UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Bauru

Thais Hermoso de Oliveira

Modelagem Matemática, Otimização Linear e o Problema de Corte Unidimensional: abordagens para o Ensino Médio

Bauru

2024

Thais Hermoso de Oliveira

Modelagem Matemática, Otimização Linear e o Problema de Corte Unidimensional: abordagens para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Bauru.

Orientadora: Profa. Dra. Sônia Cristina Poltroniere

Bauru

2024

O48m

Oliveira, Thais Hermoso de

Modelagem Matemática, Otimização Linear e o Problema de Corte Unidimensional: abordagens para o Ensino Médio / Thais Hermoso de Oliveira. -- São José do Rio Preto, 2024

84 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Sônia Cristina Poltroniere

1. Ensino. 2. Otimização. 3. Modelagem Matemática. 4. Problema de Corte de Estoque. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de São José do Rio Preto

IBILCE

ATESTADO DE APROVAÇÃO - DEFESA

Atestamos que **THAIS HERMOSO DE OLIVEIRA**, RA nº: MPR210013, RG nº 47.966.091-8, expedido pela SSP/SP, defendeu, no dia 11/09/2024, a dissertação intitulada **"Modelagem Matemática, Otimização Linear e o Problema de Corte de Estoque Unidimensional: abordagens para o Ensino Médio"**, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional, Curso de Mestrado Profissional, tendo sido 'APROVADA'.

Atestamos ainda que a obtenção do título dependerá de homologação pelo Órgão Colegiado competente.

São José do Rio Preto, 11 de setembro de 2024

Assistente Adminstrativo II
Seção Técnica de Pós-Graduação

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Bauru

Thais Hermoso de Oliveira

Modelagem Matemática, Otimização Linear e o Problema de Corte Unidimensional: abordagens para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Bauru.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Sônia Cristina Poltroniere Silva
FC – UNESP – Bauru
Orientadora

Profª. Associada Marina Andretta
ICMC – USP – São Carlos

Profª. Associada Tatiana Miguel Rodrigues
FC – UNESP – Bauru

Bauru
Setembro de 2024

Agradecimentos

Muito antes de me tornar professora, foi na tentativa de ensinar, que aprendi a aprender. Percebi assim, que esse seria o meu caminho, ser professora. Estava decidido! Desde o início da licenciatura até agora, aquela certeza antes estabelecida, foi desconstruída e refeita por diversas vezes, não por haver dúvidas em mim, mas por ser necessário ressignificar e amadurecer. Não é possível nomear, mas é preciso agradecer a cada professor que me inspirou em sua grandeza de ser e a cada aluno que passou por mim deixando algo de si e me motivando a despertar o melhor de mim.

Mas não fui desde sempre professora, ser professora está em construção. Então, se hoje posso compreender a beleza da vida e a dádiva de ser humana em construção, há responsáveis que posso nomear. Mamãe Silvia e papai Marcos, meus pontos de partida e o impulso para tudo que estou construindo. Não bastasse a sorte de crescer com pais incríveis, me casei com meu maior parceiro e melhor amigo, assim consigo mais um nome para a minha gratidão, Victor. E que orgulho de nós, juntos somos, com certeza, pessoas melhores!

Há tantos anos, me proporcionando oportunidades e contribuindo com o meu processo de crescer, tenho que trazer aos meus agradecimentos a Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Unesp - Bauru. Desta vez, através do PROFMAT e da experiência de produção deste trabalho, orientada pela Profa. Dra. Sônia Cristina Poltroniere, concluo sendo uma versão melhorada de mim!

Ser quem se é e dar sentido à existência é uma caminhada longa e desafiadora, mas o mais extraordinário é que a felicidade verdadeira é encontrada exatamente nessa trajetória.

Ana Beatriz Barbosa Silva

Resumo

A Modelagem Matemática apresenta papel fundamental na leitura, representação e resolução de problemas reais, tornando-se uma ferramenta poderosa para alcançar as contextualizações, aplicações e interdisciplinaridades tão almejadas no Ensino de Matemática na Educação Básica. Neste sentido, este trabalho apresenta possibilidades para a abordagem de problemas reais com o auxílio da Modelagem Matemática e de conceitos de Otimização no contexto do Ensino Médio. Inicialmente, problemas clássicos de Otimização Linear e suas formulações matemáticas são apresentados e discutidos, em especial o Problema de Corte de Estoque Unidimensional. Em seguida, são apresentados os resultados de experiências vivenciadas na aplicação de atividades em turmas do Ensino Médio, abordando conteúdos matemáticos previstos pela BNCC através de problemas de Otimização Linear. A resolução gráfica de problemas de duas variáveis foi trabalhada e discutida, com o auxílio do *software* GeoGebra, bem como a resolução de problemas de maiores dimensões, utilizando a ferramenta *Solver* do Excel. Ao abordar o Problema de Corte, destacou-se o subproblema de geração de padrões de corte, modelado como um Problema da Mochila. Por fim, a partir das experiências com as aplicações realizadas, propõe-se uma nova atividade, com o objetivo de dar continuidade à abordagem do Problema de Corte de Estoque Unidimensional, vislumbrando novas possibilidades.

Palavras-chave: Ensino. Otimização. Modelagem Matemática. Problema de Corte de Estoque.

Abstract

Mathematical modeling plays a fundamental role in reading, representation and real problems solving, becoming a powerful tool to achieve the so desired contextualizations, applications and interdisciplinarities in mathematics teaching of Basic Education. Therefore, this work presents possibilities for the approaching of real problems with the help of mathematical modeling and optimization concepts in the High School context. Initially, classical linear optimization problems and their mathematical formulations are presented and discussed, especially the Unidimensional Cutting Stock Problem. Next, the results of experiences in the application of activities in high school classes are presented, addressing mathematical contents determined by the BNCC through linear optimization problems. The graphical resolution of two-variable problems was worked on and discussed, with the help of the Geogebra software, as well as the resolution of more complex problems, using the Excel Solver tool. In the cutting problem, the subproblem of generating cutting patterns stood out, modeled as a knapsack problem. Finally, based on the experiences with the applications carried out, a new activity is proposed, with the objective of continuing the approach to the Unidimensional Cutting Stock Problem, envisioning new possibilities.

Keywords: Education. Optimization. Mathematical modeling. Cutting stock problem.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Resultados de avaliações internacionais, como o PISA (LIMA, 2020), apontam baixo desempenho dos estudantes brasileiros em relação à matemática e avanços pequenos a cada edição. Muito se relaciona esse baixo desempenho à deficiência na formação inicial e continuada de professores, bem como à desvalorização do ensino. Há uma busca crescente por novas metodologias de ensino, contextualização, interdisciplinaridade e alternativas para uma aprendizagem significativa e dinâmica, de forma que o aluno seja o protagonista neste cenário. Entretanto, o olhar limitado por índices, as avaliações padronizadas e inflexíveis, as grades curriculares mecanicamente repetidas, seguem estimulando o foco no resultado final e invalidando os significados de cada etapa ao longo do processo. Para Freire (1996), a alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não podem dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.

Ser professor de Ensino Médio deveria ir além dos repetidos termos: ensinar, mediar, transmitir, facilitar, avaliar e orientar. Nesta idade escolar, é crucial que se incentive a criatividade, que se construa valores, que se desenvolva um olhar crítico, que se desperte potenciais, que se inspire. Tarefa difícil ao professor de matemática que precisa ir contra a natural e generalizada repulsa pelos números, ainda mais temidos e mal falados, quando acompanhados por letras! Entre uma infinidade de conteúdos a se cumprir, a tal "matemática básica" precisando sempre ser retomada, a tentativa (muitas vezes frustrada) de convencer um ou outro, entre os 40 alunos da turma, de que é , sim, relevante "aprender Bhaskara", está longe de ser trivial garantir a famosa aprendizagem significativa.

De acordo com D'Ambrosio (2015), atrever-se a criar e ousar na ação docente decorre do desejo de promover uma aprendizagem na qual os estudantes atribuam significados ao conhecimento matemático. Mas as estruturas do sistema educacional, a organização curricular, as dinâmicas internas escolares, podem dificultar práticas diferenciadas e direcionadas para cada público. O trabalho do educador matemático é complexo, as demandas e diversidades de cada turma são únicas, revelando a necessidade da autonomia do professor nas tomadas de decisões e abordagens metodológicas, bem como soluções e práticas criativas e adaptadas. Ainda segundo D'Ambrosio (2015), cabe considerar nossas experiências e saberes profissionais, pois produzimos conhecimento não somente intelectual e socialmente, mas também de forma emotiva e moral, por meio de nossas vivências. Os autores discutem os impactos positivos da insubordinação criativa na prática docente, que permite romper com generalizações, transformar os alunos em autores da matemática, desafiar, questionar e incorporar práticas criativas:

> Se, em nossas ações profissionais, priorizarmos uma abordagem apenas técnica, com uma perspectiva que restringe a Matemática a si mesma, poderemos apenas adestrar a pessoa em habilidades de cálculo e no uso de algoritmos, negando-lhe o conhecimento matemático necessário para a leitura de mundo a que ela tem direito. Uma forma similar de adestramento e, portanto, também tecnicista, pode ocorrer em relação ao uso das metodologias de pesquisas, quando buscamos prender pesquisadores em formação às nossas redes teóricas e metodológicas, roubando-lhes o prazer de criar e as possibilidades de ousar (D'AMBROSIO; LOPES, 2015, pg. 12).

Pensando nessa abordagem de leitura de mundo, de interpretação e resolução de problemas reais e na busca docente por práticas alternativas, o presente trabalho visa considerar a Modelagem Matemática e a Otimização como aliados no processo de ensino e aprendizagem de matemática no Ensino Médio. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)(2017), a Modelagem Matemática aparece muito mais como um recurso pedagógico recomendado para integrar a matemática ao mundo real, isto é, uma competência a ser desenvolvida através de diferentes conteúdos previstos, podendo assim, ficar em segundo plano ou ser pouco explorada. Um modelo matemático é a leitura e a representação de um problema real, a partir das simplificações necessárias, utilizando-se linguagem matemática (ARENALES, 2011), ou seja, é passível de ser aplicado ao longo do Ensino Médio dentro de diversos conteúdos, trazendo a possibilidade de explorar contextualizações, interdisciplinaridades e vivências dos alunos. Entretanto, pode ser facilmente confundido com o simples ato de resolver e interpretar problemas, deixando de ter toda sua potencialidade explorada, reconhecida e aproveitada em sala de aula.

Por outro lado, a Otimização Matemática trata de problemas de decisão, fazendo uso de modelos matemáticos para representar problemas reais (ARENALES, 2011). Um Problema de Otimização consiste em maximizar ou minimizar uma função, que caracteriza um critério a ser otimizado, sujeito a um conjunto de restrições que representam as condições impostas pelo problema. Assim, otimizar significa encontrar a melhor entre um conjunto de possíveis soluções para o problema. Analisando de forma genérica, a Otimização é amplamente aplicável à rotina e, portanto, uma ótima candidata a despertar o interesse dos alunos: minimizar o tempo de realização de uma tarefa, maximizar lucros, minimizar custos, maximizar rendimentos, minimizar perdas, maximizar o aproveitamento de espaços, entre tantas outras possibilidades. Assim, explorar a Modelagem Matemática através de Problemas de Otimização, pode abrir portas para o trabalho e desenvolvimento de atividades com rico potencial em despertar e construir as competências e habilidades necessárias e previstas pela BNCC.

A fim de destacar o papel e o impacto da Otimização, vale ressaltar que esta é tida como um dos importantes ramos da Pesquisa Operacional, que se preocupa com o desenvolvimento e aplicação de métodos científicos para analisar sistemas complexos e apoiar na tomada de decisão, envolvendo profissionais de diferentes áreas do conhecimento, como matemáticos, estatísticos, programadores, administradores, economistas e engenheiros. O termo Pesquisa Operacional foi, inicialmente, utilizado durante a Segunda Guerra Mundial, diante da necessidade de tomadas de decisão em operações e diversos cenários, como alocar radares, equipes médicas, suprimentos e outros. Desde então, a Pesquisa Operacional segue ampliando sua área de atuação, sendo de extrema importância e relevância para modelar, analisar e solucionar problemas na indústria, no mercado e em pesquisas (ARENALES, 2011). A matemática pode ser abordada nos mais diversos cenários e necessitar desde as mais simples até as mais difíceis tomadas de decisão, sendo que, para estas, a Pesquisa Operacional oferece métodos científicos para prever e comparar decisões, guiando a busca por melhores caminhos que garantam o cumprimento de objetivos e atendimento às demandas e restrições previstas.

Diante do exposto, este trabalho propõe abordar a Modelagem Matemática no contexto do Ensino Médio, através de problemas clássicos de Otimização, buscando explorar conceitos e conteúdos que se enquadram na base comum curricular vigente. Iniciando com formulações de problemas básicos, busca-se uma interação e construção de conhecimentos que permitam aos alunos, formular, discutir e compreender, ao final do processo, o Problema de Corte Unidimensional. Além de relatar as atividades colocadas em prática em duas escolas públicas de Ensino Médio, é proposta uma abordagem focada no Problema de Corte, que depende dos conhecimentos desenvolvidos através dos problemas de Otimização iniciais. Sendo assim, a partir da modelagem e resolução de problemas, utilizando conceitos de Otimização, o foco está na experiência vivenciada pelos alunos ao colocarem a "mão na massa", não necessariamente na resolução dos problemas. A busca é ressignificar conteúdos já contemplados nas aulas regulares de matemática, proporcionar um olhar diferenciado e participação ativa dos alunos, estimular pensamentos dedutivos, despertar um olhar crítico para a interpretação de problemas e incentivar ações criativas. Além disso, a abordagem permite discutir e explorar o cenário da matemática aplicada e dos mais diversos campos profissionais impactados ou movidos pela matemática. A partir de problemáticas básicas, abordou-se a construção e interpretação de sistemas lineares, a compreensão de inequações que descrevem restrições em problemas reais, a aplicação de funções, a interpretação geométrica das funções e inequações lineares, as aplicações e operações com matrizes. As abordagens descritas neste texto foram aplicadas em dois modelos diferentes: um para alunos voluntários a participarem de forma extracurricular e outro adaptado ao planejamento das aulas regulares.

Na sequência, o Capítulo 2 é dedicado a uma revisão bibliográfica da literatura, buscando levantar propostas e resultados obtidos a partir de experiências de aplicação da Modelagem Matemática e da Otimização no Ensino Médio. Além disso, apresenta-se a Modelagem Matemática enquanto metodologia de ensino, citando importantes autores e contribuições para o Ensino de Matemática. No Capítulo 3 é apresentado um estudo sobre Otimização Linear, bem como problemas clássicos de Otimização. O Capítulo 4 trata especialmente da resolução gráfica de problemas de Otimização Linear Contínua, apresentando sequências de construções gráficas para a resolução de dois problemas diferentes. O Capítulo 5 aborda exclusivamente o Problema de Corte de Estoque Unidimensional, dada sua relevância para este trabalho. As atividades desenvolvidas com alunos de Ensino Médio, resultados obtidos e experiências vivenciadas são apresentadas no Capítulo 6. No Capítulo 7, propõe-se uma continuidade de abordagem do Problema de Corte Unidimensional. Por fim, o Capítulo 8 traz as considerações finais e a conclusão deste trabalho.

2 Revisão da literatura

Neste capítulo, na seção 2.1, são apresentas pesquisas e trabalhos desenvolvidos com foco no ensino médio e que envolvem Modelagem Matemática e Otimização. Os resultados e experiências relatadas reforçam vantagens e possibilidades de explorar a Otimização como recurso pedagógico na educação básica. Na seção 2.2, é abordada a Modelagem Matemática enquanto metodologia de ensino, apontando importantes autores e impactos positivos no ensino.

2.1 Modelagem Matemática e Otimização

A matemática é vista e reforçada sob vários estereótipos: é restrita aos altos níveis de QI (quociente de inteligência), é de um público masculino, é inalcançável para quem se identifica com a área de humanas, entre outros. Nos anos iniciais da Educação Básica, em geral, ainda associa-se matemática à atividades lúdicas, divertidas e práticas, entretanto, passado o ciclo inicial do Ensino Fundamental, está comumente associada a altos níveis de estresse e ansiedade para os alunos. Deixa-se de investir em criatividade e desenvolvimento de raciocínios dedutivos a fim de cumprir-se uma vasta grade curricular. Assim, muitas metodologias são propostas no intuito de diversificar o ensino e alcançar a atenção e interesse dos alunos. A proposta neste trabalho, de abordar a Modelagem Matemática e a Otimização no Ensino Médio, remete à possibilidade de explorar a metodologia de resolução de problemas e mudar o estigma da disciplina de Matemática.

Entre tantas dificuldades enfrentadas pelos professores de matemática da Educação Básica, está a necessidade de lidar com conceitos que requerem habilidades de abstração. Conceitos fundamentais como o de funções, por exemplo, são tratados pelos livros didáticos essencialmente centrados na teoria de conjuntos, mas poderiam ser abordados desde o Ensino Fundamental sob diferentes olhares. Em pesquisa realizada em escola pública, Leão (2009) apontou resultados positivos na abordagem de funções através da metodologia de resolução de problemas, favorecendo a comunicação entre os pares, estimulando trocas de informações, construção de hipóteses e explorações mentais.

Uma proposta de aplicação da Otimização Linear e Inteira é apresentada por Silva (2021). Apesar de não ser um conteúdo presente na grade curricular do Ensino Médio, exalta-se sua relevância no desenvolvimento de habilidades e competências previstas pela BNCC. Desta forma, é proposta uma abordagem do tema aplicado ao novo Ensino Médio e são apresentados planos descritivos de três disciplinas eletivas, bem como orientações didáticas. Outra proposta na mesma temática, focada no método Simplex, com interpretação geométrica e fluxograma do algoritmo, é apresentada por Freitas (2022), sendo propostas atividades utilizando o *software* GeoGebra. Também utilizando software livre, neste caso o GeoGebraBook, Carvalho (2021) propõe abordagens na Otimização Linear e Inteira, inserindo problemas de Otimização nas práticas pedagógicas para o Ensino Médio, as quais objetivam estimular o aprendizado de matemática e possibilitar contextualizações e aplicações dos conteúdos trabalhados. Neste sentido, o uso do GeoGebraBook permite interação entre professor e alunos no desenvolvimento de atividades, direcionamento do aluno, além da possibilidade de criar ou importar conteúdos de forma gratuita.

A importância de se trabalhar com a Modelagem Matemática no Ensino Médio, que justifica e reforça o valor da abordagem de problemas de otimização, é enfática no trabalho de Pinho (2021), que faz um estudo da Base Nacional Comum Curricular e das competências previstas em matemática no Novo Ensino Médio, apontando o uso da Otimização Linear como método promissor para alcançar competências necessárias e favorecer a aprendizagem de equações e inequações lineares. Reforçando a validade dessa aplicação nas escolas, Lopes (2017) apresenta um estudo sobre a Otimização Linear, proposta de atividade para o Ensino Médio e relato de experiência com aplicação em sala de aula. Na atividade relatada, foram trabalhados problemas de otimização utilizando a resolução pelo método gráfico, pelo método Simplex e também através da ferramenta Solver, no Excel.

No trabalho de Daros (2021), a Otimização é abordada visando estudar problemas práticos relacionados ao contexto de um curso técnico em agropecuária. É proposto um roteiro de atividades que considera retomadas de conteúdos, como equações, inequações e sistemas lineares, seguido de apresentação de conceitos da Otimização Linear e Resolução de Problemas com base no método Simplex.

Como mostrado neste capítulo, muitas são as contribuições e possibilidades ao se abordar a otimização no contexto do ensino de matemática na Educação Básica. Mesmo problemas mais complexos podem ser adaptados e fornecer recursos para diferentes práticas e desenvolvimentos no Ensino Médio, como é o caso do Problema de Corte de Estoque, explorado neste trabalho, e também discutido por Coutinho (2019), que sugere um roteiro de atividades práticas abordando o Corte Unidimensional e Bidimensional, de maneira exploratória, destacando o processo de geração dos padrões de corte.

2.2 Modelagem Matemática enquanto metodologia na Educação Básica

> A forma de trabalho proposta pela Modelagem Matemática procurava romper com a forma, até então assumida de se ensinar Matemática, qual seja: ênfase nos algoritmos, na memorização e descontextualização dos conteúdos. (BRANDT; BURAK; KLüBER, 2016, pg. 18)

A Modelagem Matemática, além daquela vinculada à Matemática Aplicada, aparece como alternativa metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática, havendo notoriedade para sua prática na Educação Básica, permitindo levar para a sala de aula situações rotineiras, que convergem para os interesses escolares e pessoais dos alunos, fazendo conexões e uma aproximação cultural, isto é, conectando a matemática que seria abstrata às vivências reais para uma aprendizagem significativa.

Inicialmente, neste trabalho, o uso do termo Modelagem Matemática fez-se referenciando a construção de Modelos Matemáticos para representação de problemas reais. Entretanto, após realizadas as atividades propostas para aplicação com o Ensino Médio, muito se observou a possibilidade de adaptação que poderia ser feita seguindo as etapas propostas pela metodologia de ensino da Modelagem Matemática. A forma como foram desenvolvidas as atividades e a devolutiva dos alunos, abrem margem para possíveis aplicações em diferentes contextos, principalmente pelo fato de que os problemas de otimização trabalhados foram o ponto de partida para inserção de diferentes conteúdos de matemática, e não o contrário. Isto é, foi possível acompanhar nas práticas pedagógicas desenvolvidas a ideia proposta pela Modelagem Matemática no seu sentido de metodologia de ensino, como segue:

> No trabalho com a Modelagem faz-se um caminho inverso daquele utilizado no ensino mais usual. Nesse, apenas os conteúdos determinam os problemas, na Modelagem os problemas podem determinar os conteúdos a serem usados para resolver as questões oriundas da etapa anterior. (BRANDT; BURAK; KLüBER, 2016, pg. 44)

As pesquisas e contribuições da Modelagem no âmbito da educação são relativamente novas, iniciadas no Brasil na década de oitenta, podendo citar como grandes colaboradores Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, IMECC, da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP (D'AMBROSIO, 1986; BASSANEZI, 2002).

Quanto à aplicação desta metodologia na Educação Básica, Burak é uma grande referência, desde sua dissertação de mestrado pela UNESP de Rio Claro (BURAK, 1987), com uma proposta de aplicação da Modelagem Matemática para a quinta série do Ensino Fundamental. A proposta foi desenvolver um processo capaz de auxiliar o aluno a construir o conhecimento matemático a partir do interesse em determinados temas, buscando a autonomia e a criação de estratégias para a solução de problemas. Dando sequência aos estudos e contribuições, Burak também dedicou-se à Modelagem Matemática em sua tese de doutorado pela Unicamp (BURAK, 1992), quando realizou seu trabalho focado e compartilhado com professores da Educação Básica e posterior acompanhamento da prática desses docentes abordando a Modelagem Matemática, bem como a realização de coleta de dados.

Há diferentes vertentes e concepções para a Modelagem Matemática, como ambiente de aprendizagem, como método de pesquisa, ou como sistema de ensino e de aprendizagem, por exemplo. Há também possibilidades distintas de etapas a serem compostas para o uso da metodologia. Segundo Burak (1992), a Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões. As etapas propostas por Burak, seguem: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento do(s) problema(s); resolução do(s) problema(s) e o trabalho dos conteúdos matemáticos no contexto do tema; e análise crítica da(s) solução(ões) (BRANDT; BURAK; KLüBER, 2016).

> No setor educacional, a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. E, mais, com este material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmicas. (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014, pg. 19)

Na coletânea apresentada por Brandt, Burak e Kluber (2016), composta por 12 capítulos de experiências e vasto conteúdo de diversos autores, Burak abre o repertório relatando todo seu processo e construção através da Modelagem Matemática. Destacam-se aqui, as falas dos docentes participantes do projeto, com posicionamentos que ainda são frequentemente repetidos no cenário escolar atual: os alunos não demonstram interesse; a necessidade de cumprimento curricular não permite explorar a criatividade e metodologias diferenciadas; o conteúdo a ser cumprido é inflexível e muitas vezes incompatível com a realidade dos estudantes; os professores na educação básica acabam repetindo posturas conservadoras de seus professores universitários; a ênfase em aplicação de fórmulas afasta a compreensão dos processos; repete-se a memorização sem análises críticas, entre tantas outras colocações. Essas falas revelam tanto a insatisfação, quanto a repetição de padrões que reforçam a rejeição dos alunos pela matemática. Neste sentido, a proposta da modelagem vem como alternativa para aplicação em qualquer etapa da vida escolar e adaptável a qualquer conteúdo.

3 Otimização Linear Contínua

Os modelos de Otimização Linear são vastamente utilizados e aplicados à situações práticas, além de, comumente, representarem subproblemas de casos mais complexos, sendo facilitadores em suas resoluções. O *método simplex*, publicado na década de 1940, e o *método de pontos interiores*, da década de 1980, foram importantes marcos e seguem como principais ferramentas computacionais na resolução de problemas de Otimização Linear (ARENALES, 2011). Ainda, segundo Goldbarg (2005), a Otimização Linear é de extrema importância devido à eficiência dos algoritmos de solução existentes e à possibilidade da transformação dos modelos não-lineares em modelos lineares.

Um dos ramos da Pesquisa Operacional, com ampla aplicação prática, é a Otimização, que considera a modelagem matemática de problemas reais e complexos e a sua solução por meio de técnicas computacionais. Um Modelo Matemático de Otimização, de modo geral, é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{x} \in S. \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ o vetor das variáveis de decisão;
- $f(\mathbf{x})$ a função objetivo (critério para a escolha da solução);
- S o conjunto das soluções factíveis definido pelas restrições do problema.

No modelo (3.1) apresentado, busca-se maximizar uma função objetivo, há também a possibilidade de modelagem minimizando-se a função. Se a função objetivo e as restrições em (3.1) são apresentadas por expressões matemáticas lineares, então ele representa um Problema de Otimização Linear Contínua ou simplesmente Problema de Otimização Linear.

Considere um problema de otimização linear em que se queira maximizar a função linear $z : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dada por $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_px_p$. Levando em conta as condições impostas, o modelo de otimização linear associado é apresentado a seguir.

$$\text{Maximizar} \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_px_p \tag{3.2}$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{sujeito a:} & & & & & & & & \\
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1p}x_p & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mp}x_p & \geq & b_m \\
 & & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ... & & , x_p & \geq 0. & &
\end{array} \tag{3.3}
$$

em que:

- $x_j,\ j = 1, ..., p$, são as variáveis de decisão;
- $c_j,\ j = 1, ..., p$, são os coeficientes das variáveis na função objetivo;
- $a_{ij},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., p$, são os coeficientes das variáveis nas restrições;
- $b_i,\ i = 1, ..., m$, são os termos independentes nas equações e inequações.

A função linear a ser maximizada em (3.2) é a função objetivo e o conjunto de equações/inequações lineares em (3.3) representa as restrições do problema. Resolver este modelo consiste em determinar os números reais $(x_1, x_2, ..., x_p)$ que fornece o maior valor para a função objetivo e que satisfaz as restrições simultaneamente.

Importante ressaltar que, utilizando um conjunto de variáveis auxiliares, é possível reescrever todas as restrições do modelo na forma de igualdade e também restrições de sinal nas variáveis, obtendo um sistema de equações lineares, geralmente, com um número de variáveis maior que o número de equações. As soluções desse sistema linear são denominadas soluções factíveis do problema de otimização linear.

Um modelo de Otimização Linear, reescrito com todas as restrições na forma de igualdade, pode ser colocado na forma matricial, como apresentado a seguir:

$$
\begin{array}{rc}
\text{Maximizar} & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeito a} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array} \tag{3.4}
$$

sendo $\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, ..., c_n)$ o vetor dos coeficientes das variáveis na função objetivo, $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ o vetor das variáveis de decisão, $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, ..., b_m)$ o vetor dos termos independentes e $\mathbf{A}$ a matriz dos coeficientes das variáveis nas restrições, de ordem $m \times n$:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.
$$

Assim, qualquer problema de Otimização Linear pode ser escrito na forma padrão, sem perda de generalidade, apresentando uma função objetivo a ser maximizada ou minimizada, um conjunto de restrições representado por um sistema de equações lineares e a condição de não-negatividade da variáveis.

Definição 3.1: Um vetor $\mathbf{x}$ é solução factível do problema se satisfaz todas as restrições e condições de não-negatividade. O conjunto de todas as soluções factíveis é denominado região factível.

Definição 3.2: Uma solução ótima de um problema de otimização linear, caso exista, é a solução factível que apresenta o maior valor para a função objetivo, no caso de maximização.

Na sequência, exemplos de problemas clássicos de Otimização serão apresentados e discutidos. O Problema de Corte de Estoque Unidimensional será tratado em três modelos diferentes no próximo capítulo.

3.1 Problema da Mistura

O problema da mistura consiste em misturar itens ou ingredientes para se obter um produto desejado, isto é, combinando-se materiais disponíveis será produzida a mistura final (ARENALES, 2011). O objetivo do problema está em determinar as quantidades de cada ingrediente ou material, de modo a atender as restrições impostas, considerando um critério de otimização. Variações deste cenário podem ser aplicadas para a produção de rações, de ligas metálicas, de concreto, ou até mesmo na composição de uma dieta nutricional. O problema pode ser proposto de diferentes modos, como por exemplo, objetivando-se minimizar o custo da mistura final, atendendo-se aos requisitos impostos.

Para a Modelagem Matemática, considere que uma mistura deve ser produzida a partir de n diferentes ingredientes, cada um composto por m diferentes componentes que são desejadas no produto final. Sejam, ainda, dadas as frações de cada componente em cada tipo de ingrediente, a fração de cada componente na mistura e o custo da unidade de cada ingrediente. Desse modo, considere a variável de decisão x_j, que representa a quantidade do ingrediente j em uma unidade da mistura, $j = 1, ..., n$. Considere, ainda, os seguintes parâmetros:

- a_{ij}: fração do componente i no ingrediente j, com $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$;
- b_i: fração do componente i na mistura, $i = 1, ..., m$;
- c_j: custo de uma unidade do ingrediente j, $j = 1, ..., n$.

Pretendendo-se minimizar o custo da mistura, a função objetivo deve ser escrita como a soma dos custos dos ingredientes utilizados, isto é, $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Para atender a fração desejada do componente i em cada unidade da mistura, devemos ter $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_i$, com $i = 1, ..., m$. Além disso, como x_j representa a quantidades do ingrediente j em cada unidade da mistura, então $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$.

Portanto, o problema descrito pode ser modelado como um problema de otimização linear, como segue:

$$\text{Minimizar} \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3.5}$$

$$\text{sujeito a} \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \tag{3.6}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \tag{3.7}$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \tag{3.8}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1 \tag{3.9}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, ..., n. \tag{3.10}$$

Em (3.5), o objetivo é minimizar o custo de produção da mistura. As restrições (3.6)-(3.9) são relativas à composição da mistura. Por fim, (3.10) apresenta a condição de não negatividade das variáveis de decisão.

Para exemplificar, considere o problema de determinar as quantidades dos alimentos A, B, C e D que devem ser incluídos em uma dieta, de modo a atender aos requisitos nutricionais mínimos impostos para as vitaminas W e Y, gastando-se o menor valor possível, ou seja, minimizando-se o custo da dieta. A Tabela 1, proposta pela autora, fornece as quantidades de vitaminas em cada um dos alimentos, além dos requisitos mínimos e custos unitários de cada alimento.

Tabela 1 – Dados para o exemplo do Problema da Dieta.

Vitamina	***Alimento A (kg)***	***Alimento B (kg)***	***Alimento C (kg)***	***Alimento D (kg)***	***Requisito nutricional mínimo***
W	4 mg	3 mg	6 mg	24 mg	9 mg
Y	35 mg	28 mg	6 mg	29 mg	60 mg
Custo (R$)	3,00	5,00	2,00	1,50	

Considerando que são quatro tipos de alimentos disponíveis, o problema é formulado a partir de quatro variáveis de decisão, sendo elas:

- x_1: quantidade do alimento A;

- x_2: quantidade do alimento B;
- x_3: quantidade do alimento C;
- x_4: quantidade do alimento D.

A função objetivo deve determinar o custo para a dieta, o que depende das quantidades utilizadas de cada alimento. Dessa forma, pode ser escrita como segue:

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 1,5x_4. \tag{3.11}$$

Além da função objetivo, é preciso considerar as condições impostas no problema. De acordo com os dados da Tabela 1, há um requisito nutricional mínimo de 9 mg para a vitamina W, isto é, este é o valor mínimo a ser atingido somando-se as quantidades desta vitamina para cada quantidade de alimento inserido na dieta. Da mesma forma, deve-se atingir pelo menos 60 mg da Vitamina Y. Além disso, é importante ressaltar que nenhuma das variáveis de decisão pode ser negativa para este problema, isto é, seria incoerente considerar valores menores que zero para as quantidades de alimentos, o que resulta na restrição de não negatividade. Assim, o problema completo é formulado a seguir:

$$\text{Minimizar} \qquad z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 1,5x_4 \tag{3.12}$$

$$\text{sujeito a} \qquad 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 24x_4 \geq 9 \tag{3.13}$$

$$35x_1 + 28x_2 + 6x_3 + 29x_4 \geq 60 \tag{3.14}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \tag{3.15}$$

A função objetivo a ser minimizada é dada por (3.12), as restrições (3.13) e (3.14) visam atender aos requisitos mínimos nutricionais das vitaminas W e Y, respectivamente, e, por fim, (3.15) garante a não negatividade das variáveis de decisão.

3.2 Problema do Transporte

O problema do transporte trata da situação em que quantidades de produtos devem ser transportados de determinadas origens, por exemplo, produtores ou armazéns, para determinados destinos, por exemplo, consumidores (ARENALES, 2011). É comum que se tenha como objetivo minimizar o custo total do transporte, dado que este é proporcional à quantidade de produtos transportada e à distância percorrida. As restrições do problema estão associadas às demandas de produtos em cada destino, bem como à disponibilidade de produtos nas origens.

Para a modelagem do problema do transporte, suponha o transporte de um determinado produto a partir de m origens para o atendimento das demandas de n destinos. Sejam, ainda, conhecidas as quantidades de produtos disponíveis nas origens, bem como as demandas nos destinos, além dos custos de transporte. Definimos a variável de decisão x_{ij} como sendo a quantidade do produto transportado da origem i para o destino j, com $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. Considere, ainda, os seguintes parâmetros:

- a_i: quantidade de produto disponível na origem i, $i = 1, ..., m$;
- d_j: demanda pelo produto no destino j, $j = 1, ..., n$;
- c_{ij}: custo de transporte da origem i para o destino j, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Pretendendo-se minimizar o custo total dos transportes, o problema descrito pode ser modelado como um problema de otimização linear:

$$\text{Minimizar} \qquad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3.16}$$

$$\text{sujeito a} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, ..., m \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, ..., n \tag{3.18}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, .., n. \tag{3.19}$$

A função objetivo a ser minimizada é dada por (3.16). As restrições (3.17) limitam o transporte de determinada origem para os destinos à quantidade disponível na origem. O conjunto de restrições (3.18) garantem o atendimento das demandas nos destinos. Por fim, a condição de não negatividade das variáveis está representada em (3.19).

Para exemplificar, considere uma distribuidora de alimentos que conta com dois centros de produção, W e Y, de um determinado produto, que atende a demanda de três centros consumidores, P, Q e R. A Tabela 2, proposta pela autora, fornece dados de demanda e de disponibilidade de produto.

Tabela 2 – Dados para o exemplo do Problema de Transporte.

Centros de produção	***Consumidor P***	***Consumidor Q***	***Consumidor R***	***Disponibilidade de produtos***
W	5	3	6	1200
Y	10	9	5	1900
Demanda	400	500	700	

Assim, o problema de transporte pode ser formulado conforme segue:

$$\text{Minimizar} \quad z = 5x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + 10x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} \tag{3.20}$$

$$\text{sujeito a} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1200 \tag{3.21}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1900 \tag{3.22}$$

$$x_{11} + x_{21} = 400 \tag{3.23}$$

$$x_{12} + x_{22} = 500 \tag{3.24}$$

$$x_{13} + x_{23} = 700 \tag{3.25}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0. \tag{3.26}$$

A função objetivo (3.20) busca minimizar os custos envolvidos no transporte dos centros produtores para os centros consumidores. As restrições (3.21) e (3.22) se referem à disponibilidade de produtos nos centros produtores W e Y, respectivamente. As restrições (3.23)-(3.25) garantem que as demandas dos centros consumidores P, Q e R, respectivamente, sejam atendidas. Por fim, (3.26) é a restrição de não negatividade das variáveis de decisão do problema.

3.3 Problema da Mochila

O problema da mochila tem grande relevância na otimização, pois está, de alguma forma, associado a vários outros problemas. Foi, possivelmente, apresentado pela primeira vez por Dantzig (1957), sendo um grande marco para a otimização (GOLDBARG; LUNA, 2005). Este problema pode ser entendido como a tarefa de preencher uma mochila sem ultrapassar a sua capacidade, maximizando o valor total de produtos carregados. Entre as possibilidades de aplicação deste modelo, cabe ressaltar aqui, pela relevância neste trabalho, está a geração de padrões de corte para serem utilizados na solução do problema de corte de estoque, que será detalhado no Capítulo 5. A tarefa de determinar um padrão de corte, pode ser entendida como solucionar um problema da mochila.

Para a Modelagem Matemática do problema da mochila inteira, considere a seguinte situação: uma mochila com capacidade total b, em kg, deve ser preenchida com itens de pesos w_i e respectivos valores de utilidade v_i, com $i = 1, ..., m$, sendo m a quantidade de tipos de itens disponíveis. Dessa forma, pretende-se maximizar o valor de utilidade total obtido com o preenchimento da mochila, respeitando-se a limitação de peso.

Considerando que são n tipos de itens disponíveis para preencher a mochila, considere x_i a variável de decisão que representa a quantidade do item de tipo i a ser incluído na mochila.

Portanto, o problema descrito pode ser modelado como um problema de otimização linear inteiro:

$$\text{Maximizar} \qquad z = v_1x_1 + v_2x_2 + ... + v_mx_m \tag{3.27}$$

$$\text{sujeito a} \qquad w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_mx_m \leq b \tag{3.28}$$

$$x_i \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, ..., m. \tag{3.29}$$

O modelo (3.27)-(3.29) representa o problema conhecido como Problema da Mochila Inteiro. Em (3.27), o objetivo é maximizar o valor total de utilidade a partir do preenchimento da mochila. A restrição em (3.28) pode ser chamada de restrição física e garante que a soma dos pesos dos itens incluídos não ultrapasse a capacidade total da mochila. Por fim, a restrição (3.29) se refere à integridade e não negatividade das variáveis de decisão.

A Modelagem Matemática pode ser alterada de acordo com condições adicionais apresentadas, como, por exemplo, uma limitação e_i na quantidade de itens do tipo i a ser incluído na mochila. Neste caso, o problema é chamado de Problema da Mochila Restrito e formulado como segue:

$$\text{Maximizar} \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \tag{3.30}$$

$$\text{sujeito a} \qquad w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_mx_m \leq b \tag{3.31}$$

$$0 \leq x_i \leq e_i \text{ e inteiro}, \quad i = 1, ..., m. \tag{3.32}$$

O problema também pode ser formulado considerando a possibilidade de incluir ou não um exemplar de cada item, o que caracteriza o Problema da Mochila Booleana, ou Mochila 0-1. Para esta situação, as variáveis de decisão são definidas como binárias: $x_i = 1$ se o item de tipo i deve ser incluído na mochila; $x_i = 0$, caso contrário.

Modelo matemático para o Problema da Mochila 0-1:

$$\text{Maximizar} \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \tag{3.33}$$

$$\text{sujeito a} \qquad w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_mx_m \leq b \tag{3.34}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., m. \tag{3.35}$$

No modelo (3.33)-(3.35), observe que a única diferença, quando comparado ao modelo (3.27)-(3.29), está nas restrições (3.35), que definem as variáveis de decisão como variáveis binárias.

Para exemplificar a Modelagem Matemática do problema da mochila, considere o seguinte problema: Deseja-se cortar barras de comprimento $L = 15$ metros em três tipos de barras menores (itens), de comprimentos $l_1 = 3$, $l_2 = 5$ e $l_3 = 7$ metros e valores de utilidade

$v_1 = 5, v_2 = 6$ e $v_3 = 4$, respectivamente. Cada maneira de cortar as barras, combinando os tipos de itens, pode ser entendida como uma maneira de carregar uma mochila de capacidade L, e pode ser representada, matematicamente, por um vetor $\mathbf{a} = (x_1, x_2, x_3)$, em que a componente x_i representa o número de itens de comprimento l_i obtido a partir do corte da barra.

Dessa forma, o problema pode ser modelado como um problema da mochila inteiro, considerando três variáveis de decisão, sendo elas:

- x_1: quantidade de itens de comprimento 3m obtidos a partir do corte de uma barra;
- x_2: quantidade de itens de comprimento 5m obtidos a partir do corte de uma barra;
- x_3: quantidade de itens de comprimento 7m obtidos a partir do corte de uma barra.

Modelo matemático:

$$\text{Maximizar} \quad z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \tag{3.36}$$

$$\text{sujeito a} \quad 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 15 \tag{3.37}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{e inteiros.} \tag{3.38}$$

Em (3.36), o objetivo é maximizar o valor total de utilidade dos itens cortados. A restrição (3.37) garante que a soma dos comprimentos dos itens cortados não ultrapasse o comprimento da barra. A restrição (3.38) define o domínio das variáveis de decisão.

O Problema da Mochila Inteira será de grande importância no Capítulo 5, que trata do Problema de Corte de Estoque Unidimensional. Como será destacado na modelagem considerada para o problema de corte, determinar um padrão de corte consiste em resolver um problema da mochila inteiro. Ou seja, o vetor solução $\mathbf{a} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ do problema da mochila representará um padrão de corte que poderá ser utilizado na solução.

4 Solução gráfica de um problema de Otimização Linear

Determinar a solução ótima, caso exista, de um problema de Otimização Linear Contínua, ou seja, com variáveis reais, pode não ser uma tarefa fácil, dependendo da dimensão do problema, a partir do conjunto de restrições e da quantidade de variáveis envolvidas. No entanto, para problemas que envolvem duas ou três variáveis de decisão, é possível fazer a representação e a interpretação geométrica dos conceitos envolvidos, bem como obter sua solução ótima, caso exista. Neste capítulo, discorre-se sobre a resolução gráfica de problemas de Otimização Linear. Serão utilizados como exemplos, dois problemas cujas modelagens envolvem duas variáveis de decisão, o que permite representar a região factível e a solução ótima no plano cartesiano (ARENALES, 2011).

Exemplo 1 - Considere o seguinte problema de otimização linear:

$$\text{Maximizar} \qquad z = 2x + 3y \tag{4.1}$$

$$\text{sujeito a} \qquad 4x + 3y \leq 35 \tag{4.2}$$

$$x \leq 8 \tag{4.3}$$

$$y \leq 5 \tag{4.4}$$

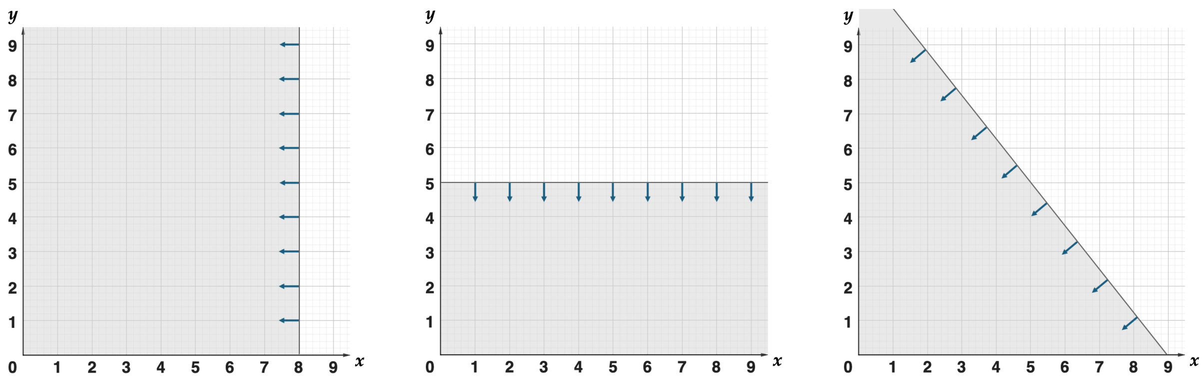
$$x \geq 0, \;\; y \geq 0. \tag{4.5}$$

Cada restrição do problema, dadas em (4.2)-(4.5), define uma região do plano cartesiano. Para determinar a região factível, é necessário delimitar a área de intersecção entre as regiões definidas por tais restrições. Pensando, inicialmente, nos pontos que satisfazem a condição de não-negatividade (4.5), o gráfico já se restringe ao primeiro quadrante, isto é, a região em que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

A restrição (4.3) pode ser determinada a partir da equação $x = 8$, ou seja, a reta vertical que corta o eixo das abscissas em $x = 8$. Como a restrição requer valores para x menores ou iguais a 8, então a região de interesse será à esquerda da reta vertical citada, dentro do primeiro quadrante, como pode ser visto na Figura (1a). A região de interesse está destacada em cinza e apontada por setas à esquerda da reta $x = 8$. De maneira análoga, pode ser determinada a região delimitada pela restrição (4.4), representada na Figura (1b).

Seguindo o mesmo processo, a região delimitada pela restrição (4.2) pode ser determinada a partir da reta $4x + 3y = 35$, considerando que ela divide o plano em dois semiplanos. Ao testar um ponto pertencente a um dos semiplanos, conclui-se que a região do primeiro quadrante representada por esta restrição é a indicada em cinza e pelas setas na Figura (1c).

Figura 1 – Passos para a construção da região factível.

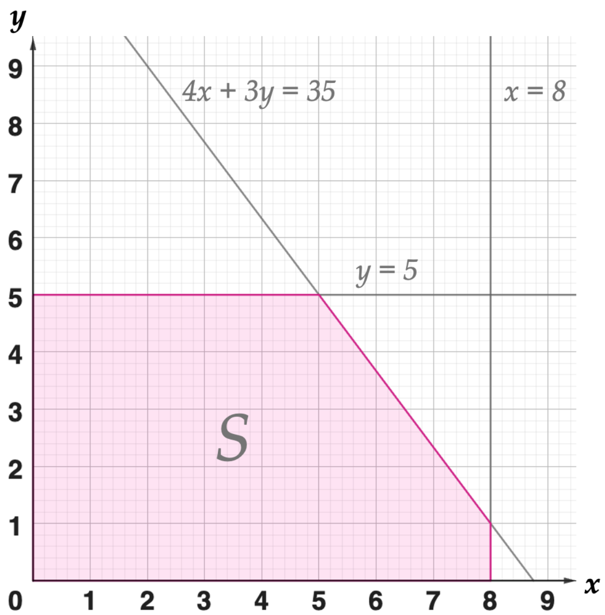


(a) Restrição $x \leq 8$. (b) Restrição $y \leq 5$. (c) Restrição $4x + 3y \leq 35$.

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Assim, a região factível S é definida pela intersecção das três regiões da Figura 1 e está ilustrada na Figura 2.

Figura 2 – Região factível do problema - Exemplo 1.



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

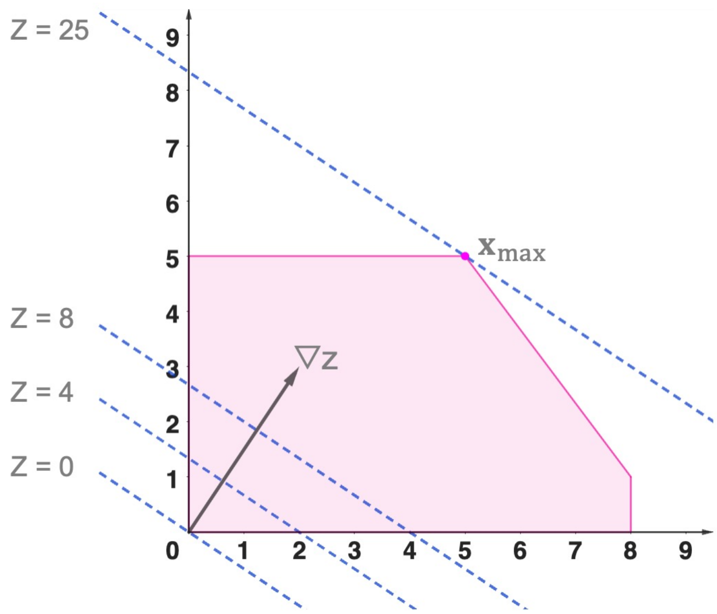
Qualquer ponto da região S, esteja ele no seu interior ou na sua fronteira, representa uma possível solução para o problema, isto é, indica valores de x e y que satisfazem todas as restrições impostas. Para exemplificar, seja o ponto $P = (1, 1)$, interno à região factível. Substituindo-se $x = 1$ e $y = 1$ na função objetivo (4.1), obtemos $z = 5$. Da mesma forma, o ponto $Q = (\frac{5}{2}, 0)$ resulta em $z = 5$. Há infinitos pontos de S que retornam o valor 5 para a função objetivo, formando a reta chamada curva de nível da função z.

Por definição, uma curva de nível de $z = f(x, y)$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \text{Domínio}(f)$ nos quais a função f tem o mesmo valor $k \in \mathbb{R}$. No caso de um problema de Otimização Linear, a função objetivo é linear e, ao atribuir $z = k$, obtém-se equações de retas com uma mesma inclinação, ou seja, as curvas de nível são retas paralelas. Por exemplo, fazendo $z = 5$, obtém-se a equação de reta $2x + 3y = 5$, determinando uma curva de nível. Por outro lado, fazendo $z = 7$, obtém-se a curva de nível $2x + 3y = 7$, que é uma reta com a mesma inclinação da anterior. Dessa forma, existem infinitas retas que são curvas de nível da função $z = 2x + 3y$, todas elas paralelas entre si.

Considere, agora, o vetor v cujas componentes são os coeficientes das variáveis na função objetivo (4.1), ou seja, $v = (2, 3)$. Este vetor é denominado vetor gradiente da função z e é denotado por ∇z. É possível verificar que, caminhando na região factível, na direção do vetor gradiente ∇z, o valor da função objetivo vai aumentando. Por outro lado, caminhando na direção do vetor $-\nabla z$, o valor da função vai diminuindo. A teoria do Cálculo para Funções Reais de Várias Variáveis Reais garante que, de modo geral, o vetor gradiente da função $z = f(x, y)$ aponta para a direção de maior crescimento de f (STEWART, 2013). Além disso, garante que o vetor gradiente é perpendicular às curvas de nível da função f. Para maiores detalhes, consultar Lopes (2017).

Considerando a discussão anterior, voltando para a resolução gráfica do modelo (4.1)-(4.5), a Figura 3 apresenta a região factível S, o vetor gradiente e algumas curvas de nível da função $z = 2x + 3y$. Tomando a direção do vetor gradiente, obtêm-se o ponto da região factível que fornece o maior valor para z, representado por $\mathbf{x}_{max}$. Observe que o ponto de máximo é um vértice da região factível, definido pela intersecção de duas retas que delimitam a região. Este ponto, de coordenadas $(5, 5)$, fornece o maior valor para a função objetivo, sendo $z = 25$. Este é um exemplo de solução única, com apenas um vértice da região factível pertencente à última curva de nível que tem intersecção com a região, seguindo na direção do vetor gradiente. Assim, é possível afirmar que para todo $\mathbf{x} \in S, f(\mathbf{x}) \leq 25$, o que significa que $\mathbf{x}_{max}$ é a solução ótima.

Figura 3 – Solução ótima para o problema - Exemplo 1



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Exemplo 2 - Considere o seguinte problema de otimização linear:

$$\text{Maximizar} \qquad z = \frac{x}{2} + y \tag{4.6}$$

$$\text{sujeito a} \qquad x + 2y \leq 12 \tag{4.7}$$

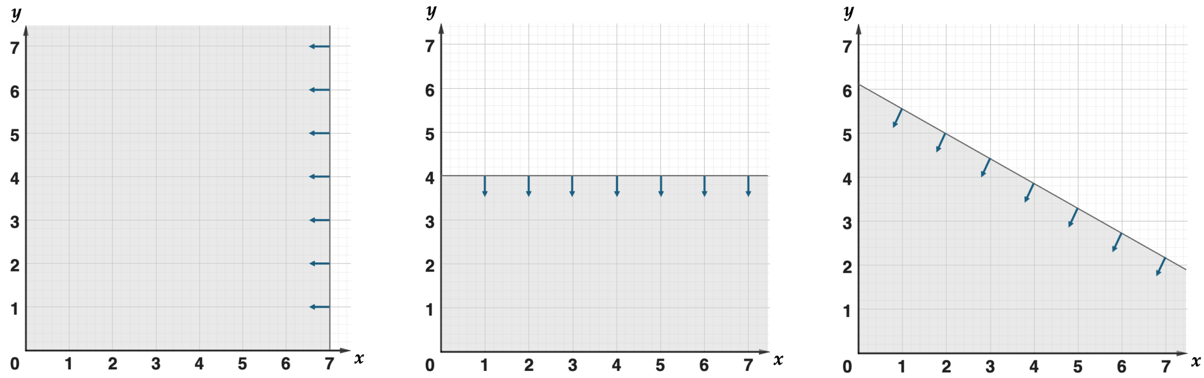
$$x \leq 7 \tag{4.8}$$

$$y \leq 4 \tag{4.9}$$

$$x, y \geq 0. \tag{4.10}$$

Analogamente ao processo realizado no Exemplo 1, a região factível S ficará restrita ao primeiro quadrante, dada a restrição de não negatividade em (4.10). Assim, considerando apenas os eixos positivos de x e y, as regiões delimitadas pelas restrições (4.7)-(4.9) podem ser observadas na Figura 4.

Figura 4 – Passos para a construção da região factível.

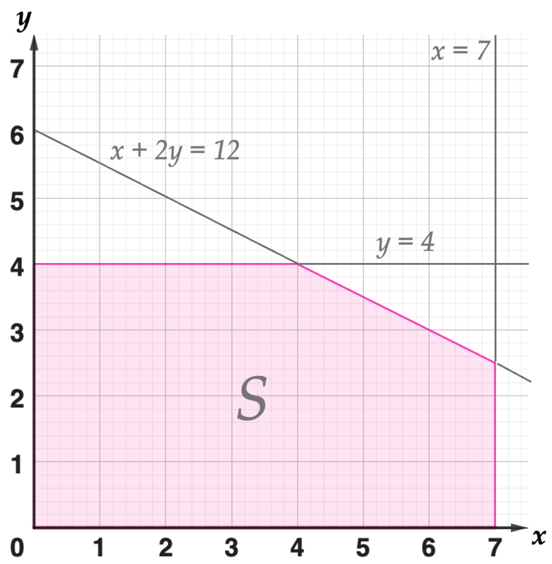


(a) Restrição $x \leq 7$. (b) Restrição $y \leq 4$. (c) Restrição $x + 2y \leq 12$.

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Repetindo os mesmos passos realizados no Exemplo 1, a região factível S, para o problema apresentado no **Exemplo 2**, é dada pela intersecção entre as regiões representadas na Figura 4, como ilustra a Figura 5.

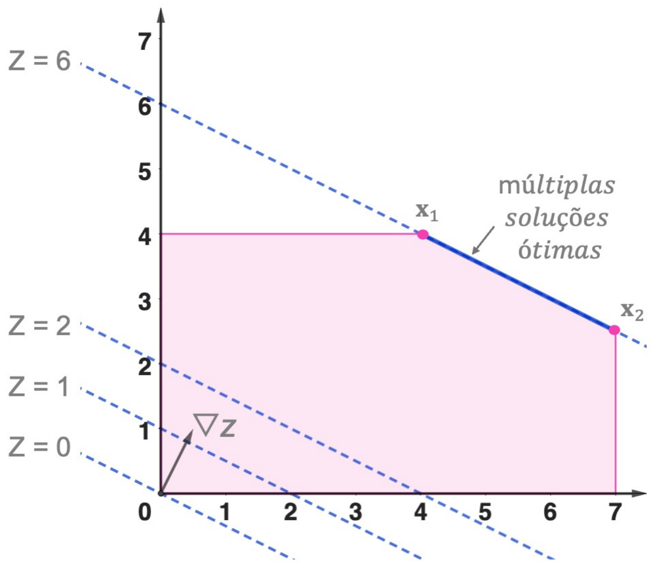
Figura 5 – Região factível para o problema - Exemplo 2.



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

O próximo passo é determinar o vetor gradiente e algumas curvas de nível da função objetivo z, como ilustrado na Figura 6. Caminhando na região factível, na direção do vetor gradiente $\nabla z = (\frac{1}{2}, 1)$, observe que a curva de nível $z = 6$, ou seja, $\frac{x}{2} + y = 6$ coincide com o segmento da região definido pela reta $x + 2y = 12$. Neste caso, qualquer ponto pertencente a este segmento resulta o mesmo valor $z = 6$ para a função objetivo, que consiste no valor máximo desta função, restrita às condições do problema. Desta forma, é dito que o problema apresenta múltiplas soluções ótimas. Dentre elas, estão os dois vértices $\mathbf{x_1} = (4, 4)$ e $\mathbf{x_2} = (7, \frac{5}{2})$.

Figura 6 – Múltiplas soluções ótimas para o problema - Exemplo 2.



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Como visto, é possível representar graficamente a região factível para problemas de otimização linear com duas variáveis e, através das curvas de nível da função objetivo, seguindo na direção do vetor gradiente, localizar o(s) ponto(s) em que o valor da função é máximo. No caso de minimização, deve-se caminhar na direção ao vetor gradiente, obtendo-se o(s) ponto(s) de mínimo. Analogamente aos exemplos envolvendo duas variáveis, é possível também resolver graficamente problemas com três variáveis, sendo que, para estes, a representação da região factível se dá no espaço tridimensional e o processo se torna mais custoso, visto que a região factível será definida pela intersecção de planos.

Problemas de otimização linear com variáveis reais podem ser resolvidos de forma eficiente, utilizando-se o método Simplex. Para compreensão do método, sugere-se consultar Arenales et al. (2011). O método Simplex se baseia na seguinte propriedade, que pode ser constatada de forma intuitiva no processo de resolução gráfica: se o problema de otimização linear com variáveis reais tem solução ótima, então existe vértice ótimo. Dessa forma, buscar pela solução ótima, resume-se a pesquisar entre o número finito de vértices da região factível. Assim, considerando um vértice inicial, a cada iteração do método Simplex, procura-se por outro vértice da região que forneça uma solução melhor que o vértice atual, até determinar um vértice ótimo.

5 Problema de Corte de Estoque

O Problema de Corte de Estoque surge de forma frequente como um importante subproblema do problema de planejamento da produção em indústrias de manufatura, por exemplo, na indústria metalúrgica, de papel, de móveis, dentre outras (ARENALES, 2011). De modo geral, o problema consiste no corte de objetos maiores, de tamanhos padronizados, em objetos menores (denominados itens ou peças) de diferentes tamanhos, de acordo com as necessidades e demandas dos clientes. O processo de cortar os itens necessários pode gerar perdas indesejáveis, requerendo, assim, uma solução com base em um critério de otimização, como minimizar a quantidade de objetos cortados ou minimizar a perda de material durante o processo de corte.

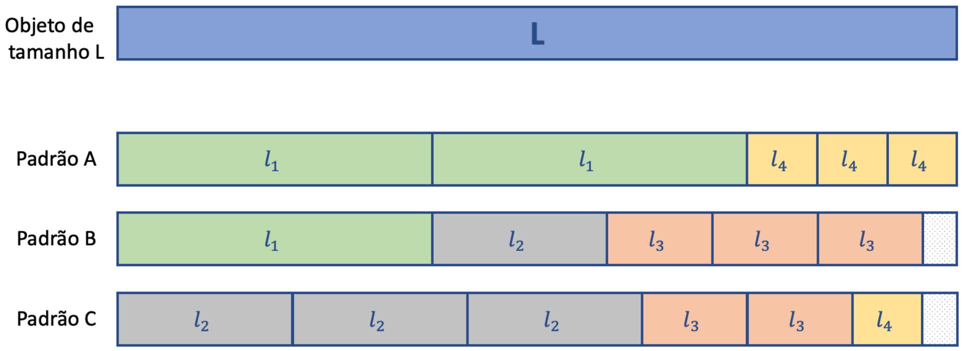
A depender do objeto a ser cortado, o problema pode ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional. No Problema de Corte Unidimensional, apenas uma dimensão é relevante no processo de cortar o objeto em itens. É o caso do corte de barras metálicas, de canos, de bobinas de papel, rolos de filme, entre outros. Já no Problema de Corte Bidimensional, duas dimensões devem ser consideradas, como no corte de chapas de aço e placas de madeira. Para o Problema de Corte Tridimensional, as três dimensões são relevantes, o que ocorre no corte de blocos de espuma, por exemplo. Este terceiro caso também pode ser pensado no sentido de alocar objetos, com o formato de um paralelepípedo retangular, em caminhões, navios ou contêineres (ARENALES, 2011).

Dada a necessidade de cortar objetos maiores em itens de diferentes tamanhos, geralmente em grande quantidade, surge a tarefa de construir *padrões de corte*.

Definição 5.0.1. *Chamamos de padrão de corte a maneira como um objeto é cortado para a produção dos itens demandados.*

A Figura 7 exemplifica três possíveis padrões de corte para um caso unidimensional. Neste exemplo, o objeto a ser cortado tem comprimento L e são demandados itens de comprimentos l_1, l_2, l_3 e l_4. Dos três padrões exemplificados, observa-se perda de material no segundo e terceiro padrões representados. Está implícita a condição $l_i \leq L, \forall i$.

Figura 7 – Padrões de corte unidimensional para um objeto de comprimento L.

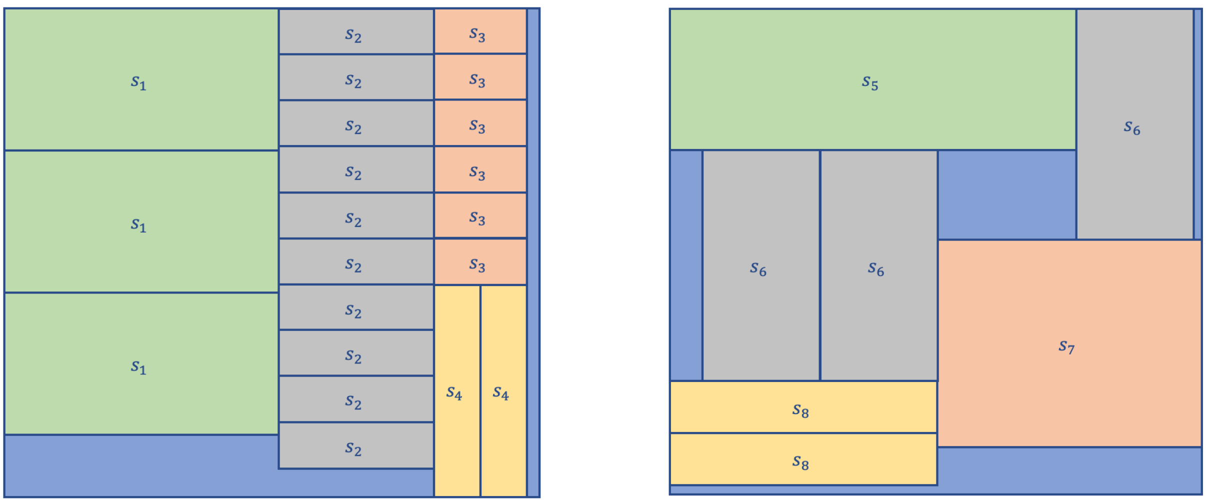


Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Definidos os padrões de corte para o objeto, resolver o problema de corte de estoque consiste em determinar quantas vezes cada padrão deve ser utilizado, buscando atender ao critério de otimização escolhido e à demanda dos clientes, sem atrasos. Outras restrições podem ser consideradas como, por exemplo, capacidade da máquina de corte.

De forma análoga, o padrão de corte no caso bidimensional é determinado a partir da escolha de como realizar os cortes, isto é, a organização geométrica dos itens em um plano, visto que são relevantes comprimento e largura. Neste caso, os padrões podem ser *regulares*, quando produzem itens e perdas retangulares, ou *irregulares*, quando as formas são variadas. Os padrões regulares podem ser, ainda, *guilhotinados*, o que ocorre quando cada corte produz exatamente dois novos retângulos, ou, se isto não ocorre, o padrão é dito *não guilhotinado* (ARENALES, 2011). As Figuras 8 e 9 exemplificam tais situações.

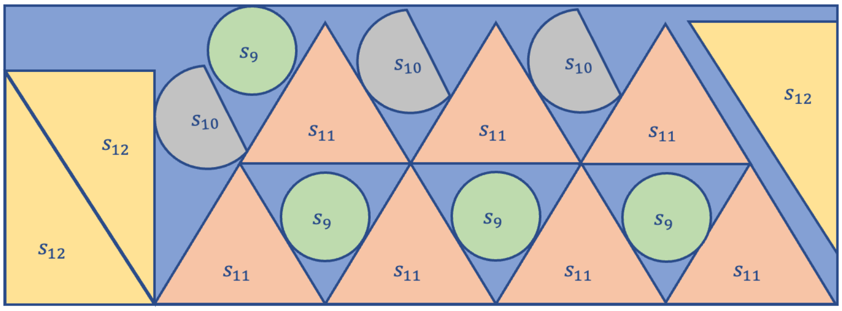
Figura 8 – Padrões de corte regulares para o caso bidimensional.



(a) Regular guilhotinado. (b) Regular não guilhotinado.

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

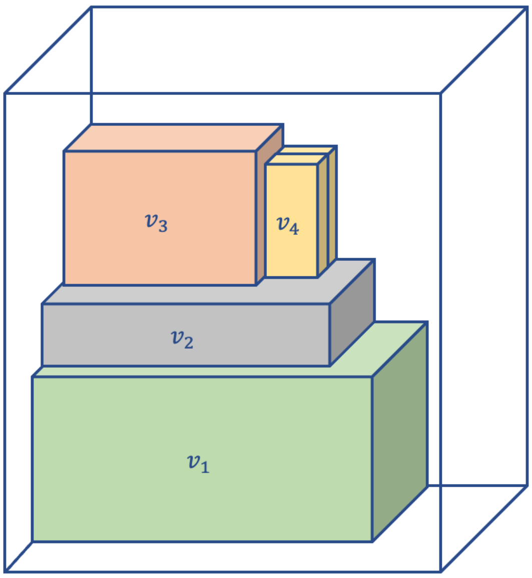
Figura 9 – Padrão de corte irregular para o caso bidimensional.



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Para o corte tridimensional é necessário considerar três dimensões: comprimento, largura e altura. Neste caso, determinar o padrão pode ser entendido como a tarefa de organizar itens tridimensionais demandados, em um espaço limitado, entendendo assim, o objeto a ser cortado como espaço disponível. Desta forma, o problema tridimensional pode ser também aplicado ao empacotamento de itens, visando maximizar o aproveitamento de espaço. A Figura 10, a seguir, representa um possível padrão de corte tridimensional para os itens de volumes v_1, v_2, v_3 e v_4.

Figura 10 – Padrão de corte para o caso tridimensional.



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

A seguir, será detalhada uma modelagem matemática para o problema de corte de estoque unidimensional, que é o foco deste trabalho. Inicialmente, será formulado o modelo básico, no qual há apenas um tipo de objeto a ser cortado em quantidade ilimitada. Na sequência, os modelos com estoque limitado e com diferentes tipos de objetos disponíveis para corte são apresentados.

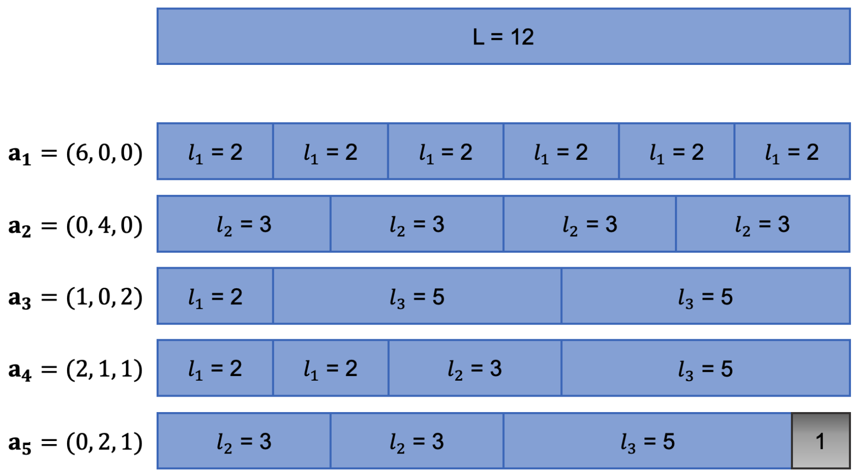
5.1 Problema de corte de estoque unidimensional - um único tipo de objeto disponível

Nesta primeira situação, suponha uma quantidade ilimitada de objetos disponíveis para o corte, todos de mesmo comprimento L. Ou seja, a princípio, não há restrições quanto ao número de objetos utilizados para o atendimento da demanda.

Considere m tipos de itens a serem cortados, de comprimentos $l_1, l_2, ..., l_m$, com demandas $d_1, d_2, ..., d_m$, respectivamente. A cada padrão de corte unidimensional, podemos associar um vetor m-dimensional, $\mathbf{a_j} = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$, em que a componente a_{ij} representa o número de itens do tipo i cortados utilizando o padrão j, $j = 1, 2, ..., n$.

Para exemplificar, considere o problema de cortar barras de aço de comprimento $L = 12$ em itens de três comprimentos diferentes, dados por $l_1 = 2$, $l_2 = 3$ e $l_3 = 5$. A Figura 11 apresenta cinco padrões de corte, acompanhados dos vetores $\mathbf{a_j}$ que os representam. Estas são apenas cinco das várias maneiras (padrões) que podem ser utilizadas para o corte das barras, sendo as quatro primeiras com perda zero de material e a última com perda de uma unidade no comprimento.

Figura 11 – Padrões de corte para a barra de comprimento $L = 12$.



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Os vetores $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ representam padrões de corte chamados homogêneos, pois cada um deles é formado por itens de um único comprimento. É importante ressaltar que, no padrão de corte homogêneo, o vetor $\mathbf{a}_j$ associado tem apenas uma coordenada não nula. A coordenada a_{ij} do vetor $\mathbf{a}_j$ será determinada por $a_{ij} = \left(\frac{L}{l_i}\right), i = 1, 2, ...m$.

Definição 5.1.1. *Um padrão de corte que produz apenas um tipo de item é chamado padrão de corte homogêneo. No caso de um padrão homogêneo unidimensional, o vetor associado tem apenas uma coordenada não-nula:*

$$(0, ..., a_i, ..., 0),\ a_i \neq 0.$$

Note que sempre teremos m padrões homogêneos, cujos vetores associados definem uma matriz diagonal. Voltando ao exemplo de objetos de comprimento $L = 12$ e itens de comprimento $l_1 = 2$, $l_2 = 3$ e $l_3 = 5$, os vetores associados aos padrões de corte homogêneos são:

- $\mathbf{a}_1 = (6, 0, 0)$, representando um padrão formado por 6 itens de comprimento 2;
- $\mathbf{a}_2 = (0, 4, 0)$, representando um padrão formado por 4 itens de comprimento 3;
- $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 2)$, representando um padrão formado por 3 itens de comprimento 5.

Desta forma, a matriz diagonal formada pelos vetores associados aos padrões de corte homogêneos, é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Retomando o problema discutido nesta seção, que consiste em cortar objetos de comprimento L em itens de m tipos com demandas pré-determinadas, é importante ressaltar que os vetores $\mathbf{a}_j$, $j = 1, ..., n$, tanto para padrões homogêneos quanto para não homogêneos, apenas representam um padrão de corte para o problema se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\begin{aligned} l_1 a_{1j} + l_2 a_{2j} + ... + l_m a_{mj} \leq L \\ a_{1j} \geq 0, a_{2j} \geq 0, ..., a_{mj} \geq 0 \quad \text{e inteiros.} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Observe que as restrições em (5.1), que definem um padrão de corte, são similares às restrições do problema da mochila inteira (3.27)-(3.29). Portanto, gerar um padrão j para ser utilizado no problema de corte unidimensional consiste em resolver um problema da mochila inteira, em que a_{ij} são as variáveis e seu coeficiente na função objetivo pode representar o valor de utilidade v_i do item i, $i = 1, ..., m$.

Determinados todos os padrões de corte que atendem às condições em (5.1), para a Modelagem Matemática do problema de corte unidimensional descrito nesta seção, considere a variável de decisão x_j, que representa o número de objetos cortados utilizando o padrão j, $j = 1, ..., n$.

Modelo Matemático:

$$\text{Minimizar} \qquad z = x_1 + x_2 + ... + x_n \tag{5.2}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + ... + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n \geq \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{e inteiro}, \quad j = 1, ..., n. \tag{5.4}$$

A função objetivo (5.2) busca minimizar o número de objetos cortados. As m restrições em (5.3) garantem o atendimento dos itens demandados a partir do corte dos objetos, utilizando-se os padrões de corte gerados. Observe que a desigualdade permite o corte de itens além da demanda, o que facilita a solução do problema. No entanto, pode-se substituir por restrições de igualdade, caso seja necessário. Por fim, (5.4) definem o domínio das variações de decisão.

O modelo (5.2)-(5.4) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \qquad & z = \sum_{j=1}^{n} x_j \\ \text{sujeito a} \qquad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i, \quad i = 1, ..., m \\ & x_j \geq 0 \quad \text{e inteiro}, \quad j = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{5.5}$$

A modelagem apresentada e discutida anteriormente foi proposta por Gilmore e Gomory (1961, 1963) e apresenta duas características que dificultam a sua resolução: a condição de integralidade das variáveis e o número elevado de possíveis padrões de corte, o que representa um número grande de variáveis, uma para cada padrão. Para contornar a primeira dificuldade, o modelo pode ser relaxado, permitindo que as variáveis assumam valores reais, e resolvido pelo Método Simplex (ARENALES, 2011). Por outro lado, para evitar a necessidade de considerar todos os possíveis padrões de corte, pode ser utilizado o processo de geração de colunas, proposto pelos autores, que consiste em, a cada iteração do simplex, um problema da mochila é resolvido para gerar uma nova coluna (padrão), mais atrativa, para ser utilizada no problema de corte. As variáveis duais associadas às restrições de demanda do problema de corte são consideradas como coeficientes na função objetivo do problema da mochila, indicando a importância de cada item no novo padrão. Após a obtenção da solução para o problema relaxado, pelo método simplex com geração de colunas, podem ser aplicadas heurísticas de arredondamento, por exemplo, as propostas em Poldi (2003), para obter uma solução aproximada para o problema original, com variáveis inteiras.

5.2 Problema de corte de estoque unidimensional - diferentes tipos de objetos disponíveis

Esta seção apresenta uma extensão da modelagem proposta na Seção 5.1 para considerar a situação em que objetos de diferentes comprimentos estão disponíveis para o corte, em quantidades ilimitadas. Ou seja, há K tipos de objetos de comprimentos $L_1, L_2, ..., L_K$, que devem ser cortados para produzir m tipos de itens de comprimentos $l_1, l_2, ..., l_m$ com demandas $d_1, d_2, ..., d_m$, respectivamente.

Neste caso, observe que, para cada comprimento de objeto, deve ser construído o conjunto dos possíveis padrões de corte. Suponha que existem n_k padrões para os objetos de comprimento $L_k,\ k = 1, ..., K$, representados pelos vetores a seguir:

$$\mathbf{a}_{1k} = \begin{bmatrix} a_{11k} \\ a_{21k} \\ \vdots \\ a_{m1k} \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_{2k} = \begin{bmatrix} a_{12k} \\ a_{22k} \\ \vdots \\ a_{m2k} \end{bmatrix},\ \ldots\ ,\mathbf{a}_{n_k k} = \begin{bmatrix} a_{1n_k k} \\ a_{2n_k k} \\ \vdots \\ a_{mn_k k} \end{bmatrix}.$$

O vetor $\mathbf{a}_{jk}$ representa o j-ésimo padrão de corte para o objeto de comprimento L_k, $k = 1, ..., K$. A i-ésima componente deste vetor, a_{ijk}, representa a quantidade de itens do tipo $l_i,\ i = 1, ..., m$ no padrão.

Ressalta-se que o vetor $\mathbf{a}_{jk},\ j = 1, ..., n_k$, representa um padrão de corte para o objeto de comprimento $L_k,\ k = 1, ..., K$, se satisfaz:

$$l_1 a_{1jk} + l_2 a_{2jk} + ... + l_m a_{mjk} \leq L_k$$
$$a_{ijk} \geq 0 \quad \text{e inteiro}, \ \ i = 1, ..., m.$$

Para a modelagem matemática do problema de corte descrito nesta seção, considere a variável de decisão x_{jk}, que representa o número de objetos de comprimento L_k cortados segundo o padrão $j,\ k = 1, ..., K,\ j = 1, ..., n_k$.

Modelo matemático:

$$\text{Minimizar} \qquad z = \sum_{j=1}^{N_1} x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} x_{j2} + ... + \sum_{j=1}^{N_K} x_{jK} \tag{5.6}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{a}_{j1} x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{a}_{j2} x_{j2} + ... + \sum_{j=1}^{N_K} \mathbf{a}_{jk} x_{jk} \geq \mathbf{d} \tag{5.7}$$

$$x_{jk} \geq 0 \text{ e inteiro}, \; k = 1, .., K, \; j = 1, ..., n_k. \tag{5.8}$$

A função objetivo (5.6) minimiza o número de objetos de diferentes comprimentos utilizados no processo de corte. A restrições em (5.7) garantem o atendimento da demanda de itens, a partir do corte de objetos de cada comprimento, utilizando o respectivo conjunto de padrões de corte. Observe que as demandas dos diferentes tipos de itens estão organizadas no vetor **d**. As restrições (5.8) definem o domínio das variações de decisão.

O modelo (5.6)-(5.8) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N_k} x_{jk}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij1} x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij2} x_{j2} + ... + \sum_{j=1}^{N_K} a_{ijk} x_{jk} \geq d_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{5.9}$$

$$x_{jk} \geq 0 \text{ e inteiro}, \; k = 1, .., K, \; j = 1, ..., n_k.$$

Formulado o problema, é possível notar que o modelo (5.5) para o problema considerado na Seção 5.1, é um caso particular do modelo (5.9).

5.3 Problema de corte de estoque unidimensional - diferentes tipos de objetos disponíveis em quantidades limitadas

Nesta seção, além de considerar objetos de diferentes comprimentos para o processo de corte, supõe-se uma limitação na disponibilidade desses objetos. Para isso, considere os parâmetros já definidos na Seção 5.2, acrescentando-se a disponibilidade Q_k do objeto de comprimento L_k, $k = 1, ..., K$. Essa condição representa a adição de K restrições no modelo, uma para cada comprimento L_k, e podem ser chamadas de restrições de estoque dos objetos.

Da mesma forma que na modelagem apresentada na Seção 5.2, considere a variável de decisão x_{jk}, que representa o número de objetos de comprimento L_k cortados segundo o padrão j, $k = 1, ..., K$, $j = 1, ..., n_k$. Assim, o modelo matemático para esta situação é dado a seguir:

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{j=1}^{N_1} x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} x_{j2} + ... + \sum_{j=1}^{N_K} x_{jK} \tag{5.10}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij1}x_{j1} + \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij2}x_{j2} + ... + \sum_{j=1}^{N_K} a_{ijk}x_{jk} \geq d_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{5.11}$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} x_{jk} \leq Q_k, \quad k = 1, ..., K, \tag{5.12}$$

$$x_{jk} \geq 0 \text{ e inteiro}, \; k = 1, .., K, \; j = 1, ..., N_k. \tag{5.13}$$

A função objetivo (5.10) minimiza o número de objetos de diferentes comprimentos utilizados no processo de corte. As m restrições em (5.11) garantem o atendimento da demanda dos itens, a partir do corte de objetos de cada comprimento, utilizando o respectivo conjunto de padrões de corte. Em (5.12) estão as restrições de estoque dos objetos, uma para cada comprimento L_k. As restrições (5.13) definem o domínio das variações de decisão.

6 Atividades realizadas para o Ensino Médio

Este capítulo relata todo o processo de aplicação das atividades, conquistas e desafios enfrentados, apontamentos sobre os resultados, progressos e devolutivas dos alunos. As atividades práticas foram realizadas em dois formatos diferentes, em duas escolas públicas de Ensino Médio integrado ao Técnico, na região de Bauru - SP. O primeiro formato consistiu de atividades extracurriculares, de forma presencial, com alunos da segunda série de Ensino Médio integrado ao Técnico de Desenvolvimento de Sistemas. Como segundo formato, as atividades foram adaptadas para serem inseridas nos planos de aula do componente de Estudos Avançados em Matemática e suas Tecnologias, previsto na grade curricular do curso de Ensino Médio integrado ao Técnico de Química. Os dois formatos trabalhados para a aplicação das atividades são apresentados e discutidos nas seções a seguir.

6.1 Formato 1 - Atividades extracurriculares

Esta primeira abordagem, realizada no formato extracurricular, foi pensada com o propósito de aproveitar os conhecimentos técnicos dos alunos na área de Desenvolvimento de Sistemas, possibilitando aprofundar os conteúdos e acrescentar o uso de uma linguagem de programação já conhecida por eles para a resolução de problemas. As atividades foram desenvolvidas em encontros presenciais de uma hora de duração, ocorrendo uma vez por semana ao longo de um mês, contando com a participação de quatro alunos voluntários. Uma sala de laboratório de informática foi disponibilizada pela escola e os participantes compareciam, fora do horário de aula, autorizados pelos responsáveis.

Inicialmente, a área de Pesquisa Operacional foi apresentada, direcionando para conceitos de Otimização e noções básicas sobre Modelagem Matemática, bem como discussões em torno das possibilidades de aplicação e do uso nas mais diversas áreas, sendo possível, assim, contextualizar e despertar um olhar diferenciado para os problemas que seriam trabalhados.

Na primeira aula foram introduzidos alguns problemas clássicos de otimização linear, para familiarizar os alunos com o processo de modelagem: identificação das variáveis de decisão, equações e/ou inequações para descrever as restrições do problema e definição da função objetivo. Os problemas trabalhados, baseados em Arenales et al. (2011) e Goldbarg e Luna (2005), serão relatados a seguir.

6.1.1 Aplicações do problema clássico da mistura

O primeiro problema trabalhado foi o problema das ligas metálicas, no qual são apresentadas duas opções para produção de ligas metálicas, uma de baixa resistência e outra de alta resistência. Para cada tipo de liga são estabelecidas quantidades específicas de cobre, zinco e chumbo para a produção, bem como o valor de venda da tonelada de cada liga e a disponibilidade de matéria prima. A questão central é quanto produzir de cada liga, respeitando-se a disponibilidade de materiais, com o objetivo de maximizar a receita bruta. O problema foi exposto aos alunos no formato indicado na Figura 12, inicialmente sem as informações de variáveis de decisão e função objetivo.

Figura 12 – Problema das ligas metálicas - aula 1.

1. Problema das Ligas Metálicas

	LIGA BAIXA RESISTÊNCIA	LIGA ALTA RESISTÊNCIA	DISPONIBILIDADE DE MATERIAL
COBRE	0,5	0,2	16 ton
ZINCO	0,25	0,3	11 ton
CHUMBO	0,25	0,5	15 ton
R$ VENDA TONELADA	3000	5000	

Quanto produzir de cada liga para maximizar a receita bruta?

Variáveis de decisão
$x_{i = quantidade\ produzida\ da\ liga}$
Baixa -> i = 1
Alta -> i = 2

Função Objetivo
Lucro = $f(x_i)$
Maximizar:
$f = 3000.x_1 + 5000.x_2$

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

A professora conduziu as discussões para interpretação do problema e, a partir de questões norteadoras, os alunos propuseram formas de escrever matematicamente o problema. A pergunta central - "quanto produzir de cada liga?" - foi identificada como definidora das variáveis de decisão e a condição imposta - "para maximizar a receita" - foi entendida como o objetivo a ser alcançado, isto é, a função objetivo. Aqui também foram discutidas as restrições por conta da disponibilidade de material e a restrição de não negatividade, as quais foram escritas em inequações pelos alunos a partir da mediação da professora.

Formulado o problema, os alunos identificaram a necessidade de resolver um sistema de equações lineares, já antes estudado na escola, mas agora descrevendo um problema real e associado a uma condição de maximização de uma função objetivo. Neste sentido, os alunos foram conduzidos, através da mediação da professora, a reconhecer a dificuldade de encontrar a melhor solução possível para o problema, bem como compreender o quanto aumentaria a dificuldade de resolução do problema um aumento no número de variáveis de decisão. A restrição de não negatividade também foi discutida e os próprios alunos perceberam que uma solução com variáveis de decisão negativas seria possível, mas não faria sentido na prática.

O problema das ligas metálicas foi modelado durante a atividade como um problema de otimização linear, como segue:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \qquad & z = 3000x_1 + 5000x_2 \\ \\ \text{sujeito a} \qquad & 0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 16 \\ & 0,25x_1 + 0,3x_2 \leq 11 \\ & 0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

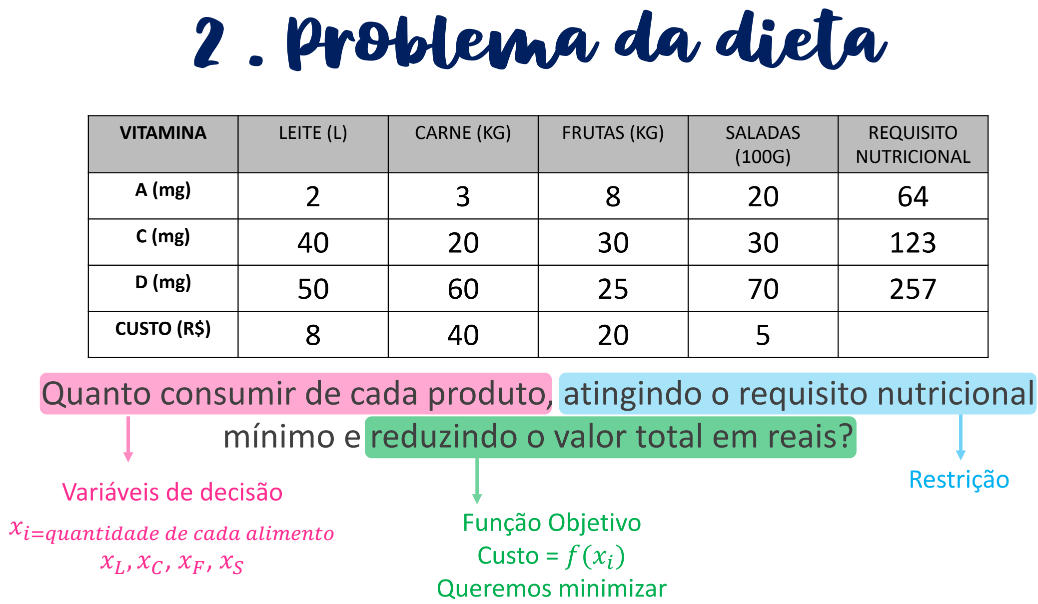
Para finalizar o problema das ligas metálicas, os alunos foram organizados em duplas para buscar soluções possíveis para o problema, utilizando apenas papel e calculadora. Uma dupla conseguiu encontrar valores para x_1 e x_2 (quantidades a serem produzidas de cada liga), por tentativa e erro, que satisfizessem as três equações de restrição. A outra dupla, buscando maximizar o lucro, determinou valores para x_1 e x_2 que retornavam maiores valores para a função objetivo z, mas que acabaram não satisfazendo todas as restrições, ou seja, não eram, de fato, soluções para o problema.

A partir destes resultados, foi possível levantar uma série de discussões e reflexões sobre conceitos de otimização. Mesmo sendo este um problema inicial e, portanto, mais simples, ficou clara a inviabilidade de resolver o problema manualmente, e mais ainda determinar a solução ótima, diante das tantas possibilidades de respostas. Os alunos identificaram que nem sempre aumentar a produção do tipo mais rentável de produto será a melhor saída, dadas as restrições impostas. Também foi possível observar que as quantidades de restrições e de variáveis de decisão estão diretamente vinculadas à complexidade do problema, além do fato de que, em situações reais, muitos outros fatores podem aparecer para aumentar a dificuldade de resolução do problema, como limitações de estoque e necessidade de atender à demandas, por exemplo.

A Modelagem Matemática do problema também foi muito discutida, tanto na identificação das variáveis envolvidas quanto na interpretação da pergunta central, que leva à função objetivo. Outro ponto bastante importante foi a percepção de que o uso de igualdades nas restrições, em vez de desigualdades, dificultaria a resolução do problema. Neste sentido, foi apontado pelos alunos o quanto facilita a compreensão o fato de trabalhar as desigualdade em situações práticas e contextualizadas, dado que o tratamento apenas algébrico, como é frequentemente realizado nas aulas de matemática, deixa uma série de dúvidas e provoca desinteresse.

Ao final da primeira aula, foi introduzido o problema da dieta, conforme Figura 13 (inicialmente sem as indicações de variáveis de restrição e função objetivo), ficando como tarefa para que os alunos formulassem o problema para discussão na aula seguinte. Neste problema, o objetivo é montar uma dieta que atenda aos requisitos nutricionais dados, mas que custe o menor valor possível, isto é, minimizando-se a função objetivo.

Figura 13 – Problema da dieta - aula 1.



VITAMINA	LEITE (L)	CARNE (KG)	FRUTAS (KG)	SALADAS (100G)	REQUISITO NUTRICIONAL
A (mg)	2	3	8	20	64
C (mg)	40	20	30	30	123
D (mg)	50	60	25	70	257
CUSTO (R$)	8	40	20	5	

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

A aula 2 seguiu a partir da discussão do problema da dieta, sendo que os alunos já conseguiram modelar o problema, identificando as variáveis, as restrições e a função objetivo a ser minimizada. Um dos alunos apresentou, inclusive, uma solução possível para o problema. Por conta da participação e compreensão do grupo, não foi necessário demandar muito tempo neste segundo problema, o qual foi finalizado com a apresentação, por parte da professora, de algumas soluções possíveis para o problema, os resultados na função objetivo para cada solução e as dificuldades para determinar uma solução ótima.

O problema da dieta foi modelado e apresentado pelos alunos conforme segue:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z = 8x_L + 40x_C + 20x_F + 5x_S \\ \\ \text{sujeito a} \quad & 2x_L + 3x_C + 8x_F + 20x_S \geq 64 \\ & 40x_L + 20x_C + 30x_F + 30x_S \geq 123 \\ & 50x_L + 60x_C + 25x_F + 70x_S \geq 257 \\ & x_L, x_C, x_F, x_S \geq 0. \end{aligned}$$

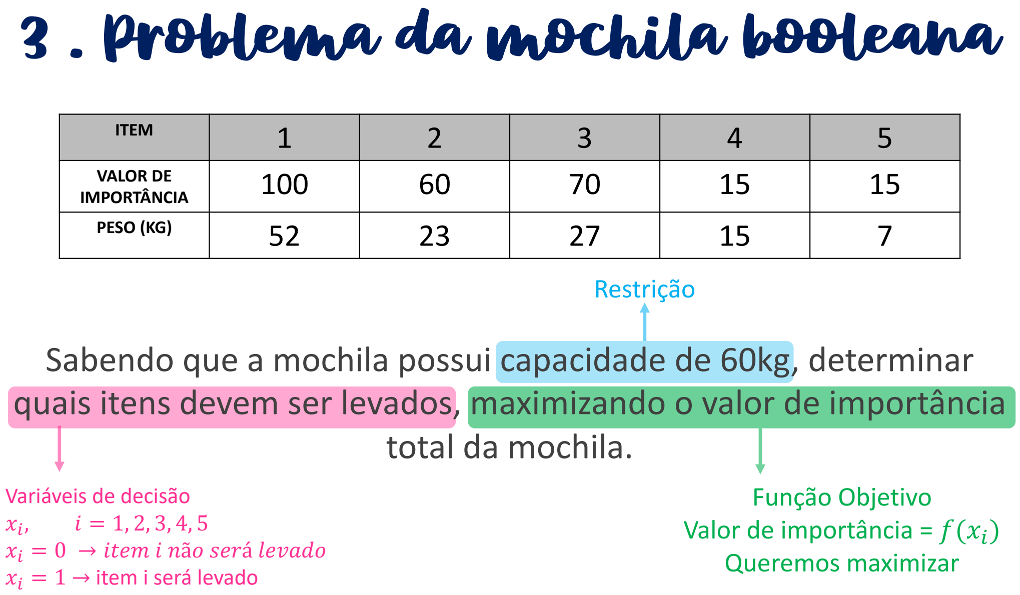
Em conversa com o grupo, foi enfatizado o aumento da dificuldade a partir do aumento de variáveis e como as restrições poderiam ser maiores para situações reais, dificultando a resolução do problema.

6.1.2 Diferentes casos do problema da mochila

Na sequência, ainda na segunda aula, foi abordado o problema da mochila booleana. Este foi um problema escolhido particularmente para a turma, tendo em vista as habilidades relacionadas ao Curso Técnico de Desenvolvimento de Sistemas. Como o tipo booleano é muito utilizado na programação, o objetivo foi trabalhar a resolução do problema a partir de alguma linguagem de programação escolhida pelos alunos. Além disso, o estudo deste problema foi pensado como base para facilitar o posterior problema da mochila inteira e problema de corte de estoque unidimensional.

O problema da mochila booleana foi apresentado conforme Figura 14, mas inicialmente sem as indicações de variáveis, restrição e função objetivo. Neste problema, apresentam-se cinco possíveis itens para serem ou não incluídos na mochila, indicando-se a massa de cada item, bem como seu valor de importância. O objetivo é determinar quais itens incluir na mochila de modo que esta não ultrapasse 60 kg e some o maior valor de importância possível, isto é, maximizando-se a função objetivo.

Figura 14 – Problema da mochila booleana - aula 2.



ITEM	1	2	3	4	5
VALOR DE IMPORTÂNCIA	100	60	70	15	15
PESO (KG)	52	23	27	15	7

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Este problema difere dos anteriores no sentido de que a decisão a ser tomada não é o valor numérico de cada variável de decisão, mas sim, incluir ou não, cada item na mochila. A primeira discussão para a formulação do problema foi como indicar, matematicamente, que um item seria incluído ou não incluído na mochila. Os alunos demonstraram facilidade em compreender o problema, fazendo contas rápidas para determinar quais itens seriam mais vantajosos para compor a mochila, entretanto, modelar o problema não foi tão simples. Inicialmente, propuseram escrever funções separadas ou dividir o problema. Apenas após a mediação da professora chegaram à conclusão de que as variáveis de decisão apenas poderiam assumir dois valores, sendo zero ou um. Para o item incluído na mochila, considera-se $x_i = 1$, já para o item não incluído na mochila, $x_i = 0$. Só então entrou-se na discussão sobre o uso do booleano, ou seja, do verdadeiro ou falso, na programação e sua relação com aplicações matemáticas.

Diante da decisão de incluir ($x_i = 1$) ou não incluir ($x_i = 0$) cada um dos itens na mochila, respeitando-se a restrição de capacidade máxima, a discussão foi direcionada para o entendimento de que a resolução deste problema envolve arranjar os elementos 1 e 0 dentro de um vetor com cinco elementos (dados os cinco possíveis itens). Neste caso os alunos determinaram todas as possíveis soluções para o problema, bem como puderam perceber que o aumento da quantidade de itens, ou a possibilidade de repetir itens na mochila, dificultaria a resolução. Os alunos demonstraram facilidade em compreender a escrita do problema na forma de vetores, fato este que pode estar relacionado com as habilidades em programação e ser um facilitador para a posterior compreensão do problema de corte.

A modelagem matemática do problema da mochila booleana foi discutida e apresentada como a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \qquad & z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5 \\ \\ \text{sujeito a} \qquad & 52x_1 + 23x_2 + 27x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., 5. \end{aligned}$$

Como finalização deste problema, os alunos tiveram o desafio de propor um código, em linguagem de sua escolha, que resolvesse esse problema. Um dos alunos obteve êxito em resolver utilizando a linguagem Python, conforme apresentado nas Figuras 15 e 16. Ao final do *script* desenvolvido pelo aluno, pode-se identificar a solução obtida, incluindo os itens 2, 3 e 5, respeitando-se a restrição de peso e maximizando o valor de importância da mochila, ou seja, a solução ótima para o problema.

Figura 15 – Problema da mochila booleana utilizando a linguagem Python.

```
# Dados do problema
valores = [100, 60, 70, 15, 15]
pesos = [52, 23, 27, 15, 7]
capacidade_maxima = 60
num_itens = len(valores)

# Função recursiva para buscar todas as combinações possíveis de itens
def busca_exaustiva(item_atual, peso_atual, valor_atual, itens_selecionados):
    global melhor_valor
    global melhor_combinacao

    # Verifica se atingiu o final da lista de itens
    if item_atual == num_itens:
        # Verifica se a combinação atual é melhor que a melhor combinação anterior
        if valor_atual > melhor_valor:
            melhor_valor = valor_atual
            melhor_combinacao = itens_selecionados.copy()
        return

    # Verifica se o item atual pode ser incluído na mochila
    if peso_atual + pesos[item_atual] <= capacidade_maxima:
        itens_selecionados.append(item_atual)

        # Chama a função recursivamente para o próximo item
        busca_exaustiva(item_atual + 1, peso_atual + pesos[item_atual], valor_atual + valores[item_atual], itens_selecionados)

        # Remove o item atual da lista para testar outras combinações
        itens_selecionados.pop()

    # Chama a função recursivamente para o próximo item, sem incluir o item atual
    busca_exaustiva(item_atual + 1, peso_atual, valor_atual, itens_selecionados)
```

Fonte: Produzido por um aluno participante, 2024.

Figura 16 – Continuação do problema da mochila booleana utilizando a linguagem Python.

```
# Variáveis globais para armazenar a melhor combinação e o melhor valor encontrado
melhor_valor = 0
melhor_combinacao = []

# Inicializa a busca exaustiva
busca_exaustiva(0, 0, 0, [])

# Impressão dos resultados
print("Itens selecionados:")
peso_total = 0
for item in melhor_combinacao:
    print("Item", item + 1, "- Valor:", valores[item], "Peso:", pesos[item])
    peso_total += pesos[item]

print("Peso total:", peso_total)
print("Valor total:", melhor_valor)
```

```
Itens selecionados:
Item 2 - Valor: 60 Peso: 23
Item 3 - Valor: 70 Peso: 27
Item 5 - Valor: 15 Peso: 7
Peso total: 57
Valor total: 145
```

Fonte: Produzido por um aluno participante, 2024.

No terceiro encontro, o problema da mochila inteira foi abordado, conforme Figura 17, inicialmente sem as indicações de variáveis, restrições e função objetivo. Neste problema, uma mochila com capacidade máxima de 14 kg deve ser preenchida com itens de 1 a 4, podendo-se repetir itens. Neste exemplo, o objetivo é preencher a mochila que resulte no maior lucro possível com a revenda dos objetos escolhidos, dado o lucro obtido com a revenda de cada item. Além da restrição referente à capacidade máxima da mochila, foi incluída a restrição de custo total da mochila, ou seja, somando os custos de cada item, o custo total da mochila não poderia ultrapassar R$380,00. Os dados para o problema da mochila são dados na Figura 17.

Figura 17 – Problema da mochila inteira - aula 3.

4 . Problema da mochila inteira

ITEM	Custo (R$)	Peso (KG)	Lucro (R$)
1	20	1	6
2	25	0,5	10
3	38	0,8	12
4	46	2	16

Restrição

Sabendo que a mochila possui capacidade de 14kg e não pode ultrapassar o custo de 380 reais, determinar quais itens devem ser levados para maximizar o lucro.

Variáveis de decisão
$x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$

Função Objetivo
Lucro = $f(x_i)$
Queremos maximizar

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

A partir da mediação da professora, os alunos formularam o problema, identificando variáveis de decisão, restrições e função objetivo. Aqui houve bastante ênfase na discussão a cerca das possibilidades de montagem da mochila, isto é, quantos itens de cada tipo incluir, visto a importância da compreensão deste problema e de sua resolução para a posterior construção do Problema de Corte.

A modelagem matemática do problema foi apresentada pelos alunos da seguinte forma:

$$\text{Maximizar} \qquad z = 6x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 16x_4$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \qquad x_1 + 0,5x_2 + 0,8x_3 + 2x_4 &\leq 14 \\ 20x_1 + 25x_2 + 38x_3 + 46x_4 &\leq 380 \\ x_i \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Como o problema da mochila booleana já havia sido bastante discutido, foi evidente o maior grau de dificuldade para resolução da mochila inteira, de forma que os alunos não encontraram uma possibilidade de resolvê-la utilizando a linguagem de programação Python, como feito anteriormente. Até este momento nenhum *software* foi utilizado para resolução dos problemas, apenas possíveis soluções foram determinadas através de cálculos manuais, sempre enfatizando que aquelas soluções não seriam as únicas e, possivelmente, haveria outra solução como solução ótima.

O problema da mochila inteira é trabalhado com o objetivo de preparar os alunos para interpretação e compreensão do problema de corte, visto que é possível comparar a resolução da mochila inteira com a determinação dos padrões de corte no problema de corte unidimensional. Na discussão e modelagem matemática do problema da mochila inteira, os alunos demonstraram familiaridade com a escrita matemática, noção da complexidade de resolução e compreenderam a presença da análise combinatória no problema.

6.1.3 Atividade avaliativa - modelagem de problemas clássicos

Para finalizar a aula 3, uma atividade individual e escrita foi proposta aos alunos, com o intuito de identificar se já estavam familiarizados com os problemas e se teriam autonomia para interpretar e propor a Modelagem Matemática de problemas análogos aos trabalhados até então. Com base nos resultados obtidos na atividade, seria determinado pela professora se a aula seguinte já poderia ser destinada ao problema de corte unidimensional.

Na atividade proposta, os alunos, individualmente, deveriam modelar dois problemas, sendo um problema relacionado ao preparo de ração e o segundo, um problema de dieta. A Figura 18, abaixo, mostra um problema disponibilizado como exemplo na atividade e as Figuras 19 e 20 se referem aos problemas propostos e modelagem sugerida por um dos alunos. Todos os alunos realizaram as atividades e conseguiram identificar as variáveis, as restrições e as funções objetivo, finalizando, assim, esta etapa das atividades.

Figura 18 – Problema disponibilizado como exemplo na atividade da aula 3.

01. Problema das ligas metálicas (EXEMPLO)

	LIGA A	LIGA B	DISPONIBILIDADE DE MATERIAL
COBRE	0,5	0,2	16 ton
ZINCO	0,25	0,3	11 ton
CHUMBO	0,25	0,5	15 ton
R$ VENDA TONELADA	3000	5000	

Quanto produzir de cada liga para maximizar a receita bruta?

VARIÁVEIS DE DECISÃO:
x_1 = quantidade produzida da liga A
x_2 = quantidade produzida da liga B

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA:

Maximizar:

$$Z = 3000.x_1 + 5000.x_2$$

Função objetivo

Sujeito a:

$$0{,}5\ .\ x_1 + 0{,}2\ .x_2 \leq 16$$
$$0{,}25\ .\ x_1 + 0{,}3\ .x_2 \leq 11$$
$$0{,}25\ .\ x_1 + 0{,}5\ .x_2 \leq 15$$

Restrições

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$$

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Figura 19 – Problema da ração e resolução de um aluno.

02. Problema da Mistura

Certa ração é produzida a partir da mistura de três ingredientes (osso, soja e peixe) e deve conter uma quantidade mínima de nutrientes (proteína e cálcio) a cada kg, conforme tabela.

Nutrientes	INGREDIENTES			Quantidade mínima do nutriente em 1kg de RAÇÃO
	OSSO	SOJA	PEIXE	
PROTEÍNA	0,2	0,5	0,4	0,3
CÁLCIO	0,6	0,4	0,4	0,5
CUSTO (R$ / KG)	0,56	0,81	0,46	

Qual deve ser a quantidade de cada ingrediente adicionado à mistura para que o kg da ração tenha o menor custo possível, atendendo aos requisitos nutricionais?

VARIÁVEIS DE DECISÃO:

x_1 = Osso (qtd.)

x_2 = Soja (qtd.)

x_3 = Peixe (qtd.)

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA:

$Z = 0{,}56\,x_1 + 0{,}81\,x_2 + 0{,}46\,x_3$ ∴ Minimizar

⊳ Restrições

$0{,}2\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}4\,x_3 \geq 0{,}3$

$0{,}6\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}4\,x_3 \geq 0{,}5$

∴ Não Negatividade

$[x_1, x_2, x_3] \geq 0$

Fonte: Produzido pelos alunos participantes, 2024.

Figura 20 – Problema da dieta e resolução de um aluno.

03. Problema da Dieta

A tabela abaixo indica as quantidades mínimas de vitaminas A, C e D que devem ser consumidas diariamente em determinada dieta, bem como as quantidades dessas vitaminas em cada tipo de alimento e os custos dos mesmos.

VITAMINA	LEITE (L) Lei	CARNE (KG) C	FRUTAS (KG) F	SALADA (KG) S	LEGUME (KG) Leg	REQUISITO NUTRICIONAL
A (mg)	3	4	9	180	120	121
C (mg)	37	18	41	210	115	156
D (mg)	50	60	25	240	184	289
CUSTO (R$)	8	40	20	9	12	

Quanto consumir de cada tipo de alimento, atingindo o requisito nutricional mínimo e reduzindo o valor total em reais?

VARIÁVEIS DE DECISÃO:

x_1 = qtd. leite
x_2 = " carne
x_3 = " frutas
x_4 = " salada
x_5 = " legumes

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA:

$Z = 8 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 + 12 \cdot x_5$ ∴ Minimizar

Restrições:

$3x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 180x_4 + 120x_5 \geq 121$

$37x_1 + 18x_2 + 41x_3 + 210x_4 + 115x_5 \geq 156$

$50x_1 + 60x_2 + 25x_3 + 240x_4 + 184x_5 \geq 289$

∴ Não Negatividade

$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \geq 0$

Fonte: Produzido pelos alunos participantes, 2024.

6.1.4 Problema de corte de estoque unidimensional

Para a quarta e última aula, foi introduzido o problema de corte unidimensional, sendo proposto como segue: deseja-se cortar barras de tamanho $L = 12m$ em barras menores, nos tamanhos $l_1 = 2m$, $l_2 = 3m$ e $l_3 = 5m$. A partir deste enunciado, os próprios alunos sugeriram diferentes maneiras de cortar as barras. Então foram questionados sobre quais seriam as variáveis de decisão neste problema. Vale ressaltar que já estavam bastante familiarizados com essas variáveis nos problemas anteriores, entretanto, ainda não conseguiram identificar apenas com as informações conhecidas até o momento. Tentaram sugerir possibilidades, como os tamanhos l_i dos itens, ou o próprio tamanho L da barra, mas logo perceberam que esses valores eram fixos e não variáveis. De fato, a formulação do problema de corte é mais elaborada que os anteriores e o conceito de padrões de corte ainda não havia sido muito explorado.

O próximo passo, então, foi trabalhar nos padrões de corte e iniciar a representação por meio de vetores. Inicialmente, foi trabalhada a notação a ser utilizada para os padrões de corte. O vetor $\mathbf{a}_j$ em (6.1) representa o padrão de corte j, sendo a_{1j} a quantidade de itens do tamanho l_1, a_{2j} a quantidade de itens do tamanho l_2 e a_{3j} a quantidade de itens do tamanho l_3 a serem cortados neste padrão.

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Em seguida, foi abordado o conceito de padrão homogêneo, que contém apenas um tipo de item. Os alunos determinaram todos os padrões homogêneos para o problema e discutiram em quais deles haveria perda de material. Após essa discussão, os alunos foram direcionados para elaborar uma fórmula geral para determinar a quantidade de itens no padrão homogêneo e outra para calcular a perda de material. A partir de um exemplo de padrão, os alunos determinaram as fórmulas e, com a mediação da professora, foi possível generalizar a fórmula (6.2) para determinar a quantidade de itens no padrão homogêneo:

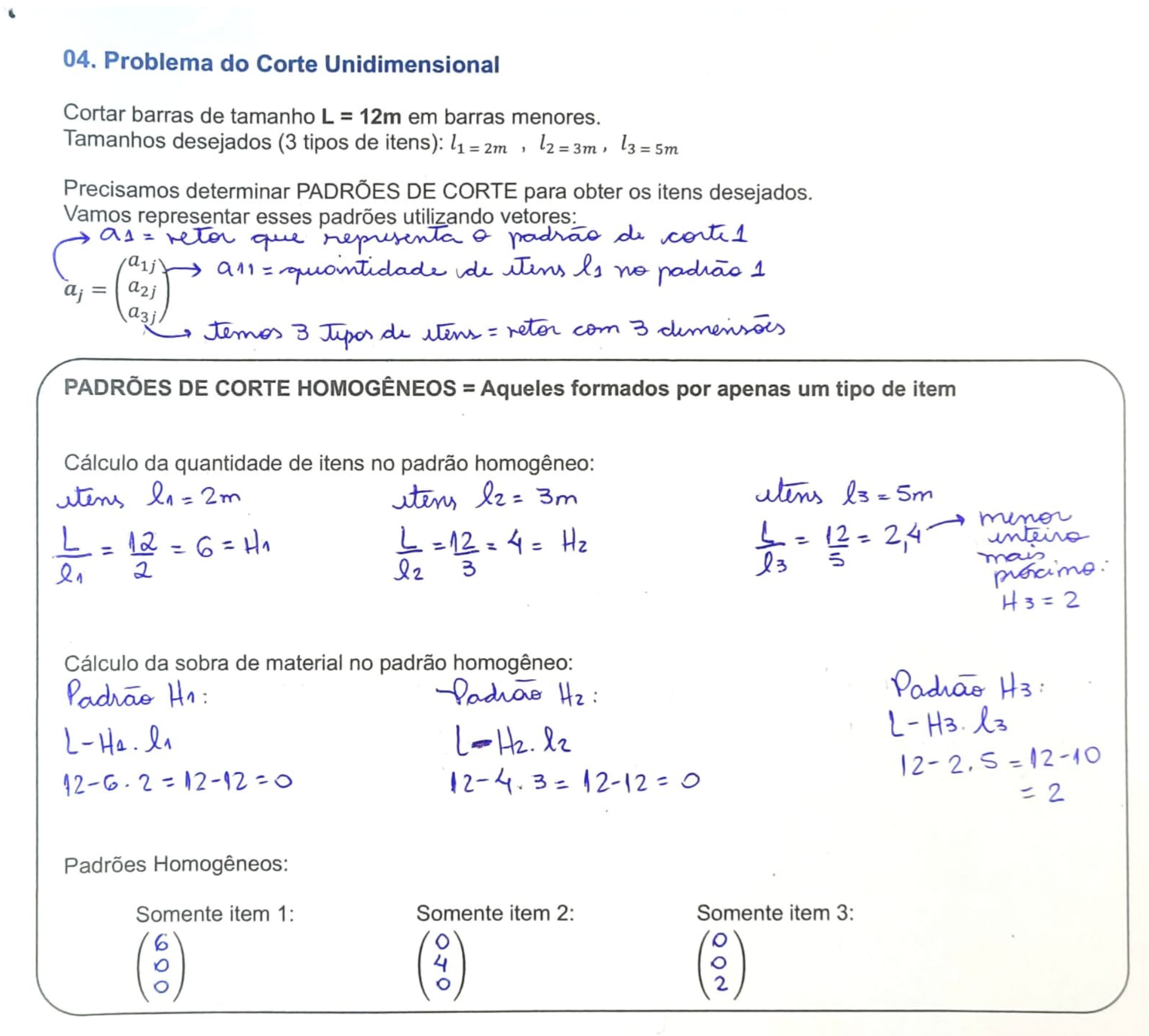
$$a_i = \frac{L}{l_i}, \; i = 1, ..., m. \tag{6.2}$$

sendo a_i a quantidade de itens de tamanho l_i no padrão, $i = 1, 2, 3$, devendo sempre ser aproximado para o menor inteiro. Da mesma forma, definiu-se a perda no padrão de corte homogêneo por:

$$P = L - l_i a_i. \tag{6.3}$$

A abordagem seguiu a construção com os alunos, conforme ilustrado na Figura 21.

Figura 21 – Estudo do problema de corte - aula 4.



04. Problema do Corte Unidimensional

Cortar barras de tamanho **L = 12m** em barras menores.
Tamanhos desejados (3 tipos de itens): $l_{1=2m}$, $l_{2=3m}$, $l_{3=5m}$

Precisamos determinar PADRÕES DE CORTE para obter os itens desejados.
Vamos representar esses padrões utilizando vetores:

→ a_1 = vetor que representa o padrão de corte 1

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$$

→ a_{11} = quantidade de itens l_1 no padrão 1

→ temos 3 tipos de itens = vetor com 3 dimensões

PADRÕES DE CORTE HOMOGÊNEOS = Aqueles formados por apenas um tipo de item

Cálculo da quantidade de itens no padrão homogêneo:

itens $l_1 = 2m$: $\frac{L}{l_1} = \frac{12}{2} = 6 = H_1$

itens $l_2 = 3m$: $\frac{L}{l_2} = \frac{12}{3} = 4 = H_2$

itens $l_3 = 5m$: $\frac{L}{l_3} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ → menor inteiro mais próximo: $H_3 = 2$

Cálculo da sobra de material no padrão homogêneo:

Padrão H_1: $L - H_1 . l_1$; $12 - 6 . 2 = 12 - 12 = 0$

Padrão H_2: $L - H_2 . l_2$; $12 - 4 . 3 = 12 - 12 = 0$

Padrão H_3: $L - H_3 . l_3$; $12 - 2 . 5 = 12 - 10 = 2$

Padrões Homogêneos:

Somente item 1: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Somente item 2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Somente item 3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Discutindo sobre a determinação de diferentes possíveis padrões de corte, homogêneos ou não, os alunos puderam identificar que gerar padrões de corte seria análogo a resolver o problema da mochila inteira e que esta seria apenas uma etapa do problema de corte, isto é, este problema teria um nível de complexidade maior. Depois de trabalhados os padrões de corte, foi proposto aos alunos que cada um deles escolhesse um padrão diferente, para formulação do problema com quatro padrões de corte, deixando claro que essa não seria a solução, seriam apenas quatro tipos de padrões dentre todos os possíveis, para que pudessem compreender o problema formalizado. Definiu-se, então, os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$. Discutindo-se novamente o problema, neste ponto os alunos ainda não conseguiam observar quais seriam as variáveis de decisão.

Na sequência, a discussão foi direcionada para as restrições do problema. Os alunos identificaram e compreenderam a restrição por conta do tamanho L da barra, mas não conseguiram, sozinhos, escrever matematicamente essa restrição. Foi feita, então, uma retomada de multiplicação de matrizes por escalares e multiplicação entre matrizes, conteúdo que neste momento estavam estudando nas aulas regulares de matemática. Logo puderam entender a possibilidade de realizar a seguinte multiplicação:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = l_1 a_{11} + l_2 a_{21} + l_3 a_{31}. \tag{6.4}$$

No lado direito da equação (6.4), $l_1.a_{11}$ indica quantos metros da barra L foram cortados em itens de tamanho l_1 no padrão 1, analogamente para l_2 e l_3. Os alunos concluiram que tal soma não pode ultrapassar o tamanho L da barra, ou seja, a desigualdade deve ser satisfeita:

$$l_1 a_{11} + l_2 a_{21} + l_3 a_{31} \leq L. \tag{6.5}$$

A equação (6.5) se refere ao padrão de corte 1 ($\mathbf{a}_1$); analogamente precisa-se repetir a equação para os vetores $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$ estabelecidos pelos alunos, para assim completar a restrição por conta do tamanho L da barra. A restrição de não negatividade e integralidade das variáveis, já familiares para os alunos, também foi abordada neste problema. A discussão em torno das operações com matrizes, para determinar as restrições do problema, foi bastante produtiva e a reação dos alunos deixou evidente os benefícios de utilizar uma situação prática e real para dar sentido ao estudo das matrizes.

Mesmo já definidas as restrições, os alunos ainda não conseguiam compreender quais seriam as variáveis de decisão no problema. Então a professora direcionou a discussão para a questão: queremos cortar a menor quantidade de barras possível para atender uma demanda. Então, qual deve ser nossa função objetivo? Em torno dessa discussão, os alunos perceberam que a função objetivo deveria minimizar a quantidade de barras cortadas, mas que junto a essa questão não poderiam esquecer que as barras cortadas seguiriam aqueles quatro padrões de corte já definidos. Só então conseguiram concluir que faltava decidir quantas barras seriam cortadas de acordo com cada um dos padrões e que essas quantidades seriam decididas de forma a atender uma demanda. Neste ponto já puderam entender o quanto o problema se tornaria ainda mais complexo se fossem considerados outros padrões de corte para a barra, pois cada um dos padrões utilizados estará associado a uma variável de decisão diferente, aumentando de forma considerável o número de variáveis do modelo.

Foram identificadas, então, as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 como variáveis de decisão do problema, sendo elas, respectivamente, as quantidades de barras a serem cortadas segundo os padrões de corte $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, e $\mathbf{a}_4$ escolhidos pelos alunos. Assim, concluíram como função objetivo:

$$\text{Minimizar} \qquad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \tag{6.6}$$

Para finalizar a modelagem do problema, foi apresentada a última restrição a ser considerada, a condição de atendimento da demanda. Foram propostas d_1, d_2 e d_3 como demandas dos itens do tipo l_1, l_2 e l_3 respectivamente. Aqui os alunos já haviam compreendido bem o problema e já conseguiram expressar esta restrição utilizando matrizes, propondo então:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

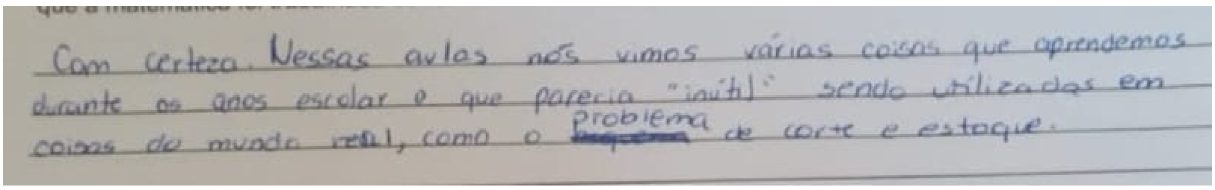
A aula 4 foi finalizada com a formulação do Problema de Corte Unidimensional proposto e uma discussão sobre como este problema, na prática, pode ser um desafio e apresentar maiores complexidades. Voltou-se a questão da dificuldade em decidir quais padrões de cortes deveriam ser utilizados e como excluir possíveis padrões de corte pode resultar uma solução que não seria a solução ótima. Também foi discutido o quão grande o problema se torna ao considerar muitos padrões, visto que cada um deles estará associado a uma variável de decisão diferente.

Outro ponto discutido foi em relação às restrições de demanda. Em (6.7), tais restrições foram escritas na forma de igualdades, mas os alunos compreenderam que poderiam ser escritas como desigualdades, isto é, a quantidade de itens cortados também poderia ser maior que a demanda. No caso de cortar uma quantidade de itens maior que a demanda, é possível facilitar a resolução do problema, mas esta condição gera um segundo problema a ser considerado, que é o armazenamento de itens excedentes em estoque.

Encerradas as atividades, os alunos receberam um questionário impresso, para ser respondido de acordo com as experiências vividas e avaliar as atividades desenvolvidas. O questionário foi elaborado pela professora, sendo composto de quatro questões dissertativas, as quais estão apresentadas a seguir, seguidas de respostas fornecidas por dois alunos.

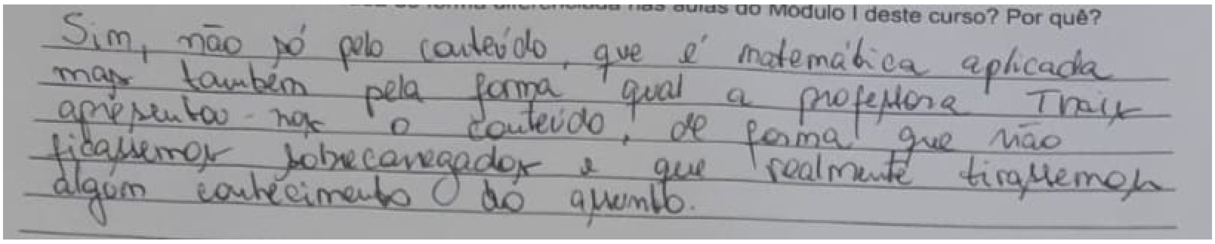
Questão 1 - *Fazendo uma comparação com as aulas regulares de matemática no Ensino Médio, você considera que a matemática foi trabalhada de forma diferenciada nestas atividades? Por quê?*

Figura 22 – Resposta do aluno A para a questão 1.


Com certeza. Nessas aulas nós vimos várias coisas que aprendemos durante os anos escolar e que parecia "inútil" sendo utilizadas em coisas do mundo real, como o problema de corte e estoque.

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

Figura 23 – Resposta do aluno B para a questão 1.

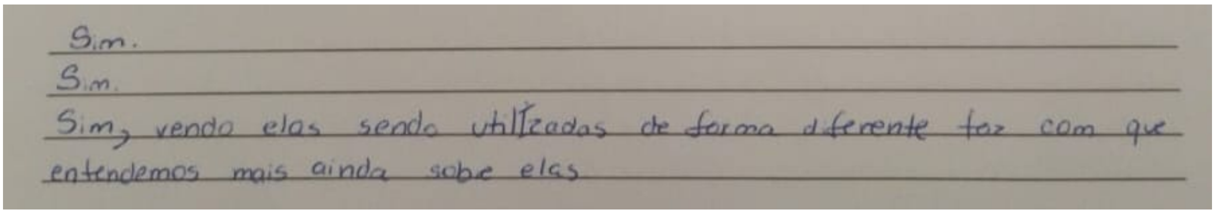

... de forma diferenciada nas aulas do Modulo I deste curso? Por quê?

Sim, não só pelo conteúdo, que é matemática aplicada mas também pela forma qual a professora Thaís apresentou-nos o conteúdo, de forma que não ficassemos sobrecarregados e que realmente tirassemos algum conhecimento do assunto.

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

Questão 2 - *Sobre o Problema do Corte Unidimensional, trabalhado na aula 4: Foi possível compreender a importância da utilização das matrizes? A Modelagem Matemática do problema contribuiu ou modificou seu entendimento sobre matrizes? Você considera que a apresentação desse problema em sala de aula (nas aulas regulares) ajudaria no aprendizado sobre matrizes?*

Figura 24 – Resposta do aluno A para a questão 2.

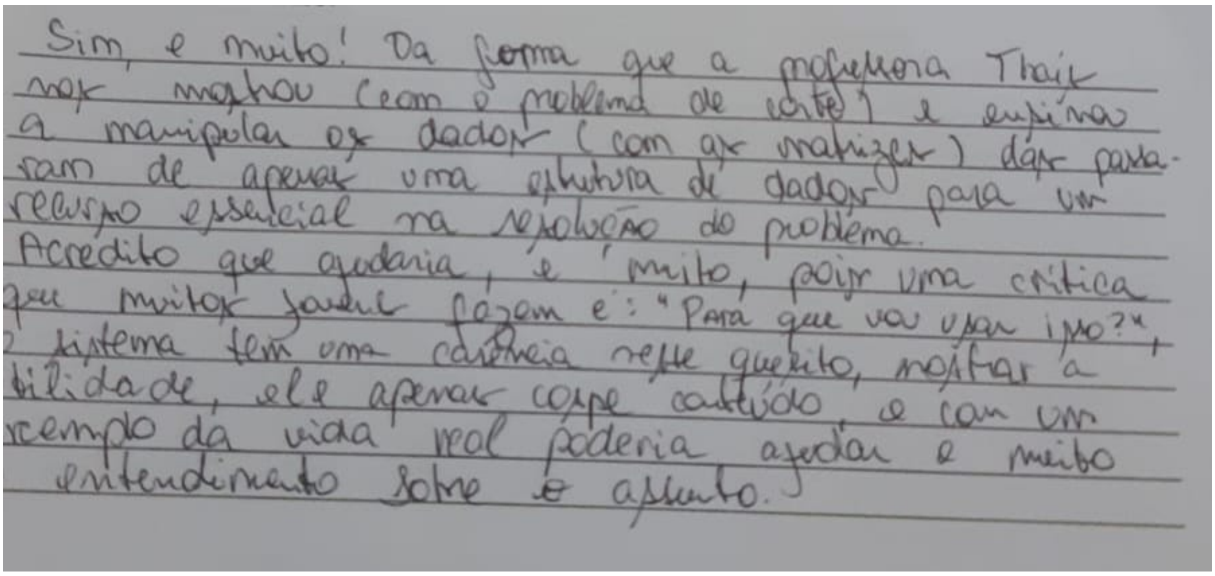

Sim.

Sim.

Sim, vendo elas sendo utilizadas de forma diferente faz com que entendemos mais ainda sobre elas

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

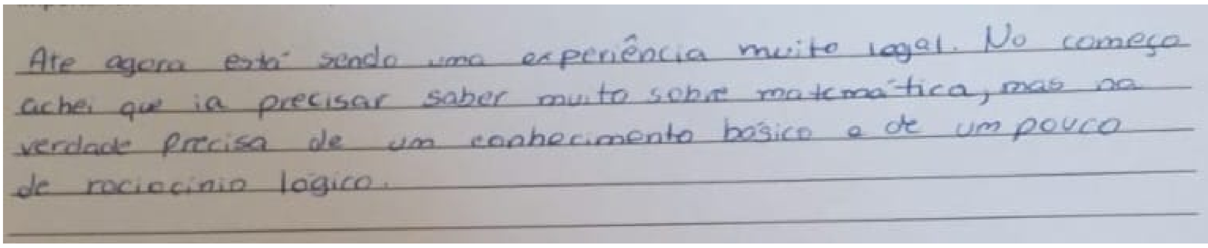
Figura 25 – Resposta do aluno B para a questão 2.


Sim, e muito! Da forma que a professora Thaís nos mostrou (com o problema de corte) e ensinou a manipular os dados (com as matrizes) elas passaram de apenas uma estrutura de dados para um recurso essencial na resolução do problema. Acredito que ajudaria, e muito, pois uma crítica que muitos jovens fazem é: "Para que vou usar isso?", o sistema tem uma carência nesse quesito, mostrar a utilidade, ele apenas coloca conteúdo, e com um exemplo da vida real poderia ajudar e muito o entendimento sobre o assunto.

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

Questão 3 - *Escreva como foi sua experiência neste curso, avaliando se os* *problemas trabalhados despertaram curiosidade e se contribuíram com seu aprendizado em matemática. Faça uma avaliação sobre a importância ou utilidade dos problemas abordados.*

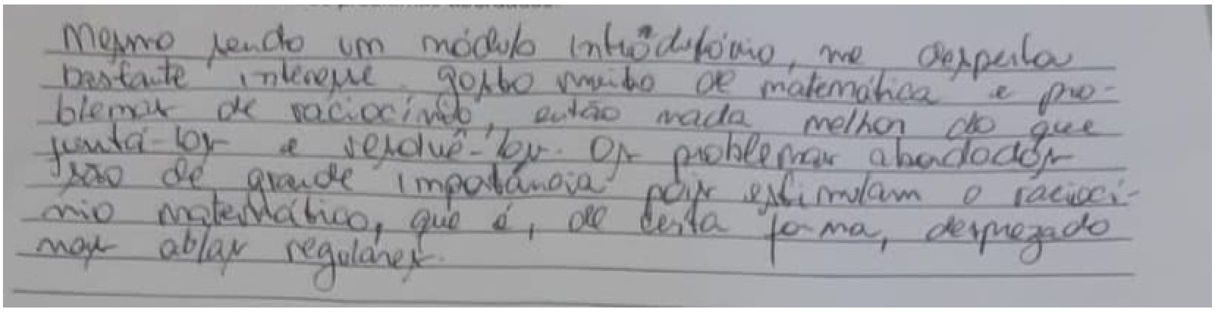
Figura 26 – Resposta do aluno A para a questão 3.



Ate agora está sendo uma experiência muito legal. No começo achei que ia precisar saber muito sobre matemática, mas na verdade precisa de um conhecimento básico e de um pouco de raciocínio lógico.

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

Figura 27 – Resposta do aluno B para a questão 3.

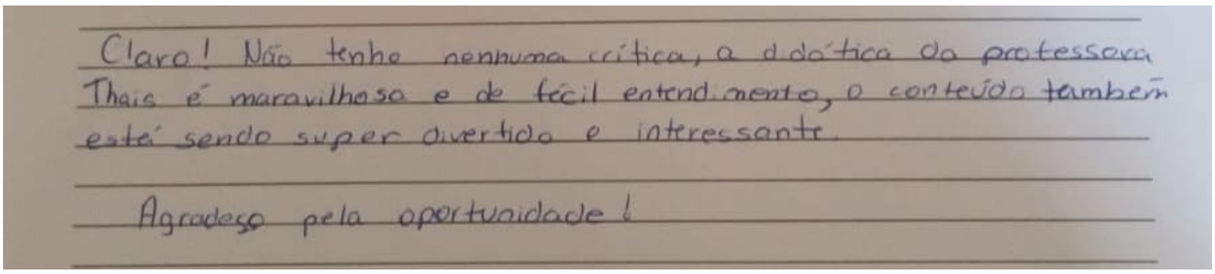


Mesmo sendo um módulo introdutório, me desperta bastante interesse. Gosto muito de matemática e problemas de raciocínio, então nada melhor do que juntá-los e resolvê-los. Os problemas abordados são de grande importância pois estimulam o raciocínio matemático, que é, de certa forma, desprezado nas aulas regulares.

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

Questão 4 - *Você teria interesse em dar continuidade nas atividades, onde aprofundaríamos as discussões sobre o Problema de Corte? Aproveite esse espaço para fazer comentários, críticas ou sugestões.*

Figura 28 – Resposta do aluno A para a questão 4.

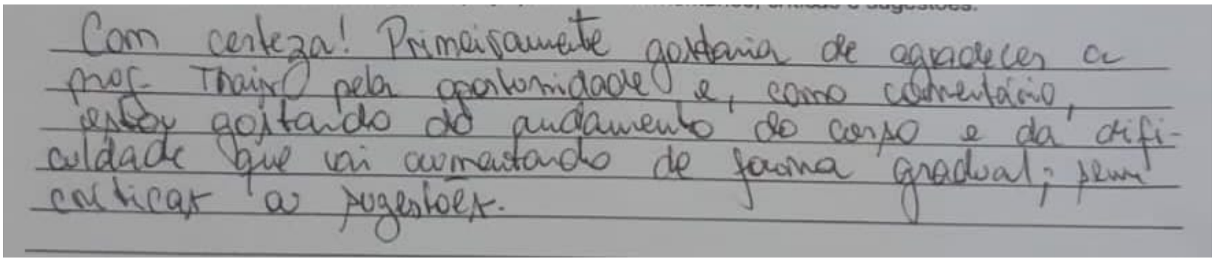


Claro! Não tenho nenhuma crítica, a didática da professora Thais é maravilhosa e de fácil entendimento, o conteúdo também está sendo super divertido e interessante.

Agradeso pela oportunidade!

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

Figura 29 – Resposta do aluno B para a questão 4.


Com certeza! Primeiramente gostaria de agradecer a prof. Thaís pela oportunidade e, como comentário, estou gostando do andamento do curso e da dificuldade que vai aumentando de forma gradual; sem criticas ou sugestões.

Fonte: Resposta de aluno participante, 2024.

6.2 Formato 2 - Inserido nas aulas regulares

Neste formato, as atividades foram desenvolvidas ao longo das aulas regulares, no componente de Estudos Avançados em Matemática e suas Tecnologias, contando com a participação ativa dos alunos do curso de Ensino Médio Integrado ao Técnico de Química. A turma completa conta com 39 alunos, mas para a realização das aulas do componente acima mencionado, a escola utiliza a divisão de turmas e, neste caso, professores diferentes lecionam o mesmo componente para cada metade da turma. Desta forma, apenas dezenove alunos participaram das atividades. Na etapa inicial, foram repetidos os materiais e conteúdos relatados na Seção 6.1, ou seja, foram abordados os problemas das ligas metálicas, da dieta, da mochila booleana, da mochila inteita e de corte de estoque unidimensional.

Apesar de inicialmente serem os mesmos tópicos e conteúdos a serem tratados, o contexto e cenário eram diferentes, visto que a abordagem aconteceria em sala de aula, no horário regular, respeitando-se o planejamento e grade curricular do curso. Assim, havia a necessidade de atender aos requisitos e regulamentos da escola, como por exemplo, a aplicação de atividades avaliativas para a turma. Além disso, diferente da experiência anterior, na qual apenas os alunos voluntários participaram, agora a atividade não seria opcional e deveria se adaptar a diferentes possíveis perfis de alunos.

Um fator importante para o desenvolvimento deste segundo formato de atividades é que, dada a primeira experiência já ocorrida, a professora contava com as devolutivas dos alunos participantes, havendo conhecimento prévio quanto aos impactos positivos na aprendizagem alcançados pelas atividades já desenvolvidas. Neste sentido, foi possível adaptar as atividades, reforçar pontos prováveis de maiores dificuldades, enfatizar pontos que se mostraram relevantes para um bom resultado e explorar diferentes abordagens.

No contexto vivenciado na escola, foi possível desenvolver as atividades em duas etapas, com o mesmo grupo de alunos, sendo uma no segundo semestre da segunda série do Ensino Médio (ano de 2023) e a segunda etapa no primeiro semestre da terceira série do Ensino Médio (ano de 2024), possibilitando uma sequência didática e continuidade dos conteúdos.

No componente de Estudos Avançados em Matemáticas e suas Tecnologias, para segunda e terceira séries do ensino médio, está prevista a abordagem dos seguintes objetos de conhecimento:

Segunda Série do Ensino Médio (1 aula de 50 minutos por semana):

Identificação de linhas de problemas relacionadas aos temas

- Lógica matemática, comunicação e expressão;
- Educação financeira pessoal;
- Economia doméstica;
- Raciocínio lógico-matemático no cotidiano.

Terceira Série do Ensino Médio (três aulas de 50 minutos por semana):

Identificação de linhas de problemas relacionadas aos temas

- Sociedade de consumo: ferramentas de análise de dados.
- Sustentabilidade;
- Jogos eletrônicos;
- Tecnologia de Informação e Comunicação aplicada à área da Matemática;
- Prototipação e cultura *maker* aplicada.

Pode-se observar que os conteúdos previstos são abrangentes e amplos, abrindo margem para a autonomia do professor ao fazer o planejamento das aulas. Além disso, é desejável que neste componente se trabalhe com a abordagem de aprendizado baseado em projetos, metodologias ativas e interdisciplinaridade, possibilitando que um trabalho diferenciado seja realizado enquanto se cumpre a grade curricular proposta. Desta forma, foi possível encaixar a Modelagem Matemática e a Otimização, bem como dar continuidade ao trabalho desenvolvido, iniciando-se com os alunos na segunda série do Ensino Médio e finalizando com os mesmos alunos já na terceira série. As duas etapas de atividades desenvolvidas serão relatadas separadamente nos tópicos a seguir.

6.2.1 Problemas de Otimização Linear e uso do *Solver* no Excel

Objetivando explorar o trabalho colaborativo e o desenvolvimento da autonomia e protagonismo dos alunos, a turma foi dividia em três grupos, propondo-se um trabalho de forma conjunta ao longo de todas as atividades a serem realizadas. Inicialmente, foram abordados conceitos sobre Modelagem Matemática e Otimização, seguindo o mesmo material planejado para as atividades relatadas na Seção 6.1. Neste caso, diferente do relato anterior, como as atividades foram realizadas dentro do planejamento das aulas regulares, foi possível desenvolver o conteúdo de forma mais detalhada, utilizando uma maior quantidade de aulas, permitindo, desta forma, que os alunos se envolvessem mais a cada etapa. Para estimular a participação ativa dos grupos, foi sugerida uma competição, na qual as equipes pontuariam de acordo com o desempenho em cada atividade.

Depois de bem definidos os conceitos de variáveis de decisão, restrições e função objetivo, cada um dos problemas foi apresentado para discussão entre os alunos, Modelagem Matemática do problema e tentativa de resolução utilizando cálculos manuais. Antes da devolutiva por parte da professora, a cada etapa havia um desafio para pontuação das equipes, como: escrever a função objetivo, identificar mais rapidamente as variáveis de decisão, determinar as inequações que descrevem as restrições, propor a melhor solução para maximizar ou minimizar a função objetivo. Desta forma, as aulas ficaram dinâmicas e os alunos participavam sempre de forma colaborativa, colocando em prática toda a discussão sobre os problemas. Após as atividades realizadas em grupos, havia sempre a devolutiva da professora, ressaltando pontos importantes e levantando discussões sobre diversas possibilidades de variar cada um dos problemas, bem como de aplicar a otimização em situações práticas na vida real.

Foi possível identificar, assim como na experiência anterior, que os alunos conseguem perceber o sentido e a importância de utilizar expressões algébricas para descrever situações reais. Como as abordagens fogem do comum e se diferenciam dos problemas geralmente abordados no Ensino Fundamental e Médio, as mesmas despertam nos alunos um olhar diferenciado. Além disso, como o foco inicial não é depositado sobre o "fazer contas", não há uma resistência por parte dos alunos ao participarem, nem mesmo nas atividades propostas como avaliativas. Assim, o trabalho focado em interpretar e modelar os problemas foi muito mais efetivo, permitindo explorar uma das grandes dificuldades apresentadas pelos alunos em matemática, de forma geral, que é a interpretação dos problemas. Vale destacar o quão rica se torna a discussão em torno do uso das desigualdades nas restrições apresentadas pelos problemas de otimização, já que neste contexto, os alunos conseguem perceber claramente o motivo de seu uso.

Para a discussão sobre o problema da mochila booleana (descrito detalhadamente na Subseção 6.1.2, Figura 14), os alunos foram direcionados a determinar todas as soluções possíveis, já que neste problema, diferente dos demais, há poucas soluções e a resolução é simples de se fazer através de cálculos manuais. Como mais uma etapa na competição entre as equipes, seria pontuado o grupo que determinasse mais rapidamente as soluções e identificasse a melhor entre as soluções possíveis. Este problema é abordado com o objetivo de preparar para a interpretação do problema da mochila inteira, possibilitando, também, uma produtiva discussão em torno do uso da Análise Combinatória para determinação de todas as possibilidades de completar a mochila. Aproveitando o momento para também prepará-los para a posterior interpretação e modelagem do problema de corte unidimensional, foi trabalhada a escrita das soluções para a mochila booleana na forma de vetores.

Para o problema da mochila inteira, de extrema importância para a compreensão da modelagem do problema de corte como um problema de Otimização Linear, os alunos foram mediados pela professora e orientados a modelar o problema e, ainda manualmente, cada grupo deveria propor uma solução. Assim como ocorrido com o primeiro grupo de alunos a participar das atividades, aqui os alunos já estavam bem familiarizados com as restrições, variáveis de decisão e função objetivo, demonstrando total autonomia na formulação e interpretação do problema. Mais uma vez se deu a discussão em torno das soluções propostas e da busca pela solução ótima, bem como sobre as possibilidades de os problemas serem mais complexos e demandarem de recursos computacionais para serem solucionados. Antes mesmo de ser apresentado o problema de corte, aqui foi feita uma introdução ao que seriam os padrões de corte, dada a semelhança com a resolução do problema da mochila inteira.

Com toda a evolução nas discussões e interpretações dos problemas de otimização, bem como a autonomia demonstrada pelos alunos, antes de dar continuidade ao problema de corte unidimensional, foi proposta uma atividade avaliativa para resolver problemas clássicos de otimização utilizando recursos computacionais. A opção escolhida foi a utilização do Microsoft Excel, dado que seria um recurso disponível nos laboratórios de informática da escola, além de ser uma ferramenta muito utilizada em diversas áreas, agregando valor a esta experiência para os alunos. Com o objetivo de reforçar a autonomia dos grupos e, juntamente com o aprofundamento nos problemas de otimização, colaborar para o desenvolvimento de habilidades de comunicação e oralidade, foi proposto aos grupos a apresentação de seminários utilizando a ferramenta *Solver* no Excel. Através de sorteio, um dos grupos teve a tarefa de apresentar como utilizar a ferramenta *Solver*, como configurar, quais recursos estão disponíveis, quais as possibilidades de aplicação. Depois desta primeira apresentação, os outros dois grupos apresentaram problemas de otimização e sua resolução utilizando o *Solver* no Excel. No desenvolvimento desta atividade foi possível explorar a metodologia da sala de aula invertida.

A produção dos seminários foi realizada exclusivamente pelos alunos, em grupos, sem qualquer auxílio da professora. Os alunos utilizaram um dos laboratórios de informática da escola, como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Produção dos seminários - Solver Excel

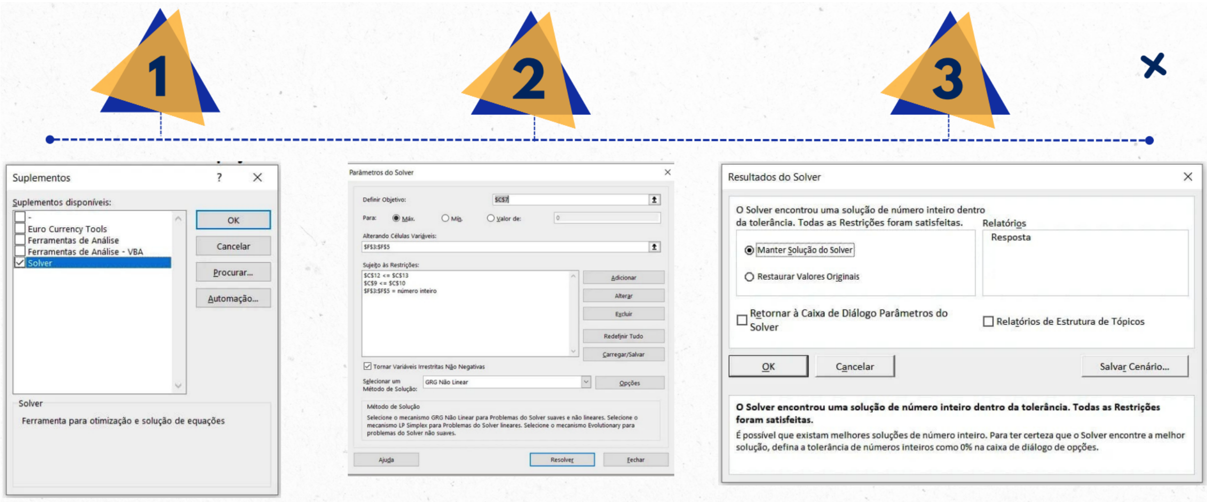
Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Os estudantes demonstraram bastante interesse em pesquisar materiais diversos para a produção dos conteúdos e se dedicaram a explicar detalhadamente os passos para resolução dos problemas. Foi possível notar o quanto se tornou interessante para eles o uso de ferramentas para solucionar problemas que foram tão explorados anteriormente, de modo que já compreendiam e interpretavam o problema, isto é, conseguiam compreender a lógica da ferramenta aplicada e o significado das respostas obtidas.

As apresentações dos grupos foram realizadas na sala de aula regular da turma, que conta com TV, computador e lousa branca. Os alunos fizeram as apresentações completas e demonstraram domínio em utilizar a nova ferramenta, bem como explicar e modelar os problemas propostos. Mesmo diante da ferramenta que retornava a resposta procurada, utilizaram lousa para explicar e representar a modelagem do problema, demonstrando compreensão e familiaridade.

A Figura 31 mostra um dos slides apresentados pelos alunos, orientando, passo a passo, como utilizar a ferramenta Solver. As apresentações dos seminários de dois grupos estão ilustradas nas Figuras 32 e 33, a seguir.

Figura 31 – Slide apresentado por um dos grupos - Solver Excel



Fonte: Produzido por alunos participantes, 2024.

Figura 32 – Apresentação dos seminários - Solver Excel

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Figura 33 – Apresentação dos seminários - Solver Excel

Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Para a finalização das atividades, foi abordado o problema de corte unidimensional. Assim como a experiência relatada na Seção 6.1, aqui também foi notória a dificuldade em propor uma modelagem incial para o problema. Como já havia sido introduzido o conceito de padrão de corte, eles facilmente propuseram possíveis padrões, mas a primeira dificuldade aparece na identificação das variáveis de decisão, isto é, não é intuitivo compreender que os padrões de corte são um subproblema.

Os passos seguidos para formular o problema de corte foram os mesmos relatados na subseção 6.1.4. Neste problema, dada a necessidade de abordar uma maior quantidade de conceitos e informações, os alunos demonstraram maior dificuldade e menor participação, mas depois de compreendido, expressaram satisfação em finalmente reconhecer uma aplicação para matrizes, o que, segundo eles, seria fundamental durante o aprendizado de matrizes nas aulas de matemática. A escrita e a modelagem do problema foi bastante trabalhada, bem como os padrões de corte e as possibilidades de restrições e de como pensar em maximizar lucros ou minimizar perdas de material. Para a resolução do problema, dada a complexidade, foram definidos padrões de corte que pareciam mais viáveis e aplicados ao Solver no Excel. A discussão foi finalizada com a ideia de que este problema pode se tornar muito mais complexo de acordo com as restrições e que ignorar outros possíveis padrões pode nos afastar da solução ótima.

6.2.2 Resolução Gráfica e uso do GeoGebra

O trabalho foi continuado com a mesma turma na terceira Série do Ensino Médio, sendo possível incluir no planejamento uma atividade envolvendo a resolução gráfica de problemas de otimização utilizando o GeoGebra Classic. Para esta etapa, foi utilizado o laboratório de informática da escola, onde cada aluno tinha acesso a um computador para realizar individualmente a atividade.

Nesta etapa, o objetivo central foi explorar a resolução gráfica, relacionando conteúdos já presentes na grade curricular do Ensino Médio. Antes de iniciar a construção no GeoGebra, o problema foi apresentado aos alunos e uma discussão, mediada pela professora, foi desenvolvida em torno da construção gráfica. Neste primeiro momento, abordou-se a interpretação do problema, buscando-se concepções prévias dos alunos, os quais foram respondendo questões orientados pela professora e deduzindo a construção da região factível, conceito até então desconhecido por eles. O problema apresentado para esta primeira construção foi um problema simples, o qual, inclusive, poderia ser facilmente resolvido pelos alunos com os conhecimentos desenvolvidos até então. A ideia de o problema ser simplificado foi intencional, visto que o propósito seria a compreensão e interpretação da construção gráfica, a partir da qual conceitos novos seriam introduzidos e o resultado final confirmaria a solução já esperada por eles.

A atividade foi iniciada com a apresentação do seguinte enunciado:

Problema do Agricultor

Um agricultor dispõe de um total de 10 hectares para o plantio de arroz e de soja. Ele precisa plantar, no mínimo, três hectares de arroz e dois hectares de soja. Sabendo que o agricultor terá um lucro de R$ 4000,00 por hectare de arroz e um lucro de R$ 5000,00 por hectare de soja, quantos hectares ele deverá plantar de cada tipo para obter o maior lucro possível?

O problema, como mencionado, é de fácil interpretação e resolução. Os alunos logo apontaram que o mais lucrativo seria plantar o máximo possível de soja, que retorna o maior lucro por hectare. Respeitando-se a condição imposta, o mais viável seria plantar 3 hectares de arroz e os 7 hectares restantes, de soja. Então, os alunos foram orientados a guardar essa informação, a qual seria verificada pelo novo método, a resolução gráfica.

Iniciou-se, então, a discussão sobre o problema com explicação em lousa, conforme os alunos foram respondendo questões feitas pela professora e fazendo sugestões. A função objetivo do problema foi facilmente identificada pelos alunos, isto é, maximizar o lucro do agricultor. Assim, propuseram escrever a função objetivo como:

$$\text{Maximizar} \qquad L = 4000A + 5000S, \tag{6.8}$$

sendo A é a quantidade de hectares de arroz e S a quantidade de hectares de soja a serem plantados.

Como próximo passo, os alunos foram questionados sobre como escrever as restrições impostas, quando sugeriram:

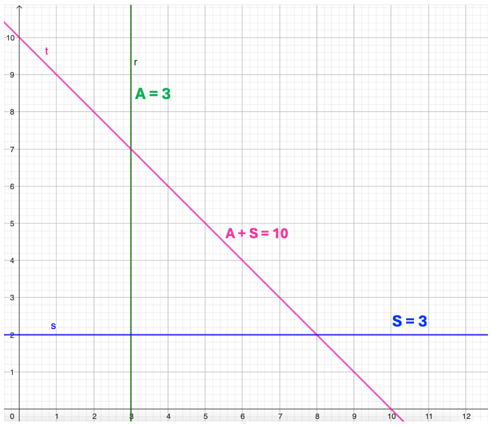
$$A \geq 3 \tag{6.9}$$

$$S \geq 2 \tag{6.10}$$

$$A + S \leq 10. \tag{6.11}$$

Buscando facilitar a visualização e construção do gráfico, a professora sugeriu trocar as variáveis A e S, respectivamente, por x e y, o que tornaria a construção no GeoGebra mais intuitiva para os alunos. Para iniciar a construção da região factível, as desigualdades (6.9), (6.10) e (6.11) foram reescritas como igualdades, assim os alunos conseguiram determinar as retas que demarcariam a região no gráfico. Assim, foi realizada uma primeira construção, em lousa, em seguida, a construção foi repetida no GeoGebra, conforme ilustrado aa Figura 34.

Figura 34 – Construção da região factível do problema do agricultor

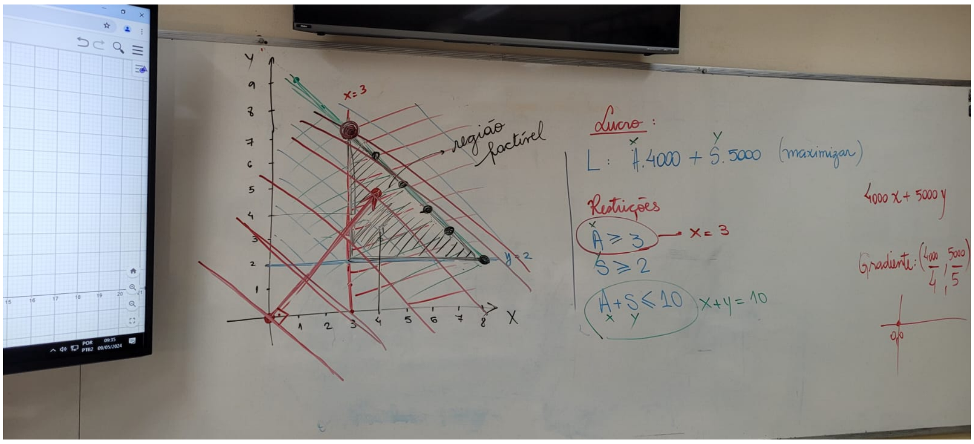


Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Ainda que pareça uma construção trivial, a conversa com os alunos foi rica e produtiva, sendo uma oportunidade de reforçar, ou até mesmo construir e consolidar, conceitos já conhecidos por eles sobre função do primeiro grau, equação da reta e os coeficientes angular e linear.

Determinadas as retas, foram demarcadas as regiões dadas pelas desigualdades, tudo realizado pela professora, em lousa, seguindo as coordenadas dadas pelos próprios alunos. Assim foi possível determinar a região factível, apresentada para os alunos como a intersecção entre as três regiões consideradas a partir das restrições dadas no problema. A construção em lousa pode ser vista na Figura 35.

Figura 35 – Discussão Região Factível em lousa



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Até este ponto, nenhum conceito foi novo para os alunos, já que na segunda série do Ensino Médio eles já apresentam os conhecimentos e as habilidades necessárias para a construção do gráfico. O próximo passo, seria a construção das curvas de nível (já indicadas na Figura 35, acima), que permitem determinar a solução ótima para o problema. Para isto, seria necessário o conhecimento de derivadas para a determinação do vetor gradiente; então este ponto foi tratado de maneira simplificada, usando-se comparações e analogias, inicialmente em lousa e mediando a discussão com os alunos.

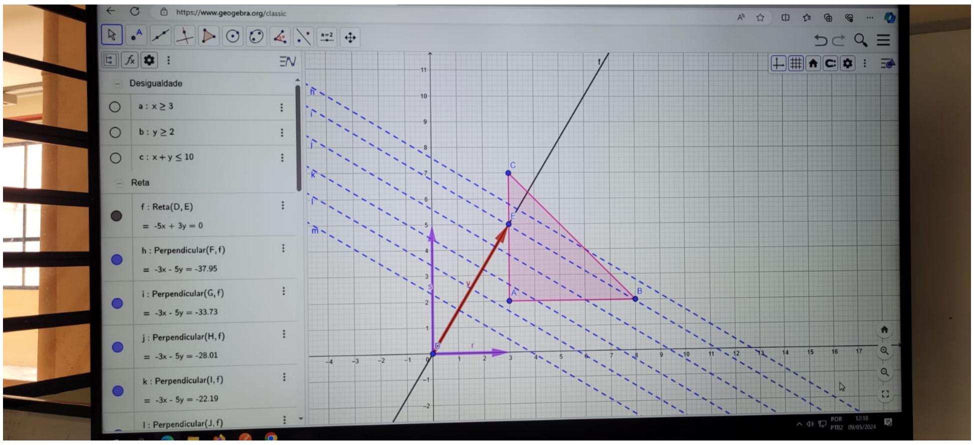
O conceito de gradiente foi introduzido utilizando-se a ideia de taxa de variação, isto é, a partir da função objetivo definida (6.8), foi discutido o quanto havia de contribuição para o aumento no eixo x e no eixo y, dada a necessidade de maximizar o lucro. Vale ressaltar que a turma em questão apresenta um bom desempenho e são bastante produtivos, além de contar com alguns alunos muito curiosos e interessados em aprofundar os conhecimentos em matemática, desta forma, foi possível estabelecer uma discussão superficial a cerca do significado da derivada e o que seria derivar em relação a x e em relação a y. Na sequência, passou-se à construção do vetor gradiente, onde foram retomados conceitos de operações com vetores, possibilitando determinar o vetor gradiente como a soma dos vetores em x e em y, dados a partir da função objetivo.

Construído o vetor gradiente, iniciou-se a discussão sobre a indicação que este vetor traria quanto à direção em que ocorreria o aumento buscado, dada a necessidade de maximizar a função objetivo. Então foram construídas as curvas de nível, as quais guiariam o comportamento desse aumento até encontrar-se o último ponto, pertencente à região factível, isto é, uma solução ótima. Neste ponto, foi introduzida a ideia de solução única ou soluções múltiplas para o problema. Também foi colocado, a partir da construção de algumas curvas de nível (retas perpendiculares ao vetor gradiente), que cada ponto dentro da região factível seria uma possível solução para o problema, mas o último ponto, caminhando na direção do vetor gradiente, seria a solução ótima. Foi possível fazer uma comparação da resolução gráfica com as resoluções sugeridas por eles aos problemas, nas atividades anteriores, por tentativa e erro.

Foi abordado também o significado e importância das curvas de nível, enfatizando-se que qualquer ponto pertencente a uma mesma reta resulta em um mesmo valor para a função objetivo, introduzindo a ideia de serem linearmente dependentes. A partir dessas explicações, os próprios alunos fizeram a colocação de que a solução, então, seria múltipla, quando as curvas de nível fossem paralelas a um dos lados da região factível. Ainda em lousa, por iniciativa de alguns alunos, discutiu-se a determinação da equação da reta perpendicular ao vetor gradiente e, ainda, que todas as outras teriam o mesmo coeficiente angular, o que completou a discussão sobre taxas de variação. Apesar de a construção em lousa ter sido apenas um esboço e servir para explorar todos os novos conceitos, a partir dela já foi possível identificar o último ponto a ser tocado por uma das curvas de nível, isto é, a solução ótima para o problema. O fato de toda esta nova construção comprovar o resultado já previstos pelos alunos, isto é, plantar 3 hectares de arroz e 7 de soja (ponto de coordenadas (3,7) indicado na lousa), gerou ainda mais interesse e participação dos alunos, indicando que mesmo um problema de fácil solução foi de grande valia para este estudo.

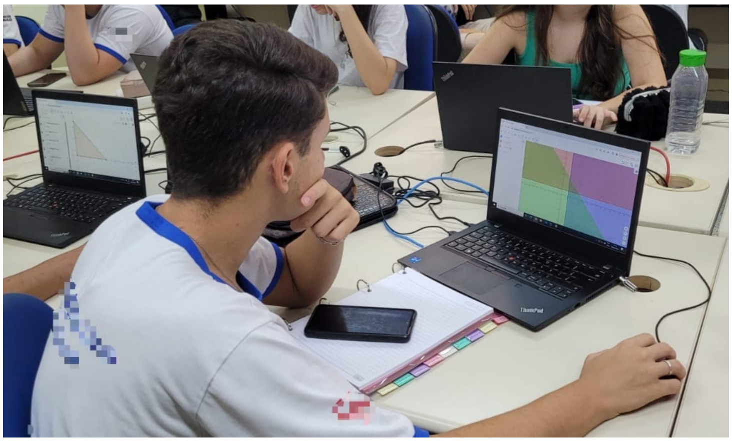
Depois de bastante discutido o problema e bem compreendidos os conceitos novos, foi conduzida a construção, já esboçada em lousa, agora no GeoGebra. Inicialmente, apenas a professora fez a construção no GeoGebra Classic, utilizando a TV do laboratório para demonstrar todos os passos e ferramentas a serem utilizados. Terminada a construção, cada aluno teve a tarefa de repetir a construção utilizando os notebooks do laboratório, como mostram as Figuras 36, 37 e 38.

Figura 36 – Discussão Região Factível GeoGebra



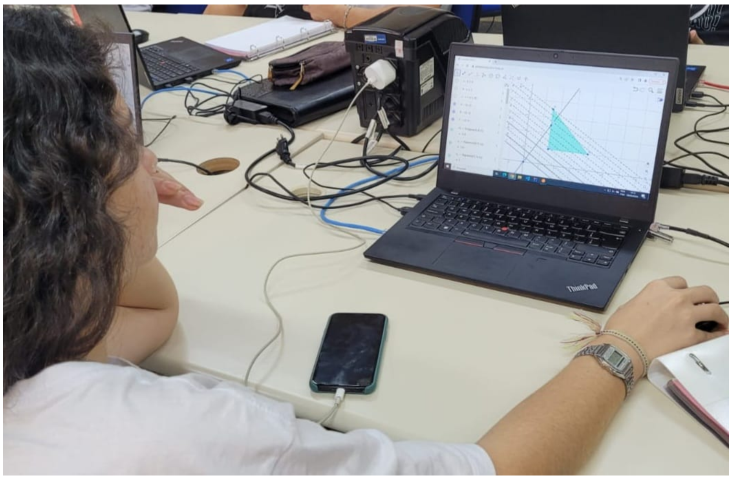
Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Figura 37 – Construção realizada pelos alunos no GeoGebra Classic



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Figura 38 – Construção realizada pelos alunos no GeoGebra Classic



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

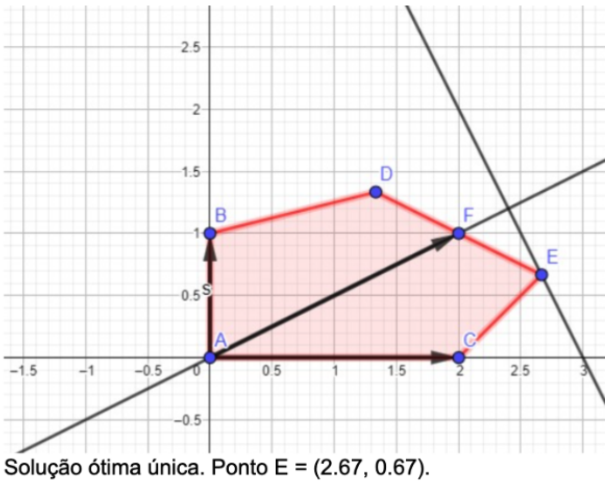
Para finalizar os trabalhos e contar com mais uma atividade avaliativa para a turma no componente de Estudos Avançados em Matemática e suas Tecnologias, foi proposta uma última atividade a ser realizada em grupos utilizando o Geogebra. Foram dois exercícios, para os quais os alunos deveriam fazer a construção gráfica e determinar se a solução era única ou múltipla.

Exercício 1:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \qquad & z = 6x + 3y \\ \\ \text{sujeito a} \qquad & 2x + 4y \leq 8 \\ & -x + 4y \leq 4 \\ & x - y \leq 2 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Para este primeiro exercício, após construção da região factível no GeoGebra, os alunos deveriam identificar a solução ótima, no caso, única. Os alunos obtiveram êxito em resolver o problema com os recursos utilizados anteriormente em aula, como pode-se observar na Figura 39, que apresenta a região factível e o vértice E como solução ótima.

Figura 39 – Atividade realizada por um dos alunos - resolução gráfica solução única



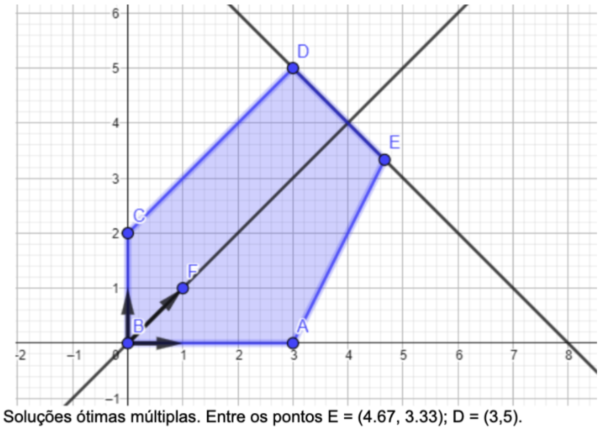
Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Já para o segundo exercício, cujo modelo está apresentado a seguir, os alunos também obtiveram sucesso na sua resolução, mesmo sendo um problema com múltiplas soluções, como pode ser visto na construção apresentada na Figura 40.

Exercício 2:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \qquad & z = x + y \\ \\ \text{sujeito a} \qquad & x + y \leq 8 \\ & -4x + 4y \leq 8 \\ & 2x - y \leq 6 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Figura 40 – Atividade realizada por um dos alunos - resolução gráfica soluções múltiplas



Fonte: Produzido pela autora, 2024.

Na Figura 40, os alunos identificaram o segmento DE como solução do problema, significando que qualquer ponto deste segmento fornece o mesmo valor para a função objetivo z, sendo o seu valor ótimo. Dentre as múltiplas soluções ótimas, destaca-se duas delas, que são os vértices D e E.

7 Proposta de continuidade da abordagem do Problema de Corte Unidimensional

No Capítulo 2 foi abordada a Modelagem Matemática enquanto recurso pedagógico para o Ensino de Matemática, bem como sua potencial contribuição para a prática docente. Ao longo da produção deste trabalho, foram construídas e aplicadas, em ambiente escolar, as práticas já relatadas no Capítulo 6, a partir das quais identificou-se a possibilidade de aprofundar o estudo do Problema de Corte Unidimensional para o Ensino Médio, através da Metodologia da Modelagem Matemática. Desta forma, este capítulo dedica-se a elaboração de uma proposta de prática, que daria continuidade aos trabalhos já executados, tendo em vista a contribuição que os conteúdos já abordados agregariam para tal realização.

Para a prática docente, na aplicação da Modelagem na Educação Matemática, valoriza-se o “saber fazer” do aluno, bem como sua capacidade de avaliação dos processos de construção, a partir de sua realidade (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014). Desta forma, é de fundamental importância a prévia construção do conhecimento sobre os problemas de otimização e da formulação do Problema de Corte, possibilitando que os alunos tenham autonomia para o desenvolvimento das etapas a serem propostas a seguir.

A concepção de Modelagem Matemática proposta por Burak (BURAK, 1987; BURAK, 1992) é seguida nesta proposta, bem como para definição das etapas a serem trabalhadas. É importante ressaltar que o autor evidencia o interesse do grupo no tema a ser explorado, sendo de grande valor para o processo que a problemática seja definida de acordo com o contexto e vivência dos alunos. Apesar disso, aqui o tema será predefinido como o Problema de Corte de Estoque, dado o objetivo de aproveitar a metodologia como suporte e meio para o aprofundamento do problema já iniciado com o grupo de alunos envolvidos. Além disso, o mesmo problema pode se adequar a diferentes realidades e contextos, dado que pode ser abordado em diferentes setores, como na indústria metalúrgica, madeireira, têxtil, de papel, entre outros.

Pensando em uma proposta de continuidade logo após a sequência de atividades envolvendo os problemas clássicos de Otimização, as resoluções por meio do *Solver* no Excel e a resolução gráfica utilizando o Geogebra, a atividade poderia ser aplicada para a terceira série do Ensino Médio, havendo assim, a possibilidade de se adequar todas as etapas anteriores ao planejamento curricular ao longo da segunda série do Ensino Médio. É importante ressaltar que o problema a ser explorado não se limita à matemática e também que o professor tem papel fundamental no desenvolvimento, sendo mediador e problematizador.

A seguir, as etapas propostas para execução são apresentadas de forma genérica, havendo a possibilidade de adequação ao cenário local de desenvolvimento das atividades.

Etapa 1 - Escolha do tema

Apesar de o tema central já estar predefinido, ainda há aqui possíveis cenários e realidades a serem consideradas. Para um bom aproveitamento e engajamento dos alunos, seria interessante identificar uma pequena indústria local que contasse com alguma atividade envolvendo o Problema de Corte, como o corte de canos, de barras de aço, de fios. É importante observar que apenas o corte unidimensional foi trabalhado anteriormente, mas a abordagem poderia ser pensada e estendida para duas ou três dimensões.

De acordo com as possibilidades locais, escolhido um cenário no qual o tema possa ser estudado, será definido, de fato, o problema. Um exemplo seria minimizar as perdas de material na produção geral ou para um projeto específico.

Etapa 2 - Pesquisa exploratória

Para a pesquisa exploratória, os estudantes, mediados pelo professor, vão estudar e pesquisar informações sobre a produção e funcionamento do setor escolhido. Aqui buscam-se subsídios teóricos e técnicos, reunindo-se informações gerais sobre o problema definido na Etapa 1.

Etapa 3 - Levantamento de problemas

Esta etapa pode se tornar tão diversa quanto se desejar, podendo-se identificar diferentes problemas, oportunidade, esta, de tornar a atividade interdisciplinar. De acordo com o setor da indústria ou produção envolvida, há a possibilidade de explorar, por exemplo, fatores ambientais e sociais, como o impacto da produção no meio ambiente e na geração de empregos locais. Abre-se aqui, inclusive, a possibilidade de abordar outros tópicos no conteúdo matemático, além do proposto inicialmente, como tratar a matemática financeira nos lucros e custos, calcular áreas ou volumes envolvidos, abordar estatísticas locais, entre outros.

É nesta etapa do desenvolvimento que a proposta se diferencia muito de atividades sugeridas em livros ou apostilas, pois os problemas elaborados não serão abertos, mas sim específicos e contextualizados, aplicados diretamente à realidade e vivência. O foco é que seja trabalhada nos alunos a capacidade de questionar, de tomar decisões, de formular hipóteses, sendo fundamental o papel do professor como mediador e orientador ao longo do processo.

Etapa 4 - Resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático

A partir do levantamento realizado na etapa anterior, agora ocorre a busca de respostas com o auxílio da matemática. Uma importante característica da metodologia é a possibilidade de aprender conteúdos matemáticos através dos problemas selecionados, isto é, por meio de exemplos e até mesmo de forma empírica, é possível deduzir ou formular resoluções e só depois sistematizar esses conteúdos. Isto é, aprende-se na prática, diferente do aprender para depois praticar. Aqui os conteúdos matemáticos ganham significado e podem ou não resultar em modelos matemáticos.

Como já explorado, outros problemas surgirão além do Problema de Corte, mas a proposta central é que se aproveite deste cenário e envolvimento dos alunos para retomar a sua modelagem matemática e explorar possíveis técnicas de resolução. Ainda que seja feito de forma simplificada, aqui abre-se a possibilidade dos alunos seguirem a modelagem já discutida e aplicar ao cenário real, ou abordá-lo em outro formato, como criando protótipos para a visualização com recortes de papéis ou outros objetos. Colocando em prática a construção do problema, os conceitos de padrões de corte, restrições, função objetivo, perda de material, entre outros, podem ser ressignificados e então sistematizados, como propõe o método.

Etapa 5 - Análise crítica das soluções

A quinta e última etapa vai além da abordagem matemática, é o momento de reflexão sobre os resultados obtidos, análise de decisões tomadas e da viabilidade das propostas de resolução. A proposta é que se desenvolva a autonomia dos alunos, bem como a participação ativa, a comunicação, a participação na comunidade local e o reconhecimento da matemática como parte constituinte em processos que também envolvem situações políticas, sociais, econômicas, ambientais, entre outras.

8 Considerações Finais

Abordar a Otimização Linear no contexto do Ensino Médio se mostrou uma prática não apenas possível, mas promissora e rica em oportunidades para se explorar conceitos, desenvolver habilidades, contextualizar e dar significado para o ensino e aprendizagem de matemática. Além disso, são amplas as possibilidades de aplicações em situações reais e de desenvolvimento da autonomia do aluno na resolução de problemas, fugindo dos padrões repetitivos e mecânicos usualmente aplicados.

A primeira proposta de atividades desenvolvidas para o Ensino Médio, realizada de forma extracurricular, demonstrou a possibilidade de explorar a Otimização mesmo em pouco tempo e com poucos recursos, possibilitando, por exemplo, adaptações em formato de oficinas durante eventos ou atividades diferenciadas nas escolas. As práticas apresentaram potencial em despertar um olhar crítico para a interpretação de sistemas de inequações lineares, bem como, no Problema de Corte de Estoque, a interpretação e aplicação de matrizes. Dada a resolução do problema da mochila booleana através de linguagem de programação, a continuidade neste caminho pode ser mais explorada e aprofundada para o Problema de Corte em trabalho futuro.

No segundo formato de atividades propostas, a inclusão no planejamento das aulas regulares mostrou-se uma alternativa viável para componentes específicos de cursos de Enino Médio integrados ao técnico, como foi o caso, ou para itinerários formativos e componentes de projetos presentes na atual grade curricular do Ensino Médio. Os alunos participantes demonstraram considerável interesse nos problemas clássicos de Otimização apresentados, pois, além de tratarem de situações reais, a Modelagem Matemática dos problemas foi realizada gradualmente, não havendo necessidade de introduções teóricas, aplicações de fórmulas ou resoluções mecânicas de exercícios. O trabalho desenvolvido em grupos de forma colaborativa, permitiu exercitar a autonomia dos alunos e a cooperação, além de estimular a participação ativa ao incluir o método de competição entre as equipes.

A distribuição gradual das atividades ao longo das aulas regulares permitiu acompanhar a evolução dos alunos, o desenvolvimento da autonomia e a construção dos conhecimentos, garantindo um excelente desempenho da turma na apresentação de seminários e resolução de problemas utilizando a ferramenta *Solver*, no Excel. O trabalho prévio com problemas de Otimização Linear enriqueceu as apresentações e conteúdos desenvolvidos por eles e permitiu que compreendessem o que o *software* estava executando.

A continuidade das atividades com a mesma turma em semestres diferentes permitiu uma construção leve e completa, permitindo acompanhar o amadurecimento e desenvolvimento dos alunos. Nas últimas atividades realizadas, foi utilizado o software GeoGebra (*open source*) para abordar a resolução gráfica de problemas lineares. A escolha de um problema básico para iniciar as construções gráficas possibilitou discussões importantes sobre a interpretação do problema, de modo que os alunos previram o resultado a partir dos conhecimentos prévios e puderam confirmá-lo utilizando o software, verificando o funcionamento do método. Foi uma etapa bastante produtiva, permitindo explorar funções e equações lineares, além de permitir uma abordagem, ainda que superficial, sobre derivadas e vetor gradiente.

De forma geral, a abordagem da Otimização Linear permitiu trabalhar formatos diferentes dos padrões tão repetidos no Ensino da Matemática. Destaca-se o diferencial de iniciar com um problema real e, como consequência, necessitar de conteúdos já conhecidos pelos alunos em matemática. Esta sequência desperta o interesse do aluno, que consegue, de fato, identificar a importância e o papel da matemática na resolução de problemas. Neste sentido, o uso da metodologia de Modelagem Matemática foi apresentado como uma proposta de atividade futura, visando aprofundar e explorar o Problema de Corte de Estoque. Espera-se que as propostas e atividades desenvolvidas colaborem com o Ensino de Matemática na educação básica e inspire novas práticas em sala de aula.

Referências

ARENALES, M. N. e. a. *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: Rio de Janeiro : Elsevier : ABEPRO, 2011., 2011. Citado 11 vezes nas páginas 15, 16, 22, 24, 26, 31, 36, 37, 38, 42 e 46.

BASSANEZI, R. C. *Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Citado na página 20.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. d. M. *MODELAGEM MATEMÁTICA*. [S.l.]: Editora UFU, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 78.

BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLüBER, T. E. *MODELAGEM MATEMÁTICA - perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. [S.l.]: Editora UEPG, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 21.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Citado na página 15.

BURAK, D. *Modelagem Matemática - Uma Metodologia Alternativa Para O Curso de Matemática Na 5ª Série*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 78.

BURAK, D. *Modelagem Matemática - Ações e Interções no Processo de Ensino-Aprendizagem*. Dissertação (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 78.

CARVALHO, E. S. *Problemas de Otimização Linear no Ensino Médio: uma proposta de abordagem com o uso da ferramenta GeoGebraBook*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, 2021. Citado na página 19.

COUTINHO, M. W. *O Problema de Corte de Estoque e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, 2019. Citado na página 19.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. [S.l.]: Summus Editorial; 6ª edição, 1986. Citado na página 20.

DAROS, K. C. *Programação Linear e Algoritmo Simplex: uma proposta de abordagem no curso técnico em agropecuária*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2021. Citado na página 19.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. [S.l.]: Paz e Terra; 13ª edição, 1996. Citado na página 14.

FREITAS, E. C. de. *Programação Linear: da teoria à aplicação em sala de aula*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2022. Citado na página 18.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research, Vol. 9, No. 6, pp. 849-859*, 1961. Citado na página 42.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem - part ii. *Operations Research, Vol. 11, No. 6, pp. 863-888*, 1963. Citado na página 42.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Elsevier, 2005, 2.ed., 2005. Citado 3 vezes nas páginas 22, 28 e 46.

LEãO, V. B. A. S. G. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. *Educação Matemática em Revista, Rio Grande do Sul*, 2009. Citado na página 18.

LIMA, P. V. P. d. e. a. Brasil no pisa (2003-2018): reflexões no campo da matemática. *Tangram – Revista de Educação Matemática, Dourados - MS – v.3 n.2, pp. 03-26*, 2020. Citado na página 14.

LOPES, A. L. M. *Otimização Linear: conceitos e aplicação nas aulas de Matemática para o Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.

PINHO, A. P. B. de C. *Equações e inequações lineares: uma proposta para o Ensino Médio através de Problemas de Programação Linear e de um software livre.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadua Paulista, Rio Claro, SP, 2021. Citado na página 19.

POLDI, K. C. *Algumas extensões do problema de corte de estoque.* Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2003. Citado na página 43.

SILVA, L. F. da. *Programação linear e inteira no novo ensino médio: uma proposta de disciplinas eletivas.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2021. Citado na página 18.

STEWART, J. *Cálculo, volume 2.* [S.l.]: São Paulo : Cengage Learning, 2013. Citado na página 33.