UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO ALBERTO CAMARGO LACERDA

O TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS COMO FERRAMENTA DE MOTIVAÇÃO PARA UM GRUPO DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL II E ENSINO MÉDIO

MACAPÁ – AP

2024

FRANCISCO ALBERTO CAMARGO LACERDA

O TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS COMO FERRAMENTA DE MOTIVAÇÃO PARA UM GRUPO DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL II E ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá-UNIFAP,como pré-requisito à obtenção do grau de Mestre em Matemática. Linha de Pesquisa: Matemática da Educação Básica.
Orientador: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Coorientador: Prof. Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte.

MACAPA / AP

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Maria do Carmo Lma Marques – CRB-989

L131t Lacerda, Francisco Alberto Camargo.
O Teorema Chinês dos Restos como Ferramenta de Motivação para um Grupo de Estudantes do Ensino Fundamental II e Médio / Francisco Alberto Camargo Lacerda. - Macapá, 2024.
1 recurso eletrônico. 105 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT , Macapá, 2024.
Orientador: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.
Coorientador: Ítalo Bruno Mendes Duarte.

Modo de acesso: World Wide Web.
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Teorema Chinês dos Restos. 2. Minicurso. 3. Treinamento Olímpico. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Duarte, Ítalo Bruno Mendes, Coorientador. III. Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

CDD 23. ed. – 372. 7

LACERDA, Francisco Alberto Camargo . O Teorema Chinês dos Restos como Ferramenta de Motivação para um Grupo de Estudantes do Ensino Fundamental e Médio . Orientador: José Walter Cárdenas Sotil; Coorientador: Ítalo Bruno Mendes Duarte. 2024. 87 f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT . Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2024.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROFMAT

Francisco Alberto Camargo Lacerda

O Teorema Chinês dos Restos como Ferramenta de Motivação a um Grupo de Estudantes do Ensino Fundamental II e Médio da Escola Estadual Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva para suas Participações na OBMEP

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática – P|ROFMAT/UNIFAP, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho Aprovado, Macapá-AP, 22 de agosto de 2024

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil – Orientador
Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT/UNIFAP)

Profa. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal
Avaliação interna (PROFMAT/UNIFAP)

Prof. Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco
Avaliação interna (PROFMAT/UNIFAP)

Elivaldo S. Custódio

Prof. Dr. Elivaldo Serrão Custódio
Avaliação externa (UEAP)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pela vida, força e sabedoria concedidas durante essa jornada.

À minha amada esposa, Suellen, cujo amor, paciência e apoio incondicional foram fundamentais para a realização deste trabalho. Sua presença constante e encorajadora foi meu porto seguro nos momentos de dúvida e incerteza.

Ao meu colega de curso, Jonas, agradeço pela camaradagem, pelos debates enriquecedores e pela amizade que se fortaleceu ao longo deste percurso.

Ao meu orientador: Prof. Dr. José WalterCárdenas Sotil e coorientador, Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte, expresso minha profunda gratidão pela orientação precisa, pelo conhecimento compartilhado e pela paciência durante a elaboração deste trabalho. Sua dedicação e compromisso foram inspiradores.

Aos professores do PROFMAT da UNIFAP, agradeço pela dedicação, pelo apoio e pelo conhecimento transmitido. Mesmo em meio ao isolamento social imposto pela pandemia de COVID-19, vocês se adaptaram às circunstâncias e garantiram que nosso aprendizado não fosse comprometido.

Este trabalho é um testemunho do esforço coletivo e da resiliência diante dos desafios. A todos vocês, minha sincera gratidão.

RESUMO

Este estudo analisa os efeitos motivacionais que um minicurso — Treinamento Olímpico — sobre Aritmética Básica, com foco em problemas em que o Teorema Chinês dos Restos, garante a solução, pode causar em um grupo de estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio da Escola Estadual Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva em suas futuras participações na OBMEP. Para isso, foi realizada uma pesquisa de campo comos estudantes da escola que participaram do minicurso, que ocorreu em quatro encontros, aos sábados, na própria escola, de três horas e meia cada aula, e acompanhamento via WhatsApp durante o período. Os dados foram coletados por meio de questionários online, aplicados antes e depois do minicurso, que avaliaram o interesse, a confiança, a satisfação e a expectativa dos alunos em relação à Matemática e à OBMEP. Os resultados mostraram que o minicurso teve um efeito positivo na motivação dos estudantes, aumentando o seu interesse pela Matemática, a sua confiança em resolver problemas, a sua satisfação com o aprendizado e a sua expectativa de participar da olimpíada de matemática. Com base nos resultados positivos, foi sugerida a direção da escola, por meio de carta, a implantação de um curso preparatório permanente para a OBMEP na escola, que pudesse ampliar o conhecimento e a motivação dos estudantes pelo estudo da Matemática.

Palavras-chave: Teorema Chinês dos Restos; Minicurso; Treinamento Olímpico.

ABSTRACT

This study analyzes the motivational effects of a minicourse – "Olympic Training" – on Basic Arithmetic, focusing on problems where the Chinese Remainder Theorem guarantees a solution. It examines a group of students from both lower secondary and upper secondary education levels at Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva State School and their future participation in the OBMEP. Field research was conducted with students who participated in the minicourse, held in four sessions on Saturdays at the school itself, eachclass lasting three and a half hours, with additional support through WhatsApp throughout the period. Data were collected through online questionnaires administered before and after the minicourse, assessing students' interest, confidence, satisfaction, and expectations regarding Mathematics and the OBMEP. The results demonstrated that the minicourse had a positive effect on student motivation, increasing their interest in Mathematics, their confidence in problem-solving, their satisfaction with learning, and their expectation of participating in the mathematics olympiad. Based on these positive results, a letter was sent to the school administration suggesting the implementation of a permanent preparatory course for the OBMEP at the school, aiming to further enhance students' knowledge and motivation in studying Mathematics.

Keywords: Chinese Remains Theorem; Minicourse; Olympic Training.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números tem como base a Aritmética e o Teorema Chinês dos Restos (TCR) é um exemplo de conteúdo que faz conexão entre a Aritmética e a Álgebra. No primeiro século da nossa era, o matemático chinês Sun -Tsu propôs o seguinte problema. Qual é o número que deixa restos 2, 3 e 2 quando dividido por 3, 5 e 7? A resposta para esse problema foi 23. (Hefez, 2013, p. 253).

Lopes (2019, p. 37) destaca a importância da Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) no desenvolvimento de habilidades essenciais para o processo de ensino – aprendizagem, especialmente o pensamento crítico e a resolução de problemas.

> Os estudantes precisam encontrar a informação, analisar e sintetizar os dados disponíveis, desenvolver projetos para a solução de problemas e continuamente ajustar e avaliar esse projeto. Isto ajuda no desenvolvimento de qualidades essenciais como autonomia e autoconfiança. Quando o conhecimento é centrado em um projeto ou problema, os estudantes podem ver a relevância do que eles devem aprender, particularmente a importância do conhecimento básico que é integrado e requerido pelo processo de solução dos problemas.

Quando um problema desperta a atenção do estudante e este possui a base teórica para tentar resolvê-lo, sua autoconfiança aumenta. Mesmo que ele não consiga resolver a questão de imediato, com algumas orientações, ele é capaz de encontrar a solução.

Pólya (2006, p.4) faz a seguinte comparação,

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

A proposta dessa pesquisa é despertar o interesse, pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Publicas (OBMEP), de um grupo de estudantes do Ensino Fundamental II (EF II) e Ensino Médio (EM) através da resolução de problemas que TCR garante a solução. A escolha desse tema se baseia nas características que os problemas oferecem. Quando bem escolhidos, e reescritos com características atuais, comuns aos estudantes, podem despertar o interesse, a criatividade e a curiosidade matemática.

No portal da OBMEP (2022) podemos encontrar as informações.

> A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA e promovido com recursos do Ministério da Educação - MEC e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação - MCTI. Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais: Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil; Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; Promover a difusão da cultura matemática; Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas; Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas e privadas, contribuindo com a sua valorização profissional; Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; e Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento

As escolas amapaenses participam da OBMEP desde sua primeira edição, em 2005, e depois da análise dos resultados apresentados nas justificativas, desta pesquisa, chega-se à conclusão de que seus resultados não têm atingidos todos os objetivos da olimpíada.

Esteves (2014, p. 38) acrescenta,

> […] uma das abordagens que tentam explicar os resultados desfavoráveis encontrados supões que o ensino tradicional de Matemática em sala de aula possui algo "errado": ele não desperta o interesse dos alunos, de modo que atinjam níveis mais elevados de proficiência na disciplina , diferentemente no que ocorre nas competições

Nesse cenário um dos maiores desafios no processo de melhoria de resultados na OBMEP, por parte das escolas públicas, e consequentemente da aprendizagem de matemática, é o despertar do interesse dos alunos pelo estudo. Nesse sentido, a pesquisa pretende analisar os efeitos motivacionais que a resolução de problemas que o TCR garante podem causar em um grupo misto de alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio da Escola Estadual Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva (AMGS).

A metodologia a ser aplicada, será uma pesquisa – ação, dividido em três fases, da seguinte forma:

- A primeira fase compreende de uma avaliação diagnóstica de opiniões e conhecimentos empíricos dos participantes a respeito do tema e suas experiências com a OBMEP.

- A análise dos resultados da primeira fase e a oferta de um minicurso sobre tema será a segunda fase.

- A terceira fase será desenvolvida através de um questionário que avaliará os resultados do minicurso e as mudanças no que diz respeito a OBMEP e aos conhecimentos adquiridos.

Nesse sentido o trabalho traz no capítulo 1 uma proposta pedagógica que é justificada pela retrospectiva do Amapá, em particular, da Escola AMGS. Isto posto, faz-se necessário a implantação de cursos preparatórios para o Olimpíada de Matemática nas escolas do Amapá.

Já o capítulo 2 traz o conteúdo a ser utilizado como preparação dos alunos para o minicurso Treinamento Olímpico: Teorema Chinês dos Restos. Iniciamos esse capítulo com os números Naturais, suas operações de adição, multiplicação e divisibilidade. Destacamos também os números Inteiros e suas operações, vemos também Congruência Linear e finalizamos com o Teorema Chinês dos Restos. Todos material deste capítulo tem como referência Coutinho – 2010, Hefez – 2010, Hefez – 2013 e POTI – 2013.

No capítulo 3 traz a análise dos resultados obtidos com os questionários aplicados aos estudantes participantes do minicurso na Escola AMGS e as considerações.

2. PROPOSTA PEDAGÓGICA

Com o propósito de aprimorar o desempenho dos alunos em olimpíadas de matemática, especialmente na OBMEP, propõe-se a criação de um minicurso de treinamento com foco em Aritmética. O conteúdo programático abrangerá desde os fundamentos da Aritmética básica até tópicos mais avançados como Aritmética modular e o TCR. A metodologia adotada será a Aprendizagem Baseada em Problemas, com a resolução de questões desafiadoras e a exploração de diferentes abordagens para cada problema. Essa abordagem permitirá aos alunos desenvolver habilidades como o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de abstração, essenciais para o sucesso em competições matemáticas.

2. 1 Aprendizagem Significativa

Esta pesquisa tem como objetivo analisar a aplicação do Teorema Chinês dos Restos (TCR) e seus raciocínios associados na resolução de problemas, visando compreender como essa abordagem influencia a motivação de grupo de estudantes do EF II e EM da escola AMGS. Por meio da resolução de problemas, demonstraremos como esses raciocínios são utilizados para solucionar questões envolvendo congruências

A teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, será nossa guia neste processo. Ao relacionar os novos conhecimentos de aritmética com aqueles já adquiridos, garantiremos uma aprendizagem mais sólida e eficaz, fundamental para o sucesso na aplicação do TCR.

> Aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica. (Bomfim *apud* Moreira, 2011, p. 14).

A aquisição de conhecimento é um processo complexo, que vai além da simples memorização de informações. A forma como aprendemos influencia diretamente nossa capacidade de aplicar o conhecimento em diferentes contextos e ao longo da vida.

> A aprendizagem significativa é permanente e poderosa, enquanto a aprendizagem desvinculada de um contexto de significado é facilmente

> esquecida e não é facilmente aplicada em novas situações de aprendizagem ou solução de problemas. (Bomfim *apud* SOUZA, 2010).

2. 2 Problema de Pesquisa

A matemática da Educação Básica desenvolve um papel importante, fundamental e direto nos resultados das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Entre as áreas da matemática comuns estudadas no ensino fundamental e médio, como: Aritmética, Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Trigonometria, Porcentagem, Estatística e História da Matemática, temos o campo da Aritmética como um dos pilares para a solução de uma certa quantidade de problemas da OBMEP.

A prova nacional, tem sido hoje um dos parâmetros para estimular e promover o estudo da matemática, assim como um dos seus principais objetivos que é de contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica.

Desta forma, nesta pesquisa propõe-se evidenciar o uso de problemas que o TCR assegura a solução como fonte para desenvolver o interesse dos estudantes pelos assuntos da Aritmética e Álgebra na OBMEP. Pretendemos resolver tal problema: Como poderemos ajudar a melhorar a participação de um grupo de alunos em suas participações na Olimpíada de Matemática?

2. 3 Hipótese

Esperamos nessa pesquisa utilizarmos TCR como forma de desenvolver e despertar a curiosidade, a motivação, o interesse e um melhor desempenho de um grupo de estudantes do ensino básico para assuntos presentes na aritmética nas provas da OBMEP.

Buscamos com essa proposta, alcançar e obter estudantes mais interessados, bem como em outros conteúdos matemático, ter alunos medalhistas, premiados, com melhores resultados nas olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas e particulares do Amapá, a iniciar tais resultados na escola de ensino fundamental e médio do estado, Escola Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva, sendo o local de aplicação de nossa pesquisa.

Pretendemos com a utilização de materiais correlatos a aritmética, como o Programa de Iniciação Científica - PIC, A Revista do Professor de Matemática — RPM e outros diversos problemas criativos, curiosos e atrativos, construir e elaborar métodos, caminhos, meios para a construção do conhecimento, mostrando como os problemas que utilizam o *TCR* ajudam de maneira diversas na manutenção dos assuntos da aritmética e na produção estratégica para uma maior amplitude em tais conteúdos, assim como o fato de aprimorar e habilitar os alunos para um melhor raciocínio lógico.

Este trabalho visa apresentar resultados significativos e espera atingir os fins desejados quanto a uma melhora dos nossos discentes nos resultados das futuras provas da OBMEP, um melhor rendimento, dedicação e um desempenho crescente pela aritmética e a matemática, colaborando com futuros estudos referentes a temas semelhantes.

2. 4 Justificativa

Diante do retrospecto das escolas públicas amapaense em suas participações na OBMEP cada tentativa de melhoria de seus desempenhos é de grande valia. Sem políticas públicas estadual de incentivo a professores e alunos no que se refere às suas participações na OBMEP os resultados apresentados na tabela abaixo não poderiam ser diferentes.

A Tabela 1 traz a soma das premiações dos estados nortistas em suas participações na OBMEP nos de 2021,2022 e 2023 em âmbito nacional.

Tabela 1 - Premiação dos estados nortistas (2021 – 2023)

	Ouro	Prata	Bronze	Menção Honora	Total
Acre	2	8	134	462	606
Amapá	**0**	**4**	**135**	**157**	**296**
Amazonas	27	89	265	2528	2909
Pará	16	68	218	2368	2661
Rondônia	4	13	146	1045	1208
Roraima	0	7	142	303	452
Tocantins	5	22	160	1422	1609
Rondônia	4	13	146	1045	1208

Fonte: OBMEP em Números

Desde 2005, os dados indicam que o Amapá continua apresentando resultados menos significativos em âmbito nacional. Essa tendência de desempenho também se manifesta nos anos anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A tabela 2, apresenta os resultados das escolas do Amapá na OBMEP desde 2005. A escola AMGS tem uma tabela nas conclusões sobre o minicurso.

Tabela 2: Desempenho das escola amapaenses na OBMEP (2005 – 2023)

Ano	Ouro	Prata	Bronze	Menção Honrosa	Total
2023	0	3	12	100	115
2022	0	0	61	31	92
2021	0	1	62	26	89
2019	1	1	61	88	151
2018	0	2	61	49	112
2017	0	0	62	64	126
2016	0	0	60	30	90
2015	0	2	61	64	127
2014	0	1	60	35	96
2013	0	1	60	17	78
2012	0	0	15	16	31
2011	0	0	15	23	38
2010	0	0	15	24	39
2009	0	0	15	21	36
2008	0	1	15	26	42
2007	0	0	15	26	41
2006	0	15	15	24	54
2005	0	15	15	98	128

Fonte: OBMEP em Números

O OBMEP Notícias (2022). mostra que incentivos aos medalhistas são diversos,

> [..] alunos premiados pela OBMEP passam a ter acesso a um novo mundo, no que são incentivados a aprofundar os estudos. Convidados a participar do Programa de Iniciação Científica (PIC), os medalhistas comparecem às aulas de matemática em instituições de ensino superior da sua região e os estudantes de escolas públicas recebem auxílio financeiro mensal. Em casos de famílias de baixa renda, o auxílio cobre a mensalidade de internet da casa ou outros materiais de estudo.

Depois de dois anos sem atividades presenciais nas escolas devido ao isolamento social, necessário, por causa da pandemia de COVID-19 ainda estamos nos recuperando de tantas perdas.

Senhoras (2020, p. 25) acrescenta,

> […] com os estudantes em isolamento social, recomendado pela Organização Mundial de Saúde (OMS) e seguido pela maioria dos países membros, considerou-se a possibilidade de aulas remotas. Usar a internet como ferramenta para aprendizagem parecia ser a melhor alternativa. Entretanto, os próprios governos estaduais eprofissionais da educação foram surpreendidos com a constatação da precariedade em que vivem as famílias, sem recursos tecnológicos em casa, assim como moradias diminutas onde vivem muitas pessoas e que impossibilitam um ambiente próprio ao estudo.

Nesse cenário, a pesquisa traz: a resolução problemas que utilizam TCR para ajudar a despertar o interesse dos alunos do Ensino Fundamental II e Médio em suas futuras participações na OBMEP, como uma proposta metodológica que incentive os alunos da Escola Estadual Antônio Messias da Silva a estudar matemática e consequentemente melhore os desempenhos na OBMEP.

2. 5 Objetivo Geral

Analisar as influências motivacionais que problemas que o TCR garante solução juntamente com toda teoria de Aritmética e Álgebra necessária em suas resoluções, pode causar em um grupo de alunos do EF II e EM escola AMGS em suas futuras participaçõesna OBMEP.

2. 6 Objetivos Específicos

- Apresentar a teoria necessária para resolução dos problemas propostos.
- Analisar as técnicas de resolução de problemas que envolva aritmética e o TCR, através de uma lista de problemas, antes do contato dos alunos com o conteúdo a ser trabalhado.
- Explicar a importância da Aritmética e do TCR nas provas da OBMEP.
- Resolver problemas já utilizados na OBMEP que justifique a necessidade do aprendizado do conteúdo.
- Analisar os resultados das resoluções de problemas que envolvam o TCR depois dos conteúdos serem trabalhados.

- Entregar para a direção da Escola Estadual Antônio Messias Gonçalves da Silva uma carta com a proposta de criação de um curso preparatório voltado para OBMEP.

2. 7 Metodologia

A metodologia de pesquisa utilizada para a análise foi a pesquisa-ação que investigará um grupo de estudantes do Ensino Fundamental (EF) II e Ensino Médio (EM) da Escola AMGS, visando analisar o quanto a resolução de problemas, cujos TCR garante a solução, pode incentivar o interesse dos estudantes e, consequentemente, aprimorar seu desempenho em Aritmética e Álgebra na OBMEP.

A pesquisa-ação combina a ação prática com a investigação sistemática. Em outras palavras, é um processo no qual os pesquisadores se envolvem ativamente na transformação de uma situação, ao mesmo tempo em que investigam essa transformação. Essa abordagem é especialmente útil em contextos sociais, educacionais e organizacionais, onde se busca não apenas compreender um problema, mas também encontrar soluções práticas para ele.

> [...] um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (Thiollent *apud* Gil, 2007, p.55).

A pesquisa- ação é compreendida em quatro etapas;

> Diagnosticar a situação problema na prática; Formular estratégias de ação para resolver o problema; Pôr em prática e avaliar as estratégias da ação; O resultado pode levar a uma novo esclarecimento e diagnóstico da situação problemática, entrando assim num espiral de reflexão e de ação (Francischett *apud* Lewin, 2000, p. 167).

A seleção dos participantes foi realizada por meio de carta-convite entregue aos estudantes das turmas e assinada pelos responsáveis (Apêndice D). Foram autorizados 25 estudantes, distribuídos da seguinte forma.

Tabela 3: Distribuição dos estudantes por série e sexo.

	8° ano (EF)	9° ano (EF)	1ª série(EM)	2ª série (EM)	Total
Homem	2	5	4	4	15
Mulher	1	3	0	6	10
Total	3	8	4	10	25

Fonte: Do autor

A idade dos estudantes, público-alvo da pesquisa, varia entre 13 e 16 anos. Considerando que esta pesquisa de campo capacite esse grupo diversificado, ela pode atender e produzir efeitos positivos, interesse e estímulos em um universo maior de estudantes, proporcionando conhecimentos progressivos e aprimorados em Aritmética e Álgebra, consequentemente, superior desempenho em matemática e nas provas da OBMEP. Os estudantes participantes da OBMEP são divididos em 3 (três) níveis, de acordo com o grau de escolaridade em que estiverem matriculados, no momento da inscrição, conforme quadro abaixo:

Quadro 1 - Níveis de cada série na OBMEP

Nível	Grau de Escolaridade
1	6° ou 7° anos do Ensino Fundamental
2	8° ou 9° anos do Ensino Fundamental
3	Ensino Médio

Fonte: OBMEP

A proposta pedagógica da pesquisa é a realização de um minicurso intitulado Treinamento Olímpico: Teorema Chinês dos Restos, utilizando materiais do Programade Iniciação Científica Júnior – PIC – e diversos problemas da Revista do Professorde Matemática – RPM – outros variados problemas divertidos, curiosos, recreativos e lúdicos.

Na primeira fase faremos avaliações diagnósticas de opiniões e conhecimentos trazidos pelo nosso alunado, público-alvo dessa pesquisa, no decorrer de sua trajetória estudantil e em provas da OBMEP. Para tanto, faremos aplicação de questionários, com a finalidade de analisar as características dos nossos participantes, seu aprendizado, suas experiências e habilidades com assuntos da Aritmética.

Foto 1 - Material distribuído aos estudantes.

Fonte: Do autor

Para garantir a validade e a uniformidade dos resultados e controlar as variáveis, como a alimentação dos estudantes e minimizar possíveis influências externas que poderiam distorcer os dados. O pesquisador ofereceu todos os materiais necessários, incluindo alimentação, para ajudar a manter a adesão e assegurar que todos os estudantes tenham acesso às mesmas condições durante o experimento, promovendo a equidade e a integridade da pesquisa.

Foto 2 - Organização da sala de aula

Fonte: Do autor

A direção da escola, comprometida em ajudar, garantiu um ambiente espaçoso e adequadamente climatizado para a realização da pesquisa. Este cuidado foi fundamental para assegurar o conforto e a concentração dos estudantes e pesquisador, permitindo-lhes focar nas tarefas sem distrações causadas por condições físicas inadequadas.

Foto 3 - Primeiro aula - Professor Jonas Rodrigues e estudantes do minicurso.

Fonte : Do autor

Ao proporcionar este ambiente, a direção contribuiu para a manutenção dos equipamentos em perfeito estado de funcionamento, evitando falhas que poderiam comprometer a integridade dos dados coletados. Com esta infraestrutura bem planejada, a escola demonstrou seu apoio à integridade e confiabilidade da pesquisa, promovendo um espaço propício para a obtenção de resultados válidos e uniformes.

Na segunda fase, depois de ser avaliados os resultados e diagnósticos na fase anterior, realizaremos o minicurso, com intuito de auxiliar, incentivar e despertar o interesse desses discentes, construindo com eles um olhar diferenciado, ampliado e aperfeiçoado da Aritmética, na perspectiva de resultados mais relevantes nas Olimpíadas Brasileira de Matemática. No desenvolvimento dessa etapa, faremos uso de um apostilado com problemas que utilizam o TCR, vamos explanar, explicar tais problemas e posteriormente apreciar e examinar como esse grupo de estudantes desenvolvem suas soluções com o Teorema Chinês dos Restos e suas habilidades adquiridas e aperfeiçoadas na Aritmética.

Foto 4 - Aula 02: Professor Lacerda o e estudantes do minicurso.

Fonte: Do autor

Nessa foto os alunos estão resolvendo questões, Isso ajuda a identificar quais áreas precisam de mais foco e quais métodos de ensino são mais eficazes. Além disso, as respostas dos alunos fornecem dados valiosos sobre suas dificuldades e pontos fortes, permitindo ajustar o conteúdo do minicurso para atender melhor às suas necessidades.

Foto 5 - Aula 03 – Alunos em aula.

Fonte : Do autor

Além disso, resolver questões em um ambiente de pesquisa incentiva a prática ativa e o engajamento, o que é crucial para consolidar o aprendizado. Essa prática também oferece uma oportunidade para testar diferentes abordagens pedagógicas e ver como os alunos respondem a elas.

É comum que os alunos tenham muitas dúvidas quando estão estudando sozinhos, em casa, e essa falta de orientação provoca no estudante um desânimo que pode corroborar para o desinteresse pelos estudos. O Treinamento Olímpico contou com monitoramento de dois professores (Prof. Jonas Rodrigues e Prof. Alberto Lacerda) em sala de aula e um grupo no WhatsApp, onde os alunos poderão falar sobre suas dúvidas. E como é comum que vários alunos tenham a mesma dúvida elas serão anotadas pelo pesquisador e respondidas, em horário acordado entre alunos e pesquisador, através de vídeo conferência pela plataforma Google Meet.

Na terceira e última fase, utilizaremos um novo questionário abordando o que foi tralhado no minicurso: os problemas propostos, a nova visão de Aritmética a partir do que foi estudado e resolvido, a expectativa dos alunos na prova da OBMEP depois do que foi construído, as contribuições no estudo da Matemática, o que foi ou não relevante para os estudantes e os aspectos positivos com os estudos do TCR na vida dos educandos.

Foto 6 - Aula 04 Revisão - Professor Lacerda e estudantes do minicurso

Fonte : Do autor

Diante dos resultados coletados por meio dos questionários, do minicurso, e das avaliações feitas, isto é, do que foi desenvolvido e trabalhado em nossa pesquisa

- ação, iremos analisar o que foi acrescentado, ampliado e aprimorado nesse grupo de estudantes em estudo em relação aos conteúdos de aritmética; como ficou o interesse e a motivação pela matemática e na OBMEP; o ponto de vista dos estudantes na utilização do TRC como método de resolução de problemas nas Olimpíadas; diagnosticar os parâmetros positivos e negativos dentro do que foi analisado nos questionário pelo pesquisador. A proposta é atingir os objetivos, apresentando fundamentos e referências para alicerçar as hipóteses que nos levaram a desenvolver essa pesquisa.

3. O TREINAMENTO OLÍMPICO

Este capítulo apresenta os conteúdos ministrados em nossa proposta pedagógica: o minicurso intitulado "Treinamento Olímpico".

Começaremos com o conjunto dos Números Naturais. Na sequência, veremos os Números Inteiros e, por fim, a Aritmética Modular Básica. A primeira aula (Plano de aula 01 – Apêndice E) , cujos temas são: “Números Naturais e Números Inteiros", será dedicada à revisão, ampliação e aprofundamento dos conceitos e definições da aritmética de certos assuntos já conhecidos pelos estudantes.

No segundo momento do minicurso, aula 02 (Plano de aula 02 – Apêndice E), cujo tema é "Introdução às Congruências e Propriedades da Congruência Modular". Na terceira aula (Plano de aula 03 – Apêndice E), discutiremos "Congruências em Somas, Produto, Cancelamentos e o Teorema Chinês dos Restos". Vamos introduzir e ensinar as funcionalidades e os estudos do TCR. A aula 04 (Plano de aula 04 – Apêndice E) será dedicada a avaliações, com a aplicação de uma prova e um questionário avaliativo.

O minicurso terá uma carga horária de 4 aulas de 3,5 horas cada, totalizando 14 horas de ensino presencial, além das aulas presenciais, os estudantes serão acompanhados pelo aplicativo WhatsApp e Google Meet durante o período do minicurso, que funcionarão como “canais tira – dúvidas” dos estudantes.

3.1 Os Números Naturais

Hefez (2010) os números naturais são representados matematicamente como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, onde o conjunto começa a partir do número 1 e segue infinitamente em ordem crescente. Vejamos algumas de suas propriedades:

3.1.1 Propriedades dos Naturais

Hefez (2010) os números naturais possuem diversas propriedades, como a propriedade da adição e da multiplicação associativas e comutativas, a existência de identidade aditiva e multiplicativa, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição,entre outras.

Além disso, os números naturais são fechados sob as operações de adição e multiplicação, ou seja, a soma ou o produto de dois números naturais é sempre outro número natural. Conforme mencionado, os números naturais possuem várias propriedades.

Hefez (2010) traz algumas dessas propriedades descritas assim:

1. Associatividade de Adição: Para quaisquer três números naturais, digamos a, b e c, a soma de $(a + b) + c$ é igual a $a + (b + c)$. Em termos mais simples, a ordem em que somamos três números naturais não afeta a total.
2. Associatividade da Multiplicação: Da mesma forma, para quaisquer três números naturais a, b e c, o produto de $(a \times b) \times c$ é igual a $a \times (b \times c)$. A ordem de multiplicação não afeta o produto.
3. Comutatividade da adição: Para quaisquer dois números naturais, digamos a e b, a soma de $a + b$ é igual a $b + a$. Em termos simples, a ordem pela qual somamos dois números naturais não altera o total.
4. Comutatividade da Multiplicação: Da mesma forma, para quaisquer dois números naturais a e b, o produto de $a \times b$ é igual a $b \times a$. A ordem de multiplicação não afeta o produto.
5. Existência de Identidade Multiplicativa: Da mesma forma, os números naturais possuem um elemento de identidade denominado um (1), que serve como identidade multiplicativa. Para qualquer número natural $a, a \times 1$ é igual a a.
6. Propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição: Para quaisquer três números naturais a, b e c, o produto de $a \times (b + c)$ é igual a $(a \times b) + (a \times c)$. Em outras palavras, multiplicar um número pela soma de dois outros números é o mesmo que multiplicar o número individualmente por cada um dos outros dois números e depois somar os resultados.

3.1.2 Números Primos

De acordo com Hefez (2010, p. 31):

> Os números primos são números especiais que desempenham um papel fundamental na aritmética. Um número primo é definido como um número natural maior que 1 que possui apenas dois divisores: 1 e ele mesmo. Uma das característicasmais interessantes dos números primos é a sua capacidade de representar outros números naturais quando multiplicados entre si. Essa propriedade é conhecida comoo Teorema Fundamental da Aritmética. Essa

> decomposição em fatores primos permite entender a estrutura dos números e simplificar operações como o cálculo de divisores, determinação de múltiplos, simplificação de frações e outras aplicações aritméticas.

Exemplo 1.

a) O número 14 pode ser decomposto em fatores primos como 2×7.
b) O número 15 pode ser decomposto em fatores primos como 3×5.
c) O número 50 pode ser decomposto em fatores primos como $2 \times 5 \times 5$.

Portanto, os números primos desempenham um papel importante na aritmética ao permitir a representação dos números naturais por meio de suas multiplicidades únicas.

3.1.3 O crivo de Eratóstenes

Hefez (2010) um método muito antigo para se obter de modo sistemático números primos é o chamado Crivo de Eratóstenes, devido ao matemático grego Eratóstenes.

1. Lista-se todos os números naturais a partir de 2 até o limite desejado n.
2. Começando pelo número 2, que sabemos ser primo, marcamos todos os múltiplosdele como compostos. Ou seja, todos os números maiores que 2 que são divisíveis por 2 são considerados compostos.
3. Em seguida, avançamos para o próximo número não marcado, que será o próximoprimo. Nesse caso, é o número 3, pois o número 2 já foi identificado como primo. Marcamos todos os múltiplos de 3 como compostos.
4. Repetimos o passo anterior até chegarmos a um número maior que $\sqrt{n}$ Isso ocorre porque, se um número n fosse composto e tivesse um fator primo maior que $\sqrt{n}$, então esse fator teria um múltiplo menor do n, que já teria sido marcado como composto no crivo.
5. Ao final do processo, os números não marcados são considerados primos.

Exemplo 2 Usar o crivo de Eratóstenes para encontrar todos os números primos até 30:

1. Criamos uma lista de números de 2 a 30.
2. Começamos com o número 2 e marcamos todos os seus múltiplos como compostos: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.
3. Passamos para o próximo número não marcado, que é o 3, e marcamos os múltiplos de 3 como compostos: 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.
4. Continuamos com o número 5 e marcamos seus múltiplos como compostos: 10, 15,20, 25, 30.
5. Seguimos com o número 7 e marcamos seus múltiplos: 14, 21, 28.
6. Continuamos marcando os múltiplos dos números não marcados, mas quando chegamos ao número 11, percebemos que ele é maior que a raiz quadrada de 30 (aproximadamente 5,48), então não precisamos continuar.

Ao final do processo, os números não marcados são os primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,19, 23 e 29.

O crivo de Eratóstenes é um método eficiente para encontrar números primos em um intervalo específico, sendo usado até os dias de hoje como uma forma prática de gerar uma lista de primos.

Problema 1. Usando o Crivo de Eratóstenes. Determine os números primos menores que 250.

Para encontrar todos os números primos até 250 usando a Crivo de Eratóstenes, você pode seguir estes passos:

1. Crie uma lista de números de 2 a 250.
2. Inicialize uma variável, vamos chamá-la de "p", para o primeiro número primo, que é 2.
3. Começando em "p", marque todos os múltiplos de "p" como números não primos dentro da lista.
4. Encontre o próximo número na lista que seja maior que "p" e que não tenha sido marcado como não primo. Defina este número como o novo valor de "p".
5. Repita os passos 3 e 4 até que "p" ultrapasse a raiz quadrada de 250.
6. Todos os números que permanecerem sem marcação na lista são

númerosprimos.

Aqui está o resultado da aplicação do Crivo de Eratóstenes aos números naturais até 250:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151,157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241.

Tabela 4 - Primos menores que 250

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~
109	~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~	131	~~132~~
~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~	~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~
~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~	151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~
157	~~158~~	~~159~~	~~160~~	~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~
~~169~~	~~170~~	~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~	191	~~192~~
193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~	~~201~~	~~202~~	~~203~~	~~204~~
~~205~~	~~206~~	~~207~~	~~208~~	~~209~~	~~210~~	211	~~212~~	~~213~~	~~214~~	~~215~~	~~216~~
~~217~~	~~218~~	~~219~~	~~220~~	~~221~~	~~222~~	~~223~~	~~224~~	~~225~~	~~226~~	~~227~~	~~228~~
~~229~~	~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~	239	~~240~~
241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	~~247~~	~~248~~	~~249~~	~~250~~		

Fonte: Hefez (2010)

Hefez (2010) diz que a diferença mínima entre dois números primos consecutivos, a partir do número 5, é sempre 2 unidades.

Exemplo 3.

a) A diferença entre 3 e 5 é 2 (5 - 3 = 2).

b) A diferença entre 5 e 7 é 2 (7 - 5 = 2).

c) A diferença entre 11 e 13 é 2 (13 - 11 = 2).

Essa propriedade está relacionada ao fato de que todos os números pares maiores que 2 são compostos, já que são divisíveis por 2. Portanto, os números primos consecutivos, excluindo 2 e 3, devem ter uma diferença mínima de 2 unidades. Essa é uma característica interessante e útil no estudo dos números primos.

Dois primos consecutivos são chamados primos gêmeos se a diferença entre eles é igual a 2. Assim, consultando a tabela 2 encontramos os seguintes são pares de primos gêmeos: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59), (61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197), 199), (227, 229), (239, 241).

O que é surpreendente é que até o presente momento os matemáticos ainda não sabem dizer se os pares de primos gêmeos formam um conjunto finito ou infinito.

Três primos consecutivos, por exemplo (3, 5, 7), serão chamados primos trigêmeos se a diferença entre cada dois primos consecutivos da terna é 2. Os primos trigêmeos são uma generalização da conjectura dos primos gêmeos, que sugere que existem infinitos pares de primos consecutivos cuja diferença é 2. Esta conjectura continua a ser uma área ativa de pesquisa na teoria dos números, e os matemáticos estão continuamente explorando novas abordagens e técnicas para resolver essa questão fundamental.

3.1.4 Teorema Fundamental da Aritmética

Hefez (2010) diz que o Teorema Fundamental da Aritmética é um dos conceitos mais importantes e poderosos na teoria dos números, e sua compreensão é essencial para uma variedade de aplicações em matemática e em outras áreas.

O método do Crivo de Eratóstenes nos mostra que dado um número natural a, existe um número primo p_0 tal que ou $a = p_0$ ou a é um múltiplo não trivial de p_0; isto é, $a = p_0 \times a_1, com\ 1 < a_1 < a$.

Se a segunda possibilidade é verificada, segue que existe um número primo p_1 , tal que ou $a_1 = p_1, ou\, a_1 = p_1 \times a_2$, onde $1 < a_2 < a_1 < a$. Assim,

$a = p_0 \times p_1, ou\, a = p_0 \times p_1 \times p_2.$

Continuando a argumentação para a_2, temos $a = p_0 \times p_1 \times p_2$, ou $a = p_0 \times p_1 \times p_2 \times a_3$, para algum primo $p_2 \quad e\ 1 < a_3 < a_2 < a_1 < a.$

Note que desigualdades como a acima não podem continuar indefinidamente. Essa observação é fundamental, pois indica que o processo de fatoração em primos, conforme expresso pelo Teorema Fundamental da Aritmética, eventualmente chegará a um fim, ou seja, não é possível continuar decompondo um número em fatores primos menores indefinidamente. Eventualmente, o processo atingirá um ponto onde os fatores restantes não podem ser decompostos em números primos menores. Isso demonstra a unicidade da fatoração em primos para cada número inteiro maior que 1. Logo, para algum r, o número a_r é um primo p_r, obtendo desse modo uma decomposição de a em fatores primos: $a = p_1 \times p_2 \cdot \cdot \cdot \times p_r$.

Obtemos, assim, o seguinte resultado que se encontra no livro Os Elementos de Euclides.

Teorema 1. Teorema Fundamental da Aritmética**.**

Hefez (2010) dado um número natural a ≥ 2, existem números primos $p_1 < \cdots < p_r$ enúmeros naturais não nulos $n_1, \ldots, n_r$ tais que

$$a = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r};$$

além disso, essa escrita é única.

3.1.5 Critério de divisibilidade

Para saber se um número é divisível por outro, basta efetuar a divisão. Porem existem formas de saber se um número é divisível por outro sem precisar efetuar a divisão. Essas formas são os critérios de divisibilidade:

No Portal da OBMEP (2022) podemos encontrar:

- Divisibilidade por 2. Um número é divisível por 2 quando for par, ou seja, quando o algarismo das unidades for igual a 0, 2, 4, 6 ou 8.

- Divisibilidade por 3. Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for divisível por 3.
- Divisibilidade por 4. Um número é divisível por 4 quando:
    - Os dois últimos algarismos que o compõe for divisível por 4; ou
    - Os dois últimos algarismos que o compõe forem iguais a zero.
- Divisibilidade por 5. Um número é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.
- Divisibilidade por 6. Um número é divisível por 6 quando for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.
- Divisibilidade por 9. Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for divisível por 9.
- Divisibilidade por 10, 100, 1000. Um número é divisível por 10 quando termina em zero. É divisível por 100 quando termina em dois zeros, em 1000 quando termina em três zeros, assim por diante.

3.1.6 Decomposição em Fatores Primos

A decomposição em fatores primos é o processo de expressar um número inteiro como o produto de números primos. Cada número inteiro maior que 1 pode ser decomposto em fatores primos de uma maneira única, até a ordem dos fatores. Vejamos um exemplo: Decomponha em fatores primo o número 144.

Usando os critérios de divisibilidade, escolhe-se adequadamente e o primeiro número primo que deveremos usar para fazermos a divisão. Nesse exemplo temos um número par, isto é, divisível por 2 e que também é múltiplo de 3. É indiferente qual deles será usado primeiro.

1º) Da esquerda para direita divide-se o primeiro algarismo de 144 por 2 (ou 3). Nesse caso não é possível pois 2 não divide 1 (3 não divide 1). Nesse caso teremos de usar os dois algarismos da esquerda para direita, 14. Na divisão por 2 teremos o quociente 7 dezenas e resto 0 dezenas (na divisão por 3 teremos quociente 4 dezenas e resto 2 dezenas). O resto da divisão por 2 deve-se somar ao próximo algarismo, isto é, 0 dezenas + unidades = 4 unidades, que dividido por 2 dá um quociente igual a 2 unidades. Teremos agora 7 dezenas + 2 unidades = 72 unidades. (no caso de dividirmos 14 dezenas por 3, termos como quociente 4 dezenas e como resto 2 dezenas. Como fizemos na divisão por 2, deve-se somar este resto ao próximo algarismo do número, isto é, 2 dezenas + 4 unidades = 24 unidades, que dividido por 3 dá um quociente igual a 8 unidades. Teremos agora 4 dezenas + 8 unidades = 48 unidades.

2º) Agora temos 72 unidades na divisão por 2 e 48 unidades na divisão por 3. Do 3° ao 7° passos são idênticos ao 1°.

$$\begin{array}{llr|l}
1^{\circ} & 144 & 2 & \\
2^{\circ} & 72 & 2 & \\
3^{\circ} & 36 & 2 & \\
4^{\circ} & 18 & 2 & \to 144 = 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3 \\
5^{\circ} & 9 & 3 & \\
6^{\circ} & 3 & 3 & \\
7^{\circ} & 1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr|l}
1^{\circ} & 144 & 3 & \\
2^{\circ} & 48 & 3 & \\
3^{\circ} & 16 & 2 & \\
4^{\circ} & 8 & 2 & \to 144 = 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3 \\
5^{\circ} & 4 & 2 & \\
6^{\circ} & 2 & 2 & \\
7^{\circ} & 1 & &
\end{array}$$

Problema 2. Decomponha em produtos de primos os seguintes números: 4, 6, 8, 28, 36, 84, 320 e 2597.

3.2 Os Números Inteiros

Hefez (2010) dados dois números naturais $(a) e\ (b)$, o número $(b - a)$ só está definido quando $(b > a)$. Caso contrário como remediar esta situação? O jeito que os matemáticos encontraram para que seja sempre definido o número $(b - a)$ foi o de ampliar o conjunto dos números naturais $(\mathbb{N})$ formando um novo conjunto $(\mathbb{Z})$ chamado de conjunto dos números inteiros, cujos elementos são dados ordenadamente como segue

$$\cdots \to -3 \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$$

Os números à esquerda do zero são chamados de *números negativos* e os à direita são chamados de *números positivos*. Os pares de números 1 e −1, 2 e −2, 3 e −3 etc., são chamados de *números simétricos*. O elemento 0, que não é nem positivo, nem negativo, é o seu próprio simétrico.

Neste conjunto $\mathbb{Z}$ destacam-se os seguintes subconjuntos:

- Conjunto $\mathbb{Z}^*$ dos inteiros não nulos $(\neq 0)$

$\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z}; x \neq 0\} = \{\mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\}$

- Conjunto $\mathbb{Z}_+$ dos inteiros não negativos (≥ 0):

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 0\} = \{\, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

- Conjunto $\mathbb{Z}_-$ dos inteiros não positivos (≤ 0):

$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 0\} = \{0, -1, -2, -3, ..\}$

- Conjunto $\mathbb{Z}_+^*$ dos inteiros positivos (> 0):

$\mathbb{Z}_+^* = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

- Conjunto $\mathbb{Z}_-^*$ dos inteiros negativos (< 0):

$\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z}; x < 0\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$

Os inteiros positivos são também denominados inteiros naturais e por isso o conjunto dos inteiros positivos é habitualmente designado pela letra $\mathbb{N}(\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+^*)$.

3.2.1 Propriedade dos Inteiros

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros munido das operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\times)$ possui as propriedades fundamentais que a seguir enumeramos, onde $a, b\ e\ c$ são inteiros quaisquer, isto é, elementos de $\mathbb{Z}$:

1. Fechamento: A soma, subtração e multiplicação de dois números inteiros resultam em outro número inteiro. Por exemplo, a soma de dois inteiros sempre é um inteiro.
2. Associatividade e Comutatividade: As operações de adição e multiplicação são associativas e comutativas para números inteiros. Isso significa que a ordem em que os números são somados ou multiplicados não afeta o resultado.

Por exemplo, $((a + b) + c = a + (b + c))\ e\ (ab = ba)$.

3. Identidade aditiva e multiplicativa: O zero é o elemento identidade para a adição de números inteiros, e o um é o elemento identidade para a multiplicação de números inteiros. Isso significa que ($a + 0 = a$) e ($a \times 1 = a$) para todo inteiro (a).
4. Distributividade: A multiplicação é distributiva em relação à adição. Isso significa que $(a \times (b + c) = a \times b + a \times c)$ para todos os inteiros (a), (b) e (c).
5. Existência de inverso aditivo: Para cada inteiro (a), há um inteiro ($-a$) tal que $(a + (-a) = 0)$. Isso significa que cada número inteiro tem um inverso aditivo.
6. Existência de inverso multiplicativo (para os números inteiros não nulos): Se (a) e (b) são inteiros e ($ab = 1$), então (a) e (b) são inversos multiplicativos um do outro. Porém, nem todos os inteiros têm inversos multiplicativos. (o zero não possui).
7. Princípio da Indução: O Princípio da Indução é uma ferramenta fundamental na matemática para provar afirmações sobre números inteiros positivos. Ele afirma que se uma afirmação é verdadeira para ($n = 1$) e se ela é verdadeira para ($n = k$), então ela também é verdadeira para ($n = k + 1$). Essas são apenas algumas das propriedades dos números inteiros que são estudadas e aplicadas em diversos ramos da matemática e ciências.

As propriedades das relações de ordem entre os números inteiros são:

1. Lei da Tricotomia: Para todo número inteiro a diferente de zero, temos que ($a < 0$) ou ($a > 0$). Em outras palavras, todo número inteiro é negativo, zero ou positivo, e está em uma dessas categorias de acordo com sua relação de ordem.
2. Transitividade: Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$. Esta propriedade afirma que se um número inteiro é menor que outro, e este segundo número é menor que um terceiro número, então o primeiro número também é menor que o terceiro.
3. Adição de Constante em Ambos os Lados: Se ($a < b$), então ($a + c < b + c$). Adicionar a mesma constante aos dois lados de uma desigualdade preserva a ordem dos números.
4. Multiplicação por constante positiva em ambos os lados: Se ($a < b$) e ($c > 0$), então ($a \times c < b \times c$). Multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por uma constante positiva preserva a ordem dos números.
5. Multiplicação por constante negativa em ambos os lados: Se ($a < b$) e ($c < 0$), então ($b \times c < a \times c$). Multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por uma constante negativa inverte a ordem dos números.

Essas propriedades são essenciais para manipular desigualdades e compreender as relações de ordem entre os números inteiros. Elas são frequentemente usadas em provas matemáticas e na solução de problemas que envolvem comparação de números.

3.2.2 Múltiplos Inteiros de um Número

Para Hefez (2010), dado um inteiro a, consideremos o conjunto dos múltiplos inteiros de a:

$$a\mathbb{Z} = \{a \times d;\ d \in \mathbb{Z}\}.$$

Por exemplo 3ℤ = {0, 3, 6, 9, 12, ….}.

3.2.3 Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C)

Se $(a, b \in \mathbb{Z})$ são ambos não nulos, mesmo que não sejam ambos positivos, então o mínimo múltiplo comum de $a\ e\ b$ denotado por $mmc[a, b]$ é o menor múltiplo comum positivo; ou seja, o menor elemento positivo do conjunto

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}.$$

Exemplo 5. Qual o mmc de 4 e 6?

Múltiplos de 6	0	6	12	18	24	30	36	....
Múltiplos de 4	0	4	8	12	16	20	24	....

$$mmc[6,4] = 12$$

Observe que não faz sentido perguntar qual máximo múltiplo comum entre dois números, pois estes, assim como os números inteiro, são infinitos. Também não faz sentido considerar o zero como sendo o menor múltiplo comum entre dois números, já que o zero é múltiplo de qualquer número. Note que $mmc[a, b] > 0$, ou seja $mmc[a, b] \neq 0$ uma vez que estamos considerando somente múltiplos positivos.

Exemplo 6.

Maria e João estão fazendo exercícios em casa. Maria faz exercícios a cada 12 dias, e João faz exercícios a cada 18 dias. Se hoje ambos começaram a fazer exercícios no mesmo dia, em quantos dias eles farão exercícios no mesmo dia novamente?

Solução:

Hefez (2010) aqui, precisamos encontrar o mmc de 12 e 18, pois o mmc nos dará o menor múltiplo comum de ambos os números, representando o número de dias até que elesfaçam exercícios no mesmo dia novamente.

Fatoração em números primos:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

1. Escolha dos fatores primos comuns com os maiores expoentes. Os fatores primos comuns com maiores potências são: (2^2) e (3^2)
2. Multiplicação dos Fatores Primos Selecionados:

$$mmc(12{,}18) = 2^2 \times 3^2 = 36.$$

Portanto, Maria e João farão exercícios no mesmo dia novamente após 36 dias.

Esse é um exemplo simples de como o mmc pode ser aplicado para resolver problemas relacionados a intervalos de tempo ou eventos periódicos.

Problema 3. Três ciclistas percorrem um circuito saindo todos ao mesmo tempo, do mesmo ponto, e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40 s, o segundo em 36 s e o terceiro em 30 s. Com base nessas informações, depois de quanto tempo os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida pela primeira vez?

3.2.4 Máximo Divisor Comum (MDC)

Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e será denotado por $mdc(a,b)$.

Note que

$$mdc\ (a,b) = mdc\ (b,a).$$

O problema de determinar o mdc de dois números é bem simples quando os números são pequenos, pois neste caso podemos listar todos os divisores comuns desses números e escolher o maior deles, que será o $mdc(a,b)$.

Exemplo 7. Calcular $mdc(12, 18)$.

a) Determinamos os divisores de 12, que são:

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12;$

b) Determinamos os divisores de 18, que são:

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18.$

c) Tomando o maior divisor comum de 12 e 18 obtemos:

$mdc(12,18) = 6.$

Podemos utilizar a decomposição simultâneas, em fatores primos, para determinarmos mdc(12,18). Vejamos:

a) Fatoração em números primos:

12 = 2 × 2 × 3

18 = 2 × 3 × 3

$$\begin{array}{r|l} 12, 18 & 2 \leftarrow (2\ divide\ 12\ e\ 18) \\ 6, 9 & 2 \\ 3, 9 & 3 \leftarrow (3\ divide\ 3\ e\ 9) \\ 1, 3 & 3 \\ 1,1 & \end{array}$$

b) Escolha dos fatores primos.

Os fatores primos comuns que dividiram simultaneamente ambos os números são 2e 3.

c) Multiplicação dos fatores primos selecionados: $mdc(12,18) = 2 \times 3 = 6$. No entanto, quando um dos dois números for grande, esse método fica impraticável, pois achar os divisores de um número grande é muito complicado. O que fazer então? Euclides, três séculos antes de Cristo, nos dá uma solução para este problema descrevendo um algoritmo muito eficiente para fazer este cálculo. O Algoritmo de Euclides, como é conhecido o método por ele desenvolvido. O algoritmoé baseado no seguinte resultado:

Proposição 1. Um número d é divisor comum de a e b, não ambos nulos, se, e somente se, ele é um divisor comum de a e b – a.

Tomando o máximo divisor comum, obtemos a seguinte identidade: $mdc(a,b) = mdc(a,b - a)$, que permite ir reduzindo sucessivamente o cálculo do mdc de dois números cada vez menores.

Exemplo 8. Calcule o $mdc(3264,1234)$Vamos utilizar a proposição anterior.

$mdc(3264,1234) = mdc(1234,3264 - 1234) =$

$mdc(1234,2030) = mdc(1234,2030 - 1234) =$

$mdc(1234,796) = mdc(796,1234 - 796) =$

$mdc(796,438) = mdc(796 - 438,438) =$

$mdc(358,438) = mdc(358,438 - 358) =$

$mdc(358,80) = mdc(358 - 80,80) =$

$mdc(278,80) = mdc(198,80) =$

$mdc(118,80) = mdc(38,80) =$

$mdc(38,42) = mdc(38,4) =$

$mdc(34,4) = mdc(30,4) =$

$mdc(26,4) = mdc(22,4) =$

$mdc(18,4) = mdc(14,4) = mdc(10,4) = mdc(6,4) = 2$

As contas anteriores serão abreviadas de modo drástico com o algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc que iremos apresentar na seção 2.2.8 As propriedades do Máximo Divisor Comum são importantes em vários contextos dentro da matemática e em aplicações práticas. Hefez (2010), traz algumas elas:

a) Dois números inteiros a e b serão primos entre si, ou coprimos, se $(a,b) =$

1; ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é 1. Portanto, dois inteiros a e b, não ambos nulos, são primos entre si se os únicos divisores comuns de a e b são 1 e −1, o que equivale a dizer que $mdc(a, b) = 1$.

b) Dois números primos distintos são sempre primos entre si.

c) Dois números consecutivos são sempre primos entre si. De fato, podemos escrever os dois números na forma n e $n +$ 1, logo $mdc(n, n + 1) = mdc(n, n + 1 - n) = mdc(n, 1) = 1.$ (Hefez, 2010, p. 52)

3.2.5 Algoritmo de Euclides

Hefez (2010) diz que uma das propriedades mais importantes dos números naturais éa possibilidade de dividir um número por outro e expressar o resultado como um quociente e um resto. Essa é a chamada divisão euclidiana.

Teorema Sejam dados dois números naturais a e b, com $a > 0$ e b qualquer, existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que $b = aq + r$, *com* $0 \leq r < a$.

O número b é chamado dividendo, o número a divisor, os números q e r são chamados, respetivamente, quociente e resto da divisão de b por a.

Note que dados dois números naturais a e b, nem sempre b é múltiplo de a, este será o caso se, e somente se, *r* = 0.

Como determinar os números q e r na divisão euclidiana?

- Caso $b < a$. Como $b = 0. a + b$, temos que $q = 0\, e\, r = b$.
- Caso $b = a$. Neste caso, tomamos $q = 1$ e $r = 0$.
- Caso $b > a$. Podemos considerar a sequência:

$$\mathrm{b - a, b - 2a, \ldots, b - na,}$$

até encontrar um número natural q tal que $\mathrm{b - (q + 1)a < 0}$, com $b - qa \geq 0$. Assim, obtemos $\mathrm{b = qa + r}$, onde $\mathrm{r = b - qa}$ e, portanto, $0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{a}$.

Por exemplo, para dividir o número 54 por 13, determinamos os resultados da subtração de 54 pelos múltiplos de 13:

$54 - 1.13 = 41,$

$54 - 2.13 = 28,$

$54 - 3.13 = 15,$

$54 - 4.13 = 2,$

$54 - 5.13 = -11 < 0.$

Assim, a divisão euclidiana de 54 por 13 se expressa como:

$$54 = 4.13 + 2.$$

Problema 3**.** Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

a) de 43 por 3

b) de 43 por 5

c) de 233 por 4

d) de 1 453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

Problema 4**.** Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

a) de −43 por 3

b) de −43 por 5

c) de −233 por 4

d) de −1 453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

Hefez (2010) afirma que pelo Algoritmo da Divisão Euclidiana nos Inteiros, os restos da divisão de um número qualquer por a são os números $0, 1, \dots, a - 1$.

Por exemplo, os possíveis restos da divisão de um número inteiro por 2 são $r = 0$ ou $r = 1$. Se um dado número quando divido por 2 deixa resto $r = 0$, ele édivisível por 2, ou seja, ele é par. Se, ao contrário, esse número deixa resto 1 quando dividido por 2, ele é ímpar. Assim, um número é par se é da forma $2q$ e é ímpar se é da forma $2q + 1$, para algum inteiro q.

Problema 5**.** Mostre que de três inteiros consecutivos um e apenas um deles é múltiplo de 3.

Solução*:* Suponha que os três inteiros consecutivos sejam $a, a + 1 \; e \; a + 2$. Temos as seguintes possibilidades: *a* deixa resto $0, 1 \; ou \; 2$ quando dividido por 3.

1. Suponha que *a* deixe resto 0 quando dividido por 3, ou seja,

$a = 3q.\ Logo,$
$a + 1 = 3q + 1\ e$
$a + 2 = 3q + 2.$

Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de 3, a saber, a.

2. Suponha que a deixe resto 1 quando dividido por 3, ou seja,

$a = 3q + 1. Logo,$
$a + 1 = 3q + 2\ e$
$a + 2 = 3q + 3 = 3(q + 1).$

Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de $3, a\ saber,\ a + 2$.

3. Suponha que a deixe resto 2 quando dividido por 3, ou seja,

$a = 3q + 2. Logo,$
$a + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1) e$
$a + 2 = 3q + 4 = 3(q + 1) + 1.$

Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de $3, a\ saber, a + 1$.

Problema 6. Mostre que dados três números $\mathrm{a},\ \mathrm{a} + 2$ e $\mathrm{a} + 4$, um e apenas um deles é múltiplo de 3. Usando este fato, mostre quea única terna de primos trigêmeos é (3, 5, 7).

3.2.6 Par ou Ímpar?

Vamos aprender a lidar com os restos de divisões de números inteiros por um número natural específico, introduzindo uma nova forma de cálculo chamada aritmética modular ou aritmética dos restos. Este conceito simplificado nos ajudará a entender melhor como os restos se comportam em diferentes divisões.

Segundo Hefez (2010, p. 58):

- A soma de dois números pares é par. De fato, os dois números podem ser escritos na forma $2a$ e $2b$, cuja soma é $2(a + b)$, logo par.
- A soma de dois números ímpares é par. De fato, os números são da forma $2a + 1$ e $2b + 1$, cuja soma é $2(a + b + 1)$, logo par.
- A soma de um número par com um número ímpar é ímpar. De fato, um dos números é da forma $2a$ e o outro $2b + 1$, cuja soma é $2(a + b) + 1$, logo ímpar.

A paridade, isto é, a qualidade de ser par ou ímpar, da soma de dois números só depende da paridade de cada um dos números e não dos números em si.

- O produto de dois números pares é par. De fato, os números sendo da forma $2a$ e $2b$, temos que o seu produto é $4ab$ e, portanto, múltiplo de 4, logo par.
- O produto de um número par por um número ímpar é par. De fato, um número da forma $2a$ e um número da forma $2b + 1$ têm um produto igual a $2a(2b + 1)$, que é par.
- O produto de dois números ímpares é ímpar. De fato, sendo os números da forma $2a + 1$ *e* $2b + 1$, o seu produto é $2(2ab + a + b) + 1$, logo ímpar.

Novamente, como no caso da soma, temos que a paridade do produto de dois números só depende da paridade desses números e não dos números em si.

Hefez (2010) diz que podemos decidir a paridade de uma expressão complexa envolvendo produtos e somas de inteiros do modo a seguir.

Atribuindo o símbolo $\bar{0}$ aos números pares e o símbolo $\bar{1}$ aos números ímpares, as observações acima nos fornecem as seguintes tabelas que reagem a paridade das somas e dos produtos dos números inteiros.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Por exemplo, se quisermos saber a paridade do número $20^{10} \times 11^{200} + 21^{19}$ não será necessário desenvolver as contas indicadas para saber se o resultado é par ou ímpar. O que fazemos é substituir na expressão acima o número 20 por $\bar{0}$, por ser par; e os números 11 e 21 por $\overline{1}$ por serem ímpares. Obtemos, assim, a expressão $\overline{0}^{10} \times \overline{1}^{200} + \overline{1}^{19}$ que operada segundo a tabela acima nos da $\overline{1}$ como resultado. Portanto, o número é ímpar. (Hefez, 2010, p. 58)

3.2.7 Zero, um ou dois?

Hefez (2010, p. 61) analisa a aritmética dos restos da divisão por 3 na tabela 5

Tabela 5: Múltiplos inteiros de 3

⋮	⋮	⋮
-9	-8	-7
-6	-5	-4
-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
⋮	⋮	⋮
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Fonte: Hefez (2010)

Note que os números da primeira coluna são os múltiplos de 3, ou seja, os números que deixam resto nulo quando divididos por 3. Os números da segunda e da terceira coluna são, respetivamente, aqueles que deixam resto 1 e 2 quando divididos por 3.

Fazendo uma análise, nota-se que o resto da divisão por 3 da soma ou do produto de dois números só depende da coluna ocupada por esses números, ou seja, só depende dos restos da divisão desses números por 3 e não dos números em si.

Hefez (2010, p. 62) atribui o símbolo $\overline{0}$ aos números da primeira coluna (que são os múltiplos de 3) e os símbolos $\overline{1}$ e $\overline{2}$, respetivamente, aos números que ocupam a segunda e terceira coluna (que são os números que deixam restos 1 e 2, quando divididos por 3), obtemos o Quadro 2 que regem os restos da divisão por 3 das somas e produtos números naturais.

Quadro 2 – Restos na divisão por 3 das somas e produtos de naturais

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Fonte: Hefez (2010)

Problema 7. Usando as tabelas acima, ache o resto da divisão por 3 do número $4^{100} + 32^{30}$.

3.2.8 Algoritmo do MDC de Euclides.

O Lema de Euclides: Dados inteiros a e b, os divisores comuns de a e b são os mesmos que os divisores comuns de a e $b - c.a$, para todo número inteiro c fixado.

Demonstração. Hefez (2010, p. 66) se d é um divisor comum de a e b, é claro que d é divisor comum de a e de $b - c\,.\,a$. Reciprocamente, suponha que d seja divisor comum de a e de $b - c\,.\,a$. Logo, d é divisor comum de $b - c\,.\,a$ e de $c.\,a$ e, portanto, d é divisor de b. Assim, d é divisor comum de a e b.■

O Lema de Euclides nos diz que os divisores de comuns de a e b são os mesmos divisores comuns de a e $b - a.c$, logo tomando o maior divisor comum em ambos os casos, obtemos a fórmula:

$$mdc(a,b) = mdc(a, b - a.c),$$

o que permite ir diminuindo passo a passo a complexidade do problema, até torná-lo trivial.

Nada melhor do que um exemplo para entender o método. Vamos calcular $mdc(a, b), onde\ a = 162\ e\ b = 372.$

Pelo Lema de Euclides, sabemos que o mdc de $a\ e\ b$ é o mesmo que o de a e o de b menos um múltiplo qualquer de a. Otimizamos os cálculos ao tomarmos o menor dos números da forma b menos um múltiplo de a e isto é realizado pelo algoritmo da divisão.

$$372 = 162.2 + 48$$

Assim, $mdc(372, 162) = mdc(372 - 162.2, 162) = mdc(48,162)$. Apliquemos o mesmo argumento ao par $a_1 = 48\ e\ b_1 = 162$: $162 = 48.3 + 18$.

$mdc(372, 162) = mdc(162, 48) = mdc(162 - 48.3, 48) = mdc(18,48)$

Apliquemos novamente o mesmo argumento ao par $a_2 = 18$ e $b_2 = 48$:

$48 = 18.2 + 12$

Assim, $mdc(372, 162) = mdc(48, 18) = mdc(48 - 18.2, 18) = mdc(12,18)$. Novamente, o mesmo argumento para o par $a_3 = 18\ e\ b_3 = 12$, nos dá:

$$18 = 12.1 + 6$$

Assim, $mdc(372, 162) = mdc(18,12) = mdc(18 - 12.1, 12) = mdc(6,12)$. Finalmente, obtemos $mdc(372, 162) = mdc(12,6) = mdc(12 - 6.2, 6) = mdc(0,6) = 6$. Logo, $mdc(372, 162) = 6$.

O procedimento acima pode ser sistematizado como segue:

quociente→	**2**	**3**	**2**	**1**	**2**
372	162	48	18	12	mdc = 6
resto →	48	18	12	6	0

quociente→	**2**	**3**	**2**	**1**	**2**
372	162	48	18	12	6
Resto →	48	18	12	6	0

O Algoritmo de Euclides usado de trás para frente nos dá uma informação adicional fundamental.

$$372 = 2.162 + 48$$

$$162 = 3.48 + 18$$

$$48 = 2.18 + 12$$
$$18 = 1.12 + 6$$

Pondo em evidência os restos.

$$48 = 372 - \ 2.162$$
$$18 = 162 - \ 3.48$$
$$12 = 48 - 2.18$$
$$6 = 18 - 1.12$$

Onde,

$$6 = 18 - 1.(48 - 2.18)$$
$$6 = 18 - 1.48 + 2.18 = 3 \times 18 - 1.48$$
$$6 = 3.(162 - \ 3.48) - 1.48 = 3.162 - 9.48 - 1.48 = 3.162 - 10.48$$
$$6 = 3.162 - 10.(372 - \ 2.162) = 3.162 - 10.372 + 20.162$$
$$6 = 162.23 - 372.10$$

Assim, podemos escrever: $6 = mdc(372{,}162) = 162.23 + 372.(-10)$. Este método sempre se aplica conduzindo ao seguinte importante resultado:

Teorema**.** (Relação de Bézout)**.** Hefez (2010, p.70) dados inteiros a e b, quaisquer, mas não ambos nulos, existem dois inteiros n e m tais que $mdc(a, b) = \ a.n \ + \ b.m$.

Exemplo 12: Encontrar m e n inteiros tais que 60m + 42n = 6.

Quocientes	1	2	3
60	42	18	6
Restos	18	6	0

mdc(60,42) = 6.

Onde,

$18 = 60 - 42 \times 1$

$6 = 42 - 18 \times 2,$ substituindo $18 = 60 - 42 \times 1$

$6 \ = \ 42 \ - \ 2 \ \times \ (60 \ - \ 42 \ \times \ 1) = \ 42 \ - \ 2 \ \times \ 60 \ + \ 2 \ \times = \ \ 60 \ \times \ (-2) + \ 42 \ \times \ (3).$

$6 \ = \ 60 \ \times \ (-2) + \ 42 \ \times \ (3).$

Comparando com a equação original uma solução é $m = -2 \ e \ n = 3$. (Souza, 2014)

3.3 A Aritmética dos Restos: Congruências

Agora vamos explorar a brilhante ideia de Gauss apresentada em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1811. Essa ideia envolve a criação de uma aritmética baseada nos restos das divisões por um número determinado.

Souza (2014) faz o seguinte questionamento:

Em algum momento você já se deparou com uma igualdade do tipo

$$\text{“}7 + 6 = 1\text{”}\,?$$

Em que contexto uma igualdade como essa faz sentido? Sua resposta pode ser um relógio. Onde

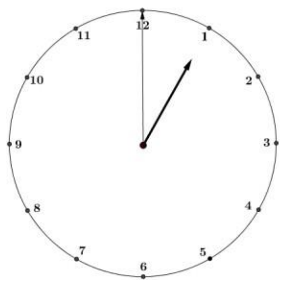


Figura 1 OBMEP

Esse relógio servirá como base para um modelo que começaremos a discutir a Aritmética dos Restos.

Existem pessoas que preferem se referir a esse horário como treze horas (13h). Portanto 13h equivale a 1h da tarde e a partir daqui começaremos a representar essa equivalência assim $13 \ \equiv \ 1$ (lê-se: 13 é congruente a 1). Esses valores não são iguais, eles são congruentes.

Não esqueça que estamos fazendo essa equivalência em um relógio que está dividido em doze parte. Então é imediato que pensemos

$$14 \ \equiv \ 2$$

$$15 \ \equiv \ 3$$

$$20 \ \equiv \ 8$$

Como o relógio está dividido em doze partes faz se necessário que essa informação esteja bem clara para que seja entendida por outras pessoas. Porque veremos em seguida que nem sempre este relógio, que vamos usar em aritmética dos restos, será dividido em 12 partes.

Então, para ficar claro em quantas partes dividimos o relógio escreveremos assim:

13 $\equiv$ 1 (mod 12) (lê-se; treze é congruente a 1 módulo 12).

15 $\equiv$ 3 (mod 12) (lê-se; quinze é congruente a 3 módulo 12).

20 $\equiv$ 8 (mod 12) (lê-se; vinte é congruente a 8 módulo 12).

Como dissemos anteriormente, o relógio nem sempre será dividido em 12 partes. Nesse próximo exemplo usaremos um relógio dividido em 4 partes. Veja.

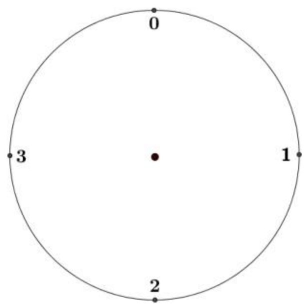


Figura 2 - OBMEP

Usando a numeração 0, 1, 2 e 3, ou seja, ao dividir o relógio em quatro partes, estes números correspondem aos possíveis restos numa divisão por quatro. Como é que funcionara aqui? Vamos tomar, por exemplo o 6.

$$6 \equiv 2 \pmod 4 \; e \; 10 \equiv 2 \pmod 4$$

como o seis e o dez são congruentes a 2 módulo quatro, diremos então que os dois números pertencem a mesma classe de equivalência, e isso significa que tanto o seis quanto o dez, quando divididos por quatro, deixam o mesmo resto.

$$6 = 4.\overbrace{1}^{quociente} + \overbrace{2}^{resto} \quad \text{e} \quad 10 = 4.\overbrace{2}^{quociente} + \overbrace{2}^{resto}.$$

Então o seis e o dez são congruentes a 2 módulo quatro, $10 \equiv 6 \equiv 2 \; (mod\; 4)$, eles pertencem a mesma classe de equivalência. Isto é,

- a classe daqueles números que deixam resto zero, na divisão por quatro.
- a classe daqueles números que deixam resto um, na divisão por quatro.
- a classe daqueles números que deixam resto dois, na divisão por quatro.
- a classe daqueles números que deixam resto três, na divisão por quatro.

Agora vamos definir matematicamente o que é congruência.

Definição 1. Congruência

Souza (2014) diz que para $n > 1$ um número inteiro. Diz-se que a e b (também inteiros) são congruentes módulo n se a e b deixam o mesmo resto quando divididos por n e escreve-se $a \equiv b \ (mod\ n)$.

Retornando ao nosso problema inicial, podemos notar que: $7 + 6 = 13$ e $13 \equiv 1 \ (mod\ 12)$. Vamos escrever que $7 + 6 \equiv 1 \ (mod\ 12)$. Isto remete a uma propriedade interessante que o modelo do relógio com a aritmética dos restos nos permitirá; que é a possibilidade de podermos somar e continuar trabalhando com esses restos.

Quando a relação $a \equiv b \ (mod\ n), n > 1$, for falsa, diremos que a e b não são congruentes módulo n. Escreveremos, nesse caso $a \not\equiv b \ (mod\ n)$.

Para verificar se dois números são congruentes módulo n, não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por n para depois comparar os restos. É suficiente aplicar o seguinte resultado.

Proposição 2**.** Suponha $a, b, n \in \mathbb{Z}$, com n > 1.
Tem-se que

$$\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \ (\mathrm{mod\ n}) \Leftrightarrow \mathrm{n\ divide\ b} - \mathrm{a}.$$

A demonstração pode ser encontrada em Hefez (2010, p. 82)

3.3.1 Propriedades da Congruência Modular

A congruência modular satisfaz algumas propriedades que a tornam muito semelhante à igualdade usual.

Segundo Hefez (2010, p. 110) de acordo com a definição, é imediato que a congruência em relação a um número inteiro fixo n estabelece uma relação de equivalência. Vamos enunciar isto explicitamente abaixo.

Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$. Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que:

- reflexiva todo número é congruente módulo n a si próprio,
- simétrica se $a \equiv b(mod\ n)$, então $b \equiv a(mod\ n)$,
- transitiva se $a \equiv b(modn)$ e $b \equiv c\ (mod\ n)$ então $a \equiv c(mod\ n)$;onde n é um inteiro positivo.

As demonstrações podem ser vistas em Coutinho (2010, p 48)

Exemplo 13: Verifique se 107 é congruente a 93 módulo 5.

Podemos usar o cálculo direto:

a) Primeiro, subtraímos 93 de 107: $[107 - 93 = 14]$.

b) Agora, verificamos se o resultado (14) é divisível por 5: Como 14 não é divisível por 5, e o resto dessa divisão é 4.

c) Portanto, podemos escrever: $[107 \not\equiv 93\ (mod\ 5)]$. Pois $107 \equiv 2\ (mod\ 5)$ e $93 \equiv 3\ (mod\ 5)$.

Problema 9**.** Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

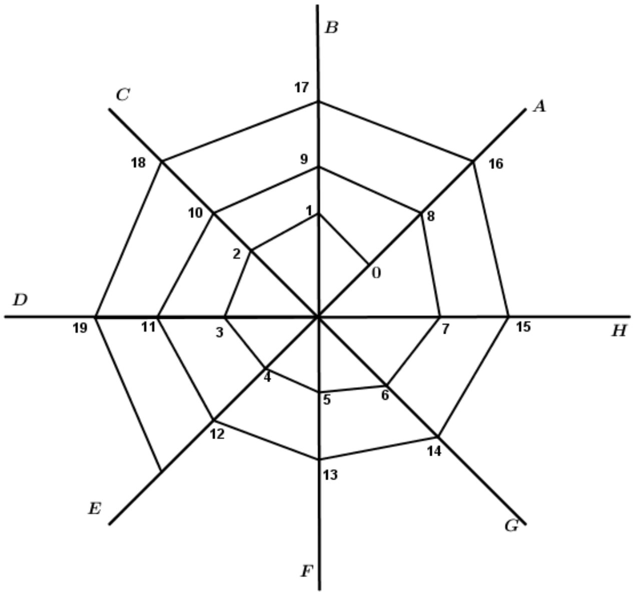
a) $35 \equiv 27\ (mod\ 4)$.

b) $72 \equiv 32\ (mod\ 5)$.

c) $83 \equiv 72\ (mod\ 5)$.

d) 78 ≡ 33 $(mod$ 9).

Problema 10. (OBMEP). Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H são fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme a figura.



Fonte: OBMEP

De cordo com a figura, em qual fio estará o número 118?

Segue-se, da definição de congruência módulo n e das propriedades já vistas, o seguinte fato: Todo número inteiro a é congruente módulo n a um e somente um dos números $0, 1, \ldots , n - 1$.

De fato, os possíveis restos da divisão de a por n são precisamente osnúmeros $0, 1, \ldots, n - 1$, cujos restos da divisão por n são eles próprios, logo dois a dois não congruentesmódulo n.

As congruências possuem propriedades operatórias notáveis que exploraremos a seguir.

3.3.2 Congruências e Somas

Proposição 3. Sejam a_1, a_2, b_1, b_2 inteiros quaisquer e seja n um inteiro maior do que 1. Se $a_1 \equiv b_1 (mod\, n)$ e $a_2 \equiv b_2 (mod\, n)$, então $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2\ (mod\, n)$. Hefez (2010, p. 85)

3.3.3 Congruência e produto

Proposição.4. Sejam a_1, a_2, b_1, b_2 inteiros quaisquer e seja $n > 1$. Se $a_1 \equiv b_1 \ (mod\, n)$ e $a_2 \equiv b_2 \ (mod\, n)$, então $a_1 . a_2 \equiv b_1 . b_2 (mod\, n)$ Hefez (2010, p. 87).

Hefez (2010, p. 88) conclui que as congruências de mesmo módulo multiplicam-se membro a membro tal qual as igualdades.

Segundo Coutinho (2010, p. 61):

Proposição 5. *Se* $a \equiv a' \ (mod\, n)$ *e* $b \equiv b' \ (mod\, n)$*,* então*:*

- $a + b \equiv a' + b' \ (mod\, n)$*;*
- $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \ (mod\, n)$*.*

Em particular,

- $a^k \equiv (a')^k \ (mod\, n)$*, para qualquer* k ≥ 0*.*

3.3.4 Cancelamento

Souza (2014) propõe que antes de falarmos de cancelamento em aritmética modular, vamos resolver o seguinte problema:

$$2x = 6.$$

Resolver essa equação do primeiro grau consiste em determinar o valor de x que ao ser multiplicado por 2 o resultado é 6. É obvio que todos sabem a resposta. Mesmo assim, seguimos resolvendo o problema assim:

$$2x = 2.3.$$

Tendo feito essa transformação de 6 em 2.3, podemos cancelar o 2 de ambos os membros da igualdade.

$$\cancel{2}x = \cancel{2}.3 \Rightarrow x = 3$$

Vamos agora resolver um problema de congruência parecido com o anterior.

$$2x \equiv 6 \ (mod\ 8)$$

Aplicando a mesma regra do problema anterior teremos:

$$\cancel{2}x \equiv \cancel{2} \times 3 (mod\ 8)$$

onde

$$x \equiv 3 \ \ (mod\ 8).$$

Note que, de fato, $x = 3$, pois

$$2.3 = 6 \equiv 6 \pmod{8}.$$

O problema aqui, que não aconteceu no exemplo anterior, é que nós temos outra solução que o nosso método deixou escapar. Essa outra solução é $x = 7$. Pois $2.7 = 14 \equiv 6\ (mod\ 8)$

Teorema. Se $a.g \equiv f.g(modn)$ e se o $mdc(g,n) = h$, então $a \equiv f\left(mod \frac{n}{h}\right)$.

Corolário. Se $a.g \equiv f.g(modn)$e se o $mdc(g,n) = 1$, então $a \equiv f(modn)$. As duas demonstrações podem ser vistas em (Hefez, p. 196, 2013)

3.3.5 Inversos Modulares

Coutinho (2010) diremos que $a\ e\ a'$ são inversos módulo n se $a \cdot a' \equiv 1(modn)$. Neste caso, também dizemos que a' é $o\ inverso\ de\ a\ módulo\ n$, e vice-versa. Na tabela a seguir listamos cada um dos *resíduos* distintos possíveis de inteiros módulo 11, indicando o *resíduo* do seu despectivo inverso. Note que 0 não pode ter inverso módulo n não importa que valor n assuma, já que

$$0 \cdot b \equiv 0(modn)$$

qualquer que seja $b \in \mathbb{Z}$. Por isso sequer listamos zero entre os resíduos na tabela

Quadro 3 - Resíduos módulo 11

Resíduo	**Inverso Módulo 11**
1	**1**
2	**6**
3	**4**
4	**3**
5	**9**
6	**2**
7	**8**
8	**7**
9	**5**
10	**10**

Fonte: Hefez (2010)

Você pode estar se perguntando como os inversos nesta tabela foram obtidos. Embora exista uma maneira sistemática de calcular inversos módulo n, ela é trabalhosa demais para valer à pena aplicá-la quando o módulo n é um número pequeno. Por isso, os inversos na tabela foram determinados por tentativa. Em outras palavras, para achar o inverso de 2 módulo 11, multiplicamos 2 pelos inteiros de 2 em diante. Veja o quadro 4 dos inversos modulo 11.

Quadro 4

	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{\mathbf{6}}$	$\overline{\mathbf{7}}$	$\overline{\mathbf{8}}$	$\overline{\mathbf{9}}$	$\overline{\mathbf{10}}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	2	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Fonte: Souza (2014)

3.3.6 Aplicações

Iniciemos com o problema:

Exemplo 15. (Equação Diofantina Linear) – De quantos modos podemos comprar selos de cinco e de sete reais, de modo a gastar cinquenta reais?

$$5x + 7y = 50$$

onde x representa a quantidade de selos $R\$\ 5{,}00$ e y representa a quantidade de selos de $R\$\ 7{,}00$. Portanto $x\ e\ y$ não podem ser números negativos, pois não temos uma quantidade negativa de selos. É bem fácil de verificar que temos uma solução particular quando $x = 10\ e\ y = 0$, mas isso não resolve o nosso problema, pois precisamos encontrar todas as maneiras para resolver esse problema.

Iremos resolver esse problema usando a técnica que estamos estudando, que é a aritmética modular. Para tanto iremos reescrever esta expressão, pensando em módulo 5.

- $5x \equiv \bar{0}\bar{x}$, pois o 5 corresponde a classe $\bar{0}$, isto é, o 5 na divisão pelo próprio 5 deixa resto 0. E o x, que não conhecemos, fica representado pela sua própria classe $\bar{x}$.
- $7y \equiv \bar{2}\bar{y}$, pois o 7 corresponde a classe $\bar{2}$, isto é, o 7 quando dividido por 5, deixa resto 2. E o y, que não conhecemos, fica representado pela sua própria classe $\bar{y}$.
- $50 \equiv \bar{0}$, pois 50 corresponde a classe $\bar{0}$, isto é, o 50 na divisão por 5 deixa resto 0.

Então a expressão equivalente a $5x + 7y = 50$ fica assim:

$$\bar{0}\bar{x} + \bar{2}\bar{y} \equiv \bar{0} \quad (mod\ 5)$$

ou

$$\bar{2}\bar{y} \equiv \bar{0}\ (mod\ 5)$$

ou ainda

$y = 5t,$ para qualquer t inteiro.

Substituindo $y = 5t$ em $5x + 7y = 50$ encontraremos $x = 10 - 7t$.

Quadro 5

t	$y = 5t$	$x = 10 - 7t$
-1	-5	17
0	0	10
1	5	3
2	10	-4

Fonte: Souza (2014)

O problema original se transformou em um novo problema. Qual a classe, módulo 5, que ao ser multiplicada por números da classe $\bar{2}$ darão resultados todos, na classe $\bar{0}$?

Para descobrirmos a resposta para este problema, iremos construir um quadro 6 multiplicativo das classes módulo 5.

Antes de mais, perceba que só temos, em vermelho, nas linhas e colunas os números 0, 1, 2, 3 e 4. Isto acontece, pois o que está por trás da aritmética modular são propriedades que estudamos, na revisão teórica, relacionadas às propriedades dos restos.

Quadro 6

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Fonte: Souza (2014)

Como estamos trabalhando com $(mod5)$, e como na divisão por 5 temos apenas estes restos, somente eles aparecem na tabela. (Souza, 2014)

A tabela é construída assim:

- Os zeros em verde são os produtos de cada elemento das linhas pelas colunas ou vice-versa $0.0 = 0, 0.1 = 0, 0.2 = 0, 0.3 = 0, 0.4 = 0$.
- Quando multiplicamos

$$\begin{gathered} 2.3 = 3.2 = 6, \\ 3.4 = 4.3 = 12, \\ 3.3 = 9 \ \ e \\ 4.4 = 16 \end{gathered}$$

esses números deveriam aparecer na tabela, mas não aparecem, isto acontece pelo fato de estarmos trabalhando com classes de equivalências de aritmética modular, ou seja, a classe dos restos. É só lembrarmos que

$6 \equiv 1 \ (mod\ 5)$, isto é, o 6 deixa resto 1 quando dividido por 5.

$9 \equiv 4 \ (mod\ 5)$, isto é, o 9 deixa resto 4 quando dividido por 5.

$12 \equiv 2 \ (mod\ 5)$, isto é, o 12 deixa resto 2 quando dividido por 5.

$16 \equiv 1 \ \ (mod\ 5)$, isto é, o 16 deixa resto 1 quando dividido por 5.

Voltando ao nosso problema:

Qual a classe módulo 5, que ao ser multiplicada pela classe $\bar{2}$, dá resultado na classe $\bar{0}$?

Observando a quadro 7.

Quadro 7

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Fonte: Souza (2014)

Na classe $\bar{2}$, tanto faz olhar na coluna ou na linha, o único lugar onde o resultado do produto é $\bar{0}$ é quando multiplicamos o $\bar{2}$ por $\bar{0}$.

Conclusão: A classe que estamos procurando é a classe do $\bar{0}$.

$$\bar{2}\bar{y} \equiv \bar{0}(mod 5)$$

ou seja,

$\bar{y} \equiv \bar{0}(mod 5)$ ou ainda $y = 5t$, qualquer que seja t inteiro.

isto quer dizer que o y tem de assumir qualquer valor que, ao ser dividido por 5, deixe resto 0, ou seja, algum número que seja múltiplo de 5.

Souza (2014) conclui que:

$$y = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$$

acontece que o enunciado problema nos impõe uma limitação: que é o fato de que y representa uma quantidade de selos de $R\$$ 7,00. Então, nenhuma solução negativa é permitida para este problema.

Agora vamos resolver o mesmo problema usando o $mod\ 7$.

$5x + 7y = 50$

$\bar{5}\bar{x} + \bar{0}\bar{y} \equiv \bar{1} \quad (mod\ 7)$

$\bar{5}\bar{x} \equiv \bar{1} \quad (mod\ 7),$

fazendo uso do quadro 8, chegaremos em:

Quadro 8

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$

Fonte: Souza (2014)

$$\bar{x} \equiv \bar{3} \quad (mod\ 7).$$

Portanto $x = 7t + 3$, onde t é um natural qualquer.

Uma estratégia bem conveniente para encontrarmos o inverso multiplicativo é assim:

$\bar{5}\bar{x} \equiv \bar{1} \quad (mod\ 7)$ pela definição de congruência $5x - 1 = 7t$ que podemos reescrever assim

$$5x = 1 + 7t.$$

Agora é só atribuir valores para t = 1, 2,…

t	x
1	$\notin \mathbb{N}$
2	$\frac{15}{5} = 3$

Temos então $x = 3$ como o inverso multiplicativo de $5\ módulo\ 7$, portanto $x \equiv 3(mod\ 7)$ que como já vimos podemos escrever como a igualdade $x = 3 + 7t$. substituindo esse resultado na equação inicial, teremos:

$$5(7t + 3) + 7y = 50$$

$$35t + 15 + 7y = 50$$
$$35t + 7y = 35(\div 7)$$
$$y = 5 - 5t$$

Quadro 9

t	$x = 3 + 7t$	$y = 5 - 5t$
-1	-4	10
0	3	5
1	10	0
2	17	-5

Fonte: Do autor

Problema 16. Em um cesto, há uma quantidade N de ovos. Se os ovos forem agrupados de 3 em 3, sobram 2. Se os ovos forem agrupados de 4 em 4, sobra 1. Quantos ovos pode haver no cesto?

Iremos resolver esse problema usando aritmética modular. Pelo enunciado temos o sistema de congruências.

$$\begin{cases} N = 2\ (mod\ 3) \\ N = 1(mod 4) \end{cases}$$

Usando congruência podemos escrever a primeira informação do enunciado do problema assim

$$N \equiv 2 \quad (mod\ 3) \tag{1}$$

ou usando igualdade

$$N = 3a + 2, \quad a \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Já a segunda parte do enunciado fica escrita assim

$$N \equiv 1(mod\ 4) \tag{3}$$

substituindo (2) em (3), teremos

$$3a + 2 \equiv 1\ (mod\ 4)$$

somando -2 em ambos os membros teremos

$$3a \equiv -1\ (mod\ 4)$$

como $-1 \equiv 3\ \ (mod\ 4)$ podemos reescrever a congruência assim

$$3a \equiv 3(mod\ 4)$$

$$\bar{9}\bar{a} \equiv \bar{9} \quad (mod\ 4)$$

portanto

$$a \equiv 1 \quad (mod\ 4)$$

e escrevendo essa última congruência como uma igualdade, teremos:

$$a = 4b + 1, \quad b \in \mathbb{N} \qquad (4)$$

substituindo $(4)\ em\ (2)$, teremos:

$$N = 3a + 2 = 3(4b + 1) + 2 \Rightarrow N = 12b + 5,$$

ou ainda

$$N \equiv 5 \ \ (mod\ 12).$$

Observe que começamos com uma congruência módulo 3, a outra foi módulo 4 e a resposta é uma congruência módulo 12, que é o produto de 3 e 4. Isto não aconteceu por coincidência. Há uma explicação para isso que veremos em breve Souza (2014)

Exemplo 17. Um general possui 2000 soldados para uma batalha. Terminando o confronto, ele precisou verificar as suas baixas. Então mandou que os soldados formassem filas alinhados de 7 em 7 e sobraram 5 soldados. Em seguida, ordenou que os soldados fossem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 4. Por fim, fez com que os soldados fossem alinhados de 10 em 10 e sobrou apenas 1. Quantos soldados, morreram em combate se há mais de 1500 indivíduos na formatura?

O sistema de congruência é assim escrito:

$$\begin{cases} N \equiv 5 \quad (mod\ 7) \\ N \equiv 4 \quad (mod\ 9) \\ N \equiv 1 \quad (mod\ 10) \end{cases}$$

Por termos mais equações vamos escrever cada equação em uma coluna na tabela abaixo:

Nós iremos substituir as informações de cada equação em outra até chegarmos a uma única que reúna as informações das três equações do sistema.

Quadro 10 – Resolução usando Congruência e equações.

$N \equiv 5 \quad (mod\ 7)$	$N \equiv 4 \quad (mod\ 9)$	$N \equiv 1 \quad (mod\ 10)$
$N = 7a + 5, (1) a \in \mathbb{N}$ $N = 7\underbrace{(9b+5)}_{(2)} + 5$ $N = 63b + 40 (3)$ $N = 63\underbrace{(10c+7)}_{(4)} + 40$ $N = 630c + 481$	$\underbrace{7a+5}_{(1)} \equiv 4(mod 9)$ $7a \equiv -1 \ (mod\ 9)$ $7a \equiv 8 \ (mod\ 9)$ $7.4a \equiv 4.8 \ (mod\ 9)$ $28a \equiv 32 \ (mod\ 9)$ $a \equiv 5 \ (mod\ 9)$ $a = 9b + 5, (2) b \in \mathbb{N}$	$\underbrace{63b+40}_{(3)} \equiv 1(mod 10)$ $3b \equiv 1 \ (mod\ 10)$ $7.3b \equiv 7.1 \ (mod\ 10)$ $21b \equiv 7 \ (mod 10)$ $b = 7(mod 10)$ $b = 10c + 7, (4) c \in \mathbb{N}$

Fonte: Coutinho (2010)

Depois de todas as substituições temos $N = 481 + 630c$ ou ainda $N \equiv 481(mod\ 630)$ que reúne as informações das três congruências do sistema inicial

Atribuindo valores para $c \in \mathbb{N}$, teremos:

c	0	1	2	3
$N = 630c + 481$	481	1111	1741	2371

Como $1500 < N < 2000$, então morreram em combate $2000 - 1741 = 259$ soldados.

3.4 O Teorema Chinês do Resto

Coutinho (2010) o procedimento de substituição que utilizamos anteriormente para resolver sistemas de congruências é conhecido como algoritmo chinês do rest***o***, porque um dos primeiros lugares em que apareceu foi no livro *Manual de aritmética do mestre Sun*, escrito entre 287 d.C. e 473 d.C. Entretanto, o mesmo resultado é mencionado na *Aritmética* de Nicômaco de Gerasa, escrita por volta de 100 d.C.

O teorema desta seção apenas sistematiza o resultado do método utilizado nos problemas anteriores.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \ (mod\ m), \\ x \equiv b \ (mod\ n), \end{cases}$$

onde m e n são inteiros positivos distintos e digamos que o número inteiro x_0 é uma solução desta congruência. Isto quer dizer que x_0 satisfaz a ambas as congruências:

$$\begin{cases} x_0 \equiv a \ (mod\ m), \\ x_0 \equiv b \ (mod\ n). \end{cases}$$

Como os módulos são diferentes, só podemos combinar as duas congruências se convertermos uma delas em uma igualdade de inteiros. Fazendo isto com a primeira equação, verificamos que

$x_0 = a + m.k,$ onde k é um inteiro qualquer,

de forma que podemos concluir que

$$a + m.k \equiv b(mod\ n),$$

ou ainda

$$m.k \equiv (b - a)(mod\ n).$$

Supondo que m e n sejam primos entre si, concluímos pelo corolário 1 que m é inversível módulo n. Digamos que m' é o inverso de $m\ módulo\ n$.

Multiplicando

$$m.k \equiv (b - a)(mod\ n).$$

por m'. Obtemos:

$$k \equiv m'.(b-a)\ (mod\ n).$$

Em outras palavras, $k = m'.(b-a) + n.t$ para algum inteiro t. Substituindo esta expressão em

$$x_0 = a + m.k$$

vemos que

$$x_0 = a + m.(m'.(b-a) + n.t)$$

Resumindo, provamos que se x_0 é uma solução do sistema

$$\begin{cases} x \equiv a\ (mod\ m), \\ x \equiv b\ (mod\ n), \end{cases}$$

então

$$x_0 = a + m.(m'.(b-a) + n.t).$$

É fácil ver que, qualquer que seja o inteiro t, uma expressão da forma $a + m(m'(b-a) + n \cdot t)$ tem de ser solução do sistema inicial. Para começo de conversa, $a + m(m'(b-a) + n \cdot t)$ é claramente congruente a $a\ módulo\ m$. Por outro lado, $a + m \cdot (m' \cdot (b-a) + n \cdot t) \equiv a + m \cdot m' \cdot (b-a)(mod\ n)$. Como $mm' \equiv 1(modn)$ por construção, então:

$$a + m \cdot (m' \cdot (b-a) + n \cdot t) \equiv a + 1 \cdot (b-a) \equiv b(mod\ n);$$

comprovando que $a + m \cdot (m' \cdot (b-a) + n \cdot t)$ é mesmo uma solução do sistema

$$\begin{cases} x \equiv a\ (mod\ m), \\ x \equiv b\ (mod\ n). \end{cases}$$

3.4.1 Teorema Chinês do Resto

Coutinho (2010) sejam m e n inteiros positivos primos entre si. Se a e b são inteiros quaisquer, então o sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \ (mod\ m), \\ x \equiv b \ (mod\ n). \end{cases}$$

sempre tem solução e qualquer uma de suas soluções pode ser escritana forma

$a + m \cdot (m' \cdot (b - a) + n \cdot t)$. Onde t é um inteiro qualquer e m' é o inverso de $m\ módulo\ n$.

Exemplo 18. Resolva o problema 16 usando a solução apresentada pelo teorema anterior.

A seguir apresentaremos um algoritmo e sua generalização que será utilizada na demonstração do Teorema Chinês do Resto.

Iremos montar um quadro 10 e, para isso, consideraremos o preenchimento da seguinte maneira:

1. Na 1ª coluna, escreveremos as equações dada no problema;
2. Na 2ª coluna, usaremos $\boldsymbol{E}$ para os valores dos restos de cada equação.
3. Na 3ª coluna, usaremos $\boldsymbol{N}$, o produto de todos os n_i com exceção do módulo no qual a linha está presente. Assim, para cada linha, teremos $\boldsymbol{N_i} = \frac{\boldsymbol{N}}{n_i}$;
4. Na 4ª coluna, usaremos $\overline{N}$ e escreveremos a classe de equivalência que o $\boldsymbol{N_i}$ está associadocom $\boldsymbol{n_i}$;
5. Na 5ª coluna, usaremos $(\overline{\boldsymbol{N}})^{-1}$ a classe inversa de cada elemento da coluna $\overline{N}$, sempre respeitando o módulo referente a cada linha, ou seja, é o elemento que multiplicado com $\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{i}}$ deixa resto $1(mod n_1)$;
6. Na 6ª coluna, usaremos $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{1}$ colocamos o produto dos elementos de cada linha, com exceção do $\overline{\boldsymbol{N}}$ que ele está na tabela para poder facilitar encontrar o valor do $(\overline{\boldsymbol{N}})^{-1}$.

Nosso quadro 11 ficará assim construída:

Quadro *11*

	$\boldsymbol{E}$	N	$\overline{\boldsymbol{N}}$	$(\overline{\boldsymbol{N}})^{-1}$	$\boldsymbol{E.N.(\overline{N})^{-1}}$
$\boldsymbol{y = E_1(mod n_1)}$	$\boldsymbol{E_1}$	$\boldsymbol{N_1}$	$\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{1}}$	$(\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{1}})^{-1}$	$\boldsymbol{E_1.N_1.(\overline{N}_1)^{-1}}$
$\boldsymbol{y = E_2(mod n_2)}$	$\boldsymbol{E_2}$	$\boldsymbol{N_2}$	$\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{2}}$	$(\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{2}})^{-1}$	$\boldsymbol{E_2.N_2.(\overline{N}_2)^{-1}}$
$\boldsymbol{y = E_3(mod n_3)}$	$\boldsymbol{E_3}$	$\boldsymbol{N_3}$	$\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{3}}$	$(\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{3}})^{-1}$	$\boldsymbol{E_3.N_3.(\overline{N}_3)^{-1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{y = E_t(mod n_t)}$	$\boldsymbol{E_t}$	$\boldsymbol{N_t}$	$\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{t}}$	$(\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{t}})^{-1}$	$\boldsymbol{E_t.N_t.(\overline{N}_t)^{-1}}$

Fonte: Glória (2019)

Desse modo, temos que uma solução do sistema de congruência é dada pelo algoritmo da seguinte maneira: (Gloria, p. 42, 2019)

$$y = E_1.N_1.(\overline{N}_1)^{-1} + E_2.N_2.(\overline{N}_2)^{-1} + E_3.N_3.(\overline{N}_3)^{-1} + \cdots + E_t.N_t.(\overline{N}_t)^{-1}$$

Onde:

$$N_1 = n_2.n_3.\dots\ .n_t$$

$$N_2 = n_1.n_3.\dots\ .n_t$$

$$N_3 = n_1.n_2.\dots\ .n_t$$

$$\vdots$$

$$N_t = n_1.n_2.\dots\ .n_{t-1}$$

Que tal usarmos o algoritmo para resolvermos o problema 16?

$$\begin{cases} y \equiv 5 \quad (mod\ 7) \\ y \equiv 4 \quad (mod\ 9) \\ y \equiv 1 \quad (mod\ 10) \end{cases}$$

Quadro 12

	E	N	$\overline{N}$	$(\overline{N})^{-1}$	$E.N.(\overline{N})^{-1}$
$y \equiv 5 \quad (mod\ 7)$	$E_1 = 5$	$N_1 = 90$	$\overline{N}_1 = 6$	$(\overline{N}_1)^{-1} = 6$	2700
$y \equiv 4 \quad (mod\ 9)$	4	70	7	4	1120
$y \equiv 1 \quad (mod\ 10)$	1	63	3	7	441

Fonte: Do autor

Seja $y \equiv E_i(mod n_i)$

$E_1 = 5,$

$E_2 = 4,$

$E_3 = 1.$

$N_1 = n_2 \,.\, n_3 = 9.10 = 90,$

$N_2 = n_1 \,.\, n_3 = 7.10 = 70,$

$N_3 = n_1 \,.\, n_2 = 7.9 = 63.$

$N_i \equiv \overline{N}_\iota(mod n_i)$

$90 \ \equiv \overline{N}_1\ (mod\ 7)\ \therefore\ \overline{N}_1 = 6,$

$70 \ \equiv \overline{N}_1\ (mod\ 9)\ \therefore\ \overline{N}_1 = 7,$

$63 \equiv \overline{N}_1\ (mod\ 10)\ \therefore\ \overline{N}_1 = 3,$

$\overline{N}_i.(\overline{N}_i)^{-1} = 1(mod\, n_i)$

$6(\overline{N}_1)^{-1} \equiv 1\ (mod\, 7) \therefore\ (\overline{N}_1)^{-1} = 6,$

$7(\overline{N}_1)^{-1} \equiv 1\ (mod\, 9) \therefore\ (\overline{N}_1)^{-1} = 4,$

$3(\overline{N}_1)^{-1} \equiv 1\ (mod\, 10) \therefore\ (\overline{N}_1)^{-1} = 7.$

$E_1.N_1.(\overline{N}_1)^{-1} =\ 5.90.6 = 2700,$

$E_2.N_2.(\overline{N}_2)^{-1} =\ 4.70.4 = 1120,$

$E_3.N_3.(\overline{N}_3)^{-1} =\ 1.63.7 = 441.$

$$y = 2700 + 1120 + 441 \equiv 180 + 490 - 189(mod\ 630) \equiv 481(mod630)$$

3.4.2 Problemas Propostos durante as aulas do minicurso

Problema 1- Uma senhora transportava um cesto de ovos. Assustada por um cavalo que galopava perto dela deixa cair o cesto e todos os ovos se partem. Quando lhe perguntaram quantos ovos tivera o cesto, respondeu dizendo que é muito fraca em aritmética, mas lembra-se de ter contado os ovos de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de cinco em cinco, e tivera sobra de 1, 2, 3, e 4 ovos, respectivamente. Ache a menor quantidade de ovos que o cesto inicialmente poderia ter.

Problema 2- Um macaco, ao subir uma escada de dois em dois degraus, deixa de sobra um degrau, ao subir de três em três degraus, sobram dois degraus; e ao subir de cinco em cinco degraus, sobram três degraus. Quantos degraus possui a escada, sabendo que o número de degraus está entre 150 e 200?

Problema 3- Três fazendeiros cultivavam juntos todo o seu arroz e o dividiam igualmente entre si no tempo da colheita. Um certo ano, cada um deles foi a um mercado diferente vender o seu arroz. Cada um destes mercados só comprava arroz em múltiplos de um peso padrão, que diferia em cada um dos mercados. O primeiro fazendeiro vendeu seu arroz em um mercado onde o peso padrão era de 87 kg, ele vendeu tudo que podia e voltou para casa com 38 kg de arroz. O segundo fazendeiro vendeu todo o arroz que podia em um mercado cujo peso padrão era de 170 kg e voltou para casa com 58 kg de arroz. O terceiro fazendeiro vendeu todo o arroz que podia em um mercado cujo peso padrão era de 143 kg e voltou (ao mesmo tempo que os outros dois) com 40 kg. Qual a quantidade mínima de arroz que eles podiam ter cultivado, no total?

Problema 4- (Antigo problema chinês). Um bando de 17 piratas, ao tentar dividir entre si, igualmente, as moedas de ouro de uma arca, verifica que 3 moedas sobrariam. Na discussão que se seguiu um dos piratas foi morto; na nova tentativa de divisão, já com um pirata a menos, desta feita 10 moedas sobrariam. Novo quiproquó e mais um pirata é morto. Mas agora, por fim, é possível dividir igualmente a fortuna entre eles. Qual o menor número de moedas que a arca poderia conter?

Problema 5- Ao formar grupos de trabalho numa turma o professor verificou que, tomando grupos com 3 componentes sobrariam 2 alunos, com 4 componentes sobraria 1 aluno e que conseguia formar grupos com 5 componentes, sem sobras, desde que ele próprio participasse de um dos grupos. Sabendo que a turma tem menos de 50 alunos, quais são as possíveis quantidades de alunos nessa turma?

Problema 6- Dispomos de uma quantia em reais maior que 1000 e menor que 2000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra 1 real; se distribuirmos entre 10 pessoas, sobram 2 reais e se distribuirmos entre 9 pessoas sobram 4 reais. De quantos reais dispomos?

Problema 7- Três satélites passarão sobre Macapá esta noite. O primeiro à 1 hora da madrugada, o segundo às 4 horas e o terceiro às 8 horas da manhã. Cada satélite tem um período diferente. O primeiro leva 13 horas para completar uma volta em torno da Terra, o segundo 15 horas e o terceiro 19 horas. Determine quantas horas decorrerão, a partir da meia- noite, até que os três satélites passem ao mesmo tempo sobre nosso estado.

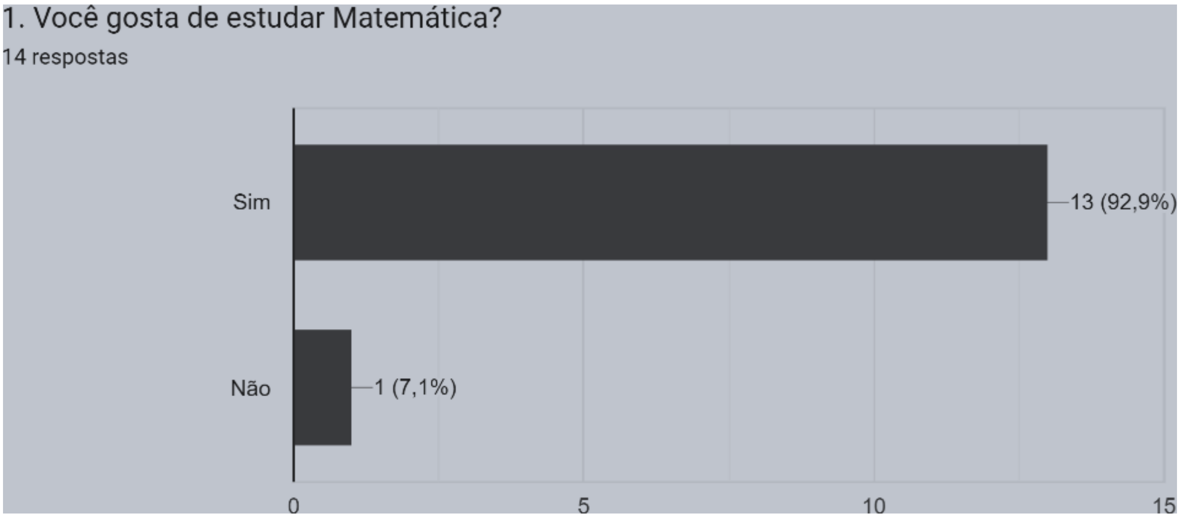
4. LEVANTAMENTO DE DADOS E ANÁLISES

Neste capítulo apresentaremos o levantamento de alguns dados referentes ao questionário feito com os estudantes no decorrer do minicurso. O diagnóstico realizado tem foco na relação do estudante com a OBMEP e assuntos correlatos ao seu envolvimento e comprometimento com Matemática e seus conteúdos. A enquete visa ainda ampliar, para nós aplicadores, o conhecimento dos nossos discentes e suas realidades com o programa federal na Escola Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva, assim como, busca avaliar, aprimorar e promover com relevância os resultados para o nosso ensino e desenvolvimento dos nossos estudos.

4.1 Análise do questionário aplicado antes do minicurso.

Nesse momento apontaremos algumas questões importantes que comentaremos do decorrer dos dados indicados pelos estudantes.

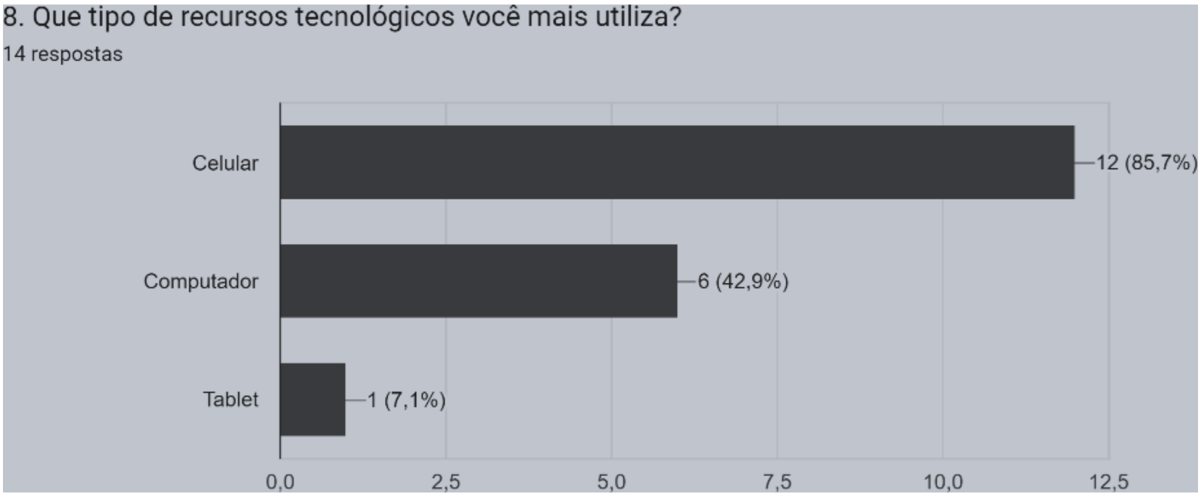
Figura 3



Fonte: Do autor.

Quando os educandos foram questionados quanto ao gosto pela Matemática, dos 14 alunos que responderam o questionário, apenas 1 aluno (7,1%) não mostra gosto pela matemática, enquanto 13 alunos (92,9%) demonstram interesse, gosto pelo estudo da matemática. A quantidade que alunos que apresentaram predisposição no estudo da matemática reforça e facilita a construção dos nossos objetivos no minicurso.

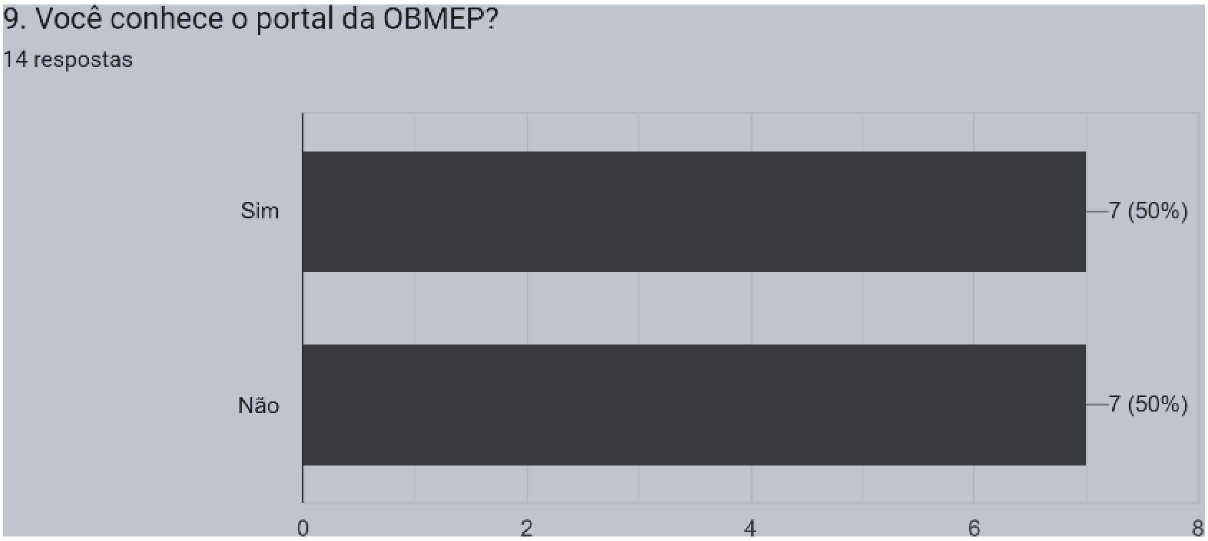
Figura 4



Fonte: Do autor

Abordamos também quanto ao uso da tecnologia no seu dia a dia, e percebemos que uma grande parcela dos estudantes da pesquisa, utilizam o celular, em um percentual de 85,7 correspondentes a 12 alunos dos 14 que responderam o questionário. Analisamos que o uso de celular é o mais presente no cotidiano dos alunos. Quanto a utilização do computador, dos 14, somente 6 estudantes fazem uso desse recurso, isto é, 42,9% do total, e, apenas 1 aluno faz uso de tablet, com um percentual de 7,1% da totalidade dos educandos da pesquisa. Observe que nessa pergunta existe a possibilidade de escolha de mais de uma opção de resposta.

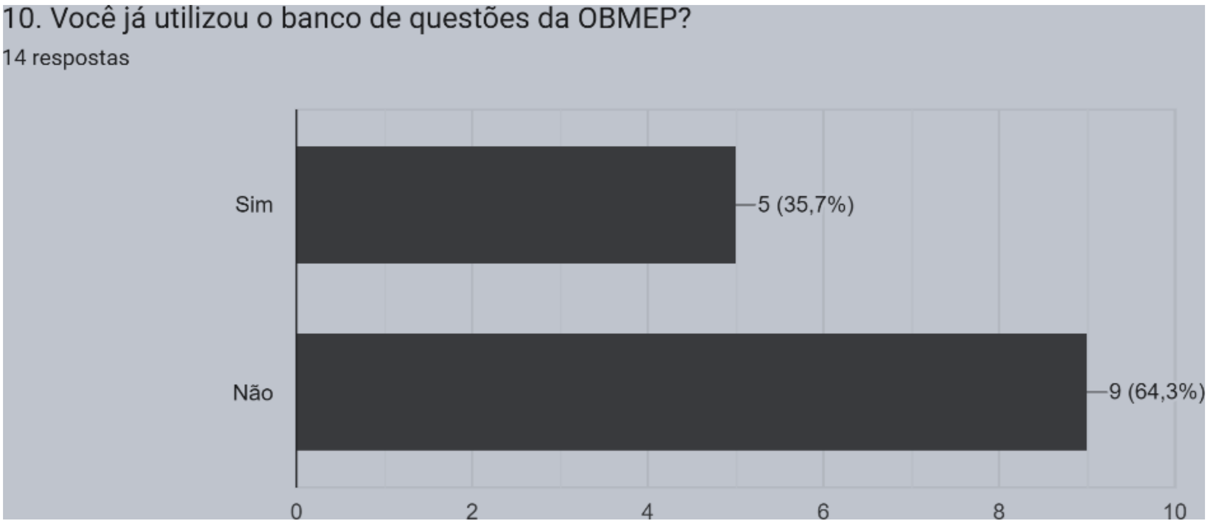
Figura 5



Fonte: Do autor

Sobre o conhecimento do portal da OBMEP, dos 14 alunos participantes da pesquisa, 7 alunos dizem conhecer o portal, correspondendo a 50% do total, a metade, e os outros 50% dos alunos, ou seja, 7 alunos não têm conhecimento da existência do portal. Com base nesses dados, percebemos que boa parte dos estudantes possuem conhecimento do portal, assim como, não utilizam o site para promover um melhor desempenho na OBMEP.

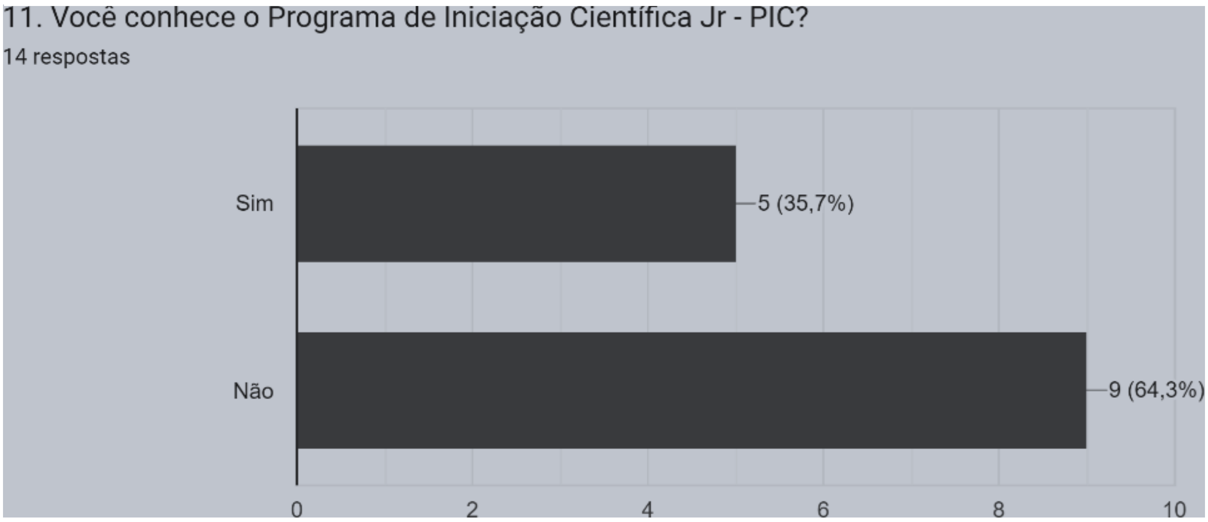
Figura 6



Fonte: Do autor

Outro dado importante é que apenas 5 dos 14 alunos que responderam o questionário, o correspondente a 35,7%, utilizam os bancos de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como preparação em seus estudos. Enquanto 64,3% desse total de 100%, no quantitativo de 9 alunos participantes da enquete, não fazem uso das questões do banco, para seus estudos. Essa informação nos leva a compreender que um certo percentual de 64,3% dos educandos dessa lista em questão, não seguem possivelmente os estudos em questões nos modelos das olimpíadas, isto é, o que pode gerar uma não sistematização nos moldes da prova, o que pode tá reproduzindo um baixo desempenho nos resultados anteriores da OBMEP.

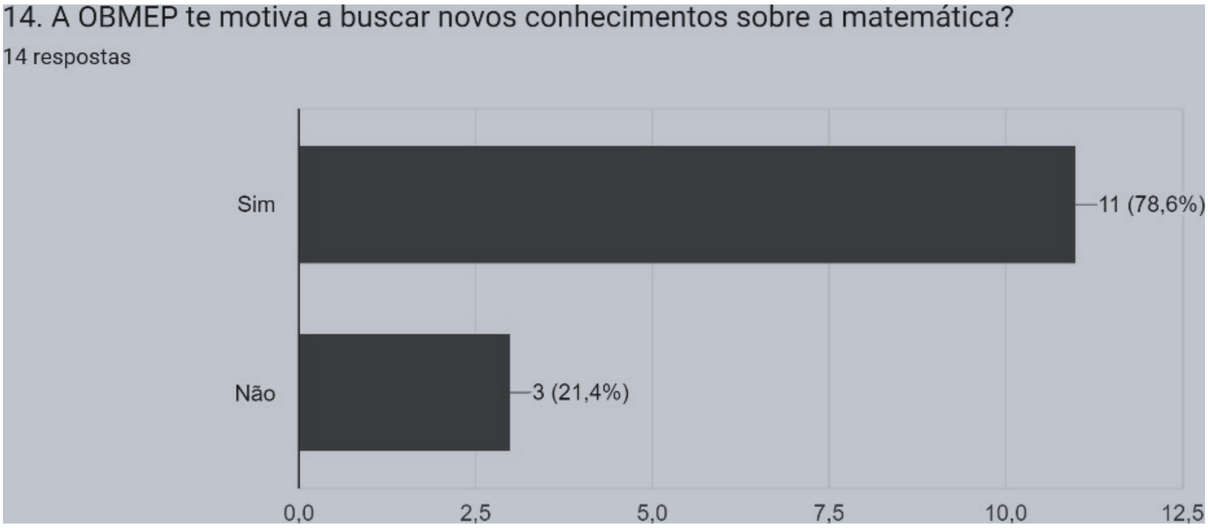
Figura 7



Fonte: Do autor

Quando os alunos foram perguntados sobre o conhecimento do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), dos 14 alunos na pesquisa, 5 (35,7%) responderam que têm conhecimento do PIC, 9 (64,3%) afirmaram que não sabem sobre o programa. Vale referenciar que o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) é um programa que propicia ao aluno premiado da OBMEP, entrar em contato com interessantes questões no ramo da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico.

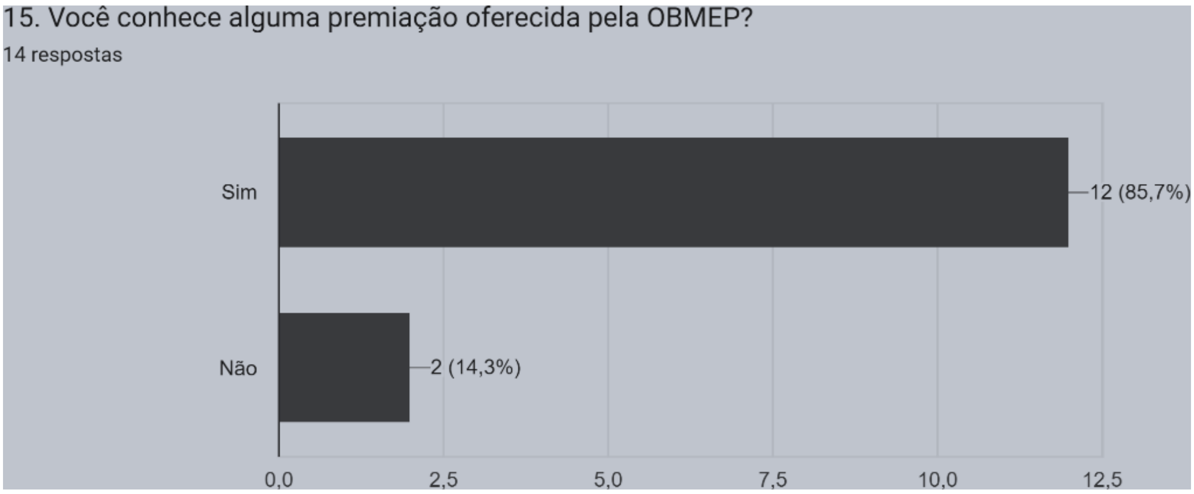
Figura 8



Fonte: Do autor

Dos 14 alunos que responderam o questionário, 11 deles (78,6%) afirmaram que a OBMEP os motiva na busca de novos conhecimentos sobre a Matemática, enquanto somente 3 alunos (21,4%) disseram que o projeto nacional não os motiva, causa interesse por novos campos de conhecimentos na Matemática.

Figura 9

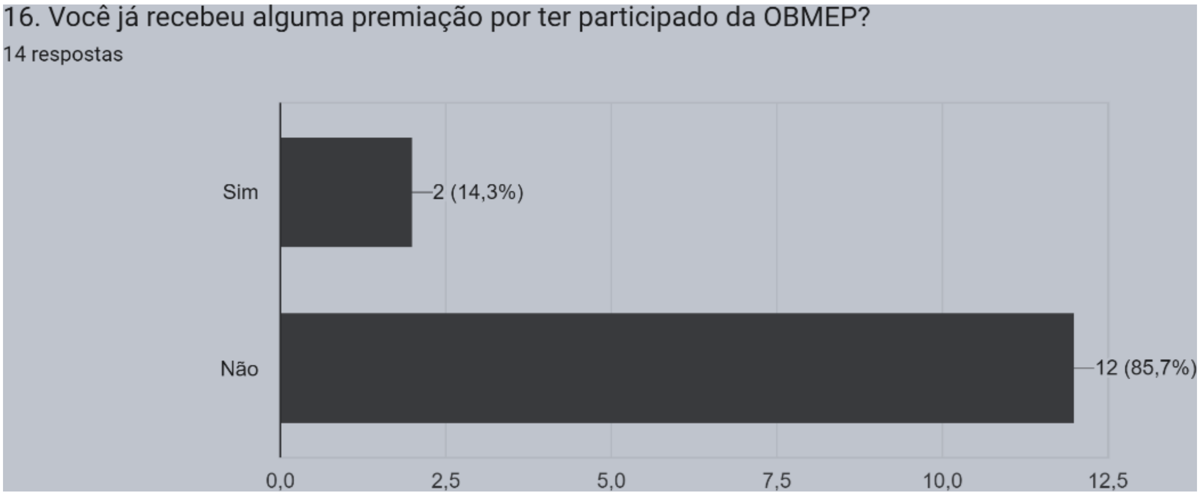


Fonte: Do autor

Quantos as premiações oferecidas pela OBMEP, quando perguntados sobre o conhecimento de algumas delas, uma grande parcela dos 14 alunos da enquete, em um total de 12 alunos (85,7%), respondera saber das premiações oferecidas pela

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Desse total dos 14 alunos, apenas 14,3%, isto é, 2 alunos dizem não saber das premiações oferecidas pelo projeto nacional, a OBMEP.

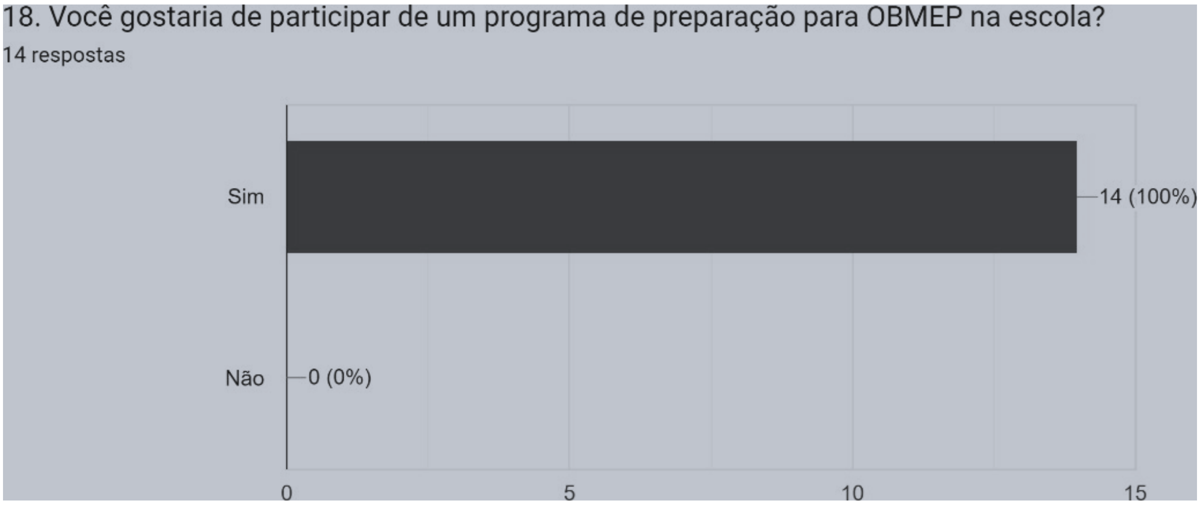
Figura 10



Fonte: Do autor

Os estudantes foram perguntados se já receberam alguma premiação nas participações anteriores da OBMEP, dos 14 envolvidos na pesquisa, já tivemos 2 alunos (14,3%) premiados nas edições passadas, e a grande maioria dos pesquisados, no quantitativo de 12 alunos (85,7%), dos 14, nunca receberam qualquer premiação nas edições passadas da OBMEP. Podemos perceber com essa informação o nível da prova em relação aos conhecimentos adquirido pelos educandos em seus estudos na preparação, e ainda, a cultura matemática ainda não alcançada pelos estudantes nos seus vários níveis de conhecimento.

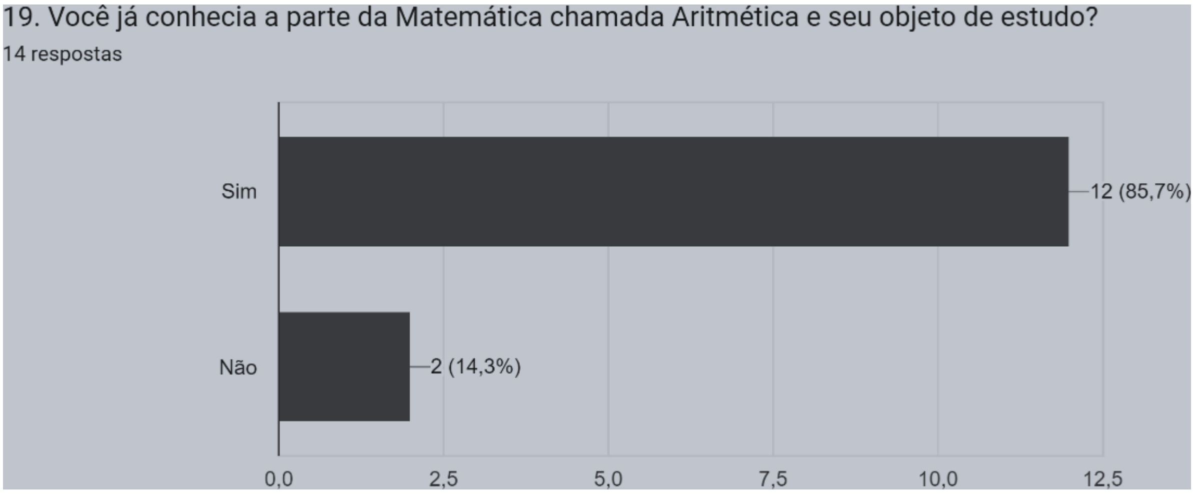
Figura 11



Fonte: Do autor

Quando perguntados sobre o interesse de participação em um programa que vise a preparação para as futuras provas da OBMEP na escola, verificamos que 100% dos estudantes (14 alunos da pesquisa) gostariam de se envolver com um programa de preparação e treinamento em sua instituição de ensino. A importância dessa informação nos revela as aspirações dos estudantes pelo fortalecimento, aprimoramento, desenvolvimento e aprendizado do que foi estudado e do ainda precisa ser ampliado e conhecido para enfrentamento nas edições futuras da OBMEP.

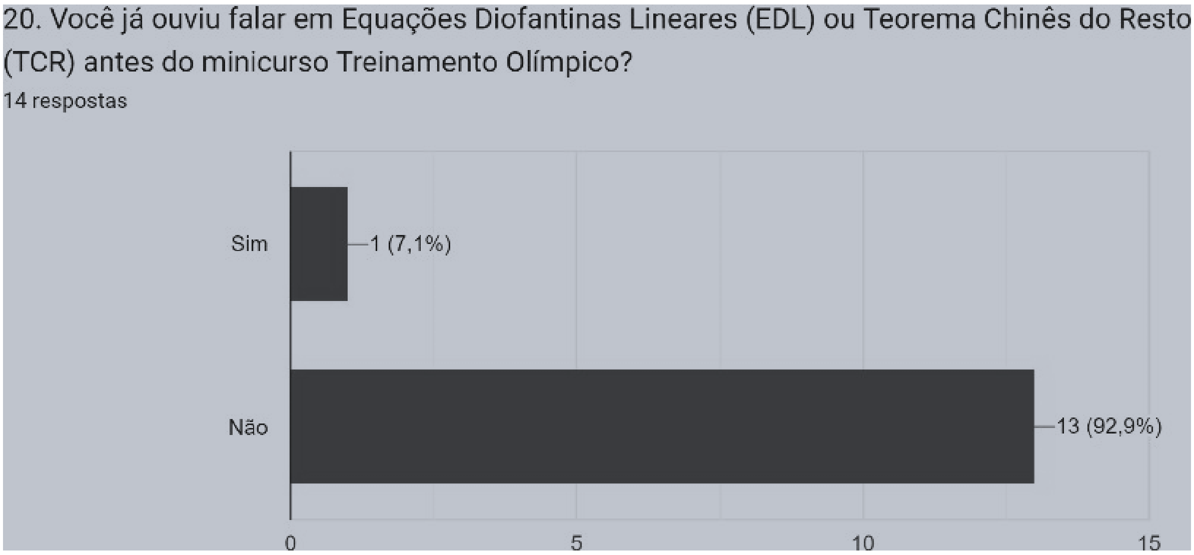
Figura 12



Fonte: Do autor

Dos 14 alunos na pesquisa, 12 (85,7%) responderam a parte da Matemática chamada Aritmética, assim como seu objeto de estudo, já é algo conhecido deles, enquanto 2 alunos (14,3%) expressaram não conhecer ou saber sobre a Aritmética e o seu objeto de estudo. O que podemos interpretar que somente uma pequena parcela dos pesquisados, não sabendo o que é a Aritmética, também não sabem os conteúdos escolares listados, o seu objeto de estudo nesse ramo da Matemática.

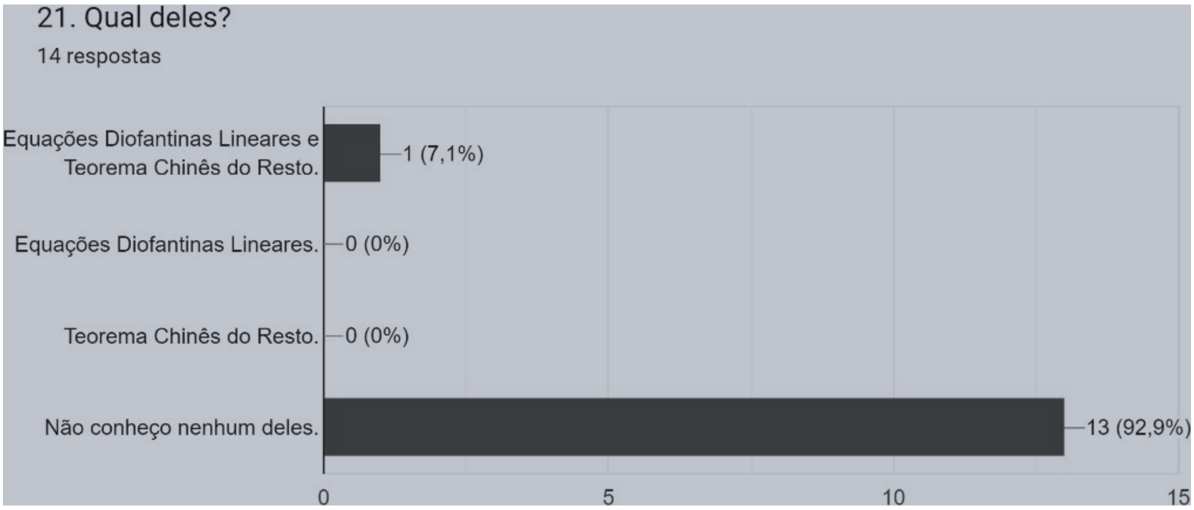
Figura 13



Fonte: Do autor

Os alunos foram questionados sobre já terem ouvidos falar em Equações Diofantinas Lineares (EDL) ou Teorema Chinês do Resto (TCR) antes do minicurso Treinamento Olímpico, e, somente 1 aluno (7,1%), dos 14 alunos da enquete, ouviu falar de EDL ou TRC. A maioria dos alunos nunca ouviram falar das Equações Diofantinas Lineares ou do Teorema Chinês do Resto antes do treinamento, correspondendo a um total de 13 alunos (92,9%) do total geral.

Figura 14 – EDL ou TCR?

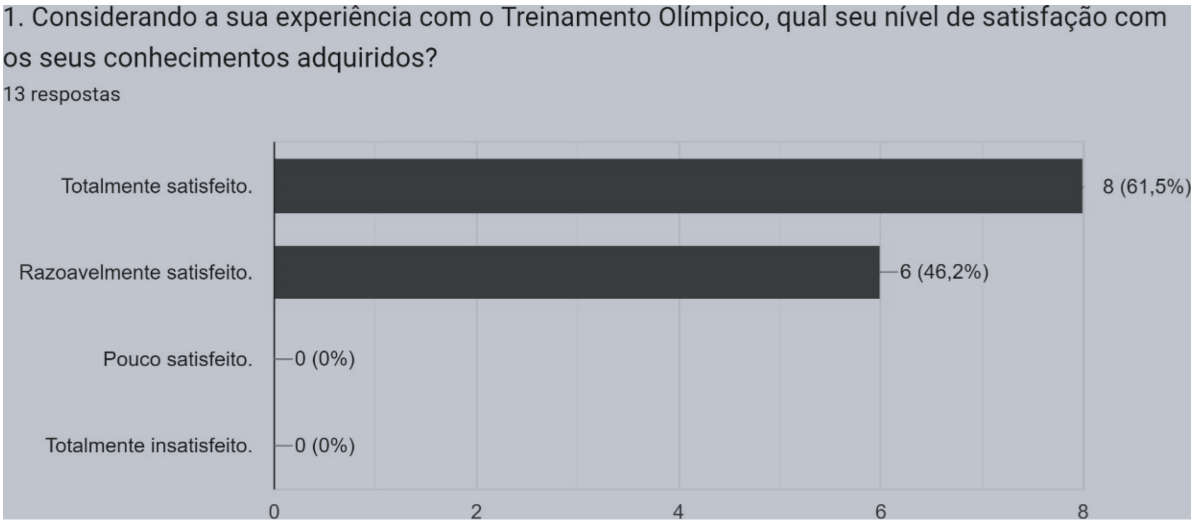


Fonte: Do autor

Verificamos ainda qual dos conteúdos mencionados no gráfico anterior foram vistos por eles. O único aluno (7,1%) que ouviu falar sobre EDL ou TCR, teve a sua experiência com os dois conteúdos, visto que os demais alunos, 13 estudantes (92,9%), não tiveram contato, logo, não ouviram falar das Equações Diofantinas Lineares (EDL) ou Teorema Chinês do Resto (TCR) antes do minicurso Treinamento Olímpico.

4.2 Análise do questionário aplicado pós – minicurso.

Figura 15



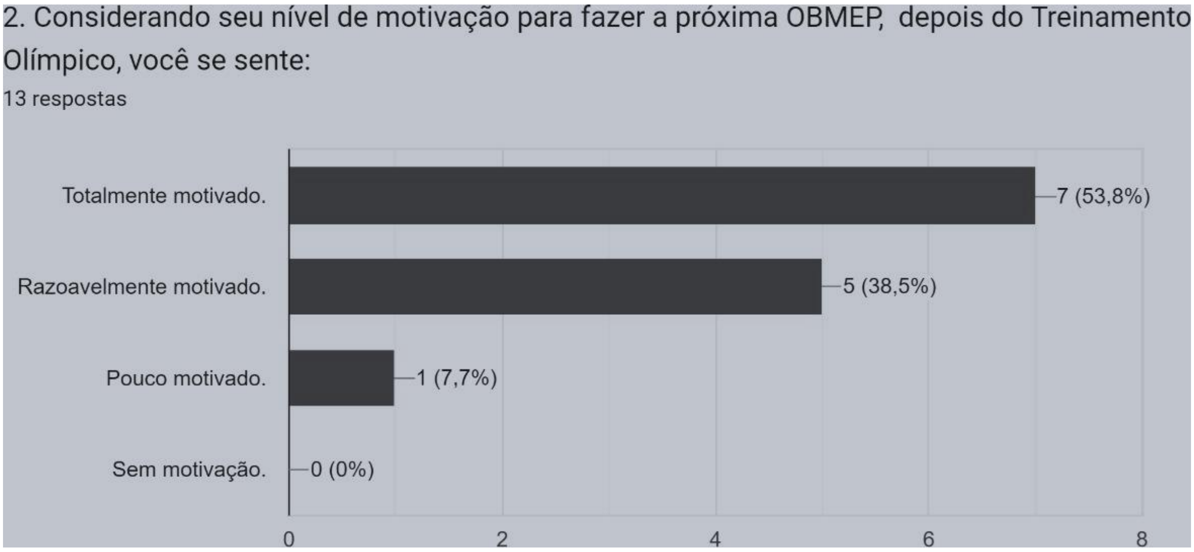
Fonte: Do autor

A maioria dos participantes (8 de 14) respondeu "totalmente satisfeito", o que representa uma quantidade significativa dos participantes. Seis participantes responderam "razoavelmente satisfeitos", o que sugere que embora não tenham expressado completa satisfação, ainda encontraram valor no Treinamento Olímpico. A predominância de respostas de "totalmente satisfeito" indica que, em geral, o Treinamento Olímpico foi bem recebido pelos participantes e o fato de alguns participantes terem respondido com "razoavelmente satisfeito" pode indicar áreas que podem ser melhoradas ou aspectos que não atenderam plenamente às expectativas deles.

É importante considerar que a resposta dos participantes "razoavelmente satisfeitos" para identificar áreas de aprimoramento e garantir que futuras melhorias no curso atendam às necessidades e expectativas de todos os participantes.

Em resumo, os resultados sugerem um nível geralmente alto de satisfação com o Minicurso Treinamento Olímpico, com algumas oportunidades de melhorias com base nas respostas dos participantes.

Figura 16



Fonte: Do autor

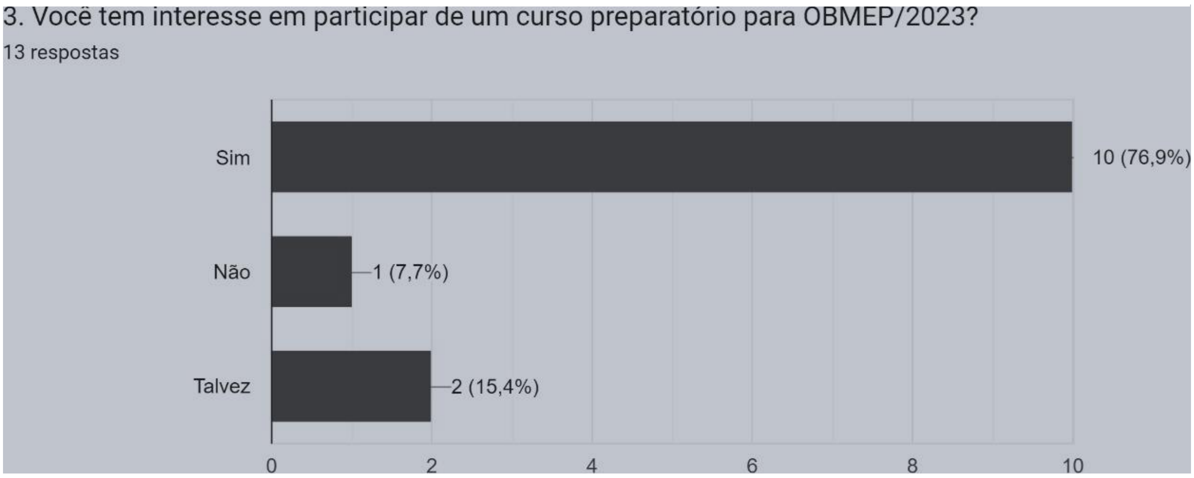
A maioria dos respondentes (7 de 13) indicou estar "Totalmente motivada" para a próxima OBMEP. Isso é um sinal positivo e sugere que o Minicurso Treinamento Olímpico teve um impacto positivo em sua motivação.

É provável que o conteúdo e as atividades do minicurso tenham inspirado os participantes e os preparado adequadamente para a próxima OBMEP, contribuindo assim para seu alto nível de motivação. Embora a maioria dos respondentes esteja altamente motivada, ainda há uma quantidade significativa (5 de 13) que se sente apenas "razoavelmente motivada". Isso sugere que pode haver áreas no minicurso ou na comunicação pós-minicurso que precisam ser abordadas para aumentar a motivação desses participantes.

Embora apenas um participante tenha indicado estar "pouco motivado", é importante prestar atenção a essa informação e considerar maneiras de aumentar a motivação desses indivíduos, talvez oferecendo suporte adicional ou recursos específicos.

Em resumo, os resultados indicam um alto nível de motivação entre os participantes do Minicurso Treinamento Olímpico para a próxima OBMEP, mas também destacam a importância de identificar e abordar as necessidades dos participantes que podem estar menos motivados. Isso pode ajudar a garantir que todos os participantes estejam totalmente preparados e engajados para o desafio da OBMEP.

Figura 17



Fonte: Do autor 1

A maioria dos alunos (10 de 13) expressou um interesse claro em participar de um curso preparatório para a próxima OBMEP, o que é um sinal positivo e demonstra um forte desejo de se preparar e competir. Duas respostas indicaram um nível de incerteza, expressando um interesse condicional ("talvez"). Isso pode significar que esses alunos estão interessados, mas têm preocupações ou obrigações que precisam considerar antes de confirmar sua participação.

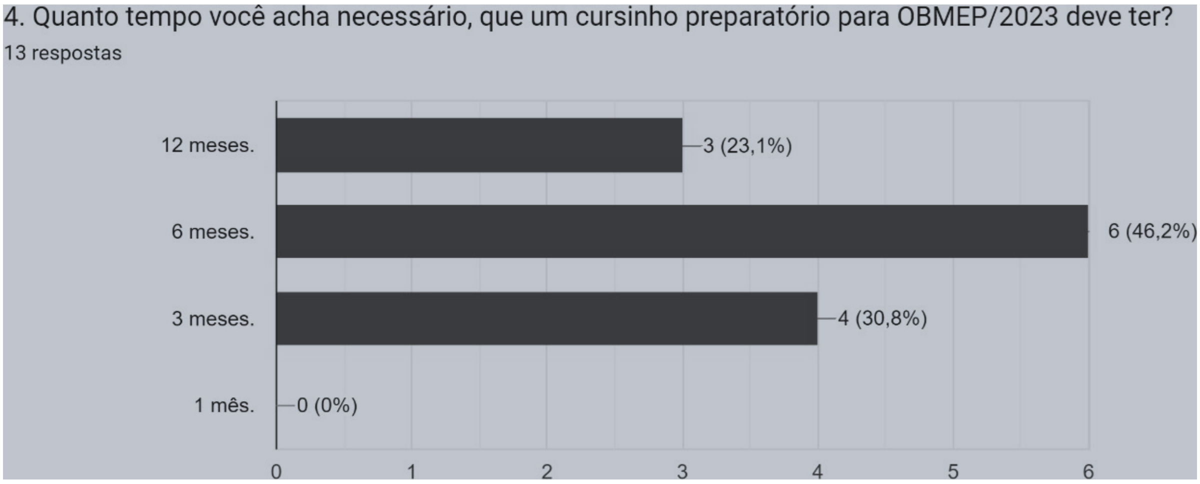
Uma resposta foi negativa, indicando que um aluno não tem interesse em participar do curso preparatório. É importante entender os motivos por trás dessa resposta e se há oportunidades para abordar quaisquer preocupações ou interesses alternativos que o aluno possa ter.

O grande número de respostas positivas sugerem uma demanda considerável por um curso preparatório. Isso pode ajudar na organização e planejamento do curso, bem como na seleção de tópicos e abordagens de ensino que atendam às necessidades dos alunos.

É importante considerar como envolver os alunos que responderam "talvez" ou "não" de maneira a incentivar sua participação e garantir que tenham acesso às mesmas oportunidades de preparação que os outros alunos.

Em resumo, os resultados indicam um interesse expressivo por parte dos alunos em participar de um curso preparatório para a OBMEP, embora haja algumas variações nas respostas que exigem atenção e consideração ao planejar e implementar o curso.

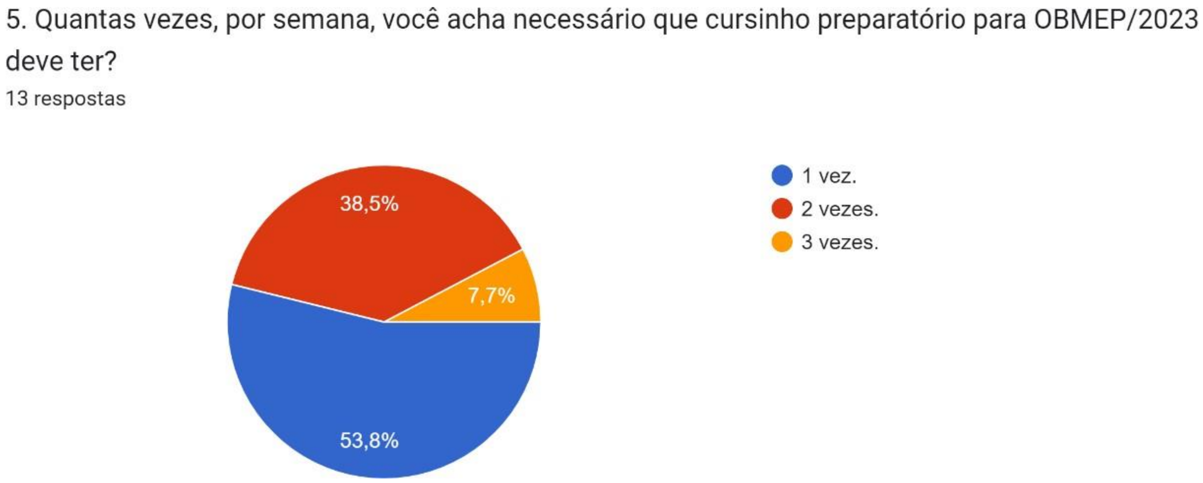
Figura 18



Fonte: Do autor

A maioria dos estudantes (46%) acredita que a duração ideal para um curso preparatório é de 6 meses. Ninguém optou pela opção de 1 mês. Isso sugere que a maioria deles acredita que um curso preparatório para OBMEP requer um compromisso de tempo significativo para ser eficaz.

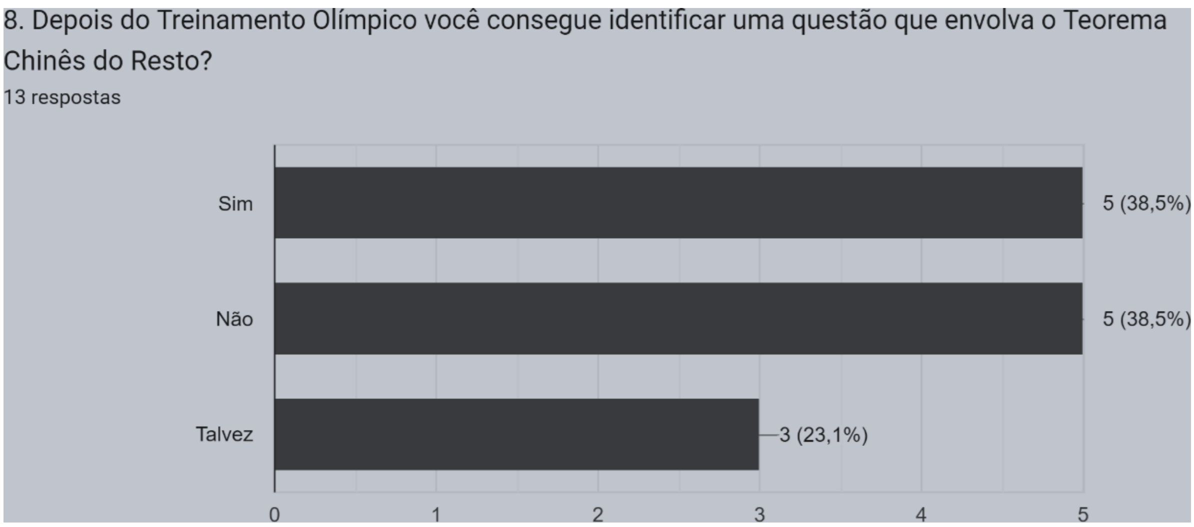
Figura 19 - Quantidade de aulas para um curso preparatório para OBMEP.



Fonte: Do autor

Os dados sugerem que a maioria dos estudantes considera 1 aula semanal como a frequência ideal para um curso preparatório para o OBMP/2023. No entanto, é importante ressaltar que essa é apenas uma percepção inicial e que outros fatores podem influenciar a escolha individual.

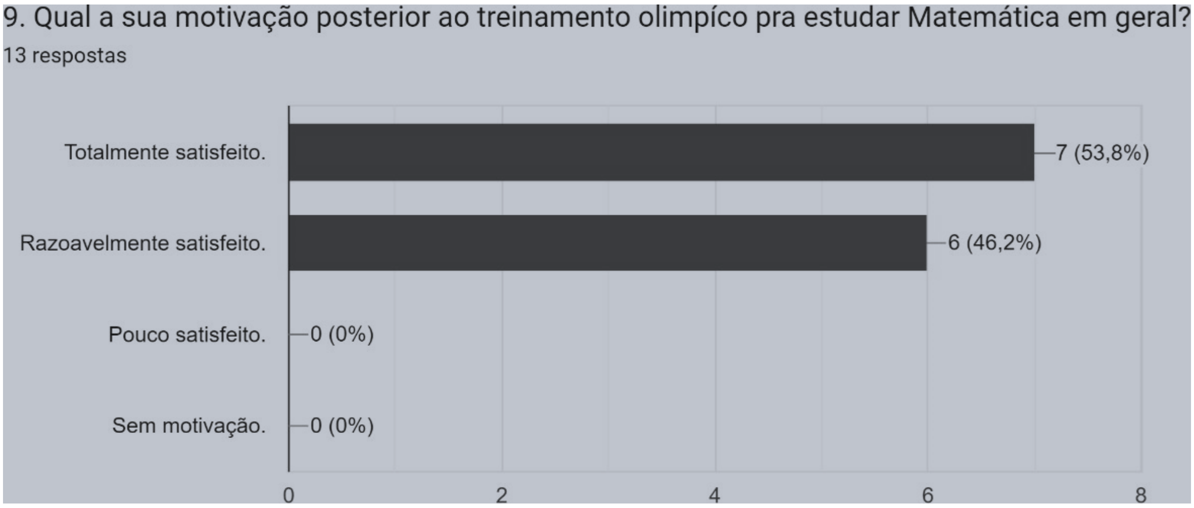
Figura 20 – Questionamento sobre a capacidade identificar questões que o TCR garante solução.



Fonte: Do autor

Os resultados da pesquisa indicam que o treinamento olímpico teve um impacto positivo na capacidade dos participantes de identificar questões que envolvem o TCR, mas ainda há espaço para melhoria. A divisão equilibrada das respostas sugere que o tema exige um aprofundamento maior para ser completamente dominado.

Figura 21 – Questionamento sobre a motivação provocada pelo minicurso.



Fonte: Do autor

Os resultados da pergunta indicam que o treinamento olímpico foi altamente eficaz em aumentar a motivação dos participantes para estudar matemática. Esse é um resultado positivo, pois a motivação é um fator fundamental para o sucesso em qualquer área de estudo.

4.3 Conclusões avaliativa sobre minicurso Treinamento Olímpico

O minicurso “Treinamento Olímpico”, realizado na Escola AMGS , abordou tópicos essenciais como Aritmética Básica e Aritmética Modular e o famigerado , entre os estudantes de matemática, Teorema Chinês dos Restos.

Percebe-se, na análise dos gráficos que 76,9%, dos estudantes que responderam o segundo questionário, têm interesse em participar das provas futuras da OBMEP e 7,7% deles não pretendem participar do certame nos anos seguintes. O que aponta para o sucesso da metodologia, mas aponta também para a necessidade de alguns ajustes. Um exemplo desses ajustes é que as turmas devem respeitar os níveis propostos pela OBMEP. Não recomendo montar uma turma mista, com dois ou mais níveis. Isso reflete não apenas a eficácia do método de ensino adotado, mas também o comprometimento e a dedicação dos estudantes.

O minicurso “Treinamento Olímpico”, realizado na Escola AMGS, abordou tópicos essenciais como Aritmética Básica e Aritmética Modular e o famigerado, entre os estudantes de matemática, Teorema Chinês dos Restos.

Percebe-se, na análise dos gráficos que 76,9%, dos estudantes que responderam o segundo questionário, têm interesse em participar das provas futuras da OBMEP e 7,7% deles não pretendem participar do certame nos anos seguintes. O que aponta para o sucesso da metodologia, mas aponta também para a necessidade de alguns ajustes. Um exemplo desses ajustes é que as turmas devem respeitar os níveis propostos pela OBMEP. Não recomendo montar uma turma mista, com dois ou mais níveis. Isso reflete não apenas a eficácia do método de ensino adotado, mas também o comprometimento e a dedicação dos estudantes.

A tabela abaixo mostra o resultado das participações na OBMEP desde 2005 até o ano de 2023.

A Escola AMGS apresentou de 2005 a 2021, resultados modestos, com poucas menções honrosas e nenhuma medalha de ouro, prata ou bronze até 2019.

No entanto, foi após 2022, após-curso, que se observou uma transformação significativa no desempenho dos alunos da escola. Os resultados passaram a ser mais consistentes e expressivos, com um aumento substancial no número de medalhas, especialmente de bronze, além de um número maior de menções honrosas. Em 2023, as conquistas de medalhas de prata e ouro são da competição estadual.

Até então a escola ainda não implantou um minicurso preparatório para a olimpíada. Entretanto no ano de 2023 houve uma maior divulgação e um olhar especial da direção no sentido de incentivar e divulgar a olimpíada em todas as etapas de ensino da escola. Nem todos os estudantes que participaram do minicurso foram premiados, e a escola teve estudantes premidos que não participaram do minicurso.

Tanto o minicurso quanto a simples campanha de divulgação causaram um efeito positivo nos resultados obtidos pelos estudantes da escola AMGS, deixando claro que a manutenção e o aprimoramento das ações são essenciais para garantir a continuidade dos resultados positivos obtidos.

A tabela 6 mostra o desempenho geral da escola AMGS em suas participações na OBMEP desde sua primeira participação em 2005 até o ano de 2023.

Tabela 6 – Desempenho Geral da Escola AMGS (2005 – 2023)

Ano	Edição OBMEP	Nível	Bronze	Prata	Ouro	Menções Honrosas	Período
2005	1ª	1	0	0	0	1	Pré-curso
2005	1ª	2	0	0	0	1	Pré-curso
2005	1ª	3	0	0	0	2	Pré-curso
2006	2ª		0	0	0	0	Pré-curso
2007	3ª		0	0	0	0	Pré-curso
2008	4ª		0	0	0	0	Pré-curso
2009	5ª	2	0	0	0	1	Pré-curso
2010	6ª		0	0	0	0	Pré-curso
2011	7ª		0	0	0	0	Pré-curso
2012	8ª		0	0	0	0	Pré-curso
2013	9ª		0	0	0	0	Pré-curso
2014	10ª		0	0	0	0	Pré-curso
2015	11ª	1	0	0	0	1	Pré-curso
2016	12ª		0	0	0	0	Pré-curso
2017	13ª		0	0	0	0	Pré-curso
2018	14ª		0	0	0	1	Pré-curso
2019	15ª	3	1	0	0	0	Pré-curso
2021	16ª		0	0	0	0	Pré-curso
2022	17ª	1	5	0	0	1	Pós-curso
2022	17ª	2	2	0	0	0	Pós-curso
2022	17ª	3	2	0	0	1	Pós-curso
2023	18ª	1	2	1	1	3	Pós-curso
2023	18ª	2	0	1	0	3	Pós-curso
2023	18ª	3	1	1	0	4	Pós-curso

Fonte: OBMEP em Números

Este minicurso fez parte de uma pesquisa de campo do TCC para a conclusão do curso de Mestrado Profissional - Profmat, coorientado pelo Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte. A implementação bem-sucedida do curso e os resultados positivos obtidos pelos alunos demonstram a relevância e o impacto desta pesquisa na prática educacional.

Em suma, o Treinamento Olímpico mostrou ser uma iniciativa extremamente positiva, preparando efetivamente os alunos para a OBMEP e fortalecendo suas habilidades matemáticas. Este é um exemplo brilhante do que pode ser alcançado quando professores dedicados e alunos entusiasmados se unem com um objetivo comum. Estamos ansiosos para ver o sucesso contínuo dos alunos nas futuras competições da OBMEP

5. CONSIDERAÇÕES

A análise do desempenho das escolas públicas amapaenses, assim como o desempenho da escola AMGS em suas participações na OBMEP formaram a justificativa para escolha do tema da pesquisa. A pesquisa buscou responder à questão: De que forma podemos incentivar a maior participação de um grupo de estudantes na Olimpíada de Matemática? A proposta foi de utilizar a Aritmética, especificamente, os problemas que o Teorema Chinês dos Restos garante solução.

O método escolhido foi um minicurso e ficou evidente que a Matemática se torna mais expressiva quando os estudantes conseguem relacioná-la com situações do mundo real, pois possibilita o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como raciocínio lógico e pensamento crítico. Além disso, eles aprendem a utilizar a Matemática como uma ferramenta prática para resolver questões do cotidiano.

A teoria de Aritmética básica, alicerçou a apresentação do tema do minicurso, (TCR), que se mostrou um excelente exemplo de como conceitos matemáticos podem ser aplicados de maneira prática para resolver problemas complicados, o que foi motivador para os alunos.

O Treinamento Olímpico mostrou que a implementação de um curso preparatório para a OBMEP na Escola Estadual Antônio Messias Gonçalves da Silva é uma estratégia promissora que ajudou a aumentar o interesse dos alunos pela matemática e melhorar suas habilidades de resolução de problemas em um curto período.

A análise dos resultados permite dizer que os objetivos específicos da pesquisa foram, em sua maioria, alcançados, mostrando uma experiência de aprendizado enriquecedora paraos estudante. Isso inclui não apenas a apresentação da teoria, mas também a prática através da resolução de problemas da OBMEP, o que aumentou a confiança dos alunos em suas próprias habilidades matemáticas.

Espera-se que os resultados possam inspirar outros educadores a adotar abordagens semelhantes e a buscar formas inovadoras de engajar os alunos no estudo da matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Mistério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BOMFIM, Luciane Sousa, **Subsunçores para Resolução de problemas de divisão de números inteiros: o caso do Teorema Chinês do Resto**. Profmat. Disponível em https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/.

COUTINHO, Severino Collier. **Criptografia**. Rio de Janeiro, IMPA, 2010. Disponível em https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/.

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética.** Rio de Janeiro, IMPA, 2010. Programa de Iniciação Científica, OBMEP.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** Rio de Janeiro, SBM, 2013. Coleção Profmat, 1ª edição.

GLÓRIA, Walace da Silva. **Teorema Chinês dos Restos: Ensino e Aplicações**. Profmat, 2019. Disponível em https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/.

FRANCISCHETT, Mafalda Nesi, Refletindo Sobre Pesquisa – Ação, **Revista Faz Ciência,** [S.L], v. 3, n. , p. 167, 2000. Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/fazciencia/article/view/7478. Acesso em: 27 out. 2023

LOPES, Renato Matos, FILHO, Moacelio Veranio Silva, ALVES, Neila Guimarães **Aprendizagem baseada em problemas : Fundamentos para a aplicação no ensino médio e na formação de professores.** – Rio de Janeiro : Publiki, 2019.

OBM: **Olimpíada Brasileira de Matemática**. www.obm.org.br. Acesso 10/10/22.

OBMEP**, em números**. http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm. Acesso 05/10/22.

OBMEP**, Notícia**. Disponível em http://www.obmep.org.br/noticias.DO?id=814. Acesso 20/10/22.

ORLANDO, de Araújo, MONSORES, Jomar Ferreira. **Educação e competição: a OBMEP como fator de aprimoramento do ensino de Matemática**.

PÓLYA, George, **A Arte de Resolver Problemas**. 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SENHORAS, Elói Martins. **Educação, Ensino Superior e a Pandemia da COVID-19.** Boa Vista: Editora da UFRR, 2020.

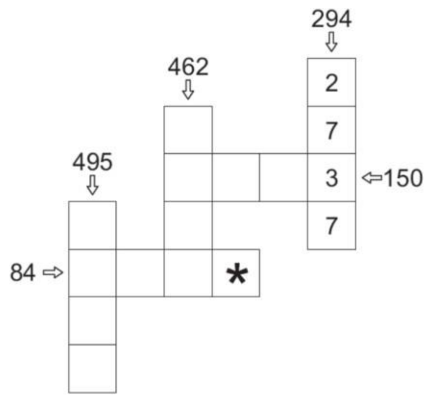
SOUZA, F. H. Teixeira. **Aritmética**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP (PIC). Disponível em https://www.youtube.com/@PICOBMEP. Acesso em 15/10/22.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-ação**. São Paulo, SP: Cortez: Autores Associados, 1986.

APÊNDICES

Apêndice A Prova de avaliação de aprendizagem

1- (OBMEP, 2019, p. 2) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com *?



2- (OBMEP, 2010, p. 24) No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegaros ônibus de duas linhas para ir á escola. Os ônibus de uma linha passam de 15 em 15 minutos e os da outra de 25 em 25 minutos, sendo que às 7h30m da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.

a) A que horas passarão juntos novamente?

b) Entre as 7h30min da manhã e a meia-noite, quais são os horários em que os ônibuspassam juntos neste ponto perto da casa de Quinzinho?

3- (OBMEP 2012 NÍVEL 3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou $R\$ \ 2{,}99$ para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

a) 2

b) 5

c) 10

d) 13

e) 23

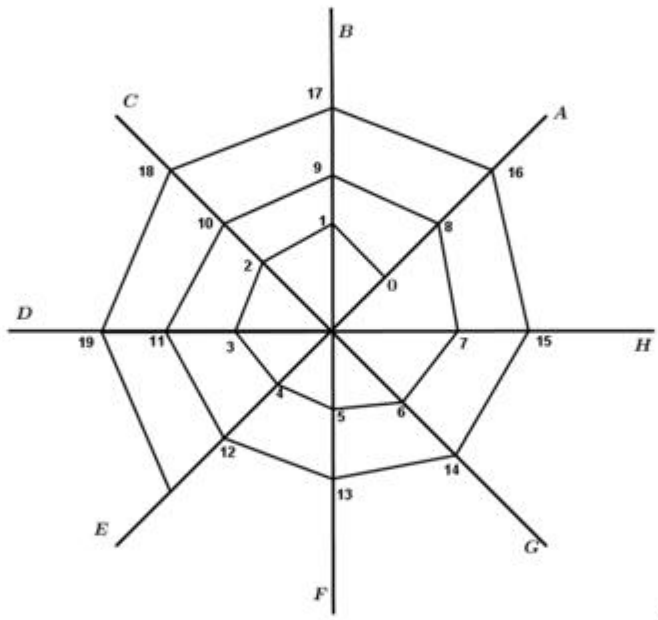
4- Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Existem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõem de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes quepodem comprar? Justifique.

b) E o número mínimo? Justifique.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõem para fazer a compra?Sugestão: organize tudo em uma tabela.

5- (OBMEP). Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H são



fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme a figura.

De cordo com a figura, em qual fio estará o número 2022?

6. Três satélites passarão sobre Macapá esta noite. O primeiro à 1 hora da madrugada, o segundo às 4 horas e o terceiro às 8 horas da manhã. Cada satélite tem um período diferente. O primeiro leva 13 horas para completar uma volta em torno

da Terra, o segundo 15 horas e o terceiro 19 horas.

a) Escreva o sistema de congruência que pode resolver o problema.

b) Encontre a solução geral para o sistema de congruência.

c) Determine quantas horas decorrerão, a partir da meia-noite, até que os três satélitespassem ao mesmo tempo sobre nosso estado.

Apêndice B Carta de pedido de implantação do minicurso

Prezado Diretor da Escola Estadual Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva, Capitão José Vilson Pereira da Gama,

Venho por meio desta carta apresentar uma proposta de grande relevância para onossa Escola. Propomos a criação de um curso preparatório com o objetivo de capacitar nossos estudantes para a participação na Olimpíada Brasileira de Matemática – OBMEP – e, ao mesmo tempo, aperfeiçoar seu desempenho na provade Matemática e suas Tecnologias do ENEM.

Acreditamos firmemente que a implementação desse curso trará benefícios significativos para nossos estudantes. Além de aprimorar suas habilidades matemáticas, o curso também os incentivará a buscar a excelência acadêmica. A participação na Olimpíada Brasileira de Matemática é uma oportunidade ímpar para que nossos estudantes se destaquem e conquistem reconhecimento em âmbito nacional. Ademais, um bom desempenho na prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM pode abrir portas para diversas oportunidades acadêmicas no futuro.

Vale ressaltar que nossa escola conta com um corpo docente de Matemática excepcional, frequentemente reconhecido pelo programa de premiação da OBMEP. Sob seu comando, a Escola tem alcançado destaque nacional em competições esportivas e obtido resultados cada vez melhores nas provas do ENEM a cada ano. Estou confiante de que, com o apoio adequado e a orientação correta, nossos estudantes serão capazes de atingir grandes resultados.

Portanto, peço encarecidamente que considere esta proposta e nos conceda a permissão para avançar com a criação deste curso preparatório. Agradeço antecipadamente pela sua atenção e aguardo ansiosamente a sua resposta.

Atenciosamente,
Francisco Alberto Camargo Lacerda, professor de Matemática da Escola Antônio Messias Gonçalves da Silva.

Apêndice C Autorização para uso da pesquisa.

Eu, José Vilson Pereira da Gama, Capitão da Policia Militar do Amapá, ocupante do cargo de diretor da Escola Estadual Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva, autorizo a aplicação de atividades como parte da pesquisa de mestrado com uma proposta de auxiliar na construção de resultados mais significativos na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, com o título ***" AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES E O TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS COMO FERRAMENTAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO"***, sob a orientação dos professores Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte e Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

Os estudantes participarão de um minicurso denominado ***"TREINAMENTO OLÍMPICO: EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES E O TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS"*** que será realizado na escola, com aulas presenciais, aos sábados, nos dias 12/11, 19/11, 26/11 e 03/12/2022 das 13h:30 as 17h. Nesse período, em suas atividades para casa, os(as) estudantes, participantes do minicurso, terão acompanhamento via internet pelas plataformas Google Meet e WhatsApp. Deixando claro que todas as atividades presenciais serão acompanhadas pelo corpo pedagógico da escola.

Declaro estar ciente que esses dados serão utilizados na dissertação de mestrado dos professores de Matemática Francisco Alberto Camargo Lacerda da Escola Estadual Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva e Jonas Rodrigues dos Anjos da Escola Estadual Everaldo Vasconcelos Júnior. Autorizo a utilização das informações coletadas e imagens apenas para fins acadêmico-científico. Estou ciente que em qualquer etapa do minicurso terei acesso ao pesquisador responsável professor Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte pelo e-mail ítalobruno.mat@gmail.com ou pelo celular (91) 99119-8949. Além disso, não terei nenhum custo nem receberei nenhuma vantagem financeira. Caso necessário, a qualquer momento poderei revogar este termo de consentimento livre e esclarecido se comprovadas atitudes que causem prejuízo à instituição de ensino ou que comprometam o sigilo de dados dos participantes desta pesquisa.

Assim, tendo sido informado dos objetivos da pesquisa, de maneira clara e detalhada, tendo esclarecido minhas dúvidas, autorizo a utilização e a divulgação dos dados com a finalidade exposta.

Macapá- AP, 01 de novembro de 2022.

X José Vilson Pereira da Gama

CAP José Vilson Pereira da Gama
Dir da E. E. Prof. Antônio Messias G. da Silva

José Vilson P. da Gama
Diretor Adjunto
E. E. Prof. Antônio Messias G. da Silva
Decreto nº 0296/2020

Apêndice D Autorização de uso de imagem

Senhores(as) pais ou responsáveis,

Os professores de Matemática Francisco Alberto Camargo Lacerda da Escola Estadual Professor Antônio Messias Gonçalves da Silva e Jonas Rodrigues dos Anjos da Escola Estadual Everaldo Vasconcelos Júnior, estão desenvolvendo uma pesquisa de mestrado com uma proposta de auxiliar na construção de resultados mais significativos na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá — UNIFAP, com o título ***"O TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS COMO FERRAMENTAS DE MOTIVAÇÃO PARA UM GRUPO DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL II E MÉDIO"***, sob a orientação do Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte e Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

Como parte da pesquisa, os estudantes participarão de um minicurso denominado ***"TREINAMENTO OLÍMPICO: O TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS"*** que será realizado na escola, com aulas presenciais, aos sábados, nos dias 12/11, 19/11, 26/11 e 03/12/2022 das 13h:30 as 17h. Nesse período, em suas atividades para casa, os(as) estudantes, participantes do minicurso, terão acompanhamento via internet pelas plataformas Google Meet e WhatsApp. Deixando claro que todas as atividades presenciais serão acompanhadas pelo corpo pedagógico da escola.

Vale salientar a importância da participação dos(as) estudantes, pois estes(as) terão a oportunidade de entrar em contato com assuntos e técnicas de resolução de problemas que são raramente abordados no ensino regular.

Eu,___________________de RG ___________________________ responsável pelo(a) estudante____autorizo que as imagens e atividades que incluam meu representado sejam feitas e utilizadas apenas para fins pedagógicos e de pesquisa. Declaro estar ciente de que a participação do(a) estudante supracitado(a), no minicurso, não representa riscos para ele(a), pelo contrário, a experiência pretende contribuir para sua formação intelectual. Estou ciente que o(a) representado não receberá nenhuma vantagem financeira.

Macapá-AP,___________de novembro de 2022.

X____

Apêndice E Planos de Aulas

Aula 01

PLANO DE AULA – AULA 01

<table>
<tr><td colspan="4">1. IDENTIFICAÇÃO</td></tr>
<tr><td>Professor: Lacerda e Jonas</td><td>Disciplina: Matemática</td><td>Tema: Aritmética Números Naturais e Números Inteiros</td><td>Data/Hora:12 de nov. de 2022 / 13:30 – 17h.</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. PLANO</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVOS</td><td>CONTEÚDOS</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">GERAL

• Revisar os conceitos Básicos de Aritmética.

ESPECÍFICOS

• Revisar a representação de ordem dos Naturais.
• Consolidar o conceito de números primos.
• Consolidar o conceito de potenciação.
• Estender o conjunto dos Naturais para os números Inteiros.
• Revisar os conceitos de MMC e MDC.
• Aplicar o algoritmo da divisão euclidiana para o cálculo do MDC de dois números.</td><td>1. Os Números Naturais
• Propriedades dos Naturais
• Números primos
• O crivo de Eratóstenes
• Teorema Fundamental da Aritmética
• Critérios de divisibilidade
• Decomposição em fatores primos
2. Os números inteiros
Propriedades dos inteiros
• Múltiplos inteiros de um número
• Mínimo múltiplo</td><td>• Projetor multimídia;
• Apostila dos conteúdos.
• Notebook com software de apresentação e de exibição de slides;
• Pincel para quadro branco;
• Apagador;
• Quadro branco.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3">• Aplicar o algoritmo do MDC de Euclides para calcular o MDC de dois números.</td>
<td>comum (M.M.C.)
• Máximo divisor comum (M.D.C.)
• Algoritmo da divisão
• Algoritmo do mdc de Euclides</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">HABILIDADES</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Números Naturais: (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
• Números Inteiros:EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">3. PROCEDIMENTOS</td>
</tr>
</table>

INTRODUÇÃO	DESENVOLVIMENTO	CONCLUSÃO
• Inicialmente, haverá uma conversa sobre os assuntos a serem trabalhados e as suas importância para a OBMEP.	**1. Os Números Na turais** 1.1 Propriedades do s Naturais 1.2 Introdução aos n úmeros naturais. 1.3 Discussão sobre propriedades dos Naturais 1.4 Números Primos 1.5 Definição e ident ificação dos números p rimos. 1.6 Importância dos números primos na ma temática. 1.7 O Crivo de Erató stenes 1.8 Explicação do m étodo. 1.9 Aplicação prátic a para encontrar núme ros primos. 1.10 Teorema Funda mental da Aritmética 1.11 Conceito e impo rtância. 1.12 Demonstração e exemplos práticos. Cri térios de Divisibilidade 1.13 Regras práticas para divisibilidade por	• Finalizando a aula, será indicado os exercícios que os estudantes deverão resolver durante a semana. • A aula terminará com a apresentação do Portal da OBMEP onde todo o assunto poderá ser revisado através de vídeo aulas no link https://www.youtube.com/@PICOBMEP

	2, 3, 5, 9, 10, 100 e 1000. 1.14 Exemplos e exercícios para fixação.Decomposição em Fatores Primos 1.15 Método de decomposição. 1.16 Exemplos e exercícios práticos. **2. Os Números Inteiros** 2.1 Propriedades dos Inteiros 2.2 Comparação com os números naturais. 2.3 Múltiplos Inteiros de um Número 2.4 Definição de múltiplos. 2.5 Como encontrar múltiplos de um número inteiro. 2.6 Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) 2.7 Definição e importância. 2.8 Método para encontrar o M.M.C. com exemplos. 2.9 Máximo Divisor	

<table>
<tr><td></td><td>Comum (M.D.C.)
2.10 Definição e impo
rtância.
2.11 Método para enc
ontrar o M.D.C. com e
xemplos.
2.12 Algoritmo da Di
visão
2.13 Explicação do al
goritmo da divisão.
2.14 Exemplos e práti
ca.
2.15 Algoritmo do MD
C de Euclides
Explicação do método
de Euclides.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">4. AVALIAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="3">A avaliação dos alunos será realizada de forma continuada, levando em consideração a participação, envolvimento e interesse dos alunos nas discussões originadas e na solução das questões propostas ao longo da aula.
Também será proposta a resolução de uma lista de exercícios para casa para ser resolvida até a aula do dia 19/11/2022.</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. INDICAÇÃO BIBLIOGRÁFICA</td></tr>
<tr><td colspan="3">HEFEZ, Abramo. Iniciação à Aritmética. Rio de Janeiro, IMPA, 2010. Programa de Iniciação Científica, OBMEP.</td></tr>
</table>

Aula 02

PLANO DE AULA – AULA 02

<table>
<tr><td colspan="4">1. IDENTIFICAÇÃO</td></tr>
<tr><td>Professor: Lacerda e Jonas</td><td>Disciplina: Matemática</td><td>Tema: Introdução às Congruências e Propriedades da Congruência Modular</td><td>Data/Hora:19 de nov. de 2022 / 13:30 – 17h</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. PLANO</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVOS</td><td>CONTEÚDOS</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">GERAL</td><td rowspan="4">1. Aritmética dos restos.
1.1 Congruência
1.2 Propriedades de congruência.</td><td rowspan="4">• Projetor multimídia;
• Apostila dos conteúdos.
• Notebook com software de apresentação e de exibição de slides;
• Pincel para quadro branco;
• Apagador;
• Quadro branco.</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Introduzir os conceitos de congruências e explorar as propriedades da congruência modular</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESPECÍFICOS</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">• Compreender o conceito de congruência:
• Definir congruência entre dois números inteiros módulo um número natural.
• Identificar números congruentes entre si para um</td></tr>
<tr><td colspan="2">HABILIDADES</td></tr>
</table>

dado módulo. • Representar a congruência utilizando a notação adequada. • Utilizar as propriedades da congruência para simplificar cálculos e resolver equações. • Realizar operações com classes de resíduos: • Definir classe de resíduo. • Realizar operações de adição, subtração e multiplicação entre classes de resíduos. • Resolver problemas envolvendo congruências: • Modelar problemas reais utilizando a linguagem da congruência.	• (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. • (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

3. PROCEDIMENTOS

INTRODUÇÃO	DESENVOLVIMENTO	CONCLUSÃO
• Inicialmente, haverá uma apresentação do conceito de congruência $a \equiv b\ (mod\ n)$ e exemplos básicos para ilustrar o conceito.	• Explicar as propriedades de congruência modular (Reflexiva, simétrica e transitiva). • Realizar exercícios práticos com os alunos para fixação do conteúdo.	• Finalizando a aula, será indicado os exercícios que os estudantes deverão resolver durante a semana. • A aula terminará com a apresentação do Portal da OBMEP onde todo o assunto poderá ser revisado através de

		vídeo aulas no link https://www.youtube.com/@PICOBMEP

4. AVALIAÇÃO
• Listar problemas de congruências para serem resolvidos individualmente. • Revisar as soluções em grupo e discutir as dificuldades encontradas. • Também será proposta a resolução de uma lista de exercícios para casa para ser resolvida até a aula do dia 26/11/2022.
5. INDICAÇÃO BIBLIOGRÁFICA
HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética.** Rio de Janeiro, IMPA, 2010. Programa de Iniciação Científica, OBMEP.

Aula 03

PLANO DE AULA – AULA 03

<table>
<tr><td colspan="4">1. IDENTIFICAÇÃO</td></tr>
<tr><td>Professores: Lacerda e Jonas</td><td>Disciplina: Matemática</td><td>Tema: Congruências em Somas, Produto, Cancelamentos e o Teorema Chinês dos Restos.</td><td>Data/Hora: 26 de nov. de 2022 / 13:30 – 17h</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. PLANO</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVOS</td><td>CONTEÚDOS</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">GERAL
• Explorar operações com congruências e introduzir o Teorema Chinês dos Restos

ESPECÍFICOS
• Definir congruência entre números inteiros e módulo de uma congruência.
• Realizar operações básicas com classes de resíduos.
• Enunciar o Teorema Chinês dos Restos de forma clara e concisa.
• Compreender as condições de existência e unicidade da solução de um sistema de congruências lineares.
• Aplicar o Teorema Chinês dos Restos na resolução de problemas.
• Modelar Problemas.</td><td>1. Congruência da soma.
2. Congruência do produto.
3. Cancelamento.
4. Inversos Modulares.
5. Teorema Chinês dos Restos.</td><td>• Projetor multimídia;
• Apostila dos conteúdos.
• Notebook com software de apresentação e de exibição de slides;
• Pincel para quadro branco;
• Apagador;
• Quadro branco.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">HABILIDADES
• (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
• (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. PROCEDIMENTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">INTRODUÇÃO</td><td>DESENVOLVIMENTO</td><td>CONCLUSÃO</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>• Inicialmente, haverá uma revisão dos conceitos básicos de congruência modular.
• Apresentação de uma situação problema para ser resolvida posteriormente.</td>
<td>• Explicar e exemplificar como somar e multiplicar congruências.
• Discutir o cancelamento de congruências e inversos modulares.
• Introduzir o Teorema Chinês dos Restos com exemplos práticos.</td>
<td>• Finalizando a aula, será indicado os exercícios que os estudantes deverão resolver durante a semana.
• A aula terminará com a apresentação do Portal da OBMEP onde todo o assunto poderá ser revisado através de vídeo aulas no link https://www.youtube.com/@PICOBMEP</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">4. AVALIAÇÃO</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">• A avaliação dos alunos será realizada de forma continuada, levando em consideração a participação, envolvimento e interesse dos alunos nas discussões originadas e na solução das questões propostas ao longo da aula.
• Também será proposta a resolução de uma lista de exercícios para casa para ser resolvida até a aula do dia 03/12/2022.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">3. INDICAÇÃO BIBLIOGRÁFICA</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">HEFEZ, Abramo. Iniciação à Aritmética. Rio de Janeiro, IMPA, 2010. Programa de Iniciação Científica, OBMEP.</td>
</tr>
</table>

Aula 04

PLANO DE AULA – AULA 04

<table>
<tr><td colspan="4">1. IDENTIFICAÇÃO</td></tr>
<tr><td>Professores: Lacerda e Jonas</td><td>Disciplina: Matemática</td><td>Tema: Avaliações do Treinamento Olímpico</td><td>Data/Hora:03 de dez. de 2022 / 13:30 – 17h</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. PLANO</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO GERAL</td><td>CONTEÚDOS</td><td>RECURSOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Avaliar o minicurso e os conhecimentos adquiridos pelos alunos.</td><td>• Aritmética dos restos: Congruências.
• Propriedades da Congruência Modular.
• Congruências e Somas Congruências e Produtos
• Cancelamento
• Inversos Modulares
• O Teorema Chinês dos Restos</td><td>Projetor multimídia. Apostila dos conteúdos. Notebook com software de apresentação e de exibição de slides. Pincel para quadro branco. Apagador; Quadro branco.</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVOS ESPECÍFICOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">• Revisar os conceitos abordados no Treinamento.
• Identificar e esclarecer dúvidas frequentes dos estudantes sobre a matéria.
• Facilitar a compreensão dos pontos teóricos mais complexos.
• Avaliar o entendimento dos estudantes sobre os tópicos revisados.
• Identificar áreas onde os estudantes ainda precisam de reforço.
• Incentivar a aplicação prática dos conceitos teóricos.
• Coletar opiniões dos estudantes sobre a eficácia do minicurso.
• Avaliar a satisfação dos alunos com o conteúdo e a didática do curso.
• Identificar oportunidades de melhoria para futuros minicursos.
• Reconhecer o progresso e as realizações dos alunos.
• Sintetizar os principais aprendizados do minicurso.
• Motivar os alunos a continuarem se dedicando ao estudo da matemática e a participarem da OBMEP.</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. PROCEDIMENTOS</td></tr>
</table>

INTRODUÇÃO	DESENVOLVIMENTO	CONCLUSÃO
• Inicialmente, haverá uma revisão sobre os assuntos a serem tratados na prova. • Esclarecimento de possíveis dúvidas dos estudantes sobre o assunto. • Falar da importância do questionário e que o link dele será disponibilizado no grupo do WhatsApp.	• Revisão Teórica e esclarecimentos (60 min) • Execução da Prova (120 min) • Questionário (30 min)	• Finalizando a aula, será feiro agradecimento e considerações finais • Disponibilizar o link do questionário.

5. AVALIAÇÃO
• PROVA • QUESTIONÁRIO