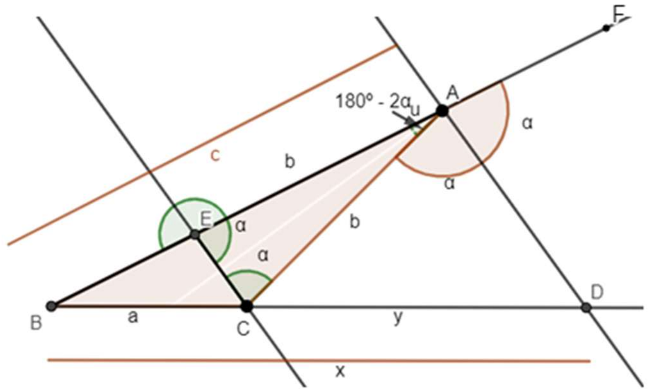
Logo:

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

4.5 O Teorema de Thales aplicado a bissetriz externa de um triângulo

Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto, então ela divide esse lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Figura 69 – Bissetriz externa de um triângulo



Demonstração: Seja o triângulo ABC, de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam ainda $\overleftrightarrow{AD}$ a bissetriz externa do ângulo Â, $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$, $x - y = a$, $\overline{BD} = x$ e $\overline{CD} = y$

Assim temos que:

$A\hat{E}C \cong A\hat{C}E = \alpha$

$F\hat{A}D \cong A\hat{E}C = \alpha$ (ângulos correspondentes)

$A\hat{C}E \cong C\hat{A}D = \alpha$ (ângulos alternos internos)

ΔACE é isósceles $\Longrightarrow \overline{AC} \equiv \overline{AE} = b$

Aplicando o Teorema de Thales

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{EA}}$$

Logo:

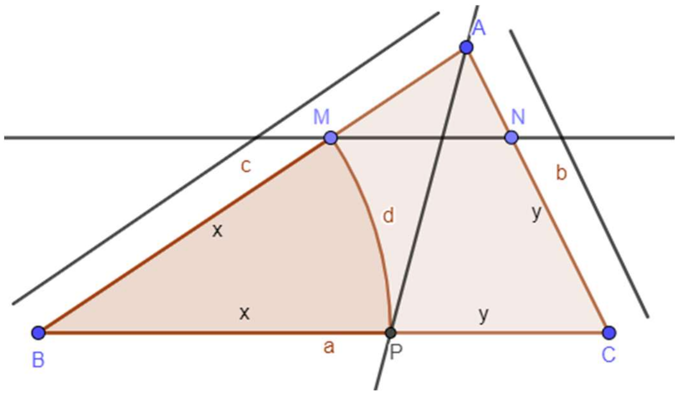
$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

4.6 Algumas aplicações do Teorema Fundamental de Proporcionalidade

1ª) Em um triângulo ABC, seja P o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A. Marcamos respectivamente, sobre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ os pontos M e N, tais que $\overline{BM} \equiv \overline{BP}$ e $\overline{CN} \equiv \overline{CP}$. Prove que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

Demonstração: Seja o triângulo ABC, P o pé da bissetriz relativa a $\overline{BC}$ e M e N pontos pertencentes aos lados $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$, respectivamente, tais que $\overline{BM} \equiv \overline{BP} = x\ (1)$ e $\overline{CN} \equiv \overline{CP} = y\ (2)$, como ilustra a figura abaixo.

Figura 70 – Aplicação do Teorema de Thales



Pelo teorema da bissetriz interna temos que

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \quad (3)$$

Empregando (1) e (2) em (3), obtemos:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}};$$

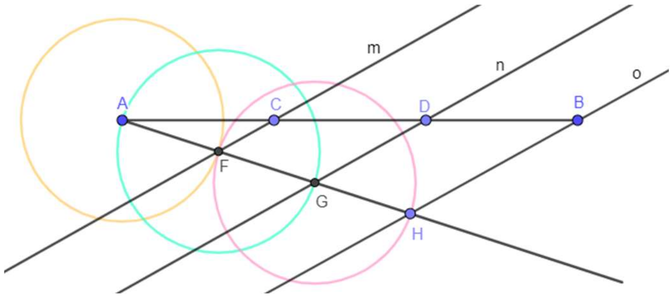
$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AC}} \quad (4)$$

De (4) temos, pela recíproca do Teorema de Thales que $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

2ª) Dado o segmento $\overline{AB} = 8{,}5\ cm$ divida-o em três partes congruentes.

O teorema de Thales pode ser aplicado a divisão de um segmento em partes iguais, vejamos:

Figura 71 – Aplicação do Teorema de Thales



Temos: $j \parallel k \parallel i$

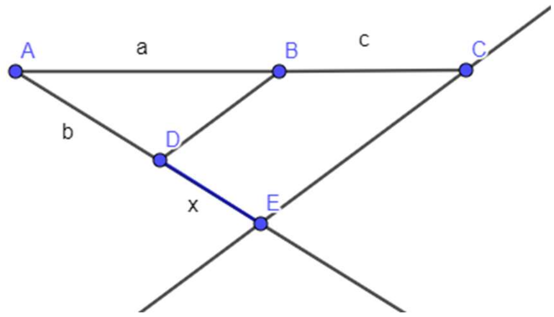
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FG}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{GH}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GH}}$$

3ª) Construa um segmento de medida x, quarta proporcional entre os segmentos de medidas a = 3,8 cm, c = 2,7 cm, b = 2,4 cm.

O teorema de Thales vai ser aplicado para determinar a medida da quarta proporcional. Dados os segmentos a, b, e c dizemos que o segmento x é a quarta proporcional desses segmentos quando: $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{x}}$

Essa relação de proporcionalidade já aparece no século V a.C e sua construção é feita com o argumento do teorema de Thales. Vejamos sua construção no geogebra:

Figura 72 – Aplicação do Teorema de Thales

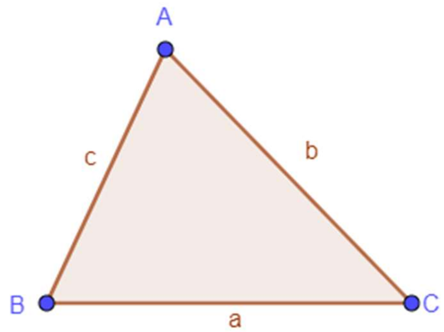


Sobre um ângulo qualquer de vértice A tomemos sobre um lado os segmentos $\overline{\mathrm{AB}} = \mathrm{a}$ e $\overline{\mathrm{BC}} = \mathrm{c}$ e e $\overline{\mathrm{AD}} = \mathrm{b}$. Traçando por C uma paralela à reta BD determinamos E na semirreta $\overline{\mathrm{AE}}$. O segmento $\overline{\mathrm{DE}}$ = x.

4ª) Inscreva em um triângulo ABC um quadrado tendo um lado sobre $\overline{BC}$.

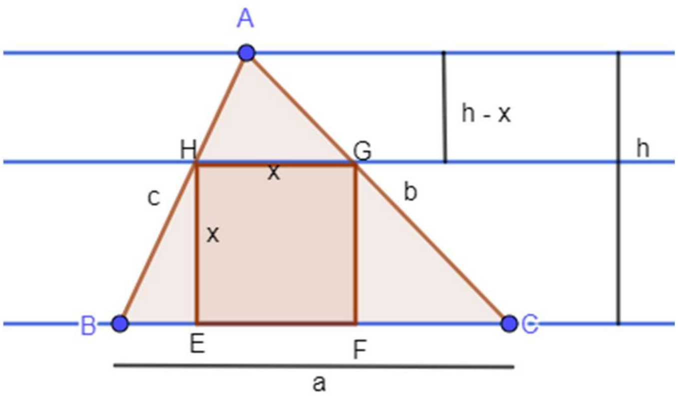
Construindo o triângulo escaleno ABC e definindo x como a medida do lado do quadrado.

Figura 73 – Aplicação do Teorema de Thales



Vamos calcular o valor de x em função da base $\overline{\mathrm{BC}} = a$ do triângulo e da altura relativa à esta base (h). O triângulo AHG, que tem base $\overline{HG}$ = x e altura h – x é semelhante ao triângulo ABC, caso AAA. Logo:

Figura 74 – Aplicação do Teorema de Thales



Demonstração:

$$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$$

$$xh = a(h-x)$$

$$xh = ah - ax$$

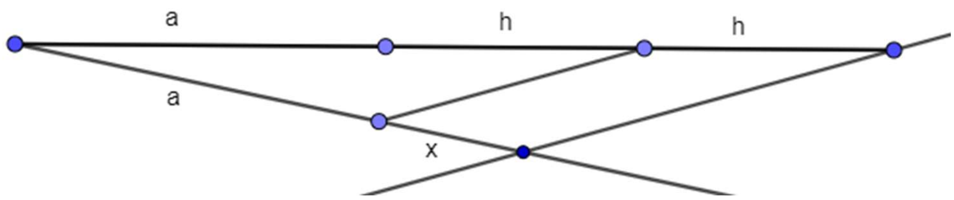
$$xh + ax = ah$$

$$x = \frac{ah}{a+h}$$

Essa fórmula nos permite calcular x em função de a e h. Vamos agora construir esta fórmula.

Observe que $x = \frac{ah}{a+h}$ é o mesmo que $\frac{a+h}{a} = \frac{h}{x}$, ou seja, a incógnita x é a quarta proporcional entre a + h, a e h, conforme figura abaixo.

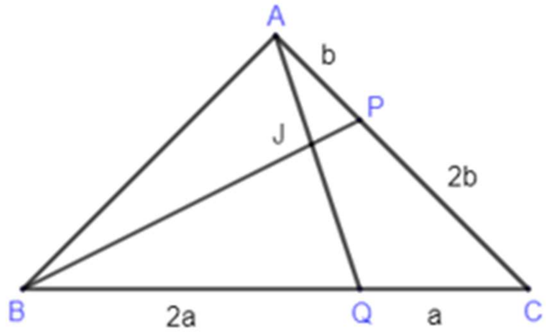
Figura 75 – Aplicação do Teorema de Thales



5ª) Seja o triângulo ABC e as cevianas $\overline{AQ}$ e $\overline{BP}$ tais que $AQ \cap BP = \{J\}$. Se $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ e $\overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BC}$, calcule $\frac{\overline{JA}}{\overline{JQ}}$.

Construindo o $\Delta\, ABC$ e definindo as cevianas $\overline{AQ}$ e $\overline{BP}$, temos:

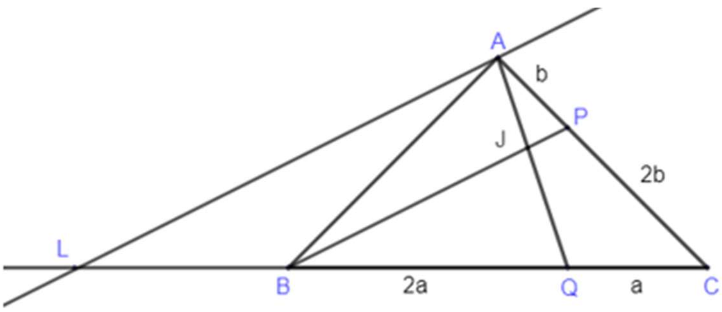
Figura 76 – Aplicação do Teorema de Thales



Sendo $\overline{AP}$ = b, $\overline{PC}$ = 2b, $\overline{BQ}$ = 2a e $\overline{QC}$ = a

Prolongando o segmento $\overline{BC}$ e traçando uma paralela em relação ao segmento $\overline{BP}$, temos:

Figura 77 – Aplicação do Teorema de Thales



Aplicando o Teorema de Thales nos triângulos:

- ΔACL

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BL}} \Rightarrow \overline{CP} \cdot \overline{BL} = \overline{PA} \cdot \overline{CB} \Rightarrow \overline{BL} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{CB}}{\overline{CP}} \quad (I)$$

- ΔAQL

$$\frac{\bar{Q}J}{\overline{QB}} = \frac{\overline{JA}}{\overline{BL}} \Rightarrow \overline{QJ} \cdot \overline{BL} = \overline{JA} \cdot \overline{QB} \Rightarrow \overline{BL} = \frac{\overline{JA} \cdot \overline{QB}}{\overline{QJ}} \quad (II)$$

Comparando (I) e (II)

$$\frac{\overline{PA} \cdot \overline{CB}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{JA} \cdot \overline{QB}}{\overline{QJ}} \Rightarrow \frac{b \cdot 3a}{2b} = \frac{\overline{JA} \cdot 2a}{\overline{QJ}} \ (:a)$$

$$\frac{3b}{2b} = \frac{\overline{JA} \cdot 2}{\overline{QJ}} \ (:b) \ \Rightarrow \ \frac{3}{2} = \frac{\overline{JA} \cdot 2}{\overline{QJ}} \ \Rightarrow \frac{\overline{JA}}{\overline{JQ}} = \frac{3}{4}$$

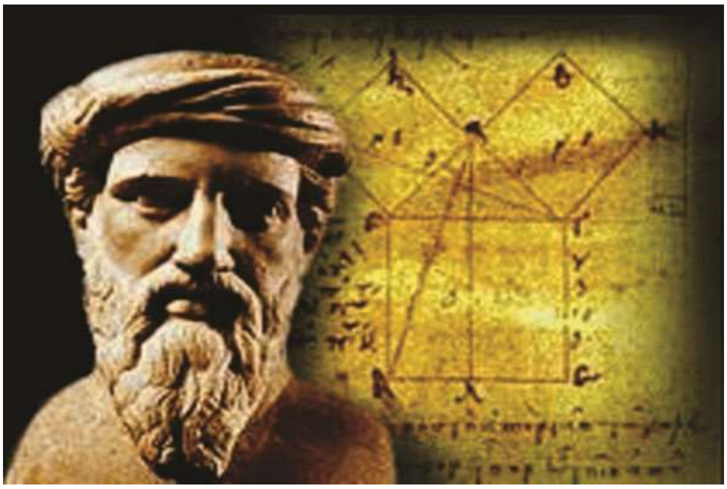
5 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras era um profeta e um místico, nasceu em 570 a. C na ilha de Samos, não muito longe da cidade de Mileto, a cidade de nascimento de Thales. Cursou a escola obrigatória tendo como mestre o grande Ferécides que ensinou-o a fazer milagres. Após a morte de Ferécides, Pitágoras procurou os mais ilustres professores da época: os sacerdotes egípcios, pois queria se especializar em ciências matemáticas. De acordo com Boyer:

> De fato é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem, pois ele representava tantas coisas para o povo – filósofo, astrônomo, santo, profeta, milagreiro, mágico, charlatão. Que foi uma das figuras mais influentes da história é difícil negar, pois seus seguidores, seja iludidos, seja inspirados, espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego. (Boyer, 1996, p. 34)

Pitágoras foi uma figura carismática e um gênio, mas ele também era bom em se autopromover. No Egito, ele não somente aprendeu geometria egípcia, mas tornou-se o primeiro grego a aprender os hieróglifos egípcios e, por fim, tornou-se um sacerdote egípcio ou algo equivalente, iniciado nos seus ritos sagrados.

Figura 78 – Pitágoras



Fonte: POPOVA, 2018

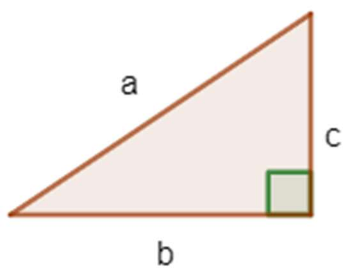
O filósofo e matemático grego Pitágoras fundou, em Crotona, a Escola Pitagórica, um centro de estudos de Filosofia, Ciências Naturais e Matemática. A escola era reservada a poucos iniciados, os estudos eram comunitários e o conhecimento produzido era creditado ao mestre. Por isso, várias descobertas foram atribuídas a Pitágoras, embora não se saiba ao certo se realmente foram realizadas por ele ou por outros membros do grupo. Pitágoras é lembrado até hoje, principalmente, pelo teorema que leva seu nome e estabelece uma relação entre as medidas de comprimento dos lados de um triângulo.

Existem várias maneiras de se provar o Teorema de Pitágoras.

5.1 Prova de Pitágoras

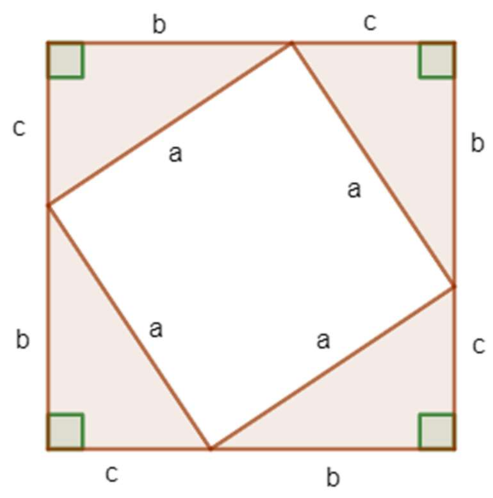
Inicialmente vamos considerar quatro triângulos retângulos iguais conforme imagem abaixo:

Figura 79 – Prova de Pitágoras



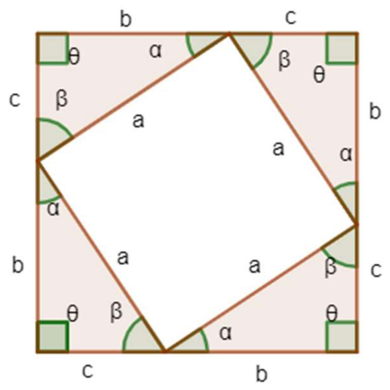
O contorno dos mesmos forma um quadrado maior em que cada lado mede $b + c$.

Figura 80 – Prova de Pitágoras



No meio forma-se um quadrilátero com lados iguais medindo a, que parece ser um quadrado. Para termos certeza de que se trata de um quadrado, vamos provar que seus ângulos são retos.

Figura 81 – Prova de Pitágoras



A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então:

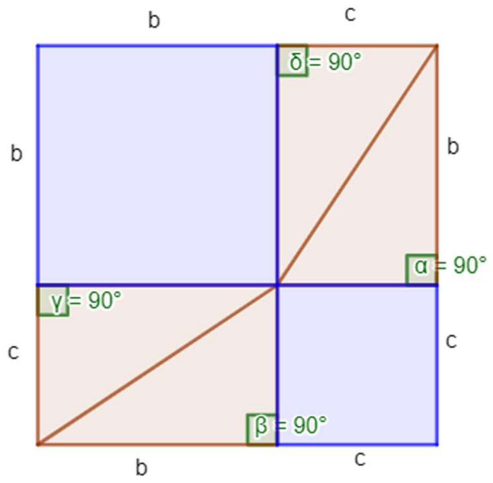
$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

Então a medida do ângulo interno do quadrilátero de lado a, mede 90º.

Considerando os mesmos quatro triângulos, vamos arrumá-los de outra maneira:

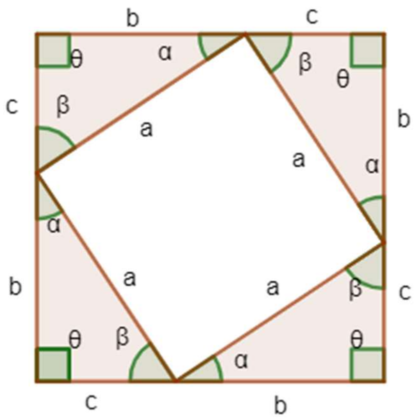
Figura 82 – Prova de Pitágoras

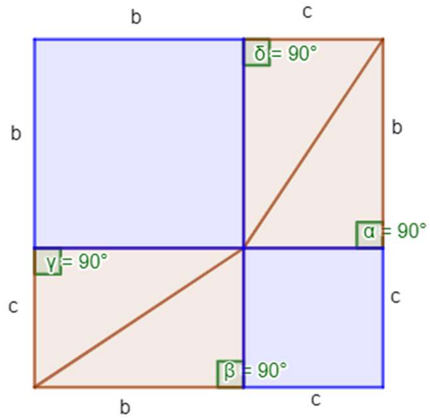


Nesse caso também se forma um quadrado maior cujos lados medem $b + c$ e mais dois quadradinhos, um de lado b e outro de lado c.

Analisando esses dois quadrados, temos que em ambas as situações os dois quadrados maiores têm áreas iguais e os lados medem $b + c$ em ambas as representações:

Figura 83 – Prova de Pitágoras





Se retirarmos de cada quadrado maior os quatro triângulos, as figuras que restarem em cada uma delas continuarão tendo áreas iguais, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Portanto, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

5.2 Prova de Euclides

Sabe-se pouco sobre a vida de Euclides, tanto que não tem nenhum registro de nascimento associado ao seu nome.

O objeto de Euclides era que o seu sistema fosse livre de suposições não reconhecidas baseadas na intuição, em conjecturas e na inexatidão. Ele formulou 23 definições, cinco postulados geométricos e cinco postulados adicionais que chamou de “noções comuns”. A partir dessa base, ele demonstrou 465 teoremas – essencialmente todo o conhecimento geométrico de seu tempo. (Mlodinow, 2004, p. 43), no livro denominado “Os Elementos”.

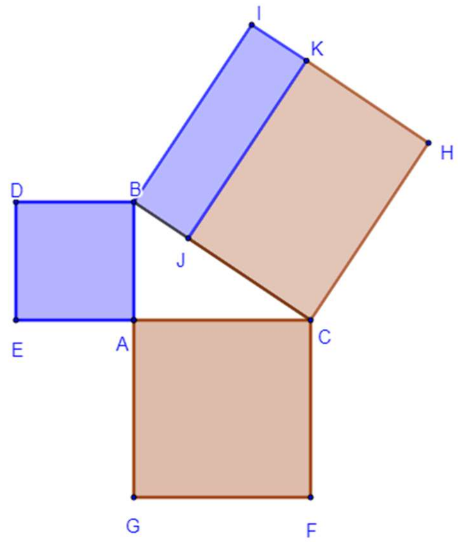
De acordo com Boyer (1996, p. 69) “Euclides e os Elementos são frequentemente considerados sinônimos; na realidade o homem escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas”.

Porém, mais da metade do que ele escreveu se perdeu, inclusive o tratado sobre as cônicas, uma das obras mais importantes.

Uma outra demonstração do Teorema de Pitágoras, foi publicada por Euclides na Proposição número 47, do livro I, de sua obra Os Elementos, conhecida como moinho de vento ou também foi chamada de “cadeira da noiva”.

A demonstração de Euclides é a seguinte: nos quadrados BCHI e ABDE temos área (ACFG) = 2 área (ACF) e área (ABDE) = 2 área (ABD)

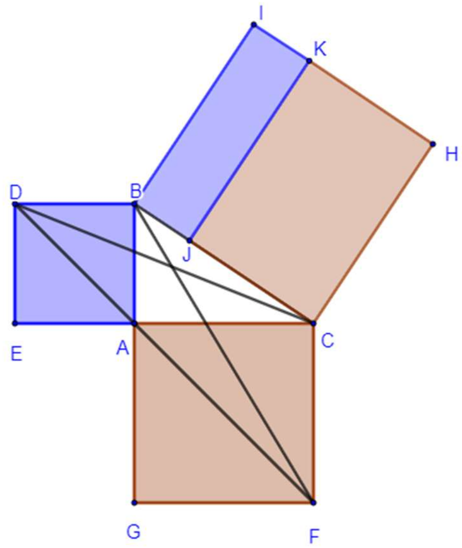
Figura 84 - Prova de Euclides



A área (ACF) = área (BCF) os triângulos têm base comum $\overline{CF}$ e mesma altura porque $\overline{CA}$ é paralelo a $\overline{FG}$.

A área (BAD) = área (BCD) os triângulos têm base comum $\overline{BD}$ e mesma altura porque $\overline{CA}$ é paralelo a $\overline{BD}$.

Figura 85 - Prova de Euclides

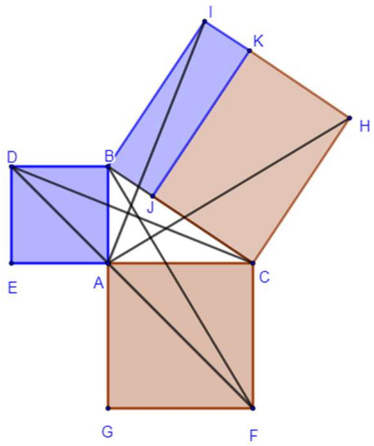


Os triângulos $\Delta\mathrm{BCD}$ e $\Delta\mathrm{BIA}$ são triângulos congruentes porque eles têm dois pares de lados correspondentes congruentes: $\overline{DB} \equiv \overline{BA}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{BI}$. Os ângulos compreendidos entre eles $D\hat{B}C$ e $A\hat{B}I$ são congruentes porque $D\hat{B}C = D\hat{B}A + A\hat{B}C = C\hat{B}I + A\hat{B}C = A\hat{B}I$.

Os triângulos ΔCBF e ΔACH são triângulos congruentes, pois:

- têm três pares de lados correspondentes congruentes: $\overline{AC} \equiv \overline{CF}$, $\overline{CB} \equiv \overline{CH}$ e $\overline{BF} \equiv \overline{AH}$;
- Os ângulos compreendidos entre eles BCF e HCA são congruentes porque $F\hat{C}B = F\hat{C}A + A\hat{C}B = H\hat{C}B + B\hat{C}A = A\hat{C}H$.

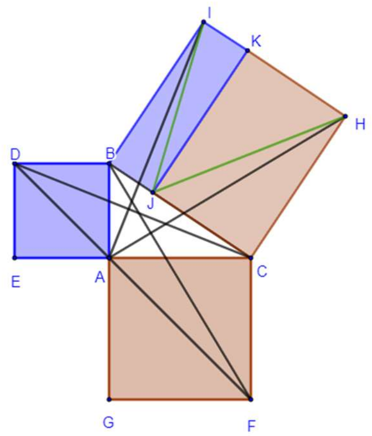
Figura 86 - Prova de Euclides



Portanto:

- área (DBC) = área(ABI) e área(BCF) = área(HCA)
- área(ABI) = área(BIJ), os triângulos têm base comum (os triângulos têm base comum $\overline{BI}$ e mesma altura porque pois $\overline{BI}$ é paralelo a $\overline{AJ}$)
- área(HCA) = área(HCJ), os triângulos têm base comum (os triângulos têm base comum $\overline{CH}$ e mesma altura pois $\overline{BJ}$ é paralelo a $\overline{CH}$)

Figura 87 - Prova de Euclides



Nos retângulos BJKI e CJKH, temos:

- área(BJKI) = 2 área(BJI) e área(CJKH) = 2 área(CJH)

Portanto, a área(ABDE) = área(BJKI) e área(ACFG) = área(CJKH), ou seja que os quadrados ABDE e ACFG são respectivamente equivalentes aos retângulos BJKI e CJKH. O quadrado BCHI é formado pela equicomposição dos retângulos BJKI e CJKH, ou seja, área(BCHI) = área(BJKI) + área(CJKH).

Onde o primeiro membro da igualdade é a área do quadrado sobre a hipotenusa do triângulo retângulo e o segundo membro é a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos. Se os lados do triângulo retângulo dado Δ(ABC) medem $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, então, da equação área(BCHI) = área(BJKI) + área(CJKH), temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

5.3 Prova usando triângulos semelhantes

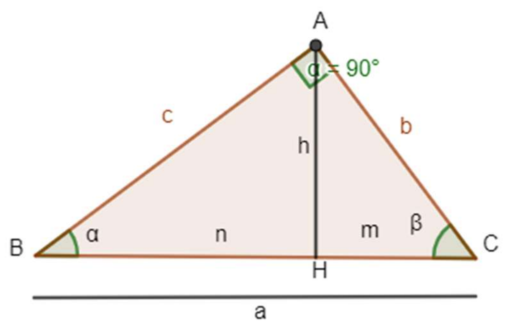
Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes compartilham as mesmas medidas e seus lados correspondentes têm as mesmas proporções.

Teorema: Seja o triângulo ABC retângulo em A, com $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$; $\overline{BC} = a$. Seja H o pé da altura relativa à hipotenusa; com $\overline{CH} = m$; $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, então:

i) $ah = bc$
ii) $c^2 = an$
iii) $bh = mc$
iv) $b^2 = am$
v) $bn = hc$
vi) $h^2 = mn$
vii) $a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração:

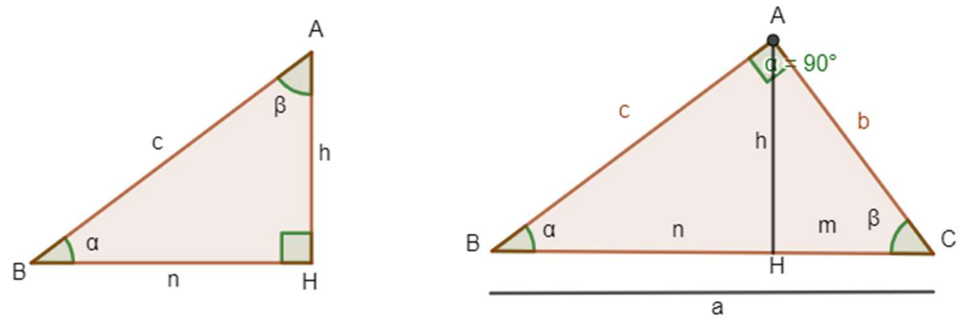
Figura 88 – Prova usando triângulos semelhantes



Comparando dos triângulos AHB, AHC e CAB concluímos que:

i) $\Delta AHB \sim \Delta CAB$ caso (AAA)

Figura 89 – Prova usando triângulos semelhantes



Montando as proporções:

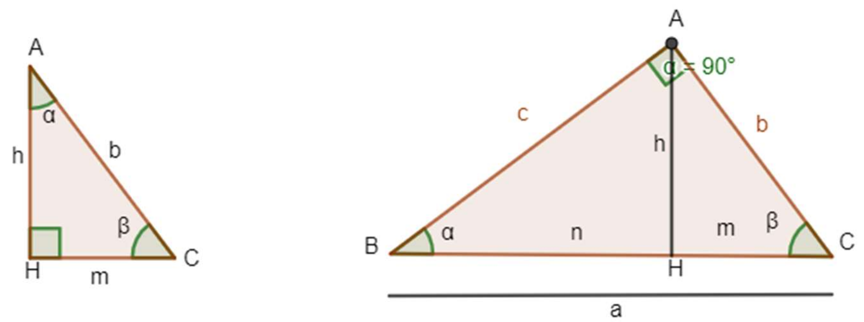
$$\frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{n}{c}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{b} \rightarrow \quad ah = bc\ (1)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \rightarrow \quad c^2 = an\ (2)$$

ii) $\Delta AHC \sim \Delta BAC$ caso (AAA)

Figura 90 – Prova usando triângulos semelhantes



Montando as proporções:

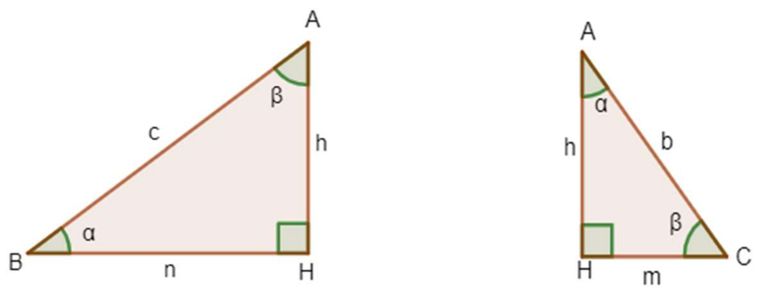
$$\frac{h}{c} = \frac{m}{b} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{h}{c} = \frac{m}{b} \rightarrow \quad bh = mc\ (3)$$

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a} \rightarrow \quad b^2 = am\ (4)$$

iii) $\Delta BHA \sim \Delta AHC$ caso (AAA)

Figura 91 – Prova usando triângulos semelhantes



Montando as proporções:

$$\frac{n}{h} = \frac{c}{b} = \frac{h}{m}$$

$$\frac{n}{h} = \frac{c}{b} \rightarrow bn = hc \ (5)$$

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} \quad \rightarrow \quad h^2 = mn \ (6)$$

Somando (2) e (4) e usando $a = m + n$ obtemos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a.a = a^2$$

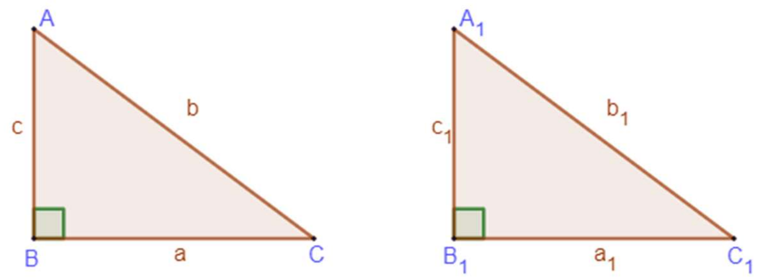
$$\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

5.4 Teorema: Recíproca do Teorema de Pitágoras

Se o quadrado de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao maior lado.

Demonstração:

Figura 92 – Recíproca do teorema de Pitágoras



Seja o ΔABC tal que $b^2 = a^2 + c^2$. Construímos o $\Delta A_1B_1C_1$, retângulo em B_1 e com catetos a_1 e c_1 e hipotenusa b_1. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao $\Delta A_1B_1C_1$, temos: ${b_1}^2 = {a_1}^2 + {c_1}^2 = b^2(hipótese)$

$$\Longrightarrow b^2 = {b_1}^2 \Rightarrow b = b_1$$

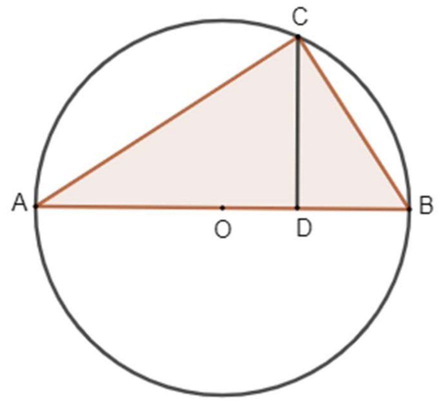
Então, o $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ caso (LLL) $\Longrightarrow \hat{B} = 90°$ e o ângulo $\hat{B} = 90°$ é oposto ao maior lado.

5.5 Relação métrica no círculo

Todo triângulo admite um círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito circunscrito ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.

Proposição: O está sobre um lado do ΔABC

Figura 93 – Relação métricas no círculo



Sendo $\overline{AB}$ o diâmetro. Se $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ então pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:

i) $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$

ii) $\overline{CB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{AB}$

iii) $\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB}$

5.6 Ternos Pitagóricos

Um terno pitagórico consiste em três números inteiros positivos a, b, e c, tais que $a^2 = b^2 + c^2$. Em outras palavras, um terno pitagórico representa as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, onde todos os três lados têm comprimentos inteiros. Este terno é geralmente escrito como (a, b, c). Alguns ternos Pitagóricos são bem conhecidos, como: (3, 4, 5) e (5, 12,13).

Vamos verificar que se (a, b, c) é um terno pitagórico, então (ka, kb, kc) é terno pitagórico, para todo $k \in N$: $(kb)^2 + (kc)^2 = k^2(b^2 + c^2) = k^2a^2$, ou seja, $(ka)^2 =$

$(kb)^2 + (kc)^2$. Podemos assim gerar ternos pitagóricos, bastando para tal, atribuir valores naturais a k para gerar triângulos retângulos semelhantes.

Exemplo: O primeiro terno Pitagórico é (3,4,5).

Para $k = 1$ temos o terno pitagórico (3,4,5)

Para $k = 2$ temos o terno pitagórico (6,8,10)

Para $k = 3$ temos o terno pitagórico (9,12,15) e assim sucessivamente.

Todos os ternos acima citados são pitagóricos, porém, não são primitivos pois têm, pelo menos um divisor comum.

Um terno pitagórico primitivo é aquele em que a, b e c são primos entre si, isto é, o máximo divisor comum entre a, b e c é 1. E devemos estar atentos que, num terno pitagórico, a hipotenusa e um dos catetos são números ímpares e o outro cateto é um número par.

Exemplos de ternos pitagóricos primitivos:

i) $(3, 4, 5)$ é terno pitagórico primitivo, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$ e $mdc\ (3, 4, 5) = 1$;

ii) $(5, 12, 13)$ é terno pitagórico primitivo, pois $5^2 + 12^2 = 13^2$ e $mdc\ (5, 12, 13) = 1$.

Exemplos de ternos pitagóricos não-primitivos:

i) $(6, 8, 10)$ é terno pitagórico primitivo, pois $6^2 + 5^2 = 10^2$ e $mdc\ (6, 8, 10) = 2$;

ii) $(15, 36, 39)$ é terno pitagórico primitivo, pois $15^2 + 36^2 = 39^2$ e $mdc\ (15, 36, 39) = 3$.

Euclides – em sua obra *Elementos* – apresenta uma fórmula que permite encontrar infinitas triplas trigonométricas. A fórmula é a seguinte:

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}$$

Onde m e n são dois inteiros quaisquer que respeitam as condições:

$$\begin{cases} m > n \\ m, n > 0 \end{cases}$$

O terno gerado pela fórmula de Euclides será primitivo se, e somente se, m e n forem primos entre si e ambos não sejam ímpares. Se m e n forem ambos ímpares, então a, b e c serão pares e não formarão uma tripla primitiva.

Vamos mostrar como Euclides chegou a essa fórmula utilizando o teorema de Pitágoras.

$$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b.b = (c + a)(c - a)$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{(c-a)} = \frac{(c+a)}{b} \Longrightarrow \frac{b}{(c-a)} = \frac{(c+a)}{b} = \frac{m}{n}$$

Trabalhando as frações duas a duas, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{(c+a)}{b} = \dfrac{m}{n} \\ \dfrac{b}{(c-a)} = \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

Trabalhando com a primeira equação:

$$\frac{(c+a)}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{c}{b} + \frac{a}{b} = \frac{m}{n} (1)$$

Organizando a segunda equação:

$$\frac{(c-a)}{b} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{n}{m} (2)$$

Isolando $\frac{c}{b}$ na 1ª equação e substituindo na 2ª equação:

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{n} - \frac{a}{b}$$

$$\frac{m}{n} - \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = 2\frac{a}{b} \Rightarrow 2\frac{a}{b} = \frac{m^2-n^2}{nm} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m^2-n^2}{2nm} \quad (3)$$

Comparando os numeradores e os denominadores de ambas as frações da expressão (3) obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \end{cases}$$

Agora, isolando $\frac{a}{b}$ na equação (2) e substituindo na equação (1)

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{b} - \frac{n}{m}$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{b} - \frac{n}{m} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2\frac{c}{b} = \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \Rightarrow 2\frac{c}{b} = \frac{n+m}{nm} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{n^2+m^2}{2nm} \quad (4)$$

Comparando os numeradores e os denominadores de ambas as frações da expressão (3) obtemos o sistema:

$$\begin{cases} c = m^2 + n^2 \\ b = 2mn \end{cases}$$

Provando assim que à fórmula inicial de Euclides fornece a geração das triplas pitagóricas a partir das expressões (3) e (4):

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}$$

5.7 Aplicações envolvendo o Teorema de Pitágoras

1ª) Considere um quadrado ABCD de lado a e seja E o ponto do lado $\overline{CD}$ tal que $\overline{AE}$ = $\overline{BC}$ $+ \overline{CE}$. Qual é o comprimento de $\overline{CE}$?

Considerando o quadrado ABCD e traçando a perpendicular $\overline{EF}$, temos:

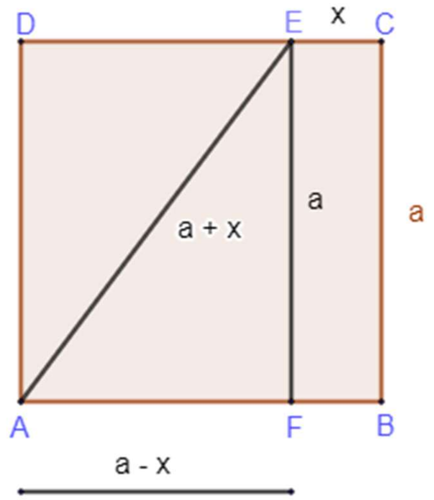
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$$

$$\overline{CE} = \overline{BF} = x$$

$$\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF} = a - x$$

$$\overline{AE} = \overline{BC} + \overline{CE}$$

Figura 94 – Aplicações do Teorema de Pitágoras



Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta\mathrm{AFE}$:

$$(a + x)^2 = a^2 + (a - x)^2$$

$$a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + a^2 - 2ax + x^2$$

$$2ax + 2ax = a^2$$

$$4ax = a^2 \quad (: a)$$

$$4x = a$$

$$x = \frac{a}{4}$$

2ª) No triângulo acutângulo ABC tem-se $\overline{AB} = x - 1$, $\overline{BC} = x$ e $\overline{AC} = x + 1$.

a) Determine todos os possíveis valores de x para que exista um triângulo nas condições descritas acima.

b) Seja D o ponto do lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{AB} = \overline{AD}$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{DC}$.

Resolução:

a) O maior lado desse triângulo é o segmento $\overline{AC} = x + 1$. Para que o ΔABC seja acutângulo, o maior ângulo deve ser menor do que 90º. Logo,

$$\overline{AC}^2 < \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$$

$$(x+1)^2 < x^2 + (x-1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 < x^2 + x^2 - 2x + 1$$

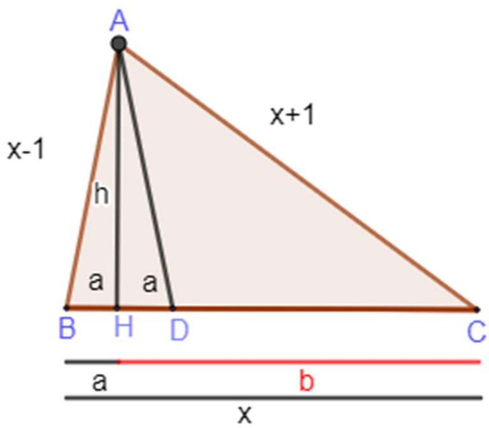
$$4x < x^2 \quad (:x)$$

$$4 < x$$

$$x > 4$$

b) Seja $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Como $\overline{AB} = \overline{AD}$, então H é o ponto médio de $\overline{BD}$. Sejam $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = a$ e $\overline{HC} = b$.

Figura 95 – Aplicações do Teorema de Pitágoras



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AHB e AHC, temos:

$$\Delta AHB \Longrightarrow \overline{BA}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HA}^2$$

$$(x-1)^2 = a^2 + h^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = a^2 + h^2$$

$$a^2 = x^2 - 2x + 1 - h^2$$

$$\Delta AHC \Longrightarrow \overline{CA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$$

$$(x+1)^2 = h^2 + b^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = h^2 + b^2$$

$$b^2 = x^2 + 2x + 1 - h^2$$

Subtraindo,

$$b^2 - a^2 = x^2 + 2x + 1 - h^2 - (x^2 - 2x + 1 - h^2)$$

$$b^2 - a^2 = x^2 + 2x + 1 - h^2 - x^2 + 2x - 1 + h^2$$

$$b^2 - a^2 = 4x$$

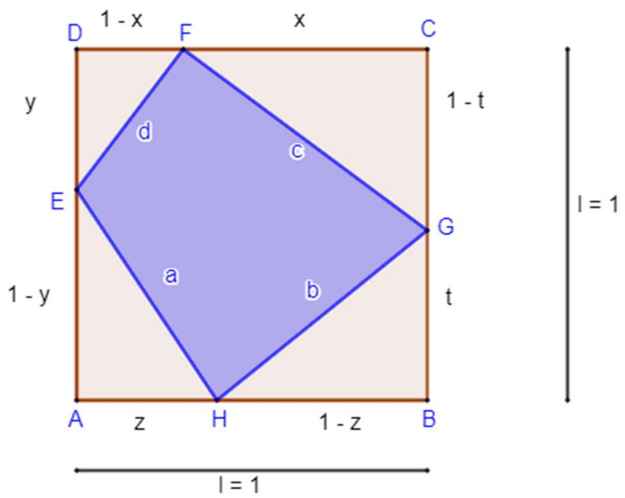
Ou seja, $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 4x$

Como $b + a = \overline{BC} = x$ então $b - a = \overline{DC} = 4$

3ª) Um quadrilátero tem os seus vértices sobre cada um dos lados de um quadrado, cujo lado tem medida 1. Sabendo que as medidas dos lados são a, b, c, d; mostre que $2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$.

Resolução:

Figura 96 – Aplicações do Teorema de Pitágoras



Temos:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$$

$$\overline{HE} = a, \overline{HG} = b, \overline{GF} = c \text{ e } \overline{FE} = d$$

$$z = \overline{AH}, t = \overline{BG}, x = \overline{CF}, y = \overline{DE}$$

$$\overline{HB} = 1 - z, \overline{GC} = 1 - t, \overline{FD} = 1 - x, \overline{EA} = 1 - y.$$

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AHE, HBG, GCF e FDE, concluímos que:

$$a^2 = (1 - y)^2 + z^2$$

$$b^2 = (1 - z)^2 + t^2$$

$$c^2 = (1 - t)^2 + x^2$$

$$d^2 = (1 - x)^2 + y^2$$

Somando, obtém-se:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (1-y)^2 + z^2 + (1-z)^2 + t^2 + (1-t)^2 + x^2 + (1-x)^2 + y^2$$

$$= 1 - 2y + y^2 + z^2 + 1 - 2z + z^2 + t^2 + 1 - 2t + t^2 + x^2 + 1 - 2x + x^2 + y^2$$

$$= (2x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 2y + 1) + (2z^2 - 2z + 1) + (2t^2 - 2t + 1)$$

$$= f(x) + f(y) + f(z) + f(t)$$

Onde $f(x) = 2x^2 - 2x + 1, x \epsilon [0,1]$.

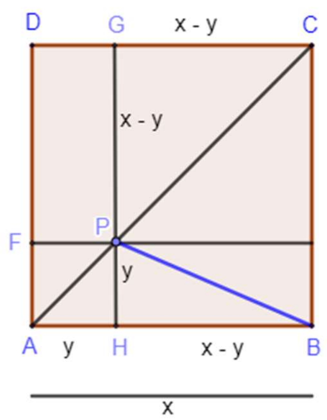
Calculando os valores de máximo e mínimo da função $f(x) = 2x^2 - 2x + 1, x \epsilon [0,1]$. Como f é uma função quadrática de coeficiente positivo, o valor mínimo ocorre no vértice e o valor máximo ocorre em um dos extremos do intervalo. Como $f(0) = f(1) = 1$, a simetria da parábola assegura que o vértice está dentro do intervalo e ocorre em $x = \frac{1}{2}$. Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ obtém-se que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1, \forall\, x \in [0,1]$.

Como $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f(x) + f(y) + f(z) + f(t)$, conclui-se que:

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1 + 1 + 1 + 1 \leq 4$$

4ª) Seja P um ponto sobre a diagonal $\overline{AC}$ do quadrado ABCD. Prove que $\overline{PA}^2$, $\overline{PB}^2$, $\overline{PC}^2$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética.

Figura 97 – Aplicações do Teorema de Pitágoras



Sejam H, F e G os pés das perpendiculares traçadas de P sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Como P está sobre a diagonal $\overline{AC}$, temos que $\overline{PH} = \overline{HA} = y$ e $\overline{PG} = \overline{GC} = x - y$, onde x é a medida do lado do quadrado.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ΔEHA, ΔEHB e ΔEGC, temos:

$$\Delta PHA \Rightarrow \overline{PA}^2 = y^2 + y^2 = 2y^2$$

$$\Delta PHB \Rightarrow \overline{PB}^2 = y^2 + (x-y)^2 = y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2y^2 + x^2 - 2xy$$

$$\Delta PGC \Longrightarrow \overline{PC}^2 = (x-y)^2 + (x-y)^2 = 2(x-y)^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= 2x^2 - 4xy + 2y^2$$

Determinando a razão entre os segmentos:

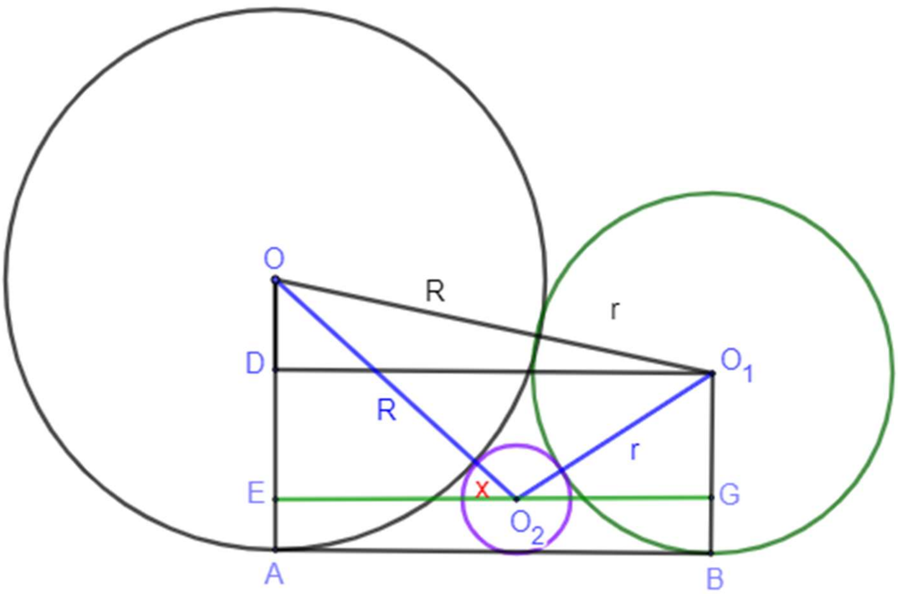
$$\overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - (2y^2 + x^2 - 2xy)$$
$$= 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2y^2 - x^2 + 2xy = x^2 - 2xy$$

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = 2y^2 + x^2 - 2xy - 2y^2 = x^2 - 2xy$$

Como as razões são iguais, $\overline{PA}^2$, $\overline{PB}^2$ e $\overline{PC}^2$ formam uma PA.

5ª) Duas circunferências de raios R e r são tangentes exteriormente e são tangentes a uma reta t nos pontos A e B. Determine $\overline{AB}$ em função dos raios R e r. Determine a seguir o raio de uma circunferência que é tangente a reta t e às duas circunferências dadas.

Figura 98 – Aplicações do Teorema de Pitágoras



Sendo:

$\overline{OA} = R, O_1 = r,\ O_2 = x, \overline{OD} = R - r, OO_1 = R + r, \overline{AB} = \overline{EG} = \overline{DO_1},$

$$\overline{AB} = \overline{EO_2} + \overline{O_2G}, \overline{OE} = R - x, \overline{O_1G} = r - x$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras para determinar AB:

$$\overline{OO_1}^2 = \overline{DO_1}^2 + \overline{OD}^2$$

$$(R+r)^2 = AB^2 + (R-r)^2$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 = AB^2 + R^2 - 2Rr + r^2$$

$$AB^2 = 4Rr$$

$$AB = \sqrt{4Rr}$$

$$AB = 2\sqrt{Rr}$$

Para determinar o raio da circunferência que é tangente a reta t e às duas circunferências dadas, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras nos triângulos ΔOEO_2 e no ΔO_1GO_2

$$\Delta OEO_2 \implies (R+x)^2 = (R-x)^2 + {EO_2}^2$$

$$\implies R^2 + 2Rx + x^2 = R^2 - 2Rx + x^2 + {EO_2}^2$$

$$\Rightarrow \overline{EO_2}^2 = 4Rx$$

$$\Rightarrow \overline{EO_2} = \sqrt{4Rx}$$

$$\Rightarrow \overline{EO_2} = 2\sqrt{Rx}$$

$$\Delta O_1GO_2 \implies (r+x)^2 = (r-x)^2 + {GO_2}^2$$

$$\implies r^2 + 2rx + x^2 = r^2 - 2rx + x^2 + {GO_2}^2$$

$$\Rightarrow \overline{GO_2}^2 = 4rx$$

$$\Rightarrow \overline{GO_2} = \sqrt{4rx}$$

$$\Rightarrow \overline{GO_2} = 2\sqrt{rx}$$

Como $\overline{AB} = \overline{EO_2} + \overline{O_2G}$, temos:

$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} \quad (:2)$$

$$\sqrt{Rr} = \sqrt{Rx} + \sqrt{rx}$$

$$\left(\sqrt{Rr}\right)^2 = \left(\sqrt{Rx} + \sqrt{rx}\right)^2$$

$$Rr = Rx + 2\sqrt{Rxrx} + rx$$

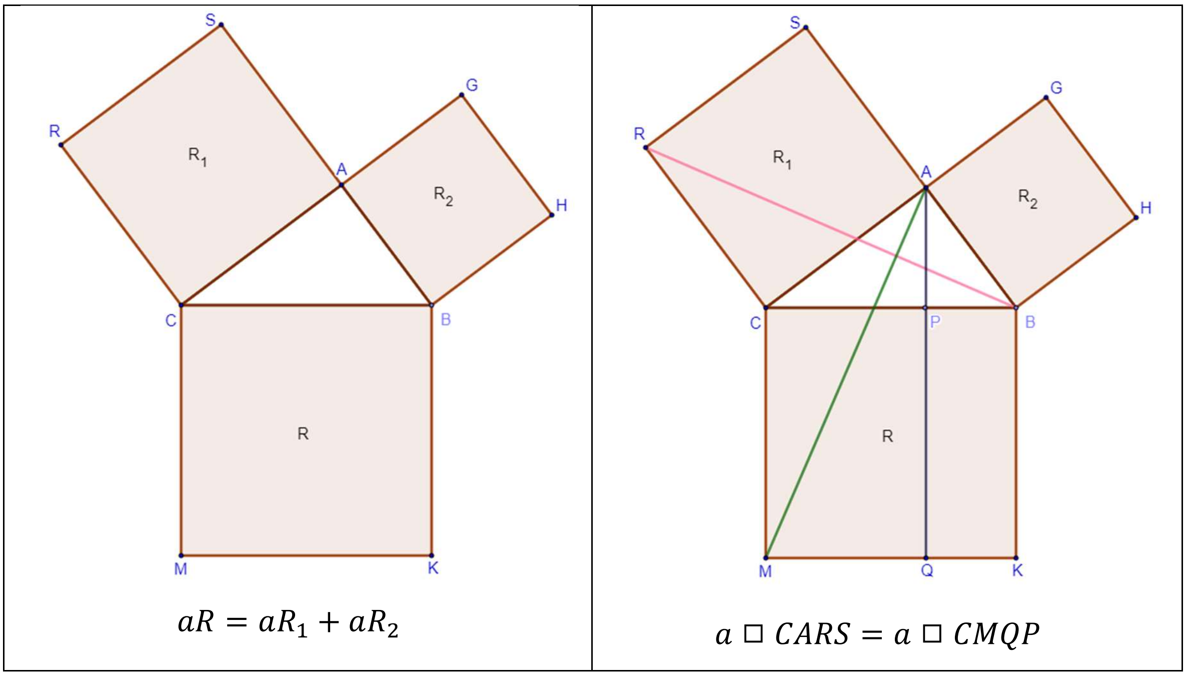
$$Rr = Rx + 2\sqrt{Rrx^2} + rx$$

$$Rr = Rx + 2x\sqrt{Rr} + rx$$

$$x = \frac{Rr}{R + r + 2\sqrt{Rr}}$$

6ª) O Teorema de Pitágoras era conhecido dos antigos gregos da seguinte forma: A área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.

Figura 99 – Aplicações do Teorema de Pitágoras



À figura à esquerda ilustra o teorema: a figura à direita é usada na demonstração.

a) Por que $\angle RCB \cong \angle ACM$?

Como $CASR$ é um quadrado, temos $\hat{C} = \hat{A} = \hat{S} = \hat{R} = 90°$, $CBKM$ também é um quadrado, logo $\hat{C} = \hat{B} = \hat{K} = \hat{M} = 90°$ e considerando $B\hat{C}M = 90°$, $R\hat{C}A = 90°$ e $A\hat{C}B = \alpha$, temos:

$$\angle RCB = \angle RCA + \angle ACB = 90° + \alpha$$

$$\angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \alpha + 90°$$

$$\angle RCB \cong \angle ACM$$

Portanto, pela congruência de triângulos LAL os triângulos são congruentes.

b) Por que $\Delta RCB \cong \Delta ACM$?

Considerando que $\overline{CR} = \overline{AC},\ \overline{CB} = \overline{CM},\ \overline{RB} = \overline{AM}$, portanto $\Delta RCB \cong \Delta ACM$ pelo caso LLL de congruência de triângulos.

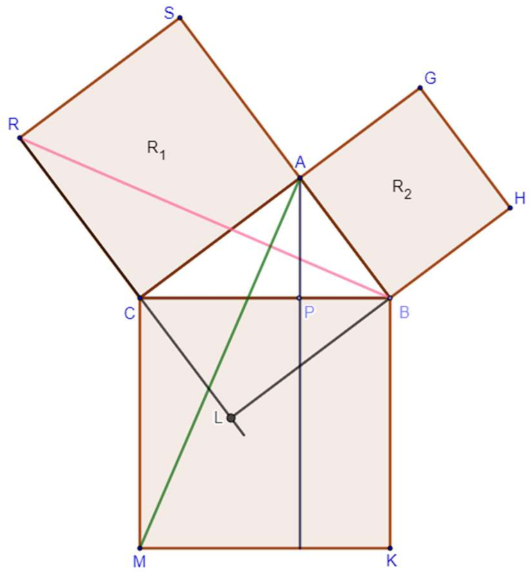
c) Por que $a\Delta RCB = a\Delta ACM$?

Como $\Delta RCB \cong \Delta ACM$ pelo caso LLL de congruência de triângulos, as áreas desses dois triângulos são congruentes.

d) Alguma altura de ΔRCB é igual a $\overline{AC}$?

Sim, considerando a base do ΔRCB como o segmento RC, ao prolongar esse segmento e definirmos a altura em relação ao ponto B, teremos que o segmento BL e congruente ao segmento AC, conforme imagem abaixo.

Figura 100 – Aplicações do Teorema de Pitágoras



e) Por que $a \square CASR = 2a\Delta RCB$?

A área do quadrado CASR é dada por $A = CA^2$, mas $CA = b$, então $A = b^2$. E como a área do quadrado $CASR$ = área do retângulo $CMPQ$, temos:

$$A = b^2 \Rightarrow A = a \cdot m$$

Agora, determinando a área do ΔRCB. Prolongando-se o segmento $\overline{BC}$ e traçando a perpendicular em relação ao ponto R que corta o segmento $\overline{BC}$, temos $\Delta RIC = \Delta CPA$, como $\overline{RI} = \overline{CP} = m$, $\overline{RC} = \overline{CA} = b$, a área do $\Delta\ RCB$ é dada por

$$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{RI}}{2} = \frac{a \cdot m}{2}$$

Portanto, $aCASR = 2a\Delta RCB$, pois $a \cdot m = 2.\frac{a \cdot m}{2} \Longrightarrow a \cdot m = a \cdot m$ pela equivalência de áreas.

Figura 101 – Aplicações do Teorema de Pitágoras

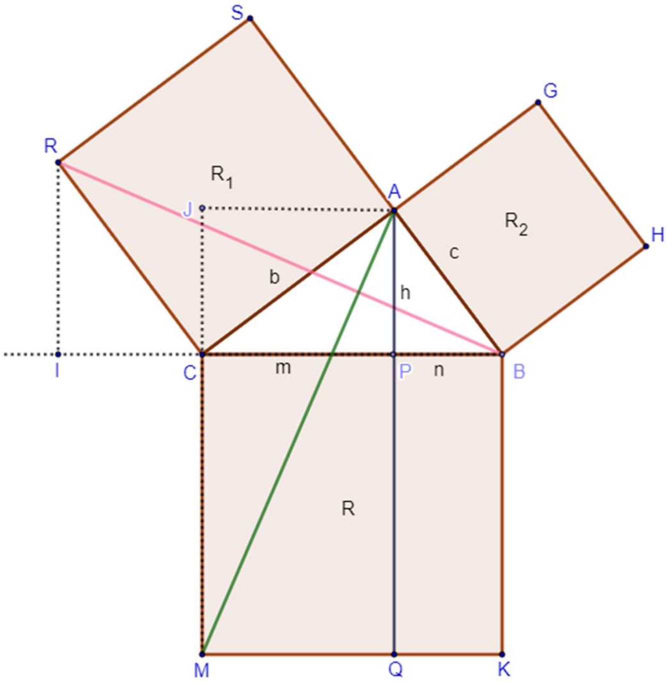


Imagem que auxiliou a resolução das letras e e f.

f) Por que $a \square CMQP = 2a\Delta ACM$?

Na figura $\square CMQR$ é um retângulo cujos lados medem m e a e sua área é $A = m.a$

Agora, determinando a área do ΔACM. Prolongando o segmento $\overline{MC}$ e traçando a perpendicular em relação ao ponto A que corta o segmento $\overline{MC}$, temos $\Delta\, AJC = \Delta\, CPA$, como $\overline{JA} = \overline{CP} = m$, $\overline{JC} = \overline{AP} = h$, a área do $\Delta\, ACM$ é dada por $\frac{\overline{CM} \cdot \overline{JA}}{2} = \frac{a \cdot m}{2}$.

Portanto, $a \square CMQP = 2a\Delta ACM$, pois $a.m = 2.\frac{a \cdot m}{2} \Rightarrow a.m = a.m$ pela equivalência de áreas.

g) Por que $a \square CASR = a \square CMQP$?

Considerando $\overline{CB} = \overline{CM} = \overline{MK} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AP} = h$, $\overline{CP} = m$ e $\overline{PB} = n$, na figura $\square CMQP$ é um retângulo cujos lados medem m e c, e $\square CASR$ é um quadrado cujos lados medindo b.

A área do $\square CMQP$ é dado por: $A = ma$.

A área do $\square CASR$ é dado por: $A = b^2$

Comparando a área dos dois quadrados, temos pelas relações métricas no triângulo retângulo que $b^2 = am$.

h) Por que $a \, \square \, BHGA = a \, \square \, PQKB$?

Considerando $\overline{CB} = \overline{BK} = \overline{MK} = a,$ $\overline{BA} = c,$ e $\overline{PB} = n$, na figura $\square \, PQKB$ é um retângulo cujos lados medem n e c, e $\square \, BHGA$ é um quadrado cujos lados medindo c.

A área do $\square \, PQKB$ é dado por: $A = na$.

A área do $\square \, BHGA$ é dado por: $A = c^2$

Comparando a área dos dois quadrados $a \, \square \, BHGA = a \, \square \, PQKB \implies c^2 = an$, o que é provado através de uma das relações métricas no triângulo retângulo que é $c^2 = an$.

i) Por que $a \, \square \, AMKB = a \, \square \, AMQP + a \, \square \, PQRB$?

Considerando $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{CP} = h$, $\overline{AP} = m$ e $\overline{PB} = n$, na figura $\square \, AMQR$ é um retângulo cujos lados medem m e c, e $\square \, PQKB$ é outro retângulo de lados medindo c e n. A área do $\square \, ABMK$ é dado por: $mc + nc = c^2$. Temos pelas relações métricas que $b^2 = am$ e $c^2 = na$, logo: $c^2 = b^2 + a^2$.

7ª) Os três lados de um triângulo retângulo são números inteiros. Um dos catetos mede 17. Qual é o perímetro desse triângulo?

Usando as fórmulas que geram ternos pitagóricos: $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$. Devemos ter $m^2 - n^2 = 17$, ou seja, $(m + n)(m - n) = 17$. Como 17 é primo, então, necessariamente, $m + n = 17$ e $m - n = 1$, o que dá $m = 9$ e $n = 8$. Portanto, o outro cateto é $2mn = 2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$ e a hipotenusa é $m^2 + n^2 = 81 + 64 = 145$. O perímetro é igual a 306.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado um pouco da história da Matemática. Matemática essa que ao longo dos anos foi sendo descoberta por matemáticos famosos como Thales de Mileto, Pitágoras de Samos, Euclides, entre outros.

Por fato, o conhecimento dos povos antigos (babilônicos e egípcios) foi evoluindo com o passar do tempo, mostrando assim o quanto eles tinham uma maneira peculiar de resolver os problemas matemáticos e fazer as demonstrações.

Essa busca pela valorização das demonstrações consta na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018) visto que são meios de desenvolver o caráter hipotético dedutivo, possibilitando aos estudantes justificarem relações e enunciados matemáticos.

Ao longo deste material foram apresentadas demonstrações formais e visualizações dinâmicas de alguns Teoremas Clássicos de Geometria, em especial do Teorema de Thales e do Teorema de Pitágoras, com foco voltado ao ensino na Educação Básica. Mas é certo que as aulas precisam ser dosadas e entremeadas com a parte prática, para que o aluno possa compreender bem a necessidade e o mérito das demonstrações, visto que, infelizmente, a prática pedagógica praticada na maioria das escolas não tem sequer uma referência passageira à ideia de prova. Fatos geométricos são apresentados como dogmas sem muita preocupação com sua justificação.

É importante destacar que a escolha de teoremas interessantes, comecem com uma boa apresentação, motivando a necessidade das demonstrações. E ter sempre presente que em todos os tópicos tratados no ensino, inclusive nas demonstrações é essencial ressaltar as ideias envolvidas, pois são elas que respondem pela criatividade das teorias matemáticas e podem despertar o interesse do aluno, fazendo com que ele desenvolva a capacidade dedutiva e investigativa.

Espero que este trabalho seja útil aos professores de Matemática da Educação Básica, por descrever formas dinâmicas de abordar o teorema de Thales e o teorema de Pitágoras, mostrando que a Matemática na escola precisa ser uma forma de aprender a pensar e entender o mundo, pois muitas vezes percebemos que os educandos compreendem a ideia, mas não são capazes de manipular a linguagem. Outras vezes manipulam a linguagem de forma automática sem aprender seu significado.

Referências bibliográficas:

Ávila, Geraldo Severo de Souza – **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral** – 2ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

Almeida, Célio Pinto. **Geometria Plana**. Rio de Janeiro: G. Ermakoff casa Editorial, 2018.

Berlinghoff, William P - **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**/William P. Berlinghoff, Fernando Q. Gouvêa; tradução Elza Gomide, Helena Castro – 2ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

Berlinski, David. **Os elementos de Euclides**/David Berlinski; tradução Claudio Carina; revisão técnica Marco Moriconi – 1ª edição – Rio de Janeiro: Zahar, 2018.

Boyer, Carl B., **História da Matemática**/Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomyde – 2ª ed. – São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

Brown, Richard. **Matemática; 50 conceitos e teorias fundamentais explicadas de forma clara e rápida** - 1ª edição – São Paulo: Publifolha, 2014.

Dolce, Osvaldo. **Fundamentos da Matemática elementar, 9: geometria plana**. São Paulo: Atual, 1993

Domingues, H. H. **A demonstração ao longo dos séculos**. Bolema, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002. 16

Gerônimo, João Roberto. **Geometria Euclidiana plana: um estudo com o software Geogebra** / João Roberto Gerônimo, Rui Marcos de Oliveira Barros, Valdeni Soliani Franco. Maringá: Eduem, 2010.

Gerônimo, João Roberto. **Geometria plana e espacial: um estudo axiomático** / João Roberto Gerônimo, Valdeni Soliani Franco. 2. ed. Maringá: Eduem, 2010.

Lima, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LUCHETTA, V.O.J. **Papiro Rhind**. iMática, 2008. Disponível em: https://www.matematica.br/historia/prhind.html. Acesso em: 19 out. 2023

Mlodinow, Leonard. **A janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço.** São Paulo: Geração Editorial, 2004.

Neto, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ORTIZ, S. **A Matemática da Babilônia**. UFSC, 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/351661897_A_Matematica_da_Babilonia. Acesso em Out. 2023.

POPOVA, M. **Pitágoras sobre o propósito da vida e o significado da sabedoria**. Pensar Contemporâneo, 2018. Disponível em: https://www.pensarcontemporaneo.com/pitagoras-sobre-o-proposito-da-vida-e-o-significado-da-sabedoria/. Acesso em Out. 2023

Thales. **Famous Scientists**, 2015. Disponível em: https://www.famousscientists.org/thales/. Acesso em Out. 2023

Rooney, Anne – **A História da Matemática – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A - COMO BAIXAR E INSTALAR O GEOGEBRA

Para baixar a última versão do software Geogebra seguimos as seguintes instruções:

i) Acessar a página oficial do programa www.geogebra.org.
ii) Clique na opção download.
iii) Clique em Installer do lado esquerdo, e escolha aversão do sistema operacional desejado. (Exemplo: Windows e Linux).
iv) Aparecerá uma nova tela, para salvar o programa em alguma pasta do seu computador, então escolha e clique em salvar.
v) Aguarde o término do download.
vi) E clique em fechar após de concluído.

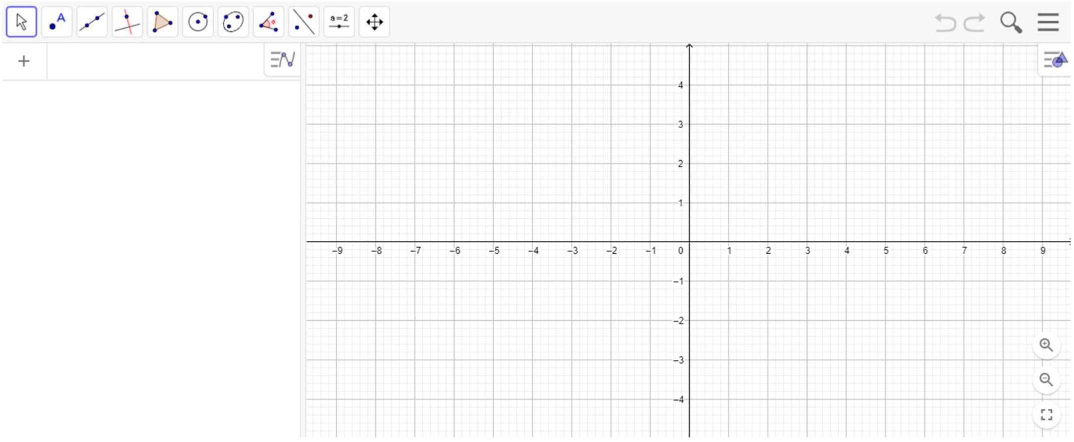
Após a instalação do software, é preciso conhecer a interface do software Geogebra, criando assim o que Chevallard (1999) chamou de primeiro momento com a organização matemática (O) que está sendo reconstruída.

i) Localize a pasta onde salvou o Geogebra, e dê dois clique em seu ícone.
ii) Clique em executar.
iii) Selecione o idioma, e clique no botão OK.
iv) Clique em avançar.
v) Selecione aceito os termos do Contrato de Licença e clicar no botão avançar em cada tela que aparecer.
vi) Aguarde a instalação...
vii) Clique em avançar e em seguida em concluído. Finalmente aparecerá a tela do Geogebra para iniciar o trabalho.

Após a instalação do software em seu computador basta clicar 2 vezes no ícone do programa para utilizá-lo.

Na tela inicial do programa temos uma planilha com uma Janela de Álgebra, onde temos: uma Janela de Visualização, a Barra de Ferramentas e o Campo de Entrada. Vamos conhecer cada uma dessas partes.

Figura 102 – Tela inicial do Geogebra

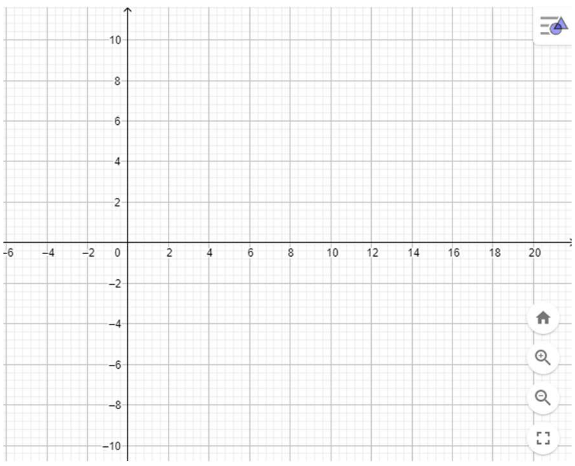


Na Barra de Ferramentas, conforme figura abaixo, é possível fazer diversas construções geométricas, entre elas: novos pontos, segmentos de retas, retas, mediatrizes, calcular comprimentos, ângulos e outras construções que serão apresentadas a seguir.

Figura 103 – Barra de ferramentas do Geogebra

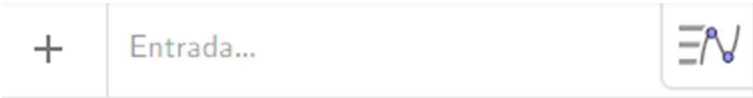
A Área de trabalho contém o plano cartesiano com os eixos coordenados x e y. Na Área de trabalho pode-se fazer diversas construções geométricas, visualizar e interagir com elas.

Figura 104 – Área de trabalho do Geogebra



No campo de entrada pode-se digitar alguns comandos, como exemplo, escrever diretamente as coordenadas dos pontos, de equações e funções. Após pressionar a tecla Enter, que o objeto aparecerá na janela de visualização. Qualquer alteração no campo de entrada será notada no objeto criado e viceversa em tempo real, mostrando flexibilidade na manipulação do objeto.

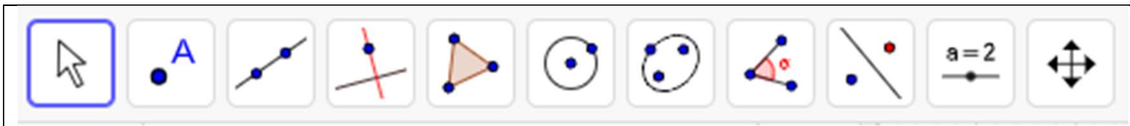
Figura 105 – Campo de entrada do Geogebra.



Barra de Ferramentas do Geogebra

A Barra de Ferramenta é o local onde estão os principais ícones que vão auxiliar o usuário. Cada janela de exibição tem suas principais ferramentas, mostraremos apenas os ícones que aparecem na Barra de Ferramenta quando as Janela de Álgebra. Com a Janela de Visualização ativada, veremos a Barra de Visualização dividida em 11 janelas, cada janela possui várias ferramentas. Para visualizar essas ferramentas, basta clicar na parte inferior do ícone. Perceba que cada ícone tem um desenho e um nome, isso ajudará a conhecer ou lembrar o que a ferramenta faz. A seguir, detalharemos os ícones da Barra de Ferramenta.

Figura 106 - Barra de ferramenta do Geogebra



1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

Figura 107 - Barra de ferramenta do Geogebra

1	

Figura 108 - Barra de ferramenta do Geogebra

2	Ponto Ponto em Objeto Vincular / Desvincular Ponto Interseção de Dois Objetos Ponto Médio ou Centro Número Complexo Otimização Raízes
3	Reta Segmento Segmento com Comprimento Fixo Semirreta Caminho Poligonal Vetor Vetor a Partir de um Ponto
4	Reta Perpendicular Reta Paralela Mediatriz Bissetriz Reta Tangente Reta Polar ou Diametral Reta de Regressão Linear Lugar Geométrico

Figura 109 - Barra de ferramenta do Geogebra

5	Polígono Polígono Regular Polígono Rígido Polígono Semideformável
6	Círculo dados Centro e Um de seus Pontos Círculo: Centro & Raio Compasso Círculo definido por Três Pontos Semicírculo Arco Circular Arco Circuncircular Setor Circular Setor Circuncircular
7	Elipse Hipérbole Parábola Cônica por Cinco Pontos

Figura 110 - Barra de ferramenta do Geogebra

8	Ângulo Ângulo com Amplitude Fixa Distância, Comprimento ou Perímetro Área Inclinação Lista Relação Inspetor de Funções
9	Reflexão em Relação a uma Reta Reflexão em Relação a um Ponto Inversão Rotação em Torno de um Ponto Translação por um Vetor Homotetia
10	Controle Deslizante Texto Inserir Imagem Botão Caixa para Exibir / Esconder Objetos Campo de Entrada

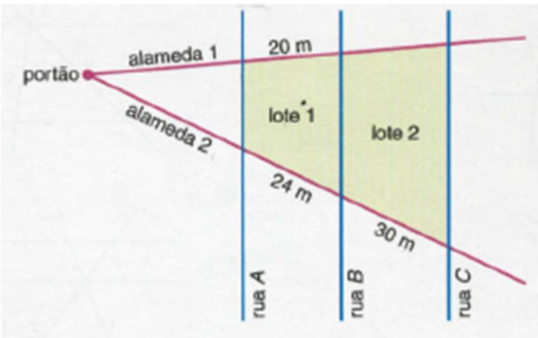
Figura 111 - Barra de ferramenta do Geogebra

11	

APÊNDICE B - QUESTÕES A SEREM TRABALHADAS COM ALUNOS DE 9º ANO

1) (Conspass – 2018) Um condomínio foi projetado de modo que do portão principal saem duas alamedas não paralelas entre si e transversais às demais ruas de circulação, que formam um feixe de paralelas. Abaixo apresentamos um desenho simplificado dessa situação:

Figura 112 – Teorema de Thales – exercício



Qual o comprimento da lateral do lote 2 que fica voltada para a alameda 1?

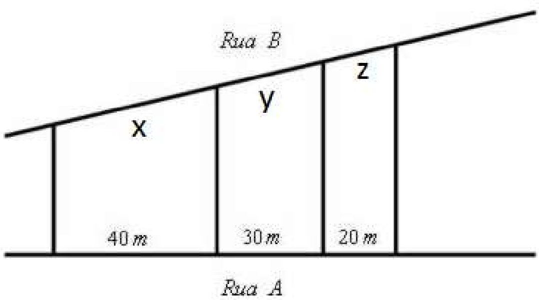
Aplicando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{20}{24} = \frac{x}{30} \quad \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{x}{30} \quad \Rightarrow 6x = 150 \quad \Rightarrow x = \frac{150}{6} = 25$$

Resposta: o comprimento da lateral é de 25m

2) (Fuvest–SP) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de x, y e z em metros sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?

Figura 113 – Teorema de Thales – exercício



O valor de x + y + z = 180.

Aplicando o Teorema de Tales, para determinar os valores de x, y e z temos:

$$\frac{180}{90} = \frac{x}{40} \quad \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{x}{40} \quad \Rightarrow \quad x = 80$$

$$\frac{180}{90} = \frac{y}{30} \quad \Longrightarrow \frac{2}{1} = \frac{y}{30} \quad \Longrightarrow \quad y = 60$$

$$\frac{180}{90} = \frac{z}{20} \quad \Longrightarrow \frac{2}{1} = \frac{z}{20} \quad \Longrightarrow \quad z = 40$$

Resposta: Os valores de x, y e z são respectivamente 80, 60 e 40m.

3) (Enem - 2009) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

a) 1,16 metro.

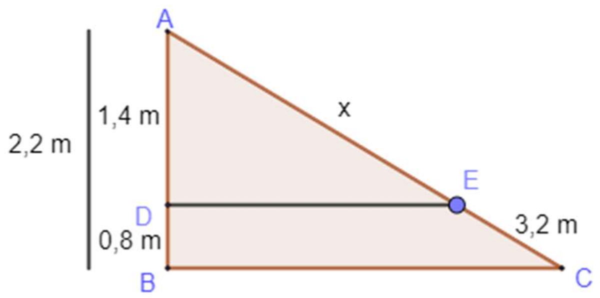
b) 3,0 metros.

c) 5,4 metros.

d) 5,6 metros.

e) 7,04 metros.

Figura 114 – Teorema de Thales – exercício



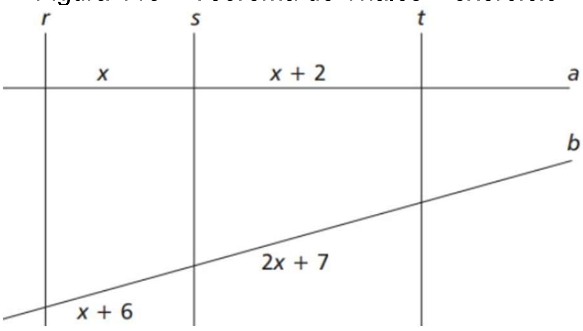
$$AD = AB - DB = 2{,}2 - 0{,}8 = 1{,}4\ m$$

Aplicando o Teorema de Thales temos a seguinte proporção:

$$\frac{1{,}4}{0{,}8} = \frac{x}{3{,}2} \rightarrow 0{,}8x = 1{,}4 \cdot 3{,}2 \ \rightarrow 0{,}8x = 4{,}48 \ \rightarrow x = 5{,}6\ m$$

4) (CEFET MG – 2014). Considere a figura em que r//s//t.

Figura 115 – Teorema de Thales – exercício



O valor de x é:
a) 3. b) 4. c) 5. d) 6.

Aplicando o Teorema de Thales temos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{x+6} = \frac{x+2}{2x+7} \rightarrow x(2x+7) = (x+6).(x+2) \rightarrow 2x^2 + 7x = x^2 + 8x + 12$$

$$\rightarrow 2x^2 - x^2 + 7x - 8x - 12 = 0 \quad \rightarrow x^2 - 1x - 12 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bháskara na resolução da equação do 2º grau:

$$x^2 - 1x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-12)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

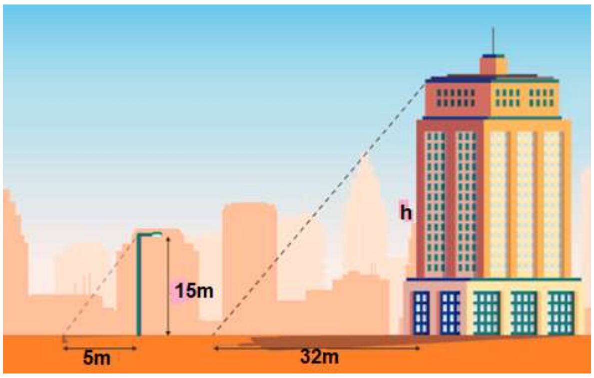
$$x' = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x' = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3\ (\textit{não serve})$$

Como x representa distância, descartamos a raiz negativa, ou seja, x = 4

5) Para realizar a medição de um prédio, Marcelo decidiu utilizar o teorema de Tales. Ele decidiu observar a sombra que o prédio projetava e a sombra de um poste cuja altura já era conhecida por Marcelo. Ele realizou as medições conforme a imagem a seguir:

Figura 116 – Teorema de Thales – exercício



Sabendo que o feixe de luz solar incide de forma paralela sobre o prédio e o poste, então podemos afirmar que a altura h do prédio mede:

A) 90 m B) 92 m C) 94 m D) 96 m E) 98 m

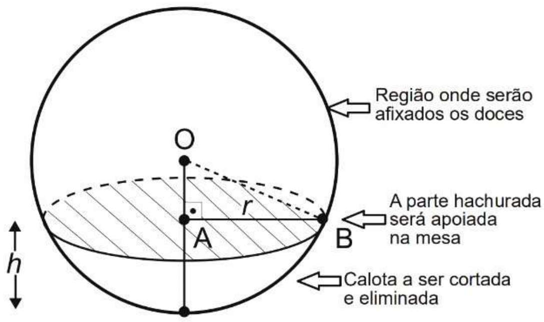
Aplicando o Teorema de Tales, para determinar a altura do prédio, temos:

$$\frac{15}{5} = \frac{h}{32} \implies \frac{3}{1} = \frac{h}{32} \implies x = 96$$

Resposta: O prédio mede 96m.

6) (Enem - 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão fixados os doces.

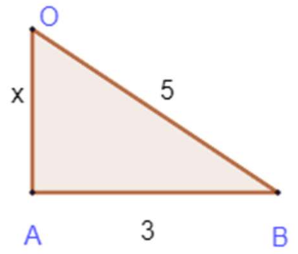
Figura 117 – Teorema de Pitágoras – exercício



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a ...

O diâmetro do melão esférico é de 10 cm, consequentemente o raio é de 5 cm.

Figura 118 – Teorema de Pitágoras – exercício



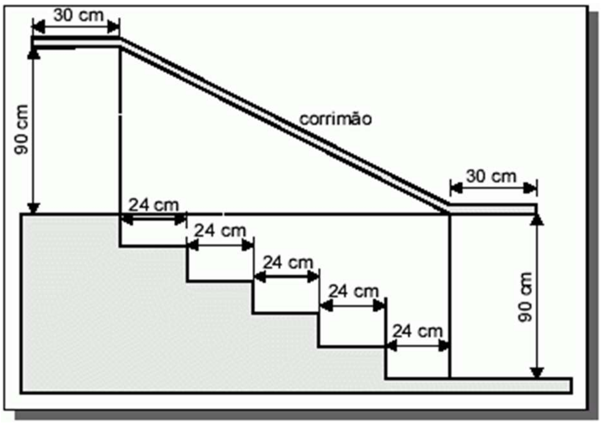
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$5^2 = 3^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad 25 = 9 + x^2 \quad \Rightarrow x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

O valor de h é 5 – 4 = 1

7) (ENEM) – Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

Figura 119 – Teorema de Pitágoras – exercício



a) 1,8 m b) 1,9 m c) 2,0 m d) 2,1 m e) 2,2 m

Inicialmente vamos determinar a medida do cateto que está faltando. Para formar a medida desse cateto devemos multiplicar 24 x 5 = 120 cm.

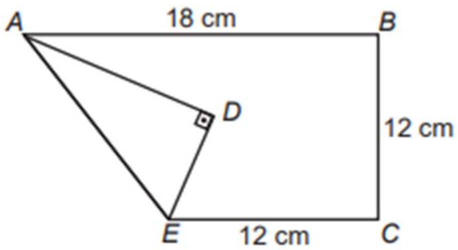
Representando a medida do corrimão por x e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 90^2 + 120^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8100 + 144000 \quad \Rightarrow x^2 = 225000 \quad \Rightarrow \quad x = 150$$

A medida do corrimão se dá pela soma das medidas: 30 + 150 + 30 = 210 cm = 2,1m.

8) (ENEM) - Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Figura 120 – Teorema de Pitágoras – exercício



Após essa primeira dobradura, qual é a medida do segmento AE?

O retângulo ABCD tem os lados paralelos AD = BC = 12 cm.

O segmento $\mathrm{AB} = \mathrm{DC}$ e $\mathrm{DC} = \mathrm{DE} + \mathrm{EC} \Longrightarrow \mathrm{DE} = 18 - 12 = 6\mathrm{cm}$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2$$

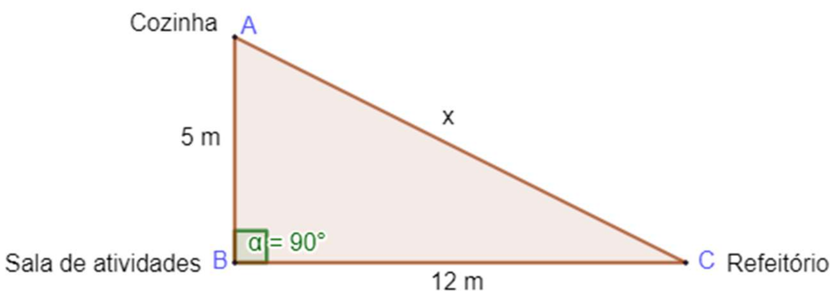
$$AE^2 = 12^2 + 6^2 \implies AE^2 = 144 + 36 \implies AE^2 = 180 \implies$$

$$AE = \sqrt{180} \implies AE = 6\sqrt{5}$$

9) (VUNESP - 2020) O centro comunitário onde Ana é voluntária está em reformas e a passagem direta da cozinha para o refeitório foi interditada. Assim, para servir no refeitório as refeições feitas na cozinha, ela deverá passar pela sala de atividades. Dessa maneira, o trajeto ficará maior em:

a) 1 m. b) 2 m. c) 3 m. d) 4 m. e) 5 m.

Figura 121 – Teorema de Pitágoras – exercício



Resolução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$

$$x^2 = 25 + 144$$

$$x^2 = 169$$

$$x = 13$$

A medida do segmento AC = 13 m, como queremos determinar a diferença entre esse trajeto e o trajeto AB + BC, faremos:

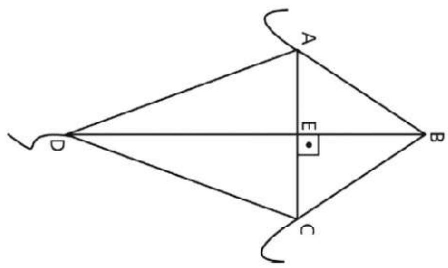
$$(AB + BC) - AC = (5 + 12) - 13 = 17 - 3 = 4m$$

10) (Cefet/MG - 2016) Uma pipa, cuja figura é mostrada a seguir, foi construída no formato do quadrilátero ABCD, sendo $AB \equiv BC$ e $AD \equiv CD$. A vareta BD da pipa intercepta a vareta AC em seu ponto médio E, formando um ângulo reto. Na construção dessa pipa, as medidas de BC e BE usadas são, respectivamente, 25 cm e 20 cm, e a medida de AC equivale a $\frac{2}{5}$ da medida de BD.

Nessas condições, a medida de DE, em cm, é igual a:

a) 25. b) 40. c) 55. d) 70

Figura 122 – Teorema de Pitágoras – exercício



Resolução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔBEC:

$$BC^2 = BE^2 + EC^2$$

$$25^2 = 20^2 + EC^2$$

$$625 = 400 + EC^2$$

$$EC^2 = 225$$

$$EC = 15$$

Encontrando a medida de AC . Como $EC \equiv AE$, temos:

$$AC = AE + EC$$

$$AC = 15 + 15$$

$$AC = 30$$

Determinando a medida de BD

Pelo enunciado da questão: $AC = \frac{2}{5} \cdot BD$

$$5 \cdot AC = 2 \cdot BD$$

$$\frac{5 \cdot AC}{2} = BD$$

$$\frac{5 \cdot 30}{2} = BD$$

$$BD = 75$$

A medida de $DE = BD - BE$

$$DE = 75 - 20 = 55$$

Portanto, a medida de $DE = 55$ cm.

11) (IFRS - 2017) Considere um triângulo equilátero de lado $5\sqrt{3}$. Qual é a altura e a área deste triângulo, respectivamente?

a) $15{,}2\ cm\ e\ \frac{75}{4}\ cm^2$

b) $\frac{6\sqrt{3}}{2} cm\ e\ \frac{75\sqrt{3}}{4} cm^2$

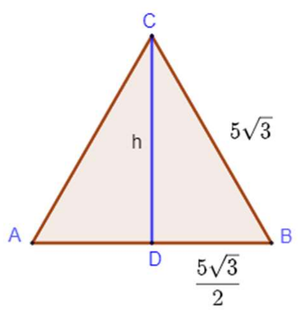
c) $3\sqrt{5}\ cm\ e\ 18{,}75\sqrt{3}\ cm^2$

d) $\frac{15}{2} cm\ e\ 37{,}5\sqrt{3} cm^2$

e) $7{,}5\ cm\ e\ \frac{75\sqrt{3}}{4} cm^2$

Resolução:

Figura 123 – Teorema de Pitágoras – exercício



$AB = BC = CA = 5\sqrt{3}$

$DB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta\ CDB$:

$$BC^2 = CD^2 + DB^2$$

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$25 \cdot 3 = h^2 + \frac{25 \cdot 3}{4}$$

$$4 \cdot 75 = 4h^2 + 75$$

$$4h^2 = 300 - 75$$

$$4h^2 = 225$$

$$h = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{4}} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

A altura do triângulo equilátero é 7,5 cm.

A área do Δ é determinada pelo produto da base pela altura e divisão por 2.

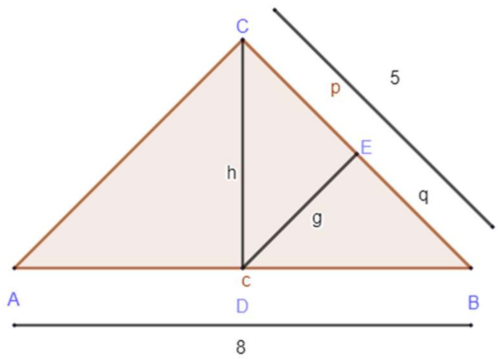
$$A = \frac{5\sqrt{3}\ \cdot \frac{15}{2}}{2} = 5\sqrt{3}\ \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

A área do triângulo equilátero é $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm².

12) Num triângulo isósceles ABC, de lados iguais a $\overline{AC} = \overline{BC} = 5$ e $\overline{AB} = 8$, encontre a distância entre o ponto médio D do segmento $\overline{CB}$ e um dos catetos.

Geometricamente temos:

Figura 124 – Teorema de Pitágoras – exercício



Lembre que distância entre um ponto e uma reta é dada pelo comprimento do segmento que une esse ponto à reta, e é perpendicular a ela.

Temos que o triângulo ABC é isósceles, logo $\overline{AD} = \overline{DB} = 4$. Encontrando o valor de $\boldsymbol{h}$, que corresponde à altura desse triângulo e aplicando o teorema de Pitágoras:

$$5^2 = h^2 + 4^2 \quad \Longrightarrow \quad 25 = h^2 + 16 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{9} = 3$$

Agora aplicando as relações métricas no triângulo retângulo CDB, temos:

$$a.h = b.c \quad \Longrightarrow \quad 5.g = 4.h \quad \Longrightarrow \quad 5.g = 4.3 \quad \Longrightarrow 5g = 12 \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

R: A distância entre $\overline{DE}$ = 2,4 u.c.